UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Colapsabilidad en Variedades Combinatorias y Espacios de Deformaciones

Nicolás A. Capitelli

Director: Gabriel Minian
Co-director: Jonathan Barmak

Mayo 2009

A mi hermano Lucas,
la persona más talentosa que conozco.

Índice general

Introducción **4**

1. Complejos simpliciales **8**
1.1. Definiciones 8
1.2. Realización geométrica 12
1.3. Subdivisiones 17
1.4. Poliedros 24
1.5. Aproximación simplicial 30
1.6. Grafos 32

2. Variedades combinatorias y estelares **36**
2.1. Variedades combinatorias 36
2.2. Pseudovariedades 43
2.3. Variedades estelares 44

3. Colapsabilidad **53**
3.1. Colapsos simpliciales 53
3.2. Colapsos geométricos y colapsos completos 58
3.3. Colapsos completos en variedades combinatorias 61
3.4. Colapsabilidad en 2-variedades combinatorias y el teorema de Whitehead . 63

4. Teoría de Morse discreta **69**
4.1. Campos vectoriales combinatorios 70
4.2. Funciones de Morse combinatorias 72
4.3. Teoremas principales 76
4.4. Gradiente de una función de Morse combinatoria 78
4.5. Flujo de una función combinatoria y complejo de Morse 81

5. Funciones normalizadas y espacio de deformaciones **84**
5.1. Equivalencia y normalización de funciones de Morse combinatorias 84
5.2. El poset de funciones de Morse normalizadas no triviales 93
5.3. Espacio de deformaciones 95
5.4. Propiedades de pegado y adjunción 99
5.5. Espacio de deformaciones de grafos 102

Bibliografía **109**

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar la teoría de colapsabilidad de complejos simpliciales finitos y establecer algunos resultados originales en el contexto de las variedades combinatorias y de la teoría de Morse discreta.

La teoría de homotopía simple de J.H.C. Whitehead es una de las herramientas más importantes de la topología algebraica y combinatoria. Esta teoría estudia la topología de los poliedros basándose en ciertos *movimientos elementales* (colapsos y expansiones) que pueden realizarse sobre los complejos simpliciales subyacentes. La relación de equivalencia que estos movimientos determinan en los complejos simpliciales resulta más fuerte que la relación de tipo homotópico (del espacio topológico determinado) y permite estudiar de una manera combinatoria la topología del poliedro.

Esquemáticamente, un *colapso simplicial* en un complejo K consiste en remover un simplex y su única cara (borde) libre en K (figura 1).

Figura 1: Colapso simplicial elemental

Si continuamos de esta manera colapsando símplices de K, obtenemos otro complejo simplicial con el mismo tipo homotópico que K. Si podemos continuar realizando colapsos hasta que sólo quede un vértice entonces el complejo K se dice *colapsable*.

Para las variedades combinatorias, que constituyen los análogos combinatorios de las variedades topológicas, la teoría de colapsos simpliciales acarrea consecuencias muy importantes. Una de ellas es un *Teorema de Whitehead*, que establece que una variedad combinatoria colapsable es necesariamente una bola combinatoria (es decir, combinatoriamente equivalente a un simplex).

Como una generalización del concepto de colapso simplicial surge la teoría de colapsos geométricos. Aquí, en lugar de remover un simplex con un único borde libre en el complejo K, un *colapso geométrico* remueve una bola combinatoria $B \subset K$ que interseca al resto del complejo en una bola combinatoria de dimensión menor.

En esta tesis introducimos el concepto de *colapso completo* de un simplex en un complejo simplicial homogéneo. Los colapsos completos son un tipo particular de colapsos geométricos en los que la homogeneidad del complejo no se ve alterada. Lo interesante de estos movimientos es que cobran especial importancia en el contexto de las variedades combinatorias. En este ámbito y en dimensión 2, probamos el importante resultado que si K puede colapsarse a una subvariedad L entonces puede hacerlo por medio de colapsos

Figura 2: Colapso geométrico

completos entre variedades combinatorias (Teorema 3.4.3). De este resultado se desprende el Teorema de Whitehead para el caso 2-dimensional.

Una herramienta muy útil para el estudio de la colapsabilidad de los complejos simpliciales es la teoría de Morse discreta, que fue introducida por R. Forman en los años 90. Basado en la esencia combinatoria de la Teoría de Morse para variedades diferenciables, Forman desarrolla una teoría discreta para complejos simpliciales en la que ciertas deformaciones son codificados por funciones definidas sobre los símplices. Además de sostener los análogos discretos a los teoremas principales de la teoría de Morse clásica, la teoría de Morse discreta de Forman provee un método muy conveniente para interpretar los colapsos simpliciales como valores de un campo vectorial (discreto).

Las deformaciones sobre poliedros consideradas en la teoría de Morse discreta son, de alguna manera, generalizaciones de los colapsos simpliciales en complejos. Estas consisten en deformar un simplex del poliedro desde uno de sus bordes hacia el resto. Estas deformaciones pueden representarse como flechas que indican desde que parte del borde de un simplex se lleva a cabo (Figura 3). Las funciones de Morse combinatorias son las encargadas de codificar numéricamente estas flechas y constituyen el objeto primordial de estudio de la teoría.

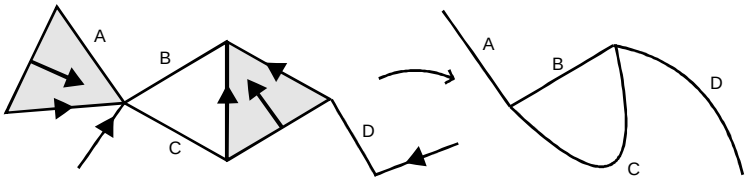

Figura 3: Diagrama de deformaciones

En esta tesis definimos ciertas funciones de Morse que poseen propiedades combinatorias muy útiles e interesantes. Son llamadas *funciones de Morse normalizadas* y surgen como representantes distinguidos de las clases de una relación de equivalencia sobre el conjunto de funciones de Morse combinatorias para un complejo K fijo. Más aún, el conjunto de las funciones normalizadas sobre K resulta un poset con características especiales que lo relacionan con un complejo simplicial $\mathcal{M}(K)$ que hemos llamado *espacio de deformaciones de* K. Este espacio refleja muchas de las propiedades del complejo simplicial original y probamos, en uno de los teoremas principales de este trabajo, que lo determina unívocamente en el caso 1-dimensional.

La Tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 1 introducimos las definiciones y resultados básicos de la teoría de complejos simpliciales que serán utilizadas a lo largo de todo el trabajo. Los contenidos no son presentados siguiendo a un libro en particular. Entre los utilizados para su desarrollo podemos citar a [Spa], [Mun], [Vic], [Gla], [Gru] y [HY].

En el capítulo 2 presentamos la teoría de variedades combinatorias y variedades este-

lares. Los resultados más importantes de este capítulo están contenidos en última sección y cumplen un rol fundamental en el desarrollo de la teoría del capítulo 3. Allí se prueban dos de los teoremas más importantes de esta teoría, 2.3.13 y 2.3.14, y se establece la equivalencia entre la teoría estelar y la teoría combinatoria de complejos simpliciales (Teorema 2.3.15). Este capítulo fue desarrollado siguiente principalmente a [Gla] y a [Lic].

El capítulo 3 esta dedicado al estudio de la teoría de colapsabilidad en complejos simpliciales. Definimos los colapsos simpliciales y los colapsos geométricos y establecemos los resultados fundamentales de la teoría siguiendo principalmente [Gla]. Introducimos a continuación el concepto novedoso de colapso completo y presentamos sus propiedades características en el contexto de las variedades combinatorias. La última sección está dedicada al estudio del caso 2-dimensional, demostrando uno de los teoremas centrales de la tesis (3.4.3) y deduciendo de él el Teorema de Whitehead para las variedades combinatorias de dimensión 2. Los resultados que aparecen en las últimas dos secciones de este capítulo son originales.

En el capítulo 4 desarrollamos la teoría de Morse discreta para complejos simpliciales finitos. Introducimos la noción de función de Morse combinatoria y campo vectorial combinatorio y probamos los teoremas principales 4.3.1 y 4.3.1. En la sección 4 estudiamos el gradiente de una función de Morse combinatoria y determinamos condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial combinatorio resulte gradiente de una tal función. Las referencias de este capítulo son [For1] y [For2].

En el capítulo 5 presentamos la teoría de funciones de Morse normalizadas y espacios de deformaciones. Introducimos una relación de equivalencia en el conjunto de las funciones de Morse combinatorias y definimos el concepto de función normalizada. Mostramos las propiedades características de estas funciones y determinamos la unicidad de sus valores. En la sección 3 definimos el espacio de deformaciones asociado a un complejo simplicial y establecemos algunas de sus características básicas. La tesis concluye con un estudio detallado de los espacios de deformaciones de grafos en el que se prueba otro de los teoremas centrales de nuestro trabajo: los espacios de deformaciones determinan unívocamente el grafo subyacente (Teorema 5.5.12). Todos los resultados de este capítulo son originales.

Agradecimientos

A Gabriel Minian, por haberme contagiado su pasión por la Topología y haberme hecho descubrir una disciplina que me encanta. Por su calidez, entusiasmo y ayuda. Un millón de gracias por dirigirme y apostar en mí.

A Jonathan Barmak, por los consejos, la paciencia y, sobretodo, la increíble buena onda. Por ser una persona excelente en todo sentido. Gracias, Jonathan.

A Ariel Pacetti y Marco Farinati, por sus comentarios, correcciones y sugerencias para mejorar esta tesis.

A mi amigo Lisandro. Por los infinitos momentos compartidos a lo largo de nuestras carreras y por el cariño que nos tenemos pese a la distancia.

A mi amigo de la vida, Cristian. Porque lo quiero y me hace feliz.

A mi hermano, Lucas. Porque en la dedicatoria no pude decirle lo mucho que lo quiero y significa para mí.

A Melina, mi novia y compañera de la vida. Gracias por abrirme los ojos a un mundo que desconocía. Por estar siempre a mi lado y bancarme en mis peores momentos. Por amarme y hacerme feliz.

Y muy especialmente a mis viejos, Betty y Gabriel. Ellos son los principales responsables que yo haya podido convertirme en lo que soy hoy. Porque los quiero y me enorgullecen. Esto es para Uds.

Capítulo 1

Complejos simpliciales

Una importante cantidad de espacios topológicos admiten una estructura combinatoria que modela muchas de sus propiedades características e invariantes topológicos. Esta clase de espacios incluye a las variedades diferenciables y a la mayoría de los espacios topológicos que más comúnmente se utilizan en matemática. La información combinatoria de tales espacios está contenida en unos objetos llamados *complejos simpliciales* y a los espacios topológicos que tiene asociados se los conoce como *poliedros*. Informalmente hablando, un poliedro es un espacio topológico que puede descomponerse en bloques de diferentes dimensiones que se pegan unos a otros a lo largo de sus bordes. Geométricamente, estos bloques consisten en celdas convexas tales como puntos, segmentos, triángulos, tetraedros, y sus análogos en dimensiones mayores, y se pegan con identificaciones prescriptas por el complejo simplicial que modela al poliedro. Como las propiedades topológicas de estos espacios quedan determinadas por la estructura del complejo asociado, el estudio de los complejos simpliciales y los poliedros es usualmente conocido como topología combinatoria.

El objeto de estudio de esta tesis son los complejos simpliciales. El presente capítulo se encarga de introducir las definiciones básicas y establecer los resultados fundamentales de la teoría.

1.1. Definiciones

En esta sección introducimos las nociones básicas de los complejos simpliciales. Sintéticamente, un complejo simplicial es un esquema abstracto de vértices y símplices (cada simplex siendo un conjunto finito de vértices) en donde todos los vértices son símplices y donde el conjunto de símplices es cerrado bajo la operación de tomar subconjuntos no vacíos. Más precisamente:

Definición 1.1.1. Un *complejo simplicial* K es un par (V_K, S_K) donde V_K es un conjunto de elementos llamados *vértices* y S_K es una colección de subconjuntos finitos no vacíos de V_K llamados *símplices* con la propiedad que cada elemento de V_K pertenece a algún elemento de S_K y, si σ es un elemento en S_K, entonces todo subconjunto no vacío de σ también es un elemento de S_K.

Notemos que de la definición se deduce que para todo vértice $v \in V_K$ se tiene $\{v\} \in S_K$. En particular, el conjunto V_K queda determinado por S_K: son los elementos que forman los conjuntos unitarios. Por estos motivos, identificaremos en general el complejo simplicial K con el conjunto S_K y los vértices con los símplices de un solo elemento.

La dimensión de un simplex σ es uno menos que la cantidad de vértices que lo conforman. Esto es, si $\sigma = \{v_0, ..., v_n\}$ tiene $n+1$ elementos entonces $dim(\sigma) = n$, en cuyo caso diremos que σ es un n-simplex (y a veces escribiremos σ^n cuando queramos recalcar este hecho). Notar que, en particular, los 0-símplices se corresponden con los vértices de K. La dimensión de un complejo simplicial K se define como la dimensión del simplex de máxima dimensión en K, si este existe; en caso contrario, K es de dimensión infinita. A veces resulta conveniente trabajar con el complejo simplicial vacío $K = \emptyset$ (i.e., $V_K = \emptyset$).

Ejemplo 1.1.2. El complejo simplicial de un solo vértice es notado $*$.

Ejemplo 1.1.3. El complejo simplicial de vértices $V_K = \{a, b, c, d\}$ dado por

$$S_K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$$

es un complejo simplicial de dimensión 2.

Ejemplo 1.1.4. Dado un conjunto finito cualquiera A de $n+1$ elementos, se tiene que la colección de todos los subconjuntos no vacíos de A es un complejo simplicial de dimensión n.

Ejemplo 1.1.5. El complejo simplicial Z cuyos conjunto de vértices es $V_Z = \mathbb{Z}$ y cuyos símplices son $S_Z = \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es un complejo simplicial de dimensión 1.

Podemos representar geométricamente a los complejos simpliciales de la siguiente manera: los vértices los dibujamos como puntos; un 1-simplex $\{a, b\}$ lo representamos mediante un segmento que una el punto correspondiente a a con el punto correspondiente a b; un 2-simplex $\{a, b, c\}$ lo representamos como el triángulo cuyos vértices son los puntos correspondientes a a, b y c (notar que esto corresponde a *rellenar* el triángulo determinado por los 1-símplices $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ y $\{a, c\}$). Un 3-simplex puede entonces representarse como la pirámide (rellena) cuyo borde son los triángulos determinados por los 2-símplices; y en general, un n-simplex σ será representado como el relleno del dibujo delimitado por los $(n-1)$-símplices incluidos en σ (Figura 1.1).

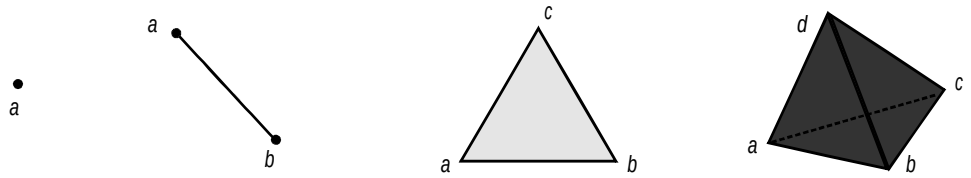

Figura 1.1: Representación geométrica de símplices.

Esta representación geométrica no es casual y tendrá su justificación cuando estudiemos en la próxima sección como la estructura de los complejos simpliciales se traduce al contexto topológico. La Figura 1.2 muestra la representación geométrica de los complejos simpliciales de algunos de los ejemplos anteriores.

Si σ, τ son dos símplices de un complejo simplicial K tales que $\sigma \subset \tau$ entonces decimos que σ es *cara* de τ y lo notamos $\sigma < \tau$. Si además $\sigma \subsetneq \tau$ decimos que σ es *cara propia* de τ y si $dim(\sigma) = \dim(\tau) - 1$, decimos que σ es *cara inmediata* de τ y lo notamos $\sigma \prec \tau$.

Observación 1.1.6. La cantidad de caras de dimensión k de un n-simplex es $\binom{n+1}{k+1}$. En particular, un n-simplex posee $n+1$ caras inmediatas.

Figura 1.2: Representación geométrica de complejos simpliciales

Un complejo simplicial K se dice finito si V_K es finito (o, equivalentemente, S_K es finito). Notar que esto implica, en particular, que $dim(K)$ es finita; pero la vuelta no es válida, como muestra el Ejemplo 1.1.5 anterior.

NOTA. Los avances más importantes de la topología combinatoria han sido llevados a cabo en el contexto de los complejos simpliciales finitos y localmente finitos. Siguiendo este desarrollo, en esta tesis trabajaremos exclusivamente con complejos finitos por lo que, en lo que resta, cuando escribamos *complejo simplicial* estaremos refiriéndonos a *complejo simplicial finito*.

Definición 1.1.7. Si L es una subcolección de símplices de un complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos entonces L es en sí mismo un complejo simplicial. En este caso L se llama un *subcomplejo* de K.

EJEMPLO 1.1.8. Todo simplex σ de un complejo simplicial K determina (junto con todas sus caras) un subcomplejo de K que, por abuso de notación, denotaremos también como σ.

EJEMPLO 1.1.9. Para un complejo simplicial K y un entero no negativo $n \leq dim(K)$, el conjunto de símplices de K de dimensión menor o igual a n es un subcomplejo de K llamado *n-esqueleto de K*.

EJEMPLO 1.1.10. Dado un conjunto de símplices $S \subseteq K$, el mínimo complejo simplicial que contiene a S se llama *subcomplejo generado por S*.

Definición 1.1.11. Para un simplex $\sigma \in K$ se define el *complejo complementario de σ en K*, notado Q_σ, como el subcomplejo de K formado por los símplices $\tau \in K$ tales que $\sigma \nsubseteq \tau$.

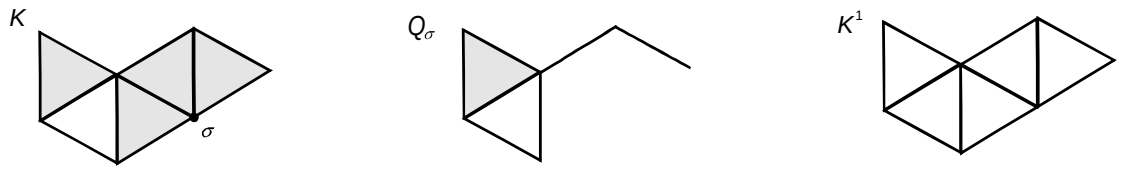

Figura 1.3: El subcomplejo complementario a σ en K y el 1-esqueleto K^1 de K.

Definición 1.1.12. Un simplex $\sigma \in K$ se dice *maximal* si no es cara de ningún otro simplex de K.

Por ejemplo, los símplices de dimensión máxima son maximales. La vuelta no es cierta, como es fácil de comprobar. Notemos además que los complejos simpliciales están generados por los símplices maximales. En efecto, se tiene la siguiente

Proposición 1.1.13. *Un subcomplejo propio L de K no puede contener a todos los símplices maximales.*

Demostración. Si así fuera tomemos $\sigma \in K - L$ (que no es vacío pues L es propio) de dimensión máxima. Por hipótesis σ no es maximal, por lo que debe ser cara de un τ. Como $dim(\tau) > dim(\sigma)$ entonces $\tau \in L$. Pero como L es subcomplejo y $\sigma < \tau$ entonces $\sigma \in L$, lo cual es una contradicción. □

Para un simplex $\sigma \in K$ se define el *borde de* σ como el subcomplejo de K compuesto por las caras propias de σ. Se lo nota $\dot{\sigma}$. Notar que se tiene $\dot{\sigma} = \sigma - \{\sigma\}$ y que $\dot{\sigma}$ tiene dimensión $dim(\sigma) - 1$.

Un complejo es *conexo* si no es unión disjunta de dos subcomplejos propios. Veremos más adelante que un complejo es conexo si, y sólo si, el poliedro que determina es un espacio topológico conexo. La posibilidad de considerar las componentes conexas de los complejos simpliciales (como lo hacemos con los espacios topológicos) nos permitirá enfocar nuestra atención en los complejos conexos.

Dos símplices $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ son independientes si $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. El *join* $\sigma_1.\sigma_2$ de dos símplices independientes σ_1, σ_2 es el simplex cuyo conjunto de vértices es la unión de los vértices de σ_1 y de σ_2 (si este simplex pertenece a K). Notar que, en este caso, si σ_1 es un n-simplex y σ_2 un m-simplex entonces $\sigma_1.\sigma_2$ es un $(n+m+1)$-simplex. En particular, cuando uno de estos símplices es un vértice v el join de un simplex σ y v se llama *cono de* σ. El *join* de dos complejos simpliciales K y L es el complejo $K.L = \{\sigma.\tau \mid \sigma \in K, \ \tau \in L\} \cup K \cup L$. Notar que, por definición, $K, L \subset K.L$. Muchas veces denotaremos simplemente $KL = K.L$.

Definición 1.1.14. Para un $\sigma \in K$ definimos el *link de* σ *en* K como el conjunto de símplices τ de K independientes con σ para los que $\sigma.\tau \in K$; esto es, es el subcomplejo $lk(\sigma, K) = \{\tau \in K \mid \tau \cap \sigma = \emptyset \text{ y } \sigma.\tau \in K\}$ (puede ser vacío). El *star de* σ en K es $st(\sigma, K) = \sigma.lk(\sigma, K)$. Notar que $lk(\sigma, K) \subset st(\sigma, K)$ y que $st(\sigma, K)$ es la unión de todos los símplices de K que contienen al simplex σ más sus caras.

Los complejos $st(\sigma, K)$ y $lk(\sigma, K)$ son de suma importancia para investigar las propiedades geométricas de los complejos simpliciales. Veremos en el próximo capítulo cómo juegan un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de variedades combinatorias.

Observación 1.1.15. Si Q_σ es el complejo complementario de un simplex σ en K entonces $K = st(\sigma, K) + Q_\sigma$, donde por $+$ nos referimos a $\cup$. Además, $st(\sigma, K) \cap Q_\sigma = \dot{\sigma} lk(\sigma, K)$.

Definición 1.1.16. Un subcomplejo $L \subset K$ se dice *pleno* si todo simplex de K formado por vértices de L también es un simplex de L.

Nos va a interesar comparar y relacionar dos complejos simpliciales. Llegamos entonces al concepto de morfismo simplicial.

Definición 1.1.17. Sean K y L complejos simpliciales. Un morfismo simplicial $f : K \to L$ es una función $f : V_K \to V_L$ que verifica que cada vez que $\{v_0, ..., v_p\}$ es un simplex de K, entonces $\{f(v_0), ..., f(v_p)\}$ es un simplex de L.

Por ejemplo, la asignación identidad $Id_K : K \to K$ dada por $Id_K(v) = v$ y la asignación que manda todo los vértices a un vértice $c : K \to *$ son morfismos simpliciales. Es fácil chequear que la composición de morfismos simpliciales resulta nuevamente un morfismo simplicial. Cuando existan $f : K \to L$ y $g : L \to K$ morfismos simpliciales tales que $f \circ g = Id_L$ y $g \circ f = Id_K$ diremos que K y L son isomorfos y lo denotaremos $K \simeq L$.

Observación 1.1.18. Los complejos simpliciales junto con los morfismos simpliciales constituyen una categoría denotada por *Simp*. En la siguiente sección veremos como asociarle a cada complejo simplicial un espacio topológico, lo que dará lugar a un funtor de esta categoría en la categoría de espacios topológicos y funciones continuas.

1.2. Realización geométrica

En esta sección precisaremos la manera en la que los complejos simpliciales modelan a los poliedros. Veremos que podemos asignar a cada complejo simplicial finito K un espacio topológico, llamado *realización geométrica de* K, que admite una estructura lineal local. Más aún, veremos que podremos determinar realizaciones geométricas de complejos simpliciales finitos como subespacios cerrados de $\mathbb{R}^n$, para un n suficientemente grande. Esto nos permitirá desenvolvernos en un contexto más conocido y menos abstracto.

Para un k-simplex σ con conjunto de vértices $V = \{v_0, ..., v_k\}$ consideramos el conjunto de todas las funciones a valores reales α definidas sobre V satisfaciendo $\sum_{v_i \in V} \alpha(v_i) = 1$ y $\alpha(v_i) \geq 0$. Denotamos a este nuevo conjunto por $|\sigma|$. Una función α se llama un *punto* de $|\sigma|$ y los valores de α en los vértices de σ se llaman *coordenadas baricéntricas* del punto α. Para $i = 0, ..., k$, los puntos $\alpha_i \in |\sigma|$ que verifican $\alpha_i(v_i) = 1$ se llaman los vértices de $|\sigma|$. Notemos que para todo $\alpha \in |\sigma|$ podemos escribir $\alpha = \alpha(v_0)\alpha_0 + ... + \alpha(v_k)\alpha_k$; esto es

$$\alpha = t_0\alpha_0 + ... + t_k\alpha_k$$

donde los t_i son las coordenadas baricéntricas de α. En particular, el punto para el que todos los $t_i = \frac{1}{k+1}$ se llama *baricentro* de σ y se nota $\hat{\sigma}$.

Podemos introducir una métrica en $|\sigma|$ vía:

$$\rho(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v_i \in V} (\alpha(v_i) - \beta(v_i))^2}.$$

Este espacio métrico también será notado $|\sigma|$ y lo llamaremos un *k-simplex topológico*.

Si ahora K es un complejo simplicial (no necesariamente finito) podemos considerar de manera análoga el conjunto de todas las funciones $\alpha : V_K \to \mathbb{R}$ que verifican simultáneamente:

1. $\sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1$
2. $\alpha(v) \geq 0$ para todo $v \in V_K$
3. El conjunto $sop(\alpha) = \{v \in V_K \mid \alpha(v) > 0\}$ es un simplex de K para cada α.

Notamos a este conjunto por $|K|$. Para cada simplex $\sigma \in K$ podemos identificar el punto β de $|\sigma|$ como la función real α definida en V_K que verifica $\alpha(v_i) = \beta(v_i)$ si $v_i \in \sigma$ y $\alpha(v_i) = 0$ si $v_i \notin \sigma$. De esta manera, $|\sigma|$ resulta un subconjunto de $|K|$ y podemos darle a $|K|$ la topología débil respecto de los subespacios $|\sigma|$; esto es, un conjunto $U \subset |K|$ será abierto si, y sólo si, $U \cap |\sigma| \subset |\sigma|$ es abierto para todo $\sigma \in K$. El espacio topológico $|K|$ se llama la *realización geométrica* de K. Notar que la topología de $|\sigma|$ como subespacio de $|K|$ coincide con la topología inducida por la métrica definida en $|\sigma|$.

A los $|\sigma| \subset |K|$ los llamaremos *símplices cerrados* de $|K|$. Veremos en la sección 4 que los símplices cerrados son subespacios cerrados de $|K|$. Notemos que los vértices $v_i \in K$ están en relación 1 a 1 con los puntos $\alpha_i \in |K|$ tal que $\alpha_i(v_i) = 1$. Es por ello que, de ahora

en más, identificaremos los vértices $v_i \in K$ con las función $\alpha_i \in |K|$. De esta manera, los elementos de $|K|$ resultan combinaciones convexas formales de vértices de K.

Observación 1.2.1. Recordemos que la topología débil de $|K|$ relativa a los subespacios $|\sigma|$ (para cada $\sigma \in K$) determina que una función $f : |K| \to X$ entre espacios topológicos es continua si, y sólo si, las restricciones $f|_{|\sigma|} : |\sigma| \to X$ son continuas para todo $\sigma \in K$.

El interior de $|\sigma|$, denotado σ°, está compuesto por los puntos $\alpha \in |\sigma|$ tales que $\alpha(v_i) > 0$ para todo $v_i \in V_\sigma$. Notemos que σ° no es en general un abierto de $|K|$, aunque sí lo es de $|\sigma|$. En particular, si σ es un simplex maximal de K entonces σ° resultará abierto en $|K|$. Es interesante observar que $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma^\circ$ donde esta unión es disjunta (notar que $v^\circ = v$). Se deduce entonces que para cada $\alpha \in |K|$ existe un único $\sigma \in K$ tal que $\alpha \in \sigma^\circ$. Por lo tanto, cualquier punto $\alpha \in |K|$ puede escribirse de manera única como

$$\alpha = t_0 v_0 + ... + t_r v_r \tag{1.1}$$

donde $\{v_0, ..., v_k\} \in K$, $t_i > 0$ para todo i y $\sum_{i=1}^r t_i = 1$.

Observación 1.2.2. Podemos definir una métrica en el conjunto $|K|$ de forma análoga a la definida para los símplices $|\sigma|$. Este espacio topológico se nota $|K|_d$ y, por propiedad de la topología débil, se tiene que $i : |K| \to |K|_d$ es continua. Si K es finito entonces $|K| = |K|_d$ ya que $|\sigma| \subset |K|_d$ es subespacio cerrado y $|K|_d$ es unión finita de los subespacios $\{|\sigma|\}_{\sigma \in K}$. Por lo tanto, por el lema del pegado, $|K|_d$ tiene la topología final de $\{|\sigma|\}_{\sigma \in K}$ y de esta manera, $|K|_d = |K|$.

Así como asignamos un espacio topológico a un complejo simplicial podemos asignar una función continua a un morfismo simplicial.

Definición 1.2.3. Para un morfismo simplicial $f : K \to L$ definimos la realización geométrica $|f| : |K| \to |L|$ por:

$$|f|(\sum_{i=0}^r t_i v_i) = \sum_{i=0}^r t_i f(v_i)$$

(recordar que todo elemento de $|K|$ se escribe en forma única como $\sum_{i=1}^r t_i v_i$ con $\sigma = \{v_0, ..., v_r\}$, $t_i > 0$ y $\sum_{i=1}^r ti = 1$).

Esto es, la función $|f|$ es lineal en los símplices $|\sigma|$. Como la topología de $|\sigma|$ es la dada por la métrica, es fácil ver que las restricciones $|f||_{|\sigma|}$ son continuas. Como $|K|$ tiene la topología final respecto de los $|\sigma|$ entonces $|f|$ resulta continua.

Observación 1.2.4. Es fácil chequear que la asignación $f \mapsto |f|$ es funtorial. Por lo tanto, tenemos definido un funtor *Simp* $\mapsto$ *Top* que le asigna a cada complejo simplicial K su realización geométrica $|K|$ y a cada morfismo simplicial $f : K \to L$ su realización geométrica $|f| : |K| \to |L|$. Notar que en particular, si $f : K \to L$ es un isomorfismo simplicial entonces $|f| : |K| \to |L|$ es un homeomorfismo.

Definición 1.2.5. Sean K y L complejos simpliciales. Si una función continua $f : |K| \to |L|$ coincide con la realización geométrica de un morfismo simplicial $g : K \to L$ decimos que f es una *función simplicial*. Una función $h : |K| \to \mathbb{R}^n$ se dice *baricéntrica* si es lineal en los símplices cerrados de $|K|$; esto es, si

$$f(\sum_{i=0}^r t_i v_i) = \sum_{i=0}^r t_i f(v_i)$$

para todo $\sigma = \{v_0, ..., v_r\} \in K$.

Como fue comentado al comienzo, podemos realizar geométricamente a un complejo simplicial finito como subespacio de $\mathbb{R}^n$ (para cierto n). Para ello, debemos introducir algunas definiciones.

Definición 1.2.6. Un conjunto de puntos $\{x_1, ..., x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ se dice *afínmente dependiente* si 0 se puede escribir como una combinación lineal

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$$

con algún $\lambda_i \neq 0$ y $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$). De lo contrario, decimos que los puntos $x_1, ..., x_k$ son *afínmente independientes*.

Observar que $\{x_1, ..., x_k\}$ es afínmente independiente si, y sólo si, el conjunto $\{x_2 - x_1, ..., x_k - x_1\}$ es linealmente independiente; si, y sólo si, genera una variedad lineal de dimensión $k - 1$.

Una *combinación convexa* de un conjunto de puntos $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

donde $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. La *cápsula convexa* de un conjunto finito C es la colección de puntos de $\mathbb{R}^n$ que resultan combinación convexa de los elementos de C. Es fácil corroborar que la cápsula convexa de C es el mínimo conjunto convexo que contiene a C.

Observación 1.2.7. Si los puntos $x_1, ..., x_k$ son afínmente independientes, entonces todo elemento de la cápsula convexa de $\{x_1, ..., x_k\}$ se escribe de manera única como combinación convexa de los x_i. En efecto, si

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i' x_i$$

entonces

$$0 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_i') x_i.$$

Como además, $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_i') = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i' = 1 - 1 = 0$, entonces $\lambda_i - \lambda_i' = 0$ para todo $i = 1, ..., k$.

Definición 1.2.8. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se dice que está en *posición general* si cada subconjunto de X de a lo sumo $n + 1$ puntos es afínmente independiente.

Esto es, X está en posición general si ninguna colección de $r+2$ puntos de X está contenida en una variedad lineal de dimensión r, para cada $r = 1, 2, ..., n - 1$.

Ejemplo 1.2.9. El conjunto $\{(t, t^2, ..., t^n) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ está en posición general. En particular, el gráfico de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es un conjunto en posición general en $\mathbb{R}^2$ (notar que no existen tres puntos contenidos en una recta).

Vamos a mostrar a continuación que podemos realizar geométricamente un k-simplex σ en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq k$). Tomemos $k + 1$ puntos $\{p_0, ..., p_k\}$ afínmente independientes en $\mathbb{R}^n$ y consideremos su cápsula convexa C. Definimos un homeomorfismo de $|\sigma|$ a C enviando el

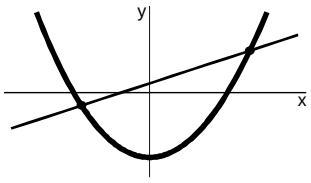

Figura 1.4: Los puntos de la imagen de $f(x) = x^2$ están en posición general en $\mathbb{R}^2$.

punto $\alpha \in |\sigma|$ a $\sum \alpha(v_i)p_i \in C$. Notemos que este homeomorfismo envía el vértice $v_i \in \sigma$ al punto p_i y que es lineal en cada simplex cerrado $|\nu| \subset |\sigma|$. El subespacio topológico $C \subset \mathbb{R}^n$ se llama entonces la *realización geométrica de σ como subespacio de $\mathbb{R}^n$ en los puntos (o vértices) $p_0, ..., p_k$*. En particular, tomando $p_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ en $\mathbb{R}^{k+1}$ para $i = 0, ..., k$ (con el 1 en la posición i) el espacio topológico C que se obtiene se llama *k-simplex topológico standard*.

Con lo visto para símplices, podemos exhibir una realización geométrica de un complejo simplicial como subespacio de $\mathbb{R}^n$. En efecto, notemos que si K es un complejo con vértices $v_1, ..., v_s$ entonces podemos verlo naturalmente como un subcomplejo del $(s-1)$-simplex Σ generado por dichos vértices. Luego, para cualquier colección de s puntos afínmente independientes $\{p_i\} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq s)$, la inclusión de complejos simpliciales $K \subset \Sigma$ induce un embedding de $|K|$ en la realización geométrica de Σ como subespacio de $\mathbb{R}^n$ en los vértices $\{p_i\}$. La siguiente proposición demuestra que esta asignación es efectivamente un embedding y establece un mínimo N para garantizar $|K| \subset \mathbb{R}^N$.

Proposición 1.2.10. *Un complejo simplicial finito K de dimensión n tiene una realización geométrica como subespacio cerrado de $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Demostración. Sea $V_K = \{v_1, ..., v_s\}$ el conjunto de vértices de K y consideremos un conjunto de puntos $\{p_1, ..., p_s\} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ en posición general (pueden ser tomados del conjunto del Ejemplo 1.2.9). Definimos $f : |K| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ como la función baricéntrica que envía el vértice v_i a p_i. Por construcción, cualquier colección de a lo sumo $2n+2$ puntos p_i es afínmente independiente. En particular, para todo simplex $\sigma \in K$ se tiene que $f|_{|\sigma|} : |\sigma| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ es embedding lineal. Por otro lado, si $\tau = \{w_0, ..., w_p\} \in K$ y $\tau' = \{w'_0, ..., w'_q\} \in K$ tienen dimensiones p y q respectivamente, entonces el conjunto $T = \{f(w_0), ..., f(w_p), f(w'_0), ..., f(w'_q)\}$ es afínmente independiente (pues $p+1+q+1 = p+q+2 \leq 2n+2$). Esto quiere decir que la escritura de cualquier combinación convexa de puntos en T es única. Por lo tanto, $x \in f(|\tau|) \cap f(|\tau'|)$ si, y sólo si, $x \in f(|\tau| \cap |\tau'|)$. Esto prueba que f es inyectiva. Si probamos que f es cerrada entonces f resultará un embedding. Pero si $B \subset |K|$ es cerrado entonces es compacto, por finitud de K (Proposición 1.4.3). Luego, $f(B) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ es compacto. Como $\mathbb{R}^{2n+1}$ es Hausdorff, $f(B)$ es cerrado. Esto concluye la demostración. □

Es interesante notar que la dimensión $2n+1$ es óptima. Por ejemplo, Flores demostró en [Flo] que el n-esqueleto de un $(2n+2)$-simplex no puede ser embebido en $\mathbb{R}^{2n}$. Otro ejemplo, debido a Van Kampen, puede hallarse en [vKa].

NOTA. En esta tesis siempre veremos a las realizaciones geométricas de complejos simpliciales como subespacios de $\mathbb{R}^n$ (para cierto n y vértices $p_i \in \mathbb{R}^n$) en el sentido descripto en la Proposición 1.2.10. Cuando no nos interese la elección de los p_i omitiremos nombrarlos.

En la Figura 1.5 pueden verse las realizaciones geométricas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ de algunos complejos simpliciales.

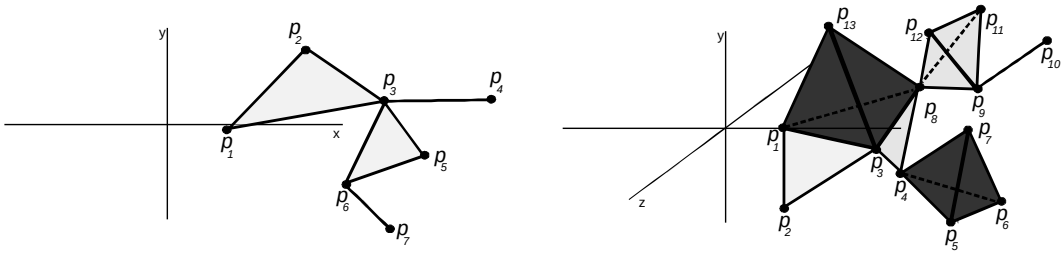

Figura 1.5: Realizaciones geométricas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.2.11. Un espacio topológico X es un poliedro si es homeomorfo a la realización geométrica de un complejo simplicial.

Esta definición hace precisa la noción de *modelación* que los complejos simpliciales tienen sobre los espacios topológicos que son poliedros. En particular, podemos notar ahora que nuestra interpretación esquemática intuitiva de los complejos simpliciales coincide con los espacios que resultan de realizar geométricamente el complejo correspondiente. Si X es un poliedro y $f : |K| \to X$ es el homeomorfismo para cierto complejo simplicial K, llamamos al par (K, f) una *triangulación de* X. Como veremos más adelante un poliedro admite infinitas triangulaciones distintas.

Observación 1.2.12. Notemos que un poliedro no tiene por qué tener una estructura lineal como lo tienen las realizaciones geométricas de los complejos simpliciales. Esto es debido a que el homeomorfismo que lo triangula no tiene por qué mantener esta estructura (ver Ejemplo 1.2.13). De todas formas, como en esta tesis vamos a trabajar directamente con realizaciones geométricas de complejos en $\mathbb{R}^n$, estos poliedros resultarán *rígidos*.

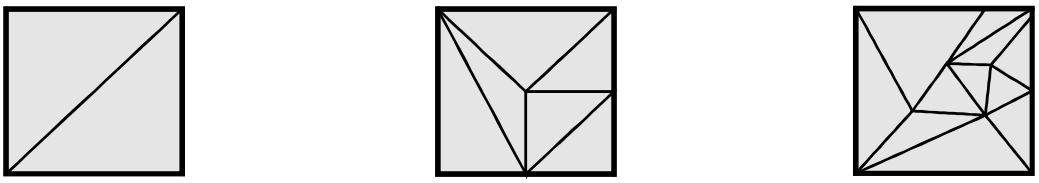

Figura 1.6: Distintas triangulaciones del cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.2.13. Para cada $n \geq 0$, sean $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ y $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ el disco unitario y la esfera unitaria respectivamente. Es fácil ver que D^n es homeomorfo a $|\sigma^n|$ y que S^n es homeomorfo a $|\dot{\sigma}^{n+1}|$. Luego, D^n y S^n son poliedros. Notemos que estos espacios no poseen la estructura lineal de los complejos que los modelan.

Ejemplo 1.2.14. Sea K el complejo simplicial del Ejemplo 1.1.5. Es fácil ver que si realizamos a K enviando sus vértices $n \mapsto n \in \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R} = |K|$. Luego $\mathbb{R}$ es un poliedro rígido modelado por un complejo simplicial infinito.

