Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Revestimientos y Álgebras

Tesis de Licenciatura

Autor: Leandro Lombardi

Director: Gabriel Minian

para Lula

Agradecimientos

A Silvi, Ana, Miguel y a mis abuelos, porque por culpa suya soy así.

A Luciana porque con la dedicatoria no alcanza.

A J. L., Edu, Tincho, Lau, Nico, Vicky, Isa y Magui.

A los topologistas, Mike, Jony, Nico y especialmente a Mati.

A J. Sabia, C. Cabrelli y G. Minian por enseñarme casi toda la matemática que sé.

A M. Farinati, P. De Nápoli y G. Jerónimo por sus exámenes "como los de antes".

Al jurado por tomarse el trabajo de corregir esta tesis.

Y otro renglón más para Gabriel por ser como es.

Este trabajo se realizó con el apoyo económico de la Universidad de Buenos Aires y mis padres.

Índice

1. Preliminares Categóricos **3**
1.1. Categoría . . . 3
1.2. Funtor . . . 4
1.3. Transformación Natural . . . 6
1.4. Objeto inicial, final - Límites y Colímites . . . 7
1.5. Adjunción . . . 10
1.6. Lema de Yoneda . . . 11
1.7. Equivalencia de Categorías . . . 12

2. Revestimientos **14**
2.1. Revestimientos de Grupoides . . . 14
2.2. Grupoides punteados . . . 19
2.3. Acciones de grupoides . . . 20
2.4. Grafos Dirigidos . . . 24
2.5. Revestimientos de Categorías pequeñas . . . 29
2.6. Revestimientos de Categorías con Ceros . . . 33

3. Álgebras y k-Categorías **37**
3.1. k-álgebras . . . 37
3.2. Álgebras de Caminos . . . 44
3.3. k-Categorías . . . 46
3.4. Módulos sobre k-categorías . . . 47
3.5. Categorías con Ceros y Teoría de Representaciones . . . 56
3.6. Morfismos en una k-categoría . . . 62
3.6.1. Morfismos minimales y que casi se parten . . . 62
3.6.2. Morfismos irreducibles . . . 63
3.6.3. Sucesiones que casi se parten . . . 64

4. Revestimientos de k-categorías **67**
4.1. Diagramas Cleaving . . . 71

5. Revestimientos en $\mathcal{C}at_0$ y Teoría de Representaciones **73**

Introducción

El objetivo principal de esta tesis de licenciatura es el estudio de revestimientos en contextos algebraicos y algunas aplicaciones a la teoría de representaciones de álgebras.

En la primera parte del trabajo, comenzamos estudiando revestimientos de grupoides y su estrecha relación con los revestimientos clásicos de espacios topológicos. Investigamos también revestimientos categóricos y probamos una equivalencia entre los revestimientos de una categoría y los revestimientos de su grupoide fundamental. Asimismo, introducimos las categorías con ceros y estudiamos sus revestimientos como un paso intermedio hacia las k-categorías.

En teoría de representaciones, las k-categorías generalizan a las k-álgebras y constituyen el contexto ideal para utilizar métodos topológicos y geométricos para el estudio de problemas puramente algebraicos originados en la teoría de representaciones (cf. [Ga], [BG]). Más concretamente, las álgebras se presentan como un cociente de la categoría lineal de caminos de un Quiver.

Un caso particular de k-categorías es cuando se permite solamente relaciones de conmutatividad y relaciones cero. En este caso se tiene que estas k-categorías provienen de linealizar una categoría con ceros. Concretamente, una categoría con ceros es una categoría donde entre dos objetos cualesquiera existe una flecha cero que al componerla con cualquier otra flecha resulta en la flecha cero correspondiente. Debido a un profundo resultado de Roiter [BGRS], toda k-categoría de representación localmente finita proviene de una categoría con ceros.

Por todo esto, luego de estudiar los revestimientos de categorías generales y de grafos dirigidos (Quivers), hemos continuado nuestra investigación con el estudio de los revestimientos de categorías con ceros como un paso intermedio entre los revestimientos categóricos y los revestimientos lineales. Probamos entre otras cosas que los revestimientos de categorías con ceros se pueden clasificar por medio del grupo fundamental (tal como sucede con el caso clásico, el caso de grupoides y de categorías pequeñas).

La última parte del trabajo consiste propiamente en el estudio de los revestimientos k-lineales y de algunas aplicaciones. Al linealizar las categorías con ceros, los revestimientos resultan no solo revestimientos de k-categorías sino, más aún, revestimientos de Galois [Ga]. Hemos conseguido resultados en el espíritu de los trabajos de Bongartz y Gabriel [BG], [Ga]. Para algunos de los cuales exhibimos demostraciones más sencillas que nos permite el contexto de las categorías con ceros. Además, nos hemos valido para la sencillez de algunas demostraciones de la elegante teoría de morfismos minimales, irreducibles y "que casi se parten" [ARS], [As].

1. Preliminares Categóricos

En esta sección expondremos brevemente conceptos básicos de categorías. Requerimos del lector cierta familiaridad con los mismos. Es por eso que presentaremos algunas demostraciones correspondientes y ejemplos. Pero, al mismo tiempo, no pretendemos que estos sean suficientes para que ilustrar los temas. Los resultados de esta sección se utilizarán sin referencia durante todo el texto. El espíritu de la misma es presentar los requerimientos categóricos necesarios y fijar la notación utilizada durante todo el trabajo. Nos permitimos sugerir [ML] como referencia para esta sección.

1.1. Categoría

Una categoría C consiste en los siguientes datos:

- Una clase de objetos que llamaremos $\mathcal{O}bj\ C$.
- Para cada par $x, y \in \mathcal{O}bj\ C$, un conjunto $C(x, y)$ (las flechas de x a y).
  Llamaremos $\mathcal{F}l\ C$ a la clase de todas las flechas de C.
  Notaremos $C(x) = C(x, x)$.
- Una ley asociativa de composición en las flechas. Es decir, para cada terna $x, y, z \in \mathcal{O}bj\ C$

$$C(x, y) \times C(y, z) \to C(x, z)$$
$$(f, g) \to g \circ f$$

  de manera tal que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
  Además, para cada $x \in \mathcal{O}bj\ C$ se tiene una flecha $1_x \in C(x, x)$ tal que para cualesquiera $x \xrightarrow{f} y, w \xrightarrow{g} x$ se tiene $f \circ 1_x = f, 1_x \circ g = g$.
  En general notaremos gf por $g \circ f$.

Una categoría C se dirá pequeña si la clase $\mathcal{O}bj\ C$ es un conjunto.

Recordemos que $x \xrightarrow{f} y$ es un isomorfismo si se tiene $y \xrightarrow{g} x$ tal que $gf = 1_x, fg = 1_y$. Similarmente es una sección si vale $gf = 1_x$ y una retracción si se tiene $fg = 1_y$. Por otra parte, f se dice epimorfismo si $hf = h'f$ implica $h = h'$ y monomorfismo si $fh = fh'$ implica $h = h'$.

Diremos que dos objetos $x, y \in C$ son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos y lo notaremos $x \cong y$.

Ejemplos. Listaremos aquí algunos ejemplos para fijar notación.

- $\mathcal{E}ns$: Conjuntos y funciones de conjuntos.
- $\mathcal{T}op$: Espacios topológicos y funciones continuas.
- $\mathcal{T}op_*$: Espacios topológicos punteados y funciones continuas que respetan el punto base.
- $[\mathcal{T}op]$: Espacios topológicos y clases homotópicas de funciones continuas.
- $\mathcal{V}ect$: k-espacios vectoriales y transformaciones lineales (k un cuerpo fijo).
- $\mathcal{G}r$: Grupos y morfismos de grupos.
- C^{op}: Categoría opuesta a una categoría C dada.

1.2. Funtor

Sean C, D categorías, un funtor $F : C \to D$ consiste en una asignación

$$F : \mathcal{O}bj\ (C) \to \mathcal{O}bj\ (D)$$

y para cada $x, y \in C$, una familia de funciones

$$F : C(x, y) \to D(Fx, Fy)$$

de manera compatible con la composición y las identidades. Es decir, para todo $x \in C$ vale $F(1_x) = 1_{Fx}$ y si se tiene $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ en C, entonces $F(gf) = F(g)F(f)$.

El funtor F se dirá pleno si las funciones $F : C(x, y) \to D(Fx, Fy)$ son sobreyectivas $\forall x, y \in \mathcal{O}bj\ (C)$ y se dirá fiel si son inyectivas.

Diremos que el funtor F es denso si $\forall d \in \mathcal{O}bj\ (D), \exists x \in \mathcal{O}bj\ (C) : Fx \cong d$.

Llamaremos $\mathcal{C}at$ a la categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas y los morfismos son los funtores entre ellas.

Utilizaremos la notación usual al referirnos a los funtores:
$C(\cdot, y) : C^{op} \to \mathcal{E}ns$
$C(x, \cdot) : C \to \mathcal{E}ns$
Notaremos $C(f, y) = f^*, C(x, g) = g_*$.

Ejemplos.

- El funtor olvido, $\mathcal{O} : \mathcal{V}ect \to \mathcal{E}ns$ (que asigna a un espacio vectorial su conjunto subyacente y a una transformación lineal, la función de conjuntos que representa) es fiel pero no pleno.

- El funtor libre, $F : \mathcal{E}ns \to \mathcal{V}ect$ (que asigna a un conjunto el k-espacio vectorial generado y a una función, la única transformación lineal que coincide con ella en la base) es fiel pero no pleno.

- Es un resultado importante en topología algebraica que el funtor $\Pi_1 : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{G}r$ es denso. Más precisamente, dado cualquier grupo G se puede construir un espacio arcocoenxo (X, x_0) tal que $\Pi_1(X, x_0) \cong G$.

- El funtor $\mathcal{T}op \to [\mathcal{T}op]$ (dado por la identidad en los objetos y tomar clase en las flechas) es pleno y denso pero no es fiel.

- Sea C una categoría. Consideremos $\widetilde{C}$ un esqueleto de C. Es decir, $\widetilde{C}$ es alguna subcategoría de C que contiene un objeto (y sólo uno) por cada clase de isomorfismo de C y todas las flechas entre ellos. Es claro que la inclusión $\widetilde{C} \hookrightarrow C$ es un funtor plenamente fiel y denso.

- Para G un grupo, sea $[G, G]$ su conmutador. Definimos el funtor abelianizador: $\mathcal{A} : \mathcal{G}r \to \mathcal{A}b$ por $\mathcal{A}G = G/[G, G]$ en los objetos y pasando al cociente en las flechas. Es decir, dado un morfismo de grupos $f : G \to H$, se tiene:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad f \quad} & H \\ {\scriptstyle \pi_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_H} \\ G/[G,G] & \underset{\exists!\ \overline{f}}{\dashrightarrow} & H/[H,H] \end{array}$$

  Como $H/[H, H]$ es abeliano, el morfismo $\pi_H f$ aplica el conmutador de G en en el neutro. Es decir, $[G, G] \subset ker(\pi_H f)$ y por lo tanto existe una única posibilidad para definir $\overline{f}$ de manera tal que el diagrama conmute (ie: $\overline{f}\pi_G = \pi_H f$).

1.3. Transformación Natural

Sean $F, G : C \to D$ dos funtores. Una transformación natural de F a G (notación $\phi : F \Rightarrow G$) consiste en una asignación $\phi_x : Fx \to Gx$ para cada $x \in \mathcal{O}bj\ (C)$ de manera tal que para cada $x \xrightarrow{f} y$ en C se tiene que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{Ff} & Fy \\ {\scriptstyle \phi_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_y} \\ Gx & \xrightarrow{Gf} & Gy \end{array}$$

Un isomorfismo natural es una transformación natural que es un isomorfismo (en D) para cada objeto de C.

Observemos que para C, D dos categorías, se tiene la categoría D^C cuyos objetos son los funtores de C a D y las transformaciones naturales como morfismos. De esta manera, dos funtores son isomorfos en esta categoría si y solo si existe un isomorfismo natural entre ellos.

Ejemplos.

- Consideremos el funtor abelianizador pero pensado llegando a la categoría de grupos $\mathcal{A} : \mathcal{G}r \to \mathcal{A}b \hookrightarrow \mathcal{G}r$.
  En este caso la proyección $\pi_G : G \to G/[G,G]$ define una transformación natural entre el funtor identidad de la categoría $\mathcal{G}r$ y el funtor $\mathcal{A}$. En efecto, por definición tenemos que los cuadrados conmutan:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\qquad f \qquad} & H \\ {\scriptstyle \pi_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_H} \\ \mathcal{A}G = G/[G,G] & \xrightarrow[\mathcal{A}f = \overline{f}]{} & \mathcal{A}H = H/[H,H] \end{array}$$

- Consideremos la categoría $\mathcal{E}ns$ y sea X un conjunto. Definimos el funtor

  $$X \times \bullet : \mathcal{E}ns \to \mathcal{E}ns$$

  vía el producto cartesiano de conjuntos (en los objetos) y para $f : A \to B$ una función vía

  $$\big(X \times f\big)(x, a) = (x, fa)$$

  Dada $g : X \to Y$, se tiene una transformación natural $X \times \bullet \xrightarrow{g_\bullet} Y \times \bullet$ definida en un conjunto A vía:

  $$g_A : X \times A \to Y \times A$$

  $$g_A(x, a) = (gx, a)$$

- Consideremos los funtores identidad y doble dual $id, ^{**} : \mathcal{V}ect \to \mathcal{V}ect$. El morfismo dado por la evaluación, más precisamente:

$$\iota_V : V \to V^{**}$$

$$\iota_V(v)(\varphi) = \varphi(v)$$

define una transformación natural entre ellos.

1.4. Objeto inicial, final - Límites y Colímites

Sea C una categoría. Un objeto $*$ es inicial si para todo objeto x se tiene una única flecha de $*$ a x. Dualmente, es final si el conjunto $C(x, *)$ tiene un único elemento. Es inmediato de la definición que (en caso de existir) el objeto final e inicial son únicos salvo isomorfismo. Un objeto que es al mismo tiempo inicial y final se dirá objeto cero.

Ejemplos.

- En la categoría $\mathcal{E}ns$, el objeto inicial es $\emptyset$, el conjunto vacío. El objeto final es $* = \{\emptyset\}$, el singleton (o cualquier otro conjunto con solo un elemento). Es por eso que en general se utilizan estos símbolos para indicar el objeto inicial y final en una categoría abstracta.

- En la categoría $\mathcal{V}ect$ el objeto cero es precisamente el espacio vectorial cero. Esto también ocurre en $\mathcal{A}b$ y en $mod(A)$. De ahí su nombre.

Definición 1.1. Sean $F : C \to D, a \in \mathcal{O}bj\ (D)$, se tiene entonces la categoría a/F (F bajo a) dada por:

$$\mathcal{O}bj\ (a/F) = \{a \xrightarrow{\alpha} Fx \mid x \in \mathcal{O}bj\ (C)\}$$

$$a/F(a \xrightarrow{\alpha} Fx, a \xrightarrow{\beta} Fy) = \{x \xrightarrow{f} y \in C(x, y) \mid F(f)\alpha = \beta\}$$

Dualmente, se tiene la categoría F/a (F sobre a) dada por:

$$\mathcal{O}bj\ (F/a) = \{Fx \xrightarrow{\alpha} a \mid x \in \mathcal{O}bj\ (C)\}$$

$$F/a(Fx \xrightarrow{\alpha} a, Fy \xrightarrow{\beta} a) = \{x \xrightarrow{f} y \in C(x, y) \mid \alpha = \beta F(f)\}$$

Al objeto inicial de a/F y al final de F/a suele llamarseles flechas universales para F (saliendo o llegando a a, respectivamente). Como todo objeto final e inicial en una categoría, su existencia no está garantizada.

Ejemplos.

- Consideremos una categoría C con objeto final $*$ y el funtor identidad $id : C \to C$. Entonces la categoría $id/*$ es esencialmente la categoría C.
- Consideremos G un grupo y el funtor inclusión $i : \mathcal{A}b \to \mathcal{G}r$. La categoría G/i tiene como objetos a los morfismos $G \xrightarrow{f} A$ para A un grupo abeliano. El objeto inicial de esta categoría es precisamente la proyección $G \xrightarrow{\pi} G/[G,G]$.
- Sea J la categoría $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$. Consideramos $\mathcal{C}$ una categoría cualquiera. Un funtor $F : J \to C$ consiste en elegir tres obejtos de $A, B, C \in \mathcal{C}$ y dos morfismos f, g dispuestos de la siguiente manera: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Para $X \in \mathcal{C}$, la categoría F/X tiene como objetos las flechas en $Hom(A, X), Hom(B, X), Hom(C, X)$ y como morfismos los que conmutan con f y g.

En el caso de $K : J \to D$ con J una categoría pequeña (e incluso finita en los ejemplos usuales) es común pensar K como su imagen en D y se dice que es un diagrama en D. Consideremos la categoría D^J y el funtor diagonal $\Delta : D \to D^J$.

Este funtor está definido para $x \in \mathcal{O}bj\ (C)$ como el funtor que toma el valor x en todos los objetos de J y 1_x en todas las flechas. Para una flecha $x \xrightarrow{f} y$, f define de manera obvia una transformación natural entre $\Delta(x)$ y $\Delta(y)$.

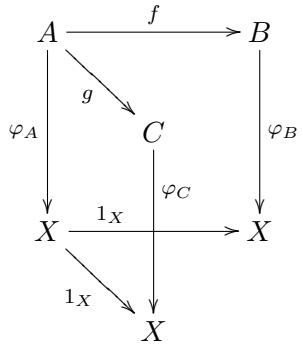
Así, definimos el colímite del diagrama (si existe) como el objeto inicial de K/Δ y el límite como el objeto final de Δ/K ($K \in \mathcal{O}bj\ (D^J), \Delta : D \to D^J$ es decir, K es el objeto y Δ el funtor en la definición anterior).

Ejemplo. Sean $\mathcal{C}$ una categoría cualquiera y J la categoría $J = \bullet \rightrightarrows \bullet$

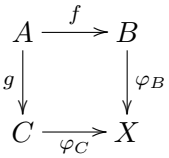
Un funtor $F : J \to \mathcal{C}$ consiste en elegir tres objetos de $A, B, C \in \mathcal{C}$ y dos flechas f, g dispuestos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

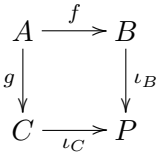
La categoría F/Δ tiene como objetos las transformaciones naturales de F a $\Delta(X)$ para cada $X \in \mathcal{C}$. Es decir,



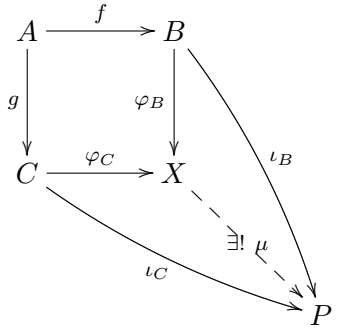
Como φ_A queda determinada por $\varphi_A = \varphi_B f = \varphi_C g$, se suele representar más concisamente de la siguiente manera.



Para $P \in \mathcal{C}$, $F \xrightarrow{\iota} \Delta(P)$ es el objeto inicial en la categoría F/Δ si el diagrama conmuta



Y además, para todo otro diagrama conmutativo con X, φ_B, φ_C, existe una única μ tal que el diagrama conmuta



- En el ejemplo anterior, $J = \bullet \rightrightarrows \bullet$ se llama al colímite el pushout del diagrama.
- La situación dual, $J = \bullet \rightrightarrows \bullet$ al límite se lo llama el pullback.
- En el caso $J = \bullet \circlearrowright \bullet$ el límite lleva el nombre de egalizador y el colímite de coegalizador.

1.5. Adjunción

En la siguiente situación $C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$ se dirá que el funtor F es adjunto a izquierda a G (notación $F \dashv G$) si se tiene una biyección:

$$D(Fx, a) \xrightarrow{\varphi} C(x, Ga)$$

para todo $a \in \mathcal{O}bj\ (C), x \in \mathcal{O}bj\ (C)$. Además la biyección debe ser natural en las dos variables, es decir si se tienen $a \xrightarrow{\alpha} b, x \xrightarrow{f} y$ entonces ambos diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} D(Fa,x) & \xrightarrow{(F\alpha)^*} & D(Fb,x) \\ \varphi\downarrow & & \varphi\downarrow \\ C(a,Gx) & \xrightarrow{\alpha^*} & C(b,Gx) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C(Fa,x) & \xrightarrow{f_*} & C(Fa,y) \\ \varphi\downarrow & & \varphi\downarrow \\ D(a,Gx) & \xrightarrow{(Gf)_*} & D(a,Gy) \end{array}$$

Recordemos que en caso de tener una adjunción, se tienen los morfismos unidad y counidad dados por :

$$\eta_x = \varphi(1_{Fx}) : x \to GFx, \qquad \varepsilon_a = \varphi^{-1}(1_{Ga}) : FGa \to a$$

Ejemplos. Exponemos a continuación una breve lista de ejemplos clásicos de pares de funtores adjuntos.

- Los funtores libre y olvido $\mathcal{E}ns \underset{\mathcal{O}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{V}ect$ son adjuntos. Más precisamente $F \dashv \mathcal{O}$
- Para X un espacio topológico localmente compacto y Haussdorff, consideremos los funtores

  $$X \times _, \mathcal{C}(X, _) : \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op$$

  Definidos de la siguiente manera:
  Para Y un espacio topológico cualquiera, consideramos $X \times Y$ el espacio producto.
  Para $Y \xrightarrow{f} Z$ continua, consideramos $X \times f = (1_X, f) : X \times Y \to X \times Z$.
  Para Y un espacio topológico cualquiera, consideramos $\mathcal{C}(X, Y)$ el conjunto de funciones continuas de X a Y dotado de la topología compacto abierta.
  Para $Y \xrightarrow{f} Z$ continua, consideramos $f_* : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Z)$.

  Por la ley exponencial se tiene $X \times _ \dashv \mathcal{C}(X, _)$.
- Consideremos los funtores $\mathcal{G}r \underset{i}{\overset{\mathcal{A}}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}b$ definidos anteriormente. Se tiene $\mathcal{A} \dashv i$

Recordemos siguientes dos resultados, cuya demostración puede verse en [ML]. El primero es una útil síntesis de los datos que determinan una adjunción. El segundo es quizás el resultado más conocido sobre funtores adjuntos.

Teorema 1.2. *Una adjunción* $C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$ *puede construirse de manera unívoca (es decir, existe y queda completamente determinada) a partir de cualquiera de los siguientes datos:*

- *Los funtores* F, G *y una transformación natural* $\eta : 1_C \to GF$ *tal que para cada* $x \in C$*, la flecha* $\eta_x : x \to GFx$ *es universal respecto a* G *(objeto inicial en* x/G*).*
- *El funtor* G*, la asignación* $F_0 : \mathcal{O}bj\ C \to \mathcal{O}bj\ D$ *y una flecha* $\eta_x : x \to GF_0x$ *para cada* $x \in C$ *universal respecto a* G*.*
- *Los funtores* F, G *y una transformación natural* $\varepsilon : FG \to 1_D$ *tal que para cada* $a \in D$*, la flecha* $\varepsilon_a : FGa \to a$ *es universal respecto a* F *(objeto final en* F/a*).*
- *El funtor* F*, la asignación* $G_0 : \mathcal{O}bj\ D \to \mathcal{O}bj\ c$ *y una flecha* $\varepsilon_a : FGa \to a$ *para cada* $a \in D$ *universal respecto a* F*.*
- *Los funtores* F, G *y dos transformaciones naturales* η, ε *tales que ambas composiciones:*

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon}, \qquad F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

coinciden con las transformaciones identidad de G *y* F *respectivamente.*

Teorema 1.3. *En la siguiente situación* $C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$ *con* $F \dashv G$ *se tiene entonces que* F *preserva colímites y* G *límites.*

1.6. Lema de Yoneda

Lema 1.4. *Sean* C *una categoría,* $F : C \to \mathcal{E}ns$ *un funtor y* $x \in C$*. Entonces se tiene la biyección:*

$$\phi : Nat\big(C(x, _), F\big) \xrightarrow{\sim} Fx$$
$$\phi(\eta) = \eta_x(1_x)$$

Demostración. Costruimos una aplicación inversa para ϕ. Sea $a \in Fx$, le asignamos la transformación natural η definida para $y \in C$ vía la fórmula:

$\eta_y : C(x,y) \to Fy$

$\eta_y(f) = (Ff)(a)$

Verifiquemos que esta ley define, efectivamente, una transformación natural. Sea $g : y \to z$ y consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C(x,y) & \xrightarrow{g_*} & C(x,z) \\ {\scriptstyle \eta_y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_z} \\ Fy & \xrightarrow{Fg} & Fz \end{array}$$

Calculamos para $f : x \to y$,
$\eta_z g_*(f) = \eta_z(gf) = F(gf)(a) = FgFf(a) = Fg\big(Ff(a)\big) = Fg\ \eta_y(f)$ El hecho de que la asignación es inversa de ϕ es inmediato.

□

Definición 1.5. Un funtor $F : C \to \mathcal{E}ns$ se dice representable si existe $x \in C$ tal que F es naturalmente isomorfo a $C(x, _)$.

1.7. Equivalencia de Categorías

Un funtor $F : C \to D$ se dirá una equivalencia entre las categorías C y D si existe un funtor $G : D \to C$ e isomorfismos naturales $GF \cong 1_C, FG \cong 1_D$.

Si tal es el caso, entonces $F \dashv G$ y $G \dashv F$.

El siguiente resultado nos será de utilidad posteriormente. Con esto en mente es útil pensar que dos categorías son equivalentes cuando son la misma salvo agregar objetos isomorfos a los ya existentes.

Teorema 1.6. *Para $F : C \to D$ un funtor, son equivalentes:*

1. *F es una equivalencia.*
2. *Existe $G : D \to C$ tal que $F \dashv G$ y tanto la unidad como la counidad de la adjunción son isomorfismos.*
3. *F es plenamente fiel y denso.*

Demostración. 2. $\Rightarrow$ 1. Es trivial, ya que T sirve como inversa.
1. $\Rightarrow$ 3.
Ahora, consideremos $f : a \to b \in C$. Observemos el siguiente diagrama conmutativo en C:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha_a} & GFa \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GFf} \\ b & \xrightarrow[\alpha_b]{} & GFb \end{array}$$

Donde α denota el isomorfismo natural. De la expresión $GFf = \alpha_b f \alpha_a^{-1}$ deducimos que la función

$$GF : C(a,b) \xrightarrow{F} D(Fa, Fb) \xrightarrow{G} C(GFa, GFb)$$

es biyectiva para todo $a, b \in C$. Por lo tanto F es fiel.
De manera similar (considerando FG) obtenemos que G es fiel.
Para ver que es pleno, sea $h : Fa \to Fb$ y consideramos $f = \alpha_b^{-1} Gh \alpha_a$. Entonces $GFf = Gh$ pero como G es fiel, tenemos $Ff = h$.
Por último, como $FG \cong 1_D$, para todo $x \in D$ se tiene $FGx \cong x$. En particular, F es denso.