De ahora en más visualizaremos a los complejos simpliciales de manera más geométrica, pensándolos e interpretándolos como su realización geométrica en el espacio euclídeo. A raíz de esto, introduciremos conceptos y propiedades de los complejos simpliciales apoyándonos en la geometría de su poliedro asociado. La noción de subdivisión de la siguiente sección es un ejemplo de ello.

1.3. Subdivisiones

En el estudio de los poliedros es importante considerar sus diferentes triangulaciones y las interrelaciones que conllevan. En esta sección mostraremos que un complejo simplicial finito puede ser subdividido en símplices que son tan *pequeños* como se desee, hecho que nos permitirá probar más adelante que toda función continua puede ser aproximada por una función simplicial. En particular, introduciremos el concepto de subdivisión estelar, central en la teoría de variedades estelares que abarcaremos en el capítulo 2.

Definición 1.3.1. Sea K un complejo simplicial con una realización geométrica $|K|$ (en algún $\mathbb{R}^n$). Una *subdivisión* de K es un complejo simplicial L junto con una realización geométrica $|L| \subset \mathbb{R}^n$ tal que

(i) para todo simplex $\sigma \in L$ existe un simplex $\tau \in K$ tal que $|\sigma| \subset |\tau|$;

(ii) para todo simplex $\tau \in K$, $|\tau|$ es unión finita de símplices de L.

Notar que de la definición se desprende que $|K| = |L|$. Notar también que la definición de subdivisión de K depende de la realización $|K|$ elegida.

Si bien la definición de subdivisión es presentada como una relación entre complejos simpliciales, el concepto surge para estudiar los distintos *refinamientos* que podemos aplicarle a una realización geométrica dada. Es con esto en mente que nuestro estudio de las subdivisiones de los complejos simpliciales se apoyará en la geometría de los poliedros en lugar de la estructura combinatoria de los complejos. Aunque no lo aclaremos explícitamente, en muchos de los resultados que siguen estaremos considerando a los complejos simpliciales con una realización geométrica fija en $\mathbb{R}^n$.

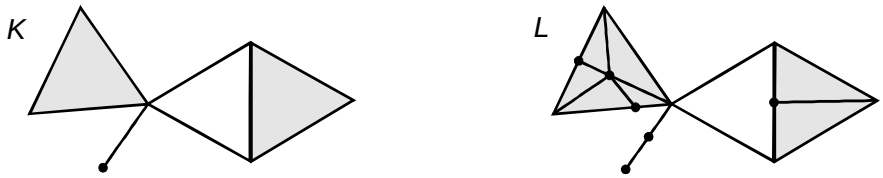

Figura 1.7: L es una subdivisión de K.

Proposición 1.3.2. *Sea K un complejo simplicial finito y L una subdivisión de K. Entonces, se tiene*

(i) Los vértices de $|K|$ son vértices de $|L|$.

(ii) Cualquier subdivisión de L es también una subdivisión de K.

Demostración. (ii) es inmediata de la definición. Para *(i)* tomemos $v \in V_K$ y veamos que está en V_L. Como $v \in |K| = |L|$ entonces existe un único $\sigma \in L$ tal que $v \in \sigma^\circ$. Como L es subdivisión de K entonces existe un $\tau \in K$ tal que $|\sigma| \subset |\tau|$. Si tomamos τ de dimensión mínima verificando esto entonces $\sigma^\circ \subset \tau^\circ$. Pero entonces $v \in \tau^\circ$. Como $v, \tau \in K$ esto implica que $v = \tau^\circ$. Luego, $v \in |\sigma| \subset |\tau| = v$, de donde, $v \in |V_L|$. □

Existen dos tipos de subdivisiones que cobran especial importancia en la teoría de complejos simpliciales: las subdivisiones derivadas y las subdivisiones estelares. Las introducimos a continuación. En general, cuando hablemos de subdivisión de un complejo simplicial K sin importar qué tipo de subdivisión sea (derivada, estelar o arbitraria) la denotaremos αK o βK.

Definición 1.3.3. Sea $K = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$, donde los σ_i son todos los símplices de K. Tomemos un punto $a_i \in \sigma_i^\circ \subset |\sigma_i|$, para cara $i = 1, ..., n$. La *primera subdivisión derivada* de K (respecto de los $\{a_i\}$) es el complejo con vértices a_i y símplices $\{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\}$ para $\sigma_{i_1} < \sigma_{i_2} < ... < \sigma_{i_k}$. La denotamos $\delta^1 K$. La n-ésima subdivisión derivada de K se define inductivamente y se nota $\delta^n K = \delta^1(\delta^{n-1} K)$.

Una subdivisión derivada arbitraria será notada por δK y dos subdivisiones derivadas de un mismo complejo K por $\delta_1 K$ y $\delta_2 K$. En particular, cuando los puntos a_i de la realización geométrica inducida son tomados sucesivamente como los baricentros $\hat{\sigma}_i$ de $|\sigma_i|$, la n-ésima subdivisión derivada se denomina la *n-ésima subdivisión baricéntrica de* K y se nota $K^{(n)}$. En especial, la primer subdivisión baricéntrica de K se nota K'.

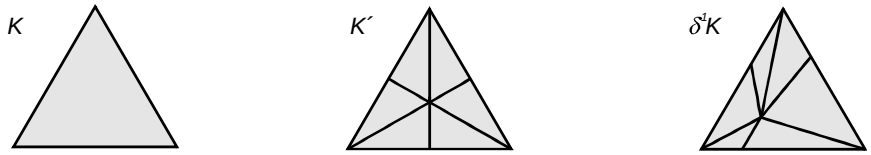

Figura 1.8: Subdivisión baricéntrica y derivada del 2-simplex.

Observación 1.3.4. Podemos dar una descripción completamente combinatoria de subdivisión derivada. En efecto, con las notaciones de la Definición 1.3.3, la *primera subdivisión derivada de* K es el complejo $\delta^1 K$ con conjunto de vértices $V_{\delta^1 K} = S_K$ y conjunto de símplices $S_{\delta^1 K} = \{\{\sigma_{i_1}, ..., \sigma_{i_k}\} \mid \sigma_{i_1} < \sigma_{i_2} < ... < \sigma_{i_k}\}$. La n-ésima subdivisión derivada de K se define inductivamente de idéntica manera.

Definición 1.3.5. Sea K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un simplex. Tomemos $a \in \sigma^\circ$ cualquiera. Un *starring elemental* (σ, a) es la operación que transforma K en $(\sigma, a)K$ removiendo $st(\sigma, K)$ y reemplazándolo por $a \,\dot{\sigma}\, lk(\sigma, K)$. Más formalmente, escribiendo $K = st(\sigma, K) + Q_\sigma$, donde Q_σ es el complejo complementario a σ en K, se tiene

$$(\sigma, a)K = a \,\dot{\sigma}\, lk(\sigma, K) + Q_\sigma.$$

Esta operación se nota $K \xrightarrow{(\sigma,a)} (\sigma, a)K$.

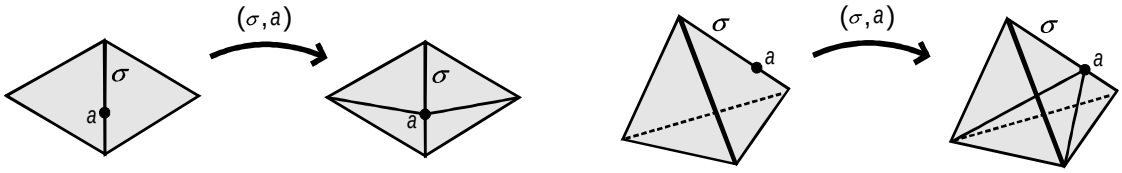

Figura 1.9: Starring elemental.

Observación 1.3.6. Observar que la descripción combinatoria del concepto de starring elemental consiste en agregar un vértice nuevo a K (que representa $a \in \sigma^\circ$ en la Definición 1.3.5) y reemplazar los símplices de $st(\sigma, K)$ por los de $a \,\dot{\sigma}\, lk(\sigma, K)$, para un σ elegido. No es difícil probar que el resultado de un starring elemental es una subdivisión del complejo original.

Definición 1.3.7. Una *subdivisión estelar*, denotada sK, es una subdivisión de K obtenida a través de una sucesión finita de starrings elementales.

Ejemplo 1.3.8. La siguiente subdivisión de Δ^2 no es estelar pero es isomorfa a una subdivisión estelar.

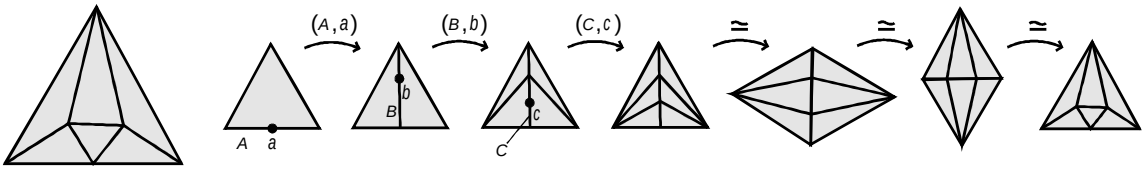

Figura 1.10: Subdivisión isomorfa a una subdivisión estelar.

Ejemplo 1.3.9. La siguiente subdivisión de Δ^2 no es isomorfa a ninguna subdivisión estelar.

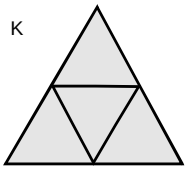

Figura 1.11: Subdivisión no isomorfa a una subdivisión estelar.

Para verlo simplemente notar que si fuera estelar entonces el último vértice introducido en el borde debe ser cara de exactamente tres 1-símplices. Ningún vértice de K verifica esto.

Si bien hemos definido las subdivisiones derivadas y las estelares por separado sucede en realidad que las primeras son un caso particular de las últimas.

Proposición 1.3.10. *Toda subdivisión derivada es estelar.*

La demostración no es complicada pero sí bastante técnica. La idea es como sigue. Si $a_i \in \sigma_i$ son los puntos elegidos en el interior de los símplices del complejo para llevar a cabo la primera subdivisión derivada entonces se realizan primero los starring elementales (σ_i, a_i) para todos los símplices σ_i de máxima dimensión. Luego, se continúa con los de una dimensión menor y, de esta manera, hasta acabar con todos los símplices del complejo. No es difícil de ver que esta subdivisión estelar coincide con la subdivisión derivada original. La Figura 1.12 muestra cómo se realiza este procedimiento. La demostración se concluye finalmente por inducción en la cantidad de subdivisiones derivadas aplicadas al complejo. Una demostración formal puede encontrarse en [Sir]. En particular, como las subdivisiones estelares son subdivisiones, concluimos que las subdivisiones derivadas también son subdivisiones.

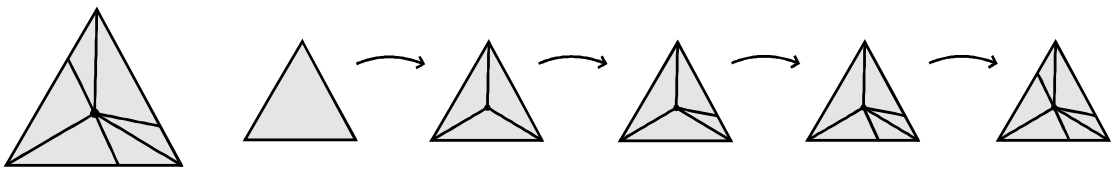

Figura 1.12: Idea de la demostración de la Proposición 1.3.10.

Proposición 1.3.11. *Sea L un subcomplejo de K. Entonces*

(i) cualquier αK induce un αL

(ii) una βL puede extenderse a una βK.

Más aún, si la subdivisión βL es estelar, entonces βK también lo es.

Demostración. Para *(i)* definamos $\alpha L = \{\sigma \in \alpha K \mid |\sigma| \subset |L|\}$. Es inmediato de la definición que αL es un subcomplejo de αK. Consideremos la realización geométrica de αL inducida por la realización geométrica de αK (esto es, realizamos los símplices de αL solamente). Es claro que $|\alpha L| \subset |L|$. Por otro lado, si $x \in |L| \subset |K| = |\alpha K|$ entonces existe un único $\tau \in \alpha K$ tal que $x \in \tau^\circ$. Afirmamos que $\tau \in \alpha L$. En efecto, sabemos que existe $\tau' \in K$ con $|\tau| \subset |\tau'|$ (simplemente por definición de subdivisión). Afirmamos que si tomamos τ' de dimensión mínima entonces tendremos $x \in \tau'^\circ$. Para ver esto, sea $\tau = \{v_i\}_i$ y $\tau' = \{w_j\}_j$. Como $x \in \tau^\circ$ entonces $x = \sum_i \lambda_i v_i$ con $\lambda_i > 0$ y $\sum_i \lambda_i = 1$. Como $|\tau| \subset |\tau'|$ entonces podemos escribir $v_i = \sum_j \gamma_{ij} w_j$, con γ_{ij} no todos cero para cada j fijo y $\sum_j \gamma_{ij} = 1$ para todo i fijo. Hallamos entonces que

$$x = \sum_i \lambda_i (\sum_j \gamma_{ij} w_j) = \sum_j (\sum_i \lambda_i \gamma_{ij}) w_j.$$

Además, $\sum_i \lambda_i \gamma_{ij} > 0$ pues $\lambda_i > 0$ para todo i y, para cada j, existe un $\gamma_{ij} > 0$. Esto prueba que $x \in \tau'^\circ$. Como $x \in |L|$ esto implica que $\tau' \in L$. Luego, $|\tau| \subset |\tau'| \subset |L|$; de donde $\tau \in \alpha L$. Esto prueba que $x \in |\alpha L|$ y, por lo tanto, $|\alpha L| = L$.

Finalmente, debemos ver que todo simplex cerrado de $|\alpha L|$ está contenido en un simplex cerrado de $|L|$. Sea entonces $\sigma \in \alpha L$. Luego, $\sigma \in \alpha K$ y $|\sigma| \subset |L|$. En particular, $|\sigma| \subset |\tau|$ para cierto $\tau \in K$. Luego, $|\sigma| \subset |L| \cap |\tau| = |L \cap \tau|$. Como L es complejo entonces $L \cap \tau$ es un simplex de L (notar que no es vacío). Esto concluye la demostración de *(i)*.

Para *(ii)* hacemos inducción en el número r de símplices en $K - L$. Si $r = 0$ entonces $K = L$ y el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado vale para cualquier complejo que tenga $r - 1$ símplices que no estén en L y sea K un complejo con r símplices en $K - L$. Escribamos $K = K_0 + \sigma$ donde σ es un simplex de máxima dimensión en $K - L$ y $K_0 = K - \{\sigma\}$ (aquí "+"significa $\cup$); notar que la maximalidad de σ asegura que K_0 sea un complejo. Podemos entonces usar la hipótesis inductiva en K_0 y extender βL a βK_0. Ahora, tenemos inducido $\beta\dot{\sigma}$ en βK_0; definiendo entonces $\beta K = \beta K_0 + \widehat{\sigma}.(\beta\dot{\sigma})$ obtenemos el resultado buscado.

Figura 1.13: Extendiendo una subdivisión.

Finalmente, si βL es una subdivisión estelar, como $\hat{\sigma}(\beta\dot{\sigma})$ es también una subdivisión estelar de σ, entonces podemos suponer inductivamente que βK_0 es estelar y, por lo tanto, también lo es βK. □

Observación 1.3.12. Si K es un complejo y $x \in |K|$, podemos encontrar una subdivisión α de K de manera que x pase a ser un vértice de αK. En efecto, sólo hay que realizar un starring elemental (σ, x) si $x \in \sigma^\circ$. Diremos que en este caso hemos *subdividido* K

agregándole un vértice en x y lo notaremos K_x. Este procedimiento será utilizado en la próxima sección para definir la noción de entorno estelar de un punto de $|K|$.

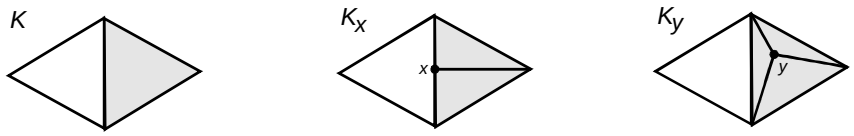

Figura 1.14: Agregando un vértice a K.

Para ciertos resultados que probaremos necesitamos una introducir una generalización del concepto de complejo simplicial, los complejos de celdas lineales convexas. Veremos que, dados dos complejos simpliciales K y L con realizaciones geométricas $|L|, |K| \subset \mathbb{R}^n$, no hay una triangulación natural de $|K| \cap |L|$ por un complejo simplicial, pero sí como un complejo de celdas lineales convexas. Llamaremos celda de dimensión n (o n-celda) a un espacio topológico homeomorfo a D^n.

Definimos lo que es una *k-celda lineal convexa en* $\mathbb{R}^n$ por inducción en la dimensión $k \leq n$. En dimensión cero es un punto. En dimensión $k > 0$ es una celda compacta y convexa de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k cuyo borde es una unión finita no vacía de $(k-1)$-celdas lineales convexas con interiores disjuntos. Si C es una k-celda lineal convexa en el borde de una n-celda lineal convexa D, decimos que C es *cara* de D y lo notamos $C < D$. Llamamos *vértices* a la celdas lineales convexas de dimensión 0.

Definición 1.3.13. Un *complejo de celdas lineales convexas* M es una colección finita de celdas lineales convexas tales que

(i) Si C está en M entonces todas las caras de C están en M.

(ii) Si $C, D \in M$ entonces $C \cap D = \emptyset$ o es cara de ambos.

Si M es un complejo de celdas lineales convexas elijamos para cada $C \in M$ un punto $c \in int(C)$ y definamos la primera subdivisión derivada de M como hicimos para complejos simpliciales (Figura 1.15). Tenemos el siguiente resultado.

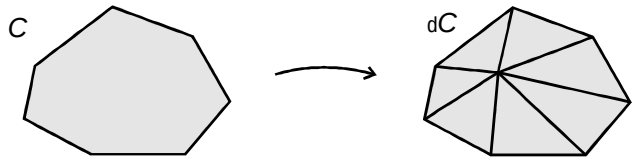

Figura 1.15: Subdivisión derivada de un complejo de celdas lineales convexas.

Lema 1.3.14. *La primer subdivisión derivada de un complejo de celdas lineales convexas es un complejo simplicial.*

Demostración. Lo hacemos por inducción en la dimensión k del complejo de celdas lineales convexas. Si $k = 0$ el complejo es un conjunto finito de puntos y no hay nada que probar. Si $k = 1$ entonces el complejo ya es un 1-complejo simplicial y las subdivisiones derivadas coinciden. Para $k \geq 2$ consideremos una k-celda C del complejo. Entonces el borde de esta celda es un complejo N de dimensión $k-1$ y, por hipótesis inductiva, la subdivisión

derivada inducida en N es un complejo simplicial. Para concluir la demostración sólo debemos notar que la subdivisión derivada de nuestra k-celda es exactamente $c.N$, donde $c \in C$ es el punto elegido en el interior de C para realizar la subdivisión. Haciendo este razonamiento para las finitas celdas del complejo de celdas lineales convexas obtenemos el resultado. □

Teorema 1.3.15. *Si K y L son complejos realizados geométricamente en $\mathbb{R}^n$ tales que $|L| \subset |K|$ entonces existe una subdivisión derivada δK que contiene una subdivisión αL como subcomplejo.*

Demostración. Antes de comenzar notemos que podemos suponer que hay un vértice $v \in |L|$ que también es vértice de $|K|$. Si así no fuera, para un vértice $w \in |L|$ cualquiera y el simplex $\nu \in |K|$ tal que $w \in \nu^\circ$, realizamos la primera subdivisión derivada en K relativa a los puntos $\{w\} \cup \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in K - \{\nu\}\}$. Este nuevo complejo verifica las mismas hipótesis que K y comparte un vértice con L. Podemos entonces suponer que K ya verificaba esta propiedad. Pongamos $L = \{\sigma_i\}$ y ordenemos los símplices de L de manera de que $dim(\sigma_i) \leq dim(\sigma_j)$ si $i \leq j$ con la única restricción que σ_0 sea un vértice en $|L| \cap |K|$. Definamos entonces $L_i = \bigcup_{j \leq i} \sigma_j$. Es claro que los L_i son subcomplejos de L. Además, K contiene a L_0 como subcomplejo. Supongamos inductivamente que existe una $(i-1)$-derivada $\delta^{i-1}K$ que contiene una subdivisión $\alpha_{i-1}L_{i-1}$ como subcomplejo (notar que el caso $i = 1$ es exactamente el que corresponde a K y L_0). Ahora, para cada simplex τ_j de $\delta^{i-1}K$ elegimos $a_j \in \tau_j^\circ$ de la siguiente manera:

- $a_j \in \tau_j^\circ \cap |\sigma_i|$ si $\tau_j^\circ \cap |\sigma_i| \neq \emptyset$
- $a_j = \widehat{\tau}_j$ si no.

Esto nos da una i-derivada $\delta^i K = \delta^1(\delta^{i-1}K)$. Vamos a probar que $\delta^i K$ contiene una subdivisión de L_i como subcomplejo. Ahora, $\delta^{i-1}K \cap \dot{\sigma}_i$ es una subdivisión de $\dot{\sigma}_i$; pero como todas las caras de σ_i están en L_{i-1} pues, por construcción, aquí ya están todos los símplices de dimensión menor que $dim(\sigma_i)$, entonces la subdivisión de $\dot{\sigma}_i$ inducida por $\delta^{i-1}K$ coincide con la inducida por $\alpha_{i-1}L_{i-1}$ (por hipótesis tenemos que $\alpha_{i-1}L_{i-1} \subset \delta^{i-1}K$ es subcomplejo). Notemos a continuación que $M = |\delta^{i-1}K| \cap |\sigma_i|$ resulta un complejo de celdas lineales convexas. En efecto, esta subdivisión de K divide al simplex $|\sigma_i|$ en celdas lineales convexas que se pegan bien pues δ^{i-1} es una subdivisión simplicial. Ahora, por cada celda en $|\delta^{i-1}K| \cap |\sigma_i|$ habíamos elegido un punto en su interior (los a_j) y realizando la primera subdivisión derivada de M obtenemos un complejo simplicial (por el Lema 1.3.14). Más aún, como los puntos elegidos para realizar esta subdivisión en M son los mismos utilizados para obtener la subdivisión $\delta^i K$ debemos tener que $\delta(\delta^{i-1}K \cap \sigma_i) \subset \delta^i K$. Definamos entonces $\alpha_i L_i = \delta(\alpha_{i-1}L_{i-1}) + \delta(\delta^{i-1}K \cap \sigma_i)$, el cual resulta un subcomplejo de $\delta^i K$. Siguiendo inductivamente hasta agotar todos los símplices σ_i de L obtenemos el resultado. □

Corolario 1.3.16. *Si K y L son complejos simpliciales con realizaciones geométricas $|K|, |L| \subset \mathbb{R}^n$ tales que $|K| = |L|$ entonces K y L tienen una subdivisión común (y una de ellas puede tomarse derivada). En particular, si αK es una subdivisión de K entonces existe una subdivisión derivada δ de K y una subdivisión arbitraria β de αK tales que $\delta K = \beta \alpha K$.*

Demostración. Como $|L| \subset |K|$ entonces existen δK y αL tales que αL es subcomplejo de δK. Pero como $|\alpha L| = |\delta K|$ entonces $\alpha L = \delta K$. □

Definición 1.3.17. Una función continua $f : |K| \to |L|$ es *lineal a trozos* (o *PL*) si existen subdivisiones αK y βL para las cuales f una función simplicial. Diremos que los complejos simpliciales K y L son PL-isomorfos, y lo escribiremos $K \simeq_{PL} L$, si existe un homeomorfismo lineal a trozos f (también llamado PL-homeomorfismo) llevando $|K|$ a $|L|$. Esto es, $K \simeq_{PL} L$ si existen subdivisiones αK y βL tales que $\alpha K \simeq \beta L$. En este caso, diremos que K y L son *combinatoriamente equivalentes*.

Por ejemplo, para cualquier subdivisión αK tenemos que las funciones $K \to \alpha K$ y $\alpha K \to K$ inducidas por la identidad son PL-isomorfismos. Por otro lado, muchas funciones "agradables"no son PL. Si $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ es el intervalo unitario y tomamos la proyección no baricéntrica $I \to I$ desde un punto de afuera como muestra la Figura 1.16 tenemos que no es PL pues por más que subdividamos los intervalos no resultará lineal en los símplices de ninguna subdivisión.

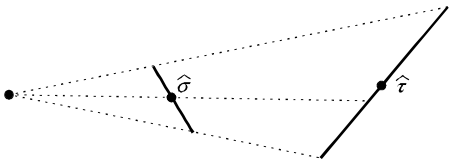

Figura 1.16: Una función que no es lineal a trozos.

Notemos que la noción de equivalencia combinatoria es una relación definida sobre la clase de los complejos simpliciales, aún cuando esté definida por funciones entre sus realizaciones geométricas.

NOTA. Es interesante observar que la colección de todos los poliedros y las funciones PL constituyen una categoría. El chequeo de la mayoría de los requisitos es trivial salvo quizá que la composición de morfismos PL es otro morfismo PL. Una demostración de este hecho puede hallarse en [Gla]. En particular, se tiene que $\simeq_{PL}$ es una relación de equivalencia.

Uno de los problemas más importantes con los que lidió la topología combinatoria fue el de decidir si dos poliedros homeomorfos son PL-homeomorfos. Esta conjetura es conocida como *die Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie* (alemán para *conjetura principal para la topología combinatoria*) y fue formulada por Steinitz y Tietze en 1908. Básicamente, la conjetura afirma que la topología combinatoria de un complejo simplicial K queda determinada por la topología del poliedro $|K|$. O, más técnicamente, dice que dos triangulaciones de un mismo poliedro son combinatoriamente equivalentes; i.e., son isomorfas luego de ser subdivididas.

La *Hauptvermutung* (como es conocida) fue, hasta su resolución, un problema central de la topología. Inicialmente fue verificada para espacios de baja dimensión, y se pensaba en la época que avances en la topología de altas dimensiones conducirían a la verificación completa de la conjetura. Sin embargo, en 1961 Milnor construyó poliedros con triangulaciones combinatoriamente no equivalentes, refutando la Hauptvermutung en general. Estos poliedros no eran variedades topológicas, dejando abierta la conjetura para dicho tipo de espacios. Finalmente, el desarrollo de la *surgery theory* condujo a una refutación de la Hauptvermutung para variedades topológicas de altas dimensiones a finales de 1960.

Para más detalles, el lector interesado puede consular [Ran].

1.4. Poliedros

Si bien el desarrollo de esta tesis está nucleado en el estudio los complejos simpliciales, muchos resultados relativos a estos objetos emergen de las propiedades topológicas de los poliedros que tienen asociados. En esta sección establecemos las características resaltantes de esta importante clase de espacios e introducimos algunos resultados fundamentales para nuestro desarrollo del resto de la teoría.

Comenzamos enunciando un resultado de topología general que determina una importante propiedad para los espacios muñidos con topologías finales y que usaremos sistemáticamente a lo largo del resto del capítulo. Notemos que existe una biyección θ entre el conjunto de funciones $f : Z \to Y^X$ y el conjunto de funciones $g : Z \times X \to Y$ dada por

$$\theta(f)(z, x) = f(z)(x).$$

Teorema 1.4.1 (Ley Exponencial)**.** *Sean X, Y y Z espacios topológicos y sea Y^X el espacio de funciones continuas de X a Y con la topología compacto-abierta. Si X es localmente compacto y Hausdorff entonces una función $f : Z \to Y^X$ es continua si, y sólo si, $\theta(f) : Z \times X \to Y$ es continua.*

Este resultado proporciona una herramienta muy útil a la hora de lidiar con homotopías sobre espacios con topologías finales (pues el intervalo unitario I es localmente compacto y Hausdorff). En nuestro caso particular, se tiene el siguiente

Lema 1.4.2. *Sea K un complejo simplicial finito y X un espacio topológico. Una función $H : |K| \times I \to X$ es continua si, y sólo si, $H|_{|\sigma|\times I} : |\sigma| \times I \to X$ es continua para cada $\sigma \in K$.*

Demostración. Es directo del hecho que $\theta^{-1}(H) : |K| \to X^I$ es continua si, y sólo si, $\theta^{-1}(H)|_{|\sigma|} : |\sigma| \to X^I$ es continua (por propiedad de la topología final). □

Proposición 1.4.3. *Sea K un complejo simplicial cualquiera. Entonces se tiene*

(i) $|K|$ es un espacio Hausdorff.

(ii) K es finito si, y sólo si, $|K|$ es compacto.

Demostración. (i) directo del hecho de que $|K|_d$ es Hausdorff e $i : |K| \to |K|_d$ es continua. Para *(ii)* mostramos las dos implicaciones. Si K es finito entonces $|K|$ es la unión finita de los subespacios compactos $|\sigma|$ y, por lo tanto, es compacto. Supongamos ahora que $|K|$ es compacto y consideremos el conjunto de baricentros $B = \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in K\} \subset |K|$. B es cerrado pues su intersección con cada $|\tau| \in |K|$ es finita. Como $|K|$ es compacto entonces B resulta compacto. Como además es discreto entonces es necesariamente finito. Luego, K es finito. □

Teorema 1.4.4. *Si $L \subset K$ es un subcomplejo entonces $|L| \subset |K|$ es un subespacio cerrado.*

Demostración. Procedemos por inducción en la cantidad r de símplices de $K - L$. Si este número es cero no hay nada que probar. Si $r > 0$ tomemos un simplex maximal σ en $K - L$. Sea $\bar{K} = K - \sigma$ (que resulta un complejo por la maximalidad de σ). Se tiene que $L \subset \bar{K}$ y la cantidad de símplices en $\bar{K} - L$ es $r - 1$. Por hipótesis inductiva $|L| \subset |\bar{K}|$ es cerrado. El resultado se sigue si probamos que $|\bar{K}| \subset |K|$ es cerrado. Pero si $|\tau| \cap \bar{K} \neq \emptyset$ y $\tau \notin \bar{K}$ entonces $\tau = \sigma$. Como $|\sigma| \cap \bar{K} = \dot{\sigma}$ y $|\dot{\sigma}|^c = \sigma^\circ$ es abierto en $|\sigma|$, deducimos que $\dot{\sigma}$ es cerrado en $|\sigma|$; por lo tanto $|\sigma| \cap \bar{K}$ es cerrado en $|\sigma|$. □

Observación 1.4.5. Como afirmamos en la primer sección, un complejo simplicial K es conexo si, y sólo si, $|K|$ es un espacio topológico conexo. En efecto, si K no es conexo y se descompone en dos subcomplejos no vacíos propios y disjuntos L y L' entonces $|K|$ se descompondrá en dos subespacios no vacíos propios y disjuntos $|L|$ y $|L'|$ que además son cerrados; luego $|K|$ tampoco será conexo. Por otro lado, si U y U' constituyen una desconexión efectiva de $|K|$ entonces todo simplex $|\sigma| \subset |K|$ debe estar contenido en uno de estos conjuntos (pues los símplices son conexos). Las colecciones $L = \{\sigma \in K \mid |\sigma| \subset U\}$ y $L' = \{\sigma \in K \mid |\sigma| \subset U'\}$ resultan entonces subcomplejos no vacíos disjuntos y propios cuya unión es todo K. Esto muestra que K no es conexo.

Un *edge* (o *arista*) de un complejo simplicial K es un par ordenado de vértices (v, v') que pertenecen a algún simplex de K. El primer vértice es llamado *origen* del edge y el segundo *fin* del edge. Un *edge path* (o *camino de aristas*) ξ de K es una sucesión finita y no vacía $e_1 e_2 \dots e_r$ de edges de K tales que el $orig(e_{i+1}) = end(e_i)$ para $i = 1, \dots, r-1$ (aquí $orig(e)$ y $end(e)$ representan el origen y fin del edge e respectivamente). En este caso definimos $orig(\xi) = orig(e_1)$ y $end(\xi) = end(e_r)$ y decimos que ξ es un edge path entre $v = orig(\xi)$ y $v' = end(\xi)$ (o que ξ *une* v con v'). En particular, si $v = v'$ decimos que ξ es un edge path cerrado. Diremos que un edge path $\xi = e_1 e_2 \dots e_r$ es *reducido* o *simple* si $orig(e_i) \neq end(e_i)$ para todo i y e_{i+1} no es e_i con el orden de los vértices intercambiado; esto es, si $e_i = (v_i, v_i')$ entonces no sucede que $(v_{i+1}, v_{i+1}') = (v_i', v_i)$. Por último, definimos la *longitud* de ξ como la cantidad de edges de ξ.

Observación 1.4.6. Denotemos por I_r la subdivisión del intervalo unitario I en r subintervalos iguales ($r \geq 1$); esto es, I_r es el complejo simplicial

$$I_r = \left\{ \left\{ \frac{i}{r} \right\} \mid 0 \leq i \leq r \right\} \cup \left\{ \left\{ \frac{i-1}{r}, \frac{i}{r} \right\} \mid 1 \leq i \leq r \right\}.$$

Podemos entonces asociar a todo edge path $\xi = e_1 \cdots e_r$ en K de longitud r un morfismo simplicial $\varphi_\xi : I_r \to K$ definido por

$$\varphi_\xi \left(\frac{i}{r} \right) = \begin{cases} orig(\xi) & i = 0 \\ end(e_i) & 1 \leq i \leq r \end{cases}$$

Luego, $|\varphi_\xi| : I \to |K|$ resulta un camino en $|K|$ entre $orig(\xi)$ y $end(\xi)$.

Veremos más adelante que los edge paths de un complejo simplicial K admiten una relación de equivalencia que da lugar a un grupoide asociado a K. La importancia de este grupoide es que coincide con el grupoide fundamental del poliedro $|K|$ y, por lo tanto, la información contenida en el $\pi_1(|K|)$ puede manipularse de una manera discreta.

Observación 1.4.7. Cualesquiera dos vértices de un n-simplex pueden unirse por un edge path.

Lema 1.4.8. *Si K es conexo siempre existe un edge path entre dos vértices.*

Demostración. Alcanza con probar que todo vértice de K puede unirse con un vértice v fijo. Sea L_1 el subcomplejo pleno de K generado por los vértices que se unen a v por un edge path y sea L_2 el subcomplejo pleno de K generado por los vértices que no pueden unirse a v por un edge path. Se tiene que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y, por la observación anterior, $L_1 \cup L_2 = K$. Como K es conexo y $L_1 \neq \emptyset$ entonces $L_2 = \emptyset$. □

Del precedente lema se desprende el hecho que si K es un complejo simplicial conexo entonces $|K|$ es arcoconexo. En efecto, dados $x, y \in |K|$ con $x \in \sigma^\circ$ e $y \in \tau^\circ$ podemos unirlos a vértices de σ y τ (respectivamente) via un segmento (por convexidad) para luego unir estos vértices con un edge path, dando lugar a una poligonal entre x e y. Sin embargo, un resultado más fuerte vale: todo poliedro es localmente contráctil. Para demostrar este hecho introduciremos la noción de entorno estelar y probaremos una propiedad de la subdivisión baricéntrica iterada que resulta central en la demostración del teorema de aproximación simplicial de la próxima sección.

Definición 1.4.9. El *open star* de un simplex $\sigma \in K$ es el subespacio de $|K|$ dado por

$$st(\sigma, K)^\circ = \bigcup_{\tau > \sigma} \tau^\circ$$

Es claro que el open star de un simplex σ está contenido en $|st(\sigma, K)|$. Además, $st(\sigma, K)^\circ$ es abierto en $|K|$, pues $|\tau| \cap st(\sigma, K)^\circ = \bigcup_{\sigma < \nu < \tau} \nu^\circ$ (pudiendo ser esta intersección vacía), cuyo complemento es cerrado en $|\tau|$ por ser un subcomplejo de τ. En particular, el open star de un simplex σ resulta un entorno abierto de todo punto de σ° (luego, $|st(\sigma, K)|$ es un entorno de todo punto de σ°).

Observación 1.4.10. El open star de un n-simplex σ no contiene a σ si $n \geq 1$ pues los bordes de este simplex no son abarcados por la definición. Sin embargo, $v \in st(v, K)^\circ$ para cualquier vértice $v \in K$.

Recordemos de la sección previa que para un $x \in |K|$ el complejo K_x consiste en agregarle a K un vértice en el punto x vía un starring elemental. Damos ahora a la definición de entorno estelar.

Definición 1.4.11. Dado $x \in |K|$ y $n \geq 1$ definimos el *n-ésimo entorno estelar de x en K* como

$$st^n(x, K) = |st(x, K_x^{(n-1)})|$$

Aquí $K_x^{(n-1)}$ representa la $(n-1)$-ésima subdivisión baricéntrica de K_x.

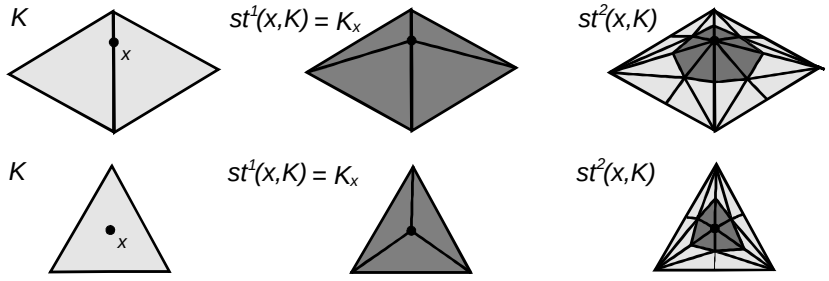

Figura 1.17: Entornos estelares.

Veremos que los entornos estelares de un punto en $|K|$ actúan como una base de entornos combinatorios de dicho punto. Enunciamos a continuación las propiedades principales de estos objetos. Necesitamos previamente el siguiente

Lema 1.4.12. *La realización geométrica de un cono vK es contráctil.*

Demostración. Sea $H : |vK| \times I \to |vK|$ definida por

$$H(y,t) = tv + (1-t)y.$$

H está bien definida porque si $y \in |\sigma|$ entonces $v, y \in |v\sigma|$ y, por lo tanto, está bien definida la combinación convexa $tv + (1-t)y \in |v\sigma|$. Como I es localmente compacto y Hausdorff y vK tiene la topología final respecto de las inclusiones de sus símplices, por Ley Exponencial basta ver que cada restricción $H|_{|\sigma|\times I} : |\sigma| \times I \to |vK|$ es continua para probar que H lo es. Pero $H|_{|\sigma|\times I}$ es continua por ser lineal. Luego, H define una homotopía entre la identidad de $|vK|$ y la función constante v. □

Proposición 1.4.13. *Sea K un complejo simplicial y $x \in |K|$. Se tiene*

(i) $st^n(x,K)$ *es un entorno de x en $|K|$ para todo n.*

(ii) $st^n(x,K) \subset st^m(x,K)$ *si $n \geq m$*

(iii) $st^n(x,K)$ *es contráctil.*

Demostración. (i) es trivial por observación 1.4.10. Para *(ii)* nos alcanza con demostrar que $st^{n+1}(x,K) \subset st^n(x,K)$. Para ello mostramos que todo simplex en $|st(x,K_x^{(n)})|$ está incluido en $|st(x,K_x^{(n-1)})|$. Si $|\sigma| \subset |st(x,K_x^{(n)})|$ entonces σ es cara de un simplex τ que verifica $x < \tau$ en $K_x^{(n)}$ (podría ser $\sigma = \tau$). Como $K_x^{(n)}$ es subdivisión de $K_x^{(n-1)}$ entonces existe $\mu \in K_x^{(n-1)}$ tal que $|\tau| \subset |\mu|$. En particular, $x < \mu$. Luego, $|\mu| \subset |st(x,K_x^{(n-1)})|$, y como $|\sigma| \subset |\tau| \subset |\mu|$, se tiene que $st^{n+1}(x,K) \subset st^n(x,K)$. Por último, notemos que *(iii)* se deduce inmediatamente del Lema 1.4.12 ya que $st(x,K_x^{(n-1)})$ es un cono. □

Si C es un subespacio acotado de un espacio métrico (X,d) entonces el diámetro de C se esta dado por $diam(C) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in C\}$. Si $\mathcal{C} = \{C_i\}$ es una familia de conjuntos acotados de X entonces se define el $mesh(\mathcal{C}) = \sup\{diam(C_i)\}$.

Lema 1.4.14. *Sea $\sigma = \{v_0,\ldots,v_n\}$ un n-simplex con una realización geométrica $|\sigma| \subset \mathbb{R}^n$ en los puntos $\{p_i\}$. Entonces, $diam(|\sigma|) = \max\{\|p_i - p_j\| \mid i,j = 0,\ldots,n\}$.*

Demostración. Sean $x, y \in |\sigma| = |\{v_0,\ldots,v_n\}|$ y escribamos $x = t_0p_0 + \cdots + t_np_n$ e $y = t'_0p_0 + \cdots + t'_np_n$. Fijemos primero x y permitamos a y variar. Ahora

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &= \|x - \textstyle\sum t'_ip_i\| = \|\sum t'_i(x-p_i)\| \\
&\leq \textstyle\sum |t'_i|\|x-p_i\| = \sum t'_i\|x-p_i\| \\
&\leq \textstyle\sum t'_i \max\{\|x-p_i\|\} = \max\|x-p_i\|
\end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento dejando variar x obtenemos

$$\|x-y\| \leq \max\|p_i - p_j\|.$$

□

Proposición 1.4.15. *Si K es un complejo simplicial finito de dimensión n con una realización geométrica $|K| \subset \mathbb{R}^n$ entonces*

$$mesh(|K'|) \leq \frac{n}{n+1} mesh(|K|)$$

donde la realización geométrica de $|K'|$ es la misma que $|K|$.

Demostración. Procedemos por inducción en la dimensión n. Si $n = 0$ ambos lados de la desigualdad son cero. Supongamos que el resultado es cierto para cualquier complejo simplicial de dimensión $n-1$. Sea $\tau = \{\hat{\sigma}, u_0, \ldots, u_{n-1}\}$ un n-simplex en K', donde $\sigma \in K$ es un n-simplex y $u_0, \ldots, u_{n-1}$ son vértices de un $(n-1)$-simplex ω en la subdivisión baricéntrica inducida en $\dot{\sigma}$. Sea υ el $(n-1)$-simplex de $\dot{\sigma}$ que contiene a ω.

Por el Lema 1.4.14,

$$diam(\tau) = \text{máx}\{\|u_i - u_j\|, \|u_i - \hat{\sigma}\|\}.$$

Por la hipótesis inductiva sabemos que

$$\begin{aligned} \|u_i - u_j\| \leq diam(\omega) \leq mesh(\upsilon') \leq \frac{n-1}{n} mesh(\upsilon) &\leq \frac{n}{n+1} mesh(\upsilon) \\ &\leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma) \\ &= \frac{n}{n+1} diam(\sigma). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $v_0, \ldots, v_n$ son los vértices de σ entonces, como los u_i son puntos en $|\sigma|$, poniendo $x = \hat{\sigma}$ e $y = u_i$ en la demostración del Lema 1.4.14 tenemos que hay un v_j para el que $\|u_i - \hat{\sigma}\| \leq \|v_j - \hat{\sigma}\|$. Recordando ahora que $\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i$ tenemos

$$\|v_j - \hat{\sigma}\| = \left\| v_j - \frac{1}{n+1} \sum_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i \neq j} \frac{v_j - v_i}{n+1} \right\|$$

donde la suma ahora tiene n términos. Pero entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \neq j} \frac{v_j - v_i}{n+1} \right\| &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{i \neq j} \|v_j - v_i\| \\ &\leq \frac{n}{n+1} \,\text{máx}\, \|v_j - v_i\| \\ &\leq \frac{n}{n+1} diam(\sigma) \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

De este resultado se deduce inmediatamente el siguiente importante

Corolario 1.4.16. *Sea K un complejo simplicial finito. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$mesh(K^{(m)}) < \epsilon$$

Definición 1.4.17. Un espacio topológico X se dice localmente contráctil si para cada $x \in X$ y cada entorno U de x existe un entorno contráctil V de x tal que $V \subset U$.

Teorema 1.4.18. *Todo poliedro compacto es localmente contráctil.*

Demostración. Sea $x \in |K| \subset \mathbb{R}^n$, donde K es finito. Sea U un entorno de x en K y sea $\epsilon = d(x, |K| - U) > 0$. Por Corolario 1.4.16 existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $mesh(K_x^{(n)}) < \epsilon$. En particular, si $y \in st^{n+1}(x, K) = |st(x, K_x^{(n)})|$ entonces existe un simplex $\sigma \in K_x^{(n)}$ tal que $x, y \in \sigma$; por lo tanto,

$$d(x, y) \leq diam(\sigma) \leq mesh(K_x^{(n)}) < \epsilon.$$

Luego, $st^{n+1}(x, K) \subseteq U$ es un entorno contráctil de $x \in |K|$ por Proposición 1.4.13. □

Corolario 1.4.19. *Un poliedro es conexo si, y sólo si, es arcoconexo.*

Concluimos nuestra exposición de las propiedades de los poliedros enunciando sin demostración dos teoremas importantes de la topología combinatoria. Ellos muestran el alcance de la aplicación de esta teoría.

Teorema 1.4.20. *Toda variedad diferenciable es triangulable por un complejo simplicial (i.e., es un poliedro).*

Teorema 1.4.21. *Toda variedad topológica de dimensión menor o igual a tres es triangulable.*

Este último teorema fue probado primero por Tibor Radó para superficies en la década del 20 y para 3-variedades por Edwin Moise y R.H. Bing en la década del 50. Para dimensiones mayores a 3, sin embargo, este teorema es falso. En dimensión 4, por ejemplo, la variedad topológica E_8 no admite triangulación por un complejo simplicial. La construcción de esta variedad es altamente no trivial y fue descubierta por Michael Freedman en 1982. Es curioso también notar que se han descubierto 4-variedades topológicas compactas que admiten infinitas triangulaciones, todas combinatoriamente inequivalentes. En dimensión mayor a 4 la pregunta de si todas las variedades topológicas pueden triangularse permanece un problema abierto.

Como último tópico de la sección introducimos la noción de equivalencia de edge paths y presentamos los resultados relevantes de esta teoría. Si ξ_1 y ξ_2 son edge paths de un complejo simplicial K tales que $end(\xi_1) = orig(\xi_2)$ podemos definir el producto $\xi_1\xi_2$ como el edge path que consiste en la sucesión de edges de ξ_1 seguida de la sucesión de edges de ξ_2. De esta manera, $orig(\xi_1\xi_2) = orig(\xi_1)$ y $end(\xi_1\xi_2) = end(\xi_2)$. La asociatividad de este producto es inmediata. Sin embargo, no existe, por ejemplo, un elemento identidad. Como en el caso de homotopía de funciones, vamos a definir una relación de equivalencia en el conjunto de los edge paths de K para conseguir propiedades algebraicas sobre este conjunto.

Definición 1.4.22. Dos edge paths ξ y ξ' en K son *simplemente equivalentes* si existen vértices $v, v', v'' \in K$ tal que el conjunto $\{\xi, \xi'\}$ es igual a uno de los siguientes conjuntos:

- $\{(v, v''), (v, v')(v', v'')\}$
- $\{\xi_1(v, v''), \xi_1(v, v')(v', v'')\}$ para algún edge path ξ_1 en K con $end(\xi_1) = v$
- $\{(v, v'')\xi_2, (v, v')(v', v'')\xi_2\}$ para algún edge path ξ_2 en K con $orig(\xi_2) = v''$
- $\{\xi_1(v, v'')\xi_2, \xi_1(v, v')(v', v'')\xi_2\}$ para algunos edge paths ξ_1 y ξ_2 en K con $end(\xi_1) = v$ y $orig(\xi_2) = v''$.

Diremos que dos edge paths ξ y ξ' son *equivalentes*, denotado $\xi \sim \xi'$, si existe una sucesión finita de edge paths $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n$ tales que $\xi = \xi_0$, $\xi' = \xi_n$ y ξ_{i-1} es simplemente equivalente a ξ_i para todo $i = 1, ..., n$.

No es difícil de corroborar que $\sim$ es una relación equivalencia. Se puede probar también que existe un grupoide cuyos elementos son los vértices de K y cuyos morfismos entre v y v' en V_K son las clases de equivalencia $[\xi]$ con $orig(\xi) = v$ y $end(\xi) = v'$ y la composición dada por $[\xi] \circ [\xi'] = [\xi\xi']$, si $orig(\xi') = end(\xi)$. Este grupoide se llama *Edge path groupoid* de K y se nota $\mathcal{E}(K)$. El resultado central de esta teoría es el siguiente.

Teorema 1.4.23. *Sea K un complejo simplicial y sean ξ y ξ' dos edge paths en K. Entonces $|\varphi_\xi|$ es homotópica a $|\varphi_{\xi'}|$ si, y sólo si, $\xi \sim \xi'$.*

Corolario 1.4.24. *Sea K un complejo simplicial cualquiera. Entonces $\pi_1(|K|) = \mathcal{E}(K)$.*

De esta manera, el edge path groupoid permite estudiar el grupoide fundamental de un poliedro desde un contexto completamente combinatorio. El Teorema 1.4.23 será utilizado en la demostración del resultado principal del capítulo 3. Para las demostraciones de esta parte referimos al lector a [Spa].

1.5. Aproximación simplicial

El resultado principal de esta sección es el Teorema de aproximación simplicial que afirma que toda función continua entre poliedros finitos es homotópica a una función simplicial si se permite subdividir el dominio una cantidad suficiente de veces. Este teorema fue demostrado por primera vez por L.E.J. Brouwer en 1911 y es una de los resultados fundacionales de la topología algebraica. Si bien presentaremos aquí el resultado para complejos simpliciales finitos, dado que es el contexto en el que nos movemos, vale la pena recalcar que existe un resultado general para complejos simpliciales cualesquiera. Este caso general requiere cierta técnica de subdivisión más sofisticada llamada subdivisión baricéntrica generalizada, mientras que el caso finito puede atacarse con algunos resultados básicos de la teoría de subdivisión baricéntrica [Mun].

Definición 1.5.1. Sea $h : |K| \to |L|$ una función continua. Si $f : K \to L$ es un morfismo simplicial tal que

$$h(st(v, K)^\circ) \subset st(f(v), L)^\circ$$

para cada vértice $v \in K$ entonces f se llama una *aproximación simplicial de h*.

En cierto sentido pensamos a la aproximación simplicial f como estando *cerca* de h. Una manera de precisar esto es notando que dado $\alpha \in |K|$ existe un simplex en L que contiene a $h(\alpha)$ y a $|f|(\alpha)$.

Lema 1.5.2. *Sea $f : K \to L$ es una aproximación simplicial de $h : |K| \to |L|$. Sea $\alpha \in |K|$. Si $\tau \in L$ es el único simplex tal que $h(\alpha) \in \tau^\circ$ entonces $|f|(\alpha) \in |\tau|$.*

Demostración. Sea $\sigma = \{v_0, ...v_n\} \in K$ tal que $\alpha \in \sigma^\circ$ y sea $\tau \in L$ el único simplex tal que $h(\alpha) \in \tau^\circ$. Luego, como $\alpha \in st(v_i, K)^\circ$ para cada i se tiene

$$h(\alpha) \in h(st(v_i, K)^\circ) \subset st(f(v_i), L)^\circ.$$

Por lo tanto, $h(\alpha)$ posee coordenadas baricéntricas positivas con respecto a cada uno de los vértices $f(v_i)$ para $i = 1, ..., n$. Luego, estos vértices deben ser vértices de τ. Como f es baricéntrica (i.e., lineal en los símplices), esto quiere decir que $|f|(\alpha) \in |\tau|$. □

Observación 1.5.3. Notemos que si para algún vértice $v \in K$ se tiene que $h(v)$ es un vértice de L entonces cualquier aproximación simplicial f de h deberá verificar $|f|(v) = h(v)$ (pues por el Lema , $f(v)$ debe estar contenido en $|v|$). En general, si $h : |K| \to |L|$ coincide con una función simplicial en un subcomplejo $|C|$ de $|K|$ entonces cualquier aproximación simplicial f de h verificará $|f||_{|C|} = h|_{|C|}$. En efecto, como h es simplicial en C entonces aplica vértices de $|K|$ en vértices de $|L|$. Por la observación primera, $|f|(v) = h(v)$ para todo $v \in C$. Y como $|f||_{|C|}$ y $h|_{|C|}$ son lineales en los símplices de $|C|$ entonces $|f|$ y h coinciden en $|C|$.

Probamos a continuación que cualquier aproximación simplicial de una función continua h es homotópica a h.

Proposición 1.5.4. *Si $h : |K| \to |L|$ es una función continua y $f : K \to L$ es una aproximación simplicial de h entonces $|f| \simeq h$.*

Demostración. Para un $\alpha \in |K|$ sea $\tau \in L$ el único simplex tal que $h(\alpha) \in \tau^\circ$. Por el Lema 1.5.3 se tiene que también $|f|(\alpha) \in |\tau|$. Podemos definir una homotopía $H : |f| \simeq h$ por

$$H(\alpha, t) = t|f|(\alpha) + (1 - t)h(\alpha).$$

La convexidad de $|\tau|$ garantiza la buena definición y la continuidad de H se desprende del Lema 1.4.2. □

Enunciamos a continuación el teorema central de esta sección.

Teorema 1.5.5 (Teorema de Aproximación Simplicial)**.** *Sean K y L complejos simpliciales finitos. Dada una función continua $h : |K| \to |L|$ (entre dos realizaciones geométricas de K y L cualesquiera) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que h posee una aproximación simplicial $f : K^{(m)} \to L$.*

Demostración. Como $|K|$ es finito entonces $|K| = |K|_d$. Podemos cubrir $|K|_d$ con los abiertos $h^{-1}(st(w, L)^\circ)$ para cada vértice $w \in L$ y tener determinado un cubrimiento $\mathcal{U}$ de $|K|_d$. Como $|K|_d$ es compacto y métrico este cubrimiento posee un número de Lebesgue ϵ. Por el Corolario 1.4.16 existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que el diámetro de todo simplex en $|K^{(m)}|_d$ es menor a $\frac{\epsilon}{2}$. En particular, $diam(st(v, K^{(m)})^\circ) < \epsilon$ para cada $v \in K^{(m)}$. Esto implica que cada $st(v, K^{(m)})^\circ$ está contenido en alguno de los abiertos $h^{-1}(st(w, L)^\circ)$ de $\mathcal{U}$. Para cada vértice $v \in K$ elijamos un vértice $w \in L$ tal que $h(st(v, K^{(m)})^\circ) \subset st(w, L)^\circ$ y definamos la asignación $f : V_K \to V_L$ por $f(v) = w$ para estas identificaciones. Se tiene entonces que

$$h(st(v, K^{(m)})^\circ) \subset st(f(v), L)^\circ. \tag{1.2}$$

Ahora procedemos como lo hicimos en la demostración del Lema 1.5.3 para demostrar que f es un morfismo simplicial. Si $\sigma = \{v_0, ..., v_n\} \in K$ tomemos un $\alpha \in \sigma^\circ$. Como $\alpha \in st(v_i, K)^\circ$ para cada i se tiene que $h(\alpha) \in st(f(v_i), L)^\circ$ (por (1.2)). Por lo tanto, $h(\alpha)$ posee coordenadas baricéntricas positivas con respecto a cada uno de los vértices $f(v_i)$ para $i = 1, ..., n$. Luego, $\{f(v_0), ..., f(v_n)\}$ resulta un simplex y f resulta un morfismo simplicial. Esta es la aproximación buscada. □

Observación 1.5.6. En el teorema anterior no es necesaria la hipótesis de finitud del complejo L. La misma demostración se mantiene válida para un complejo simplicial arbitrario en el codominio.

Corolario 1.5.7. *Cualquier función continua entre poliedros es homotópica a una función lineal a trozos.*

1.6. Grafos

Un grafo es un CW-complejo de dimensión 1. Más precisamente, un grafo consiste en un par ordenado $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices o nodos y E es un conjunto de arcos o aristas que relacionan estos nodos. El primer artículo científico relativo a grafos fue escrito por el matemático suizo Leonhard Euler. En 1735 Euler presentó un paper sobre *la solución de un problema involucrando la geometría de la posición* a la Academia de Ciencias de St. Petersburgo. En este paper, Euler discutía la solución al problema conocido como *los puentes de Königsberg*, que preguntaba si era posible encontrar una ruta que cruce cada uno de los siete puentes de Königsberg una y sólo una vez (ver Figura 1.18). El paper no sólo muestra que el problema de cruzar los siete puentes en un único viaje es imposible sino que además generaliza el problema para mostrar que, en la notación actual, *un grafo posee un camino atravesando cada arista exactamente una vez si, y sólo si, a lo sumo dos vértices de G poseen grado impar*. Un tal camino hoy en día se lo llama *camino euleriano*. El trabajo de Euler fue el punto de partida de la teoría de grafos y la solución provista por Euler es considerado el primer argumento topológico de la historia.

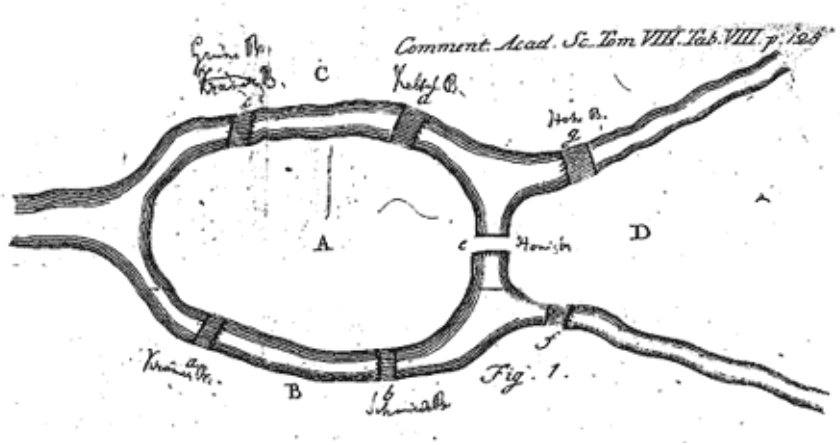

Figura 1.18: Los puentes de Königsberg.

Nuestro interés particular en los grafos es doble: por un lado nos dará la posibilidad de proveer ejemplos sencillos en muchas partes de esta tesis; por otro lado, algunos resultados centrales de la teoría serán utilizados en el estudio de la colapsabilidad de 2-variedades combinatorias y de los espacios de deformaciones de Morse (el teorema principal de esta teoría será probado para grafos precisamente). Nos restringiremos a trabajar con *grafos simples* que son los que poseen un única arista entre dos nodos (y, por lo tanto, posee una estructura de complejo simplicial). Por esto mismo, y en lo que sigue, identificaremos las palabras *grafo* y *grafo simple*.

Definición 1.6.1. Un *grafo* (simple) es un complejo simplicial de dimensión 1.

En particular, y siguiendo los lineamientos de este trabajo, trabajaremos con grafos finitos (finita cantidad de vértices y, por lo tanto, aristas). No haremos distinción entre el término grafo en el contexto simplicial y el mismo término en el contexto topológico, lo que dará lugar a afirmaciones tales como el *grafo* G o *el grafo* $|G|$.

Un subgrafo G' de un grafo G es precisamente un subcomplejo de G. El grado de un vértice $v \in G$ se define como la cantidad de aristas de las que es cara y se nota $\deg_G(v)$

(o $\deg(v)$ cuando no surja confusión). Un vértice de grado 1 se llama una *hoja de* G y la única arista que lo contiene en el borde se llama una *rama de* G.

Definición 1.6.2. Un *árbol* es un grafo conexo que no admite edge paths cerrados reducidos no triviales.

Los árboles son de central importancia en la teoría de grafos. Topológicamente son exactamente los grafos contráctiles como veremos más adelante. Notar que un subgrafo conexo de un árbol es otro árbol y que cualquier árbol con dos o más vértices posee al menos dos hojas.

Lema 1.6.3. *Cualquier vértice v de un árbol finito T es un retracto por deformación fuerte de $|T|$.*

Demostración. El lema se demuestra por inducción en la cantidad r de aristas de T. El caso $r = 1$ es trivial. Si ahora T posee $r > 1$ aristas sea $e = (w, w')$ una rama de T con hoja $w' \neq v$ y T' el árbol $T - \{e, w'\}$. Definimos una homotopía $F : |T| \times I \to |T|$ por

$$F(\beta, t) = \begin{cases} tw + (1-t)\beta & \text{si } \beta \in |e| \\ \beta & \text{si } \beta \in |T'| \end{cases}$$

Luego, $|T'|$ es un retracto por deformación fuerte de $|T|$. Como $v \in T'$ y T' posee $r - 1$ aristas entonces, por hipótesis inductiva, v es un retracto por deformación fuerte de T'. Por lo tanto, v resulta un retracto por deformación fuerte de $|T|$ y el lema queda demostrado. □

Un subárbol de un grafo G se dice *maximal* si no está contenido estrictamente en otro subárbol de G. Los subárboles maximales de los grafos son de gran ayuda a la hora de computar el grupo fundamental del grafo. Ante todo, probamos su existencia.

Proposición 1.6.4. *Todo subárbol T de un grafo finito G está contenido en un subárbol maximal. Además, si G es conexo un subárbol es maximal si, y sólo si, contiene todos los vértices de G.*

Demostración. Si T no es maximal entonces existe un subárbol $T' \subset G$ tal que $T \subsetneq T'$. Si T' no es maximal existirá un subárbol $T'' \subset G$ tal que $T \subsetneq T' \subsetneq T''$. Este proceso termina por la finitud de G.

Con respecto a la segunda aserción, supongamos que G es conexo y T es un subárbol maximal. Si T no contiene todos los vértices se sigue de la conexión de G que existe una arista $\{v, v'\}$ tal que $v \in T$ y $v' \notin T$. Sea $T' = T \cup \{v', \{v, v'\}\}$. Si T' contiene un edge path cerrado y reducido entonces debe contener el edge $\{v, v'\}$. En particular, debe haber otra arista con v' en el borde para cerrar dicho edge path. Esto contradice el hecho que $v' \notin T$. Luego, T' es un árbol y esto contradice la maximalidad de T. Recíprocamente, si T es un subárbol que contiene a todos los vértices del grafo conexo G y $T' \supset T$ es otro subárbol entonces cualquier arista en $T' - T$ da lugar a un edge path cerrado y reducido. En efecto, si $\{v, v'\} \in T' - T$ para cualquier edge path reducido $e_1 e_2 ... e_r$ que une v con v' (existe por conexidad) el edge path reducido $\{v, v'\} e_1 e_2 ... e_r$ es cerrado. Esto contradice que T' es un árbol. □

Observación 1.6.5. Estos dos últimos resultados se mantienen ciertos para grafos y/o árboles infinitos. Las demostraciones para este tipo de grafos son menos directas y usan una matemática menos elemental que para el caso finito. Como no trabajaremos con complejos simpliciales infinitos no haremos uso de estos resultados más generales.

A continuación mostramos de qué manera los subárboles maximales determinan el tipo homotópico de los grafos.

Proposición 1.6.6. *Sea G un grafo finito y conexo y $T \subset G$ un subárbol maximal. Entonces $|G|/|T|$ es la unión por un punto de tantas copias de la esfera unidimensional S^1 como aristas de G queden fuera de T (aquí el espacio topológico cociente $|G|/|T|$ es el que se obtiene al identificar todos los puntos de $|T|$ en un punto).*

Demostración. Sea $\Lambda = \{\{v_i, v_i'\}\}_{i\in J}$ el conjunto de aristas de $G - T$. Sea $s = (1, 0) \in S^1$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f_i} & |G| \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ S^1 & & |G|/|T| \end{array} .$$

donde las q_i son las funciones cociente y $f_i = tv_i + (1-t)v_i'$, $t \in I$. Si $[\ ]_1$ y $[\ ]_2$ representan las clases de equivalencia en $S^1 = q_1(I)$ y $|G|/|T| = q_2(|G|)$, definimos $g_i : S^1 \to |G|/|T|$ por

$$g_i([t]_1) = [[t]_1 v_i + (1 - [t]_1)v_i']_2.$$

Notemos que g_i está bien definida pues $[v_i]_2 = [v_i']_2$ (correspondiente al caso $[0]_1 = [1]_1$). Además, $g_i \circ q_1 = q_2 \circ f_i$. Por propiedad de la topología cociente g_i es continua, pues $q_2 \circ f_i$ lo es. La función $g : \bigvee_s S^1 \to |G|/|T|$ dada por $g(z) = g_i(z)$ si $z \in S_i^1$ está bien definida (pues $g_i(s) = g_j(s)$ para todo i, j) y es continua. Además, es fácil corroborar que es biyectiva. Como $\bigvee_s S^1$ es compacto y $|G|/|T|$ es Hausdorff, g resulta un homeomorfismo. □

Teorema 1.6.7. *Sea G un grafo finito y conexo y $T \subset G$ un subárbol maximal. La función cociente $q : |G| \to |G|/|T|$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Consideremos un vértice $v_0 \in T$. Para cada vértice $v \in G$ fijemos un edge path ξ_v que una v con v_0 en T. Para cada arista $e_i = \{v_i, v_i'\} \in G - T$ consideramos el edge path cerrado (alrededor de v_0) $\zeta_i = \xi_{v_i}^{-1} e_i \xi_{v_i'}$ y definimos una función continua $p : |G|/|T| \to |G|$ en cada $[e_i] \in |G|/|T|$ por

$$p([e_i]) = |\varphi_{\zeta_i}|$$

donde φ_{ζ_i} es la función definida en la Observación 1.4.6. En otras palabras, p le asigna a cada $S_i^1 \subset \bigvee_s S^1 = |G|/|T|$ un lazo en $|G|$ alrededor de v_0 completamente contenido en T salvo por el único 1-simplex e_i que le corresponde a S_i^1 (Figura 1.19).

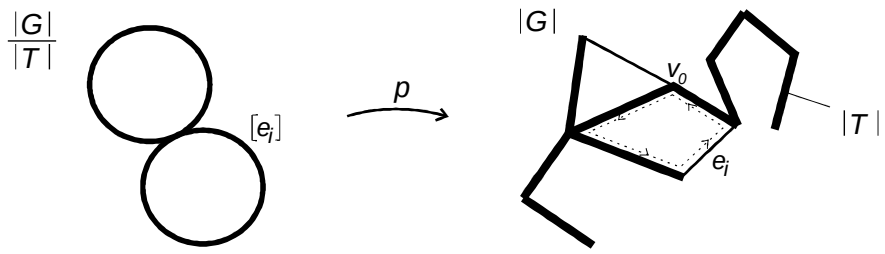

Figura 1.19: La función p.

Vamos a probar que p es la inversa homotópica de q. Por un lado, $q \circ p$ se restringe en cada S_i^1 al lazo $c_{v_0} \circ id \circ c_{v_0}^{-1}$, donde $c_{v_0} : I \to |G|$ representa la función constante v_0. Luego, $q \circ p \simeq id_{|G|/|T|}$. Por otro lado, $p \circ q|_{|T|} = v_0$, y como $v_0 \subset |T|$ es un retracto por deformación fuerte, entonces $p \circ q|_{|T|}$ es homotópica a $id_{|T|}$. Sea $H : id_{|T|} \simeq p \circ q|_{|T|}$ esta homotopía. Vamos a ver que podemos extenderla a todo $|G|$. Nos alcanza con definir H en $|e_i| \times I$ para cada $e_i \in G - T$. Si $r \in I$ identifica el punto $(1-r)v_i + rv_i' \in e_i$ definimos entonces

$$H(r,t) = \begin{cases} |\varphi_{\xi_{v_i}^{-1}}| \left(3\dfrac{r}{t}\right) & 0 \leq r < \frac{t}{3} \\ v_i \left(\dfrac{r + \frac{t}{3} - 1}{\frac{2}{3}t - 1}\right) + v_i' \left(\dfrac{r - \frac{t}{3}}{1 - \frac{2}{3}t}\right) & \frac{t}{3} \leq r \leq 1 - \frac{t}{3} \\ |\varphi_{\xi_{v_i'}}| \left(\dfrac{3r - 3 + t}{t}\right) & 1 - \frac{t}{3} < r \leq 1 \end{cases}$$

Esto es, para un $t \in I$ fijo, $H(r,t)$ recorre $|\varphi_{\xi_{v_i}^{-1}}|$ a velocidad $\frac{t}{3}$ en $(0, \frac{t}{3})$,$|e_i|$ de v a v' a velocidad $1 - \frac{2}{3}t$ en $(\frac{t}{3}, 1 - \frac{t}{3})$ y $|\varphi_{\xi_{v_i}'}|$ a velocidad $\frac{t}{3}$ en $(1 - \frac{t}{3}, 1)$. De esta manera, la homotopía H sobre e_i deforma linealmente esta arista en el camino φ_{ζ_i}, como muestra la Figura 1.20.

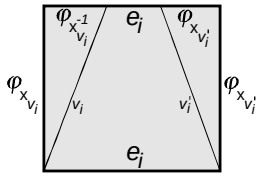

Figura 1.20: Extendiendo la homotopía.

Extendiendo H para cada arista en $G - T$ obtenemos $H : id \simeq p \circ q$. Esto concluye la demostración. □

Corolario 1.6.8. *El grupo fundamental de un grafo conexo $|G|$ es el grupo libre con tantos generadores como aristas queden fuera de un árbol maximal de G.*

Corolario 1.6.9. *Un grafo conexo G es un árbol si, y sólo si, es contráctil.*

Demostración. Si G es un árbol entonces cualquiera de sus vértices es un retracto por deformación fuerte; luego, G es contráctil. Recíprocamente, supongamos que G es contráctil y sea $T \subset G$ un subárbol maximal. Como $\pi_1(|G|) = 0$ entonces, por Corolario 1.6.8, no hay ninguna arista en $G - T$. Como por conexión de G el árbol T tiene todos los vértices de G, se deduce $G = T$. □

Capítulo 2

Variedades combinatorias y estelares

Una de las clases más importantes de espacios topológicos son las variedades topológicas; esto es, espacios que localmente se comportan como el espacio euclídeo n-dimensional. Esta propiedad local permite deducir una inmensa cantidad de propiedades de estos espacios y ha llegado, en los casos de dimensiones bajas, a proveer una clasificación definitiva.

Las variedades combinatorias son los análogos, en el contexto de los complejos simpliciales, a las variedades topológicas. Para ello existe una manera de definir de forma muy concreta una noción de *entorno euclídeo* en el contexto de los complejos simpliciales. La primera parte de este capítulo se encargará de introducir las definiciones y resultados clásicos de la teoría de variedades combinatorias. En la segunda parte del capítulo desarrollaremos la teoría de variedades estelares, otro tipo especial de complejo simplicial. Lo que resulta interesante es que ambas teorías son equivalentes, hecho que nos permitirá pasar de una a otra según sea conveniente de acuerdo al contexto.

2.1. Variedades combinatorias

Recordemos que si σ es un simplex entonces el complejo formado por todas sus caras propias es un subcomplejo de σ llamado borde de σ y notado $\dot{\sigma}$. Sólo vamos a definir el borde de un complejo simplicial K para el caso en el que este complejo sea homogéneo. Introducimos este concepto en la siguiente

Definición 2.1.1. Un complejo simplicial K se dice *homogéneo* si K es r-dimensional y está formado por r-símplices y sus caras.

Esto es lo mismo que decir todos los símplices maximales de K tienen la misma dimensión. A un complejo homogéneo K de dimensión r lo llamamos también r*-complejo*. Lo notamos, cuando queramos resaltar este hecho, como K^r.

Definición 2.1.2. El *borde* de un r-complejo K es el $(r-1)$-complejo que se obtiene como la unión módulo 2 de los $(r-1)$-símplices de K más sus caras. Lo notamos por $\dot{K}$.

Esto quiere decir que un $(r-1)$-símplex está en $\dot{K}$ si, y sólo si, es cara de una cantidad impar de r-símplices de K. En particular, si $\dot{K}$ no es vacío, resulta un complejo homogéneo de dimensión $r-1$. Cuando $\dot{K} = \emptyset$ diremos que K no tiene borde. Notar que la noción de borde de un n-simplex coincide con la Definición 2.1.2.

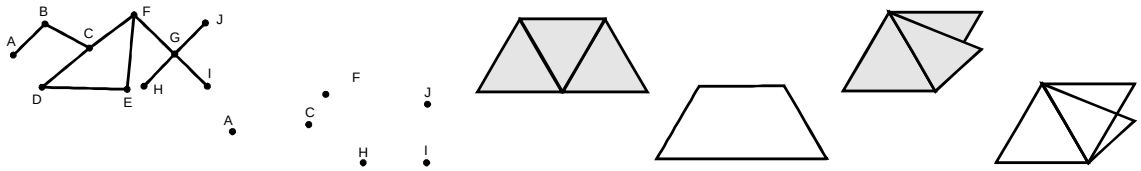

Figura 2.1: Borde de complejos homogéneos.

Las propiedades características del borde de un complejo simplicial están contenidas en la siguiente proposición y son de fácil demostración.

Proposición 2.1.3. *Sea K un complejo simplicial homogéneo.*

(i) Si $K = L.L'$, donde L y L' son homogéneos, entonces $\dot{K} = \dot{L}L' + L\dot{L}'$.

(ii) $(\dot{K})^{\cdot} = \emptyset$

(iii) $(\alpha K)^{\cdot} = \alpha\dot{K}$

Observación 2.1.4. Si K es un complejo simplicial sin borde y v es un 0-simplex entonces, por *(i)* e *(ii)* de la Proposición 2.1.3, se tiene $(vK)^{\cdot} = \dot{v}K + v\dot{K} = K$.

Definición 2.1.5. Sea Δ^n un n-simplex y sea $\dot{\Delta}^{n+1}$ el borde de Δ^{n+1}. Una *bola combinatoria* de dimensión n (o *n-bola combinatoria*) es un complejo PL-isomorfo a Δ^n. Una *esfera combinatoria* de dimensión n (o *n-esfera combinatoria*) es un complejo PL-isomorfo a $\dot{\Delta}^{n+1}$.

Denotaremos B^p a las bolas combinatorias de dimensión p y S^p a las esferas combinatorias de dimensión p.

Lema 2.1.6. *Si A, B, C y D son complejos tales que $A \simeq_{PL} C$ y $B \simeq_{PL} D$, entonces $A.B \simeq_{PL} C.D$.*

Demostración. Notemos que nos alcanza con probar que $A.B \simeq_{PL} A.D$ pues el resultado general se obtiene por conmutatividad cambiando el papel de A por D. Sabemos que existen subdivisiones βB y δD tales que $\beta B = \delta D$. Por lo tanto, $A.\beta B = A.\delta D$. Si probamos que $A.\beta B$ es una subdivisión de $A.B$ se tendrá el resultado (pues el mismo resultado se tendrá para $A.\delta D$). Probamos entonces que estamos en las condiciones de la Definición 1.3.1. Lo hacemos en dos partes.

(i). Sea $\tau \in A.\beta B$ y veamos que $|\tau|$ está contenido en un simplex cerrado de $|A.B|$. Se tiene que $\tau = \sigma_A.\sigma_{\beta B}$ donde $\sigma_A \in A$ y $\sigma_{\beta B} \in \beta B$. Sea $\sigma_B \in B$ tal que $|\sigma_{\beta B}| \subset |\sigma_B|$. Afirmamos que $|\tau| \subset |\sigma_A.\sigma_B|$. Como $\tau = \sigma_A.\sigma_{\beta B}$ entonces $\tau = \{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_t\}$, donde $\sigma_A = \{v_1, ..., v_r\}$ y $\sigma_{\beta B} = \{w_1, ..., w_t\}$. Si $x \in |\tau|$ entonces se tiene que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{t} \lambda'_j w_j$$

para $\lambda_i, \lambda'_j \geq 0$ y $\sum \lambda_i + \sum \lambda'_j = 1$. Llamemos $\sum \lambda'_j = c$. Si $c = 0$ entonces $x \in |\sigma_A| \subset |\sigma_A.\sigma_B|$ y listo. Supongamos $c \neq 0$. Si $\sigma_B = \{u_1, ..., u_s\}$ entonces, como $|\sigma_{\beta B}| \subset |\sigma_B|$ y $\sum_{j=1}^{t} \frac{\lambda'_j}{c} w_j$ es una combinación convexa de los vértices de $\sigma_{\beta B}$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{t} \frac{\lambda'_j}{c} w_j = \sum_{k=1}^{s} \lambda''_k u_k$$

para ciertos $\lambda''_k \geq 0$ y $\sum \lambda''_k = 1$. Por lo tanto,

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{t} \lambda'_j w_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + c \sum_{k=1}^{s} \lambda''_k u_k.$$

Ahora, como $\sum \lambda_i + c \sum \lambda'_j = \sum \lambda_i + (\sum \lambda'_j)(\sum \lambda''_k) = \sum \lambda_i + \sum \lambda'_j = 1$ entonces $x \in |\sigma_A.\sigma_B|$, como se quería probar.

*(ii).*Veamos que $|A.\beta B| = |A.B|$. Notemos que del resultado del punto *(i)* se tiene inmediatamente que $|A.\beta B| \subset |A.B|$. Para la otra contención, sea $x \in |A.B|$. Si $x \in |\tau| \subset |A.B|$ y $\tau = \sigma_A.\sigma_B$ podemos escribir

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda''_k u_k$$

donde hemos utilizado las mismas notaciones que en el punto *(i)*. Sea $d = \sum \lambda''_k$. Llamemos $y = \sum \frac{\lambda''_k}{d} u_k$, de manera que $y \in |\sigma_B|$. Como $|\beta B| = |B|$ entonces existe $\sigma_{\beta B} = \{w_1, ..., w_t\} \in \beta B$ tal que $y = \sum_{j=1}^{t} \lambda'_j w_j$. Por lo tanto,

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + dy = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + d \sum_{j=1}^{t} \lambda'_j w_j.$$

Nuevamente se tiene que $\sum \lambda_i + d \sum \lambda''_j = 1$, por lo que $x \in |\sigma_A|.|\sigma_{\beta B}| \subset |A.\beta B|$. Esto concluye la demostración. □

Corolario 2.1.7. *Sea B^p una p-bola combinatoria y S^q una q-esfera combinatoria. Entonces*

(i) $B^p B^q$ es una $(p+q+1)$-bola combinatoria.

(ii) $B^p S^q$ es una $(p+q+1)$-bola combinatoria.

(iii) $S^p S^q$ es una $(p+q+1)$-esfera combinatoria.

Definición 2.1.8. Sea K un complejo homogéneo de dimensión n. Decimos que un p-simplex $\sigma \in K$ es *regular* en K si $lk(\sigma, K)$ es una $(n-p-1)$-esfera combinatoria ó una $(n-p-1)$-bola combinatoria.

En particular, un vértice $v \in K$ es regular si $lk(v, K)$ es una $(n-1)$-esfera combinatoria ó una $(n-1)$-bola combinatoria. Llegamos así a la definición de variedad combinatoria.

Definición 2.1.9. Una *n-variedad combinatoria* es un complejo simplicial homogéneo de dimensión n en el que todo vértice es regular.

Es un hecho muy interesante que la regularidad de los vértices de un complejo homogéneo es suficiente para garantizar la regularidad de todos los símplices del complejo. Haremos la demostración de este resultado en conjunto con el teorema que establece que los PL-isomorfismos envían una variedad combinatoria en otra. Antes, necesitamos unos resultados previos.

Lema 2.1.10. *Sea K una n-variedad combinatoria tal que todos sus símplices son regulares. Si $(\tau, a)K$ es un starring elemental entonces $(\tau, a)K$ es también una n-variedad combinatoria.*

Demostración. Escribamos $K = \tau.lk(\tau, K) + Q_\tau$ y $(\tau, a)K = a\dot{\tau}lk(\tau, K) + Q_\tau$. Veamos primeramente que a es un vértice regular de $(\tau, a)K$. Notar que $lk(a, (\tau, a)K) = \dot{\tau}lk(\tau, K)$. Como por hipótesis τ es regular en K se tiene que $lk(\tau, K)$ es una n-bola combinatoria o una n-esfera combinatoria. Por el Corolario 2.1.7, $\dot{\tau}lk(\tau, K)$ resulta una n-bola combinatoria o una n-esfera combinatoria (pues $\dot{\tau}$ es una esfera combinatoria). Esto prueba que el vértice $a \in (\tau, a)K$ es regular.

Si ahora b es un vértice de $(\tau, a)K$ que no está en τ entonces $lk(b, (\tau, a)K)$ es una subdivisión de $lk(b, K)$ y b resulta regular pues

$$lk(b, (\tau, a)K) \simeq_{PL} lk(b, K) \simeq_{PL} \dot{\Delta}^n \text{ o } \Delta^{n-1}.$$

Finalmente, si $c \in \tau$ es un vértice podemos escribir $\tau = c\tau'$ con τ' el $(n-1)$-simplex de $\dot{\tau}$ opuesto a c. Notar que los vértices de $lk(c, (\tau, a)K)$ son vértices de $lk(c, K)$ más el vértice a (Figura 2.2). Podemos definir entonces un isomorfismo f entre $lk(c, (\tau, a)K)$ y $(\tau', \hat{\tau}')lk(c, K)$ que envía el punto a a $\hat{\tau}'$ y deja el resto de los vértices fijos (Figura 2.2). Luego, $lk(c, (\tau, a)K) \simeq_{PL} lk(c, K)$ y c es regular.

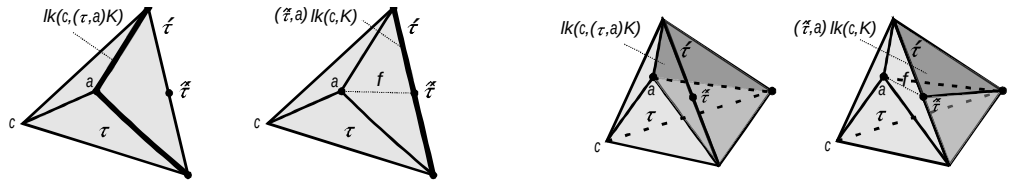

Figura 2.2: El isomorfismo f.