3. $\Rightarrow$ 2.
Sea $x \in D$, entonces existe $c \in C$ y un isomorfismo $Fc \xrightarrow{\eta_x} x$. para cada $a \in C$ y para cada flecha $Fa \xrightarrow{f} x$ se tiene un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Fa & & \\ {\scriptstyle Fg}\,\vdots & \searrow^{f} & \\ Fc & \xrightarrow[\eta_x]{} & x \end{array}$$

donde $a \xrightarrow{g} c$ queda unívocamente definida por la ecuación $Fg = \eta_x^{-1} f$ ya que F es plenamente fiel. Observemos que tenemos entonces que η_x el objeto final en F/x.
Valiendonos del teorema 1.2 se sigue que existe G tal que $F \dashv G$ y ya tenemos que η es un isomorfismo natural.
Por otra parte, considerando el diagrama anterior pero con $x = Fa, f = 1$ (y ya definimos $Gx = c$ obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} Fa & & \\ {\scriptstyle F\varepsilon_a}\,\vdots & \searrow^{1} & \\ F(GFa) & \xrightarrow[\eta_{Fa}]{} & Fa \end{array}$$

Tenemos, $\eta_{Fa}(F\varepsilon_a) = 1_a$ y como η es isomorfismo entonces $F\varepsilon_a$ lo es. Ahora bien, como F es plenamente fiel, se tiene que ε_a es isomorfismo.

□

Corolario 1.7. *Dos categorías son equivalentes si y sólo si sus esqueletos son isomorfos.*

2. Revestimientos

2.1. Revestimientos de Grupoides

Comenzaremos estudiando revestimientos de grupoides. Este será nuestro punto de partida para estudiar revestimientos en otros contextos algebraicos. Las referencias más importantes para esta sección son [Br], [Ma1].

Definición 2.1. Un grupoide es una categoría pequeña donde toda flecha es un isomorfismo. Para $\mathcal{G}$ un grupoide, notaremos $x \in \mathcal{G}$ para $x \in \mathcal{O}bj\ \mathcal{G}$ y para $x, y \in \mathcal{G}$ notaremos $\mathcal{G}(x, y)$ al conjunto de flechas de x a y.

Ejemplos.

1. Si G es un grupo, puede pensarse como un grupoide con un solo objeto, ie: $\mathcal{O}bj\ \mathcal{G} = \{*\}$ y donde $\mathcal{G}(*) = G$ con la composición definida por el producto de G.

2. Llamemaremos $\mathcal{I}$ al grupoide dado por:

$$0 \underset{\tau^{-1}}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} 1$$

(donde las identidades y las composiciones no están escritas).
En general al definir un grupoide por un diagrama, tampoco presentaremos las inversas. Es decir, en este caso, podríamos decir: sea $\mathcal{I}$ el grupoide dado por $0 \xrightarrow{\tau} 1$.

3. Si X es un espacio topológico, $\Pi_1(X)$ el grupoide fundamental se construye de la siguiente manera. Para $x \xrightarrow{\omega} y$ un camino en X, llamemos $[\omega]$ a la clase homotópica de ω. (Nos referimos a clase homotópica como caminos, es decir, existe una homotopía que deja fijos a x e y).

$$\mathcal{O}bj\ \Pi_1(X) = X$$

$$\Pi_1(x, y) = \{[\omega] \mid x \xrightarrow{\omega} y \text{ es un camino en } X\}$$

Y la composición definida por la concatenación de clases homotópicas de caminos.

Notación. Con el último ejemplo en mente, notaremos la composición de $x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z$ como $\alpha\beta$. Asimismo, si α es una flecha en $\mathcal{G}$, llamaremos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ al objeto en el cual comienza y en el cual termina, respectivamente. También notaremos $s(\alpha) = \alpha(0), t(\alpha) = \alpha(1)$ a las aplicaciones source y target $s, t : \mathcal{F}l\ \mathcal{G} \to \mathcal{O}bj\ \mathcal{G}$.
Asimismo diremos que un grupoide $\mathcal{G}$ es conexo si $\forall x, y \in \mathcal{G},\ \ \mathcal{G}(x, y) \neq \emptyset$.

Definición 2.2. Para $\mathcal{G}$ un grupoide y $x \in \mathcal{G}$, se define la estrella de x como:

$$St(x) = \coprod_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{G}(x, y) = \{\alpha \in \mathcal{F}l\ \mathcal{G} \mid \alpha(0) = x\}$$

O sea, son todas las flechas de $\mathcal{G}$ que comienzan en x.

Notación. Para $p : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G},\ x \in \mathcal{G}, \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{G}}$, notaremos $\widetilde{x}/x$ si $p(\widetilde{x}) = x$

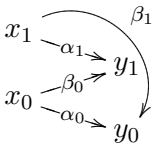
Definición 2.3. Sean $\widetilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G}$ grupoides, $p : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ se dice un revestimiento si $\forall x \in \mathcal{G}, \forall \widetilde{x}/x$ la función dada por $p : St(\widetilde{x}) \to St(x)$ es una biyección.

Ejemplos. Como ejemplos, ilustremos algunos revestimientos del grupoide $x \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} y$

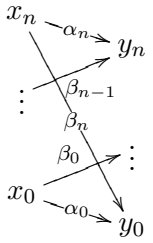
En todos los ejemplos el funtor p queda definido por:

$$p(x_i) = x, p(y_i) = y, p(\alpha_i) = \alpha, p(\beta_i) = \beta$$

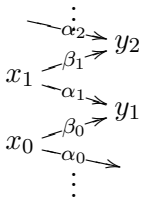
- Un primer ejemplo muy sencillo:



- Generalizando el ejemplo anterior:

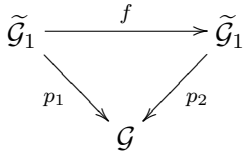


- Ahora podemos hacer seguir la secuencia infinitamente para ambos lados (en este ejemplo x_i, y_i están indexados en los números enteros):



Notación. Para $p : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ un revestimiento. Dada una flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ en $\mathcal{G}$, llamamos el levantado de α (a partir de $\widetilde{x}$) y lo notaremos $\widetilde{a}$ a la única flecha $\widetilde{\alpha} \in St(\widetilde{x})$ tal que $p(\widetilde{\alpha}) = \alpha$.
Es decir, es la única flecha que comienza en $\widetilde{x}$ que es enviada a α al aplicársele p.

Definición 2.4. Para $\mathcal{G}$ un grupoide, definimos la categoría de revestimientos de grupoides sobre $\mathcal{G}$ como $\mathcal{C}ov_{\mathcal{G}pd}(\mathcal{G})$ cuyos objetos son los revestimientos $\widetilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{p} \mathcal{G}$ y los morfismos entre dos revestimientos $\widetilde{\mathcal{G}}_1 \xrightarrow{p_1} \mathcal{G}$ y $\widetilde{\mathcal{G}}_2 \xrightarrow{p_2} \mathcal{G}$ son los funtores $f : \widetilde{\mathcal{G}}_1 \to \widetilde{\mathcal{G}}_2$ tales que el diagrama conmuta:



Lema 2.5. *Sea $p : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ funtor. Entonces p es un revestimiento si y sólo si $\forall x \in \mathcal{G}, \forall \widetilde{x}/x$ se tiene que la función definida por p:*

$$\coprod_{w \in \widetilde{\mathcal{G}}} \widetilde{\mathcal{G}}(w, \widetilde{x}) \xrightarrow{p} \coprod_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{G}(y, x)$$

es una biyección.
Es decir, $\forall x \in \mathcal{G}, \forall \widetilde{x}/x$ se tiene un único levantado que termina en $\widetilde{x}$ para cada flecha que termina en x.

Demostración. Sea $y \xrightarrow{\alpha} x \in \mathcal{G}$, como $\mathcal{G}$ es un grupoide, existe $x \xrightarrow{\alpha^{-1}} y$. Sea $\widetilde{\alpha^{-1}}$ el único levantado de α^{-1} que comienza en $\widetilde{x}$. Como $\widetilde{\mathcal{G}}$ es un grupoide, consideremos $\widetilde{\alpha} := \widetilde{\alpha^{-1}}^{-1}$. Veamos que sirve:

$$1_y = p(\widetilde{\alpha^{-1}}\widetilde{\alpha}) = p(\widetilde{\alpha^{-1}})p(\widetilde{\alpha}) = \alpha^{-1}p(\widetilde{\alpha})$$

Además,

$$1_x = p(\widetilde{\alpha}\widetilde{\alpha^{-1}}) = p(\widetilde{\alpha})p(\widetilde{\alpha^{-1}}) = \alpha^{-1}p(\widetilde{\alpha})$$

Luego, por la unicidad del inverso en $\mathcal{G}$, vale $p(\widetilde{\alpha}) = \alpha$.

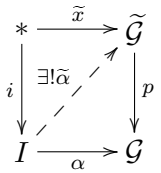
Observemos que si llamamos $\widetilde{y} := \widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\alpha^{-1}}(1)$, tenemos que $\widetilde{\alpha}$ es el único levantado de α que comienza en $\widetilde{y}$.

Ahora sea $w \xrightarrow{f} \widetilde{x}$ es otro levantado que termina en $\widetilde{x}$, es decir $p(f) = \alpha$ y $f_1 = \widetilde{x}$. Entonces,

$$p(f\widetilde{\alpha^{-1}}) = p(f)p(\widetilde{\alpha^{-1}}) = \alpha\alpha^{-1} = 1_y$$

Pero el único levantado de 1_y que comienza en w es 1_w por lo tanto $f\widetilde{\alpha^{-1}} = 1_w$. Luego $w = f(0) = \widetilde{\alpha^{-1}}(1) = \widetilde{y}$. Por último, como $\widetilde{y} \xrightarrow{f} \widetilde{x}$ es un levantado de $y \xrightarrow{a} x$ que comienza en $\widetilde{y}$ vale $f = \widetilde{\alpha}$. □

Observación 2.6. *Podemos pensar de la siguiente manera la definición y la equivalencia dada por el lema anterior. Dado un diagrama en $\mathcal{C}at$*



Donde $*$ es la categoría con un sólo objeto y una única flecha e I es la categoría dada por $I = 0 \to 1$. La definición original es equivalente a pedir que existe una única $\widetilde{\alpha}$ tal que todo conmuta cuando $i(*) = 0$. El lema anterior dice que esto es equivalente al caso $i(*) = 1$. Un tercer caso es inmediato, consiste en considerar al grupoide $\mathcal{I}$ en el papel de I en el diagrama enterior (en este caso el diagrama es un diagrama en la categoría de grupoides).

Definición 2.7. Sea $f : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ un morfismo de grupoides. Se define el grupo característico de f en $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{G}}$, como el subgrupo $f\big(\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})\big) \subset \mathcal{G}\big(f(\widetilde{x})\big)$

Proposición 2.8. *Sea $p : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ un revestimiento. Dado $x \in \mathcal{G}, \widetilde{x}/x$, vale lo siguiente:*

1. El morfismo de grupos inducido $\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x}) \xrightarrow{p} p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})\big) \subset \mathcal{G}(x)$ es un isomorfismo.
2. Para $\alpha \in \mathcal{G}(x)$, vale $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x}) \iff \alpha \in p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})\big)$. Es decir, los únicos lazos en x que se levantan a lazos en $\widetilde{x}$ son los que pertenecen al grupo característico en $\widetilde{x}$.
3. Para $x \xrightarrow{\alpha} y \in \mathcal{G}$, se tienen las biyecciones $p^{-1}(\alpha) \xrightarrow{s} p^{-1}(x)$ dada por $s(\omega) = \omega_0$ y $p^{-1}(\alpha) \xrightarrow{t} p^{-1}(y)$ dada por $t(\omega) = \omega_1$
4. Si $x, y \in \mathcal{G}$ están en la misma componente conexa, entonces los conjuntos $p^{-1}(x), p^{-1}(y)$ tienen la misma cantidad de elementos.

Demostración.

1. Para ver que es iso con su imagen, basta ver que es mono, es decir, inyectiva. Pero esto es claro pues $\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x}) \subset St(\widetilde{x})$ y p es inyectiva en $St(\widetilde{x})$ por definición de revestimiento.
2. Es claro que si $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})$, entonces $\alpha = p(\widetilde{\alpha}) \in p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})\big)$. Reciprocamente, si $\alpha \in p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})\big)$, existe $f \in \widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})$ tal que $p(f) = \alpha$. Pero entonces $f = \widetilde{\alpha}$ por unicidad del levantado.
3. Construyamos una inversa para s:
   Sea $\psi : p^{-1}(x) \to p^{-1}(\alpha)$ definida por $\psi(\widetilde{x}) = \widetilde{\alpha}$ el único levantado de α desde $\widetilde{x}$.
   Es claro que las aplicaciones ψ y s son mutuamente inversas.
   Ahora para t, consideremos análogamente $\varphi : p^{-1}(y) \to p^{-1}(\alpha)$ definida por $\varphi(\widetilde{y}) = \widetilde{\alpha}$ el único levantado de α que termina en $\widetilde{y}$ (esto es posible por el lema anterior).
4. Es inmediato del punto anterior.

□

Proposición 2.9. *Dado el siguiente diagrama de grupoides $\mathcal{J} \xrightarrow{q} \mathcal{H} \xrightarrow{p} \mathcal{G}$, vale:*

1. Si p, q son revestimientos, entonces pq lo es.
2. Si p, pq son revestimientos, entonces q lo es.
3. Si q, pq son revestimientos y además q es sobreyectivo en los objetos, entonces p es revestimiento.

Demostración. 1. Sea $x \in \mathcal{G}, \widetilde{x} \in \mathcal{J}$ tal que $pq(\widetilde{x}) = x$. Como $pq : St(\widetilde{x}) \to St(x)$ es la composición $St(\widetilde{x}) \xrightarrow{q} St\big(q(\widetilde{x})\big) \xrightarrow{p} St(x)$ y ambas son biyecciones, entonces se sigue lo que queríamos probar.

2. Sea $w \in \mathcal{H}, \widetilde{w} \in \mathcal{J}$ tal que $q(\widetilde{w}) = w$. Tenemos entonces $St(\widetilde{w}) \xrightarrow{q} St(w) \xrightarrow{p} St\big(p(w)\big)$ donde p y pq son biyecciones. Por lo tanto $q : St(\widetilde{w}) \to St(w)$ es una biyección, como queríamos probar.

3. Sea $x \in \mathcal{G}, \widetilde{x} \in \mathcal{H}$ tal que $p(\widetilde{x}) = x$. Como q es sobre, sea $w \in \mathcal{J}$ tal que $q(w) = \widetilde{x}$. Entonces tenemos $St(w) \xrightarrow{q} St(\widetilde{x}) \xrightarrow{p} St(x)$ donde q y pq son biyecciones. Por lo tanto $p : St(\widetilde{x}) \to St(x)$ es una biyección, como queríamos probar.

□

Proposición 2.10 (Levantamiento único de caminos)**.** *Sea $p : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ un revestimiento. Dado $x \in \mathcal{G}, \alpha \in St(x),\ \alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, para $\widetilde{x}/x$ se tienen únicos $\widetilde{\alpha}_1 \cdots \widetilde{\alpha}_2$ tales que:*
(i) $p(\widetilde{\alpha}_i) = \alpha_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$.
(ii) El levantado de α desde $\widetilde{x}$ es $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_1 \cdots \widetilde{\alpha}_n$.

Demostración. Razonando inductivamente en n, para el caso $n = 1$ es la existencia de un único levantado a partir de $\widetilde{x}$. Para el paso inductivo, sea $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_{n+1}$. Utilizamos la hipótesis inductiva para obtener $\widetilde{\alpha}_i$ para $1 \leq i \leq n$. Ahora obtenemos $\widetilde{\alpha}_{n+1}$ como el único levantado de α_{n+1} que empieza en $\alpha_n(1)$. Los $\widetilde{\alpha}_i$ cumplen (i) por hipótesis inductiva para $i \leq n$ y por construcción para $i = n + 1$. Y verificar (ii) es sencillo: $p(\widetilde{\alpha}_1 \cdots \widetilde{\alpha}_n \widetilde{\alpha}_{n+1}) = p(\widetilde{\alpha}_1 \cdots \widetilde{\alpha}_n) p(\widetilde{\alpha}_{n+1}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_{n+1}$ (por hipótesis inductiva y por ser $\widetilde{\alpha}_{n+1}$ levantado de α_{n+1}). □

Proposición 2.11. *Sea $p : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ un revestimiento. Sean $x \in \mathcal{G}, y, z/x$ tales que existe $y \xrightarrow{\omega} z$. Entonces los grupos característicos $p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(y)\big)$ y $p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(z)\big)$ son conjugados (en $\mathcal{G}(x)$).*

Demostración. Consideremos $g := p(\omega) \in \mathcal{G}(x)$. Si $\alpha \in p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(y)\big)$, entonces $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\mathcal{G}}(y)$ (por una prop anterior). Luego $\omega^{-1}\widetilde{\alpha}\omega \in \widetilde{\mathcal{G}}(z)$ y por lo tanto, $p(\omega^{-1}\widetilde{\alpha}\omega) = g^{-1}\alpha g \in p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(z)\big)$. Recíprocamente, si $\beta \in p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(z)\big)$. Considerando $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\mathcal{G}}(z)$, vale $\omega\widetilde{\beta}\omega^{-1} \in \widetilde{\mathcal{G}}(y)$ y luego $p(\omega\widetilde{\beta}\omega^{-1}) = g\beta g^{-1} \in p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(y)\big)$. Entonces tenemos $\beta = g^{-1}(gbg^{-1})g$ es el conjugado por g de un elemento de $p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(y)\big)$. □

Proposición 2.12. *Sea $p : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ un revestimiento. Dados $x \in \mathcal{G}, y/x$ y $H \subset \mathcal{G}(x)$ un subgrupo conjugado de $p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(y)\big)$, existe z/x tal que $H = p(\widetilde{\mathcal{G}}(z))$.*

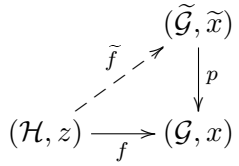
Demostración. Tenemos que $H = gp\big(\widetilde{\mathcal{G}}(y)\big)g^{-1}$ para algún $g \in \mathcal{G}(x)$. Si $g \in p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(y)\big)$, entonces $H = p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(y)\big)$ y listo. Si en cambio, $g \notin p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(y)\big)$ sabemos que no se levanta (comenzando en y) a un lazo, es decir $\widetilde{g}(1) = z \neq y$. Verificar que z sirve es similar a la prop anterior. □

Definición 2.13. $p : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ un revestimiento se dice conexo si $\widetilde{\mathcal{G}}$ es conexo y además p es sobre en los objetos. Es fácil ver que entonces $\mathcal{G}$ también es conexo. Dados $x, y \in \mathcal{G}$ sean $\widetilde{x}/x, \widetilde{y}/y$. Como $\widetilde{\mathcal{G}}$ es conexo, existe $\widetilde{x} \xrightarrow{g} \widetilde{y}$ y entonces $x \xrightarrow{p(g)} y$.

2.2. Grupoides punteados

Definición 2.14. Un grupoide punteado $(\mathcal{G}, x)$ es un grupoide junto con un elemento destacado $x \in \mathcal{G}$. Un morfismo de grupoides punteados es un morfirmo de grupoides $f : (\mathcal{H}, y) \to (\mathcal{G}, x)$ tal que $f(y) = x$. Asimismo, un revestimiento de grupoides punteados es un morfismo de grupoides que es un revestimiento. Llamamos el grupo característico del revestimiento $p : (\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{x}) \to (\mathcal{G}, x)$ al subgrupo $p(\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})) \subset \mathcal{G}(x)$.

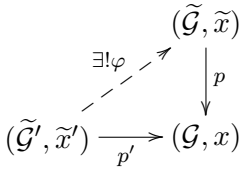
Proposición 2.15. *Dado el siguiente diagrama de grupoides punteados, donde p es un revestimiento y $\mathcal{H}$ es conexo:*



Entonces, existe un funtor $\widetilde{f}$ si y sólo si vale $f\big(\mathcal{H}(z)\big) \subset p\big(\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})\big)$. Más aún, en este caso, $\widetilde{f}$ es único.

Demostración. $\Rightarrow$) Es sencillo porque se tiene $f(H(z)) = p\widetilde{f}(H(z)) \subset p(\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x}))$ (donde la inclusión vale pues $\widetilde{f}(H(z)) \subset \widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})$.
$\Leftarrow$) Lo importante es que hay una sola manera de definir $\widetilde{f}$ para que sirva. Y esta única forma es coherente (es decir, es una buena definición) si se verifica la hipótesis.
Sea $z \xrightarrow{\omega} y \in \mathcal{H}$. Aplicamos f y levantamos $f\omega$ a $\widetilde{f\omega}$ el único que comienza en $\widetilde{x}$. Así $\widetilde{f}(y)$ sólo puede tener un valor posible: $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f\omega}(1)$. Esto podría traer una contradicción si tenemos $x \overset{\omega}{\underset{\gamma}{\rightrightarrows}} y$. Es decir, podría ocurrir $\widetilde{f\omega}(1) \neq \widetilde{f\gamma}(1)$. Pero esto no pasa porque $f(\omega\gamma^{-1}) \in p(\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x}))$, luego $\widetilde{f(\omega\gamma^{-1})} \in \widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})$ y por unicidad del levantado $\widetilde{f(\omega\gamma^{-1})} = \widetilde{f\omega}\widetilde{\gamma^{-1}} = \widetilde{f\omega}\widetilde{f\gamma}^{-1}$. En particular, $\widetilde{f\omega}$ y $\widetilde{f\gamma}$ terminan en el mismo lugar. □

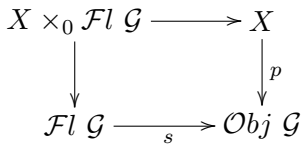
Corolario 2.16. *Si* $(\widetilde{\mathcal{G}},\widetilde{x}) \xrightarrow{p} (\mathcal{G},x)$ *y* $(\widetilde{\mathcal{G}}',\widetilde{x}') \xrightarrow{p'} (\mathcal{G},x)$ *son dos revestimientos tales que* $p(\widetilde{\mathcal{G}}(\widetilde{x})) = p(\widetilde{\mathcal{G}}'(\widetilde{x}'))$ *entonces existe un (único) isomorfismo* φ *tal que el diagrama conmuta:*



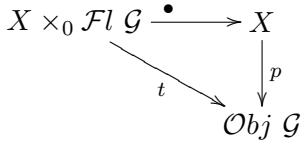
Demostración. Aplicamos la proposición anterior para obtener la existencia de $\varphi : (\widetilde{\mathcal{G}}',\widetilde{x}') \to (\widetilde{\mathcal{G}},\widetilde{x})$ y de $\Psi : (\widetilde{\mathcal{G}},\widetilde{x}) \to (\widetilde{\mathcal{G}}',\widetilde{x}')$.
Las aplicaciones son mutuamente inversas por la unicidad de la proposición anterior. □

2.3. Acciones de grupoides

Definición 2.17. Dado X un conjunto, $\mathcal{G}$ un grupoide, una acción (a derecha) de $\mathcal{G}$ en X consta de los siguientes datos:
Dos funciones $p : X \to \mathcal{O}bj\ \mathcal{G}$ (asignación) y $\bullet : X \times_0 \mathcal{F}l\ \mathcal{G} \to X$ (la acción) donde $X \times_0 \mathcal{F}l\ \mathcal{G}$ es el pullback de conjuntos:



(O sea, los pares $(x,g) \in X \times \mathcal{F}l\ \mathcal{G}$ tales que g empieza en $p(x)$.)
Las funciones $p, \bullet$ deben cumplir las condiciones:



(Es decir, g termina en $p(x \bullet g)$)
Y las condiciones que justifican el nombre de acción:

$$x \bullet 1_z = x \quad \forall z \in \mathcal{O}bj\ \mathcal{G}$$

$$x \bullet (g_1 g_2) = (x \bullet g_1) \bullet g_2$$

Definición 2.18. Si $(X,\mathcal{G})$ y $(Y,\mathcal{G})$ son dos acciones (con el mismo grupoide), un morfismo $f : (X,\mathcal{G}) \to (Y,\mathcal{G})$ es una función $f : X \to Y$ que conmuta con las dos acciones. Es decir:

$$p_Y f(x) = p_X(x); f(x) \bullet_Y \alpha = f(x \bullet_X \alpha) \forall x \in X, \alpha \in \mathcal{F}l\ \mathcal{G}$$

De esta manera tenemos definida la categoría $\mathcal{A}cc(\mathcal{G})$ de acciones de $\mathcal{G}$.

Observación 2.19. *Toda acción (a derecha) de un grupo en un conjunto se puede ver como una acción de grupoides, considerando* $p : X \to \mathcal{G}, \quad p(x) = *$.

Ejemplo. Si $E \xrightarrow{p} B$ es un revestimiento en $\mathcal{T}op$ entonces $\Pi_1(B)$ actúa sobre el conjunto E considerando la misma función $p : E \to B = \mathcal{O}bj\ \Pi_1(B)$ y con multiplicación dada por: $x \bullet \omega = \widetilde{w}(1)$ donde $x \in E, w(0) = p(x)$.
Observar que está acción generaliza la acción clásica del grupo fundamental en $b \in B$ en la fibra $p^{-1}(b)$.
Este ejemplo motiva la siguiente construcción:

Proposición 2.20. *Sea* $\widetilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{p} \mathcal{G}$ *es un revestimiento de grupoides. Entonces* $\mathcal{G}$ *actúa sobre* $\mathcal{O}bj\ \widetilde{\mathcal{G}}$ *con* p *como función de asignación y con acción dada para* $\widetilde{x}/x$,
$\alpha \in Stx\ :\ \widetilde{x} \bullet \alpha := \widetilde{\alpha}(1)$ *donde* $\widetilde{\alpha}$ *es el único levantado de* α *que comienza en* $\widetilde{x}$.
Asimismo, esta asignación define un funtor $\mathcal{A} : \mathcal{C}ov(\mathcal{G}) \to \mathcal{A}cc(\mathcal{G})$. *Dado por* $\mathcal{A}(f) = \mathcal{O}bj\ (f) : \mathcal{O}bj\ (\mathcal{H}) \to \mathcal{O}bj\ (\mathcal{J})$ *para* $f : \mathcal{H} \to \mathcal{J}$ *un morfismo de revestimientos.*

Demostración. La correcta definición de las asignaciones p y $\bullet$ es inmediata. Verifiquemos las condiciones de acción. Sea $x \in \mathcal{G}, \widetilde{x}/x$, entonces $\widetilde{x} \bullet 1_x = \widetilde{1_x}(1) = 1_{\widetilde{x}}(1) = \widetilde{x}$. Por otra parte, teniendo presente el lema 2.10, $\widetilde{x} \bullet (\alpha_1\alpha_2) = \widetilde{\alpha_1\alpha_2}(1) = (\widetilde{\alpha}_1\widetilde{\alpha}_2)(1) = \widetilde{\alpha}_2(1) = (\widetilde{\alpha}_1)(1) \bullet \alpha_2 = (x \bullet \alpha_1) \bullet \alpha_2$ (donde $\widetilde{\alpha}_2$ es el levantado de α_2 que comienza en $\widetilde{\alpha}_1(1)$).
Ver la funtorialidad de la construcción es sencillo ya que $\mathcal{A}(f)$ conmuta con las proyecciones por definición. También con las multiplicaciones pues $f(\widetilde{a}_x) = \widetilde{a}_{fx}$ (donde el primer levantado es empenzando en $x \in \mathcal{H}$ y el segundo empezando en $fx \in \mathcal{J}$. Por último, que $\mathcal{A}(_)$ respeta la composición es inmediato. □

Proposición 2.21. *Sea* $(X, \mathcal{G}, \bullet)$ *una acción. Entonces se tiene un grupoide,* $R(X)$ *dado por:*

$$\mathcal{O}bj\ R(X) = X$$

$$R(X)(x, y) = \{g \mid g \in \mathcal{G}(px, py),\ x \bullet g = y\}$$

Y como composición la inducida por $\mathcal{G}$, *es decir* $g \circ_{R(X)} h = g \circ_{\mathcal{G}} h$.
Más aún, la aplicación $p : R(X) \to \mathcal{G}$ *dada por* $p(x) = p(x),\ p(x \xrightarrow{g} y) = px \xrightarrow{g} py$ *es un revestimiento de grupoides.*

Asimismo esta asignación da lugar a un funtor $R : \mathcal{A}cc(\mathcal{G}) \to \mathcal{C}ov(\mathcal{G})$ *definido en los morfismos de acciones,* $f : X \to Y$ *por:*
$R(f) = f : X \to Y$ *en los objetos de los grupoides* $R(X)$ *y* $R(Y)$.
Si $x \xrightarrow{g} y$ *es una flecha en* $R(X)$, *por definición* $y = x \bullet_X g$. *Entonces* $f(y) = f(x \bullet_X g) = fx \bullet_Y g$ *por ser morfismo de acciones. Luego, hay una flecha en* $R(Y)$, $fx \xrightarrow{g} fy$ *y así definimos* $R(f)(x \xrightarrow{g} y) = fx \xrightarrow{g} fy$.