□

Lema 2.1.11. *Sea K un complejo simplicial. Si $\tau = \sigma.\sigma' \in K$ entonces*

$$lk(\tau, K) = lk(\sigma, lk(\sigma', K))$$

Demostración. Sea $\nu \in lk(\tau, K)$. Entonces $\nu\tau \in K$. Ahora, $\nu\tau = \nu\sigma\sigma' = (\nu\sigma)\sigma'$. Luego, $(\nu\sigma)\sigma' \in K$, por lo que $\nu\sigma \in lk(\sigma', K)$, de donde $\nu \in lk(\sigma, lk(\sigma', K))$. Para la otra inclusión, sea $\nu \in lk(\sigma, lk(\sigma', K))$. Entonces, $\nu\sigma \in lk(\sigma', K)$, por lo que $\nu\sigma\sigma' \in K$. Luego, $\nu\tau \in K$ y $\nu \in lk(\tau, K)$. □

Teorema 2.1.12. *Sea K una n-variedad combinatoria.*

(i) Todos los símplices de K son regulares.

(ii) Si $L \simeq_{PL} K$ entonces L también es una n-variedad combinatoria.

Demostración. Usaremos inducción para probar ambas aserciones simultáneamente.

- **Paso 1**. Si *(i)* es cierto para toda variedad combinatoria de dimensión n entonces también lo es *(ii)*.

Supongamos que $L \simeq_{PL} K$ y K es una n-variedad combinatoria. Existen subdivisiones $\alpha_1 K$ y $\beta_1 L$ tales que $\alpha_1 K = \beta_1 L$. Por el Corolario 1.3.16 existe una subdivisión α_2 de $\alpha_1 K$ y una subdivisión derivada δ tales que $\delta K = \alpha_2\alpha_1 K$. Como $\alpha_1 K = \beta_1 L$ entonces α_2 induce una subdivisión en $\beta_1 L$, por lo que deducimos que existe una subdivisión βL tal que $\beta L = \delta K$. Ahora, como δ es derivada es, en particular, estelar (Proposición 1.3.10).

Por Lema 2.1.10 (aquí usamos que vale *(i)*), $\beta L = \delta K$ es una n-variedad combinatoria. Sea ahora a un vértice de L; como también es vértice de βL entonces $lk(a, \beta L)$ es una n-bola combinatoria o una n-esfera combinatoria. Sean $c_1, ..., c_p$ los vértices de $lk(a, \beta L)$. Consideremos la función baricéntrica $f : |lk(a, \beta L)| \to |lk(a, L)|$ que envía el punto c_i al punto d_i en donde la recta que pasa por a y c_i interseca a $|lk(a, L)|$ (Figura 2.3). Es fácil ver que f es suryectiva, por lo que resulta un homeomorfismo. En particular, $f(|lk(a, \beta L)|)$ resulta también una realización geométrica de $lk(a, \beta L)$. Como $f(|lk(a, \beta L)|) = |lk(a, L)|$, podemos hallar subdivisiones γ_1 y γ_2 tales que $\gamma_1 lk(a, \beta L)) = \gamma_2 lk(a, L)$ (nuevamente por Corolario 1.3.16). Luego, $lk(a, \beta L) \simeq_{PL} \Delta^{n-1}$ o $\dot{\Delta}^{n-1}$ y L resulta una n-variedad combinatoria.

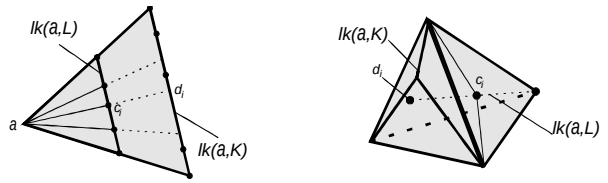

Figura 2.3: La función f.

- **Paso 2**. Si *(ii)* es cierto para toda variedad combinatoria de dimensión $k \leq n-1$ entonces *(i)* es cierto para variedades combinatorias de dimensión n.

Probamos que los símplices de K son regulares por inducción en su dimensión. Para 0-símplices, no hay nada que probar (pues ya son regulares por hipótesis). Supongamos que todo $(k-1)$-simplex de K es regular (para todo $k \leq p-1$) y sea τ un p-simplex de K. Escribamos $\tau = v\sigma$ para algún $(p-1)$-simplex $\sigma \in K$. Por el Lema 2.1.11, $lk(\tau, K) = lk(v, lk(\sigma, K))$. Por hipótesis inductiva se tiene que $lk(\sigma, K)$ es una bola o esfera combinatoria de dimensión $n-(p-1)-1 = n-p$. En cualquier caso, $lk(\sigma, K)$ es PL-isomorfo a una $(n-p)$-variedad combinatoria. Como *(ii)* es cierto y $n-p \leq n-1$ entonces $lk(\sigma, K)$ es una $(n-p)$-variedad combinatoria, por lo que $lk(v, lk(\sigma, K))$ es una bola o esfera combinatoria de dimensión $n-p-1$. Esto prueba que σ es regular. □

Corolario 2.1.13. *Todo $(n-1)$-simplex de una n-variedad combinatoria M es cara de a lo sumo dos n-símplices.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.12, todo $(n-1)$-simplex σ es regular, por lo que $lk(\sigma, M) \simeq_{PL} \Delta^0 = \{*\}$ ó $lk(\sigma, M) \simeq_{PL} \dot{\Delta}^1 = \{*, *'\}$. Como Δ^0 y $\dot{\Delta}^1$ son 0-dimensionales, esto equivale a que $lk(\sigma, M) \simeq \Delta^0 = \{*\}$ ó $lk(\sigma, M) \simeq \dot{\Delta}^1 = \{*, *'\}$ y, por lo tanto, $st(\sigma, M)$ consiste en uno ó dos n-símplices. □

Observación 2.1.14. Podemos ahora precisar cuando un vértice de una n-variedad combinatoria tiene por link a una esfera combinatoria o a una bola combinatoria. Si $v \in \dot{M}$ entonces existe un $(n-1)$-simplex $\sigma \in \dot{M}$ con $v \in \sigma$. Si escribimos $\sigma = v\sigma'$ no es difícil de ver que σ' está en el borde de $lk(v, M)$. En efecto, por Corolario 2.1.13, σ es cara de, a lo sumo, dos n-símplices. Como $\sigma \in \dot{M}$ entonces debe ser cara de exactamente uno, τ. Luego, si $\sigma' \prec \tau' \in lk(v, M)$ entonces $\sigma \prec v\tau'$, de donde $\tau' = \tau$. Por lo tanto, $lk(v, M)$ no puede ser una esfera combinatoria (pues su borde no es vacío). Recíprocamente, si $lk(v, M)$ es una bola combinatoria y $\sigma' \in (lk(v, M))\dot{}$ entonces $\sigma = v\sigma' \in \dot{M}$. Deducimos entonces que, en un n-variedad combinatoria, un vértice v tiene por link a una esfera combinatoria si $v \notin \dot{M}$ y a una bola combinatoria si $v \in \dot{M}$.

Notemos que, en particular, un $(n-1)$-simplex $\sigma \in M$ estará en $\dot{M}$ si, y sólo si, σ es cara de exactamente un único n-simplex. Además tenemos

Proposición 2.1.15. *Si M es una n-variedad combinatoria entonces $\dot{M}$ es una $(n-1)$-variedad combinatoria sin borde.*

Demostración. Sabemos por definición que $\dot{M}$ es un $(n-1)$-complejo homogéneo. El resultado es inmediato si probamos que $lk(v, \dot{M}) = (lk(v, M))^{\cdot}$ para un vértice $v \in \dot{M}$; pues, en este caso, se tendrá $lk(v, \dot{M}) = (lk(v, M))^{\cdot} = (\Delta^n)^{\cdot} = \dot{\Delta}^{n+1}$.

Si $\sigma \in lk(v, \dot{M})$ es maximal entonces $v\sigma \in \dot{M}$ es un $(n-1)$-simplex maximal. Por el comentario anterior a la proposición, existe un único $\tau \in M$ tal que $v\sigma \prec \tau$. Se tiene entonces que $\sigma \prec \tau - \{v\} \in lk(v, M)$. Si $\tau' \succ \sigma$ con $\tau' \in lk(v, M)$ entonces $v\sigma \prec v\tau'$ con $v\tau' \in st(v, M)$. Por lo tanto, τ' debe ser $\tau - \{v\}$. Esto prueba que σ sólo es cara de $\tau - \{v\}$ y, por lo tanto, $\sigma \in (lk(v, M))^{\cdot}$.

Si ahora $\sigma \in (lk(v, M))^{\cdot}$ sean $\tau_1, ..., \tau_r \in lk(v, M)$ todos los $(n-1)$-símplices tales que $\sigma \prec \tau_i$ (r impar). Entonces, $v\sigma \prec v\tau_i$ para todo i. Si $v\sigma \prec \tau'$ entonces $\sigma \prec \tau' - \{v\}$, por lo que, existe un i_0 con $\tau' - \{v\} = \tau_{i_0}$. Pero entonces, $\tau' = v.\tau_{i_0}$. Esto prueba que los únicos n-símplices que contienen a $v\sigma$ como cara inmediata son los $v\tau_i$ $(i = 1, ..., r)$. Como r es impar se tiene entonces que $v\sigma \in \dot{M}$. En particular, $\sigma \in lk(v, \dot{M})$. Esto concluye la demostración. □

El siguiente resultado pone en evidencia una característica de las variedades combinatorias conexas que en muchos casos es suficiente para llevar a cabo muchas de las demostraciones que involucran este tipo de objetos.

Proposición 2.1.16. *Sea M es una n-variedad combinatoria conexa. Entonces dados dos n-símplices σ y σ' existe una sucesión de n-símplices*

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_k = \sigma'$$

tales que σ_i y σ_{i+1} son adyacentes para todo $i = 0, ..., k-1$, es decir, σ_i y σ_{i+1} se intersecan en un $(n-1)$-simplex.

Demostración. Hacemos inducción en la dimensión de M. Si M es una 0-variedad combinatoria no hay nada que probar y si M es una 1-variedad combinatoria el resultado es equivalente a la conexidad de M por el Lema 1.4.8. Supongamos $dim(M) = n \geq 2$. Por conexidad, y nuevamente por el Lema 1.4.8, dados dos vértices de M podemos unirlos por un edge path. Para dos n-símplices $\sigma, \sigma' \in M$ consideramos todos los edge paths que unen un vértice de σ con uno de σ'. Sean $v \in \sigma$ y $w \in \sigma'$ tales que el edge path que los une tenga longitud mínima entre todos los edge paths que unen todos los posibles pares de vértices de σ y σ'. Haremos inducción en la longitud k de este edge path. Si $k = 0$ entonces $v = w$ y σ y σ' comparten un vértice. Sean $\nu \prec \sigma$ y $\nu' \prec \sigma'$ tales que $v.\nu = \sigma$ y $v.\nu' = \sigma'$, de manera que $\nu, \nu' \in lk(v, M)$. Como $dim(lk(v, M)) = n - 1$ y $n \geq 2$ entonces $lk(v, M)$ es una bola combinatoria conexa o una esfera combinatoria conexa. En cualquier caso, $lk(v, M)$ es una $(n-1)$-variedad combinatoria conexa y podemos utilizar nuestra hipótesis inductiva en la dimensión de la variedad combinatoria para hallar una sucesión

$$\nu = \nu_0, \nu_1, ..., \nu_s = \nu'$$

de $(n-1)$-símplices adyacentes. Pero entonces

$$\sigma = v.\nu = v.\nu_0, v.\nu_1, ..., v.\nu_s = v.\nu' = \sigma'$$

resulta una sucesión de n-símplices adyacentes que unen σ con σ'. Esto prueba el caso $k = 0$. El caso general se sigue fácilmente de aquí. En efecto, si $k \geq 1$, consideremos algún 1-simplex que contenga a v como cara. Como M es homogéneo entonces este 1-simplex debe ser cara de un n-simplex τ. Por hipótesis inductiva en k, como σ y τ comparten a v como vértice entonces existe una sucesión

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_l = \tau$$

de n-símplices adyacentes. Por otro lado, si u es la otra cara de este 1-simplex distinta de v entonces podemos unirla con w por un camino de cantidad de aristas menor a $k - 1$. Nuevamente por hipótesis inductiva en k tenemos un camino

$$\tau = \tau_0, \tau_1, ..., \tau_h = \sigma'$$

de n-símplices adyacentes. Luego

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_l = \tau = \tau_0, \tau_1, ..., \tau_h = \sigma'$$

es la sucesión buscada y esto prueba el resultado. □

Observación 2.1.17. Notemos que si un p-simplex $\sigma \in K$ es regular entonces $st(\sigma, K)$ es una n-bola combinatoria. En efecto, por regularidad se tiene que $lk(\sigma, K)$ es una $(n - p - 1)$-bola combinatoria B^{n-p-1} o una $(n - p - 1)$-esfera combinatoria S^{n-p-1}. En cualquier caso, como $st(\sigma, K) = \sigma.lk(\sigma^p, K)$ y σ es una p-bola combinatoria el resultado se sigue del Corolario 2.1.7.

Como último resultado de esta sección mostramos que las variedades combinatorias modelan combinatoriamente a variedades topológicas.

Proposición 2.1.18. *Si M es un n-variedad combinatoria entonces $|M|$ es una n-variedad topológica.*

Demostración. Sea $x \in |M|$. Sea M_x la subdivisión que consiste en agregar a x como vértice. Por el Teorema 3.4.2, M_x resulta una n-variedad combinatoria. Luego $st(x, M_x)$ es una n-bola combinatoria (por observación 2.1.17). En particular, $|st(x, M_x)| = |\Delta^n| \simeq D^n$ (Ejemplo 1.2.13).

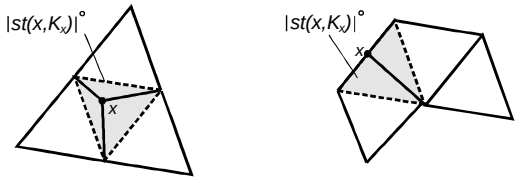

Figura 2.4: Entorno de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ según el caso.

Si $x \notin |\dot{M}|$ entonces x está en el interior de $|st(x, M_x)|$, el cual resulta un entorno euclídeo de x. Si $x \in |\dot{M}|$ entonces $|st(x, M_x)|$ resulta un entorno de x en el semiespacio positivo H^n_+ de $\mathbb{R}^n$ (Figura 2.4). Luego, $|M|$ es una variedad topológica. □

Una *PL-variedad de dimensión n* es un poliedro que admite una triangulación por una n-variedad combinatoria. Por la Proposición 2.1.18 se tiene que toda PL-variedad es una variedad topológica. Como resultado de la falsedad de la Hauptvermutung para variedades sabemos que la vuelta no es cierta. Más aún, pueden construirse variedades diferenciables que no son triangulables por una variedad combinatoria, aún cuando toda variedad diferenciable es triangulable por un complejo simplicial [Ran].

2.2. Pseudovariedades

Vimos en la Proposición 2.1.16 que dos n-símplices de una n-variedad combinatoria conexa podían unirse por medio de una sucesión de n-símplices adyacentes. Combinada con la propiedad que todo $(n-1)$-simplex es cara de a lo sumo dos n-símplices esta característica resulta ser suficientemente fuerte para deducir muchos resultados concernientes a los complejos que la posean. Esta es la idea en la noción de pseudovariedad.

Definición 2.2.1. Un complejo simplicial homogéneo M de dimensión n se dice una n-pseudovariedad si

1. Todo $(n-1)$-simplex está contenido en a lo sumo dos n-símplices.
2. Dados dos n-símplices $\sigma, \sigma' \in M$ existe una sucesión de n-símplices

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_k = \sigma'$$

tales que σ_i y σ_{i+1} son adyacentes para todo $i = 0, ..., k-1$.

Notemos que la condición 2 determina que una pseudovariedad es un complejo simplicial conexo. También, y como en el caso de las variedades combinatorias, se tiene que el borde de una n-pseudovariedad está generada por todos los $(n-1)$-símplices que están contenidos en exactamente un único n-simplex. Como fue comentado al comienzo, por la Proposición 2.1.16, toda n-variedad combinatoria conexa es una n-pseudovariedad. Para el caso 1-dimensional es sencillo ver que la vuelta también es cierta. Sin embargo, ya para dimensión 2 podemos producir un contraejemplo a esta implicación.

Ejemplo 2.2.2. La Figura 2.5 muestra un ejemplo de una 2-pseudovariedad que no es una variedad combinatoria. Notar que la realización geométrica de este complejo no determina una variedad topológica, dado que el vértice v no posee el entorno requerido. Se sigue también del hecho que el link del vértice v no es una esfera combinatoria ni una bola combinatoria.

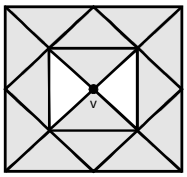

Figura 2.5: Una pseudovariedad que no es una variedad topológica.

En el ejemplo anterior la pseudovariedad que no es variedad combinatoria posee borde no vacío. Si uno quiere contestar el interrogante de si existe una pseudovariedad sin borde que no sea variedad combinatoria uno tiene que lidiar con matemática más compleja. Un contraejemplo en dimensión 3 puede producirse construyendo la suspensión de $SO(3)/A_5$, donde A_5 es el grupo de sesenta simetrías del dodecaedro. El poliedro $SO(3)/A_5$, que es muy frecuentemente usado en topología de bajas dimensiones, es llamado *esfera homológica de Poincaré* y fue de hecho presentado por este matemático como contraejemplo a la primera versión de su célebre conjetura[1]. En dimensión 2 no podemos encontrar contraejemplos:

[1]Ver nota en página 56 del capítulo 3

Proposición 2.2.3. *Una 2-pseudovariedad finita sin borde es una 2-variedad combinatoria (sin borde).*

Demostración. Sea M una 2-pseudovariedad sin borde y $v \in M$. Vamos a probar que $lk(v, M)$ es una 1-esfera combinatoria. Como M no tiene borde entonces $st(v, M)$ debe contener, al menos, tres 2-símplices. Podemos suponer que son $\{v, w_1, w_2\}$, $\{v, w_2, w_3\}$ y $\{v, w_3, w_4\}$ (nuevamente por $\dot{M} = \emptyset$). Si $w_4 = w_1$ entonces $lk(v, M)$ no puede tener más símplices (por la propiedad *(i)* de la Definición 2.2.1) y resulta, por lo tanto, una 1-esfera combinatoria. Si $w_4 \neq w_1$ entonces debe existir un vértice w_5 y un 2-simplex $\{v, w_4, w_5\}$. Notar que $w_5 \neq w_2, w_3$ pues $\{v, w_2\}$ y $\{v, w_3\}$ no pueden se cara inmediata de ningún 2-simplex más. Si $w_5 = w_1$ el mismo razonamiento que antes nos dice que $lk(v, M)$ es una 1-esfera combinatoria. Siguiendo de esta manera podemos construirnos una sucesión w_i de vértices tales que $\{v, w_i, w_{i+1}\}$ es un 2-simplex en M. Nuevamente, $w_i \neq w_j$ si $i > j \neq 1$. Por finitud de M, en algún momento debemos tener $w_i = w_1$, y el resultado se sigue. □

Presentamos para cerrar la sección un resultado que será utilizado en la demostración de existencia de *spines* de variedades combinatorias del próximo capítulo. Su verificación dual en el contexto de las variedades estelares será de gran importancia en el desarrollo de la teoría.

Lema 2.2.4. *Si M es una n-pseudovariedad y L es un n-subcomplejo homogéneo de M que no contiene a todos los n-símplices de M entonces $\dot{L} \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $\sigma \in M - L$ un n-simplex. Tomemos un $\sigma' \in L$ cualquiera y construyamos una sucesión $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_k = \sigma'$ de n-símplices adyacentes. Sea σ_i el primero de estos símplices que pertenece a L (debe haber uno pues $\sigma_0 \in M - L$ y $\sigma' \in L$). En particular se tiene que $\sigma_{i-1} \notin L$ pero $\sigma_{i-1} \cap \sigma_i = \nu^{n-1} \in L$. Como M es pseudovariedad entonces ν^{n-1} es cara de exactamente dos n-símplices de M; a saber, σ_{i-1} y σ_i. Como sólo σ_i está en L entonces $\nu^{n-1} \in \dot{L}$. □

Corolario 2.2.5. *Una n-variedad combinatoria con borde no puede contener una n-pseudovariedad sin borde.*

2.3. Variedades estelares

La teoría desarrollada hasta este punto basada en el estudio de la equivalencia lineal a trozos de los complejos simpliciales se conoce como *teoría combinatoria*. Existe una teoría paralela a la combinatoria que se encarga de clasificar los complejos según equivalencias determinadas por movimientos elementales definidos a partir de las subdivisiones estelares que en ellos puedan llevarse a cabo. Esta teoría recibe el nombre de *teoría estelar* y será nuestro objeto de estudio hasta el fin del capítulo.

La teoría combinatoria determina una equivalencia entre complejos simpliciales según existan subdivisiones (arbitrarias) que los conviertan en complejos isomorfos. Uno de los logros de la topología combinatoria fue hallar una conexión entre la equivalencia combinatoria abstracta y la teoría más concreta de movimientos estelares. Estos resultados fueron desarrollados por J.W. Alexander y M.H.A. Newman en los años 20 y 30 y establecen que cualquier subdivisión de un complejo simplicial puede obtenerse del complejo original a través de una sucesión finita de dichos movimientos estelares. Tan fuerte es esta conexión que para complejos simpliciales finitos ambas teorías son equivalentes. Una prueba parcial

de esto, necesaria para el desarrollo de la teoría de colapsos de complejos del capítulo 3, será expuesta al final del presente capítulo.

Recordemos que el movimiento $K = \sigma.lk(\sigma, K) + Q_\sigma \to a.\dot{\sigma}.lk(\sigma, K) + Q_\sigma$ se llama starring elemental (para un $a \in \sigma^\circ$). Lo notamos (σ, a) y al complejo resultante del starring elemental, $(\sigma, a)K$. La operación inversa se llama *weld elemental* (o *soldadura elemental*) y se nota $(\sigma, a)^{-1}$. Definimos un *movimiento estelar elemental* como un starring elemental, un weld elemental o un isomorfismo simplicial.

Definición 2.3.1. Sean K y L dos complejos simpliciales. Una equivalencia estelar entre K y L, notada $K \sim L$, es una sucesión finita de movimientos estelares elementales que transforman K en L.

Ejemplo 2.3.2. Vimos que la subdivisión K de Δ^2 del Ejemplo 1.3.9 no era isomorfa a una subdivisión estelar. Sin embargo, $\Delta^2 \sim K$. Una demostración de esto puede verse en la Figura 2.6.

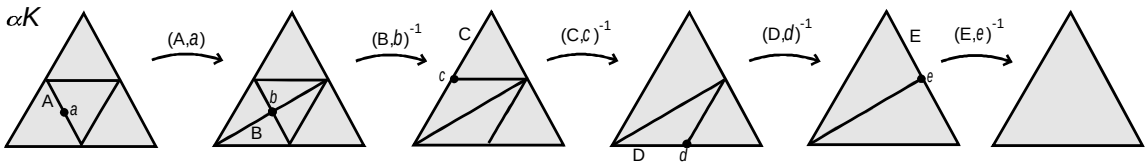

Figura 2.6: Demostración que $\alpha K \sim K$.

Observación 2.3.3. Notar que $((\sigma, a)K).L = (\sigma, a)K.L$, de donde se tiene que si $K \sim K_1$ y $L \sim L_1$ entonces $KL \sim K_1L_1$.

Podemos ahora definir la noción de n-bola estelar, n-esfera estelar y n-variedad estelar de acuerdo a la relación de equivalencia $\sim$.

Definición 2.3.4. Una n-bola estelar es un complejo simplicial estelarmente equivalente a Δ^n. Una n-esfera estelar es un complejo simplicial estelarmente equivalente a $\dot{\Delta}^{n+1}$. Una n-variedad estelar es un complejo simplicial M donde para todo vértice $v \in M$ se tiene que el $lk(v, M)$ es una $(n-1)$-bola estelar o una $(n-1)$-esfera estelar.

La siguiente proposición, análoga al Corolario 2.1.7, se puede probar de idéntica manera como corolario de la Observación 2.3.3 (en lugar del Lema 2.1.6).

Proposición 2.3.5. *Sea B^p una p-bola estelar y S^q una q-esfera estelar. Entonces*

(i) B^pB^q es una $(p+q+1)$-bola estelar.

(ii) B^pS^q es una $(p+q+1)$-bola estelar.

(iii) S^pS^q es una $(p+q+1)$-esfera estelar.

En particular, tenemos también el análogo al Teorema 2.1.12.

Teorema 2.3.6. *Sea K una n-variedad estelar.*

(i) Si σ es un q-simplex de K entonces $lk(\sigma, K)$ es una $(n-q-1)$-bola estelar o una $(n-q-1)$-esfera estelar.

(ii) Si $L \sim K$ entonces L también es una n-variedad estelar.

Demostración. Nuevamente, utilizamos inducción para probar ambas aserciones juntas. Supongamos que ambas partes del teorema son verdaderas para r-variedades estelares de dimensiones $r < n$ (el caso $n = 0$ es trivial).

Sea $\sigma \in K$ un q-simplex. Escribamos $\sigma = a.\sigma'$. Por Lema 2.1.11 se tiene que $lk(\sigma, K) = lk(\sigma', lk(a, K))$. Pero $lk(a, M)$ es una $(n-1)$-bola estelar o una $(n-1)$-esfera estelar, por lo que, por hipótesis inductiva en el punto *(ii)*, se tiene que es una $(n-1)$-variedad estelar. Entonces, podemos aplicar ahora la hipótesis inductiva en el punto *(i)* para hallar que $lk(\sigma', lk(a, K))$ es una $(n-q-1)$-bola estelar o una $(n-q-1)$-esfera estelar. Esto demuestra el caso n del punto *(i)*.

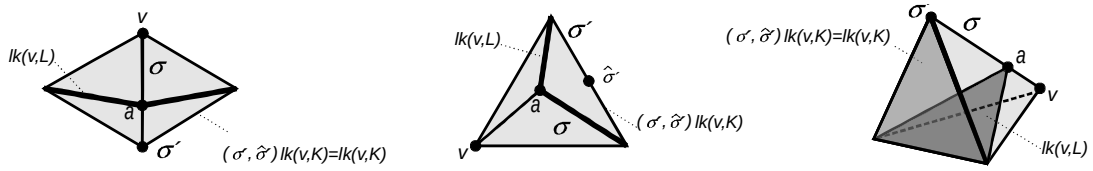

Figura 2.7: $lk(v, L) \simeq (\sigma', \hat{\sigma'})lk(v, K)$.

Supongamos ahora que $L = (\sigma, a)K$ (con $a \notin \dot{K}$) y veamos que L es una n-variedad estelar. Si un vértice v de K no está en $st(\sigma, K)$ entonces $lk(v, L) = lk(v, K)$ y no hay nada que probar. Si $v \in lk(\sigma, K)$ entonces $lk(v, L) = (\sigma, a)lk(v, K)$ y, por lo tanto, $lk(v, L)$ resulta una bola estelar o esfera estelar (pues se obtiene de $lk(v, K)$ por un movimiento estelar elemental). Si ahora $v \in \sigma$ escribamos $\sigma = v\sigma'$. Es fácil ver que $lk(v, L)$ es isomorfo a $(\sigma', \hat{\sigma'})lk(v, K)$ (ver Figura 2.7). Luego, en este caso, $lk(v, L)$ también resulta una bola o esfera estelar. Por último, se tiene que $lk(a, L) = \dot{\sigma}.lk(\sigma, K)$. Por lo tanto, si K es una n-variedad estelar, $lk(\sigma, K)$ es una bola o esfera estelar por hipótesis inductiva en el punto *(i)* (ya probamos verdadero el caso n bajo las mismas hipótesis). Luego, por Proposición 2.3.5, también $\dot{\sigma}.lk(\sigma, K)$ es bola o esfera estelar. □

Observación 2.3.7. Una demostración idéntica que en el caso lineal a trozos nos muestra que un $(n-1)$-simplex de una variedad estelar M es cara de, a lo sumo, dos n-símplices de ella y que un $(n-1)$-simplex $\sigma \in M$ estará en $\dot{M}$ si, y sólo si, σ es cara de exactamente un único n-simplex. Es fácil chequear que además $\dot{M}$ es una $(n-1)$-variedad estelar sin borde.

Un starring elemental (σ, a) se dice *interno* si $\sigma \notin \dot{M}$ (o, equivalentemente, $a \notin \dot{M}$). Un weld elemental es interno si es el inverso de un starring interno. Llegamos a una definición central de la teoría.

Definición 2.3.8. Si B es una n-bola estelar y existe una equivalencia $B \sim v.\dot{B}$ que involucra únicamente movimientos internos entonces B se dice *starreable* (o *estrellable*) y a la sucesión de movimientos estelares se lo llama un *starring de* B.

Vamos a ver a continuación que toda bola estelar puede ser estrellada. Necesitamos dos resultados previos.

Lema 2.3.9. *Si una n-bola estelar B puede estrellarse entonces toda subdivisión estelar sB de B puede estrellarse.*

Demostración. Supongamos $sB = (\tau, a)B$. Si $\tau \notin \dot{B}$ el resultado es directo notando que

$$sB \overset{(\tau,a)^{-1}}{\longrightarrow} B \longrightarrow v.\dot{B}$$

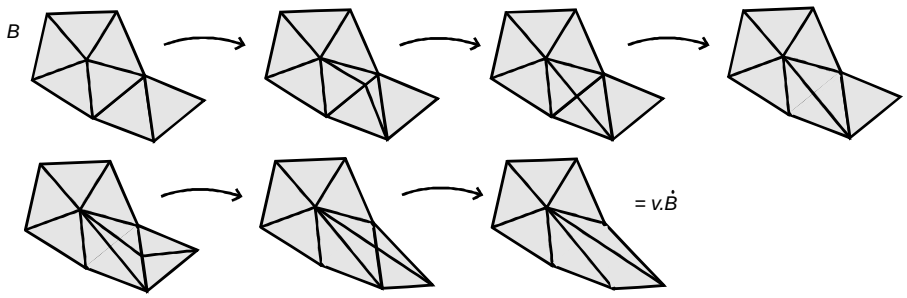

Figura 2.8: Starring de una bola estelar.

es un starring de sB. Luego, consideremos el caso $\tau \in \dot{B}$. Supongamos que $B \sim v.\dot{B}$ por r movimientos internos y supongamos inductivamente que el resultado es cierto para cualquier n-bola estelar que pueda estrellarse en menos de r movimientos (en el caso $r = 0$, como $\tau \in \dot{B}$, entonces $(\tau, a)(v\dot{B}) = v(\dot{(\tau, a)B})$).

Supongamos primero que el primer movimiento de $B \sim v.\dot{B}$ es una subdivisión estelar (υ, b), de manera que $B_1 = (\upsilon, b)B$. Como este movimiento es interno entonces $\dot{B}_1 = \dot{B}$, por lo que $\tau \in \dot{B}_1$. Sea $C_1 = (\tau, a)B_1$. Por hipótesis inductiva C_1 puede estrellarse (pues B_1 es estrellable en menos de r movimientos y (τ, a) es una subdivisión estelar).

Ahora, si ningún simplex de K tiene por caras a τ y υ simultáneamente, o si $\tau \cap \upsilon = \emptyset$, entonces los movimientos $(\tau, a)(\upsilon, b)$ y $(\upsilon, b)(\tau, a)$ poseen el mismo efecto de llevar B a C_1 (no se cruzan en las subdivisiones), por lo que $sB \xrightarrow{(\upsilon,b)} C_1$ muestra que sB puede estrellarse ((υ, b) es interno).

Supongamos entonces que $\tau \cap \upsilon = \eta$ para algún $\eta \in B$ y sean $\tau', \upsilon' \in B$ tales que $\tau = \eta\,\tau'$ y $\upsilon = \eta\,\upsilon'$. Luego, $\tau'\,\upsilon'\,\eta$ es el simplex más pequeño que contiene a τ y a η simultáneamente. Ahora, como las subdivisiones $(\tau, a)(\upsilon, b)$ y $(\upsilon, b)(\tau, a)$ toman lugar en $\tau'\,\upsilon'\,\eta$ entonces el resultado de dichas subdivisiones en B sólo será diferente en $st(\tau'\,\upsilon'\,\eta, B)$. Además, la subdivisión de este star sólo depende de la subdivisión de $\tau'\,\upsilon'\,\eta$; i.e., la subdivisión de $st(\tau'\,\upsilon'\,\eta, B)$ es el join de la subdivisión de $\tau'\,\upsilon'\,\eta$ con su link (precisamente porque $\tau, \upsilon \in \tau'\,\upsilon'\,\eta$). Estudiemos entonces qué sucede en $(\upsilon, b)(\tau, a)(\tau'\,\upsilon'\,\eta)$. Por un lado,

$$(\tau, a)(\tau'\,\upsilon'\,\eta) = (\tau, a)(\tau\,\upsilon') = a\,\dot{\tau}\,\upsilon' = (\tau'\,\dot{\eta}\,a\,\upsilon') + (\eta\,\dot{\tau'}\,a\,\upsilon').$$

Realizando ahora el starring (υ, b) se tiene

$$\begin{array}{rcl}(\tau'\,\dot{\eta}\,a\,\upsilon') + (\eta\,\dot{\tau'}\,a\,\upsilon') & \xrightarrow{(\upsilon,b)} & (\tau'\,\dot{\eta}\,a\,\upsilon') + (\dot{\tau'}\,a\,b\,\dot{\upsilon}) \\ & = & (\tau'\,\dot{\eta}\,a\,\upsilon') + (\dot{\tau'}\,a\,b\,\upsilon'\,\dot{\eta}) + (\dot{\tau'}\,a\,b\,\dot{\upsilon'}\eta) \\ & = & (\dot{(b\,\tau')}\,a\,\upsilon'\,\dot{\eta}) + (\dot{\tau'}\,a\,b\,\dot{\upsilon'}\,\eta).\end{array}$$

Si ahora c es un punto en el interior de $a.\upsilon'$ entonces la subdivisión estelar $(a.\upsilon', c)$ transforma este último complejo en

$$(\dot{(b.\tau')}.c.\dot{(a.\upsilon')}.\dot{\eta}) + (\dot{\tau'}.a.b.\dot{\upsilon'}.\eta).$$

Notemos inmediatamente que esta expresión es simétrica respecto de τ y υ (y a y b); por lo tanto, la subdivisión $(b.\tau', d)(\tau, a)(\upsilon, b)$ para un d en el interior de $b.\tau'$ produce un complejo isomorfo a $(a.\upsilon', c)(\upsilon, b)(\tau, a)(\tau'\,\upsilon'\,\eta)$. Por lo comentado anteriormente, se tendrá que los $st(\tau'.\upsilon'.\eta, B)$ en cada caso resultarán también isomorfos (pues todos los starrings ocurren dentro de $\tau'\,\upsilon'\,\eta$). Deducimos entonces que

$$(b.\tau', d).C_1 = (b.\tau', d).(\tau, a)(\upsilon, b)B \simeq (a.\upsilon', c)(\upsilon, b).(\tau, a)B = (a.\upsilon', c)(\upsilon, b).sB$$

Se tiene entonces que sB difiere de C_1 por movimientos internos, por lo que resulta estrellable.

Si ahora el primero de los r movimientos de $B \sim sB$ es una soldadura que da lugar a B_1 entonces $B = (v, b)B_1$ para un simplex v en el interior de B_1. Intercambiando los roles de B y B_1 para el caso de un starring elemental sabemos que $sB_1 = (\tau, a)B_1$ difiere de $D_1 = (\tau, a)B = sB$ por movimientos internos (aquí D_1 cumple el papel de C_1). Como sB_1 es estrellable, también lo es sB. □

Lema 2.3.10. *Si una n-bola estelar B puede estrellarse entonces el cono $v.B$ puede estrellarse.*

Demostración. Supongamos que $B \sim u.\dot{B}$ por r movimientos internos. Hacemos inducción en r. Si $r = 0$ entonces $B = u.\dot{B}$ y $v.u.\dot{B}$ puede estrellarse vía una subdivisión estelar basada en un punto en el interior del 1-simplex $\{u, v\}$ (Figura 2.9). Supongamos entonces que el enunciado es cierto para cualquier n-bola estelar estrellable por menos de r movimientos internos. Si el primer movimiento es una soldadura $(\tau, a)^{-1}$ que lleva B a B_1 entonces la subdivisión estelar (τ, a) en $v.B_1$ da como resultado $v.B$. Como por inducción $v.B_1$ es estrellable, se sigue del Lema 2.3.9 que $v.B$ es estrellable.

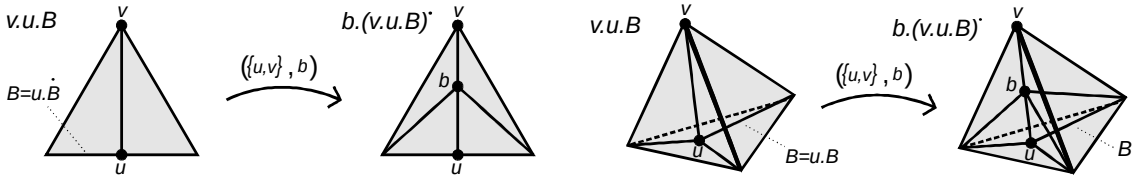

Figura 2.9: vuB puede estrellarse mediante un la subdivisión $(\{u, v\}, b)$.

Podemos suponer entonces que el primer movimiento es un starring (τ, a) que lleva B a B_1. Si Q_τ es el complejo complementario de τ tenemos

$$v.B = v.Q_\tau + v.\tau.lk(\tau, B).$$

Para un punto b en el interior de $v.\tau$ hacemos

$$v.\tau.lk(\tau, B) \overset{(v.\tau,b)}{\longrightarrow} b.(v.\tau)\dot{.}lk(\tau, B) = v.b.\dot{\tau}.lk(\tau, B) + b.\tau.lk(\tau, B) \tag{2.1}$$

de manera que obtenemos

$$v.B = v.Q_\tau + v.b.\dot{\tau}.lk(\tau, B) + b.\tau.lk(\tau, B)$$

Ahora, $v.Q_\tau + v.b.\dot{\tau}.lk(\tau, B)$ es una copia de $v.B_1$, que es estrellable por inducción (notar que podemos tomar b en el 1-simplex $\{a, v\}$). Luego, para algún vértice w se tiene

$$v.B \sim w.(v.\dot{B} + Q_\tau + b.\dot{\tau}.lk(\tau, B)) + b.\tau.lk(\tau, B)$$

por movimientos internos. Ahora, reemplazando v por w en (2.1) obtenemos

$$w.b.\dot{\tau}.lk(\tau, B) + b.\tau.lk(\tau, B) \sim w.\tau.lk(\tau, B)$$

también por movimientos internos. Por lo tanto,

$$v.B \sim w.v.\dot{B} + w.Q_\tau + w.\tau.lk(\tau, B) = w(v.\dot{B} + B) = w.(v.B)\dot{.}$$

por movimientos internos. □

Teorema 2.3.11. *Toda n-bola estelar B puede estrellarse.*

Demostración. Procedemos por inducción en la dimensión n de B. Si $n = 1$ el resultado es trivial. Supongamos entonces que $\dim(B) = n$ y que toda $(n-1)$-bola estelar puede estrellarse. Ahora procedemos por inducción en la cantidad r de movimientos estelares elementales que llevan B a Δ^n. Si $r = 0$ el resultado es nuevamente trivial. Supongamos entonces que toda n-bola estelar que es equivalente a Δ^n por menos de r movimientos es estrellable. Sea B_1 el resultado del primer movimiento estelar elemental en B. El resultado se obtiene por inducción directa si este primer movimiento es interno y por Lema 2.3.9 si el primer movimiento es una soldadura. Por lo tanto, podemos suponer que $B_1 = (\tau, a)B$ con $\tau \in \dot{B}$. Escribamos $\tau = v.\tau'$ de forma que $st(\tau, B) = v.\tau'.lk(\tau, B)$. Ahora, como $\tau'.lk(\tau, B)$ es una $(n-1)$-bola estelar (por Teorema 2.3.6) entonces, por hipótesis inductiva en la dimensión, se tiene que $st(\tau, B)$ es estrellable por Lema 2.3.10. Podemos entonces escribir

$$B \sim Q_\tau + w.(st(\tau, B))\dot{} = Q_\tau + w.(\dot{\tau}.lk(\tau, B) + \tau.lk(\tau, \dot{B})) \tag{2.2}$$

Pero $Q_\tau + w.\dot{\tau}.lk(\tau, B)$ es isomorfo a B_1. Luego, es estrellable (por hipótesis inductiva en r) y puede ser transformado por movimientos internos a $x.(Q_\tau + w.\dot{\tau}.lk(\tau, B))\dot{}$. Ahora, como

$$\begin{aligned}(Q_\tau + w.\dot{\tau}.lk(\tau, B))\dot{} &= (Q_\tau + w.\dot{\tau})\dot{}lk(\tau, B) + (Q_\tau + w.\dot{\tau})lk(\tau, \dot{B}) \\ &= (Q_\tau + w.\dot{\tau})\dot{}lk(\tau, B) + Q_\tau + w\dot{\tau}lk(\tau, \dot{B})\end{aligned}$$

entonces, reemplazando en (2.2) se tiene

$$B \sim x.(Q_\tau + w.\dot{\tau})\dot{}lk(\tau, B) + x.Q_\tau + x.w.\dot{\tau}lk(\tau, \dot{B}) + w.\tau.lk(\tau, \dot{B}). \tag{2.3}$$

La soldadura interna $(x\tau, w)$ lleva $x.w.\dot{\tau}lk(\tau, \dot{B}) + w.\tau.lk(\tau, \dot{B})$ a $x.\tau lk(\tau, \dot{B}) = x.st(\tau, \dot{B})$. Por lo tanto, (2.3) se transforma en

$$B \sim x.((Q_\tau + w.\dot{\tau})\dot{}lk(\tau, B) + Q_\tau + st(\tau, \dot{B})). \tag{2.4}$$

Notemos Q'_τ el complejo complementario a τ en $\dot{B}$. Si probamos que $Q'_\tau = (Q_\tau + w.\dot{\tau})\dot{}lk(\tau, B) + Q_\tau$ entonces tendremos que $(Q_\tau + w.\dot{\tau})\dot{}lk(\tau, B) + Q_\tau + st(\tau, \dot{B}) = \dot{B}$, y el resultado se sigue de (2.4). Pero si $\nu \in Q'_\tau$ entonces, en particular, $\nu \not\subseteq \tau$, por lo que $\nu \in Q_\tau \subset (Q_\tau + w.\dot{\tau})\dot{}lk(\tau, B) + Q_\tau$. Por otro lado, supongamos que $\nu \in (Q_\tau + w.\dot{\tau})\dot{}lk(\tau, B) + Q_\tau$. Si $\nu \in Q_\tau \subset Q'_\tau$, y no hay nada que probar. Sino, $\nu = \nu_1\nu_2$ con $\nu_1 \in (Q_\tau + w\dot{\tau})\dot{}$ y $\nu_2 \in lk(\tau, B)$. Pero como $\nu_1, \nu_2 \not\subseteq \tau$ entonces $\nu \not\subseteq \tau$ y, por lo tanto, $\nu \in Q'_\tau$. Esto concluye la demostración. □

Nos disponemos a continuación a demostrar los teoremas centrales de esta teoría. Un último lema es necesario antes de enunciarlos.

Lema 2.3.12. *Sea M una n-variedad estelar y sea B una $(n-1)$-bola estelar contenida en el borde de M. Si el cono $v.B$ interseca a M sólo en B entonces $v.B + M \sim M$.*

Demostración. Sabemos por el Teorema 2.3.11 que B es estrellable. Vamos a ver primeramente que cualquier movimiento estelar en B puede extenderse a M y a vB (por lo que podremos considerar a $x\dot{B} \subset M$ para cierto x). Por un lado, cualquier subdivisión estelar puede extenderse a una subdivisión estelar de M y vB (Proposición 1.3.11). Por otro lado, extender una soldadura interna a vB es directo (la misma soldadura original sirve). Extender una soldadura a M requiere un paso extra. Supongamos que la soldadura

es (τ, a) y que transforma B en B_1, de manera que $B = (\tau, a)B_1$. Estrellando la $(n-1)$-bola estelar $st(a, M)$ (Teorema 2.3.11) obtenemos una n-variedad estelar M' equivalente a M. De esta manera, M' contiene un cono de $st(a, B)$ que puede utilizarse para extender la soldadura $(\tau, a)^{-1}$ a todo M' (nuevamente, la misma soldadura sirve). Luego, hemos visto que cualquiera sea el movimiento estelar siempre podemos extenderlo a $v.B$ y M (o un complejo equivalente). Vamos entonces a suponer que B ya es un cono $x.\dot{B}$. Más aún, podemos suponer que M contiene un cono $y.B$. Para esto, simplemente estrellar la $(n-1)$-bola estelar $st(x, M)$ (Figura 2.10).

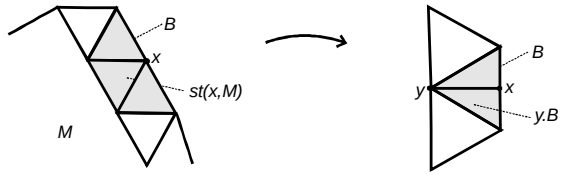

Figura 2.10: Estrellando $st(x, M)$.

Luego, como se tiene que

$$v.B + y.B = v.x.\dot{B} + y.x.\dot{B} \sim v.y.\dot{B} \cong y.x.\dot{B} = y.B,$$

donde la equivalencia estelar viene dada por la soldadura $(B, x)^{-1}$ (Figura 2.11), se sigue que $v.B + M \sim M$.

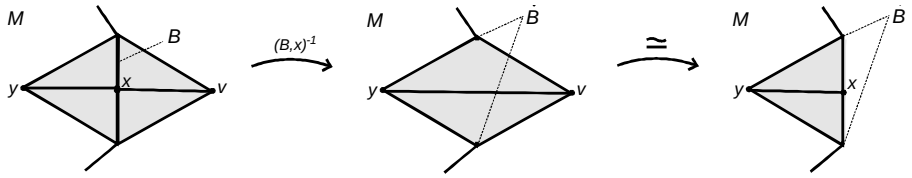

Figura 2.11: La soldadura $(B, x)^{-1}$ y el último isomorfismo.

□

Llegamos así al primer teorema fuerte del capítulo. Contesta afirmativamente en el contexto de los complejos simpliciales la idea intuitiva que si a una esfera se le remueve una bola el resultado vuelve a ser una bola. Este resultado se debe a M. H. A. Newman.

Teorema 2.3.13. *Sea S una n-esfera estelar que contiene una n-bola estelar B. Entonces, el complejo complementario a B en S es una n-bola estelar.*

Demostración. Asumamos inductivamente que el teorema es cierto para $(n-1)$-bolas estelares (siendo el caso $n = 1$ trivial). Notemos que en particular se tendrá que el complejo complementario a B en S es una n-variedad estelar. En efecto, sea Q dicho complejo y sea $v \in Q$ un vértice. Si $v \notin \dot{Q}$ entonces $lk(v, Q) = lk(v, S)$ que es una $(n-1)$-esfera estelar. Si $v \in \dot{Q}$ entonces $lk(v, Q) = lk(v, S) - lk(v, B)$ que es una $(n-1)$-bola estelar por hipótesis inductiva (pues $lk(v, S)$ es una $(n-1)$-esfera estelar y $lk(v, B)$ es una $(n-1)$-bola estelar pues $v \in \dot{B}$).

Ahora, como por el Teorema 2.3.11 B es estrellable es suficiente probar el resultado cuando B es el star de un vértice en S. Sea $S \sim \dot{\Delta}^{n+1}$ por r movimientos estelares y

asumamos inductivamente que el resultado es cierto para menor de r movimientos (el caso $r = 0$ es fácil de ver; sale, por ejemplo, como corolario de la Proposición 3.2.9).

Supongamos que el primer movimiento es un starring $S \xrightarrow{(\tau,a)} S_1$ y sea $v \in S$ un vértice. Sea Q el complejo complementario a $st(v, S)$ en S y Q_1 el complejo complementario a $st(v, S_1)$ en S_1. Si $v \notin \tau$ entonces $Q_1 = (\tau, a)Q$, por lo que $Q_1 \sim Q$. Si $v \in \tau$, sea τ' tal que $\tau = v.\tau'$. Luego, $Q + a.\tau'.lk(\tau, S) = Q_1$ (Figura 2.12). Como Q es una n-variedad estelar que contiene a la $(n-1)$-bola estelar $\tau'.lk(\tau, S)$ en su borde entonces, por Lema 2.3.12, se tiene que $Q \sim Q_1$. En cualquier caso, podemos aplicar la hipótesis inductiva en r y hallar que Q_1 es una n-bola estelar. Por lo tanto, también lo es Q.

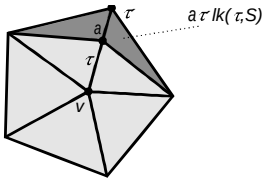

Figura 2.12: El caso $v \in \tau$.

Supongamos ahora que el primer movimiento es una soldadura $S \xrightarrow{(\tau,a)^{-1}} S_1$. Si $v \neq a$ entonces $v \in S_1$, por lo que $Q \sim Q_1$ por el mismo argumento anterior, y Q resulta una n-bola estelar. Si $v = a$ entonces Q coincide con el complemento de $st(\tau, S_1)$ en S_1 (pues $a \in \tau^\circ$). Sea x un vértice cualquiera de τ y sea τ' tal que $\tau = x.\tau'$. Sea Q_1' el complemento de $st(x, S_1)$ en S_1 (notar que $Q_1 \subset Q$). Por inducción en r, Q_1' es una n-bola estelar (pues $S_1 \sim \dot{\Delta}^{n+1}$ en $r-1$ movimientos). Además, $\dot{Q}_1'$ contiene la $(n-1)$-bola estelar $\tau'.lk(\tau, S_1)$. Si T es el complemento de $\tau'.lk(\tau, S_1)$ en $\dot{Q}_1'$ entonces T resulta un $(n-1)$-bola estelar por hipótesis inductiva en n (notar que T está contenido en el complemento de $st(\tau, S_1)$ en S_1, que es Q). Notemos finalmente que $Q = Q_1' + x.T$ pues si $\sigma \in Q - Q_1'$ entonces $\sigma \in st(x, S_1) - lk(x, S_1)$ (esto es, $x \in \sigma$). Como la otra igualdad ya había sido establecida, Q resulta una bola estelar por Lema 2.3.12. □

El siguiente teorema, debido a J.W. Alexander, es central en el desarrollo de la teoría de colapsabilidad geométrica de complejos simpliciales y en nuestro estudio de los colapsos completos en n-variedades combinatorias. Junto con el Teorema 2.3.15 que determina la equivalencia entre la teoría estelar y combinatoria, conforman dos de los pilares más importantes de este trabajo.

Teorema 2.3.14. *Sea M un n-variedad estelar y sea B una n-bola estelar. Supongamos que $M \cap B = \dot{M} \cap \dot{B}$ y que esta intersección es una $(n-1)$-bola estelar B'. Entonces $M + B \sim M$.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.11 podemos asumir que B es un cono $x.\dot{B}$. Sea Q el complejo complementario a B' en $\dot{B}$. Entonces Q resulta una $(n-1)$-bola estelar por Teorema 2.3.13 y, por lo tanto, puede estrellarse. Sea entonces $Q = y\dot{Q} = y\dot{B}'$. Podemos extender los movimientos elementales del starring $Q \sim y\dot{Q}$ al cono $x.Q$ (utilizando los mismos starrings y soldaduras). Deducimos entonces que

$$xQ \sim xy\dot{Q} \sim yx\dot{B}'. \tag{2.5}$$

Por lo tanto,

$$M + B \sim M + xB' + yx\dot{B}'.$$

Si utilizamos el Lema 2.3.12 para el cono xB' y la variedad estelar M y luego lo volvemos a usar para el cono $xy\dot{B}'$ y la variedad estelar $M + xB'$, obtenemos el resultado deseado.

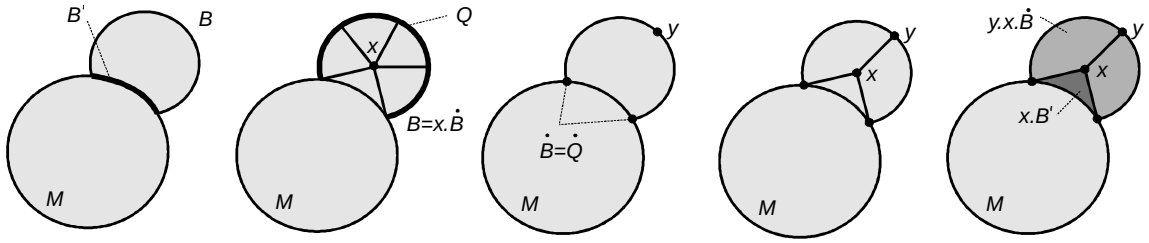

Figura 2.13: Demostración del Teorema 2.3.14.

□

Teorema 2.3.15. *Si K y L son complejos simpliciales finitos, entonces $K \sim L$ si, y sólo si, $K \simeq_{PL} L$.*

Solo demostraremos la primera implicación de este resultado pues es el necesario para continuar con el desarrollo de nuestro trabajo. La implicación recíproca es mucho más técnica y puede consultarse en [Gla].

Demostración parcial. Supongamos que $K \sim L$ y sea r la cantidad de movimientos estelares en dicha equivalencia. Si $r = 0$ entonces $K = L$ y el resultado es trivial. Supongamos el resultado verdadero para todas las equivalencias $K \sim L$ de menos de r movimientos. Factoricemos $K \to L$ como $K \overset{1mov.}{\longrightarrow} K_1 \overset{r-1mov.}{\longrightarrow} L$. Entonces, ya sea que el primer movimiento sea un starring o una soldadura se tiene que $K \simeq_{PL} K_1$ pues $\sigma K = K_1$ o $K = \sigma' K_1$. Por otro lado, por hipótesis inductiva se tiene $K_1 \simeq_{PL} L$. Luego $K \simeq_{PL} L$. □

Como consecuencia del teorema precedente hallamos que las bolas, esferas y variedades combinatorias son lo mismo que las bolas, esferas y variedades estelares. En particular, todos los resultados sobre las variedades estelares son válidos para la teoría de variedades combinatorias (y viceversa). En particular, las variedades estelares son pseudovariedades.

Capítulo 3

Colapsabilidad

La teoría de homotopía se encarga de clasificar a los espacios topológicos según se puedan deformar unos en otros. Cuando existe una tal deformación se la llama equivalencia homotópica y se dice que los espacios poseen el mismo tipo homotópico. La equivalencia homotópica de los espacios topológicos es uno de los invariantes más importantes de la Topología.

En la categoría de complejos simpliciales existe una teoría de deformación que da lugar a una relación de equivalencia entre los complejos de manera que los poliedros asociados a complejos simpliciales equivalentes tienen el mismo tipo homotópico. Esta teoría está fundamentada en los conceptos de *colapso* y *expansión* de símplices y el invariante topológico que determinan en los poliedros se llama *tipo homotópico simple*.

En la primera parte de este capítulo desarrollamos la teoría básica de colapsabilidad para complejos simpliciales y mostramos que esta relación es más fuerte que la equivalencia homotópica entre los espacios topológicos correspondientes. En la segunda parte enfocaremos la atención a la teoría de colapsabilidad en variedades combinatorias introduciendo el concepto de *colapso completo* que nos llevará al teorema principal de la primer parte de esta tesis.

3.1. Colapsos simpliciales

Definición 3.1.1. Sea K un complejo simplicial y $\tau \in K$ un simplex. Decimos que una cara propia σ de τ es una *cara libre* si σ no es cara de ningún otro simplex de K.

Notar que si $\sigma < \tau$ es cara libre entonces $\sigma \prec \tau$ (de lo contrario sería cara de una cara inmediata de τ). Además, un simplex con una cara libre es necesariamente maximal. Podemos deducir entonces que si $\sigma \prec \tau$ es una cara libre en K entonces $K - \{\tau, \sigma\}$ es un subcomplejo de K.

Definición 3.1.2. Sea $\sigma \prec \tau$ una cara libre en K y $L = K - \{\tau, \sigma\}$. La operación que transforma K en L se llama *colapso simplicial elemental* y se denota $K \searrow^e L$. Notar que, en este caso, si escribimos $\tau = v\sigma$ para un cierto vértice $v \in K$ entonces se tiene $L \cap \tau = v\dot{\sigma}$ y $K = L + \tau$.

En pocas palabras, lo que estamos haciendo cuando realizamos un colapso simplicial elemental es remover un simplex maximal junto con una cara libre de este simplex en el complejo. Es inmediato el hecho que al realizar un colapso simplicial elemental no modificamos el tipo homotópico del poliedro asociado. Más precisamente,

Proposición 3.1.3. *Si $K \searrow^e L$ entonces $|L| \subset |K|$ es un retracto por deformación fuerte.*

La idea de la demostración es deformar $|K|$ en $|L| = |K - \{\tau, \sigma\}|$ llevando τ a $v.\dot{\sigma}$ *empujando* desde la cara libre σ.

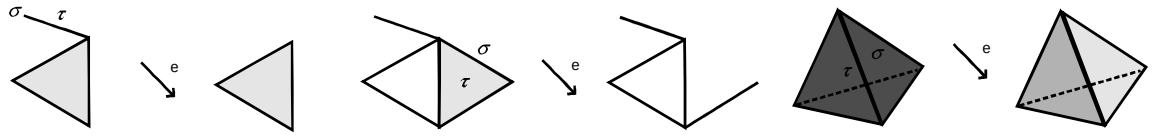

Figura 3.1: Colapsos simpliciales elementales.

La operación opuesta de ir de L a K, denotada $L \nearrow^e K$, se llama una *expansión simplicial elemental*. Esto es, $L \searrow^e K$ si, y sólo si, $L \nearrow^e K$.

Una sucesión finita de colapsos simpliciales elementales $K \searrow^e K_1 \searrow^e ... \searrow^e K_n = L$ se llama un *colapso simplicial* y se lo nota $K \searrow L$. En este caso diremos que K colapsa (simplicialmente) a L o que L se expande a K (notado $L \nearrow K$). En particular, si K colapsa a un vértice $v \in K$ decimos que K es colapsable y lo notamos $K \searrow 0$.

Ejemplo 3.1.4. $\Delta^n \searrow 0$. En la Figura 3.2 se puede ver el caso $n = 2$.

Ejemplo 3.1.5. Cualquiera sea el complejo K, el cono vK es colapsable. Para ver esto comencemos colapsando los símplices de dimensiones máximas primero (i.e., si $\tau \in K$ es un simplex de dimensión máxima en K entonces en el simplex $v\tau \in vK$, τ es una cara libre y $v\tau \searrow v\dot{\tau}$). Esto deja un cono sobre un complejo de dimensión menor. Repitiendo el argumento de recién hallamos $vK \searrow v$.

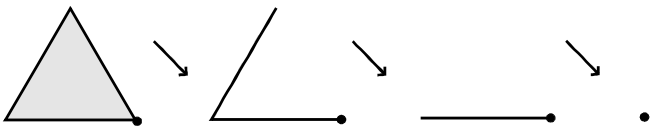

Figura 3.2: Δ^2 colapsando a un vértice.

Ejemplo 3.1.6. Si $\sigma \in K$ y $v \in \sigma$ entonces $\sigma K \searrow vK$ por el Ejemplo 3.1.5 y un argumento inductivo.

Observación 3.1.7. Supongamos que tenemos un colapso $K \searrow_e K - \{\tau, \sigma\} \searrow_e K - \{\tau, \sigma, \tau', \sigma'\}$ y que $dim(\tau') > dim(\tau)$. Afirmamos que σ' es cara libre de τ' en K. En efecto, si $\sigma' \prec \tau''$, como σ' es cara libre de τ' en $K - \{\tau, \sigma\}$ entonces debe ser $\tau'' = \sigma$ o $\tau'' = \tau$. Pero por dimensión la única posibilidad es $\tau'' = \tau'$. Luego, podemos colapsar primero el par $\{\tau', \sigma'\}$ y luego el $\{\tau, \sigma\}$. Se ve, por lo tanto, que siempre podemos reordenar el orden de los colapsos elementales para que primero se colapsen los símplices de dimensiones mayores.

De la Proposición 3.1.3 sabemos que si $K \searrow 0$ entonces $|K|$ es un espacio topológico contráctil. Sucede que para los grafos estos conceptos son equivalentes. Antes de probar este resultado probamos

Proposición 3.1.8. *Un árbol finito T colapsa a cualquiera de sus vértices.*

Demostración. Hacemos inducción en la cantidad de aristas de T. Si T tiene una arista el resultado es inmediato. Si ahora T tiene r aristas sea $v \in T$ un vértice cualquiera. Tomemos una hoja $w \neq v$. Si $w \prec \sigma$ entonces es cara libre de σ por ser el único 1-simplex que lo contiene. Luego, $T' = T - \{\sigma, w\}$ es un árbol que contiene a v y tiene $r - 1$ aristas. El resultado se sigue por inducción. □

Proposición 3.1.9. *Un 1-complejo simplicial conexo K es colapsable si, y sólo si, $|K|$ es contráctil.*

Demostración. Si $|K|$ es contráctil entonces no puede tener curvas cerradas simples; luego K es un árbol, que resulta colapsable. Por otro lado, si $K \searrow 0$ entonces algún vértice de K es un retracto por deformación fuerte de $|K|$. Luego $|K|$ es contráctil. □

En particular, un grafo es colapsable si, y sólo si, es un árbol.

Corolario 3.1.10. *Un complejo simplicial colapsable colapsa a cualquiera de sus vértices.*

Demostración. Reordenemos los colapsos de $K \searrow v$ de manera que realicemos los colapsos elementales en orden decreciente según la dimensión. Por lo tanto, tenemos que $K \searrow T$ donde T es un subcomplejo de K de dimensión 1, tiene todos los vértices de K y es colapsable. Luego, T es un árbol y el resultado se sigue de la Proposición 3.1.8. □

Para complejos de dimensión mayor a 1 la contractibilidad de $|K|$ no implica la colapsabilidad K. Quizá los dos contraejemplos más famosos de este tema son los dados en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 3.1.11 (Dunce Hat). El poliedro 2-dimensional D conocido como *Dunce Hat* es el complejo formado de la subdivisión de un 2-simplex identificando los 1-símplices del borde orientados como marca la Figura 3.3. Se puede probar que D es contráctil notando que es un retracto por deformación de un cubo. De hecho, no es difícil ver que toda curva en D puede deformarse a un punto. D no es colapsable pues ninguna triangulación de D tiene 1-símplices libres.

Figura 3.3: Dunce hat (identificar los 1-símplices siguiendo en la dirección establecida por las flechas). A la derecha, una triangulación del Dunce hat de 8 vértices y 17 2-símplices (identificar los vértices (y los 1-símplices) con el mismo número).

Ejemplo 3.1.12 (La casa de dos habitaciones de Bing). La manera más sencilla de describir este 2-complejo es mediante la ilustración de la Figura 3.4. Aquí hemos removido un disco abierto de la base de la casa, un disco abierto del techo, dos discos abiertos del primer piso y hemos agregado dos tubos y dos paredes. Notar que para ingresar a la habitación superior de la casa debemos hacerlo por el tubo de abajo y para ingresar a la habitación inferior, por el tubo de arriba. Este complejo es fácilmente triangulable por un complejo simplicial finito que no es colapsable al no tener 1-símplices libres. Sin embargo, este poliedro es contráctil siendo un retracto por deformación de un cubo.

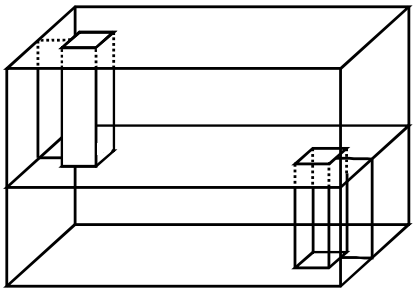

Figura 3.4: La casa de dos habitaciones de Bing

El estudio de 2-complejos contráctiles no colapsables conduce a muchos resultados interesantes en la topología combinatoria y está relacionado con muchos interrogantes no resueltos aún. Uno de los problemas abiertos más notables de esta rama de la topología es la *Conjetura de Zeeman* que afirma que si K es un 2-complejo contráctil entonces $K \times I \searrow 0$ (aquí el producto debe tomarse como producto topológico). Propuesta por Erik C. Zeeman en 1964 [Zee2], esta conjetura fue probada verdadera para la clase de *special polyhedra* de dimensión 2 [GR], pero su veracidad en el caso general permanece aún un misterio. Una prueba de las repercusiones de la conjetura de Zeeman es el hecho que implica la conjetura (teorema) de Poincaré, uno de los problemas más importantes de la matemática.

Nota (Conjetura de Poincaré). La conjetura de Poincaré afirma que toda 3-variedad sin borde, compacta y simplemente conexa es homeomorfa a la 3-esfera topológica S^3. Esta conjetura fue propuesta por Henry Poincaré en 1904 y resuelta por Grigory Perelman en 2002.

Cuatro años antes de la formulación definitiva de la conjetura, Poincaré primero conjeturó que toda variedad combinatoria compacta con la homología de una 3-esfera debía ser S^3, pero él mismo construyó un contraejemplo y tuvo que fortalecer su formulación requiriendo la simple conexión.

La conjetura de Poincaré probó ser un reto difícil desde su proposición y su estudio ha conducido no sólo a una gran cantidad de demostraciones fallidas, sino también a una marcada profundización en el entendimiento de la topología de las variedades.

A fin de 1950 importantes progresos tuvieron lugar con el descubrimiento que las variedades de dimensiones altas respondían a propiedades que las hacían más fáciles de trabajar que las 3-variedades. Una conjetura generalizada fue establecida bajo el interrogante de si una n-variedad que fuera homotópicamente una n-esfera era topológicamente una n-esfera. Stephen Smale presentó una demostración de la Conjetura de Poincaré para $n \geq 7$ en 1960. Poco tiempo después John Stallings también produjo una demostración para $n \geq 7$, utilizando métodos completamente diferentes, que luego Zeeman extendió para los casos $n = 5$ y $n = 6$. Subsecuentemente, Smale extendió su demostración al caso $n \geq 5$ [Sma, Zee1].

La solución del caso 4-dimensional llegó veinte años más tarde con el trabajo de Michael Freedman [Fre]. En este caso, los métodos diferenciales usados por Smale y Wallace (quien también había presentado una demostración por medio de argumentos similares a los de Smale) y los métodos lineales usados por Stallings y Zeeman no funcionan en absoluto. Freedman utilizó métodos no diferenciales, no sólo para probar la conjetura de Poincaré 4-dimensional, sino también para proveer una clasificación completa de todas las 4-variedades cerradas y simplemente conexas. Esto le valió a Freedman la medalla Fields en 1986.

La conjetura de Poincaré original fue finalmente probada por Grigory Perelman en 2002 como un caso especial de la demostración de una conjetura más general: la *Conjetura de Geometrización de Thruston*. En el caso 2-dimensional, cada superficie suave compacta admite una estructura geométrica. William Thurston conjeturó en 1983 que algo similar es cierto para dimensión 3. Esta conjetura afirma que toda 3-variedad compacta y orientable puede cortarse a lo largo de 2-esferas y toros de manera que se descompone en piezas esencialmente únicas, cada una con una estructura geométrica simple. Usando métodos de la geometría Riemanniana y siguiendo el programa de Richard Hamilton sobre flujo de Ricci, Perelman presentó una demostración de la conjetura de elliptización de Thurston, una generalización de la conjetura de Poincaré.

Como referencia de esta nota podemos citar a [Mil2] y [Rol].

Definición 3.1.13. Sean K y L dos complejos simpliciales. Decimos que K y L tienen el mismo *tipo homotópico simple* si existe una sucesión de complejos simpliciales

$$K = K_0, K_1, ..., K_r = L$$

tales que para cada $i = 0, ..., r-1$ se tiene que $K_i \nearrow K_{i+1}$ o $K_i \searrow K_{i+1}$.

De acuerdo a la Proposición 3.1.3 se tiene que si K y L tienen el mismo tipo homotópico simple entonces $|K|$ y $|L|$ son homotópicamente equivalentes. La vuelta no es cierta, aunque este resultado es difícil de ver. Por ejemplo, si bien la casa con dos habitaciones de Bing H no es colapsable, se puede probar que $H \nearrow \Delta^2 \times I \searrow *$, por lo que H tiene el mismo tipo homotópico simple que el singleton. J. H. C. Whitehead resolvió este interrogante introduciendo un invariante conocido hoy en día como el *Grupo de Whitehead* y que depende solamente del grupo fundamental del poliedro. Este grupo mide exactamente la obstrucción para que dos poliedros homotópicamente equivalentes tengan el mismo tipo homotópico simple.

La teoría de homotopía simple fue desarrollada por J. H. C. Whitehead en [Whi1, Whi2, Whi3] y se ha convertido en un pilar fundamental del desarrollo de la topología lineal a trozos. Whitehead fue uno de los matemáticos más influyente en el desarrollo de la topología algebraica. En su *Combinatorial homotopy* de 1949 Whitehead introdujo la noción de CW-complejo, una clase de espacios topológicos que llegó a convertirse en uno de los protagonistas centrales entre los objetos de estudio de la topología algebraica.

Para cerrar la sección exhibimos a continuación unos resultados acerca del comportamiento de los colapsos (y expansiones) simpliciales respecto de las subdivisiones del complejo.

Lema 3.1.14. *Supongamos que $K \searrow L$. Entonces para cualquier αL existe βK tal que $\beta K \searrow \alpha L$.*

Demostración. Hacemos la demostración por inducción en la cantidad de colapsos simpliciales elementales del colapso $K \searrow L$. Supongamos primero que $K = L + \tau$ con $\tau = a.\sigma$ y $L \cap \tau = a.\dot{\sigma}$. Como $a.\dot{\sigma} \subset L$ entonces tenemos inducida $\alpha(a.\dot{\sigma})$. Sea ahora $\pi : |\tau| \to |a.\dot{\sigma}|$ la proyección que lleva $\widehat{\sigma}$ a a. Notemos que $\pi^{-1}(\alpha(a.\dot{\sigma}))$ subdivide a $|\tau|$ por medio de la preimagen de los símplices de $\alpha(a.\dot{\sigma})$ (Figura 3.5). Se tiene entonces que $\pi^{-1}(\alpha(a.\dot{\sigma}))$ genera una subdivisión simplicial en σ y una subdivisión en celdas en τ. Ahora, algunas de estas celdas pueden ser ya símplices y las que no lo son resultan prismas con una base en un simplex de $a.\dot{\sigma}$ y la otra en un simplex de σ (ver nuevamente la figura). Podemos fácilmente subdividir estos prismas y obtener una subdivisión de τ coherente con

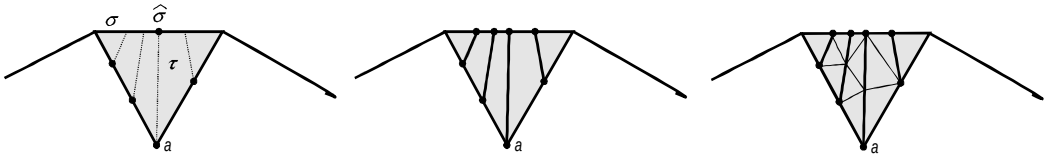

Figura 3.5: La proyección π y la subdivisión de τ.

α. Obtenemos entonces una subdivisión βK que colapsa simplicialmente a αL pues los prismas colapsan naturalmente al simplex de su base en $a.\dot{\sigma}$.

Supongamos ahora que el colapso $K \searrow L$ involucra más de dos colapsos simpliciales elementales. Factoricemos este colapso en $K \searrow_e K_1 \searrow L$. Por hipótesis inductiva podemos encontrar subdivisiones tales que $\beta_1 K_1 \searrow \alpha L$; utilizando el caso de un colapso elemental para los complejos K y $\beta_1 K_1$ encontramos $\beta K \searrow \beta_1 K_1$ de donde el colapso $\beta K \searrow \beta_1 K_1 \searrow \alpha L$ resuelve la cuestión. □

Con respecto de las subdivisiones estelares podemos enunciar la siguiente

Proposición 3.1.15. *Sea K un complejo simplicial.*

1. *Si $L \subset K$ es un subcomplejo tal que $K \searrow L$, entonces $sK \searrow sL$.*

2. *sK tiene el mismo tipo homotópico simple que K.*

En particular, el punto *(ii)* dice que $K^{(n)}$ y $\delta^{(n)}K$ tienen el mismo tipo homotópico simple que K. Esta proposición no será demostrada en esta tesis. La demostración del punto *(i)* puede hallarse en [Gla] y la del punto *(ii)* en [Sir].

Concluimos la sección con un resultado de colapsabilidad para las variedades combinatorias: la existencia de spines.

Proposición 3.1.16. *Sea M una n-variedad combinatoria tal que $\dot{M} \neq \emptyset$. Entonces $M \searrow L$, donde L es un subcomplejo de M de dimensión menor o igual a $n-1$.*

Demostración. Como M tiene borde podemos comenzar a colapsar los n-símplices de M en algún orden determinado. Si en algún momento este proceso se detiene y quedan n-símplices sin colapsar entonces el complejo N generado por los n-símplices sobrantes es un subcomplejo homogéneo y propio de M. Por Lema 2.2.4, $\dot{N} \neq \emptyset$, contradiciendo que no quedan más n-símplices colapsables. Luego, el proceso debe continuar hasta agotar todos los n-símplices y esto demuestra la proposición. □

En vista de este resultado, un subcomplejo de una variedad combinatoria M (con borde) tal que $M \searrow L$ y $\dim(L) < \dim(M)$ se llama un *spine* de M.

3.2. Colapsos geométricos y colapsos completos

En esta sección vamos a generalizar la noción de colapso simplicial de manera de permitir la remoción de subcomplejos enteros y no solamente de un simplex y una cara libre. Esto lo haremos en los casos en los que dichos subcomplejos tengan una estructura simplicial agradable en el contexto del complejo simplicial. Más precisamente, cuando se traten de bolas combinatorias que intersecan al complejo en una bola combinatoria de una dimensión menor.

Definición 3.2.1. Sea K un complejo simplicial. Si $K = K_0 + B^n$, donde K_0 es un subcomplejo de K y B^n es una n-bola combinatoria tal que $B^n \cap K_0 = B^{n-1} \subset \dot{B}^n$, entonces el paso de ir de K a K_0 se llama un *colapso geométrico elemental* y se nota $K \to_e K_0$.

Como en el caso de los colapsos simpliciales el movimiento inverso a $K \to_e K_0$ se llama *expansión geométrica elemental* y se nota $K \leftarrow_e K_0$. Una sucesión finita de colapsos geométricos elementales se llama un *colapso geométrico*. Notemos que no se requiere que la dimensión de las bolas combinatorias que se van removiendo en la sucesión de colapsos geométricos elementales permanezca fija (Figura 3.6).

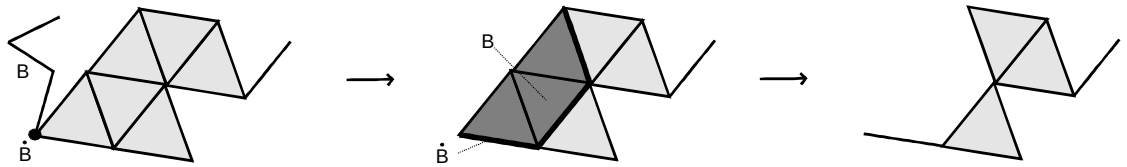

Figura 3.6: Dos colapsos geométricos involucrando bolas combinatorias de diferentes dimensiones.

Observación 3.2.2. Un colapso simplicial elemental es un colapso geométrico elemental.

Una relación en el otro sentido está contenida en el siguiente

Teorema 3.2.3. *Si $K \to L$ entonces existe una subdivisión (arbitraria) αK tal que $\alpha K \searrow \alpha L$.*

Demostración. La demostración es por inducción en el número de colapsos geométricos elementales del colapso $K \to L$. Factoricemos entonces $K \to L$ como $K \to_e K_1 \to L$. Escribamos $K = K_1 + B^n$ donde $K_1 \cap B^n = B^{n-1} \subset \dot{B}^n$. Ahora, como $B^n \simeq_{PL} \Delta^n$ deben existir subdivisiones tales que $\beta B^n = \gamma \Delta^n$. Por el Corolario 1.3.16 deben existir una subdivisión derivada δ y una subdivisión arbitraria γ_2 tales que $\gamma_2 \gamma \Delta^n = \delta \Delta^n$. Luego, $\gamma_2 \beta B^n = \delta \Delta^n$. Como $\delta \Delta^n \searrow \delta \Delta^{n-1}$ (por Proposición 3.1.15) se tiene entonces que $\gamma_2 \beta B^n \searrow \gamma_2 \beta B^{n-1}$. Notemos a la subdivisión $\gamma_2 \beta$ como β_2, de manera de poder escribir $\beta_2 B^n \searrow \beta_2 B^{n-1}$. Por la Proposición 1.3.11 podemos extender β_2 a todo K; o sea que queda definida $\beta_2 K_1$. Ahora, $\beta_2 K_1 \to \beta_2 L$ continúa siendo un colapso geométrico con una movida menos que el colapso original (simplemente subdividimos las celdas del colapso geométrico). Luego, por hipótesis inductiva, existe una subdivisión α_1 tal que $\alpha_1 \beta_2 K_1 \searrow \alpha_1 \beta_2 L$. Ahora, como $B^{n-1} \subset K_1$ queda también subdividido por $\alpha_1 \beta_2$ entonces, por el Lema 3.1.14 aplicado al colapso $\beta_2 B^n \searrow \beta_2 B^{n-1}$ y a la subdivisión α_1 de $\beta_2 B^{n-1}$, tenemos que existe una extensión de α_1 que verifica $\alpha_1 \beta_2 B^n \searrow \alpha_1 \beta_2 B^{n-1}$. Luego, recordando que $K = B^n + K_1$ podemos definir la subdivisión α buscada por $\alpha K = \alpha_1 \beta_2 B^n + \alpha_1 \beta_2 K_1$. Como $\alpha_1 \beta_2 B^n \searrow \alpha_1 \beta_2 B^{n-1} \subset \alpha_1 \beta_2 K_1$ y $\alpha_1 \beta_2 K_1 \searrow \alpha_1 \beta_2 L = \alpha L$ tenemos el resultado. □

Nota. Puede probarse de hecho que la subdivisión que convierte el colapso geométrico en simplicial puede tomarse estelar. La demostración de este resultado es un tanto más técnica que la del teorema anterior y puede hallarse en [Gla].

Definición 3.2.4. Si K colapsa geométricamente a una n-variedad combinatoria M y todos los colapsos geométricos elementales de $K \to M$ involucran n-bolas combinatorias entonces esta operación se llama *colapso regular*, en cuyo caso decimos que K *colapsa regularmente* a M.

Teorema 3.2.5. *Si $K \to M$ regularmente entonces $K \simeq_{PL} M$. En particular, K resulta también una n-variedad combinatoria.*

Demostración. Hacemos inducción en la cantidad de colapsos geométricos elementales de $K = K_0, K_1, ..., K_r = M$. Si $r = 0$ es directo. Supongamos $r > 0$. Por definición tenemos que $M = K_{r-1} + B^n$ donde $B^n \cap K_{r-1} = B^{n-1} \subset B^n$. Por el Teorema 2.3.14 y el Teorema 2.3.15, $K_{r-1} \simeq_{PL} M$. Como por hipótesis inductiva se tiene que $K \simeq_{PL} K_{r-1}$ entonces obtenemos el resultado deseado. □

A medio camino entre los colapsos simpliciales y los colapsos geométricos se encuentra la noción de colapso simplicial completo, que introduciremos a continuación. Notemos que si K es un complejo simplicial homogéneo y $K \searrow^e L$ entonces L no es necesariamente homogéneo. La idea de colapso completo surge para mantener la homogeneidad del complejo simplicial luego de realizar un colapso elemental.

Definición 3.2.6. Sea K un complejo de dimensión n y $\sigma \in K$ un n-simplex. Una *cara exclusiva de σ en K* es una cara de σ que no es cara de ningún otro n-simplex de K.

Por ejemplo, una $(n-1)$-cara de un n-simplex σ es exclusiva si, y sólo si, es libre. No sucede lo mismo con caras de dimensiones menores pues estas estarán siempre contenidas en alguna cara inmediata de σ pudiendo de todas formas no pertenecer a otro n-simplex del complejo.

Definición 3.2.7. Sea K un complejo homogéneo de dimensión n y $\sigma \in K$ un n-simplex. Decimos que σ es *completamente colapsable en K* si $K \searrow K_\sigma$, donde K_σ es el subcomplejo que se obtiene de K quitándole el n-simplex σ y todas sus caras exclusivas. En este caso, el movimiento de ir de K a K_σ lo llamamos *colapso simplicial completo* (o *fullcolapso*) y lo notamos $K \searrow^{full} K_\sigma$.

En otras palabras, un colapso simplicial completo en un n-complejo es una sucesión de colapsos simpliciales elementales donde todos los símplices colapsados consisten en caras exclusivas de un n-simplex dado. Podemos ver algunos ejemplos en la Figura 3.7.