Demostración. Veamos que la composición en $R(X)$ está bien definida:
Si $x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{h} z$ en $R(X)$, entonces se tiene $x \bullet g = y,\ y \bullet h = z$ y por lo tanto, $x \bullet (gh) = (x \bullet g) \bullet h = y \bullet h = z$. Entonces $gh \in R(X)(x, z)$ y es lo que habíamos definido como gh.

Para ver que toda $x \xrightarrow{g} y \in \mathcal{F}l\ (R(X))$ es un iso, la miramos como flecha en $\mathcal{G}$ y consideramos su inversa g^{-1}. Como vale $x = x \bullet (gg^{-1}) = (x \bullet g) \bullet g^{-1} = y \bullet g^{-1}$, tenemos que $g^{-1} \in (R(X))(y, x)$ y resulta la inversa de g pues la composición se hereda de la composición en $\mathcal{G}$.
Ahora, para ver que la aplicación $p : R(X) \to \mathcal{G}$ es un revestimiento, debemos ver que dado $x \in R(X)$, tenemos una biyección:

$$St(x) \xrightarrow{p} St(px)$$

En primer lugar, si existe una flecha $p(x) \xrightarrow{h} w \in St(px)$ entonces $(x, g) \in X \times_0 \mathcal{G}$ que es el dominio de la acción. Es decir, está definido $y = x \bullet g\ in X$. Pero entonces $w = g(1) = p(x \bullet g) = py$. Luego $x \xrightarrow{g} y \in St(x)$ y por lo tanto la aplicación es sobreyectiva.
Por otra parte, si $x \xrightarrow{g} y, x \xrightarrow{h} z \in St(x)$ son tales que $g = p(g) = p(h) = h$ entonces $y = x \bullet g = x \bullet h = z$. Luego, se tiene $g = h$ pues $p : R(X)(x, y) \to \mathcal{G}(px, py)$ es inyectiva por definición.
Resta ver la funtorialidad de la construcción pero la verificación es inmediata. □

Corolario 2.22. *$RX(x) \xrightarrow{p} \mathcal{G}(px)$ es inyectiva. Además su imagen (el grupo característico de p en x) resulta el estabilizador de x (ie: $p(RX(x)) = \{g \in \mathcal{F}l\ \mathcal{G} \mid x \bullet g = x\}$.*

Demostración. La aplicación es inyectiva porque p es un revestimiento.
Como $p(RX(x)) = p(\{\widetilde{g} \mid g \in \mathcal{G}(px) \text{ y } x \bullet g = x\}) = \{g \in \mathcal{G}(px) | x \bullet g = x\}$, resta ver que si $g \in \mathcal{F}l\ \mathcal{G}, x \bullet g = x$ entonces $g \in \mathcal{G}(px)$. Pero esto es inmediato por las condición del dominio de la acción y la condición $g(1) = p(x \bullet g) = p(x)$. □

Observación 2.23. *Si la función p es sobreyectiva, resulta inmediato que la acción es transitiva (ie: $\forall x, y \in X,\ \exists g : x \bullet g = y$) si y sólo si el revestimiento es conexo.*

Observación 2.24. *Si se tiene la acción de un grupo en un conjunto (pensada como acción de un grupoide) y se realiza la construcción anterior, se obtiene el grupoide de la acción y un revestimiento sobre el grupo.*
Una forma de ver una acción de un grupo en un conjunto es como un funtor $\bullet : G \to \mathcal{E}ns$ donde vemos G como un grupoide con un solo objeto. De esta manera un funtor así consiste en asociarle al único objeto de G un conjunto X y aplicar el grupo G en los automorfismos de X (funciones biyectivas).

Observación 2.25. *Esto último tiene su generalización clara a grupoides y resulta equivalente a la definición anterior. Es decir, dada una acción de un grupoide en un conjunto podemos definir un funtor asociado:*

$$A : \mathcal{G} \to \mathcal{E}ns$$
$$A(a) = p^{-1}(a)$$
$$A(a \xrightarrow{\alpha} b)(x) = x \bullet \alpha$$

(donde $x \in p^{-1}(a)$)
Cabe aclarar que más allá de como notemos la composición (de izquierda a derecha para grupoides y de manera clásica para funciones de conjuntos), esta se respeta (es decir el funtor es covariante) esto se debe nomás a que el concepto matemático es independiente a su instancia en el papel.

Por otra parte, si se tiene un funtor así, reconstruímos la acción de la siguiente manera:
$X = \bigsqcup_{a \in \mathcal{G}} A(a)$ *y* $p : X \to \mathcal{G}$ *definida por* $p(x) = a$ $x \bullet g = A(g)(x)$

Tenemos entonces el siguiente:

Teorema 2.26. *Las categorías $\mathcal{C}ov(\mathcal{G})$, $\mathcal{A}cc(\mathcal{G})$ y $\mathcal{E}ns^{\mathcal{G}}$ son equivalentes (las equivalencias vienen dadas por las asignaciones definidas).*

Demostración. Sea $\widetilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{p} \mathcal{G} \in \mathcal{C}ov(\mathcal{G})$, definimos $\phi : R\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{G}}) \to \widetilde{\mathcal{G}}$ de la siguiente manera:
Como $\mathcal{O}bj\ R\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{G}}) = \mathcal{O}bj\ \widetilde{\mathcal{G}}$, la definimos como la identidad.
Si $x \xrightarrow{\alpha} y \in R\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{G}}$, existe $px \xrightarrow{\alpha} py \in \mathcal{G}$ tal que $x \bullet \alpha = y$ con $\bullet$ la acción de $\mathcal{A}(\widetilde{\mathcal{G}})$. Pero por definición de la acción, $x \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} y \in \widetilde{\mathcal{G}}$ donde $\widetilde{\alpha}$ es el levantado de α que comienza en x. Definimos entonces $\phi(\alpha) = \widetilde{\alpha}$.
ϕ es efectivamente un isomorfismo de revestimientos por construcción. Para ver la naturalidad de la transformación consideremos $\mathcal{H} \xrightarrow{f} \mathcal{J} \in \mathcal{C}ov(\mathcal{G})$. Debemos verificar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathcal{J} \\ {\scriptstyle \phi_{\mathcal{H}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{\mathcal{J}}} \\ R\mathcal{A}(\mathcal{H}) & \xrightarrow[R\mathcal{A}(f)]{} & R\mathcal{A}(\mathcal{J}) \end{array}$$

En los objetos es claro ya que $f = \mathcal{A}(f) = R\mathcal{A}(f)$ y las $\phi' s$ se definieron como la identidad.
Si $x \xrightarrow{\alpha} y \in \mathcal{H}$, entonces $\phi_{\mathcal{J}}(f\alpha) = \widetilde{f\alpha} = f(\widetilde{\alpha}) = f\phi_{\mathcal{H}}(\alpha)$.
Ahora si $(X, \mathcal{G})$ es una acción, es claro de las construcciones involucradas que $\mathcal{A}R(X) = X$ ya que el conjunto, la función p y la multiplicación $\bullet$ coinciden.
Luego se tiene la equivalencia $\mathcal{C}ov(\mathcal{G}) \underset{R}{\overset{\mathcal{A}}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}cc(\mathcal{G})$
La equivalencia entre $\mathcal{A}cc(\mathcal{G})$ y $\mathcal{E}ns^{\mathcal{G}}$ se tiene de la observación anterior. □

Ejemplo. Sean $\mathcal{G}$ un grupoide conexo, $x \in \mathcal{G}$ y $H \subset \mathcal{G}(x)$ un subgrupo. Sea $X = \{Ha \mid a \in St(x)\}$. Definimos la acción dada por : $p(Ha) = a(1)$ y $Ha \bullet g = H(ag)$. para $g \in \mathcal{F}l\ \mathcal{G}$ tal que $g(0) = p(Ha) = a(1)$.
Efectivamente, se tiene una acción pues se verifican:
(i) $p(Ha \bullet g) = p(H(ag)) = (ag)(1) = g(1)$.
(ii) $(Ha \bullet g) \bullet h = H(ag) \bullet h = H(agh) = Ha \bullet (gh)$.
(iii)$Ha \bullet 1_z = H(a1_z) = Ha$.

Lo remarcable de este ejemplo es que el grupo característico de este revestimiento en $H1_x$ es su estabilizador. O sea H. Además, como la acción es transitiva, resulta p conexo. Y Así, tenemos la existencia de revestimientos conexos de grupo característico H para cualquier subgrupo.

Corolario 2.27. *Dados $\mathcal{G}$ un grupoide, $x \in \mathcal{G}$, $H \subset \mathcal{G}(x)$ un subgrupo; existe $\mathcal{H} \xrightarrow{p} \mathcal{G}$ un revestimiento de grupoides con grupo característico H. Más aún, $\mathcal{H}$ es único salvo isomorfismo en la categoría $\mathcal{C}ov(\mathcal{G})$. En particular, siempre existe un revestimiento universal.*

Demostración. La existencia se debe al ejemplo anterior y la unicidad se desprende de la proposición 2.15. □

2.4. Grafos Dirigidos

Definición 2.28. Un quiver o grafo dirigido Γ consta de dos conjuntos Γ_0 (los vértices) y Γ_1 (las flechas) junto con dos asignaciones 'source'y 'target'$s, t : \Gamma_1 \to \Gamma_0$.
Un morfismo entre dos quivers $f : \Gamma \to \Gamma'$ es un par de asignaciones $f_0 : \Gamma_0 \to \Gamma'_0$ y $f_1 : \Gamma_1 \to \Gamma'_1$ compatible con las aplicaciones source y target. Más precisamente: $\forall \alpha \in \Gamma_1,\ s(f_1(\alpha)) = f_0(s(\alpha)),\ t(f_1(\alpha)) = f_0(t(\alpha))$.
Definimos así la categoría $\mathcal{Q}vr$ formada por los quivers y sus morfismos.
Un quiver Γ se dirá finito si los conjuntos Γ_0, Γ_1 son finitos.

Ejemplos. En general notaremos con números o letras latinas minúsculas a los vértices y con letras griegas minúsculas a las flechas. Representaremos gráficamente a los vértices como puntos y a una flecha α con $s(\alpha) = 0, t(\alpha) = 1$ como $0 \xrightarrow{\alpha} 1$.

- Llamaremos I al quiver: $0 \longrightarrow 1$
- El quiver $a \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} b \circlearrowright^{\gamma}$ suele llamarse quiver de Riedtmann.

Observación 2.29. *Toda categoría pequeña C es un quiver si olvidamos la ley de composición. Es decir si consideramos como conjunto de vértices a $\mathcal{O}bj\ C$ y como flechas a $\mathcal{F}l\ C$.*
Todo funtor entre dos categorías pequeñas visto como una aplicación entre los quivers subyacentes, es un morfismo de quivers y más aún la composición entre dos funtores vistos

como morfismos de quivers es la composición de los dos morfismos. Luego se tiene una asignación funtorial $\mathcal{O} : \mathcal{C}at \to \mathcal{Q}vr$. Este tipo de asignaciones son llamadas en general olvido porque consiste en olvidarse de algunas propiedades extra de la categoría de salida, en este caso la composición de flechas que se tiene en $\mathcal{C}at$ pero no en $\mathcal{Q}vr$. En general, incurriendo en un abuso de notación llamaremos también C a $\mathcal{O}C$.
Como para todo objeto $a \in C$ siempre se tiene $1_a \in C$, podemos no considerar estas flechas y no perderemos más información (de toda la que perdimos al olvidar la composición). Así, llamaremos $\mathcal{Q} : \mathcal{C}at \to \mathcal{Q}vr$ a esta construción (claramente funtorial).

Definición 2.30. Para Γ un quiver, para $x, y \in \Gamma_0$ un camino orientado de longitud n en Γ de x a y es una sucesión de flechas de Γ, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tal que $s(a_1) = x, t(a_n) = y, s(a_i) = t(a_{i-1}) \forall i \leq n$. Notaremos: $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = x \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n} y$. Consideraremos también para cada $x \in \Gamma_0$ el camino de longitud 0 notado por 1_x que consiste en el conjunto vacío (o sea 0 flechas).
Un ciclo orientado en Γ es un camino de longitud $n \geqslant 1$ $x \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n} x$. Γ se dirá acíclico si no se tienen en Γ cíclos orientados.

Definición 2.31. Definimos la categoría de caminos de Γ de la siguiente manera:

$$\mathcal{O}bj\ (\mathcal{P}\Gamma) = \Gamma_0$$
$$\mathcal{P}\Gamma(x, y) = \{x \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n} y \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathcal{P}\Gamma(x, y) \times \mathcal{P}\Gamma(y, z) \xrightarrow{\circ} \mathcal{P}\Gamma(x, z)$$
$$(x \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n} y) \circ (y \xrightarrow{\beta_1 \cdots \beta_m} z) = x \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m} z$$

Motivados en pensar las flechas como caminos notaremos la composición de caminos de izquierda a derecha. La asociatividad de la composición es inmediata de su definición. Asimismo, observemos que el camino de longitud 0 en x, 1_x resulta efectivamente la identidad del objeto x en la categoría $\mathcal{P}\Gamma$. Por último, cabe destacar que se tiene un morfismo de grafos $\Gamma \xrightarrow{i} \mathcal{P}\Gamma$ que es la identidad en los objetos y que aplica una flecha $\alpha \in \Gamma$ en el camino de longitud 1 dado por α.

Proposición 2.32. *Esta construcción es funtorial y la notaremos $\mathcal{P} : \mathcal{Q}vr \to \mathcal{C}at$.*

Demostración. Hasta ahora sólo hemos definido $\mathcal{P}$ en los objetos de la categoría $\mathcal{Q}vr$. Dado un morfismo de quivers $\Gamma \xrightarrow{f} \Gamma'$, definimos $\mathcal{P}\Gamma \xrightarrow{\mathcal{P}f} \mathcal{P}\Gamma'$ de la siguiente manera:

- $\mathcal{P}f$ en los objetos coincide con f.
- $\mathcal{P}f(1_x) = 1_{f(x)}\ \forall x \in \mathcal{O}bj\ \mathcal{P}\Gamma$
- $\mathcal{P}f(x \xrightarrow{\alpha} y) = f(x \xrightarrow{\alpha} y)$ si α tiene longitud 1.
- $\mathcal{P}f(x \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n} y) = f(\alpha_1) f(\alpha_2) \cdots f(\alpha_n)$ para los caminos de mayor longitud.

$\mathcal{P}f$ respeta la composición y las identidades por definición, por lo tanto resulta un funtor $\mathcal{P}\Gamma \xrightarrow{\mathcal{P}f} \mathcal{P}\Gamma'$.
Ahora, ver que la construcción esta es funtorial significa ver que si se tienen dos morfismos de quivers $\Gamma \xrightarrow{f} \Gamma' \xrightarrow{g} \Gamma''$ y se consideran $\mathcal{P}f$, $\mathcal{P}g$ y Pgf se tiene $\mathcal{P}gf = (\mathcal{P}g)(\mathcal{P}f)$. (trabajando en las categorías $\mathcal{Q}vr$ o $\mathcal{C}at$ notamos la composición de derecha a izquierda, o sea, de manera clásica.)
A nivel de objetos vale pues $\mathcal{P}f$, $\mathcal{P}g$ y $\mathcal{P}gf$ coinciden con las funciones (de conjuntos) f_0, g_0 y g_0f_0.
Para las identidades se tiene:

$$(\mathcal{P}gf)(1_x) = 1_{gf(x)} = (\mathcal{P}g)(1_{f(x)}) = (\mathcal{P}g)(\mathcal{P}f(1_x)) = (\mathcal{P}g\mathcal{P}f)(1_x)$$

Similarmente, para caminos de longitud 1:

$$(\mathcal{P}g\mathcal{P}f)(x \xrightarrow{\alpha} y) = (\mathcal{P}g)(f(x \xrightarrow{\alpha} y)) = (\mathcal{P}g)(f(x) \xrightarrow{f(\alpha)} f(y)) =$$

$$= g(f(x) \xrightarrow{f(\alpha)} f(y)) = gf(x) \xrightarrow{gf(\alpha)} gf(y) = (\mathcal{P}gf)(x \xrightarrow{\alpha} y)$$

Ahora si $x \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n} y$ es un camino de largo $n \geqslant 2$ se tiene:

$$(\mathcal{P}g\mathcal{P}f)(x \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n} y) = \mathcal{P}g(f(\alpha_1) \cdots f(\alpha_n)) = gf(\alpha_1) \cdots gf(\alpha_n) = \mathcal{P}gf(x \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n} y)$$

□

Proposición 2.33. *Se tiene $\mathcal{P} \dashv \mathcal{Q}$.*

Demostración. Queremos ver que existe una biyección natural:

$$\varphi : \mathcal{C}at(\mathcal{P}\Gamma, C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Q}vr(\Gamma, \mathcal{Q}C)$$

Definimos $\varphi(f)$ en los vértices por lo que vale en los objetos y en las flechas por su valor en los caminos de longitud 1 (que son las que provienen de las flechas de Γ).
Construimos una inversa $\mathcal{Q}vr(\Gamma, \mathcal{O}C) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}at(\mathcal{P}\Gamma, C)$ dada por:
Como los objetos de $\mathcal{P}\Gamma$ son los mismos que los de Γ, definimos $\Psi(f)(x) = f(x)$ en los objetos. Esto nos da la definición para las identidades: $\Psi f(1_x) = 1_{f(x)}$
Ahora, como los caminos de longitud 1 en $\mathcal{P}\Gamma$ son las flechas de Γ, definimos (de la única manera posible) $\Psi f(x \xrightarrow{\alpha} y) = f(x \xrightarrow{\alpha} y)$.
Por último, todo camino de longitud mayor se escribe de manera única como composición de (varios) caminos de largo 1, por lo tanto para que $\Psi(f)$ resulte funtorial, debemos definir: $\Psi(f)(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \Psi(f)(\alpha_1) \cdots \Psi(f)(\alpha_1) = f(\alpha_1) \cdots f(\alpha_n)$.
Para probar la naturalidad, definimos las transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathcal{Q}vr} \Rightarrow \mathcal{Q}\mathcal{P}$, $\xi : \mathcal{P}\mathcal{Q} \Rightarrow 1_{\mathcal{C}at}$:
$\eta_\Gamma : \Gamma \to \mathcal{Q}\mathcal{P}\Gamma$ dada por la identidad en los vértices y la identificación de las flechas de Γ con las flechas correspondientes a los caminos de longitud 1.
$\xi_C : C \to \mathcal{P}\mathcal{Q}C$ dada por la identidad en los objetos y en las flechas de C viéndolas en $\mathcal{P}\mathcal{Q}C$ como caminos de longitud 1.
Es claro que las tranformaciones son naturales por su construcción y la verificación de $1_{\mathcal{P}\Gamma} = \xi_{\mathcal{P}\Gamma}\mathcal{P}(\eta_\Gamma)$ y $1_{\mathcal{Q}C} = \mathcal{Q}(\xi_C)\eta_{\mathcal{Q}C}$ es inmediata. □

Definición 2.34. Sea $\Gamma \in \mathcal{Q}vr$ un quiver. Definiremos de manera análoga el grupoide de caminos de Γ permitiendo ahora que los caminos se formen con flechas "al revés". Más formalmente, sea Γ' el quiver dado por $\Gamma'_0 = \Gamma_0,\ \Gamma'_1 = \Gamma_1 \sqcup \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \Gamma_1\}$ donde invertimos las aplicaciones source y target en la segunda copia (la idea es agregar inversas de las flechas de Γ pero sin agregar relaciones). Ahora consideramos $\mathcal{P}\Gamma'$ y definimos:

$$\mathcal{O}bj\ \Pi\Gamma = \mathcal{O}bj\ \mathcal{P}\Gamma' = \mathcal{O}bj\ \Gamma$$

$$\Pi\Gamma(a,b) = \mathcal{P}\Gamma'(a,b)/\sim$$

donde la relación de equivalencia es la generada por $\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \overline{\alpha}\alpha = 1,\ \forall \alpha \in \Gamma_1$.
Y la composición dada por la concatenación de caminos.
Pensamos $\Gamma \subset \Pi\Gamma$ vía la asignación $\alpha \to [\alpha]$ (es claro que es inyectiva).

Ejemplo. Sea Γ dado por $\Gamma_0 = *,\ \Gamma_1 = \{a_1 \cdots a_r\}$ entoces $\Pi\Gamma$ es el grupo libre en los r generadores $\{a_1 \cdots a_r\}$ (visto como grupoide).

Con este ejemplo presente, el siguiente lema es la generalización del hecho de que en un grupo libre todo elemento corresponde a una única palabra reducida.

Lema 2.35. *Sea $\mathcal{G}$ un grupoide y Γ un subgrafo de $\mathcal{G}$ tal que $\Gamma_0 = \mathcal{O}bj\ \mathcal{G}$. Entonces son equivalentes:*

(i) $\mathcal{G} \cong \Pi\Gamma$ y el isomorfismo es la identidad en Γ.

(ii) Para toda α flecha de $\mathcal{G}$, existe una escritura $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ tal que α_i o α_i^{-1} es una flecha de Γ. Más aún, la escritura es única si se tiene la precaución de pedir que dos flechas consecutivas no sean mutuamente inversas.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si en $\Pi\Gamma$ vale (ii) y vía el isomorfismo se tiene (ii) en $\mathcal{G}$.
Efectivamente (ii) vale en $\Pi\Gamma$ ya que si $x \xrightarrow{\omega} y$ en $\Pi\Gamma$, por definición se tiene
$\omega = [\alpha_1 \cdots \alpha_n] = [\alpha_i] \cdots [\alpha_n]$ con $[\alpha_i]$ o $[\alpha_i]^{-1}$ en Γ. La condición para la unicidad es clara.
Cabe destacar que esta demostración es escencialmente la misma que de la escritura única como palabra reducida para el caso de un grupo libre.

$(ii) \Rightarrow (i)$ El isomorfismo se define como la identidad en Γ y se extiende a todo $\mathcal{G}$ por me dio de la escritura única que se tiene.

□

La siguiente proposición nos da idea de en qué sentido los grupoides de caminos generalizan a los grupos libres.

Proposición 2.36. *Sea $\mathcal{G}$ un grupoide conexo y $x \in \mathcal{G}$, entonces el grupo $\mathcal{G}(x)$ es libre si y sólo si $\mathcal{G} = \Pi\Gamma$ para algún Γ.*

Demostración. Sea $\Gamma' \subset \mathcal{G}$ un árbol (ie: un grafo sin ciclos) maximal (ver [Sp].Como Γ' es maximal, contiene a todos los puntos de $\mathcal{G}$.

Si $\mathcal{G}(x)$ es libre, consideramos un sistema Γ'' de generadores del grupo y construimos entonces el grafo $\Gamma = \Gamma' \sqcup \Gamma''$ (la unión es disjunta porque Γ' no tiene ciclos y Γ'' son todos ciclos).
Sea $y \xrightarrow{\omega} z$ una flecha en $\mathcal{G}$. Como el grupoide es conexo y Γ' es una árbol maximal, se tiene un único camino (no dirigido) $x \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n} y$ con α_i o $\alpha_i^{-1} \in \Gamma'$. Similarmente, $z \xrightarrow{\beta_1 \cdots \beta_m} x$. Ahora, como $\widetilde{\omega} = \alpha_1 \cdots \alpha_n \omega \beta_1 \cdots \beta_m \in G(x)$, esta flecha se escribe de manera única como producto de elementos en Γ'' o sus inversos, $\widetilde{w} = \gamma_1 \cdots \gamma_l$. Luego se tiene:

$$\omega = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1} \widetilde{\omega} (\beta_1 \cdots \beta_m)^{-1} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1} \gamma_1 \cdots \gamma_l (\beta_1 \cdots \beta_m)^{-1}$$

Con la unicidad requerida.

El recíproco es inmediato del lema anterior, tomando como generadores de $\mathcal{G}(x)$ los lazos (no-dirigidos) en el grafo Γ con base x.

Observar que se tiene un generador del grupo $\Gamma(x)$ por cada flecha fuera de un árbol maximal de Γ □

Proposición 2.37. *Sean $\widetilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{p} \mathcal{G}$ un revestimiento y $\mathcal{G} = \Pi\Gamma$. Si consideramos $\widetilde{\Gamma} = \{\widetilde{g} \in \widetilde{\mathcal{G}} \mid p(\widetilde{g}) \in \Gamma\}$. Entonces $\widetilde{\mathcal{G}} \cong \Pi\widetilde{\Gamma}$.*

Demostración. Probemos que se tiene la propiedad de escritura única del lema anterior. Sea $x \xrightarrow{\omega} y \in \widetilde{\mathcal{G}}$ y consideremos $p(\omega) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ la única escritura con flechas o inversas de flechas de Γ (sin que dos consecutivas sean mutuamente inversas). Levantando por el revestimiento, tenemos $\omega = \widetilde{\alpha}_1 \cdots \widetilde{\alpha}_n$. La unicidad requerida es inmediata de la unicidad de levantamiento de caminos (2.10) y el hecho de que la escritura en $\mathcal{G}$ sabemos por hipótesis que es única.

□

Una aplicación interesante de estos conceptos es una demostración algebraica del siguiente teorema. Una demostración topológica puede encontrarse en [Sp]. Es interesante observar las similitudes ambas demostraciones.

Teorema 2.38. *(Nielsen-Schreier) Sea G un grupo libre y $H \subset G$ un subgrupo. Entonces H es libre. Más aún si $|G| = n$, $[G : H] = i$, se tiene $|H| = ni - i + 1$.*

Demostración. Pensemos G como grupoide con único objeto $*$. Como es libre, entonces $G = \Pi\Gamma$, para algún grafo $\Gamma \subset G$. Al considerar el revestimiento $\mathcal{H} \xrightarrow{p} G$ construído por la acción en las co-clases a derecha de H se tiene $\mathcal{H} = \Pi\widetilde{\Gamma}$ ($\widetilde{\Gamma} = p^{-1}\Gamma$) y por lo tanto $\mathcal{H}(H \cdot 1) = H$ es libre.