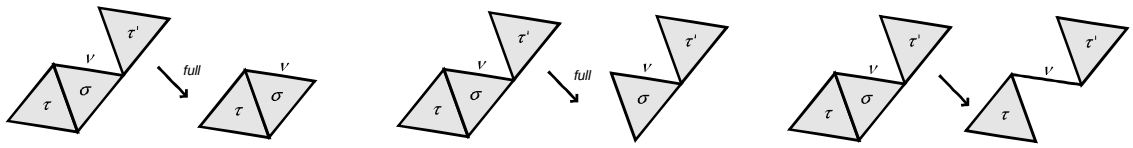

Figura 3.7: El simplex σ no es completamente colapsable pues no puede colapsarse con sus dos caras exclusivas. Los símplices τ y τ' si son complemente colapsables.

Observación 3.2.8. Es fácil de ver que un simplex que es completamente colapsable es colapsable (simplicialmente) y que si un n-simplex σ tiene un única $(n-1)$-cara libre ν en K entonces el colapso completo $K \searrow^{full} K_\sigma = K - \{\sigma, \nu\}$ coincide con el colapso simplicial $K \searrow K_\sigma = K - \{\sigma, \nu\}$.

Como comentamos, un colapso completo tiene la característica de ser una operación que transforma un complejo homogéneo en otro complejo homogéneo (además de mantener el tipo homotópico simple). En general este mismo es el caso para una sucesión de dichos colapsos. Uno podría preguntarse si vale una especie de vuelta en el siguiente sentido: si K es n-homogéneo y $L \subset K$ es n-homogéneo tal que $K \searrow L$ ¿existe una sucesión de colapsos

simpliciales completos $K \searrow^{full} K_1 \searrow^{full} ... \searrow^{full} K_{r-1} \searrow^{full} L$? Si además K y L son n-variedades combinatorias, ¿podemos lograr que los K_i sean n-variedades combinatorias también?

Intentar contestar este último interrogante será el objetivo del resto del capítulo (y de la primera parte de nuestra tesis). Nos centraremos en las variedades combinatorias pues veremos que poseen la propiedad de poder colapsar completamente cualquier simplex colapsable. Antes de continuar probamos un resultado central sobre los colapsos simpliciales completos: son colapsos geométricos. Necesitamos la siguiente

Proposición 3.2.9. *Todo n-subcomplejo homogéneo propio del borde de un $(n+1)$-simplex es una n-bola combinatoria.*

Demostración. Procedemos por inducción en la dimensión n (siendo trivial el caso $n = 0$). Sea entonces $n \geq 1$ y $N \subset \dot{\Delta}^{n+1}$ propio y n-homogéneo. Tomemos $\sigma \in \dot{\Delta}^{n+1} - N$ de dimensión n (existe uno pues N es propio) y llamemos v_σ al vértice opuesto a σ en Δ^{n+1} (notar que $v_\sigma \in N$). Sea R el $(n-1)$-complejo homogéneo generado por los $(n-1)$-símplices en la intersección de σ y N. Afirmamos que $N = v_\sigma.R$. En efecto, si S es un n-simplex en N sea S' la cara opuesta a v_σ en S, de manera que $S = v_\sigma.S'$. Simplemente notar que $S' \subset \sigma$, de donde $S' \subset \sigma \cap N$ y tenemos $S' \in R$. Recíprocamente, si ahora S es un n-simplex de $v_\sigma.R$ lo escribimos $S = v_\sigma.S'$. Como $S' \subset R$ entonces $S' \subset N$; luego $v_\sigma.S' \subset N$ (por homogeneidad de N). Hemos probado que $N = v_\sigma.R$ con $R \subset \dot{\sigma}$, $(n-1)$-homogéneo. Si $R = \dot{\sigma}$ entonces $N = v_\sigma.R$ resulta una n-bola combinatoria. Si $R \subset \dot{\sigma}$ es propio entonces R es una $(n-1)$-bola combinatoria por hipótesis inductiva, y nuevamente $N = v_\sigma.R$ resulta una n-bola combinatoria. □

Teorema 3.2.10. *Un colapso simplicial completo es un colapso geométrico. En particular, si K_σ es una n-variedad combinatoria, el fullcolapso $K \searrow^{full} K_\sigma$ resulta un colapso regular y, por lo tanto, $K \simeq_{PL} K_\sigma$.*

Demostración. Es inmediato de la Proposición 3.2.9. □

3.3. Colapsos completos en variedades combinatorias

La n-variedades combinatorias tienen la siguiente característica: los n-símplices colapsables son completamente colapsables. Como hemos visto en ejemplos anteriores, este no es siempre el caso para complejo homogéneos cualquiera, por lo que la regularidad de los vértices de las variedades combinatorias juega un papel importante en este contexto. El resultado sale como corolario de los siguientes dos lemas.

Lema 3.3.1. *Sea M una n-variedad combinatoria y $r \leq n-1$. Si un n-simplex τ tiene una r-cara no exclusiva es porque está contenida en una $(n-1)$-cara no exclusiva.*

Demostración. Sea σ una r-cara no exclusiva de τ ($r \leq n-2$). Sean $\tau_1, ..., \tau_s$ los n-símplices en M, distintos de τ, que contienen a σ. Sean $\nu_1, ..., \nu_s$ $(n-r-1)$-símplices tales que $\tau_i = \sigma.\nu_i$ y sea ν el $(n-r-1)$-simplex tal que $\tau = \sigma.\nu$. Entonces, $link(\sigma, M)$ es el complejo homogéneo generado por $\nu_1, ..., \nu_s, \nu$. Como M es variedad combinatoria entonces todos su simplex son regulares, por lo que $link(\sigma, M)$ debe ser una $(n-r-1)$-bola combinatoria o una $(n-r-1)$-esfera combinatoria. Cualquiera sea el caso $link(\sigma, M)$ resulta variedad combinatoria; más aún, resulta conexa pues $r \leq n-2$ implica $n-r-1 \geq 1$ que garantiza la conexión de la esfera. Podemos entonces unir ν_1 con ν por un camino

$\nu = \nu'_1, ..., \nu'_t = \nu_1$ de $(n-r-1)$-símplices adyacentes en $link(\sigma, M)$. Sea j el mínimo tal que $\nu'_j \neq \nu$. Entonces se tiene que ν es adyacente a $\nu'_j = \nu_{i_j}$. Pero entonces $\tau = \sigma.\nu$ es adyacente a $\tau_{i_j} = \sigma.\nu_{i_j}$. Luego, σ está contenida en la $(n-1)$-cara de τ que comparte con τ_{i_j}, que resulta entonces no exclusiva al pertenecer a dos n-símplices. □

El próximo lema puede encontrarse en [BM].

Lema 3.3.2. *Sea $L \subset K$ un subcomplejo, T un conjunto de símplices en $K - L$ y a un vértice de K que no está contenido en ningún simplex de T pero que verifica que $a.\tau$ es un simplex de K para cada $\tau \in T$. Supongamos que $L \cup \bigcup_{\tau \in T}\{\tau, a\tau\}$. Entonces $L \nearrow K$.*

Demostración. Enumeremos los elementos de T de manera de que para cada i, j con $i \leq j$ se tenga $dim(\tau_i) \leq dim(\tau_j)$. Definamos $K_i = L \cup \bigcup_{j=1}^{i}\{\tau_j, a\tau_j\}$ para $0 \leq i \leq n$. Sea $\tau \subsetneq \tau_i$. Si $\tau \in T$ entonces $\tau, a\tau \in K_{i-1}$, pues $dim(\tau) < dim(\tau_i)$. Si $\tau \notin T$, entonces $\tau, a\tau \in L \subset K_{i-1}$. Esto prueba que $a\tau_i \cap K_{i-1} = a\dot{\tau}_i$. Por inducción, K_i es un complejo simplicial para cada i y $K_{i-1} \nearrow K_i$. Luego, $L = K_0 \nearrow K_n = K$. □

Proposición 3.3.3. *Sea M una n-variedad combinatoria y $\tau \in M$ un n-simplex colapsable. Entonces τ es completamente colapsable en M.*

Demostración. Pongamos $\tau = a.\sigma$, con σ $(n-1)$-cara libre de τ. Sea $L = M_\tau$ y T el conjunto de caras exclusivas de τ que no contienen al vértice a (notar que $\sigma \in T$). No es difícil corroborar que estamos en las condiciones del Lema 3.3.2. El único hecho que quizá no se ve directamente es que $M = L \cup \bigcup_{\nu \in T}\{\nu, a.\nu\}$. Para ello notemos que si tenemos un simplex $\nu' \notin L$ entonces debe ser $\nu' = \tau$ o ser una cara exclusiva de τ en M (por definición de M_τ). En el primer caso, $\nu' \in \bigcup_{\nu \in T}\{\nu, a.\nu\}$ para $\nu' = \sigma$; para el segundo caso tenemos dos posibilidades:

- Si $a \notin \nu'$ entonces $\nu' \in T$ por lo que $\nu' \in \{\nu', a.\nu'\} \subset \bigcup_{\nu \in T}\{\nu, a.\nu\}$;
- Si $a \in \nu'$ y $\nu' = a.\nu''$ notemos que ν'' debe ser cara exclusiva de τ; en efecto, si no lo fuera $\nu'' \subset \widetilde{\sigma}$, para una $(n-1)$-cara no exclusiva $\widetilde{\sigma} \subset \tau$ (por Lema 3.3.1). Como $\widetilde{\sigma} \neq \sigma$ entonces $a \in \widetilde{\sigma}$, por lo que $\nu' = a.\nu'' \subset \widetilde{\sigma}$; y esto contradice que ν' sea cara exclusiva.

El resultado se sigue ahora de aplicar el Lema 3.3.2. □

Teniendo presente que un colapso completo en un complejo homogéneo deja como resultado otro complejo homogéneo nos preguntamos a continuación cuando un colapso completo en una variedad combinatoria deja como resultado otra variedad combinatoria. Como último objetivo de esta sección nos disponemos a establecer una condición suficiente para que esto ocurra. La siguiente proposición es de central importancia para ello.

Proposición 3.3.4. *Sea B una n-bola combinatoria y $\sigma \in B$ un n-simplex con un vértice exclusivo. Entonces B_σ es también una n-bola combinatoria.*

Demostración. Hacemos inducción en la dimensión n. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que $n \geq 2$. Escribamos $\sigma = v\nu$, donde v es el vértice exclusivo de σ. Vamos a probar que todos los vértices de B_σ son regulares. Sea entonces $w \in B_\sigma$ un vértice cualquiera. Si w no era un vértice de $\sigma \in B$ entonces $lk(w, B_\sigma) = lk(w, B)$. Luego, en este caso, w es regular. Si w pertenecía a σ entonces $lk(w, B)$ era necesariamente una $(n-1)$-bola combinatoria (Figura 3.8).

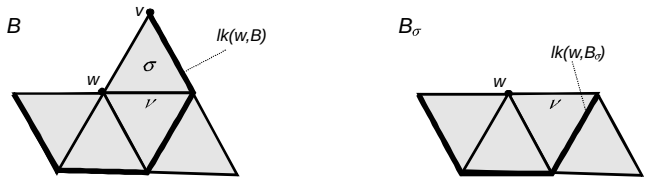

Figura 3.8: El link de w en B_σ.

Escribamos $\sigma = w\nu'$. Notemos entonces que $lk(w, B_\sigma) = lk(w, B)_{\nu'}$; esto es, para obtener $lk(w, B_\sigma)$ se le ha colapsado completamente el $(n-1)$-simplex ν'. Como además, v es un vértice exclusivo de ν' entonces, por hipótesis inductiva, $lk(w, B_\sigma)$ es una $(n-1)$-bola combinatoria. Luego, w resulta regular. Como todos los vértices de B_σ son regulares entonces B_σ resulta una n-variedad combinatoria. Por el Teorema 3.2.10, $B_\sigma \simeq_{PL} B$. Luego, B_σ es una n-bola combinatoria. □

Definición 3.3.5. Sea K un complejo simplicial homogéneo. Un *vértice interno* de un simplex $\sigma \in K$ es un vértice que no pertenece a $\dot{K}$.

Notemos que, en particular, un vértice interno de una variedad combinatoria tiene por link una esfera combinatoria.

Proposición 3.3.6. *Sea M una n-variedad combinatoria y $\sigma \in M$ un n-simplex colapsable que posee un vértice exclusivo o un vértice interno. Entonces M_σ es también una n-variedad combinatoria.*

Demostración. Supongamos que σ tiene un vértice exclusivo v. Sea $w \in M_\sigma$ un vértice cualquiera. Si $w \notin \sigma$ entonces $lk(w, M_\sigma) = lk(w, M)$ y, por lo tanto, resulta regular. Si $w \in \sigma$ entonces, de la misma manera que en la Proposición 3.3.4, $lk(w, M_\sigma)$ se obtiene de $lk(w, M)$ por medio de un colapso completo de un $(n-1)$-simplex con un vértice exclusivo. Como $lk(w, M)$ es una $(n-1)$-bola combinatoria entonces, nuevamente por Proposición 3.3.4, $lk(w, M_\sigma)$ es una $(n-1)$-bola combinatoria. Luego, w es regular y, por lo tanto, M_σ es n-variedad combinatoria.

Supongamos ahora que σ posee un vértice interno v y sea $w \in M_\sigma$ un vértice cualquiera. Si $w \neq v$ entonces w resulta regular por las mismas razones que en el caso anterior. Por otro lado, $lk(v, M_\sigma)$ se obtiene de $lk(v, M)$ removiéndole un $(n-1)$-simplex. Como $lk(v, M)$ es $(n-1)$-esfera combinatoria entonces $lk(v, M_\sigma)$ resulta una $(n-1)$-bola combinatoria (Teorema 2.3.13 y Teorema 2.3.15). Luego, en este caso, v también es regular. Esto concluye la demostración. □

3.4. Colapsabilidad en 2-variedades combinatorias y el teorema de Whitehead

Recordemos que nuestro objetivo era contestar la siguiente pregunta: Si K Y L son n-variedades combinatorias tales que $K \searrow L$ ¿es cierto que $K \searrow^{full} K_1 \searrow^{full} ... \searrow^{full} L$ manteniendo a los K_i n-variedades combinatorias? Veremos en esta sección que la respuesta es afirmativa en el caso 2-dimensional. Este teorema es uno de los resultados principales de esta tesis y conlleva como corolario un importante teorema de Whitehead sobre las variedades combinatorias colapsables para el caso 2-dimensional.

La ventaja de trabajar en dimensión 2 es que nos brinda la posibilidad de apoyarnos en características geométricas más fáciles de visualizar que en dimensiones mayores. Más aún, ciertas propiedades que estableceremos sólo pueden ser demostradas en esta dimensión. Será precisamente en estas ayudas geométricas que nuestra demostración del teorema principal podrá llevarse a cabo.

Lema 3.4.1. *Sea M una 2-variedad combinatoria colapsable. Entonces el orden de colapso de los 2-símplices de M puede ser escogido de manera arbitraria (mientras el simplex elegido sea colapsable en dicho momento).*

Demostración. Comencemos a colapsar 2-símplices en cualquier orden y supongamos que el proceso se traba. Notar que no puede detenerse en un complejo de dimensión 1 porque dicho complejo sería colapsable. Luego, debe trabarse en un subcomplejo L con algún 2-simplex σ. Sea N la pseudovariedad generada por todos los 2-símplices de L que pueden unirse por un camino de 2-símplices adyacentes a σ. Esta pseudovariedad no puede tener borde pues, de lo contrario, podríamos colapsar algun 2-simplex con una cara en el borde. Esto contradice el Corolario 2.2.5. □

Por lo visto en la última parte de la sección anterior si σ es un simplex de una 2-variedad combinatoria M que posee un vértice exclusivo o un vértice internos entonces M_σ resulta también una 2-variedad combinatoria. El siguiente resultado se encarga de estudiar el caso en el que esto no sucede y es el paso central de la demostración del teorema principal.

Teorema 3.4.2. *Sea M una 2-variedad combinatoria conexa y $L \subset M$ una 2-subvariedad combinatoria que se expande a M. Sea τ el primer 2-simplex en el colapso $M \searrow L$ y supongamos que M_τ no es una 2-variedad combinatoria. Entonces M_τ resulta la unión en un punto de dos 2-variedades combinatorias M' y M'' tales que $L \subset M'$, $M' \searrow L$ y $M'' \searrow 0$.*

Demostración. Como M_τ no es 2-variedad combinatoria entonces τ debe tener exactamente una 1-cara libre y el vértice opuesto a ella v no puede ser interno (Proposición 3.3.6). Llamemos τ' y τ'' a los dos 2-símplices adyacentes a τ; luego estamos en la situación que muestra la Figura 3.9.

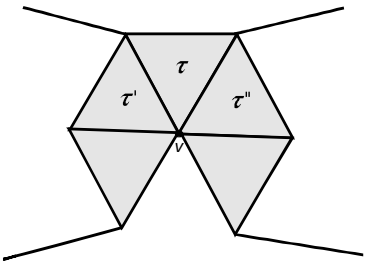

Figura 3.9: Situación inicial.

Sea M' el complejo generado por los 2-símplices de M_τ para los que existe una sucesión de 2-símplices adyacentes que los una con τ'. Análogamente definimos M'' (ver Figura 3.10). Es fácil ver que M' y M'' son de hecho 2-pseudovariedades. Supongamos por un momento que $M' \neq M''$. En este caso notemos que estas 2-pseudovariedades resultan 2-variedades combinatorias (corroborando la regularidad de los vértices). Además, $M' \cap M'' = \{v\}$ pues si existe otro vértice v' en la intersección podríamos unir un 2-simplex de

M' con uno de M'' vía una sucesión de 2-símplices adyacentes en $st(v', M)$, contradiciendo que $M' \neq M''$. Por otro lado, L no puede tener símplices en M' y M'' simultáneamente pues si unimos τ' con $\sigma' \in L$ y τ'' con $\sigma'' \in L$ con una sucesión de 2-símplices adyacentes entonces podemos unir τ' con τ'' por una tal sucesión (pues σ' se une con σ'' por ser L 2-variedad combinatoria conexa); y nuevamente contradecimos $M' \neq M''$. Luego L está contenido en una de estas dos 2-variedades combinatorias y podemos suponer que $L \subset M'$. Quedándonos entonces con los colapsos de $M \searrow L$ que involucran símplices de M'' podemos hallar un colapso $M'' \searrow 0$. Una vez logrado esto siguiendo con el resto de los colapsos de $M \searrow L$ podemos hallar $M' \searrow L$, lo que probaría el resultado. Luego, la demostración se reduce a mostrar que $M' \neq M''$.

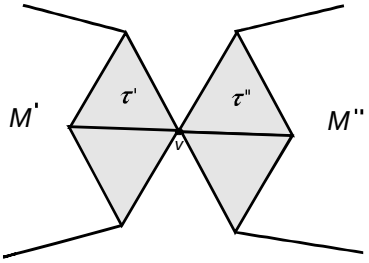

Figura 3.10: Las pseudovariedades M' y M''.

Supongamos que $M' = M''$. Fijemos primero un edge path que vamos a necesitar más adelante. Sea entonces $\tau' = e_0, ..., e_t = \sigma$ una sucesión de 2-símplices adyacentes entre τ' y $\sigma \in L$ y sea $\sigma = e_{t+1}, ..., e_{t+l} = \tau''$ una sucesión de 2-símplices adyacentes entre σ y τ''. Llamemos $s' \in \tau' \cap \tau$ y $s'' \in \tau'' \cap \tau$ a los vértices distintos de v. Usando las sucesiones de 2-símplices adyacentes recién consideradas construyámonos un edge path ξ que una s' con s'' pero que no pase por v (Figura 3.11). Fijado este edge path continuamos ahora con otras consideraciones.

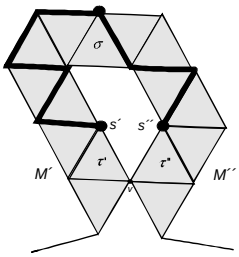

Figura 3.11: El edge path ξ.

Llamemos K al 2-complejo simplicial conformado por los 2-símplices de M_τ que poseen a v como vértice y sean K' y K'' las 2-subpseudovariedades de K dadas por $K' = K \cap M'$ y $K'' = K \cap M''$. Como $lk(v, M_\tau)$ no es una 1-bola, $M_\tau \searrow L$ y L es variedad combinatoria entonces L no tiene 2-símplices en común con K' o no tiene 2-símplices en común con K''. Supongamos que se trata de K''. Sea N el subcomplejo de M_τ que se obtiene al colapsar secuencialmente los 2-símplices de K'' empezando por $\tau''_0 = \tau''$, siguiendo con el único 2-simplex τ''_1 de K'' adyacente a él y, en general, continuando con el único τ''_{n+1} en el complejo resultante adyacente a τ''_n (Figura 3.12). De esta manera, lo único que permanece de K'' luego de estos colapsos es un 1-simplex $\{v, w''\}$ y una *pared* de 1-símplices opuestos

a v en los 2-símplices de K''. Ahora, como K'' no posee 2-símplices en L entonces $L \subset N$; más aún, es fácil ver que L es un retracto por deformación fuerte de N.

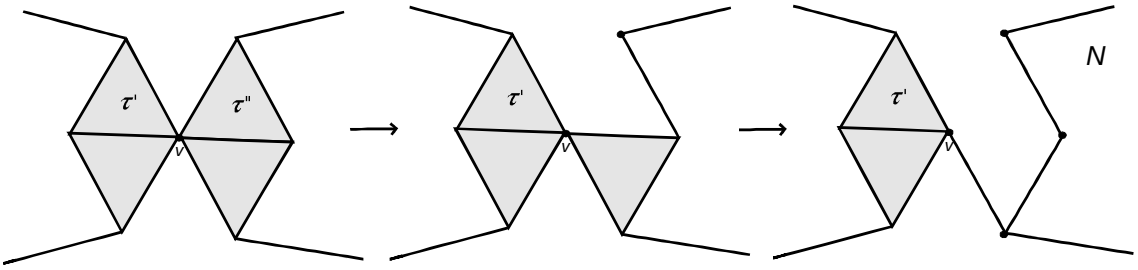

Figura 3.12: El subcomplejo N.

Retornando al edge path definido al principio notar que ξ está contenido en N. Extendamos ξ a $\overline{\xi}$ para que una s' con w'' continuando, luego de llegar a s'', por la *pared* antes mencionada (Figura 3.13). Sea finalmente el edge path cerrado $\mu = \{v, s'\}\overline{\xi}\{w'', v\}$. Notar que por construcción de ξ este resulta un edge path cerrado alrededor de $b \in \sigma \subset L$ (Figura 3.13).

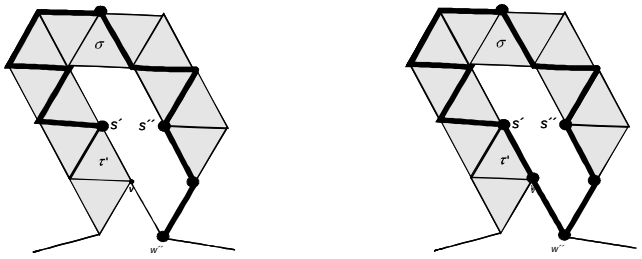

Figura 3.13: El edge path μ

Sea r la retracción de $L \subset N$. Entonces $r \circ |\mu|$ es un lazo (no necesariamente edge path) alrededor de b, contenido en L y homotópico a $|\mu|$. Ahora, por aproximación simplicial podemos subdividir a $I = [0, 1]$ para que $r \circ |\mu|$ pueda aproximarse por una función simplicial $\delta : \alpha I \to L$. En particular, $|\delta| \simeq r \circ |\mu| \simeq |\mu|$. Ahora, δ da lugar a un edge path cerrado alrededor de $b \in L$; este edge path debe ser equivalente (como edge path) a μ (pues $|\delta| \simeq |\mu|$). Pero por la naturaleza geométrica de la situación todo edge path equivalente a μ posee a $\{v, w''\}$ (pues no es posible "deshacerse"de él por equivalencias). Esto implicaría que $\{v, w''\}$ forma parte del edge path δ, lo cual no puede suceder pues δ está completamente contenido en L y $\{v, w''\} \notin L$. Esta contradicción provino de suponer que $M' = M''$ y se tiene el resultado buscado. □

Como consecuencia del Teorema 3.4.2 podemos demostrar el Teorema principal de nuestro capítulo.

Teorema 3.4.3. *Sea M una 2-variedad combinatoria y $L \subset M$ una 2-subvariedad tal que $M \searrow L$. Entonces existe una sucesión de fullcolapsos $M \searrow^{full} M_1 \searrow^{full} \ldots \searrow^{full} M_{r-1} \searrow^{full} L$ donde las M_i son 2-variedades combinatorias.*

Demostración. Hacemos inducción en la cantidad de 2-símplices de $M - L$. El caso $n = 1$ es inmediato. Sea entonces $n \geq 2$ y sea $\tau = v.\sigma$ el primer 2-simplex en el colapso $M \searrow L$.

Supongamos primero que M_τ es una 2-variedad combinatoria. Si $M \searrow M_\tau$ consiste en un colapso simplicial elemental (i.e., τ posee una única cara exclusiva en M) entonces es directo que $M_\tau \searrow L$. La (única) otra posibilidad es que

$$M \searrow M' = M - \{\tau, \sigma, \} \searrow M_\tau = M' - \{\sigma', \nu'\}.$$

Como σ' es cara exclusiva de τ entonces no interfiere en ningún colapso de $M \searrow L$, por lo que podemos intercalarla luego del primer colapso $M \searrow M'$ y luego continuar hasta L. En cualquier caso tenemos $M \searrow M_\tau \searrow L$ y aplicando hipótesis inductiva en $M \searrow M_\tau$ y en $M_\tau \searrow L$ hallamos nuestro resultado.

Por otro lado, si M_τ no es 2-variedad combinatoria entonces resulta la unión en un punto de dos 2-variedades combinatorias M' y M'' que verifican que $L \subset M'$, $M' \searrow L$ y $M'' \searrow 0$ (Proposición 3.4.2). Si llevamos a cabo el colapso de M'' para que termine en v obtenemos $M \searrow M_\tau \searrow M'$ y $M' \searrow L$. Aplicando la hipótesis inductiva a ambos colapsos concluimos la demostración. □

Corolario 3.4.4. *Si L es una 2-subvariedad combinatoria de una 2-variedad combinatoria M y $L \nearrow M$ entonces $M \to L$ regularmente. En particular, $M \simeq_{PL} L$.*

En su famoso paper de 1938, Whitehead introdujo la noción de *entorno regular* de un subcomplejo de una variedad combinatoria y probó, en su Teorema de Entornos Regulares, que dos entornos del mismo subcomplejo eran combinatoriamente equivalentes. Este resultado acarrea importantes consecuencias en la teoría de variedades combinatorias, uno de los cuales establece que toda n-variedad combinatoria colapsable es de hecho una n-bola combinatoria (es casualmente este resultado el que hace posible demostrar que la conjetura de Zeeman implica la conjetura de Poincaré). Como aplicación del teorema principal de esta sección deducimos el teorema de Whitehead para 2-variedades combinatorias colapsables. Antes, necesitamos el siguiente

Lema 3.4.5. *Sea M una 2-variedad combinatoria. Entonces $M \searrow 0$ si, y sólo si, $M \searrow \sigma$ para algún $\sigma \in M$.*

Demostración. La vuelta es trivial. Para la idea comenzar a colapsar todos los 2-símplices hasta quedarnos con uno, σ. Colapsar a continuación los 1-complejos que emergen de los vértices de σ hacia σ para obtener $M \searrow \sigma$. □

Teorema 3.4.6 (Whitehead)**.** *Una 2-variedad combinatoria colapsable es una 2-bola combinatoria.*

Demostración. Por Lema 3.4.5, $M \searrow \sigma$ para un 2-simplex $\sigma \in M$. Por Corolario 3.4.4, M es PL-isomorfo a σ. Luego, M es una 2-bola combinatoria. □

Juntando el Teorema 3.4.6 con el Teorema principal 3.4.3 podemos producir el siguiente resultado.

Teorema 3.4.7. *Una 2-bola combinatoria B puede colapsarse a un vértice v por medio de colapsos completos $B \searrow^{full} B_1 \searrow^{full} ... \searrow^{full} B_r \searrow^{full} v$ donde cada B_i es una 2-bola combinatoria.*

Demostración. Como toda bola combinatoria tiene borde entonces por la Proposición 3.1 B colapsa a un grafo que debe ser contráctil, luego colapsable. Por lo tanto, B es colapsable. Por el Teorema 3.4.3 existe una sucesión de 2-variedades combinatorias tales

que $B \searrow^{full} M_1 \searrow^{full} ... \searrow^{full} M_{r-1} \searrow^{full} \sigma$ para un $\sigma \in B$ (Lema 3.4.5). Como en particular cada uno de estas 2-variedades combinatorias $M_i \searrow \sigma \searrow 0$ entonces resultan, por el Teorema de Whitehead, 2-bolas combinatorias. Como en particular σ es una 2-bola combinatoria esto concluye la demostración. □

Como último resultado de la primera parte establecemos una proposición análoga al Teorema 3.4.2 para 2-variedades colapsables.

Proposición 3.4.8. *Sea M una 2-variedad combinatoria colapsable. Si τ es el primer 2-simplex en el colapso $M \searrow 0$ entonces M_τ es ó una 2-variedad combinatoria colapsable ó la unión en un punto de dos 2-variedades combinatorias colapsables.*

Demostración. Como $M \searrow 0$ entonces $M \searrow \sigma$ (Lema 3.4.5), que es una 2-subvariedad combinatoria propia. Si M_τ no es 2-variedad combinatoria entonces existen 2-variedades combinatorias $M', M'' \subset M$ con $M'' \searrow 0$ y $M' \searrow \sigma \searrow 0$ y tal que M_τ es la unión por un punto de ellas (Teorema 3.4.2). □

Capítulo 4

Teoría de Morse discreta

La teoría de Morse (clásica) fue desarrollada por M. Morse en los años 20 y es una de las más poderosas herramientas de la topología diferencial. Esta teoría provee una relación fundamental entre el análisis y la topología que acarrea grandes consecuencias en el estudio de las propiedades topológicas de las variedades diferenciales. Entre los resultados más importantes que fueron fruto de su maquinaria se cuenta el Teorema de h-cobordismo (que desprende como corolario la conjetura de Poincaré para $n \geq 5$), el Teorema de Periodicidad de Bott y el desarrollo de la K-teoría.

Sintéticamente, los teoremas principales de la teoría de Morse establecen la relación entre la topología de una variedad diferenciable y ciertas funciones diferenciables que pueden definirse sobre ella. Concretamente una función de Morse permite relacionar la variedad, salvo equivalencia homotópica, con un CW-complejo cuyas celdas quedan determinadas por los puntos críticos de la función. Esta fuerte conexión con los CW-complejos ha llevado a un marcado desarrollo de la teoría en el campo de la topología algebraica, introduciendo nuevos invariantes homológicos y modelando otros ya existentes. Para más información sobre la teoría de Morse clásica referimos al lector a [Mil1]

La *teoría de Morse combinatoria* fue desarrollada por R. Forman en la década del 90 como un análogo discreto de la teoría de Morse para variedades diferenciables [For1]. Delimitada al ámbito de los complejos celulares, esta teoría presenta resultados en el contexto discreto completamente análogos a los de la teoría clásica, permitiendo, en ciertos casos, establecer y demostrar la contracara combinatoria de teoremas de la geometría diferencial. Es un hecho destacable que la teoría de Morse combinatoria haya sido desarrollada, no como una teoría completamente nueva, sino extrayendo la esencia combinatoria de la teoría de Morse clásica.

Desde su introducción a fines el siglo pasado la teoría de Morse discreta ha dado lugar a una importante cantidad de trabajos vinculados al estudio de los complejos simpliciales, posets, teoría de homología y topología computacional; entre ellos podemos citar a [Koz1]. Parece, de esta forma, ir convirtiéndose en una herramienta muy útil (o, al menos, muy versátil) para muchos campos de aplicación. Una de las ventajas de la teoría de Morse discreta es su potencial utilidad y simplicidad para manipular deformaciones en complejos celulares. Es precisamente este punto el que se explotará para llevar a cabo el desarrollo de la teoría de espacios de deformaciones del capítulo próximo. Teniendo esto en cuenta desarrollamos en el presente capítulo las nociones básicas de la teoría de Morse combinatoria para complejos simpliciales finitos y estableceremos sus teoremas más importantes.

4.1. Campos vectoriales combinatorios

La teoría de Morse combinatoria se encarga de estudiar ciertas deformaciones topológicas que podemos llevar a cabo en la realización geométrica de un complejo simplicial K. Estas deformaciones consisten sintéticamente en empujar un simplex cerrado del poliedro $|K|$ desde una de sus caras inmediatas (de la exacta misma manera en que lo hace el retracto por deformación fuerte determinado por un colapso simplicial). La diferencia con la deformación provista por estos retractos reside en que la cara propia que empuja la deformación no es necesariamente libre. En este sentido, las deformaciones que intentamos estudiar son operaciones más generales que los colapsos simpliciales y pueden realizarse únicamente a niveles topológicos (ya que producen poliedros no necesariamente rígidos). La Figura 4.1 muestra algunos ejemplos de este tipo de deformaciones.

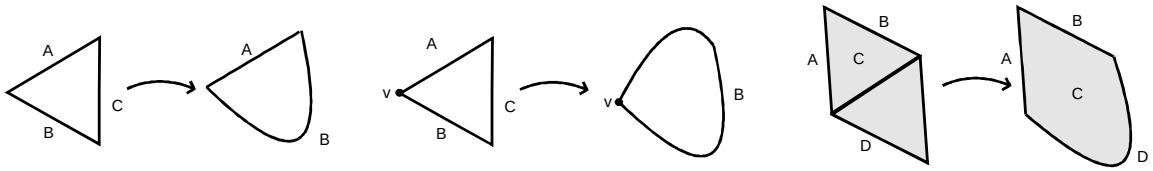

Figura 4.1: Ejemplo de deformaciones.

Nuestro interés en el estudio de este tipo particular de deformaciones no es caprichoso. Si K es un complejo simplicial finito, veremos que existe una colección $\{K_i\}$ de subcomplejos de K (llamados complejos de nivel) de manera que cada uno de estas deformaciones se corresponde con un colapso simplicial elemental $K_{i+1} \searrow K_i$ para cierto i.

La manera en que se llevan a cabo las deformaciones referidas puede representarse dibujando flechas sobre un esquema del complejo simplicial. Por ejemplo, la Figura 4.2 muestra como representar las deformaciones de la Figura 4.1. A grandes rasgos, lo que hacemos es ubicar una flecha con origen en un simplex σ y contenida en un simplex $\tau = v.\sigma$ si la deformación consiste en empujar desde σ hacia $v.\dot{\sigma}$.

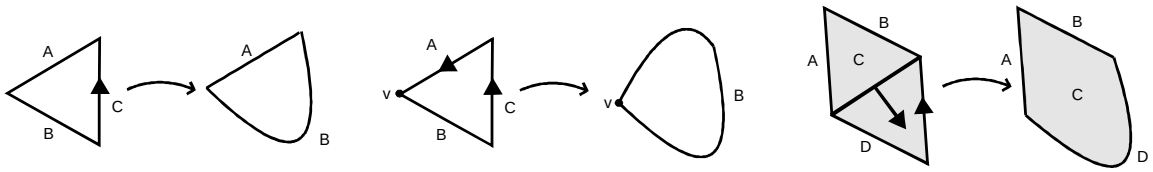

Figura 4.2: Codificación de las deformaciones con flechas.

Notemos que si ahora queremos partir de un esquema limpio de un complejo simplicial y dibujarle flechas de manera que representen deformaciones del tipo considerado entonces existen ciertas precauciones que debemos tener. Entre ellas podemos nombrar:

- Un mismo simplex no puede ser origen de más de una flecha.
- Un mismo simplex no puede contener más de una flecha.
- Un simplex no puede contener una flecha y ser origen de otra.

Es fácil corroborar que estos requisitos son obligatorios para que las deformaciones subyacentes estén bien definidas. Podría parecer que dichos requisitos son suficientes para

garantizar que el diagrama de flechas codifique nuestras deformaciones. Sin embargo, mirando la Figura 4.3 vemos que además debemos pedir:

- No debe haber *ciclos dirigidos* de flechas.

Veremos en las próximas secciones que estas propiedades son suficientes para garantizar que un diagrama de flechas sobre un esquema de un complejo simplicial representa las deformaciones consideradas por esta teoría. A continuación, vamos a formalizar nuestra esquematización de deformaciones vía flechas en el concepto de campos vectoriales combinatorios.

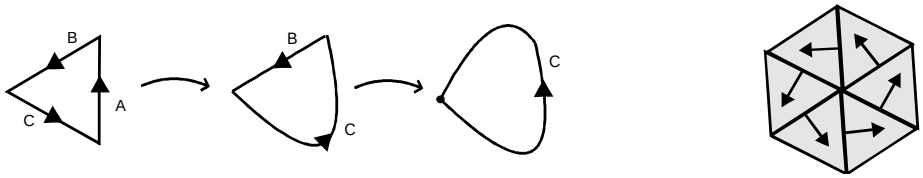

Figura 4.3: Diagrama con ciclos dirigidos de flechas.

Definición 4.1.1. Sea K un complejo simplicial finito. Un *campo vectorial combinatorio* sobre K es una aplicación $V : S_K \to S_K \cup \{0\}$ que verifica

(i) Si $V(\sigma) \neq 0$ entonces $\sigma \prec V(\sigma)$

(ii) Si $V(\sigma) = V(\sigma') \neq 0$ entonces $\sigma = \sigma'$

(iii) $V^2 = 0$.

Notemos inmediatamente que de (i) se tiene que $\dim(V(\sigma)) = \dim(\sigma) + 1$ y de (ii) que V es inyectivo en el conjunto de símplices de K del codominio (esto es, en $S_K \subset S_K \cup \{0\}$). En particular, esta propiedad puede escribirse equivalentemente como

(ii') $\sharp V^{-1}(\sigma) \leq 1$ para todo $\sigma \in K$.

Dado un campo vectorial combinatorio V sobre K y un simplex $\sigma \in K$ tal que $V(\sigma) \neq 0$, dibujemos una flecha de origen σ y destino $V(\sigma)$ en un esquema del complejo simplicial K. En este caso, (i) nos dice que σ debe ser una cara inmediata de $V(\sigma)$, (ii) que un mismo simplex no puede contener dos flechas y (iii) que un mismo simplex no puede contener una flecha y ser origen de otra (notar que el requisito que un mismo simplex no puede ser origen de dos flechas queda descartado por el carácter de aplicación de V).

De aquí se deduce que existen tres posibilidades disjuntas para un p-simplex $\sigma \in K$: $\sigma \in Im(V)$, $V(\sigma) \neq 0$ ó $V(\sigma) = 0$ pero $\sigma \notin Im(V)$. En este último caso, diremos que el p-simplex σ es un *punto crítico de índice* p de V (notar que corresponde al caso cuando σ no recibe ni emana flechas).

Notemos que la definición de campo vectorial combinatorio no descarta la posibilidad de existencia de *ciclos dirigidos* de flechas. Serán precisamente los campos que no contengan dichos ciclos los que resultarán gradientes de funciones de Morse combinatorias, nuestro objeto primordial de estudio. Antes de pasar a la próxima sección para definirlas, formalizamos la noción de ciclo dirigido de flechas en el contexto de los campos vectoriales combinatorios.

Definición 4.1.2. Sea K un complejo simplicial finito y V un campo vectorial combinatorio sobre K. Un *V-camino de índice p* es una sucesión de p-símplices

$$\gamma = \sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_r$$

tal que para todo $i = 0, ..., r-1$ se tiene $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$, $V(\sigma_i) \neq 0$ y $\sigma_{i+1} \prec V(\sigma_i)$.

Diremos que γ es *cerrado* si $\sigma_0 = \sigma_r$ y que es *no estacionario* si $r > 0$. Notar que la definición no pone condiciones sobre $V(\sigma_r)$.

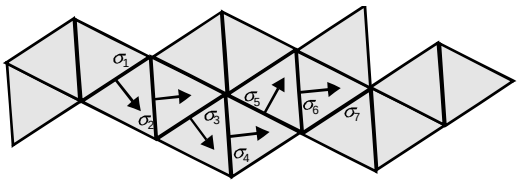

Figura 4.4: V-camino de índice 1.

Con estas definiciones es fácil chequear que un campo vectorial combinatorio V sobre un complejo K no dará lugar a ciclos dirigidos de flechas si, y sólo si, no posee V-caminos cerrados no estacionarios de índice p para cada $p = 1, ..., \dim(K)$.

4.2. Funciones de Morse combinatorias

Las funciones de Morse combinatorias son aplicaciones encargadas de codificar las deformaciones determinadas por algunos campos vectoriales combinatorios. En esta sección introduciremos las definiciones principales de la teoría de Morse discreta.

Definición 4.2.1. Sea K un complejo simplicial finito. Una *función de Morse combinatoria* (o *discreta*) es una función $f : S_K \to \mathbb{R}$ que satisface para todo simplex $\sigma \in K$

(i) Existe a lo sumo un $\tau \succ \sigma$ tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$

(ii) Existe a lo sumo un $\nu \prec \sigma$ tal que $f(\nu) \geq f(\sigma)$

Esto quiere decir que, para un simplex $\sigma \in K$, las funciones de Morse combinatorias decrecen hacia las caras inmediatas de σ (a excepción de, quizá, una de ellas) y crecen hacia los símplices para los que σ es cara inmediata (a excepción de, quizá, uno de ellos).