Para conseguir el órden de H observemos que $[G : H] = i$ es el cárdinal de la fibra del revestimiento (pues es la cantidad de co-clases). Por otra parte, al ser un revestimiento, $\widetilde{\Gamma}$

tiene ni flechas. Como $\widetilde{G}$ tiene i vértices, un árbol maximal contiene $i-1$ flechas. Por lo visto anteriormente, H tiene tantos generadores como flechas de $\widetilde{\Gamma}$ fuera del árbol maximal, o sea, $ni-(i-1)$ como se quería.

□

2.5. Revestimientos de Categorías pequeñas

Recordemos que motivados por la composición en grupoides y en el álgebra de caminos de un quiver, vamos a notar $\alpha\beta$ a la composición $\overset{\alpha}{\to}\overset{\beta}{\to}$ en una categoría pequeña.

Estudiaremos ahora revestimientos en el contexto de categorías pequeñas. A diferencia de grupoides, no tenemos que toda flecha sea un isomorfismo. Esto nos garantizaba que pedir levantamiento único de flechas que salen de cada punto es equivalente a pedirlo para flechas que llegan. Esto no ocurre en categorías, por ejemplo el funtor:

$$\begin{array}{ccc} x & \searrow & \\ & & y \\ x' & \nearrow & \end{array}$$

$$\downarrow f$$

$$a \longrightarrow b$$

(donde $fx = fx' = a, fy = b$)
cumple levantamiento único de flechas que salen pero no de las que llegan.

Es por eso que en la definición incluiremos ambas condiciones.

Definición 2.39. Un funtor $C \overset{p}{\to} D$ entre dos categorías pequeñas se dice un revestimiento si para todos $a, b \in D,\ \forall x/a,\ \forall y/b,\ p$ induce biyecciones:

$$\coprod_{z/b} C(x,z) \overset{p}{\to} D(a,b)$$

$$\coprod_{w/a} C(w,y) \overset{p}{\to} D(a,b)$$

Observación 2.40. *De manera análoga a como hicimos con grupoides, podemos interpretar la definición de la siguiente forma:*
Dado un diagrama en $\mathcal{C}at$

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\widetilde{x}} & C \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{\exists!\widetilde{\alpha}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I & \xrightarrow[\alpha]{} & D \end{array}$$

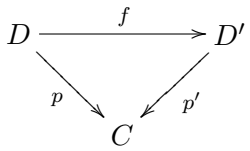
Donde $*$ es la categoría con un sólo objeto y una única flecha e $I = 0 \to 1$.
La definición original es equivalente a pedir que existe una única $\widetilde{\alpha}$ tal que todo conmuta cuando $i(*) = 0$ y cuando $i(*) = 1$.

Observación 2.41. *Sea $\widetilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{p} \mathcal{G}$ un funtor entre grupoides. p es un revestimiento de grupoides si y sólo si es un revestimiento de categorías. Esto se desprende de la observación anterior y la observación 2.6.*

Proposición 2.42. *Si $C \xrightarrow{p} \mathcal{G}$ es un revestimiento con $\mathcal{G}$ un grupoide entonces C es un grupoide.*

Demostración. Sea $x \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} y$ una flecha en C. Consideremos $\alpha = p(\widetilde{\alpha}) : a \to b$ en $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es un grupoide, existe $\alpha^{-1} \in \mathcal{G}$. Sea $\widetilde{\alpha^{-1}}$ su único levantado que empieza en y.
Calculamos: $p(\widetilde{\alpha}\widetilde{\alpha^{-1}}) = \alpha\alpha^{-1} = 1_a$ y resulta que $\widetilde{\alpha}\widetilde{\alpha^{-1}}$ es un levantado de 1_a que empieza en x, por lo tanto $\widetilde{\alpha}\widetilde{\alpha^{-1}} = 1_x$. Análogamente se puede verificar $\widetilde{\alpha^{-1}}\widetilde{\alpha} = 1_y$. □

Definición 2.43. Para $C \in \mathcal{C}at$, definimos la categoría de revestimientos sobre C, $\mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at}(C)$ como la categoría cuyos objetos son los revestimientos $D \xrightarrow{p} C$ y los morfismos entre dos revestimientos $D \xrightarrow{p} C$ y $D' \xrightarrow{p'} C$ son los funtores $f : D \to D'$ tales que el diagrama conmuta:



Análogamente definiremos $\mathcal{C}ov$ en cada categoría en la que trabajemos.

Observación 2.44. *La proposición anterior se puede reformular de la siguiente manera: Si $\mathcal{G} \in \mathcal{G}pd$ entonces se tiene $\mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at}(\mathcal{G}) = \mathcal{C}ov_{\mathcal{G}pd}(\mathcal{G})$.*

Estudiaremos ahora el grupide fundamental de una categoría y su relación con los revestimientos sobre ella. Otras referencias para esto son [G-Z], [Oj].

Definición 2.45. Dada $C \in \mathcal{C}at$, consideremos el grafo dirigido subyacente y el grupoide que este genera libremente. Es decir, consideramos el funtor $\Pi\mathcal{Q} : \mathcal{C}at \to \mathcal{G}pd$.

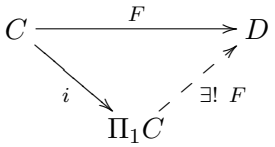
Definimos una relación de equivalencia en el conjunto (es un conjunto debido a la pequeñez de C) de todas las flechas de $\Pi\mathcal{Q}C$ como la menor relación de equivalencia que satisface:

$$a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \sim a \xrightarrow{\alpha\beta} c$$

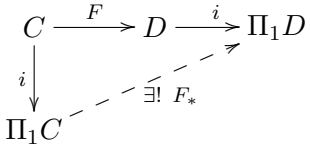
(se identifican la flecha porveniente de una composición en C con la correspondiente composición de flechas nuevas)

Se define entonces su grupoide fundamental de la siguiente manera:
$\mathcal{O}bj\ \Pi_1 C = \mathcal{O}bj\ C$
$\Pi_1(a,b) = \Pi\mathcal{Q}C(a,b)/\sim$
Pensaremos siempre $C \xrightarrow{i} \Pi_1 C$ como una inclusión.

Observación 2.46. *Se tiene la siguiente propiedad universal: Si $F : C \to D$ (D una categoría cualquiera) es un funtor tal que $\forall \alpha \in \mathcal{F}l\ C, F(\alpha)$ es un iso, entonces existe un único funtor que hace conmutar el diagrama:*

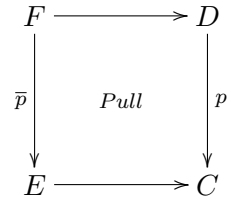


Por lo tanto se tiene que la construcción es funtorial, ya que para $F : C \to D \in \mathcal{C}at$ definimos F_* vía:

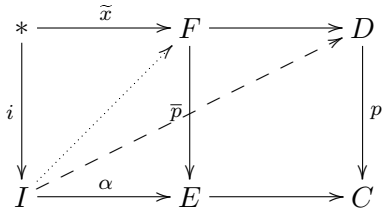


Más aún se tiene $\Pi_1 \dashv inc$ (la inclusión de grupoides en categorías pequeñas).

Lema 2.47. *Si el siguiente diagrama es un pullback en $\mathcal{C}at$ y p es un revestimiento, entonces $\overline{p}$ es un revestimiento.*



Demostración. Consideremos el diagrama



donde existe una única flecha $- - \succ$ por ser p un revestimiento y por lo tanto existe una única flecha $\cdots\succ$ por la propiedad universal del pullback.

□

Teorema 2.48. $\Pi_1 : \mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at}(C) \to \mathcal{C}ov_{\mathcal{G}pd}(\Pi_1 C)$ *es una equivalencia de categorías.*

Demostración.
Buena definición: Sea $D \xrightarrow{p} C$ un revestimiento, veamos que efectivamente $\Pi_1 D \xrightarrow{p_*} \Pi_1 C$ es un revestimiento. Lo importante aquí es que toda flecha del Π_1 de una categoría es composición de flechas originales de la categoría o de inversas formales. Además, la condición de levantar flechas en el Π_1 coincide con el levantamiento único de caminos.
Para ver que da lugar a una equivalencia, veamos que es plenamente fiel y denso.

Plenamente fiel:
Sean $D \xrightarrow{p} C, D' \xrightarrow{p'} C$ dos revestimientos. En primer lugar, es inmediato de la propiedad universal expuesta en la observación anterior que $\Pi_1 : \mathcal{C}at \to \mathcal{G}pd$ es plenamente fiel. Debemos ver entonces que la restricción sigue siendo plenamente fiel. Pero esto es claro ya que la condición de conmutar con los revestimientos p_*, p'_* es equivalente a la condición de conmutar en las flechas originales de D, D'.
Denso:

Sea $\mathcal{G} \xrightarrow{p} \Pi_1 C$ un revestimiento de grupoides como es de categorías también, al considerar el pullback (con la preimagen de C por p y su restricción $p_|$):

$$\begin{array}{ccc} \hat{C} = p^{-1}(C) & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle \hat{p}=p_|}\downarrow & Pull & \downarrow{\scriptstyle p} \\ C & \longrightarrow & \Pi_1 C \end{array}$$

Se tiene que $\hat{p}$ es un revestimiento de categorías y por lo tanto $\hat{p}_* : \Pi_1 \widetilde{C} \to \Pi_1 C$ es un revestimiento de grupoides. Veamos que efectivamente es isomorfo a $\mathcal{G} \xrightarrow{p} \Pi_1 C$.

Para esto alcanza ver para $x \in \mathcal{O}bj\ (\mathcal{G}) = \mathcal{O}bj\ (\hat{C}) = \mathcal{O}bj\ (\Pi_1 \hat{C})$ que $p(Gx) = \hat{p}((\Pi_1 \hat{C})x)$.

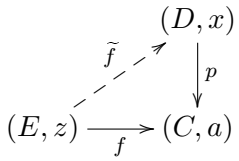
Lo importante de esta situación es que las aplicaciones $p, \hat{p}, \hat{p}_*$ coinciden en los objetos. Además, las flechas de $\hat{C}$ se pueden ver como flechas en $\Pi_1 \hat{C}$ y como flechas en $\mathcal{G}$ simultáneamente. Y no solamente eso, sino también, por construcción de $\hat{p}_*$, se tiene:

$$\hat{p}_*(\gamma) = p(\gamma) \forall \gamma \in \hat{C}$$

Ahora bien, esta asignación en las flechas de $\hat{C}$ se extiende de manera única a
$\Phi : \Pi_1 \hat{C} \to \mathcal{G}$ por la propiedad universal del Π_1.
Φ es un morfismo de revestimientos porque es coherente en los objetos y en las flechas de $\hat{C}$. Además, es biyectivo en los objetos porque coincide con la identidad. Por otra parte, es inyectivo en las flechas por la unicidad de la escritura de las flechas de $\Pi_1 \hat{C}$ con flechas de $\hat{C}$ y porque lo es para las flechas de $\hat{C}$. Por último, es sobreyectivo porque toda flecha de $\mathcal{G}$ se escribe como composición de levantados de flechas de C, que son las flechas de $\hat{C}$ por definición.

□

Proposición 2.49. *Dado el siguiente diagrama de categorías pequeñas punteadas, donde p es un revestimiento y E es conexo:*



Entonces existe un funtor $\widetilde{f}$ si y sólo si $f_*\big(\Pi_1 E)z)\big) \subset p_*\big((\Pi_1 D)x\big)$. Además, en este caso $\widetilde{f}$ es único.

Demostración. Una demostración directa sería muy similar a 2.15 podemos además probarlo vía la equivalencia anterior. □

2.6. Revestimientos de Categorías con Ceros

En este apartado estudiaremos revestimientos de categorías con ceros. Estas se presentan como un puente al estudio de k-categorías.

Definición 2.50. Una categoría con ceros es una categoría C tal que para cada $x, y \in C$ se tiene una flecha $0 : x \to y$ tal que $f0 = 0g = 0$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}l\ C$ (para las cuales la composición tenga sentido). Notar que para cada $x, y \in C$ la flecha $x \xrightarrow{0} y$ es única.
Llamaremos $\mathcal{C}at_0$ a la subcategoría (no plena) de $\mathcal{C}at$ formada por las categorías con ceros pequeñas y los funtores entre ellas que aplican ceros en ceros.
La composición será notada de izquierda a derecha.

Observación 2.51. *Se tiene un funtor $\Xi : \mathcal{C}at \to \mathcal{C}at_0$ que consiste en agregar ceros:*
$\mathcal{O}bj\ \Xi C = \mathcal{O}bj\ C$
$\Xi C(x, y) = C(x, y) \cup \{0\}$
Con la composición dada por:

$$\alpha \circ \beta = \begin{cases} \alpha \circ \beta & \text{si } \alpha, \beta \in \mathcal{F}l\ C \\ 0 & \text{si no, es decir si una de las dos es 0} \end{cases}$$

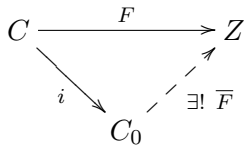
Ahora dado $F : C \to D$ un funtor, definimos $\Xi(F)$ como: $\Xi(F)(x) = F(x)\ \forall x \in C$

$$\Xi(F)(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \text{si } \alpha \in \mathcal{F}l\ C \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Observemos también que C es una subcategoría de ΞC, llamaremos i a esta aplicación.

Notación. Notaremos $C_0 = \Xi(C),\ F_0 = \Xi(F)$

Proposición 2.52. *El funtor Ξ tiene la siguiente propiedad universal. Dadas $C \in \mathcal{C}at, Z \in \mathcal{C}at_0$ y un funtor $F : C \to Z$ se tiene un único funtor $\overline{F} \in \mathcal{M}or\ \mathcal{C}at_0$ tal que el diagrama de funtores conmuta:*



Se tiene entonces $\Xi \dashv inc$ ($inc : \mathcal{C}at_0 \to \mathcal{C}at$ la inclusión).

Demostración. Sencillamente se define $\overline{F}(0) = 0$. □

Lema 2.53. *Sea $Z \in \mathcal{C}at_0$, entonces son equivalentes:*
(i) $Z = C_0$ para alguna $C \in \mathcal{C}at$.
(ii) $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{F}l\ Z$ no nulas y componibles se tiene $\alpha\beta \neq 0$.

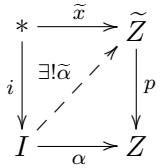
Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Es claro ya que cualesquiera $\alpha,\ \beta$ no nulas y componibles son flechas provenientes de C, entonces $\alpha\beta \in \mathcal{F}l\ C$ y es una flecha no nula en C_0.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Consideramos $\mathcal{O}bj\ C = \mathcal{O}bj\ Z$ y $\mathcal{F}l\ C = \{\alpha \in \mathcal{F}l\ Z \mid \alpha \neq 0\}$. La composición de Z se restringe bien a C por hipótesis y es claro que $Z = C_0$. □

Definición 2.54. $C \xrightarrow{p} D \in \mathcal{C}at_0$ se dice un revestimiento si lo es en $\mathcal{C}at$.

Notar que el hecho de que sea un funtor en $\mathcal{C}at_0$ dice que aplica las flechas cero en flechas cero y que haya un único levantado de cada flecha nos da la siguiente propiedad

$$p(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$$

Observación 2.55. *Dado un diagrama en $\mathcal{C}at_0$:*

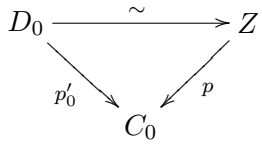


Donde $*$ es la categoría con un sólo objeto y flechas 0 y 1 e $I = 0 \underset{0}{\overset{a}{\rightrightarrows}} 1$.
La definición anterior es equivalente a pedir que existe una única $\widetilde{\alpha}$ tal que todo conmuta cuando $i(*) = 0$ e $i(*) = 1$.

Proposición 2.56. *Dada $C \in \mathcal{C}at$, el funtor $\Xi : \mathcal{C}at \to \mathcal{C}at_0$ se restringe a $\Xi : \mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at}(C) \to \mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at_0}(C_0)$ y resulta una equivalencia de categorías.*

Demostración.

- Ξ es denso:
  Sea $Z \xrightarrow{p} C \in \mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at_0}(C_0)$ y sean $\alpha, \beta \in \mathcal{F}l\ Z$ dos flechas no nulas y componibles. Como $\alpha, \beta \neq 0$, entonces $p(\alpha), p(\beta) \neq 0$. Por el lema 2.53, $0 \neq p(\alpha)p(\beta) = p(\alpha\beta)$ y nuevamente tenemos que $\alpha\beta \neq 0$.
  Luego $Z = D_0$ donde D está formada por las flechas no nulas de Z (ver demostración del lema 2.53).
  Como flechas no nulas se aplican en flechas no nulas, se tiene entonces que la restricción $p_| : D \to C_0$ se puede correstringir a $p' : D \to C$ (porque las flechas no nulas de C_0 son las de C).
  Es claro que p' es un revestimiento en $\mathcal{C}at$ y que el diagrama conmuta en $\mathcal{C}at_0$:



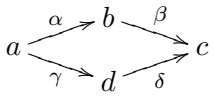
- Ξ es plenamente fiel:
  Sean $D \xrightarrow{p} C, E \xrightarrow{q} C \in \mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at}(C)$.
  $\Xi : \mathcal{C}at(D, E) \to \mathcal{C}at_0(D_0, E_0)$ es inyectivo por construcción, por lo tanto lo es su restricción. Ahora si $f : D_0 \to E_0$ es un morfismo en $\mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at_0}(C_0)$:
  Para $\alpha \in D,\ q(g(\alpha)) = p(\alpha) \neq 0 \Rightarrow g(\alpha) \neq 0$.
  Luego g aplica flechas de D en flechas de E y entonces se restrige y corestringe $g_| : D \to E$ y es claro que resulta un morfismo de revestimientos. Además $(g_|)_0 = g$ por construcción.

□

Definición 2.57. Para $Z \in \mathcal{C}at_0$ queremos definir el grupoide fundamental de Z, $\Pi_1 Z$. Para esto consideramos el grafo subyacente esencial que consiste en ignorar las flechas cero. Es decir, el quiver $\mathcal{Q}Z$ cuyos vértices son los objetos de Z y $\mathcal{Q}Z(a, b) = \{\alpha \in Z(a, b) \mid \alpha \neq 0\}$. Esta construcción es claramente funtorial. No debe prestarse a confusión el hecho de llamar al funtor $\mathcal{Q}$ igual que en la definición para categorías pequeñas.
Ahora consideramos el funtor $\Pi\mathcal{Q} : \mathcal{C}at_0 \to \mathcal{G}pd$.

Definimos, análogamente a lo hecho con categorías, una relación de homotopía en el conjunto de todas las flechas de $\Pi\mathcal{Q}Z$ como la menor relación de equivalencia que satisface: $a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \sim a \xrightarrow{\alpha\beta} c$ cada vez que esta situación se da con flechas originales de Z no nulas.
Se define el grupoide fundamental de la siguiente manera:
$\mathcal{O}bj\ \Pi_1 Z = \mathcal{O}bj\ Z$
$\Pi_1(a, b) = \Pi\mathcal{Q}Z(a, b)/\sim$

Ejemplo. Consideremos la categoría con ceros Z dada por:



donde $\alpha\beta = \gamma\delta = 0$.

Entonces $\mathcal{Q}Z$ es el quiver dibujado y $\Pi_1(Z) = \Pi\mathcal{Q}Z$. Observar que entonces se tiene $\Pi_1(Z, a) = \mathbb{Z}$.

Por otra parte si consideramos $Z \in cat$, es decir, consideramos la flecha 0 como una flecha más, resulta Z simplemente conexa.

Observación 2.58. *En el caso de $C \in \mathcal{C}at$ el grafo subyacente siempre contiene las composiciones. En el caso de $z \in \mathcal{C}at_0$ el grafo subyacente esencial no contiene las composiciones nulas, pero sí las no nulas. Esto en conjunto con el lema 2.53 nos dice:*

$$\Pi_1(C) = \Pi_1(C_0)$$

Teorema 2.59. *Para $Z \in \mathcal{C}at_0$, las categorías $\mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at_0}(Z)$ y $\mathcal{E}ns^{\Pi_1(Z)}$ son equivalentes.*
Omitiremos la prueba ya que es muy similar al caso $\mathcal{C}at$.

3. Álgebras y k-Categorías

En esta sección estudiaremos los resultados más pertinentes sobre k-álgebras, k-categorías y módulos de k-álgebras. Fijaremos de aquí en más k un cuerpo algebraicamente cerrado.

3.1. k-álgebras

Definición 3.1. Una k-álgebra Λ es un k-espacio vectorial junto con una estructura de anillo (con unidad) de manera que:

$$\forall \lambda \in k, \forall a, b \in \Lambda, \qquad a(\lambda b) = \lambda(ab) = (\lambda a)b$$

Una k-álgebra se dice de dimensión finita si lo es como k-espacio vectorial. Sólo consideraremos k-álgebras de dimensión finita. Es decir, de ahora en más cada vez que indiquemos k-álgebra o álgebra nos estaremos refiriendo a una k-álgebra de dimensión finita.

Recordemos además que morfismo de k -álgebras $f : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ es un morfismo de anillos y también una transformación k-lineal. Por último, si $I \subset \Lambda$ es un ideal bilátero, se tiene en el espacio vectorial cociente Λ/I una única estructura de k-álgebra de manera tal que la proyección canónica al cociente resulte un morfismo de k-álgebras.

Por último, recordemos que si Λ_1, Λ_2 son dos k-álgebras, se tiene el álgebra producto $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ que consiste en $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ como espacio vectorial y la multiplicación se define coordenada a coordenada.

Definición 3.2. El radical de Jacobson de un álgebra Λ es el ideal dado por la intersección de los ideales maximales a derecha. Es decir,

$$rad(\Lambda) = \bigcap_{I \in \mathcal{M}} I \qquad \mathcal{M} \text{ conjunto de ideales maximales a derecha}$$

Lema 3.3. *Sea Λ una k-álgebra, $a \in \Lambda$, son equivalentes:*

1. $a \in rad(\Lambda)$
2. $\forall b \in \Lambda,\ 1 - ab$ *es inversible*
3. $\forall b \in \Lambda,\ 1 - ab$ *es inversible a derecha*
4. $a \in \bigcap_{I \in \mathcal{M}'} I$ *con $\mathcal{M}'$ el conjunto de maximales a izquierda.*
5. $\forall b \in \Lambda,\ 1 - ba$ *es inversible*
6. $\forall b \in \Lambda,\ 1 - ba$ *es inversible a izquierda*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 3.
Sea $b \in \Lambda$ tal que $1 - ab$ no tiene inverso a derecha. Luego, existe un ideal maximal a derecha $I \subset \Lambda$ tal que $1 - ab \in I$. Pero como $a \in rad(\Lambda) \subset I$, entonces $ab \in I$ y por lo tanto $1 \in I$.
3. $\Rightarrow$ 1.
Supongamos que $a \notin rad(\Lambda)$, es decir, existe un ideal maximal a derecha I tal que $a \notin I$. Como $\Lambda = I + a\Lambda$, se tiene que existe $x \in I$ tal que $1 = x + ab$. Luego, $1 - ab \in I$ y por lo tanto no puede ser inversible a derecha.
2. $\iff$ 5.
Observemos que si $(1 - ab)u = 1$ entonces $(1 - ba)(1 + bua) = 1$. Análogamente, si $t(1 - ba) = 1$ entonces $(1 + atb)(1 - ab) = 1$.
3. $\Rightarrow$ 2.
Sea $b \in \Lambda$, entonces existe $c \in \Lambda$ tal que $(1 - ab)c = 1$. Tambien tenemos inverso a derecha para $c = 1 - a(-bc)$ (llamemoslo d). Calculamos: $1 = cd = d + abcd = d + ab$. Luego, $d = 1 - ab$ es inverso a derecha de c.

□

Corolario 3.4. *Sea Λ un álgebra y $rad(\Lambda)$ su radical, entonces vale:*

- *$rad(\Lambda)$ es un ideal bilátero y $rad\big(\Lambda/rad(\Lambda)\big) = 0$.*
- *Si I es un ideal bilátero nilpotente, entonces $I \subset rad(\Lambda)$.*

Demostración.

- El hecho que $rad(\Lambda)$ es un ideal bilátero se sigue inmediatamente del lema anterior. Por otra parte, los ideales maximales del cociente $\Lambda/rad(\Lambda)$ se corresponden vía la proyección con los de Λ y por lo tanto su intersección es cero.

- Sea I un ideal bilátero nilpotente. Es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I^m = 0$. Sean $x \in I, a \in \Lambda$. Como $ax \in I$, entonces $(ax)^r = 0$ para algún r. Entonces tenemos $\big(\sum_{k=0}^{r-1}(ax)^k\big)\big(1 - ax\big) = 1$ y por lo tanto $(1 - ax)$ tiene inverso a izquierda. Como esto puede repetirse para cualquier $a \in \Lambda$, tenemos que $x \in rad(\Lambda)$ por el lema anterior.

□

Definición 3.5. Al ser Λ un anillo consideramos su categoría de módulos (a derecha). Llamaremos $Mod(\Lambda)$ a esta categoría.
Un módulo M se dice finitamente generado si para algun $d \in \mathbb{N}$ se tiene un epimorfismo $\Lambda^d \to M$. Es inmediato (pues el álgebra es de dimensión finita) que esto es equivalente a que M sea de dimensión finita como k-espacio vectorial. Notaremos $mod(\Lambda)$ a la subcategoría plena de módulos finitamente generados.

Recordemos un resultado clásico, el lema de Nakayama y una aplicación en nuestro contexto.

Lema 3.6. *Sea Λ una k-álgebra, $M \in mod(\Lambda)$ e $I \subset rad(\Lambda)$. Si se tiene $MI = M$ entonces $M = 0$.*

Demostración. Supongamos $MI = M$.
Si $M = m\Lambda$, es decir, está generado por un único elemento, tenemos $m = ma$ para algún $a \in I$. Luego, $m(1-a) = 0$. Como $a \in rad(\Lambda)$, $1-a$ es inversible y por lo tanto $m = 0$.
Consideremos M es finitamente generado, $M = m_1\Lambda + \cdots + m_s\Lambda$. Como $MI = M$, existen $a_1, \cdots, a_s \in I$ tales que $m_1 = m_1a_1 + \cdots + m_sa_s$. Se tiene entonces $m_1(1-a_1) = m_2a_2 + \cdots + m_sa_s$ y como $1-a_1$ es inversible, $m_1 \in m_2\Lambda + \cdots + m_s\Lambda$. Tenemos entonces $M = m_2\Lambda + \cdots + m_s\Lambda$ y procedemos inductivamente. □

Corolario 3.7. *Sea Λ un álgebra, entonces $rad(\Lambda)$ es nilpotente.*

Demostración. Como Λ es de dimensión finita, la cadena:

$$\Lambda \supseteq rad(\Lambda) \supseteq \big(rad(\Lambda)\big)^2 \supseteq \big(rad(\Lambda)\big)^3 \supseteq \cdots$$

se estaciona, es decir, para algún m se tiene $\big(rad(\Lambda)\big)^m = \big(rad(\Lambda)\big)^m rad(\Lambda)$. Aplicando el lema obtenemos que $rad(L)$ es nilpotente. □

Definición 3.8. Un Λ-módulo M no nulo se dice indescomponible si cada vez que se tiene $M = M_1 \oplus M_2$ entonces $M_1 = 0$ o bien $M_2 = 0$. Llamaremos $ind(\Lambda)$ a la (alguna) subcategoría plena de $mod(\Lambda)$ formada por un representante de cada clase de isomorfismo de módulos indescomponibles.

Definición 3.9. Para Λ una k-álgebra:

- $e \in \Lambda$ se dice idempotente si $e^2 = e$.
- $a \in \Lambda$ se dice central si conmuta con todos los elementos de Λ.
- $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset \Lambda$ un conjunto de idempotentes se dice ortogonal si $e_ie_j = 0$ (para $i \neq j$).
- $e \in \Lambda$ un idempotente no nulo se dice primitivo si $e = e_1 + e_2$ con e_1, e_2 ortogonal implica $e_1 = 0$ o $e_2 = 0$.
- $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset \Lambda$ un conjunto de idempotentes se dice completo si $1 = \sum_i e_i$

Observación 3.10. *Los siguientes hechos evidencian la relación del estudio de idempotentes con las posibles descomposiciones de Λ como Λ-módulo.*

- *Toda álgebra Λ tiene dos idempotentes triviales, 0 y 1. Si e es un idempotente no trivial, entonces $1-e$ también lo es. Más aún, estos idempotentes son ortogonales.*
- *Si e es un idempotente no trivial se tiene una descomposición (de Λ-módulos) $\Lambda = e\Lambda \oplus (1-e)\Lambda$ no trivial.*

- *Recíprocamente, si $\Lambda = M \oplus N$ es una descomposición no trivial, entonces $1 = e + f$ (con $e \in M, f \in N$) y e, f son idempotentes ortogonales.*
- *Si $e \in \Lambda$ es idempotente, el módulo $e\Lambda$ es indescomponible si y solo si e es primitivo.*
- *Si e es un idempotente central, entonces $(1 - e)$ también lo es. Los ideales $e\Lambda$ y $(1 - e)\Lambda$ resultan biláteros.*
- *Más aún la descomposición $\Lambda = e\Lambda \oplus (1 - e)\Lambda$ es además un producto de k-álgebras (con unidades e y $1 - e$ respectivamente).*

Corolario 3.11. *Si se tiene $\{e_i\}$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos, entonces $\Lambda = e_1\Lambda \oplus \cdots \oplus e_n\Lambda$ es una descomposición en indescomponibles.*
Por otra parte, en una descomoposición en indescomponibles $\Lambda \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, la unidad de Λ se escribe de manera única: $1 = e_1 + \cdots + e_n$ con $e_i \in P_i$. Se tiene entonces que $\{e_i\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos.

Proposición 3.12. *Sea $e \in \Lambda$ un idempotente, M un Λ-módulo. Entonces vale:*

1. *La aplicación evaluación en e,*

$$\varphi : Hom_\Lambda(e\Lambda, M) \to Me$$

   es un isomorfismo de k-espacios vectoriales.

2. *En el caso $M = e\Lambda$, el isomorfismo $\varphi : End_\Lambda(e\Lambda) \to e\Lambda e$ resulta además un isomorfismo de k-álgebras. (Observar que la unidad de $e\Lambda e$ es e.)*

Demostración. 1. φ mono: Sea $f \in Ker(\varphi)$. Es decir, $f(e) = 0$. Entonces $f(e\lambda) = f(e)\lambda = 0$.
φ epi: Sea $me \in Me$. Consideremos $f : \Lambda \to M$ el morfismo de Λ-módulos definido por $f(1) = m$. Entomces, componiendo con la inclusión tenemos $\hat{f} : e\Lambda \hookrightarrow \Lambda \xrightarrow{f} M$. Además, $\hat{f}(e) = f(e) = f(1)e = me$.

2. Es inmediato.

□

Definición 3.13. Recordems que un módulo S se dice simple si sus únicos submódulos son 0 y S. Por otra parte, un módulo M se dice semisimple si se descompone en suma directa de módulos simples. Una k-álgebra se dice semisimple si lo es como Λ módulo.

Recordemos brevemente algunos resultados que nos serán de utilidad en esta sección.

Lema 3.14. *(de Schur) Sea Λ un álgebra y $M \xrightarrow{f} N$ un morfismo de Λ-módulos no nulo, entoces se tiene que:*

- *Si M es simple, entonces f es monomorfismo.*
- *Si N es simple, entonces f es epimorfismo.*
- *Si M y N son simples, entonces f es isomorfismo.*

Corolario 3.15. *Si S es un Λ-módulo simple, entonces el álgebra $End_\Lambda(S)$ es isomorfa al cuerpo k.*

Demostración. Como S es simple, entonces es cíclico y por lo tanto $dim_k(S) < \infty$. Como $End_\Lambda(S) \subset End_k(S)$, se tiene $dim_k\big(End_\Lambda(S)\big) < \infty$.
Luego, si $f \in End(S), f \neq 0$ se tiene que (para algún m) el conjunto $\{1, f, \cdots, f^m\}$ es linealmente dependiente sobre k. Es decir, existe $p(t) \in k[t]$ irreducible tal que $p(f) = 0$.
Por el lema de Schur, $End(S)$ es un anillo de división. Ahora si $p = q \cdot r$, al evaluar en f: $0 = p(f) = q(f) \cdot r(f)$. Al ser un anillo de división, q o r se anulan en f. Podemos suponer entonces que p es irreducible.
Como k es algebraicamente cerrado, p tiene grado 1 y por lo tanto $f = \lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$. Es decir, tenemos que el monomorfismo de k-álgebras $k \hookrightarrow End(S)$ es sobreyectivo.
□

Lema 3.16. *Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Son equivalentes:*

1. *Λ es un álgebra local (ie: tiene un único ideal maximal a derecha).*
2. *Λ tiene un único ideal maximal a izquierda.*
3. *El conjunto de elementos no inversibles de Λ es un ideal bilátero.*
4. *$\forall a \in \Lambda$, se tiene que a o $1 - a$ es inversible.*
5. *Los únicos idempotentes en Λ son los triviales (0 y 1).*
6. *La k-álgebra $\Lambda/rad(\Lambda)$ es isomorfa a k.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 3.
Como Λ es local, el único ideal maximal a derecha coincide con $rad(\Lambda)$, luego $a \in rad(\Lambda)$ si y solo si a no es inversible a derecha. Queremos ver que las no unidades de Λ es precisamente el ideal $rad(\Lambda)$ (que en virtud del lema 3.3 ya sabemos que es un ideal bilatero).
Ahora, si a es inversible a derecha, entonces sea $b \in \Lambda$ tal que $ab = 1$. Calculamos $(1 - ba)b = 0$. Si b no es inversible a derecha, entonces $b \in rad(\Lambda)$ pero entonces $ab = 1 \in rad(\Lambda)$. Por lo tanto tenemos que $(1 - ba)b = 0$ implica $1 - ba = 0$. Es decir,

todo elemento inversible a derecha es inversible. Luego, $a \in rad(\Lambda)$ si y solo si a no es inversible.
3. $\Rightarrow$ 4.
Es inmediato ya que si a no es inversible entonces $a \in rad(\Lambda)$ y por lo tanto $1 - a$ es inversible (por el lema anterior considerando $b = 1$).
4. $\Rightarrow$ 5.
Como $e \in \Lambda$ es un idempotente, $e(1 - e) = 0$. Por hipótesis, e o $1 - e$ es inversible, luego $e = 0$ o $1 - e = 0$.
5. $\Rightarrow$ 6.
Los idempotentes del álgebra $\overline{\Lambda} = \Lambda/rad(\Lambda)$ pueden levantarse a idempotentes de Λ módulo $rad(\Lambda)$. Más precisamente, si $\overline{f} \in \overline{\Lambda}$ es un idempotente, entonces existe $e \in \Lambda$ idempotente tal que $\overline{e} = \overline{f}$. La demostración es más bien técnica y puede leerse en [ASS] 4.4.
Como consecuencia de esto, la k-álgebra $\overline{\Lambda}$ tiene sólo idempotentes triviales.
Veamos que $\overline{\Lambda}$ es simple (como $\overline{\Lambda}$-módulo):
Sea $I \subset \overline{\Lambda}$ un submódulo (es decir, un ideal a derecha) no nulo. Sea $S \subset I$ un submódulo no nulo de dimensión mínima (sobre k) y por lo tanto simple. $S^2 \neq 0$ pues si esto fuera así, $0 \neq S \subset rad(\overline{\Lambda}) = 0$.
Al ser $0 \neq S^2 \subset S$ como S es simple, entonces $S^2 = S$ y existe $x \in S$ tal que $xS = S$. Luego, $x = xe$ para algún $0 \neq e \in S$. Por el lema de Schur, el morfismo de $\overline{\Lambda}$-módulos:
$\varphi : S \to S$
$\varphi(s) = xs$
Resulta un isomorfismo. Calculamos: $\varphi(e^2 - e) = xee - xe = xe - xe = 0$ y por lo tanto $e^2 - e = 0$.
Luego, como $\overline{\Lambda}$ tiene sólo idempotentes triviales y $e \neq 0$, se tiene $e = 1$ y entonces $\Lambda = e\Lambda \subset S \subset I \subset \Lambda$.
Ahora bien, tenemos:

$$\overline{\Lambda} \underset{(1)}{\cong} End_{\overline{\Lambda}}(\overline{\Lambda}) \underset{(2)}{\cong} k$$

donde (1) vale por la proposición 3.12 y (2) porque $\overline{\Lambda}$ es simple.
6. $\Rightarrow$ 1.
Es inmediato.

Reemplazando derecha por izquierda en el argumento anterior, se completa la demostración.
□

Teorema 3.17. *Un $M \in mod(\Lambda)$ es indescomponible si y sólo si su álgebra de endomorfismos, $End(M)$ es local. Es decir, (como el álgebra es de dimensión finita) si los únicos idempotentes son 0 y 1.*

Demostración. Si $e \in End(M)$ es un idempotente, entonces $M = Im(e) \oplus Im(1 - e)$. La reciproca es inmediata.

□

Teorema 3.18. *(Krull-Schmidt)*
Para todo $M \in mod(\Lambda)$ existen únicos (salvo orden e isomorfía) $m \in \mathbb{N}, M_i \in mod(\Lambda)$ indescomponibles tal que $M = \bigoplus_{i \leq m} M_i$.

Demostración. El hecho de que exista una descomposición en indescomponibles se desprende inductivamente del hecho de que M tiene dimensión finita.
Ahora bien, si $M = \bigoplus_{i \leq m} M_i = \bigoplus_{j \leq n} N_j$ procedemos inductivamente en m.
Si $m = 1$, M es indescomponible, se sigue entonces $n = 1$ y $M = N_1$.
En otro caso, llamemos $\widetilde{M} = \bigoplus_{1 < i \leq m} M_i$ y denotemos $\iota, \widetilde{\iota}, \pi, \widetilde{\pi}$ a las inclusiones y proyeciones correspondientes a la suma directa $M_1 \oplus \widetilde{M}$. Llamemos también i_j, p_j las correspondientes a la descomposición $\bigoplus_{j \leq n} N_j$.
Tenemos entonces

$$1_{M_1} = \pi\iota = \pi\big(\sum_{j=1}^{n} i_j p_j\big)\iota = \sum_{j=1}^{n} \pi i_j p_j \iota$$

Como M_1 es indescomponible, $End(M_1)$ es local y en vistas de 4. en 3.16, existe un j tal que $\nu = \pi i_j p_j \iota$ es inversible. Reordenando, podemos suponer $j = 1$.
Ahora bien, el morfismo $\omega = \nu^{-1}\pi i_1 : N_1 \to M_1$ satisface $\omega p_1 \iota = 1_{M_1}$ y por consiguiente, $p_1\iota\omega \in End(N_1)$ es un idempotente. Al ser N_1 indescomponible, debe ser $p_1\iota\omega = 0$ o $p_1\iota\omega = 1_{N_1}$.
Si $p_1\iota\omega = 0$, como ω es epi (pues $\omega p_1\iota = 1_{M_1}$), se tiene $p_1\iota = 0$ lo que contradice el hecho de que ν es invertible. Luego $p_1\iota : M_1 \to N_1$ es un isomorfismo.
Llamemos $\widetilde{N} = \bigoplus_{1 < j \leq m} N_j$ y pensemos el morfismo identidad de M de manera matricial:

$$1_M : M_1 \oplus \widetilde{M} \to N_1 \oplus \widetilde{N}$$

$$1_m = \begin{pmatrix} p_1\iota & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Consideremos el isomorfismo $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_{22} & 1 \end{pmatrix}$ con $g_{22} = -f_{21}(p_1\iota)^{-1}$ y calculamos la composición:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_{22} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1\iota & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1\iota & f_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}$$

Como h es un isomorfismo (pues g lo es), se tiene que $h_{22} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ es un isomorfismo. Se sigue el teorema inductivamente.

□

Observación 3.19. *Aplicando el teorema al módulo Λ obtenemos:*

$$\Lambda \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$$

donde los P_i son proyectivos (sumandos de un libre) e indescomponibles.

Proposición 3.20. *En la descomposición $\Lambda \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ aparecen todos los módulos proyectivos indescomponibles, salvo isomorfismo. Más precisamente, si P es proyectivo e indescomponible, entonces $P \cong P_i$ para algún $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Demostración. Como P es proyectivo, sea M tal que:

$$P \oplus M \cong \Lambda^d \cong P_1^d \oplus \cdots \oplus P_n^d$$

Luego, por el teorema de Krull-Schmidt, $P \cong P_i$ para algún i. □

Definición 3.21. Una k-álgebra Λ se dice básica si en la descomposición $\Lambda \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ se tiene $P_i \ncong P_j$ cuando $i \neq j$.

El siguiente resultado nos permite reducir el estudio de k-álgebras al estudio de k-álgebras básicas. Su demostración puede verse en [ARS] II.2.5.

Teorema 3.22. *Para toda k-álgebra exitste una única (salvo isomorfismo) k-álgebra básica Morita equivalente (es decir, sus categorías de módulos son equivalentes).*

3.2. Álgebras de Caminos

En esta sección expondremos una forma de asignar a una categoría con ceros un álgebra. Esta construcción generaliza levemente la construcción del álgebra de caminos de un quiver. Por otra parte, en el caso del álgebra de caminos de un quiver con relaciones (o quiver ligado) el hecho de considerar categorías con ceros equivale a permitir solamente relaciones de conmutatividad (dos caminos que coinciden en donde empiezan y donde terminan se identifican) y relaciones cero (un camino se lo identifica con el cero).

Definición 3.23. Dada $Z \in \mathcal{C}at_0$ tal que $\mathcal{O}bj\ Z$ es finito, definimos el álgebra de la categoría como la k-álgebra Λ_Z cuya base (como k-espacio vectorial) es $\{\alpha \in \mathcal{F}l\ Z \mid \alpha \neq 0\}$ y la multiplicación de elementos de la base está dada por:

$$\alpha \times \beta = \begin{cases} \alpha\beta & \text{si son componibles} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Donde identificamos todas las flechas cero con el cero del espacio vectorial (es decir, cuando una composición resulta una flecha cero, la multiplicación que definimos da como resultado el cero del espacio vectorial).

Observemos que el álgebra Λ_Z es de dimensión finita si y sólo si el conjunto de todas las flechas no nulas de Z es finito. Como nos interesa estudiar álgebras de dimensión finita, consideraremos siempre este caso.

La asociatividad del producto es clara y la unidad del álgebra resulta

$$1 = \sum_{x \in \mathcal{O}bj\ Z} 1_x$$

Más aún se tiene que $\{1_x \mid x \in \mathcal{O}bj\ Z\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales.

Notación. Para $C \in \mathcal{C}at$ con $\mathcal{O}bj\ C$ finito notaremos $\Lambda_C = \Lambda_{C_0}$. Asimismo, para Γ un quiver, el álgebra de caminos del quiver Λ_Γ será el álgebra $\Lambda_{(\mathcal{P}\Gamma)_0}$.

La definición de álgebra de caminos de un quiver coincide con la clásica que puede encontrarse en [ARS], [CLS], [As].
La intención de introducir álgebras de categorías con ceros es la posibilidad de incorporar en el quiver las llamadas relaciones de conmutatividad y relaciones cero. Al estar interesados en álgebras de dimensión finita, veamos que la condición que debe satisfacerse en un quiver es la siguiente:

Lema 3.24. *Sea Γ un quiver finito, se tiene Λ_Γ es de dimensión finita si y sólo si Γ es acíclico.*

Demostración. Si Γ tiene un ciclo α, entonces $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots\}$ son distintos caminos en Γ, por lo tanto son elementos de la base de Λ_Γ.
Reciprocamente, si Γ no tiene ciclos, existe una longitud máxima m para los caminos en Γ (si un camino tiene más flechas que vértices en Γ, entonces en algún momento el camino repite un vértice y de él se puede extraer un ciclo). Como Γ_1 es finito hay sólo un número finito de caminos de cada longitud $i:\ 1 \leqslant i \leqslant m$. □

Ejemplos.

- Si G es un grupo visto como un grupoide con un solo objeto, entonces $\Lambda_G = K[G]$, el álgebra de grupo.

- Si Γ es $a \xrightarrow{\alpha} b$ entonces Λ_Γ es la subálgebra de matrices de 2x2 de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$

- Si Γ es $*$ con un lazo X entonces $\Lambda_\Gamma = K[X]$ el álgebra de polinomios.

- Si Γ en cambio consiste en un solo vértice $*$ y $X_1 \cdots X_n$ flechas distintas entonces Λ_Γ es el álgebra en los generadores $X_1 \cdots X_n$ que no conmutan.

- Si C es la categoría con un solo objeto a y $C(a)$ es el monoide abeliano libre en n generadores, entonces $\Lambda_C \cong K[X_1 \cdots X_n]$ el álgebra de polinomios en n variables.

3.3. k-Categorías

Definición 3.25. Diremos que una categoría $\mathcal{M}$ es una k-categoría si $\forall x, y \in \mathcal{M}$ se tiene una estructura de k-espacio vectorial en $\mathcal{M}(x, y)$ compatible con la composición. Es decir, la composición $\mathcal{M}(x, y) \otimes \mathcal{M}(y, z) \xrightarrow{\circ} \mathcal{M}(x, z)$ es k-lineal.

Un funtor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ entre dos k-categorías es un k-funtor si $\forall x, y \in \mathcal{M}$ la asignación $F : \mathcal{M}(x, y) \to \mathcal{N}(Fx, Fy)$ es k-lineal.

Dos k-categorías $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ se dirán equivalentes si existe una equivalencia de categorías $\mathcal{M} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{N}$ donde los funtores F, G son k-funtores.

Llamaremos $k\mathcal{C}at$ a la categoría de las k-categorías pequeñas y los k-funtores.

Ejemplos.

- $\mathcal{V}ect$, la categoría de k-espacios vectoriales.
- Si Λ es una k-álgebra, $Mod(\Lambda)$ es una k-categoría.

Definición 3.26. Definimos el funtor $k : \mathcal{C}at_0 \to k\mathcal{C}at$ de la siguiente manera:
Si $Z \in \mathcal{C}at_0$:
$\mathcal{O}bj\ (kZ) = \mathcal{O}bj\ (Z)$
$kZ(x, y) =< \{\alpha \in Z(x, y) \mid \alpha \neq 0\} >_k$
Donde la composición queda determinada (extendiendo bilinealmente) por el valor en la base de cada $kZ(x, y)$ (donde identificamos la flecha 0 de Z con el 0 del k-espacio vectorial de kZ).
Si $Z \xrightarrow{F} Z' \in \mathcal{M}or\ \mathcal{C}at_0$:
$kF(x) = F(x)\ \forall x \in Z$
$kF(\alpha) = \alpha\ \forall \alpha \in \mathcal{F}l\ Z$ y se extiende linealmente

Observación 3.27. *Se tiene entonces* $\mathcal{C}at \xrightarrow{\Xi} \mathcal{C}at_0 \xrightarrow{k} k\mathcal{C}at$. *Notaremos a la composición* $k\Xi = k$ *y vale la pena explicitar su construcción:*
Si $C \in \mathcal{C}at$:
$\mathcal{O}bj\ (kC) = \mathcal{O}bj\ C$
$kC(x, y) =< \{\alpha \in \Xi C(x, y) \mid \alpha \neq 0\} >_k =< C(x, y) >_k$
Donde la composición queda determinada por la extensión bilineal de la composición en C.
Ahora si $F : C \to C'$ *es un funtor, se define el k-funtor* kF:
$kF(x) = F(x)\ \forall x \in C$
$kF(\alpha) = \alpha\ \forall \alpha \in \mathcal{F}l\ C$ *y se extiende linealmente*

3.4. Módulos sobre k-categorías

Definición 3.28. Una k-categoría pequeña Λ se dice locamente acotada si satisface:

- El álgebra de endomorfismos $\Lambda(x)$ es local para todo $x \in \Lambda$.
- No hay objetos isomorfos en Λ, es decir, $x \cong y \Rightarrow x = y$.
- Para todo $x \in \Lambda$, se tiene:

$$\sum_{y \in \Lambda} dim_k \Lambda(x, y) < \infty$$

$$\sum_{z \in \Lambda} dim_k \Lambda(z, x) < \infty$$

Estamos interesados en estudiar módulos sobre k-categorías que provienen de una categoría con ceros. Es por eso que nos es indispensable conocer cuándo una categoría con ceros da lugar a una k-categoría localmente acotada.

Proposición 3.29. *(cf. [BGRS] 1.8) Sea $Z \in \mathcal{C}at_0$, entonces kZ es localmente acotada si y sólo si se satisface:*

1. *Todo endomorfismo $f \neq 1$ es nilpotente (ie: $\exists n \mid f^n = 0$).*
2. *No hay en Z objetos isomorfos.*
3. *Para cada $x \in Z$, hay una cantidad finita de morfismos no nulos que empiezan o terminan en x.*

Demostración. Sea Z una categoría con ceros en las hipótesis de la proposición.
Es evidente de la definición de la asignación $Z \to kZ$ que las condiciones expuestas en tercer lugar son equivalentes.
Supongamos que Z es una categoría con ceros que cumple con lo pedido. Si $x \cong y$ en kZ via el isomorfismo $g : x \to y$ tenemos que $g = \sum_i \lambda_i \alpha_i$ donde $Z(x, y) = \{0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$. Sea $h : y \to x$ tal que $gh = 1_x$. Similarmente, $h = \sum_j \mu_j \beta_j$ donde $Z(y, x) = \{0, \beta_1, \cdots, \beta_s\}$. Ahora, calculamos $1_x = \sum_{i,j} \nu_{i,j} \alpha_i \beta_j$. Pero por otra parte, $Z(x) = \{0, 1_x, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ con γ_i nilpotentes y por lo tanto de los $\alpha_i \beta_j$ tiene que ser un isomorfismo. Es decir, si dos objetos son isomorfos en kZ también lo son en Z.
Resta ver que el álgebra $\Lambda = kZ(x)$ es local para todo $x \in Z$. En efecto, $\Lambda = \langle 1_x, f_1, \cdots, f_n \rangle_k$ donde los f_i son nilpotentes. Debido a que $f_i f_j = f_k$ (o eventualmente 0), se tiene el ideal bilátero propio $I = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle_k$. Además es maximal por tener dimensión n. Por otra parte, como cada f_i es nilpotente y $f_i f_j = f_k, 0$; se tiene que las combinaciones lineales finitas son nilpotentes. Luego, si $a = \sum_i \lambda_i f_i$ para $\lambda + a$ con $0 \neq \lambda \in k$ se tiene $\lambda + a$ es

una unidad pues λ es una unidad central y a es nilpotente. Así, I consiste exactamente en las no unidades de Λ y por lo tanto ésta es local.

Reciprocamente, supongamos que Z es una categoría con ceros tal que kZ es localmente acotada. Es claro que si dos objetos son isomorfos en Z entonces lo son en kZ.
Por último, sea $x \in Z$. Tenemos $Z(x) = \{1, f_1, \cdots, f_r\}$. Como el álgebra $\Lambda = kZ(x)$ es de dimensión finita, para f_i se tienen polinomios en k no triviales que se anulan en f_i. Llamemos m_{f_i} al polinomio minimal de f_i. Si f_i fuera inversible, como el grupo automorfismos de $Z(x)$ es finito, tendríamos para algún $n \in \mathbb{N}$, $f_i^n = 1$, es decir el polinomio $t^n - 1$ se anula en f_i.
Como Λ es local, se tiene $\overline{\Lambda} = \Lambda/rad(\Lambda) \cong k$ y al pasar al cociente tenemos la identidad $(\overline{f_i})^n - 1 = 0$. Al ser k algebraicamente cerrado, tenemos $\overline{f_i} = \lambda$ para $\lambda \in k$ alguna raíz n-ésima de la unidad. Entonces tenemos $f_i - \lambda \in rad(\Lambda)$ y por consiguiente $f_i - \lambda$ es nilpotente. Es decir, existe r tal que $(f_i - \lambda)^r = 0$.
Luego, m_{f_i} divide a $t^n - 1$ y a $(t - \lambda)^r$. Por lo tanto, $m_{f_i} = t - \lambda$, lo que es imposible pues f_i y 1 son k linealmente indepentes.

Ahora ya sabemos que las f_i no son inversibles. Luego, por dimensión debe ser $rad(\Lambda) = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle_k$. Como el radical es nilpotente, entonces cada f_i debe serlo.

□

Definición 3.30. $Z \in \mathcal{C}at_0$ se dirá una categoría-base si cumple las condiciones de la proposición.

Definición 3.31. Sea Λ una k-categoría localmente acotada. Definimos la categoría $Mod(\Lambda)$ ('módulos a derecha') como la categoría de k-funtores de Λ a $\mathcal{V}ect$.
Recordemos que para una transformación natural $f : M \to N$ notamos $f_x : Mx \to Nx$ a la transformación lineal correspondiente a cada objeto $x \in \Lambda$.
Por otra parte, $M \in Mod(\Lambda)$ se dice de dimensión finita si

$$\sum_{x \in \Lambda} dim_k(Mx) < \infty$$

Notaremos con $mod(\Lambda)$ a la subcategoría plena de módulos de dimensión finita.
Llamaremos $ind(\Lambda)$ a una subcategoría plena de $mod(\Lambda)$ formada por un representante de cada clase de isomorfismo de módulos indescomponibles.
Λ se dirá de representación locamente finita si $\forall x \in \Lambda$, se tiene $\{M \in ind(\Lambda) \mid Mx \neq 0\}$ es finito.

Notación. Para ser más concisos utilizaremos la notación $Mod(Z)$, $mod(Z)$ e $ind(Z)$ para Z una categoría-base en vez de $Mod(kZ)$, $mod(kZ)$ e $ind(kZ)$.

Estudiemos brevemente las categorías $Mod(\Lambda)$ y $mod(\Lambda)$.

Módulo Cero $0 \in Mod(\Lambda)$ consiste en el k-funtor definido por:

$$0(x) = 0 \qquad \forall x \in \Lambda$$

Y por lo tanto a toda flecha de Λ le corresponde la transformación lineal nula.
Observar que el módulo cero es el objeto cero de la categoría $Mod(\Lambda)$.
Dados $M, N \in Mod(\Lambda)$ llamaremos entonces $M \xrightarrow{0} N$ al único morfismo que factoriza por el 0, es decir, al morfismo que consiste en al transformación lineal 0 para cada $x \in \Lambda$.