La idea detrás de la definición es la siguiente: si $\sigma \prec \tau$ y $f(\sigma) \geq f(\tau)$ podemos pensar que la función decrece desde σ hacia τ, por lo que vamos a poder empujar $|\tau|$ desde la cara $|\sigma|$. Veremos en unos pocos párrafos más que en este caso σ no puede decrecer hacia otro simplex que lo tenga como cara, por lo que esta deformación estará definida sin ambigüedad.

Ejemplo 4.2.2. Toda complejo simplicial finito K admite una función de Morse combinatoria. Basta considerar $f(\sigma) = \dim(\sigma)$. Esta función se llama función de Morse trivial.

Ejemplo 4.2.3. En la Figura 4.5 se pueden ver ejemplos de funciones de Morse combinatoria no triviales y otras que no.

Teniendo en mente que la idea detrás de la definición es identificar los pares $\sigma \prec \tau$ tales que $f(\sigma) \geq f(\tau)$ con la deformación esquematizada por la flecha de origen σ y destino τ definimos a continuación el concepto de punto crítico de una función de Morse. Como en el caso de los campos vectoriales combinatorios, y de acuerdo al comentario anterior, corresponderá a los símplices que no sufren deformaciones.

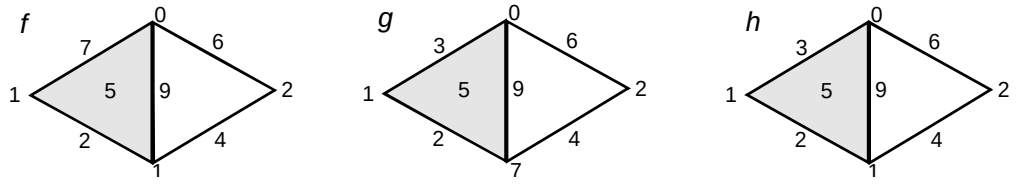

Figura 4.5: f no es de Morse pues el 2-simplex tiene dos caras con valores mayores. g no es de Morse pues el vértice inferior toma un valor mayor que dos de los 1-símplices de los que es cara. h es de Morse.

Definición 4.2.4. Dada una función de Morse combinatoria sobre un complejo simplicial finito K decimos que un p-simplex $\sigma \in K$ en *punto crítico (de índice p)* si cada vez que $\tau \succ \sigma$ entonces $f(\tau) > f(\sigma)$ y cada vez que $\nu \prec \sigma$ entonces $f(\nu) < f(\sigma)$.

Esto es, un punto crítico de índice p es un p-simplex σ que verifica que la función de Morse combinatoria es creciente respecto de la dimensión en el conjunto de símplices que son cara inmediata de σ y de los que σ es cara inmediata. En lo que sigue, utilizaremos las denominaciones *punto crítico* y *simplex crítico* de manera equivalente. Observar que la función de Morse trivial del Ejemplo 4.2.2 tiene todos sus símplices críticos.

Observación 4.2.5. Como K es finito entonces una función de Morse combinatoria f sobre K alcanzará máximo y mínimo. Este mínimo debe alcanzarse en un vértice, que resultará crítico. En efecto, sea $v \in K$ el vértice que toma el menor valor entre los vértices de K. Cualquiera sea el p-simplex $\sigma \in K$ ($p \geq 1$), existen al menos dos $(p-1)$-símplices $\nu, \nu' < \sigma$. Por definición, alguno de ellos debe tomar un valor inferior a $f(\sigma)$. Siguiendo de esta manera, hallamos que $f(\sigma) > f(v')$, para cierto vértice $v' \in K$. Como además tenemos $f(v) \leq f(v')$ entonces v es el mínimo de f. Por otro lado, si v no fuera crítico entonces existe un 1-simplex $\sigma > v$ tal que $f(v) \geq f(\sigma)$. Si w es el otro extremo de σ entonces, nuevamente por definición, $f(w) < f(\sigma) \leq f(v)$, contradiciendo la minimalidad de v.

Los símplices que no son críticos se llaman *regulares*. Un p-simplex σ puede ser regular por dos motivos, a saber:

1. Existe $\tau \succ \sigma$ tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$
2. Existe $\nu \prec \sigma$ tal que $f(\nu) \geq f(\sigma)$.

El siguiente lema nos dice que no pueden suceder ambas al mismo tiempo.

Lema 4.2.6. *Las condiciones 1. y 2. son mutuamente excluyentes.*

Demostración. La condición 2. precisa $p \geq 1$. Asumimos esto entonces. Supongamos que 1. y 2. son ciertos. Sea σ' el único p-simplex distinto de σ que verifica $\nu \prec \sigma' \prec \tau$. Por definición y por 1. debe ser $f(\sigma') < f(\tau)$; en particular, $f(\sigma') < f(\sigma)$. Por otro lado, por definición y por 2. $f(\nu) < f(\sigma')$. Combinando esto obtenemos

$$f(\sigma) \leq f(\nu) < f(\sigma') < f(\sigma).$$

Esto completa la demostración. □

Del resultado anterior podemos hallar que existen dos tipos de símplices regulares de una función de Morse combinatoria: los que tienen una cara inmediata que toma un valor

mayor a ellos y los que son cara inmediata de un simplex que toma un valor menor a ellos. En virtud de esto, diremos que un simplex σ es una *cara regular de* f si verifica 1. y que es un *top simplex regular* si verifica 2. Notemos que las caras regulares y los top símplices regulares ocurren en pares: σ es cara regular de τ si, y sólo si, τ es un top simplex regular para σ; decimos en este caso que $\sigma \prec \tau$ es un *par regular* para f. Esta característica nos permite deducir el primer resultado interesante de la teoría: la fórmula combinatoria de Poincaré-Hopf. Antes, introducimos una notación.

Notación. Si K es un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K entonces la cantidad de puntos críticos de índice p de f se notará $m_p(f)$.

Teorema 4.2.7 (Fórmula de Poincaré-Hopf)**.** *Si c_p representa la cantidad de p-símplices de K entonces*

$$\chi(K) := \sum_{p=0}^{n} (-1)^p c_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p m_p(f). \tag{4.1}$$

Demostración. Es inmediato del hecho que las símplices regulares ocurren en pares. □

NOTA. La fórmula del índice de Poincaré-Hopf (también llamado Teorema de Poincaré-Hopf) es un resultado de la topología diferencial que establece una relación entre la característica de Euler de una variedad diferenciable compacta y orientable M y los índices de los ceros de un campo vectorial sobre M. Es en este sentido que pensamos a la fórmula (4.1) como una versión discreta de la fórmula original.

Notemos en particular que el Teorema 4.2.7 nos dice que, de alguna manera, cierta información combinatoria relevante del complejo simplicial K está contenida en los puntos críticos de f; esto es, en los símplices que no son sufren deformaciones. Veremos más adelante que son precisamente los símplices críticos los que determinan la estructura (más simple) de complejo celular de $|K|$ (como en el caso diferenciable).

Vamos a ver a continuación de qué formas una función de Morse discreta sobre un complejo simplicial puede inducir una función de Morse sobre otro complejo simplicial. Es inminente introducir el caso de *restricción a* y *extensión desde* subcomplejos.

Proposición 4.2.8. *Sea L un subcomplejo de un complejo simplicial finito K. Entonces se verifica:*

(i) Si f es una función de Morse combinatoria sobre K entonces $f|_L$ es una función de Morse combinatoria sobre L.

(ii) Si f una función de Morse combinatoria sobre L, entonces f puede extenderse a una función de Morse combinatoria sobre K.

Demostración. (i) es trivial. Para (ii) pongamos $C = \max_{\sigma \in L}\{f(\sigma)\}$ consideremos la función $g : S_K \to \mathbb{R}$

$$g(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{si } \sigma \in L \\ \dim(\sigma) + C & \text{si } \sigma \in K - L \end{cases}$$

Es fácil corroborar que g resulta una función de Morse combinatoria sobre K. □

Notemos que la extensión definida en la proposición anterior determina que todos los símplices de $K - L$ sean críticos. Veremos más adelante que, bajo ciertas condiciones, podemos extender una función de Morse sin agregar nuevos símplices críticos.

Definición 4.2.9. Sea K un complejos simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K. Para $c \in \mathbb{R}$ definimos el complejo de nivel de f en c como el subcomplejo $K(c)$ de K generado por todos los símplices σ tales que $f(\sigma) \leq c$. Esto es,

$$K(c) = \bigcup_{\substack{\sigma \in K \\ f(\sigma) \leq c}} \bigcup_{\tau \leq \sigma} \tau.$$

La Figura 4.6 muestra los distintos complejos de nivel de la función de Morse combinatoria h del ejemplo 4.2.3. Los complejos de nivel cobran especial importancia a la hora de enunciar los teorema principales de la teoría de Morse. Antes de presentarlos, obtendremos algunos resultados sobre estos objetos.

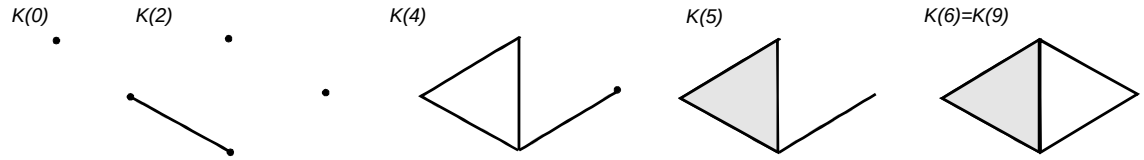

Figura 4.6: Algunos complejos de nivel de h.

Notemos que si $f(\sigma) > c$ entonces $\sigma \in K(c)$ si, y sólo si, existe $\tau > \sigma$ con $f(\tau) \leq c$. Del siguiente lema se desprende el hecho que nos alcanza con considerar el caso $\dim(\tau) = \dim(\sigma) + 1$.

Lema 4.2.10. *Sea σ un p-simplex de K y sea $\tau > \sigma$. Entonces existe un $(p+1)$-simplex τ' tal que $\sigma \prec \tau' \leq \tau$ y $f(\tau') \leq f(\tau)$.*

Demostración. Si $\dim(\tau) = p + 1$ tomamos $\tau' = \tau$. Supongamos entonces que $\dim(\tau) = p + r$ con $r > 1$. Como hay dos $(p + r - 1)$-caras ν_1 y ν_2 tales que

$$\sigma < \nu_1, \nu_2 < \tau$$

entonces alguna debe tomar un valor menor a $f(\tau)$; digamos ν_1. Como $\dim(\nu_1) = p+r-1$ podemos conseguir, por hipótesis inductiva, un $(p + 1)$-simplex τ' con $\sigma \prec \tau' \leq \nu_1$ y $f(\tau') \leq f(\nu_1) \leq f(\tau)$. Es completa la demostración. □

Corolario 4.2.11. *Un p-simplex σ está en $K(c)$ si, y sólo si, $f(\sigma) \leq c$ o existe $\tau \succ \sigma$ tal que $f(\tau) \leq c$.*

Notemos que con los mismos argumentos utilizados en la demostración del Lema 4.2.10 podemos demostrar el caso para un $\nu < \sigma$. Considerando ambos resultados obtenemos

Corolario 4.2.12. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K. Entonces se tiene*

(i) Si $\tau > \sigma$ es tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$ entonces existe $\tau' \succ \sigma$ tal que $f(\tau') \leq f(\sigma)$

(ii) Si $\nu < \sigma$ es tal que $f(\nu) \geq f(\sigma)$ entonces existe $\nu' \prec \sigma$ tal que $f(\nu') \geq f(\sigma)$.

(iii) Un simplex σ es crítico si, y sólo si, cada vez que $\nu < \sigma < \tau$ se tiene $f(\nu) < f(\sigma) < f(\tau)$.

Observación 4.2.13. Para toda función de Morse combinatoria f sobre un complejo simplicial finito existe una función de Morse combinatoria f' sobre el mismo complejo con los mismos puntos críticos y que, además, es inyectiva. Más aún, si fijamos $a < b \in \mathbb{R}$ puede lograrse que los conjuntos de nivel de ambas funciones en a y b coincidan. La idea de la demostración es perturbar con cuidado los valores de la función f en los lugares donde no sea inyectiva. Una demostración completa de este resultado puede encontrarse en [Sir, Teorema 4.2.14].

4.3. Teoremas principales

Los resultados principales de la teoría de Morse discreta establecen de qué manera una función de Morse combinatoria sobre un complejo simplicial provee una forma de construir dicho complejo adjuntando celdas en el orden prescripto por la función. Esto es, nos dicen como varían los complejos de nivel cuando un simplex nuevo es agregado. Los dos teoremas siguientes constituyen el corazón de la teoría de Morse discreta. Como corolario se desprende el teorema central de la teoría.

Teorema 4.3.1. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K. Si $a < b$ son números reales tales que $f^{-1}((a, b])$ no contiene puntos críticos entonces $K(b) \searrow K(a)$.*

Demostración. Por la observación 4.2.13 podemos suponer que f es inyectiva. Si $f^{-1}((a, b]) = \emptyset$ entonces $K(a) = K(b)$ y no hay nada más que probar. Si $f^{-1}((a, b]) \neq \emptyset$ particionemos $(a, b]$ vía $a = a_0, a_1, ..., a_{r-1}, a_r = b$ de manera que $f^{-1}((a_i, a_{i+1}]) = \{\sigma_i\}$ (podría tratarse de la partición trivial si hay un único simplex regular en $(a, b]$). Vamos a probar que $K(a_{i+1}) \searrow K(a_i)$ para todo $0 \leq i \leq r$, de donde se obtiene el teorema. Como σ_i es regular por hipótesis entonces debe suceder una (y sólo una) de las siguientes situaciones:

1. Existe $\tau_i \succ \sigma_i$ con $f(\tau_i) < f(\sigma_i)$
2. Existe $\nu_i \prec \sigma_i$ con $f(\nu_i) > f(\sigma_i)$.

En el caso 1. debemos tener $f(\tau_i) \leq a_i$, pues $f(\tau_i) < f(\sigma_i)$ y $f^{-1}((a_i, a_{i+1}]) = \{\sigma_i\}$. Luego, $\tau_i \in K(a_i)$. Como además σ_i es cara de τ_i entonces $\sigma_i \in K(a_i)$. Luego, en este caso $K(a_{i+1}) = K(a_i)$ y el resultado es válido. Si ahora se verifica 2. entonces para todo $\tau \succ \sigma_i$ se tiene $f(\tau) > f(\sigma)$; de donde $f(\tau) > a_{i+1}$. Del Corolario 4.2.11 se deduce entonces que $\sigma \notin K(a_i)$. Por otro lado, como estamos suponiendo que $f(\nu_i) > f(\sigma_i)$ y como $f^{-1}((a_i, a_{i+1}]) = \{\sigma_i\}$, entonces $f(\nu_i) > a_{i+1}$. Afirmamos que $\nu_i \notin K(a_i)$. En efecto, si $\tilde{\sigma} \succ \nu_i$ entonces $f(\tilde{\sigma}) > f(\nu_i) > a_{i+1}$. Nuevamente por Corolario 4.2.11, $\nu_i \notin K(a_i)$. Además, esta es la única cara de σ_i que no está en $K(a_i)$, pues si $\tilde{\nu} \prec \sigma_i$ entonces $f(\tilde{\nu}) < f(\sigma_i)$ y, por lo tanto, $f(\tilde{\nu}) \leq a_i$. Hemos probado entonces que en este caso $K(a_{i+1}) = K(a_i) \cup \{\sigma_i, \nu_i\}$ donde ν_i es una cara libre de σ_i en $K(a_i)$. Luego, $K(a_{i+1}) \searrow K(a_i)$. □

Corolario 4.3.2. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K. Si f no tiene puntos críticos en $K - K(c)$ para algún $c \in \mathbb{R}$ entonces $K \searrow K(c)$.*

Teorema 4.3.3. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K. Supongamos que σ es un p-simplex crítico de f con $f(\sigma) \in (a, b]$ y que*

$f^{-1}((a,b])$ no contiene otros puntos críticos. Entonces $K(b)$ es homotópicamente equivalente a

$$K(a) \cup_{\dot{e}^p} e^p$$

donde e^p denota una celda de dimensión p con borde $\dot{e}^p$.

Demostración. Nuevamente, podemos suponer que f es inyectiva. Si σ no es el único simplex en $f^{-1}((a,b])$ elijamos $a < a' < b' < b$ tal que $f^{-1}((a',b']) = \{\sigma\}$. Como $f^{-1}((a,a'])$ y $f^{-1}((b',b])$ no contienen puntos críticos entonces $K(b) \searrow K(b')$ y $K(a') \searrow K(a)$. Nos alcanza entonces con probar que $K(b')$ es homotópicamente equivalente a $K(a') \cup_{\dot{e}^p} e^p$. Como σ es crítico entonces $\nu < \sigma < \tau$ implica $f(\nu) < f(\sigma) < f(\tau)$ (Corolario 4.2.12). En particular, $f(\tau) > b'$ para cualquier $\tau > \sigma$. Luego, $\sigma \notin K(a')$. Análogamente, para cada $\nu < \sigma$ se tendrá $f(\nu) < a'$, de donde se deduce que $\dot{\sigma} \in K(a')$. Luego, $K(b') = K(a') \cup_{\dot{\sigma}} \sigma$. Como σ es una p-celda tenemos el resultado buscado. □

Observación 4.3.4. Notemos que en el transcurso de la demostración anterior hemos establecido que si $f^{-1}((a,b])$ es exactamente el conjunto unitario $\{\sigma\}$ (para un $\sigma \in K$ crítico), entonces $K(b) = K(a) \cup_{\dot{\sigma}} \sigma$.

Corolario 4.3.5. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K. Entonces K es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con exactamente $m_p(f)$ celdas de dimensión p.*

El Corolario 4.3.5 es el teorema central de la teoría de Morse discreta. Nos dice que se puede simplificar mucho la estructura celular de un complejo simplicial si podemos definir sobre él funciones de Morse combinatorias con pocos puntos críticos. Si bien, por supuesto, no nos dice como las celdas del CW-complejo asociado se pegan entre sí, en muchos casos pueden deducirse muchas propiedades del complejo simplicial con la información con la que se cuenta. Para mostrar ejemplos introducimos a continuación una proposición que resulta extremadamente útil en el desarrollo que sigue.

Proposición 4.3.6. *Sea K un complejo simplicial finito y $L \subset K$ un subcomplejo tal que $K \searrow L$. Sea f una función de Morse combinatoria sobre L y sea $c = \max_{\sigma \in L}\{f(\sigma)\}$. Entonces, f puede extenderse a K de manera que $L = K(c)$ y tal que no haya puntos críticos en $K - L$.*

Demostración. Notar que nos alcanza con probarlo para un colapso elemental (usando inducción en la cantidad de colapsos elementales en $K \searrow L$). Escribamos entonces $K = L \cup \{\tau, \nu\}$, con $\nu \prec \tau$ una cara libre de τ en K. Definamos una función g en K vía

$$g(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \sigma \neq \nu, \tau \\ c+1 & \sigma = \tau \\ c+2 & \sigma = \nu \end{cases}$$

Es sencillo corroborar que g es una función de Morse combinatoria pues los valores asignados a ν y τ no intervienen en la regularidad de los símplices de L. Además, $K(c)$ es trivialmente L y el hecho que $f(\nu) > f(\tau)$ muestra que $K - L$ no posee ningún simplex crítico de g. □

Corolario 4.3.7. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K. Entonces $K \searrow v$ si, y sólo si, K admite una función de Morse combinatoria que tiene a v como único punto crítico.*

Demostración. Es inmediato de la Proposición 4.3.6 y el Corolario 4.3.2. □

Corolario 4.3.8. *Sea Δ^n el n-simplex standard y $\dot{\Delta}^n$ su borde. Entonces,*

(i) Δ^n admite una función de Morse combinatoria con un solo punto crítico.

(ii) $\dot{\Delta}^n$ admite una función de Morse con exactamente dos puntos críticos.

Demostración. (i) es inmediato del Corolario 4.3.7. Para (ii) notar que si σ es un $(n-1)$-simplex de $\dot{\Delta}^n$ entonces $\dot{\Delta}^n - \{\sigma\} \searrow v$. Nuevamente por Corolario 4.3.7, $\dot{\Delta}^n - \{\sigma\}$ tiene una función de Morse combinatoria con un único punto crítico en v. Por la Proposición 4.2.8, podemos extender f a todo $\dot{\Delta}^n$ dejando a σ crítico. □

Cerramos la sección con un resultado muy interesante de la teoría de Morse discreta. Antes, una observación.

Observación 4.3.9. Si f es una función de Morse combinatoria definida sobre una n-pseudovariedad sin borde K entonces el máximo de f se alcanza en un n-simplex. Esto es así pues para todo $k \leq n-1$ se tiene que todo k-simplex es cara de, al menos, dos $p+1$-símplices (es un argumento idéntico, aunque inverso, al de la Observación 4.2.5).

Teorema 4.3.10. *Sea K un complejo simplicial finito de dimensión n que admite una función de Morse combinatoria con dos puntos críticos. Entonces, K es homotópicamente equivalente a S^k, para cierto $k \leq n$. Si además K es una n-variedad combinatoria sin borde, entonces K es una n-esfera combinatoria.*

Demostración. Uno de los puntos críticos debe ser un vértice. Si el otro es un k-simplex entonces K tiene el tipo homotópico de un CW-complejo con una 0-celda y una k-celda (Corolario 4.3.5). Supongamos ahora que K es una n-variedad combinatoria sin borde. Por la observación anterior, K tiene un vértice v crítico y un n-simplex σ crítico. Por el Teorema 4.3.1, se tiene que $K - \{\sigma\} \searrow v$. Por el Teorema de Whitehead[1], se tiene que $K - \{\sigma\}$ es una n-bola combinatoria y, por lo tanto, $K = K - \{\sigma\} \cup_{\dot{\sigma}} \sigma$ es una n-esfera combinatoria. □

4.4. Gradiente de una función de Morse combinatoria

En esta sección vamos a precisar como una función de Morse combinatoria determina un campo vectorial combinatorio. Como en el caso diferenciable, una función de Morse combinatoria tiene un campo vectorial gradiente que interpreta los sentidos de crecimiento y decrecimiento locales de la función. De los comentarios hechos al comienzo de la sección anterior la siguiente definición resulta natural.

Definición 4.4.1. Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K. El *gradiente* de f es el campo vectorial V_f definido por:

$$V_f(\sigma) = \begin{cases} \tau & \text{si existe } \tau \succ \sigma \text{ con } f(\tau) \leq f(\sigma) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

[1]El enunciado puede hallarse en el párrafo siguiente al Corolario 3.4.4 de la página 67

Es fácil chequear que V_f verifica los requisitos de la Definición 4.1.1. Notemos que, en realidad, visto como análogo al gradiente de una función diferenciable, V_f representa el gradiente de $-f$, en el sentido que apunta en la dirección de decrecimiento de la función. En el contexto discreto, el gradiente de una función de Morse combinatoria tendrá esta propiedad *reversa*. Cuando no sea necesario, omitiremos el subscripto f y llamaremos V al campo gradiente de f.

Notemos que los puntos críticos de índice p de V_f coinciden con los puntos críticos de índice p de f. Sin embargo, el campo gradiente de f no refleja los distintos complejos de nivel que determina la función. Notar que cualquiera sea $c \in \mathbb{R}$ se tiene $V_f = V_{f+c}$, pero en general no será cierto que los distintos complejos de nivel de f coincidan con los de $f + c$.

Observación 4.4.2. El campo gradiente de una función de Morse combinatoria f no admite V_f-caminos cerrados no estacionarios. En efecto, sea $\gamma : \sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_r$ un dicho camino de dimensión p. Como $\sigma_{i+1} \prec V_f(\sigma_i)$ para cada $i = 0, ..., r-1$ y $f(\sigma_i) \geq f(V(\sigma_i))$ para cada i entonces $f(\sigma_{i+1}) < f(\sigma_i)$ para todo i. En particular, $f(\sigma_r) < f(\sigma_0)$. Esto es absurdo pues $\sigma_r = \sigma_0$.

Presentamos a continuación el resultado principal para campos gradientes de funciones de Morse combinatoria. Establece que la propiedad del gradiente de no contener caminos cerrados no estacionarios es suficiente para hallar una función de Morse combinatoria que lo codifique.

Teorema 4.4.3. *Sea K un complejo simplicial finito y sea W un campo vectorial combinatorio sobre K. Si W no admite W-caminos cerrados no estacionarios (de cualquier dimensión) entonces existe una función de Morse combinatoria f sobre K tal que $V_f = W$.*

Demostración. La demostración se lleva a cabo por inducción en los esqueletos de K. Esto es, podemos restringir W a un campo vectorial combinatorio W_n sobre K^n vía

$$W_n(\sigma) = \begin{cases} W(\sigma) & \text{si } \dim(\sigma) < n \\ 0 & \text{si } \dim(\sigma) = n \end{cases}$$

Vamos entonces a probar inductivamente que existe una función de Morse combinatoria $f_n : K^n \to \mathbb{R}$ tal que $W_n = V_{f_n}$. De esta manera, cuando $n = \dim(K)$ se tendrá el resultado buscado. Notemos que el caso $n = 0$ (para el que $W_0 = 0$) se verifica tomando $f_0 = 0$.

Supongamos que tenemos definida una función de Morse combinatoria f_{n-1} tal que $V_{f_{n-1}} = W_{n-1}$ y que verifica $f_{n-1}(\sigma) \leq n - 1$. Antes de definir f_n, consideremos para un $(n-1)$-simplex $\sigma \in K$

- $d(\sigma) = \sup\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists\ W - \text{camino } \sigma = \sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{r-1}, \sigma_r \text{ con } W(\sigma_r) = 0\}$
- $D = \max\limits_{\dim(\sigma)=n-1} d(\sigma)$.

Notemos inmediatamente que el número $d(\sigma)$ (y, por lo tanto, D) es finito. En efecto, si no lo fuera entonces, por finitud de K, tendríamos $\sigma_i = \sigma_j$ para algún $i < j < r$. Esto daría lugar a un W-camino cerrado no estacionario $\gamma : \sigma_i, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_{j-1}, \sigma_i$ contradiciendo que W no admite tales caminos. Con esto en mente, definimos $f_n : K^n \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$f_n(\sigma) = \begin{cases} f_{n-1}(\sigma) & \dim(\sigma) \leq n-2 \\ f_{n-1}(\sigma) + \dfrac{d(\sigma)}{D+1} & \dim(\sigma) = n-1 \\ n & \dim(\sigma) = n \text{ y } \sigma \notin Im(W) \\ f_{n-1}(\nu) + \dfrac{d(\nu)}{D+1} & \dim(\sigma) = n \text{ y } W(\nu) = \sigma \end{cases}$$

Notemos que se tiene que $f_{n-1}(\sigma) \leq f_n(\sigma)$ para todo $\sigma \in K^{n-1}$ y que $f_n(\sigma) \leq n$ (pues $f_{n-1}(\sigma) \leq n-1$ y $\frac{d(\sigma)}{D+1} < 1$). Probamos que f_n cumple lo requerido en dos pasos.

- **f_n es de Morse.**

Debemos chequear que f verifica las condiciones (i) e (ii) de la Definición 4.2.1. Lo separamos en varios casos.

Si $\dim(\sigma) < n-2$ es directo pues f_{n-1} es de Morse por hipótesis inductiva.

Si $\dim(\sigma) = n-2$ entonces el caso $\sharp\{\nu \prec \sigma \mid f_n(\nu) \geq f_n(\sigma)\} \leq 1$ es directo de la hipótesis inductiva. Por otro lado, como f_{n-1} es de Morse en K^{n-1}, $f_{n-1}(\sigma) < f_{n-1}(\tau)$ para todo $\tau \succ \sigma$ salvo quizá uno. Entonces,

$$f_n(\sigma) = f_{n-1}(\sigma) < f_{n-1}(\tau) \leq f_n(\tau)$$

para todo $\tau \succ \sigma$ salvo quizá uno.

Supongamos $\dim(\sigma) = n-1$. Notar que el caso $\sharp\{\nu \ : \ f_n(\nu) \geq f_n(\sigma)\} \leq 1$ es el mismo que el caso $\sharp\{\tau \ : \ f_n(\tau) \leq f_n(\sigma)\} \leq 1$ visto en el punto anterior. Veamos que $\sharp\{\tau \ : \ f_n(\tau) \leq f_n(\sigma)\} \leq 1$. Sea $\tau \succ \sigma$. Si $\tau \notin Im(W)$ entonces $f(\sigma) = f_{n-1}(\sigma) + \frac{d(\sigma)}{D+1} < n = f(\tau)$. Si en cambio $\tau = W(\sigma')$ (con $\sigma' \neq \sigma$) entonces $f_n(\tau) = f_{n-1}(\sigma') + \frac{d(\sigma')}{D+1}$. Ahora, ya sea por hipótesis inductiva (usando que $\sigma' \notin Im(W)$) o por el caso $n = 0$, se tiene $f_{n-1}(\sigma') = n-1 \geq f_{n-1}(\sigma)$. Por otro lado, si $\sigma', \sigma_1, ..., \sigma_r$ es un W-camino, entonces $\sigma, \sigma', \sigma_1, ..., \sigma_r$ también es un W-camino; por lo que $d(\sigma') < d(\sigma)$. Por lo tanto,

$$f_n(\tau) = f_{n-1}(\sigma') + \frac{d(\sigma')}{D+1} > f_{n-1}(\sigma) + \frac{d(\sigma)}{D+1} = f_n(\sigma).$$

Si $\dim(\sigma) = n$ sólo debemos corroborar que $\sharp\{\nu \ : \ f_n(\nu) \geq f_n(\sigma)\} \leq 1$. Si $\sigma \notin Im(W)$ entonces $f_n(\sigma) = n > f_{n-1}(\nu') + \frac{d(\nu')}{D+1} = f_n(\nu')$. Si $\sigma = W(\nu)$, sea $\nu \neq \nu' \prec \sigma$. Entonces, por el mismo razonamiento para el caso $\dim(\sigma) = n-1$, se tiene $f_n(\nu) > f_n(\nu')$ y $d(\nu) > d(\nu')$. Por lo tanto,

$$f_n(\sigma) = f_{n-1}(\nu) + \frac{d(\nu)}{D+1} > f_{n-1}(\nu') + \frac{d(\nu')}{D+1} = f_n(\nu').$$

Esto prueba que $\sharp\{\nu \ : \ f_n(\nu) \geq f_n(\sigma)\} \leq 1$.

- **$V_{f_n} = W_n$.**

Nuevamente, analizamos los diferentes casos.

Si $\dim(\sigma) < n-2$ el resultado se obtiene por hipótesis inductiva (pues $V_{f_n} = V_{f_{n-1}}$ en este caso).

Supongamos que $\dim(\sigma) = n-2$. Si $W(\sigma) = 0$ entonces $V_{f_{n-1}}(\sigma) = 0$. Por lo tanto, si $\tau \succ \sigma$ se tiene $f_n(\tau) \geq f_{n-1}(\tau) \geq f_{n-1}(\sigma) = f_n(\sigma)$; de donde, $V_{f_n}(\sigma) = 0$. Si $W(\sigma) = \tau$ entonces, en particular, $W_{n-1}(\sigma) = \tau$. Como además $W(\tau) = 0$ entonces $d(\tau) = 0$, de donde $f_n(\tau) = f_{n-1}(\tau) + \frac{d(\tau)}{D+1} = f_{n-1}(\tau)$. Luego, $f_n(\sigma) = f_{n-1}(\sigma) \geq f_{n-1}(\tau) = f_n(\tau)$. Esto prueba que $V_{f_n}(\sigma) = \tau$.

Supongamos ahora $\dim(\sigma) = n-1$. Si $W(\sigma) = 0$ entonces $d(\sigma) = 0$ y $f_n(\sigma) = f_{n-1}(\sigma)$. Sea $\tau \succ \sigma$. Si $\tau \notin Im(W)$ entonces $f_n(\tau) = n$ y $f_n(\sigma) < f_n(\tau)$. Si, en cambio, $\tau = W(\sigma')$ entonces

$$f_n(\tau) > f_n(\sigma') \geq f_{n-1}(\sigma') = n-1 \geq f_{n-1}(\sigma) = f_n(\sigma).$$

Luego, en cualquier caso, $V_{f_n}(\sigma) = 0$. Si ahora $W(\sigma) = \tau$ entonces $f_n(\tau) = f_n(\sigma)$ y $V_{f_n}(\sigma) = \tau$.

Finalmente, para el caso $\dim(\sigma) = n$ se tiene $V_{f_n}(\sigma) = 0 = W_n(\sigma)$. Esto concluye la demostración. □

Por lo tanto, las funciones de Morse combinatorias son precisamente las encargadas de codificar las deformaciones que nos interesa estudiar sobre las realizaciones geométricas de los complejos simpliciales finitos. En el próximo capítulo vamos a restringirnos a campos vectoriales que resulten gradientes de alguna función de Morse combinatoria y podremos, por lo tanto, utilizarlas para manejarnos en un contexto más cómodo que el provisto por los campos vectoriales combinatorios.

4.5. Flujo de una función combinatoria y complejo de Morse

En esta última sección introduciremos algunos resultados interesante de la teoría de Morse discreta pero que no serán utilizados en nuestro desarrollo del capítulo siguiente. Son incluidos aquí pues muestran el alcance de la teoría y las muchas ramificaciones que admite. Será precisamente una de estas ramificaciones que explotaremos cuando definamos los espacios de deformaciones de Morse.

En primer lugar, extenderemos el concepto de campo vectorial combinatorio para que tome valores en el conjunto de símplices *orientados* de un complejo simplicial K. Esto es, induciremos una orientación en los símplices de K y determinaremos que orientación provee el campo vectorial al símplex objetivo.

Sea K un complejo simplicial finito. Fijando un orden en los vértices de K queda inducida una orientación en sus símplices. Si $\sigma = \{v_0, ..., v_p\}$, denotamos con $[v_0, ..., v_p]$ al simplex σ con la orientación dada por $v_0 < v_1 < ... < v_p$. Sea C_p el grupo abeliano libre generado por los p-símplices orientados de K, donde identificamos cada simplex orientado σ con $-\tilde{\sigma}$, donde $\tilde{\sigma}$ es el simplex σ con la orientación opuesta. De esta forma,

$$[v_{\varphi(0)}, ..., v_{\varphi(p)}] = sg(\varphi)[v_0, ..., v_p]$$

para cualquier permutación φ de los vértices, donde $sg(\varphi) = \pm 1$ dependiendo de la paridad de la permutación.

Sea $\partial_p : C_p \to C_{p+1}$ el morfismo de borde usual

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k [v_0, ..., \widehat{v}_k, ..., v_p] \tag{4.2}$$

para $\sigma = [v_0, ..., v_p]$. Este es el complejo de cadenas (C_*, ∂) que determina la homología simplicial de K.

Definimos en C_p un producto interno $\langle , \rangle$ declarando los p-símplices orientados como una base ortonormal. De esta forma,

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{\nu \prec \sigma} \langle \partial_p(\sigma), \nu \rangle \nu$$

donde $\langle \partial_p(\sigma), \nu \rangle = \pm 1$ dependiendo de si σ incide en ν con la misma orientación o con la orientación inversa.

Habiendo hecho estas observaciones podemos ahora extender la definición de campo vectorial combinatorio para que envíe símplices orientados a símplices orientados.

Definición 4.5.1. Con las hipótesis y notaciones anteriores, un campo vectorial combinatorio V sobre K determina un operador $C_* \to C_{*+1}$, que también llamaremos V, definido para cada p en la base de C_p por

$$V(\sigma) = \begin{cases} -\langle \partial_p(\tau), \sigma \rangle \tau & \text{si } \sigma \prec \tau \text{ es cara regular} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La idea detrás de la orientación dada a τ es que σ aparezca en su borde con la orientación contraria. Esto es, $\langle \partial(V(\sigma)), \sigma \rangle = -1$. Veremos más adelante la conveniencia de esta definición. Notemos que los puntos críticos y regulares del nuevo campo vectorial combinatorio V coincide con los puntos críticos y regulares del campo original. Notar también que, en particular, $V^2 = 0$.

En lo que resta del capítulo, consideraremos un campo vectorial combinatorio como definido entre el conjunto de símplices orientados según la Definición 4.5.1.

Con la noción extendida de campo vectorial podemos ahora introducir el *flujo* de una función de Morse combinatoria f. Este será un operador $\Phi : C_* \to C_*$ que nos dirá de qué manera un simplex dado es alterado por f. Lo definimos a continuación y precisamos seguidamente esta característica en unos ejemplos.

Definición 4.5.2. Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K. Para un simplex orientado σ definimos el *flujo* (del gradiente) de f por

$$\Phi(\sigma) = \sigma + \partial(V(\sigma)) + V(\partial(\sigma)) \tag{4.3}$$

Es muy interesante analizar la definición de flujo de una función de Morse combinatoria. Escribamos (4.3) como $\Phi = 1 + \partial V + V\partial$ (donde 1 representa la identidad de C_*) y estudiemos cada uno de estos sumandos. Por un lado, vimos que σ aparece en $\partial V(\sigma)$ con la orientación opuesta, por lo que $1 + \partial V$ deja como resultado las caras de $V(\sigma)$ distintas de σ con la orientación coherente con la de σ (esto es, el camino determinado por las flechas une también las caras de σ). Por otro lado, el sumando $V\partial$ determina a donde van a parar los extremos de σ, deformando los extremos del antes mencionado camino.

Ejemplo 4.5.3. La Figura 4.7 muestra el flujo del gradiente de la función f diagramada a la izquierda.

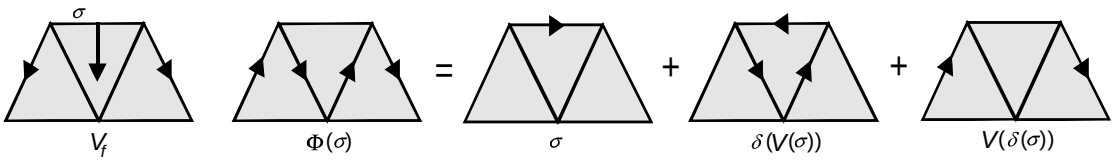

Figura 4.7: Flujo de V_f.

Proposición 4.5.4. *Sea Φ el flujo asociado a una función de Morse combinatoria sobre un complejo simplicial finito K. Entonces $\Phi : C_* \to C_*$ resulta un morfismo de complejos de cadena. Más aún, Φ es homotópico a la identidad.*

Demostración. Debemos corroborar que Φ conmuta con el morfismo de borde ∂. Escribiendo $\Phi = 1 + \partial V + V\partial$ se tiene

$$\Phi\partial = (1 + \partial V + V\partial)\partial = \partial + \partial V\partial + V\partial^2 = \partial + \partial V\partial$$

$$\partial\Phi = \partial(1 + \partial V + V\partial) = \partial + \partial^2 V + \partial V\partial = \partial + \partial V\partial.$$

La segunda aserción es directa del hecho que $\Phi - 1 = \partial V + V\partial$. Esto es, V actúa como homotopía entre el flujo de f y la identidad de C_*. □

Como último resultado de este capítulo definimos el complejo de Morse determinado por una función de Morse combinatoria: un complejo de cadenas cuya homología coincide con la homología simplicial del complejo subyacente. En la demostración de este hecho el flujo asociado a la función cumple un papel central.

Definición 4.5.5. Sea K un complejo simplicial finito de dimensión n y f una función de Morse combinatoria sobre K. El *complejo de Morse* de K respecto de f es el complejo diferencial

$$0 \to C_n^\Phi \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^\Phi \xrightarrow{\partial} ... \xrightarrow{\partial} C_0^\Phi \to 0$$

donde C_p^Φ es el subgrupo de C_p de p-cadenas Φ-invariantes; esto es,

$$C_p^\Phi = \{c \in C_p \mid \Phi(c) = c\}.$$

Usando que la homología del complejo de Morse de un complejo simplicial K coincide con la homología simplicial de K uno puede demostrar las desigualdades de Morse (fuertes) que enunciamos sin demostración como cierre del capítulo. Las pruebas de estos resultados pueden encontrarse en [For].

Teorema 4.5.6. *Sea K un complejo simplicial finito y f una función de Morse combinatoria sobre K. Si $b_i = \dim(H_i(K))$ son los números de Betti de K entonces para todo $j \geq 0$ se tiene*

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} b_k \leq \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} m_k(f).$$

Capítulo 5

Funciones normalizadas y espacio de deformaciones

En este capítulo introducimos dos nociones novedosas que se desprenden de la teoría de Morse discreta: las funciones normalizadas y los espacios de deformaciones. Estos son conceptos asociados al gradiente de las funciones de Morse discretas que tienen como objetivo tratar de caracterizar el complejo simplicial sobre el que están definidas de una manera combinatoria (en el caso de las funciones normalizadas) y de una manera geométrica (en el caso de los espacios de deformaciones). Será casualmente uno de los resultados principales de este trabajo la demostración de que esta caracterización para el caso de los espacios de deformaciones es alcanzada de manera absoluta en el ámbito de los complejos simpliciales unidimensionales (Teorema 5.5.12).