Submódulo Para $M \in Mod(\Lambda)$ un submódulo S de M es un k-funtor que verifica para todo $x \in \Lambda, Sx \subset Mx$ subespacio y para toda flecha , $S\alpha = M\alpha_{|}$ la restricción $M\alpha_{|} : Sx \to Sy$.

Núcleo Utilizando la noción de submódulo, podemos definir núcleo de un morfismo $f : M \to N$ como el submódulo dado por:

$$\big(Ker(f)\big)x = \{v \in m(x) \mid f(v) = 0\} = Ker(f_x)$$

Si $x \xrightarrow{\alpha} y$ es una flecha en Λ, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Mx & \xrightarrow{M\alpha} & My \\ {\scriptstyle f_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_y} \\ Nx & \xrightarrow[N\alpha]{} & Ny \end{array}$$

conmuta, por lo tanto $M\alpha\big(Ker(f_x)\big) \subset Ker(f_y)$, es decir, $Ker(f)$ es efectivamente un submódulo de M.

Esta definición coincide con la definición abstracta, es decir, el núcleo de $M \xrightarrow{f} N$ es el límite del siguiente diagrama:

$$M \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

Imagen Valiéndonos también del concepto de submódulo definimos imagen de $M \xrightarrow{f} N$ como el submódulo de N definido por:

$$\big(Im(f)\big)x = Im(f_x)$$

El hecho de que sea efectivamente un submódulo se debe nuevamente a que f es una transformación natural.

Cociente Si $N \subset M$ submódulo, podemos considerar el módulo cociente M/N dado por:

$$\big(M/N\big)x = Mx/Nx$$

Llamemos $\pi_x : Mx \to \big(M/N\big)x$ a la proyección al cociente. Para $x \xrightarrow{\alpha} y$ una flecha en Λ, definimos $M/N\alpha$ vía:

$$\begin{array}{ccc} Mx & \xrightarrow{\quad M\alpha \quad} & My \\ {\scriptstyle \pi_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_y} \\ Mx/Nx & \dashrightarrow_{\exists!\ \big(M/N\big)\alpha} & My/Ny \end{array}$$

Existe una única flecha punteada porque al ser N un submódulo se tiene $M\alpha(Nx) \subset Ny$. Observar que se tiene entonces una transformación natural $\pi : M \to M/N$ definida por π_x en cada $x \in \Lambda$.

Conúcleo De esta manera, podemos definir también conúcleo de un morfismo $f : M \to N$ como $CoKer(f) = N/Im(f)$.

Suma Sean $M, M' \in Mod(\Lambda)$, consideramos $M \oplus M'$ dada por:

$$(M \oplus M')x = Mx \oplus M'x$$

Es decir, consideramos la suma directa de los espacios vectoriales en cada x. Para $(x \xrightarrow{\alpha} y) \in \Lambda$, consideramos:

$$(M \oplus M')x \xrightarrow{(M\oplus M')\alpha} (M \oplus M')y$$

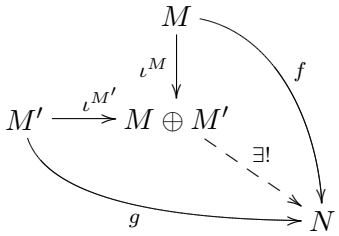
$$(M \oplus M')\alpha = \begin{pmatrix} M\alpha & 0 \\ 0 & M'\alpha \end{pmatrix}$$

Es decir, $(M \oplus M')\alpha$ aplica el espacio Mx en el My según $M\alpha$ y el espacio $M'x$ en el $M'y$ según $M'\alpha$.

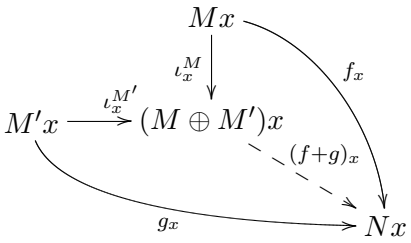
Observemos que se tienen las transformaciones naturales
$\iota^M : M \to M \oplus M', \rho^M : M \oplus M' \to M$ definidas por
$\iota^M_x : Mx \to Mx \oplus M'x$ la inclusión en la suma directa y
$\rho^M_x : Mx \oplus M'x \to Mx$ la proyección en la primera coordenada.

Con estas aplicaciones, $\oplus$ es efectivamente una suma directa en la categoría $Mod(\Lambda)$, es decir, es a la vez el producto y coproducto.

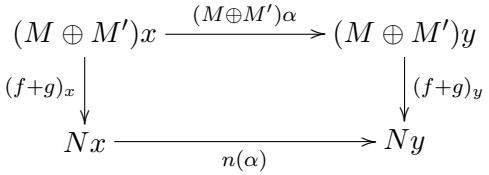
Verifiquemos esto. En efecto, si se tiene un diagrama en $Mod(\Lambda)$:



Queremos ver que existe una única flecha punteada de manera que todo conmute. Para cada $x \in \Lambda$, se tiene un diagrama conmutativo de espacios vectoriales:



Donde existe una única $(f+g)_x$ que hace el diagrama conmutativo. Luego, $f+g$ así definida es la única posible. Debemos verificar entonces que el siguiente diagrama conmuta para toda flecha $(x \xrightarrow{\alpha} y) \in \Lambda$



pero esto es claro por la definición de $(M \oplus M')\alpha$.

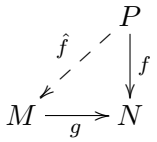
La comprobación de que efectivamente sirve como producto es similar.

Simple – Indescomponible Análogamente a los módulos sobre un anillo, M se dice simple si no contiene submódulos propios e indescomponible si $M \cong M_1 \oplus M_2$ implica $M_1 = 0$ o $M_2 = 0$. Es claro que todo módulo simple es indescomponible. Recordemos también que un módulo se dice semisimple si es suma directa de módulos simples.

Llamaremos $\overset{x}{S}$ al módulo simple definido por:

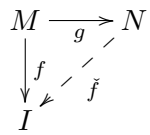
$$\overset{x}{S}y = \begin{cases} k \text{ si } x = y \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Proyectivo – Inyectivo Recordemos que en el contexto de módulos sobre un anillo, se dice que P es proyectivo si cada vez que se tiene un diagrama con líneas llenas tal que g es epi, se puede completar $\hat{f}$ de manera tal que el diagrama conmute.



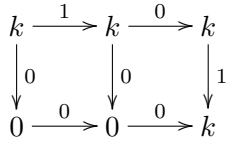
En el contexto de módulos sobre k-categorías, diremos que un módulo P es proyectivo si se cumple esta propiedad.

Dualmente, diremos que un módulo I es inyectivo si para todo diagrama de líneas llenas con g mono, se encontrar $\check{f}$ para que el diagrama conmute.



Ejemplo. Sea la categoría-base $Z = x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z$ tal que $\alpha\beta = 0$ y consideremos $\Lambda = kZ$.

Notemos a un Λ-módulo M como un diagrama $Mx \xrightarrow{M\alpha} My \xrightarrow{M\beta} Mz$. Por ejemplo, consideremos los módulos $M = k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k$ y $N = 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$.
Si consideramos $f : M \to N$ dada por:



Calculamos, $K = Ker(f) = k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$. Observemos también que $M = K \oplus N$.

También podemos destacar que N es simple, pero K no pues contiene a los submódulos propios $S_1 = k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0, \quad S_2 = 0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$.
Sin embargo, K es indescomponible. En efecto, no es difícil ver que una descomposición no trivial debe utilizar S_1 y S_2 pero $S_1 \oplus S_2 = k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$.

Además, K es proyectivo. Este hecho es complicado de verificar, pero al ver más adelante que $K = \overset{x}{P}$ es inmediato.

Notación. Sea $\Lambda \in k\mathcal{C}at$ localmente acotada y sea $x \in \Lambda$. Llamaremos $\overset{x}{P} \in mod(\Lambda)$ al k-funtor representable $\Lambda(x, _)$. Observar que efectivamente es un módulo de dimensión finita porque Λ es localmente acotada.

Antes de estudiar los módulos representables, probaremos el siguiente resultado. El lector está invitado a reflexionar profundamente su relación con el lema de Yoneda (1.4) y la proposición 3.12.

Lema 3.32. *Sea Sea Λ una k-categoría localmente acotada y sea $x \in \Lambda, M \in Mod(\Lambda)$. Se tiene un isomorfismo entre los k-espacios vectoriales:*

$$Hom_\Lambda(\overset{x}{P}, M) \xrightarrow{\varphi} Mx$$

Más aún, el isomorfismo φ es natural en M.

Demostración. Definimos como es de esperar,

$$\varphi(f) = \underbrace{f_x(\overbrace{1_x}^{\in \overset{x}{P}x})}_{\in Mx}$$

φ es lineal:
Es evidente, ya que

$$\varphi(f + kg) = (f + kg)_x(1_x) = f_x(1_x) + kg_x(1_x) = \varphi(f) + k\varphi(g)$$

φ es iso:
Para esto, construímos una aplicación inversa, ψ:
Sea $v \in Mx$, debemos definir una transformación natural $f = \psi(v)$. Sea $y \in \Lambda$ (no necesariamente $y \neq x$), consideramos entonces

$$\begin{aligned} f_y : \overset{x}{P}y &\to My \\ \alpha &\to M\alpha(v) \end{aligned}$$

$f : \overset{x}{P} \to M$ así definida es natural, ya que para $a \xrightarrow{\omega} b \in \Lambda$ consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overset{x}{P}a & \xrightarrow{_\cdot\omega = \overset{x}{P}\omega} & \overset{x}{P}b \\ {\scriptstyle f_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_b} \\ Ma & \xrightarrow[M\omega]{} & Mb \end{array}$$

Calculamos para $x \xrightarrow{\beta} a$,

$$M\omega\big(f_a(\beta)\big) = M\omega\big(M\beta(v)\big) = M\beta\omega(v) = f_b(\beta\omega) = f_b\big(\overset{x}{P}\omega(\beta)\big)$$

$\underline{\varphi \text{ es natural}}$:
Sea $M \xrightarrow{g} N$ un morfismo de Λ módulos, queremos ver que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Hom_\Lambda(\overset{x}{P}, M) & \xrightarrow{\varphi_M} & Mx \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_x} \\ Hom_\Lambda(\overset{x}{P}, N) & \xrightarrow{\varphi_N} & Nx \end{array}$$

En efecto,

$$\varphi_M\big(g_*(f)\big) = \varphi_M\big(gf\big) = (gf)_x(1_x) = g_x\big(f_x(1_x)\big) = g_x\big(\varphi_N(f)\big)$$

□

Lema 3.33. *Sea $M \in mod(\Lambda)$, entonces existe un epimorfismo:*

$$f : \bigoplus_{x\in\Lambda} \bigoplus_{i\leq r_x} \overset{x}{P} \to M$$

Es decir, todo $M \in mod(\Lambda)$ es colímite de funtores representables.

Demostración. Sea $x \in \Lambda$, elegimos $\{v_1, \cdots, v_{r_x}\}$ base del espacio vectorial Mx.
Consideramos $f_i : \overset{x}{P} \to Mx$ dada por el lema anterior. Se tiene entonces

$$f^x = \sum_{i\leq r_x} f_i : \bigoplus_{i\leq r_x} \overset{x}{P} \to M$$

pues la suma involucrada es finita.

Luego, se tiene

$$f = \sum_{x\in\Lambda} f^x : \bigoplus_{x\in\Lambda} \bigoplus_{i\leq r_x} \overset{x}{P} \to M$$

ya que al ser M de dimensión finita, la suma es finita (pues los r_x son casi todos 0).

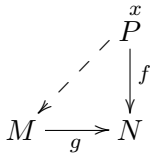
□

El siguiente teorema justifica la notación $\overset{x}{P}$

Teorema 3.34. *Sea Sea Λ una k-categoría localmente acotada y sea $x \in \Lambda, M \in Mod(\Lambda)$. Entoces $\overset{x}{P}$ es proyectivo e indescomponible. Más aún, si se tiene P proyectivo e indescomponible, entonces para algún $x \in \Lambda$, $\quad P \cong \overset{x}{P}$* [1].

[1]Por comodidad, siempre consideraremos $\overset{x}{P} \in ind(\Lambda)$. Es decir, elegiremos la categoría $ind(\Lambda)$ de manera tal que éstos sean los proyectivos indescomponibles

Demostración. **Proyectivo** Consideremos el siguiente diagrama, donde g es epi:



Queremos poder completar la flecha punteada, pero esto es posible si

$$g_* : Hom_\Lambda(\overset{x}{P}, M) \longrightarrow Hom_\Lambda(\overset{x}{P}, N)$$

es un epi. Pero esto vale pues por el lema anterior se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Hom_\Lambda(\overset{x}{P}, M) & \xrightarrow{\varphi_M} & Mx \\ \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_x} \\ Hom_\Lambda(\overset{x}{P}, N) & \xrightarrow{\varphi_N} & Nx \end{array}$$

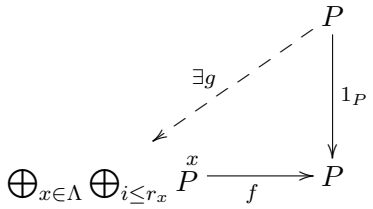
con φ_M, φ_N isomorfismos y g_x epi.

Indescomponible Por el lema anterior, tenemos el ismorfismo

$$\psi : \Lambda(x) = \overset{x}{P}x \longrightarrow End_\Lambda\big(\overset{x}{P}\big)$$

de k-espacios vectoriales. Es inmediato de la definición de ψ que resulta también morfismo de k-álgebras. Entonces el álgebra $End_\Lambda\big(\overset{x}{P}\big)$ es local y por lo tanto $\overset{x}{P}$ es indescomponible.

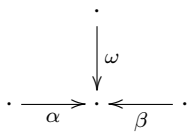
Caracterización Sea P proyectivo indescomponible. Por el lema anterior, se tiene un diagrama



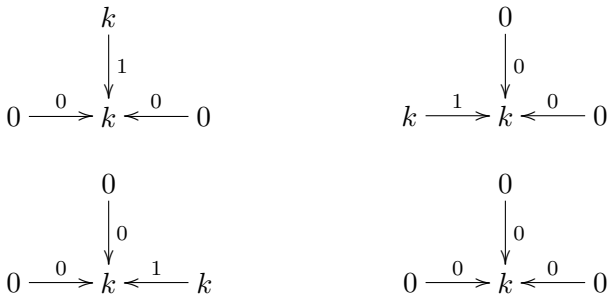
donde g existe por ser f epi y P proyectivo.

Se tiene entonces que g es sección y por lo tanto P es isomorfo (por ser indescomponible) a uno de los sumandos directos como queríamos probar. □

Ejemplo. Sea $\Lambda = kZ$ con Z la categoría-base dada por:



Los módulos $\overset{x}{P}$ para cada $x \in Z$ corresponden a:



3.5. Categorías con Ceros y Teoría de Representaciones

Teorema 3.35. *Sea $Z \in \mathcal{C}at_0$ una categoría-base tal que $\mathcal{O}bj\ (Z)$ es finito. Entonces las k-categorías $mod(Z)$ y $mod(\Lambda_Z)$ son equivalentes.*

Demostración. ▪ Construimos $F : Mod(Z) \to Mod(\Lambda_Z)$

Sea $M \in Mod(Z)$, consideramos el k-espacio vectorial:

$$FM = \bigoplus_{z \in Z} Mz$$

Definimos la acción en la base de Λ_Z dada por las flechas no nulas de Z de la siguiente manera. Si $v \in M$ entonces $v = \sum_{z \in Z} v_z, v_z \in Mz$. Para $x \xrightarrow{\alpha} y \in Z$:

$$v \cdot \alpha = \Big(\sum_{z \in Z} v_z \Big) \cdot \alpha = M\alpha(v_x) \in My$$

Y extendemos la definición linealmente a todo Λ_Z. Verifiquemos que la acción es asociativa en la base (como se extiende linealmente, es evidente que vale entonces para todo elemento de Λ_Z).

Para esto, sea $v = \sum_{z\in Z} v_z$ y $w \xrightarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} y$, entonces [1]:

$$v\cdot(\alpha\beta) = \Big(\sum_{z\in Z} v_z\Big)\cdot(\alpha\beta) = M\alpha\beta(v_w) = M\beta\underbrace{\big(M\alpha(v_w)\big)}_{\in Mx} = \big(M\alpha(v_w)\big)\cdot\beta = (v\cdot\alpha)\cdot\beta$$

La comprobación para flechas $x \xrightarrow{\alpha} y, u \xrightarrow{\beta} w$ tales que $y \neq u$ es aún más sencilla:

$$\big(v\cdot\alpha\big) = \underbrace{\big(M\alpha(v_x)\big)}_{\notin Mu}\cdot\beta = 0 = v\cdot(\alpha\beta)$$

Ahora, para $f : M \to N$ un morfismo en $Mod(Z)$ definimos Ff como:

$$Ff = \bigoplus_{z\in Z} : FM = \bigoplus_{z\in Z} Mz \to FN = \bigoplus_{z\in Z} Nz$$

Es decir,

$$Ff\Big(\sum_{z\in Z} v_z\Big) = \sum_{z\in Z} f_z(v_z)$$

Ff es claramene k-lineal, para verificar que es un morfismo de Λ_Z módulos veamos que $Ff(v\cdot\alpha) = \big(Ff(v)\big)\cdot\alpha$ para $x \xrightarrow{\alpha} y \in Z$:

$$Ff(v\cdot\alpha) = Ff(\Big(\sum_{z\in Z} v_z\Big)\cdot\alpha) = Ff\underbrace{\big(M\alpha(v_x)\big)}_{\in My} = f_y\big(M\alpha(v_x)\big) \overset{(*)}{=}$$

Donde $(*)$ vale por la naturalidad de f.

$$\overset{(*)}{=} N\alpha\big(f_x(v_x)\big) = \Big(\sum_{z\in Z} f_z v_z\Big)\cdot\alpha = \big(Ff(v)\big)\cdot\alpha$$

Es evidente que así definido F preserva identidades y composiciones, más aún, es un k-funtor.

- F es plenamente fiel: Sean $M, N \in Mod(Z)$, veamos que

  $$F : Hom_Z(M,N) \to Hom_{\Lambda_Z}(FM, FN)$$

  es isomorfismo de k-espacios vectoriales.

[1] Recordar que escribimos la composición de flechas en Z como caminos pero la composición de transformaciones lineales de manera usual (como funciones) por lo tanto el funtor covariante M respeta la composición aunque invierte la notación.

Es sencillo que F es monomorfismo ya que por definición:

$$Ff = 0 \iff f_z = 0 \quad \forall z \in Z \iff f = 0 \quad \text{(la transformación natural 0)}$$

La idea para probar que es un epimorfismo es esencialmente revertir el argumento de naturalidad de f que se utilizó para demostrar que Ff es un morfismo de Λ_Z- módulos.
Sea $\hat{f} \in Hom_{\Lambda_Z}(FM, FN)$ definimos una transformación natural $f : M \to N$ vía

$$f_z = \hat{f}_| : Mz \to Nz$$

Verifiquemos la buena definición, es decir, $\hat{f}\big(Mz\big) \subset Nz$ para todo $z \in Z$.
Sea $v_z \in Mz$ consideramos $\hat{f}(v_z) = \sum\limits_{\tilde{z} \in Z} w_{\tilde{z}} \in FN$, se tiene entonces:

$$\hat{f}(v_z) = \hat{f}(v_z \cdot 1_z) = \big(\hat{f}(v_z)\big) \cdot 1_z = \Big(\sum_{\tilde{z} \in Z} w_{\tilde{z}}\Big) \cdot 1_z = w_z \in Nz$$

Verifiquemos ahora la naturalidad. Sea $x \xrightarrow{\alpha} y \in Z$, queremos ver que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Mx & \xrightarrow{M\alpha} & My \\ {\scriptstyle f_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_y} \\ Nx & \xrightarrow[N\alpha]{} & Ny \end{array}$$

Para eso, sea $v_x \in Mx$. Se tiene entonces

$$f_y\big(M\alpha(v_x)\big) = \hat{f}(v_x \cdot \alpha) = \big(\hat{f}(v_x)\big) \cdot \alpha = N\alpha\big(f_x(v_x)\big)$$

como queríamos probar.

- F es denso: Sea $L \in Mod(\Lambda_Z)$ consideramos $M \in Mod(Z)$ de la siguiente manera:

  Para $x \in Z,\ Mx = L \cdot 1_x = \{v \cdot 1_x \mid v \in L\}$
  Para $x \xrightarrow{\alpha} y \in Z,\ M\alpha : Mx \xrightarrow{\cdot\alpha} My$ (multiplicación a derecha por α)

  Como k es central en Λ_Z, multiplicar por α es una transformación lineal. Además, el hecho de que M es efectivamente un k-funtor se desprende inmediatamente de las propiedades de la acción del álgebra Λ_Z en el módulo L.

  Por otra parte,

$$L = L \cdot 1 = L \cdot \big(\sum_{z \in Z} 1_z\big) \overset{(*)}{=} \bigoplus_{z \in Z} L \cdot 1_z \cong_k FM$$

Donde $(*)$ vale pues el conjunto $\{1_z : z \in Z\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos. Por último, es inmediato de la definición de la multiplicación en FM que el isomorfismo de k-espacios vectoriales es de Λ_Z-módulos.

□

Observación 3.36. *El funtor $F : Mod(Z) \to Mod(\Lambda_Z)$ aplica módulos de dimensión finita en módulos de dimensión finita, por lo tanto se restringe a $F : mod(Z) \to mod(\Lambda_Z)$ y sigue siendo una equivalencia de k-categorías.*

Corolario 3.37. *Considerando F la equivalencia construída, se tiene:*

1. *$M, N \in Mod(Z)$, entonces $F(M \oplus N) = FM \oplus FN$.*

2. *$M \in Mod(Z)$ es indescomponible si y sólo si FM es indescomponible.*

3. *$M \in Mod(Z)$ es indescomponible si y sólo si el álgebra de endomorfismos. $End_Z(M)$ es local.*

4. *Vale el teorema de Krull-Schmidt en la categoría $mod(Z)$*

5. *F es exacto.*

6. *$P \in Mod(Z)$ es proyectivo si y sólo si FP es proyectivo. Análogamente para inyectivo.*

Demostración. Sólo utilizaremos de F que es una equivalencia de k-categorías. Al admitir F adjunto a ambos lados, preserva límites y colímites. En particular: objeto cero, sumas, núcleos, conúcleos, imagen, monomorfismos y epimorfismos.
Se tiene por lo tanto:

1. Es evidente, por lo recién expresado.

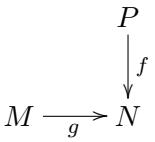
2. Si $M = M_1 \oplus M_2$ entonces $FM = FM_1 \oplus FM_2$. Como $FN = 0 \iff N = 0$, se sigue lo que queríamos.

3. Al ser F un k-funtor plenamente fiel, se tiene un isomorfismo de k-álgebras $End_Z(M) \cong End_{\Lambda_Z}(FM)$. Como se tiene en $Mod(\Lambda_Z)$ que un módulo es indescomponible si y solo si su álgebra de endomorfismos es local, se sigue lo que queríamos para $Mod(Z)$.

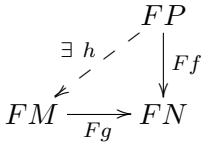
4. F aplica descomposiciones irreducibles de un módulo M en descomposiciones irreducibles de FM. Como el teorema de descomposición única (salvo orden e isomorfismo) vale en $mod(\Lambda_Z)$, entonces vale en $mod(Z)$.

5. El funtor F es exacto pues preserva monomorfismos, epimorfismos, núcleos, conúcleos y objeto cero.

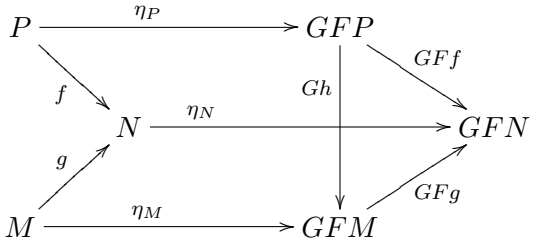
6. Sea $P \in Mod(Z)$ y supongamos que FP es proyectivo. Consideramos un diagrama en $Mod(Z)$:



Donde g es un epimorfismo. Al aplicar F, obtenemos el siguiente diagrama de líneas llenas. Al ser FP proyectivo y Fg un epimorfismo, se puede completar con h tal que el diagrama conmute.



Aplicando G a todo el diagrama y considerando el isomorfismo natural $\eta : 1_{Mod(Z)} \to GF$ obtenemos un diagrama conmutativo:



Mediante un sencillo cálculo, obtenemos que $(\eta_M)^{-1}(Gh)\eta_P$ sirve.

Así, probamos que P es proyectivo de FP lo es. El recíproco se desprende de el mismo resultado para el funtor G, ya que $GFP \cong P$.

□

Ejemplo. Consideremos Z la categoría-base dada por:

$$\begin{array}{ccccc} & & x & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \omega} & & \\ y & \xrightarrow[\alpha]{} & w & \xleftarrow[\beta]{} & z \end{array}$$

Veamos que el módulo M

$$\begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ k & \xrightarrow[1]{} & k & \xleftarrow[1]{} & k \end{array}$$

Es indescomponible probando que el álgebra de endomorfismos es local. Sea $f \in End_Z(M)$. Como los espacios vectoriales involucrados tienen dimensión 1, f consiste en multiplicar por un escalar en cada vértice. Pero al ser las transformaciones lineales identidades, para que f sea natural debe ser multiplicar siempre por un mismo número. Entonces tenemos $End_Z(M) \cong k$ y por lo tanto es local.

Ahora, consideremos N el siguiente módulo

$$\begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle (1,1)} & & \\ k & \xrightarrow[(1,0)]{} & k^2 & \xleftarrow[(0,1)]{} & k \end{array}$$

Veamos que es indescomponible. Aplicamos el mismo método, pero esta vez es levemente más complicado. Sea $f \in End_Z(N)$, f consiste en multiplicar por un escalar en cada uno de los tres vértices exteriores (llamémoslos a_x, a_y, a_z) y por una matriz de 2×2 en el vértice del centro $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$.

Observemos que la transformación lineal notada como $(1,0) : k \to k^2$ consiste en multiplicar por la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Planteamos la relación de conmutatividad:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} a_y$$

Calculamos a ambos lados de la igualdad y obtenemos $a_1 = a_y, a_3 = 0$.

Análogamente par el punto z con la transformación $(0,1)$ obtenemos $a_2 = 0, a_4 = a_z$.

Por último, con el vértice x y la tranformación $(1,1)$ la relación de conmutatividad nos queda:

$$\begin{pmatrix} a_y & 0 \\ 0 & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_x$$

Donde obtenemos $a_x = a_y = a_z$ y por lo tanto $End_Z(N) \cong k$.

3.6. Morfismos en una k-categoría

Durante esta sección consideraremos una k-categoría $\mathcal{M}$ fija. Consideraremos $\mathcal{M}$ la categoría de módulos de una dada Λ k-categoría localmente acotada, aunque muchas definiciones y resultados valen más generalmente. Sugerimos [As, ARS] como referencias sobre los contenidos de esta sección.

3.6.1. Morfismos minimales y que casi se parten

Definición 3.38. Un morfismo $f : M \to N$ se dice minimal a izquierda si para todo $h \in End(N)$ tal que $hf = f$ se tiene entonces que $h \in Aut(N)$.
Dualmente, un morfismo $f : M \to N$ se dice minimal a derecha si para todo $g \in End(M)$ tal que $fg = f$ se tiene entonces que $g \in Aut(M)$.

Ejemplo. Si f es epi, entonces es minimal a izquierda. Pues $hf = f \Rightarrow h = 1_N$. Dualmente, todo mono es minimal a derecha.

Definición 3.39. Un morfismo $f : M \to N$ se dice que casi se parte a izquierda si:

1. f no es una sección.
2. Para todo morfismo $u : M \to U$ que no es una sección, existe u' tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle u}\downarrow & \swarrow_{\exists u'} & \\ U & & \end{array}$$

Definición 3.40. Un morfismo $f : M \to N$ se dice que casi se parte a derecha si:

1. f no es una retracción.
2. Para todo morfismo $v : V \to N$ que no es una retracción existe v' tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & V \\ & {\scriptstyle \exists v'} \swarrow & \downarrow {\scriptstyle v} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Lema 3.41. *Si $f : M \to N$ y $f' : M \to N'$ son dos morfismos minimales que casi se parten a izquierda, entonces existe $h : N \xrightarrow{\sim} N'$ un iso tal que $hf = f'$. Dualmente, si $f : M \to N$ y $f' : M' \to N$ son dos morfismos minimales que casi se parten a derecha, entonces existe $h : M \xrightarrow{\sim} M'$ un iso tal que $f = f'h$*

Demostración. Demostraremos el caso a izquierda, el caso a derecha es análogo.

Como f' no es una sección y f casi se parte, existe $h : N \to N'$ tal que $hf = f'$. Análogamente, existe $h : N' \to N$ tal que $h'f' = f$.
Luego, $h'hf = f$ y como f es minimal a izquierda se tiene $h'h$ es un isomorfismo. Análogamente hh' es un isomorfismo de lo que se sigue que h y h' son isomorfismos.

□

Proposición 3.42. *Si $f : M \to N$ es un morfismo que casi se parte a izquierda (resp. a derecha) entonces M (resp. N) es indescomponible.*

Demostración. Probemos el caso a izquierda. Si $M = M_1 \oplus M_2$ es una descomposición con $M_i \neq 0$. Como las proyeciones $\pi_i : M \to M_i$ son retracciones pero no secciones, dado que f casi se parte a izq, tenemos que existe $g_i : N \to M_i$ tal que $g_i f = \pi_i$. Pero entonces $g = (g_1, g_2) : N \to M_1 \oplus M_2 = M$ es tal que $gf = 1_M$. Esto contradice el hecho de que f no es sección. □

3.6.2. Morfismos irreducibles

Los morfismos irreducibles nos permiten analizar la categoría $ind(\Lambda)$ de manera geométrica: pensaremos a un módulo M como "inmediatamente anterior" a un módulo N si existe un morfismo irreducible de M a N. De esta manera se define el quiver de Auslander-Reiten (cf. [ARS] VII).

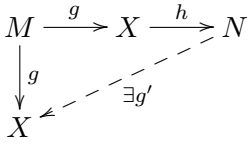
Definición 3.43. Un morfismo $f : M \to N$ se dice irreducible si:

1. f no es una sección ni una retracción.
2. $f = hg$ implica h es una retracción o g es una sección.

Lema 3.44. *Si $f : M \to N$ es minimal que casi se parte a izquierda (o a derecha) entonces f es irreducible.*

Demostración. Demostremos el caso a izquierda. f no es una sección, veamos que tampoco puede ser una retracción. Esto se desprende de que M es indescomponible.

Ahora, si $f = hg$ con g no una sección. Como f casi se parte a izq, existe g' como indica el diagrama:



Ahora, $f = hg = hg'f$ y como f es minimal, entonces hg' es un iso y luego h es una retracción. □

3.6.3. Sucesiones que casi se parten

Definición 3.45. Decimos que una sucesión exacta corta:

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

casi se parte si f es minimal que casi se parte a izq y g es minimal que casi se parte a derecha Es claro que una sucesión que casi se parte no se parte. En virtud de la proposición 3.42 L y N son indescomponibles.

Lema 3.46. *Una sucesión que casi se parte de la forma:*

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

Está determinada a menos de isomorfismo por L o por N

Demostración. Para N, consideremos el diagrama comnutativo donde las filas son sucesiones que casi se parten:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h_{|}} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como g no es una sección y g' casi se parte a derecha, existe h tal que el cuadrado conmuta.
Como g' es minimal a derecha, entonces h es un isomorfismo.
Por último, la flecha punteada se consigue restringiendo $h_{|}$.

□

Lema 3.47. *Sea el siguiente diagrama con filas exactas que no se parten*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con N indescomponible. entonces u y v son isomorfismos.
Asimismo, vale el resultado dual cuya formulación es evidente.

Demostración. Supongamos que v no es un automorfismo. Como $End_\Lambda(N)$ es local, $v^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Como $0 = v^n g = g u^n$, se tiene que u^n factoriza por f (pues $Ker(g) = Im(f)$). O sea, existe $h : M \to L$ tal que $u^n = fh$. Pero $fhf = u^n f = f$ pero como f es mono se tiene $hf = 1$ lo que contradice que la sucesión no se parte.

□

Teorema 3.48. *Para una sucesión exacta corta:*

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

Son equivalentes:

1. *La sucesión casi se parte*
2. *L es indescomponible y g casi se parte a derecha*
3. *N es indescomponible y f casi se parte a izquierda*
4. *f es minimal que casi se parte a izquierda*
5. *g es minimal que casi se parte a derecha*
6. *L, N son indescomponibles y f, g son irreducibles.*

Demostración. Es claro por lo visto hasta ahora que 1. implica todas las otras. Demostraremos 3. $\Rightarrow$ 1. ya que la utilizaremos más adelante y referimos a [As] II.3.3 para las demás implicaciones.

Veamos primero 3. $\Rightarrow$ 2. En primer lugar, g no es una retracción pues entonces f sería una sección. Sea un morfismo $U \xrightarrow{u} N$ que no se factoriza por g, veamos que es una retracción.

Consideramos el diagrama conmutativo con filas exactas (cf. [ARS]II.5):

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{k} & U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1_L} & & \downarrow{\scriptstyle v} & Pull & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow[f]{} & M & \xrightarrow[g]{} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

La primera fila no se parte, pues si así fuera, se tendría un diagrama exacto:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & V & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L \oplus U & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle f+w} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow[f]{} & M & \xrightarrow[g]{} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

de donde se deduce $gw = u$ que contradice que u no se factoriza por g.

Como no se parte, se tiene que h no es una sección. Al ser f que casi se parte a izquierda, existe $v' : M \to V$ tal que $v'f = h$.
Entonces se tiene $\overline{v'} : M/Ker(f) \to V/Ker(h)$, como $M/Ker(f) \cong N, \quad V/Ker(g) \cong U$ se define u' y se tiene el siguiente diagrama exacto:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{k} & U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle v'} & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{k} & U & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

En virtud del lema anterior, se tiene que uu' es un automorfismo, luego u es una retracción.

Veamos ahora que entonces vale 1. Resta probar que f y g son minimales. Sea $h : M \to M$ tal que $hf = f$. Consideramos el diagrama exacto:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donde k se construye como u' antes.
Por el lema anterior se tiene que h es un automorfismo y por lo tanto f es minimal a izquierda. Dualmente se tiene g minimal a derecha. □

Mencionaremos el siguiente resultado como cierre para esta sección. La demostración puede leerse en [ARS].

Teorema 3.49. *(Existencia de sucesiones que casi se parten)*
Para todo módulo indescomponible y no proyectivo L existe una sucesión que casi se parte de la forma:

$$0 \to \tau L \to M \to L \to 0$$

Donde τ es la translación de Auslander-Reiten.

4. Revestimientos de k-categorías

En esta sección estudiaremos revestimientos de k-categorías y su relación con teoría de representaciones. Las referencias para esta sección son los trabajos de K. Bongartz y P. Gabriel, [BG], [Ga].

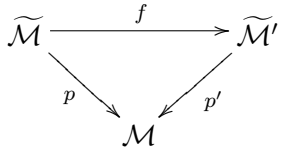
Definición 4.1. Un morfismo $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ en $k\mathcal{C}at$ se dice un revestimiento si $\forall a, b \in \mathcal{N}, \forall x/a, \forall y/b,\ p$ induce isomorfismos:

$$\bigoplus_{z/b} \mathcal{M}(x,z) \xrightarrow{p} \mathcal{N}(a,b)$$

$$\bigoplus_{w/a} \mathcal{M}(w,y) \xrightarrow{p} \mathcal{N}(a,b)$$

Observación 4.2. *Observemos que esta definición no la podemos pensar con un diagrama en $k\mathcal{C}at$ porque la flecha cruzada es una suma formal de morfismos de $\mathcal{M}$.*

Definición 4.3. Análogamente a lo hecho antes, para $\mathcal{M} \in k\mathcal{C}at$, definimos $\mathcal{C}ov_{k\mathcal{C}at}(\mathcal{M})$ como la categoría de revestimientos sobre $\mathcal{M}$ donde los morfismos entre dos revestimientos $\widetilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{p} \mathcal{M}$ y $\widetilde{\mathcal{M}}' \xrightarrow{p'} \mathcal{M}$ son los k-funtores $f : \widetilde{\mathcal{M}} \to \widetilde{\mathcal{M}}'$ que hacen que el diagrama conmute:



Proposición 4.4. *Si $p : C \to D$ es un revestimiento en $\mathcal{C}at_0$, entonces $k(p) : kC \to kD$ es un revestimiento en $k\mathcal{C}at$. Más aún, las flechas de D se levantan a flechas de C. (Pensamos $\mathcal{F}l\ D \subset \mathcal{F}l\ kD$.)*

Demostración. Sean $a, b \in D$, $x/a, y/b \in C$. Al aplicar el funtor k las biyecciones entre:

$$\coprod_{z/b} C(x,z) \xrightarrow{p} D(a,b) \quad \coprod_{w/a} C(w,y) \xrightarrow{p} D(a,b)$$

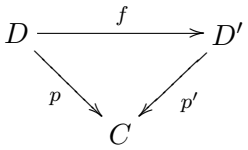
Se transforman en isomorfismos:

$$\bigoplus_{z/b} kC(x,z) \xrightarrow{kp} D(a,b) \quad \bigoplus_{w/a} kC(w,y) \xrightarrow{p} D(a,b)$$

Pues las flechas cero se aplican en flechas cero y las no cero forman una base de los espacios en cuestión. □

Proposición 4.5. *Sea $C \in \mathcal{C}at_0$. El funtor $k : \mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at_0}(C) \to \mathcal{C}ov_{k\mathcal{C}at}(kC)$ es plenamente fiel.*

Demostración. Consideremos

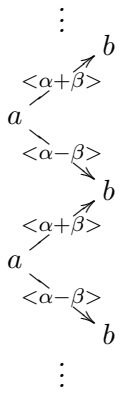


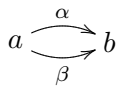
un morfismo en $\mathcal{C}ov_{\mathcal{C}at}(C)$.

Es claro que el funtor k es fiel ya que kf queda determinado en los objetos como f y en los morfismos $kD(x, y)$ por su valor en la base $\{\alpha \in D(x.y) \mid \alpha \neq 0\}$.

Sea $kD \xrightarrow{g} kD'$ un morfismo en $\mathcal{C}ov_{k\mathcal{C}at}(kC)$. Sea $\alpha \in D(x, y)$ una flecha no nula.
Tenemos entonces $(kp')g(\alpha) = kp(\alpha) = p(\alpha)$ lo que nos dice que $g(\alpha)$ es un levantado de $p(\alpha)$ no nulo, por lo tanto $g(\alpha) \in D'(gx, gy)$ y es no nulo.
Por consiguiente, $g = k(g')$ con g' su propia restricción a los elementos de $D \subset kD$. □

Observación 4.6. *En general NO se tiene una equivalencia. Por ejemplo el siguiente revestimiento sobre $a \xrightarrow{<\alpha,\beta>} b$:*



No proviene de un revestimiento sobre  *(en $\mathcal{C}at_0$).*

Proposición 4.7. *Sea $\mathcal{M} \xrightarrow{p} \mathcal{N}$ un revestimiento de k-categorías*

- *Si $\mathcal{M}$ no tiene objetos isomorfos y $\mathcal{N}$ es localmente acotada entonces $\mathcal{M}$ lo es.*
- *Si las álgebras $\mathcal{N}(x)$ son locales (para todo $x \in \mathcal{N}$), $\mathcal{N}$ es conexa y $\mathcal{M}$ es localmente acotada y no vacía; entonces $\mathcal{N}$ es localmente acotada.*

Demostración. ▪ Sea $x \in \mathcal{M}$, como p es revestimiento, tenemos $p : \mathcal{M}(x) \to \mathcal{N}(px)$ es un monomorfismo. Sea $e \in \mathcal{M}(x)$ un idempotente.
Se tiene entonces $p(e)p(e) = p(e^2) = p(e)$, como $\mathcal{N}(px)$ es local entonces $p(e) = 0$ o $p(e) = 1$. Si $p(e) = 0$, entonces e y 0 son levantados del 0 a partir de x, luego $e = 0$. Análogamente, si $p(e) = 1$ entonces $e = 1$.

Por otra parte, $p : \bigoplus_{y \in \mathcal{M}} \mathcal{M}(x, y) \to \bigoplus_{b \in \mathcal{N}} \mathcal{N}(px, b)$ es un monomorfismo.

Como $dim_k\Big(\bigoplus_{b \in \mathcal{N}} \mathcal{N}(px, b)\Big) < \infty$, entonces $dim_k\Big(\bigoplus_{y \in \mathcal{M}} \mathcal{M}(x, y)\Big) < \infty$.

Análogamente, se tiene $dim_k\Big(\bigoplus_{w \in \mathcal{M}} \mathcal{M}(w, x)\Big) < \infty$.

- Como $\mathcal{M}$ es no vacía y $\mathcal{N}$ es conexa, entoces p es sobre en objetos. Ya que si $x \in \mathcal{M}$, para $b \in \mathcal{N}$ existe una flecha $px = a \xrightarrow{\alpha} b$.

Por ser un revestimiento, tenemos $p : \bigoplus_{y/b} \mathcal{M}(x, y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(a, b) \neq \emptyset$, en particular se tiene $p^{-1}(b) \neq \emptyset$.

Para ver que en $\mathcal{N}$ no puede haber dos objetos isomorfos, consideremos $a \xrightarrow{\alpha} b \in \mathcal{N}$ un isomorfismo. Consideremos los $x/a \in \mathcal{M}$, entonces se tienen únicos $x \xrightarrow{\widetilde{\alpha}_z} z$ tales que: $\alpha = \sum_{z/b} p(\alpha_z)$

Para cada z/b, levantamos $\alpha - 1$ a una suma. Es decir, existen únicos $z \xrightarrow{\widetilde{\alpha^{-1}}_w} w$ tales que: $\alpha^{-1} = \sum_{w/a} p(\widetilde{\alpha^{-1}}_w)$

Tenemos entoces:

$$1_a = \alpha\alpha^{-1} = (\sum_{z/b} p(\widetilde{\alpha}_z))(\sum_{w/a} p(\widetilde{\alpha^{-1}}_w)) = \sum_{w/a} p(\sum_{z/b} \widetilde{\alpha}_z \widetilde{\alpha^{-1}}_w)$$

Luego, $\sum_{w/a} p(\sum_{z/b} \widetilde{\alpha}_z \widetilde{\alpha^{-1}}_w)$ es un levantamiento de la identidad.

Pero como la identidad sólo se levanta a la identidad, se tiene:

$$\sum_{z/b} \widetilde{\alpha}_z \widetilde{\alpha^{-1}}_w = \begin{cases} 1_x & \text{si } w = x \\ 0_w & \text{si } w \neq x \end{cases}$$

Por hipótesis el álgebra $\mathcal{M}(x)$ es local, esto implica que los elementos no inversibles forman un ideal.

Como $\sum_{z/b} \widetilde{\alpha}_z \widetilde{\alpha^{-1}}_x = 1_x$, entonces para al menos un z, $\widetilde{\alpha}_z \widetilde{\alpha^{-1}}_x$ es inversible.

En $\mathcal{M}$ no hay objetos isomorfos, esto implica $z = x$ y concluímos $a = px = pz = b$.

Por último debemos verificar para todo $a \in \mathcal{N}$ los espacios vectoriales $\bigoplus_{b\in\mathcal{N}} \mathcal{N}(a,b)$ y $\bigoplus_{c\in\mathcal{N}} \mathcal{N}(c,a)$ son de dimensión finita.

Sea x/a, por ser p un revestimiento, sabemos:

$$\bigoplus_{b\in\mathcal{N}} \mathcal{N}(a,b) \cong \bigoplus_{b\in\mathcal{N}} \bigoplus_{y/b} \mathcal{M}(x,y) \subset \bigoplus_{y\in\mathcal{M}} \mathcal{M}(x,y)$$

que sabemos por hipótesis que es de dimensión finita.

Análogamente, $\bigoplus_{c\in\mathcal{N}} \mathcal{N}(c,a)$ es de dimensión finita. □

Teorema 4.8. *Sean $\mathcal{M} \xrightarrow{p} \mathcal{N}$ un revestimiento entre k-categorías de representación localmente finita. Son equivalentes:*

(i) Existe un revestimiento $H : ind(\mathcal{M}) \to ind(\mathcal{N})$ tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{M}}} & ind(\mathcal{M}) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H} \\ \mathcal{N} & \xrightarrow[\gamma_{\mathcal{N}}]{} & ind(\mathcal{N}) \end{array}$$

(ii) El funtor extensión $p_\lambda : Mod\mathcal{M} \to Mod\mathcal{M}$ preserva sucesiones de Auslander-Reiten.

Omitiremos la demostración de este resultado, que puede verse en [Ga] ya que probaremos un resultado más importante para el caso particular que nos interesa. Es decir, cuando el revestimiento de k-categorías proviene de un revestimiento en $\mathcal{C}at_0$.

4.1. Diagramas Cleaving

Definición 4.9. Dado un k-funtor $\mathcal{M} \xrightarrow{F} \mathcal{N}$, se tiene entonces el funtor restricción:
$F^* : Mod(\mathcal{N}) \to Mod(\mathcal{M})$
$F^*N = N \circ F$
Este funtor admite un adjunto a izquierda, el funtor extensión, definido a menos de isomorfismo por:
$F_\lambda : Mod(\mathcal{M}) \to Mod(\mathcal{N})$
$F_\lambda\big(\mathcal{M}(x,.)\big) = \mathcal{N}(Fx,.)$

El funtor F se dirá un cleaving si el morfismo de adjunción: $\Phi : 1 \Rightarrow F^*F_\lambda$ es una sección (o sea si es una sección en cada objeto).

Ejemplo. Si $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ es la inclusión de una k-subcategoría plena, entonces el funtor inclusión es un cleaving.

Demostración. En este caso, i_λ queda definido por $i_\lambda\big(\mathcal{M}(x,.)\big) = \mathcal{N}(x,.)$.
Luego, $i^*i_\lambda\big(\mathcal{M}(x,.)\big) = i^*\big(\mathcal{N}(x,.)\big) = M(x,.)$ y el morfismo de adjunción resulta la identidad. □

Es claro que si una k-categoría localmente acotada $\mathcal{M}$ es de representación localmente finita, entonces toda k-subcategoría plena lo es. La siguiente porposición generaliza este hecho.

Proposición 4.10. *Si $\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{N}$ es un cleaving ($\mathcal{M}, \mathcal{N}$ localmente acotadas) y $\mathcal{N}$ es de representación localmente finita, entonces $\mathcal{M}$ lo es.*

Demostración. Sean $N_1, \cdots, N_r \in ind\ \mathcal{N}$ los tales que $N_i(fx) \neq 0$.

Para cada $i = 1, \cdots, r$ sean $M_{i_j} \in ind\ \mathcal{M}$ (para $j = 1, \cdots, s_i$) los indescomponibles que aparecen en una descomposición de $f^*(N_i)$. Como $f^*N_i(x) = N_i(fx)$ tenemos

$$s_i \leq \sum_j dim\ M_{i_j}(x) \leq dim\ f^*N_i(x) = dim\ N_i(fx)$$

Luego hay una cantidad finita de M_{i_j} pues $\sum_i s_i \leq \sum_i dim\ N_i(fx)$ (y los N_i son una cantidad finita).

Ahora si $M \in mod\ \mathcal{M}$ indescomponible tal que $Mx \neq 0$, queremos ver que $M \cong M_{i_j}$ para algún i_j.

Como M es de dimensión finita, entonces $f_\lambda M$ lo es. Por otra parte, como $Mx \neq 0$, se puede definir un morfismo de $\mathcal{M}$-módulos no nulo de $M \to \overset{x}{S}$. Extendiendo ese

morfismo de manera trivial, existe un morfismo no nulo $M \to \bigoplus_{w/fx} \overset{w}{S} = f^*(\overset{fx}{S})$. Por la adjunción, se tiene

$$0 \neq Hom_{\mathcal{M}}\big(M, f^*(\overset{fx}{S})\big) \cong Hom_{\mathcal{N}}\big(f_\lambda M, \overset{fx}{S}\big)$$

Luego $f_\lambda M(fx) \neq 0$ y por consiguiente, al descomponer $f_\lambda M \cong \bigoplus_{N \in ind\ \mathcal{N}} N$ (con finitos N) se tiene que algunos de los N_i considerados tienen que aparecer. Como la suma es finita (y por lo tanto es un producto también) se tiene

$$f^* f_\lambda M \cong \bigoplus_{N \in ind\ \mathcal{N}} f^* N$$

Como $M \to f^* f_\lambda M$ es una sección, entonces M es un sumando directo indescomponible de $f^* f_\lambda M$. Como $Mx \neq 0,\ M$ debe ser sumando uno de los sumandos isomorfos a $f^* N_i$ para algún i. Entonces $M \cong M_{i_j}$ para algún i_j.

□

5. Revestimientos en $\mathcal{C}at_0$ y Teoría de Representaciones

En esta sección presentaremos resultados que pueden encontrarse en [Ga] para el caso particular $\Lambda = kZ$ (con Z una categoría-base). Nos valemos de la elegante teoría expuesta brevemente en al sección 3, en conjunto con la estructura combinatoria de las categorías con ceros, para presentar pruebas más sencillas.

A la convención de notar $mod(Z)$ por $mod(kZ)$ sumaremos la de notar p^* y p_λ por $(kp)^*$ y $(kp)_\lambda$ respectivamente.

Proposición 5.1. *Sea $\widetilde{Z} \xrightarrow{p} Z$ un revestimiento categorias con ceros.*

- *Si $\widetilde{Z}$ no tiene objetos isomorfos y Z es una categoría-base entonces $\widetilde{Z}$ lo es.*
- *Si para todo $a \in Z, 1 \neq f \in Z(a)$ se tiene f nilpotente, Z es conexa y $\widetilde{Z}$ es una categoría-base no vacía, entonces Z lo es.*

Demostración. Análoga a 4.7. □

Durante toda esta sección, $\widetilde{Z} \xrightarrow{p} Z$ denotará un revestimiento conexo en $\mathcal{C}at_0$ entre dos categorias base. Llamaremos G al grupo de automorfismos del revestimiento.

Definición 5.2. Para $M \in Mod(\widetilde{Z}), g \in G$, definimos el módulo trasladado por g, $M \cdot g = M \circ g$.

Se tiene así una acción a derecha de G en la clase de los objetos de $Mod(\widetilde{Z})$. Justificamos el nombre de acción por las propiedades $M \cdot 1 = M$ y $M \cdot (gg') = (M \cdot g) \cdot g'$ (donde gg' es la composición del grupo de automorfismos).

Observación 5.3. *Observemos que esta acción cumple $(M \oplus M') \cdot g = M \cdot g \oplus M' \cdot g$ y por lo tanto aplica módulos de dimensión finita indescomponibles en módulos de dimensión finita indescomponibles.*

Observación 5.4. *Más aún, si $M \xrightarrow{f} M'$ es un morfismo de $\widetilde{Z}$-módulos definimos el morfismo $M \cdot g \xrightarrow{f \cdot g} M' \cdot g$ vía $(f \cdot g)_x = f_{gx}$.*
La naturalidad es evidente pues para $x \xrightarrow{\omega} y \in \widetilde{Z}$, el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M(gx) & \xrightarrow{M(g\omega)} & M(gy) \\ {\scriptstyle f_{gx}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{gy}} \\ M'(gx) & \xrightarrow[M'(g\omega)]{} & M'(gy) \end{array}$$

conmuta.

Lema 5.5. *Si $\widetilde{Z} \xrightarrow{p} Z$ es un revestimiento de categorías-base, entonces el funtor extensión $p_\lambda : Mod(\widetilde{Z}) \to Mod(Z)$ queda definido por:*

Para $a \in Z$,

$$\big(p_\lambda M\big)a = \bigoplus_{x/a} Mx$$

Para $a \xrightarrow{\alpha} b \in Z$,

$$\big(p_\lambda M\big)\alpha = \bigoplus_{x/a} \widetilde{\alpha}_x$$

donde $\widetilde{a}_x$ es el único levantado de α que comienza en x.

Y de esta manera se extiende linealmente a $kZ(a,b)$.

Para un morfismo de $\widetilde{Z}$-módulos $f : M \to L$, definimos:

$$p_\lambda(f)_a = \bigoplus_{x/a} f_x : \bigoplus_{x/a} Mx \to \bigoplus_{x/a} Lx$$

(es claro que es un morfismo de Z-módulos, es decir, que es natural en x).

Observemos que se tiene inmediatamente de la definición $p^* p_\lambda M = \bigoplus_{g \in G} M \cdot g$

Demostración. p_λ es claramente una construcción funtorial. Para ver que sirve como funtor extensión debemos verificar que se tiene una adjunción $p_\lambda \dashv p^*$.
Para eso definimos

$$Hom_Z(p_\lambda M, N) \xrightarrow{\Phi} Hom_{\widetilde{Z}}(M, p^* N)$$

Sean $a \in Z, x'/a \in \widetilde{Z}$, para $f : (p_\lambda M)a = \bigoplus_{x/a} Mx \to Na = N(px')$ definimos

$$\Phi(f)(x') = f i^M_{x'}$$

donde $i^M_{x'} : Mx' \to \bigoplus_{x/a} Mx$ es la inclusión en la coordenada x' de la suma directa.

El hecho de que $\Phi(f)$ resulta una transformación natural es inmediato de su definición y el hecho de que f lo es. Por otra parte la biyección Φ claramente es natural en la variable N. Y lo es también en M pues si se tiene un morfismo $h : M \to M'$, entonces $(p_\lambda h)_a$ se define como $\bigoplus_{x/a} h_x : \bigoplus_{x/a} Mx \to \bigoplus_{x/a} M'x$.

Por último, es claro que los funtores $p^* p_\lambda M$ y $\bigoplus_{g \in G} M \cdot g$ coinciden en los objetos. Por otra parte, si $M \xrightarrow{f} M'$ es un morfismo de $\widetilde{Z}$-módulos, se verifica $\bigoplus_{g \in G} f \cdot g = p^* p_\lambda f$ mediante un cálculo directo.

□

Observación 5.6. *Si consideramos los funtores* $mod(Z) \underset{p^*}{\overset{p_\lambda}{\rightleftarrows}} mod(\widetilde{Z})$ *se tiene no sólo* $p_\lambda \dashv \rho^*$ *sino también* $p^* \dashv p_\lambda$*. Omitiremos la demostración porque es esencialmente igual a la anterior, dado que la suma directa involucrada en la definición de* p_λ *funciona también como producto.*

Proposición 5.7. *El* k*-funtor* $kp : k\widetilde{Z} \to kZ$ *es un cleaving.*

Demostración. Para $M \in Mod(\widetilde{Z})$ la unidad $M \xrightarrow{\eta_M} p^*p_\lambda M$ está definida por $\Phi(1_{p_\lambda M})x = i_x^M : Mx \hookrightarrow \bigoplus_{\widetilde{x}/a} M\widetilde{x}$ para cada $x \in \widetilde{Z}$.

Si pensamos $p^*p_\lambda M = \bigoplus_{g \in G} M \cdot g$, la unidad está dada por:

$$M \xrightarrow{\eta_M} \bigoplus_{g \in G} M \cdot g$$

Es decir, es la inclusión en la componente correspondiente a la identidad de G. Definimos entonces la retracción buscada como la proyección correspondiente:

$$\bigoplus_{g \in G} M \cdot g \xrightarrow{\rho_M} M$$

Veamos que es natural. Para $M \xrightarrow{f} M'$ es un morfismo en $Mod(\widetilde{Z})$, consideramos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{g \in G} M \cdot g & \xrightarrow{\oplus f \cdot g} & \bigoplus_{g \in G} M' \cdot g \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_M} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{M'}} \\ M & \xrightarrow[f]{} & M' \end{array}$$

Es claro que el diagrama conmuta pues $f \cdot 1 = f$.

□

Corolario 5.8. *Si* Z *es de representación localmente finita, entonces* $\widetilde{Z}$ *lo es.*

Lema 5.9. *El funtor* $p_\lambda : mod(\widetilde{Z}) \to mod(Z)$ *es exacto.*

Demostración. Podríamos utilizar un argumento de adjunción, pero la prueba directa es sencilla ya que nucleos y conucleos calculan lugar a lugar.

Consideremos una sucesión exacta corta de $\widetilde{Z}$-módulos:

$$0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

Al aplicar p_λ, obtenemos para cada $a \in Z$:

$$0 \to \bigoplus_{x/a} Mx \xrightarrow{\bigoplus_{x/a} f_x} \bigoplus_{x/a} M'x \xrightarrow{\bigoplus_{x/a} g_x} \bigoplus_{x/a} M''x \to 0$$

un diagrama de transformaciones lineales donde las sumas son finitas, entonces

$$Ker\big(\bigoplus_{x/a} f_x\big) = \bigoplus_{x/a} Ker f_x$$

$$Coker\big(\bigoplus_{x/a} f_x\big) = \bigoplus_{x/a} Coker f_x$$

y análogamente para $\bigoplus_{x/a} g_x$ de lo que se sigue el lema. □

Lema 5.10. *Se tienen entonces isomorfismos canónicos $p_\lambda M \cdot g \xrightarrow{\sim} p_\lambda M$.*

Demostración. Para cada $a \in Z$, $g : x/a \to x/a$ es una biyección y por lo tanto induce un isomorfismo:

$$(p_\lambda M)a = \bigoplus_{x/a} Mx \xrightarrow{\overline{g}_a} \bigoplus_{x/a} M(gx) = (p_\lambda M \cdot g)a$$

Ahora para $a \xrightarrow{\alpha} b \in Z, x/a, y/b \in \widetilde{Z}$, se tienen los levantados $x \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} y$ y $gx \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} gy$ respecto al revestimiento p. Por unicidad del levantado $g(x \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} y) = gx \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} gy$ lo que implica la naturalidad de la transformación $\overline{g}$ ya que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x/a} Mx & \xrightarrow{\oplus M(x \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} y)} & \bigoplus_{y/b} My \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{g}_a} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{g}_b} \\ \bigoplus_{x/a} M(gx) & \xrightarrow{\oplus M(gx \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} gy)} & \bigoplus_{x/a} M(gx) \end{array}$$

conmuta y $\oplus M(gx \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} gy) = \oplus M \cdot g(x \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} y)$.

□

Lema 5.11. *Sea $\widetilde{Z} \xrightarrow{p} Z \in \mathcal{C}at_0$ un revestimiento conexo entre dos categorías-base. $N \in mod(Z)$, entonces $p_\lambda p^* N = \bigoplus_{x/a} N$.*

Demostración. Para cualquier $a \in Z$:

$$(p_\lambda p^* N)a = \bigoplus_{x/a} p^* N x = \bigoplus_{x/a} Na$$

Para una flecha $a \xrightarrow{\alpha} b \in Z$:

$$(p_\lambda p^* N)\alpha = \bigoplus_{x/a} (p^* N)(\widetilde{\alpha}_x) = \bigoplus_{x/a} N(p\widetilde{\alpha}_x) = \bigoplus_{x/a} N\alpha$$

□

Lema 5.12. *Si $M \in mod(\widetilde{Z})$ es indescomponible y $M \cdot g \ncong M$ para $1 \neq g \in G$, entonces $p_\lambda M$ es indescomponible. Más aún, si $M' \in mod(\widetilde{Z})$ tal que $p_\lambda M' \cong p_\lambda M$ entonces $M' \cong M \cdot g$ para algún $g \in G$.*

Demostración. Sea $p_\lambda M = N \oplus N'$ y supongamos que $N \neq 0$. Tenemos entonces $\bigoplus_{g \in G} M \cdot g = p^* p_\lambda M = p^* N \oplus p^* N'$.

Como los módulos $M \cdot g$ son todos indescomponibles y no ismorfos entre si, tenemos para algún subconjunto $H \subset G$,

$$p^* N = \bigoplus_{g \in H} M \cdot g \qquad \text{y} \qquad p^* N' = \bigoplus_{g \in G \setminus H} M \cdot g$$

Pero para cualquier $g' \in G$, $(p^* N) \cdot g = p^* N$ y por la igualdad anterior, $\bigoplus_{g \in H} M \cdot g = \bigoplus_{g \in H} M \cdot (gg')$.

Al valer para cualquier $g' \in G$ se sigue $H = G$ y por lo tanto $N = M, N' = 0$.

□

Proposición 5.13. *Si $L \xrightarrow{f} M \in mod(\widetilde{Z})$ es un morfismo que casi se parte a izquierda, entonces $p_\lambda L \xrightarrow{p_\lambda f} p_\lambda M$ es un morfismo que casi se parte a iquierda en $mod(Z)$.*

Demostración. Veamos primero que $p_\lambda L \xrightarrow{p_\lambda f} p_\lambda M$ no es una sección.

Si $p_\lambda f$ es una sección, existe una transformación natural g tal que $g(p_\lambda f) = 1_L$. Es decir, para cada $a \xrightarrow{\alpha} b \in Z$, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
(p_\lambda L)a & \xrightarrow{(p_\lambda L)\alpha} & (p_\lambda L)b \\
\downarrow{\scriptstyle (p_\lambda f)_a} & & \downarrow{\scriptstyle (p_\lambda f)_b} \\
(p_\lambda M)a & \xrightarrow{(p_\lambda M)\alpha} & (p_\lambda M)b \\
\downarrow{\scriptstyle g_a} & & \downarrow{\scriptstyle g_b} \\
(p_\lambda L)a & \xrightarrow{(p_\lambda L)\alpha} & p_\lambda Lb
\end{array}$$

Donde $g_a(p_\lambda f)_a = 1_{La}, \quad g_b(p_\lambda f)_b = 1_{Lb}$.

Calculando p_λ, tenemos:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{x/a} La & \xrightarrow{\bigoplus_{x/a} L\widetilde{\alpha}} & \bigoplus_{y/b} Lb \\
\downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{x/a} f_x} & & \downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{y/b} f_y} \\
\bigoplus_{x/a} Ma & \xrightarrow{\bigoplus_{x/a} M\widetilde{\alpha}} & \bigoplus_{y/b} Mb \\
\downarrow{\scriptstyle g_a} & & \downarrow{\scriptstyle g_b} \\
\bigoplus_{x/a} La & \xrightarrow{\bigoplus_{x/a} L\widetilde{\alpha}} & \bigoplus_{y/b} Lb
\end{array}$$

Considerando la inclusión $i^M_{\widetilde{x}} : M\widetilde{x} \to \bigoplus_{x/a} Mx$ y la proyección $\pi^L_{\widetilde{x}} : \bigoplus_{x/a} Lx \to L\widetilde{x}$, definimos la transformación natural

$$g'_{\widetilde{x}} = \pi^L_{\widetilde{x}} g_a i^M_{\widetilde{x}} : M\widetilde{x} \to L\widetilde{x}$$

La transformación es efectivamente natural pues se tiene para $\widetilde{x} \xrightarrow{\omega} \widetilde{y}$ que el levantado de $\alpha = p(\omega)$ a partir de $\widetilde{x}$ es ω y por lo tanto el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
M\widetilde{x} & \xrightarrow{M\omega} & M\widetilde{y} \\
\downarrow{\scriptstyle i_{\widetilde{x}}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{\widetilde{y}}} \\
\bigoplus_{x/a} Mx & \xrightarrow{\bigoplus_{x/a} M\widetilde{\alpha}} & \bigoplus_{y/b} My \\
\downarrow{\scriptstyle g_a} & & \downarrow{\scriptstyle g_b} \\
\bigoplus_{x/a} Lx & \xrightarrow{\bigoplus_{x/a} L\widetilde{\alpha}} & \bigoplus_{y/b} Ly \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_{\widetilde{x}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\widetilde{y}}} \\
L\widetilde{x} & \xrightarrow{L\omega} & L\widetilde{y}
\end{array}$$

Por otra parte si consideramos la inclusión $i^L_{\widetilde{x}}$ y la proyección $\pi^M_{\widetilde{x}}$ se tiene

$$f_{\widetilde{x}} = \pi^M_{\widetilde{x}}(p_\lambda f)_a i^L_{\widetilde{x}}$$

Luego

$$g'_{\widetilde{x}} f_{\widetilde{x}} = \pi^L_{\widetilde{x}} g_a i^M_{\widetilde{x}} \pi^M_{\widetilde{x}} (p_\lambda f)_a i^L_{\widetilde{x}} = 1_{L\widetilde{x}}$$

Como vale para un $\widetilde{x}$ cualquiera, se sigue que f es una sección, lo que contradice la hipótesis pues f casi se parte a izquierda.

Ahora debenos ver que si se tiene un morfismo $h : p_\lambda L \to U \in mod(Z)$ que no es una sección, entonces se puede completar la línea punteada de manera tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} p_\lambda L & \xrightarrow{p_\lambda f} & p_\lambda M \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \swarrow_{\exists h'} & \\ U & & \end{array}$$

Por la adjunción $p_\lambda \dashv p^*$ alcanza probar que se puede completar un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle \phi h}\downarrow & \swarrow_{\exists k} & \\ p^*U & & \end{array}$$

Y considerar $h' = \phi^{-1}k$ en el diagrama original.

Para probar que se puede completar el diagrama, como f casi se parte a izquierda, alcanza ver que $\phi h : L \to p^*U$ no es una sección. Si ϕh es una sección, entonces se tiene $g : p^*U \to L$ tal que $g(\phi h) = 1_L$
Recordemos que para $x \in \widetilde{Z}, (\phi h)(x) = h_a i^L_x$ donde $a = px$. Por lo tanto, para todo $x/a \in \widetilde{Z}$ se tiene $g_x h_a i^L_x = 1_{Ua}$.

Por otra parte, la familia de morfismos $\{g_x \mid x/a\}$ define (pues la suma es finita) un morfismo $g'_a : Ua \to p_\lambda La = \bigoplus_{x/a} Lx$ tal que $\pi^L_x g'_a = g_x$ para todo x/a.
Veamos que g'_a define una transformación natural $g' : U \to p_\lambda L$. O sea, para $a \xrightarrow{\alpha} b \in Z$ hay que ver que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Ua & \xrightarrow{U\alpha} & Ub \\ {\scriptstyle g'_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'_b} \\ (p_\lambda L)a & \xrightarrow{(p_\lambda L)\alpha} & (p_\lambda L)b \end{array}$$

Calculamos $p_\lambda La = \bigoplus_{x/a} Lx$ y consideramos para cada $\widetilde{x}/a$ la proyección $\pi^L_{\widetilde{x}}$. Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Ua & \xrightarrow{U\alpha} & Ub \\ \downarrow{\scriptstyle g'_a} & & \downarrow{\scriptstyle g'_b} \\ \bigoplus_{x/a} Lx & \xrightarrow{\oplus L\widetilde{\alpha}} & \bigoplus_{y/a} Ly \\ \downarrow{\scriptstyle \pi^L_{\widetilde{x}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^L_{\widetilde{y}}} \\ L\widetilde{x} & \xrightarrow{L\widetilde{\alpha}} & L\widetilde{y} \end{array}$$

Donde $\widetilde{y}$ es donde termina el levantado de α que empieza en $\widetilde{x}$. Como de esta manera se pueden obtener todos los $\widetilde{y}/b$ y las sumas son finitas; para ver que el diagrama original conmuta, alcanza ver que $\pi^l_{\widetilde{y}}(\oplus l(\widetilde{\alpha}))g'_a = \pi^l_{\widetilde{y}} g'_b u(\alpha)$ para todo $\widetilde{y}/b$.
Calculamos:

$$\pi^l_{\widetilde{y}}(\oplus l(\widetilde{\alpha}))g'_a = l(\widetilde{\alpha})\pi^l_{\widetilde{x}} g'_a = l(\widetilde{\alpha}) g_{\widetilde{x}} = g_{\widetilde{y}} u(\alpha) = \pi^l_{\widetilde{y}} g'_b u(\alpha)$$

Resumiendo, tenemos que si ϕh es una sección, h es una sección como queríamos probar.

□

Corolario 5.14. *En virtud de la proposición y el lema anteriores, utilizando el teorema 3.48, se tiene p_λ preserva sucesiones de Auslander-Reiten si $M \cdot g \ncong M$ para $g \neq 1$.*

Definición 5.15. Sea $\widetilde{Z} \xrightarrow{p} Z$ un revestimiento entre categorías-base tal que $M \cdot g \ncong M$ para $1 \neq g \in G$. Definimos el k-funtor $\overline{p} : ind(\widetilde{Z}) \to ind(Z)$ de la siguiente forma:

Para $M \in ind(\widetilde{Z})$, sabemos por el lema 5.12 que $p_\lambda M$ es indescomponible y por lo tanto existe $\overline{p}(M) \in ind(Z)$ tal que $\varphi_M : p_\lambda M \xrightarrow{\sim} \overline{p}(M)$. Fijamos ese isomorfismo y para todo $g \in G$, tenemos el isomorfismo $\varphi_{M\cdot g} : p_\lambda(M \cdot g) \xrightarrow{\sim} p_\lambda M \xrightarrow{\varphi_M} \overline{p}(M)$

De esta manera definimos $\overline{p}(M \cdot g) = \overline{p}(M)$ en toda la órbita de la acción. Análogamente definimos $\overline{p}$ y φ en cada órbita de la acción de G. En vista del lema 5.12 las órbitas de la acción conforman distintas fibras de $\overline{p}$ (que podría no ser sobreyectivo en objetos).

Notaremos $\underline{ind}(Z)$ a la subcategorá plena de $ind(Z)$ generada por los objetos en la imagen de $\overline{p}$.
Ahora si $M \xrightarrow{f} M'$ es un morfismo en $ind(\widetilde{Z})$, entonces definimos: $\overline{p}(f) = \varphi_{M'}(p_\lambda f)\varphi_M^{-1}$.
Por construcción se tiene que la composición $\overline{p} : ind(\widetilde{Z}) \to ind(Z) \hookrightarrow mod(Z)$ es naturalmente isomorfa a la restricción $p_\lambda| : ind(\widetilde{Z}) \to mod(Z)$.

Teorema 5.16. *Sean $\widetilde{Z} \xrightarrow{p} Z$ un revestimiento entre categorías-base. Llamemos G al grupo de automorfismos del revestimiento. Si para todo $M \in mod(\widetilde{Z})$ indescomponible se tiene $M \cdot g \ncong M$ para $1 \neq g \in G$, entonces vale:*

(i) El funtor $\overline{p} : ind(\widetilde{Z}) \to \underline{ind}(Z)$ es un revestimiento de k-categorías

(ii) Si $\widetilde{Z}$ es de representación localmente finita, entonces Z también lo es. Más aún, $\underline{ind}(Z) = ind(Z)$ y por lo tanto para todo $N \in ind(Z)$ vale $N \cong p_\lambda M$ para algún $M \in ind(\widetilde{Z})$.

Demostración. (i) Recordemos que al estar trabajando en dimensión finita, p_λ es adjunto a derecha y a izquierda de p^*.

Es fácil ver que p_λ es un revestimiento entre $ind(\widetilde{Z})$ y su imagen en $mod(Z)$. En efecto, sean $M, M' \in ind(\widetilde{Z})$ se tiene por la adjunción a izquierda:

$$Hom_Z\Big(p_\lambda M, p_\lambda M'\Big) \xrightarrow{\sim} Hom_{\widetilde{Z}}\Big(M, \bigoplus_{g\in G} M' \cdot g\Big) \cong \bigoplus_{g\in G} Hom_{\widetilde{Z}}\Big(M, M' \cdot g\Big)$$

Donde el último isomorfismo vale porque al ser $\widetilde{Z}$ de representación localmente finita, se tiene que la suma $\Big(\bigoplus_{g\in G} M \cdot g\Big)(x) = \bigoplus_{g\in G}(M \cdot g)(x)$ es una suma finita para todo $x \in \widetilde{Z}$ (los $M \cdot g$ no son isomorfos entre si y son indescomponibles).
Similarmente, usando la adjunción a derecha, se obtiene el isomorfismo en la primera variable.
Ahora, como $\overline{p}$ es naturalmente isomorfo a p_λ, resulta un revestimiento.
La imagen por p_λ de $ind(\widetilde{Z})$ está contenida en $mod(Z)$ y consiste en módulos indescomponibles. Pero podría ocurrir que no sean los elegidos para formar $ind(Z)$. Es por eso que se considera el funtor $\overline{p}$ ismorfo a p_λ para corregir este hecho.

(ii) Podemos suponer que Z es conexa (si no, repetimos el argumento en cada componente conexa). Supongamos que vale para toda categoría-base finita.
Para $N \in ind(Z)$, consideramos Z' la subcategoría plena que soporta a N (ie: $x \in Z$ tales que $Nx \neq 0$). Llamamos $\iota : Z' \hookrightarrow Z$ a la inclusión.

Consideramos $\widetilde{Z}'$ vía el pullback:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z}' & \longrightarrow & \widetilde{Z} \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & Pull & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z' & \xrightarrow[\iota]{} & Z \end{array}$$

Análogamente al caso de categorías pequeñas (ver 2.47) resulta p' un revestimiento. Consideramos las categorías $ind(Z') \subset ind(Z), \quad ind(\widetilde{Z}') \subset ind(\widetilde{Z})$. Como (ii) vale

para Z', existe $M \in ind(\widetilde{Z}')$ tal que $\overline{p'}M = N$. Pero $ind(\widetilde{Z}') \subset ind(\widetilde{Z})$ y se verifica $\overline{p'}M = \overline{p}M$ (extendiendo con ceros fuera de Z'), que es lo que queríamos probar.

Basta ver entonces el caso Z finita. En este caso, representación localmente finita es equivalente a representación finita y por el teorema de Auslander (ver [ARS] VI.1.4) alcanza ver que tiene una componente conexa donde los módulos tienen dimensión acotada.

Como $\widetilde{Z}$ es de representación localmente finita, se tiene que $ind(Z)$ es conexa y por lo tanto $\underline{ind}(Z)$ es una componente conexa de $ind(Z)$.
Sea $N \in \underline{ind}(Z)$, entonces para $a \in Z$ se tiene para algún $M \in ind(\widetilde{Z})$

$$Na \cong \bigoplus_{x/a} Mx$$

Elegido un x/a, hay sólo finitos M que no se anulan en x. Además, como $M \ncong M \cdot g$ (si $1 \neq g$), los únicos M posibles son las translaciones por G de los finitos M del x elegido. Como los $M \cdot g$ tienen todos la misma dimensión, hay para N una cantidad finita de dimensiones posibles en Na.
Como Z es finita, la dimensión para N está acotada y por lo tanto $\underline{ind}(Z)$ es la componente que buscábamos. □

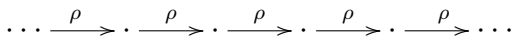
Para concluir, presentaremos algunos ejemplos. Necesitaremos el siguiente resultado cuya demostración puede verse en [ASS]

Teorema 5.17. *Sea Γ un quiver (finito y acíclico) y $\Lambda = k\Gamma$. Entonces Λ es de representación finita si y sólo si al olvidar la orientación de las flecas de Γ se tiene uno de los siguientes diagramas.*

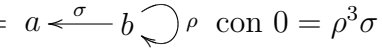
- $A_n \quad (n \leq 1):$ $\quad 1 \text{ —— } \cdots \text{ —— } n$
- $D_n \quad (n \leq 4):$ $\quad 1 \text{ —— } \cdots \text{ —— } n-2 \text{ —— } n-1$
 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vert$
 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad n$
- $E_6 \qquad :$ $\quad 1 \text{ —— } 2 \text{ —— } 3 \text{ —— } 4 \text{ —— } 5$
 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vert$
 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6$
- $E_7 \qquad :$ $\quad 1 \text{ —— } 2 \text{ —— } 3 \text{ —— } 4 \text{ —— } 5 \text{ —— } 6$
 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vert$
 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 7$
- $E_8 \qquad :$ $\quad 1 \text{ —— } 2 \text{ —— } 3 \text{ —— } 4 \text{ —— } 5 \text{ —— } 6 \text{ —— } 7$
 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vert$
 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 8$

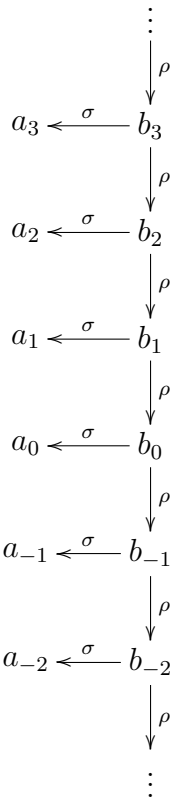
Ejemplos. En los siguientes ejemplos partimos de una categoría-base Z. La técnica consiste en construir un revestimiento de la categoría partiendo de un revestimiento del quiver que la define y 'levantando'las relaciones. Luego aplicamos el teorema 5.16 y el problema se translada a la categoría que recubre .

- Sea $Z =$ tal que $\rho^n = 0$. Consideremos el revestimiento universal, $\widetilde{Z}$, dado por:

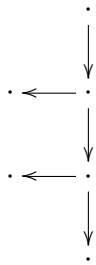


  Donde la composición de n veces ρ es cero. Notaremos de aquí en más $\rho^n = 0$ aunque no se trate realmente de una potencia.
  Ahora bien, como Z es de representación finita, por el corolario 5.8 tenemos que $\widetilde{Z}$ es de representación localmente finita.

- Sea $Z =$  con $0 = \rho^3\sigma = \rho^4$. Consideramos la categoría $\widetilde{Z}$:



  (donde $0 = \rho^3\sigma = \rho^4$)
  Observemos que $\widetilde{Z}$ contiene una subcategoría plena generada por el grafo:

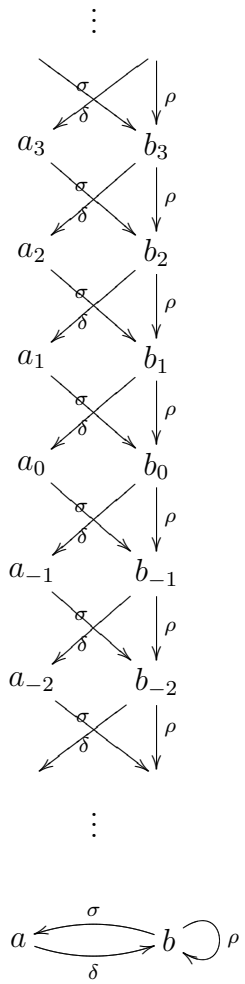


En vistas del teorema de Gabriel, esta subcategoría no es de representación finita. Entonces $\widetilde{Z}$ no es de representación localmente finita y por consiguiente Z tampoco lo es.

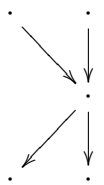
- Consideremos ahora la categoría $Z = \; a \xleftarrow{\sigma} b \circlearrowright \rho$ con $0 = \rho^2\sigma = \rho^5$ y $\widetilde{Z}$ dada por el quiver del ejemplo anterior y las relaciones $0 = \rho^2\sigma = \rho^5$.
  Veamos que $\widetilde{Z}$ es de representación localmente finita y por lo tanto que Z también lo es. Sea $x \in Z$. Como el quiver de $\widetilde{Z}$ es un árbol, $M \in ind(\widetilde{Z})$ tal que $Mx \neq 0$ no puede tener morfismos nulos entre vértices con espacios no nulos. Por lo tanto, un tal módulo M está soportado en una de las subcategorías plenas de $\widetilde{Z}$ dadas por:

Con x alguno de los vértices. Ambas subcategorías están generadas por estos quivers, luego, por el teorema 5.17 son de representación finita. Por lo tanto hay solo una cantidad finita de posibilidades para M.

- Consideremos el revestimiento $\widetilde{Z} \to Z$:



Donde $0 = \sigma\delta = \rho^3 = \rho^2\sigma = \delta\rho^2 = \delta\sigma = \delta\rho\sigma$
Aquí encontramos que $\widetilde{Z}$ contiene una subcategoría plena generada por el grafo:



Concluimos entonces que $\widetilde{Z}$ no es de representación localmente finita y por lo tanto tampoco lo es Z.

Referencias

[As] I. Assem. *Notas del curso CIMPA – School "Homological methods and representations of non-commutative algebras"*. Mar del Plata (2006)

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalo. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press (1995).

[BGRS] R. Bautista, P. Gabriel, A.V. Roiter, L. Salmerón. *Representation-finite algebras and multiplicative bases*. Inventiones Mathematicae, 81 (1985).

[BG] K. Bongartz, P. Gabriel. *Covering spaces in representation theory*. Inventiones Mathematicae, 65 (1982).

[Br] R. Brown. *Topology and grupoids*. Booksurge (2006)

[CLS] C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón. *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*. Monografías del Instituto de Matemáticas – UNAM (1982)

[DK] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko *Finite Dimensional Algebras*. Springer-Verlag (1991)

[Ga] P. Gabriel. *The universal cover of a representation finite algebra*. Lecture Notes in Mathematics, 903 (1981).

[G-Z] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Springer-Verlag (1967).

[ML] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag (1971).

[Ma1] J. P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago University Press (1999).

[Ma2] J. P. May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostrand Company, Inc (1967).

[Mu] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice-Hall (1975).

[Oj] N. Ojeda Bär. *Revestimientos categóricos, simpliciales y topologías de Grothendieck*. Tesis de licenciatura – Departamento de Matemática – FCEyN – UBA (2006).

[Sp] E. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer (1966).

[Sw] R. Switzer. *Algebraic Topology. Homotopy and Homology*. Springer-Verlag (1975).