Cabe aclarar que, tratándose de una teoría nueva, dejaremos planteados algunos interrogantes sin respuesta y propondremos algunos caminos en lo que puede encararse el desarrollo de la misma. Además, el caso del estudio combinatorio de los complejos simpliciales por las funciones normalizadas definidas sobre él no será llevado a cabo en profundidad en esta tesis. Sólo introduciremos algunas propiedades para mostrar una posible utilidad en esta dirección.

5.1. Equivalencia y normalización de funciones de Morse combinatorias

En esta sección presentaremos la noción de equivalencia de funciones de Morse combinatorias. Esta es una relación de equivalencia que identifica las funciones que codifican las mismas deformaciones (o, equivalentemente, determinan el mismo campo gradiente). En este sentido, la definición resulta bastante natural.

Definición 5.1.1. Sea K un complejo simplicial finito y sean $f, g : K \to \mathbb{R}$ dos funciones de Morse combinatorias. Decimos que f es *equivalente* a g si cada vez que $\sigma \prec \tau$ se tiene que $f(\sigma) \geq f(\tau) \iff g(\sigma) \geq g(\tau)$. En este caso notamos $f \sim g$

En otras palabras, dos funciones de Morse combinatorias son equivalentes si preservan el orden entre los símplices y sus caras inmediatas de idéntica manera. Por ejemplo, para cualquier $c \in \mathbb{R}$, las funciones de Morse combinatorias f y $f + c$ son equivalentes. Es directa la verificación que la equivalencia de funciones es una relación de equivalencia y

que dos funciones son equivalentes si, y sólo si, codifican las mismas deformaciones (i.e., determinan el mismo campo gradiente).

Observación 5.1.2. Notemos que si $q : S_K \to \mathbb{R}$ es una función definida sobre el conjunto de símplices de un complejo simplicial finito K, f es una función de Morse combinatoria sobre K y se verifica que cada vez que $\sigma \prec \tau$ se tiene que $q(\sigma) \geq q(\tau) \iff f(\sigma) \geq f(\tau)$ entonces q es también una función de Morse combinatoria (y resulta, trivialmente, equivalente a f).

Si ahora nos interesa estudiar las deformaciones determinadas por una función f sobre un complejo simplicial K, resultaría útil hallar una función de Morse combinatoria g, equivalente a f, pero con la que sea más fácil trabajar (esto es, elegir un representante distinguido de la clase de equivalencia de f.) Esta es la idea de función de Morse normalizada.

Definición 5.1.3. Sea K un complejo simplicial finito. Una *función de Morse normalizada* sobre K es una función de Morse combinatoria $f : K \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$ que verifica la siguiente condición: si $g : K \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es una función de Morse combinatoria tal que $g \sim f$ y $g \leq f$ entonces $g = f$.

Esto es, una función de Morse normalizada va a tomar los valores más pequeños en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ y, además, va a tomar las mínimas diferencias entre los valores de los símplices y sus caras inmediatas (preservando su campo gradiente). Enseñamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 5.1.4. Cualquiera sea el complejo simplicial finito K, la función de Morse trivial $f(\sigma) = \dim(\sigma)$ es una función de Morse normalizada.

Ejemplo 5.1.5. La Figura 5.1 muestra dos ejemplos de funciones normalizadas sobre el mismo complejo.

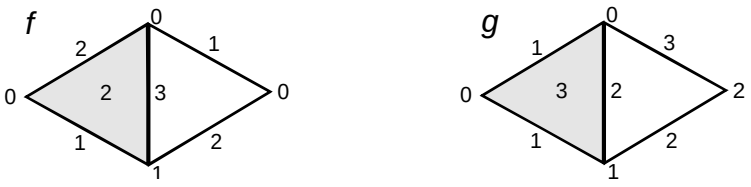

Figura 5.1: Funciones normalizadas.

Veremos que las funciones de Morse normalizadas poseen muchas propiedades útiles e interesantes. Las más destacadas están contenidas en la siguiente

Proposición 5.1.6. *Sea f una función de Morse normalizada sobre un complejo simplicial finito K. Entonces se verifica*

(i) Si $f(\sigma) = 0$ entonces $dim(\sigma) = 0$

(ii) $f(\sigma) \geq dim(\sigma)$ para todo $\sigma \in K$.

(iii) Un vértice v es crítico si, y sólo si, $f(v) = 0$.

(iv) Si σ es una cara regular de τ entonces $f(\sigma) = f(\tau)$.

(v) f toma todos los valores enteros entre 0 y $\max_{\sigma \in K}\{f(\sigma)\}$.

(vi) En cada componente conexa de K hay al menos un vértice que toma el valor 0.

Demostración. Para *(i)* simplemente notar que todo simplex de dimensión mayor o igual a 1 tiene al menos una cara inmediata en la que toma un valor menor al de él. Como la función está normalizada, entonces ningún valor puede ser menor a 0, por lo que dicho simplex no puede tomar el valor 0.

Para *(ii)* se procede por inducción en la dimensión del simplex σ. El caso 0 es trivial. Sea σ un n-simplex con $n \geq 1$. Entonces tiene $n+1$ $(n-1)$-caras (con $n+1 \geq 2$); y como σ no puede tener más de una cara con valor mayor al de él tenemos que existe $\nu \prec \sigma$ con $f(\nu) < f(\sigma)$. Luego, $f(\sigma) > f(\nu) \geq n-1$ (esta última desigualdad por hipótesis inductiva). De aquí que $f(\sigma) \geq n$.

En el item *(iii)* debemos probar ambas implicaciones. Si $f(v) = 0$, como todos los 1-símplices σ verifican $f(\sigma) \geq 1$ (por (ii)) entonces $f(\sigma) > 0 = f(v)$. Luego v es crítico. Si ahora v es crítico entonces $f(v) < f(\sigma)$ para todo $\sigma \succ v$. Sea $g : K \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definida por $g(v) = 0$ y $g(\tau) = f(\tau)$ para todo $\tau \neq v$. Por Observación 5.1.2, g es de Morse, $g \sim f$ y $g \leq f$. Como f es normalizada entonces $g = f$. Luego, $f(v) = g(v) = 0$.

El item *(iv)* requiere un poco más de trabajo. Sea σ una cara regular de τ que tome el menor valor entre todas las caras regulares de f. Se tiene que $f(\sigma) \geq f(\tau)$ y, por Lema 4.2.6, $f(\nu) < f(\sigma) < f(\tau')$ para todo $\nu \prec \sigma \prec \tau' \neq \tau$. Afirmamos que $f(\tau) > f(\nu)$ para todo $\nu \prec \sigma$. En efecto, supongamos que existiera un $\nu' \prec \sigma$ con $f(\nu') \geq f(\tau)$. Como $\nu' \prec \sigma \prec \tau$ entonces existe al menos un $\sigma' \neq \sigma$ con $\nu' \prec \sigma' \prec \tau$; y debe verificar necesariamente $f(\sigma') < f(\tau)$ (nuevamente por Lema 4.2.6). En particular $f(\sigma') < f(\nu')$. Luego, ν' es cara regular de f. Pero $f(\nu') < f(\sigma)$, que era el mínimo de las caras regulares. Esta contradicción provino de suponer que existe $\nu' \prec \sigma$ con $f(\nu') \geq f(\tau)$ para el caso en que la cara regular σ toma el menor valor posible entre las caras regulares. Por lo tanto, el mínimo valor que puede tomar f en σ sin alterar el gradiente V_f es $f(\tau)$, por lo que $f(\sigma) = f(\tau)$ en este caso. Si ahora σ es una cara regular que toma cualquier valor y existiera nuevamente $\nu' \prec \sigma$ con $f(\nu') \geq f(\tau)$, el mismo razonamiento nos diría que ν' es cara regular de un $\sigma' \prec \tau$. Podemos usar un argumento inductivo para hallar que $f(\sigma') = f(\nu')$, de donde obtendríamos $f(\sigma') < f(\tau) \leq f(\nu') = f(\sigma')$; nuevamente una contradicción.

Para *(v)*, simplemente notar que si c es un entero positivo menor a $\max_{\sigma \in K}\{f(\sigma)\}$ que no está en la imagen de f, entonces la función de Morse combinatoria dada por

$$\tilde{f}(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{si } f(\sigma) \leq c-1 \\ f(\sigma) - 1 & \text{si } f(\sigma) \geq c+1 \end{cases}$$

determina el mismo gradiente que f y toma valores menores a f, contradiciendo que f es normalizada.

Finalmente, *(vi)* se desprende de *(iii)* y del hecho que toda componente conexa de K posee un mínimo, que es necesariamente un punto crítico de la función. □

La demostración del punto *(iv)* de la Proposición anterior forma parte de un resultado más general sobre funciones de Morse combinatorias que es a su vez demasiado técnico para introducirlo independientemente. Aprovechando que ya lo hemos demostrado y que será utilizado una vez más en el futuro, lo dejamos asentado a continuación como un lema.

Lema 5.1.7. *Sea f una función de Morse combinatoria sobre un complejo simplicial finito K. Si $\sigma \prec \tau$ es una cara regular que toma el menor valor en el conjunto de caras regulares de f entonces*

$$f(\tau) > f(\nu)$$

para todo $\nu \prec \sigma$.

Dada una función de Morse combinatoria f, una *normalización* de f es una función de Morse normalizada g tal que $f \sim g$. A continuación estableceremos los resultados principales de la sección: un procedimiento (algoritmo) de normalización de funciones de Morse y la unicidad de las funciones de Morse normalizadas. Antes, una observación.

Observación 5.1.8. Toda función de Morse combinatoria f sobre K es equivalente a una función de Morse combinatoria g que verifique

1. $\text{mín}_{\sigma \in K}\{g(\sigma)\} = 0$
2. $Im(g) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

En efecto, primero debemos hacer a f equivalente a una función de Morse discreta $\tilde{g}$ que toma valores en $\mathbb{Z}$. Esto es fácil tomando en cuenta que K es finito (por ejemplo, se pueden dilatar los valores en conjunto para que cada vez que dos símplices que toman diferentes valores éstos caigan en intervalos $[n, n+1)$ distintos y luego considerar la parte entera de cada valor). Finalmente, sumamos a $\tilde{g}$ su mínimo para hallar la g buscada. A una tal función g la llamamos *función de Morse entera*.

Sea f una función de Morse entera sobre K (definida en la observación anterior). La idea detrás del algoritmo de normalización para f es ir modificando sus valores desde los símplices que toman valores menores a los que toman mayores, de la siguiente manera:

- Los valores de los símplices que toman el valor cero no son modificados.
- Si a es el primer valor no nulo que toma f modificamos a los símplices de $f^{-1}(a)$ en orden decreciente según la dimensión: si σ es un simplex de dimensión máxima en este conjunto modificamos $f(\sigma)$ para que sea el menor valor en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ que no altere el gradiente de f; así continuando hasta agotar los símplices que toman el valor a.
- Si b es el próximo mínimo valor no nulo que toma f aparte de a se procede de idéntica manera. Continuamos hasta agotar los valores de f.

Ahora, formalmente.

Algoritmo de normalización. Sea f una función de Morse combinatoria sobre un complejo simplicial finito K. Vamos a construir una normalización $\hat{f}$ de f. Como vimos en la observación anterior podemos suponer que $f : K \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y que $\text{mín}_{\sigma \in K}\{f(\sigma)\} = 0$. Sea $\{a_0 = 0, a_1, a_2, ..., a_r\}$ el conjunto de valores que toma f, donde $a_i < a_j$ si $0 \leq i < j \leq r$. Vamos a ir modificando inductivamente los valores que toma f en cada conjunto de símplices $f^{-1}(a_s)$ por valores menores, obteniendo una función de Morse combinatoria f_s en cada caso que coincidirá con f en $f^{-1}(\{a_{s+1}, ..., a_r\})$. Pongamos $f_0 = f$. Supuesto que tenemos definida f_s para $0 \leq s < r$, consideremos el valor a_{s+1} (que, por construcción, no es uno de los modificados). Escribamos $f_s^{-1}(a_{s+1}) = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$, donde $\dim(\sigma_i) \geq \dim(\sigma_j)$ si $1 \leq i \leq j \leq k$. Definimos el valor de f_{s+1} nuevamente por inducción: sea $f_{s+1}^0 = f_s$, y supuesto definido f_{s+1}^i para $0 \leq i < k$, definimos $f_{s+1}^{i+1}(\sigma) = f_{s+1}^i(\sigma)$ si $\sigma \neq \sigma_{i+1}$ y

$$f_{s+1}^{i+1}(\sigma_{i+1}) = \begin{cases} \text{máx}\{f_{s+1}^i(\nu) : \nu \prec \sigma_{i+1}\} + 1 & \text{si } \sigma_{i+1} \text{ es crítico} \\ f_{s+1}^i(\tau) & \text{si } \sigma_{i+1} \text{ es cara regular de } \tau \\ \text{máx}\{f_{s+1}^i(\nu') : \nu' \prec \sigma_{i+1}, \nu' \neq \nu\} + 1 & \text{si } \sigma_{i+1} \text{ tiene por cara regular a } \nu \end{cases}$$

Definimos finalmente $f_{s+1} = f_{s+1}^k$ y $\hat{f} = f_r$.

Teorema 5.1.9. *La función $\hat{f}$ es una normalización de f.*

Demostración. En lo que sigue utilizaremos las notaciones anterior. Probamos el resultado en dos pasos.

- **$\hat{f}$ es una función de Morse combinatoria equivalente a f.**

Por la Observación 5.1.2 nos alcanza con probar que $\hat{f}$ es *equivalente* a f. Veamos entonces que en cada paso del proceso de normalización no es alterado el gradiente de f. Para ello, mostramos que $V_{f_s} = V_f$ para todo s con un argumento inductivo. Como $f_0 = f$, entonces el caso $s = 0$ es trivial. Supongamos que $V_{f_s} = V_f$ y veamos que $V_{f_{s+1}} = V_f$. Nuevamente, haremos inducción en i. Como $f^0_{s+1} = f_s$ entonces $V_{f^0_{s+1}} = V_{f_s} = V_f$ (por hipótesis inductiva en s). Supongamos que $V_{f^i_{s+1}} = V_f$ y veamos que $V_{f^{i+1}_{s+1}} = V_f$. Sea $\sigma = \sigma_{i+1} \in f^{-1}(a_{s+1})$ el simplex correspondiente al paso $i+1$.

- Si σ es un simplex crítico para f^i_{s+1} entonces $\nu \prec \sigma \prec \tau$ implica $f^i_{s+1}(\nu) < f^i_{s+1}(\sigma) < f^i_{s+1}(\tau)$. Por lo tanto, σ puede tomar cualquier valor entre $\max\{f^i_{s+1}(\nu) : \nu \prec \sigma\} + 1$ y $\min\{f^i_{s+1}(\tau) : \tau \succ \sigma\} - 1$ sin alterar el gradiente de f^i_{s+1}. Como el valor asignado a $f^{i+1}_{s+1}(\sigma)$ es precisamente uno de estos valores, entonces se tiene $V_{f^{i+1}_{s+1}} = V_f$.

- El caso en que σ es un top simplex regular estamos en una situación similar, salvo que el máximo lo tomamos sobre las caras inmediatas distintas de la única $\nu \prec \sigma$ con $f(\nu) \geq f(\sigma)$. En este caso también tendremos $V_{f^{i+1}_{s+1}} = V_f$.

- El caso cuando σ es una cara regular requiere más cuentas. Sabemos que existe $\tau \succ \sigma$ con $f(\sigma) \geq f(\tau)$ y que, además, para todo $\nu \prec \sigma$ se tiene $f(\nu) < f(\sigma)$ y para todo $\tau' \neq \tau$, $f(\sigma) < f(\tau')$. Luego, las restricciones que tenemos que tener en cuenta para no modificar el gradiente de f^i_{s+1} son

  1. $f^{i+1}_{s+1}(\sigma) \leq \min\{f^i_{s+1}(\tau') : \tau' \succ \sigma \text{ y } \tau' \neq \tau\} - 1$
  2. $f^{i+1}_{s+1}(\sigma) \geq \max\{\{f^i_{s+1}(\nu) + 1 : \nu \prec \sigma\}, f^i_{s+1}(\tau)\}$.

  Ahora, como f^i_{s+1} fue obtenida por el algoritmo de normalización entonces si $\bar{\sigma} \prec \bar{\tau}$ es una cara regular de f que toma un valor menor a a_{s+1} se verificará $f^i_{s+1}(\bar{\sigma}) = f^i_{s+1}(\bar{\tau})$. El Lema 5.1.7 aplicado a f^i_{s+1} muestra que $f^i_{s+1}(\tau) > f^i_{s+1}(\nu)$ para todo $\nu \prec \sigma$. Por lo tanto, el máximo del punto 2 es directamente $f^i_{s+1}(\tau)$. Como $f^{i+1}_{s+1}(\sigma)$ es elegido por el algoritmo para tomar este valor, entonces $V_f = V_{f^{i+1}_{s+1}}$.

Esto termina de probar que el proceso de normalización no altera el gradiente de la función original. Luego, la $\hat{f}$ generada es una función de Morse combinatoria equivalente a la original.

- **$\hat{f}$ es una función de Morse normalizada**.

Para ver ahora que la función generada está normalizada sólo debemos chequear que vale la definición. Sea $g \sim f$ una función de Morse combinatoria con $g \leq f$ y supongamos que $g \neq f$. Sea σ el simplex de mínimo valor a_s en $\hat{f}$ para el que $g(\sigma) < \hat{f}(\sigma)$. Analizamos las tres posibilidades:

- Si σ es crítico entonces σ no puede ser un vértice (pues $\hat{f}$ y g necesariamente coinciden en los vértices por Proposición 5.1.6) y $\hat{f}(\sigma) = \max\{f_s(\nu) : \nu \prec \sigma\} + 1$. Luego, si este máximo se alcanza en ν' entonces

$$g(\sigma) < \hat{f}(\sigma) = f_s(\nu') + 1 = \hat{f}(\nu') + 1 = g(\nu') + 1$$

  Esta última igualdad vale por la minimalidad del valor de σ. Luego, $g(\sigma) \geq g(\nu')$. Esto contradice que σ es crítico para g también.

- Si σ es un top simplex regular (no puede tratarse de un vértice) entonces existe un $\nu \prec \sigma$ con $f(\nu) \geq f(\sigma)$ y tenemos definido en este caso $\hat{f}(\sigma) = \max\{f_s(\nu') : \nu' \prec \sigma, \nu' \neq \nu\} + 1$. Si este máximo se alcanza en ν'' una cuenta análoga al punto anterior nos muestra que $g(\sigma) \leq \hat{f}(\nu'') = g(\nu'')$, lo que le da a σ dos caras regulares, cosa que no puede suceder.

- Si σ es cara regular entonces existe $\tau \succ \sigma$ con $f(\sigma) \geq f(\tau)$ y tenemos definido $\hat{f}(\sigma) = f_s(\tau)$. Pero entonces, $g(\sigma) < \hat{f}(\tau) = g(\tau)$, contradiciendo que $V_g = V_f$.

Con esto hemos probado que la función obtenida del algoritmo es normalizada y, por lo tanto, $\hat{f}$ es una normalización de f. Esto concluye la demostración. □

Ejemplo 5.1.10. La Figura 5.2 muestra el funcionamiento del algoritmo de normalización.

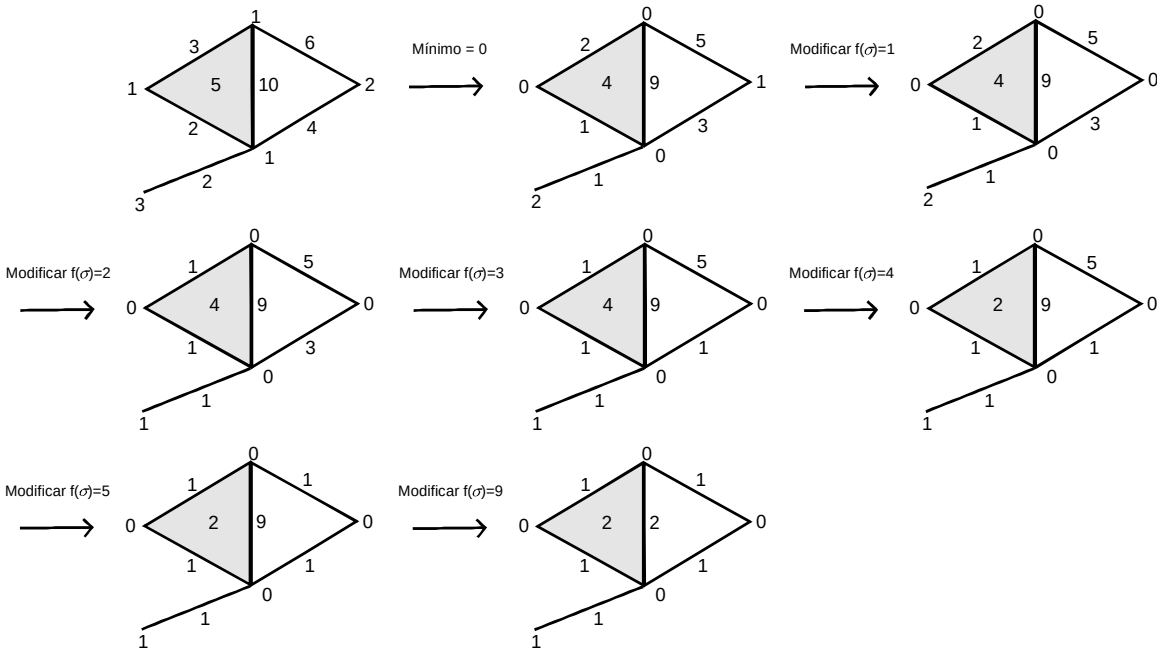

Figura 5.2: Algoritmo de normalización.

Existe una caracterización muy interesante de la normalización de una función de Morse combinatoria en el contexto de los conjuntos parcialmente ordenados. La presentamos a continuación.

Definición 5.1.11. Un *preorden* $\preccurlyeq$ en un conjunto P es una relación reflexiva y transitiva. En este caso decimos que $(P, \preccurlyeq)$ es un *conjunto preordenado*.

En otras palabras, un conjunto preordenado es un poset sin la condición de antisimetría. Esto es, pueden existir elementos a y b en el conjunto con $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq a$ pero que $a \neq b$. Vamos a ver que una función de Morse combinatoria determina un preorden en el conjunto de vértices del complejo dominio.

Definición 5.1.12. Sea K un complejo simplicial finito y $f : K \to \mathbb{R}$ una función de Morse combinatoria. Definimos la relación $\preccurlyeq_f$ en S_K declarando que $\sigma \preccurlyeq_f \tau$ si $\sigma \prec \tau$ y que $\sigma \succcurlyeq_f \tau$ si además $f(\sigma) \geq f(\tau)$. El conjunto preordenado $(S_K, \preccurlyeq_f)$ que se obtiene cerrando $\preccurlyeq_f$ por transitividad se llama *conjunto preordenado asociado a* f.

Como en lo que sigue trabajaremos con una función de Morse combinatoria fija, omitiremos el subíndice f y escribiremos $\preccurlyeq_f = \preccurlyeq$.

Ejemplo 5.1.13. Si $K = \{a, b, \{a, b\}\}$ (el 1-simplex) con la función de Morse combinatoria trivial entonces $\preccurlyeq$ resulta un orden parcial.

Ejemplo 5.1.14. Si $K = \{a, b, \{a, b\}\}$ (el 1-simplex) con la función de Morse combinatoria dada por $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ y $f(\{a, b\}) = 1$ entonces se tiene que $b \preccurlyeq \{a, b\}$ y $b \succcurlyeq \{a, b\}$.

Definición 5.1.15. Sea K un complejo simplicial finito, f una función de Morse combinatoria y $(S_K, \preccurlyeq)$ el conjunto preordenado asociado a f. Para un $\sigma \in K$ definimos *altura* de σ en $(S_K, \preccurlyeq)$ como

$$h_f(\sigma) = \text{máx}\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \sigma = \sigma_n \succcurlyeq \sigma_{n-1} \succcurlyeq ... \succcurlyeq \sigma_0 \text{ donde } \sigma_{i+1} \not\preccurlyeq \sigma_i\}.$$

Esto es, la altura de un simplex en $(S_K, \preccurlyeq)$ es la cantidad de símplices en una cadena maximal de él. El siguiente teorema muestra la relación entre la normalización de una función de Morse combinatoria y el conjunto preordenado asociado a ella.

Teorema 5.1.16. *Sea K un complejo simplicial finito, f una función de Morse combinatoria y $(S_K, \preccurlyeq)$ el conjunto preordenado asociado a f. Entonces $\hat{f} = h_f$.*

Demostración. Por simplicidad de notación denotaremos a h_f como h. Es inmediato que $h(K) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y que h toma el valor 0. Notemos que si $\sigma \prec \tau$ verifica $f(\sigma) \geq f(\tau)$ entonces $\sigma \preccurlyeq \tau$ y $\tau \preccurlyeq \sigma$, de donde $h(\sigma) = h(\tau)$. Si en cambio, $f(\sigma) < f(\tau)$ entonces $\sigma \preccurlyeq \tau$ y $h(\sigma) < h(\tau)$ porque el gradiente de f no admite caminos cerrados no estacionarios. Luego, $h \sim f$ y, en particular, es una función de Morse combinatoria (por Observación 5.1.2).

Para ver que h es normalizada consideremos $g : K \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ una función de Morse combinatoria que verifique $g \sim f \sim h$ y $g \leq h$. Supongamos que $g \neq h$ y sea $\sigma \in K$ el simplex que toma el menor valor (con respecto a g) entre todos los símplices tales que $g(\sigma) < h(\sigma)$. Luego, $h(\sigma) = r \geq 1$. Sea C una cadena maximal $\sigma = \sigma_r \succcurlyeq \sigma_{r-1} ... \succcurlyeq \sigma_0$ donde $\sigma_{i+1} \not\preccurlyeq \sigma_i$. Consideremos $\sigma_{r-1} \preccurlyeq \sigma$. Debe existir entonces una cadena $\sigma \succcurlyeq \nu_1 \succcurlyeq ... \succcurlyeq \nu_t \succcurlyeq \sigma_{r-1}$ de desigualdades en la relación original (antes de cerrar por transitividad). Observemos que no puede suceder que $\nu_i \preccurlyeq \nu_{i+1}$ para cada i pues sería $\sigma \preccurlyeq \sigma_{r-1}$, lo que contradice la construcción de C. Observemos también que no pueden existir $\nu_i \not\preccurlyeq \nu_{i+1}$ y $\nu_j \not\preccurlyeq \nu_{j+1}$ con $i \neq j$ pues de lo contrario podemos hallar un elemento entre σ y σ_{r-1}, lo que contradice la maximalidad de C. Por lo tanto, debe existir un único i_0 tal que $\nu_{i_0} \not\preccurlyeq \nu_{i_0+1}$. Entonces debemos tener que $\nu_{i_0+1} \prec \nu_{i_0}$ y $f(\nu_{i_0+1}) < f(\nu_{i_0})$ (pues, de lo contrario, $f(\nu_{i_0}) \geq f(\nu_{i_0+1})$ contradiciendo que $\nu_{i_0} \not\preccurlyeq \nu_{i_0+1}$). Como para cada $i \neq i_0$ se tiene que $\nu_i \preccurlyeq \nu_{i+1}$ entonces

1. $\nu_{i_0+1} \preccurlyeq \sigma_{r-1}$ y $\nu_{i_0+1} \succcurlyeq \sigma_{r-1}$
2. $\nu_{i_0} \preccurlyeq \sigma$ y $\nu_{i_0} \succcurlyeq \sigma$.

En particular, $h(\nu_{i_0}) = h(\sigma)$ y $h(\nu_{i_0+1}) = h(\sigma_{r-1})$. Entonces, de la minimalidad de σ y del hecho que $g \sim f$, se deduce que

$$h(\sigma_{r-1}) = h(\nu_{i_0+1}) = g(\nu_{i_0+1}) < g(\nu_{i_0}) < h(\nu_{i_0}) = h(\sigma),$$

de donde $h(\sigma) - h(\sigma_{r-1}) \geq 2$. Debe existir entonces un σ' con $\sigma \gtrdot \sigma' \gtrdot \sigma_{r-1}$, contradiciendo la maximalidad de C. □

Como fue comentado, el segundo resultado principal de la sección es la unicidad de funciones de Morse normalizadas: si dos tales funciones son equivalentes entonces son idénticas. Necesitamos algunos resultados previos.

Observación 5.1.17. Si f y g son funciones de Morse combinatorias definidas sobre el mismo complejo simplicial K, no es necesariamente cierto que $h = min\{f, g\}$ sea una función de Morse combinatoria. En la Figura 5.3 puede verse un ejemplo en el que se tiene $\sigma \prec \tau$, $\sigma \prec \tau'$ y $\tau \neq \tau'$ pero $h(\sigma) = h(\tau) = h(\tau')$, cosa que no puede suceder en una función de Morse combinatoria.

Figura 5.3: Contraejemplo que $min\{f, g\}$ no es de Morse.

Proposición 5.1.18. *Si f y g son funciones de Morse combinatorias equivalentes entonces $h = min\{f, g\}$ es una función de Morse. Más aún, $f \sim h \sim g$.*

Demostración. Por la Observación 5.1.2 nos alcanza con ver que $h \sim f$. Sea $\sigma \prec \tau$ y veamos que $f(\sigma) \geq f(\tau)$ si, y sólo si, $h(\sigma) \geq h(\tau)$. Supongamos que $f(\sigma) \geq f(\tau)$. Luego, $f(\sigma) \geq f(\tau) \geq h(\tau)$ y $g(\sigma) \geq g(\tau) \geq h(\tau)$; por lo que $h(\sigma) = \text{mín}\{g(\sigma), f(\sigma)\} \geq h(\tau)$, como queríamos probar. Si ahora $h(\sigma) \geq h(\tau)$ entonces $f(\sigma) \geq h(\sigma) \geq h(\tau)$ y $g(\sigma) \geq h(\sigma) \geq h(\tau)$. Luego, $h(\tau) = min\{f(\tau), g(\tau)\} \leq f(\sigma), g(\sigma)$. Ahora, si $h(\tau) = f(\tau)$ entonces $f(\tau) = h(\tau) \leq h(\sigma) \leq f(\sigma)$. Si, en cambio, $h(\tau) = g(\tau)$ entonces $g(\tau) = h(\tau) \leq h(\sigma) \leq g(\sigma)$, y como $g \sim f$ entonces $f(\tau) \leq f(\sigma)$. Esto concluye la demostración. □

Observación 5.1.19. Notemos que, en particular, si f es una función de Morse normalizada sobre K entonces $\text{mín}\{f, g\} = f$ para toda $g : K \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ equivalente a f.

Teorema 5.1.20. *Dos funciones de Morse normalizadas y equivalentes son idénticas. En particular, la normalización de una función de Morse combinatoria es única.*

Demostración. Si dichas funciones son f y g entonces se tiene $f = min\{f, g\} = g$, por la Observación 5.1.19. □

Este teorema nos dice que la deformación inducida por una función de Morse discreta está determinada a nivel combinatorio por valores únicos asignados a los símplices del complejo simplicial. Esto es, hay una única manera *normalizada* o *canónica* de codificar una deformación sobre K. Estos valores proporcionan entonces un invariante combinatorio del complejo simplicial que puede ser utilizado para estudiar propiedades homotópicas de los poliedros que modelan.

El estudio de las potenciales propiedades y herramientas combinatorias que puede llegar a producir la teoría de funciones de Morse normalizadas no será desarrollado en este trabajo. Por ahora nos ocuparemos de introducir algunas definiciones e ideas para mostrar de qué manera es posible extraer alguna característica numérica de los complejos muñidos de alguna función de Morse combinatoria. Al final de la sección planteamos algunas preguntas y caminos en los que puede encaminarse la teoría.

Definición 5.1.21. Dado un complejo simplicial finito K y una función de Morse combinatoria $f : K \to \mathbb{R}$, definimos la *característica* de f por

$$\kappa(f) = \sum_{\sigma \in K} (-1)^{\dim(\sigma)} \hat{f}(\sigma) \tag{5.1}$$

donde $\hat{f}$ es la normalización de f. En particular, cuando $f(\sigma) = \dim(\sigma)$ llamamos al número $\kappa(f)$ la *característica de Morse* de K y lo notamos $\kappa(K)$.

Ejemplo 5.1.22. La característica de Morse de Δ^n es -1 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.1.23. *Sea $f : K \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ una función de Morse combinatoria. Si f tiene un único punto crítico entonces $\kappa(f) = 0$.*

Demostración. Simplemente notar que si σ es cara regular de τ entonces $\hat{f}(\sigma) = \hat{f}(\tau)$ y aparecen con signos opuestos en la suma de $\kappa(f)$. Luego, tendremos $\kappa(f) = \hat{f}(v)$ para el único vértice crítico de f. Por Proposición 5.1.6, $\hat{f}(v) = 0$. □

La vuelta no es cierta, como muestra la función de Morse trivial del complejo de la Figura 5.4.

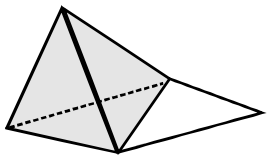

Figura 5.4: La función $f(\sigma) = dim(\sigma)$ de este complejo verifica $\kappa(f) = 0$.

Corolario 5.1.24. *Si K es colapsable existe una función de Morse combinatoria f con $\kappa(f) = 0$.*

Demostración. Es inmediato del Corolario 4.3.7 y la Proposición 5.1.23. □

El estudio de las propiedades combinatorias de las funciones de Morse normalizadas parece ser interesante y viable. Algunas ideas para trabajos futuros incluyen el estudio de la característica de funciones de Morse combinatorias y el estudio de los valores que toma su función normalizada con multiplicidad (llamado el rango de la función) y la relación de estos invariantes con otros invariantes combinatorios y topológicos conocidos como la característica de Euler, grupos de homotopía y homología, f-vectores, etc. Otro posible ángulo de investigación consiste en dar una clasificación de complejos según las propiedades combinatorias y numéricas de las funciones de Morse definidas sobre él.

5.2. El poset de funciones de Morse normalizadas no triviales

Para un complejo simplicial finito K notamos $M(K)$ al conjunto de funciones normalizadas no triviales sobre K; esto es, $M(K) = \{f : K \to Z_{\geq 0} : f \text{ de Morse normalizada no trivial}\}$. Definimos sobre $M(K)$ un orden parcial declarando que $f \lesssim g$ si para todo $\sigma < \tau$ con $f(\sigma) \geq f(\tau)$ se tiene que $g(\sigma) \geq g(\tau)$. Es fácil ver que esta relación es reflexiva y transitiva. Además, si $f \lesssim g$ y $g \lesssim f$ entonces $f \sim g$ (equivalente) por definición de equivalencia; luego, por la unicidad de las funciones normalizadas, se tiene $f = g$.

Definición 5.2.1. El conjunto parcialmente ordenado $(M(K), \lesssim)$ se llama el *poset de funciones de Morse normalizadas no triviales* sobre K. Lo notaremos simplemente $M(K)$ asumiendo implícitamente su relación de orden.

Observación 5.2.2. El orden parcial en $M(K)$ dice que $f \lesssim g$ si todos los pares regulares $\sigma \prec \tau$ de f también son pares regulares de g. Como esta información determina completamente el campo gradiente de una función de Morse combinatoria, esto quiere decir que toda flecha del campo gradiente de f está en el campo gradiente de g (i.e., f son algunas de las deformaciones de g).

Notar que los elementos minimales de $M(K)$ son los que corresponden a funciones de Morse normalizadas que codifican una única cara regular. Vamos usualmente a notar (σ, τ) a la función minimal f en $M(K)$ que verifica $f(\sigma) \geq f(\tau)$ y $f(\sigma') < f(\tau')$ para todo $\sigma' < \tau'$ con $\sigma \neq \sigma'$ y $\tau \neq \tau'$.

Ejemplo 5.2.3. La Figura 5.5 muestra ejemplos del poset $M(K)$ para el caso $K = \Delta^1$, $\dot{\Delta}^2$ y Δ^2.

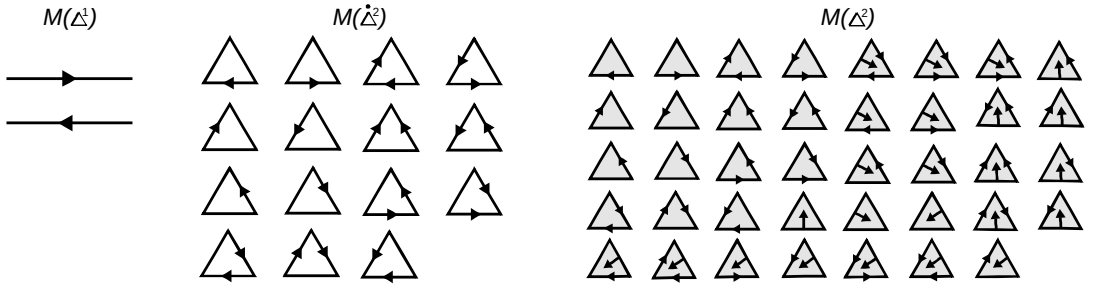

Figura 5.5: Poset de funciones de Morse normalizadas no triviales.

Nuestro interés primordial en el poset $M(K)$ es el complejo simplicial que tiene asociado. Para ello, vamos a recordar la relación que existe entre posets y complejos simpliciales y establecer algunas características de $M(K)$ en este contexto.

Para un poset $(P, \leq)$ queda inducido un complejo simplicial $\mathcal{K}(P)$ cuyos vértices son los elementos de P y cuyos símplices son los subconjuntos finitos no vacíos totalmente ordenados de P. Recíprocamente, dado un complejo simplicial (no necesariamente finito) K, queda determinado un poset $\mathcal{X}(K)$ cuyos elementos son los símplices de K y donde el orden parcial viene dado por la inclusión de símplices. Estas construcciones no son recíprocas. De hecho, la construcción de $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ coincide con la construcción combinatoria de la primera subdivisión baricéntrica de K; esto es, $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$. Es fácil ver además que no todo poset proviene de un complejo simplicial ni todo complejo simplicial proviene de un poset.

Observación 5.2.4. El complejo $\dot{\Delta}^{n+1}$ no proviene de ningún poset (cualquiera sea n).

Existe una manera conveniente de visualizar un poset finito P como un grafo dirigido. El *diagrama de Hasse* de P es el grafo dirigido $\mathcal{G}_P$ cuyos vértices son los elementos de P y cuyas aristas son los pares (x, y) tales que $x < y$ pero no existe $x < z < y$.

Ejemplo 5.2.5. La Figura 5.6 muestra el diagrama de Hasse del 3-simplex.

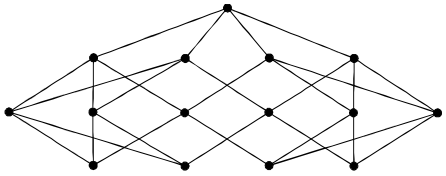

Figura 5.6: Diagrama de Hasse de Δ^3.

Definición 5.2.6. Decimos que un poset finito P es un *lattice reducido* si todo subconjunto de P acotado superiormente tiene supremo.

Ejemplo 5.2.7. El poset asociado $\mathcal{X}(K)$ a un complejo simplicial finito K es un lattice reducido pues dos símplices que son cara de un simplex más grande tienen como supremo al simplex cuyos vértices es la unión de los vértices de ambos..

Ejemplo 5.2.8. Los posets cuyo diagrama de Hasse son árboles binarios son lattices reducidos.

El siguiente lema es de extrema utilidad para caracterizar a los lattices reducidos.

Lema 5.2.9. *Sea P un poset finito. Son equivalentes:*

(i) P es un lattice reducido.

(ii) Todo subconjunto de P acotado inferiormente tiene ínfimo.

(iii) Todo subconjunto de dos elementos de P acotado superiormente (resp. inferiormente) posee supremo (resp. ínfimo).

Demostración. Para ver que *(i)* implica *(ii)* sea $P' = \{p_1, ..., p_n\}$ un subconjunto de P acotado inferiormente. Consideremos el subconjunto $Q = \{p \in P \mid p \leq p_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}$. El conjunto Q está acotado superiormente por cada p_i, por lo que existe $q = \sup Q$. Ahora, $q \leq p_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ y si $p \leq p_i$ para todo i entonces $p \leq q$. Luego, $q = \text{ínf } P'$. De análoga manera tenemos que *(ii)* implica *(i)*.

Como la implicación *(ii)* a *(iii)* es trivial sólo debemos probar que *(iii)* implica *(ii)*. Sea nuevamente $P' = \{p_1, ..., p_n\}$ un subconjunto de P acotado inferiormente. Hacemos inducción en n, siendo el caso $n = 2$ directo de la hipótesis. Si $n > 2$ consideremos $P'' = P' - \{p_n\}$. Por hipótesis inductiva P'' posee un ínfimo q''. Como $\{q'', p_n\}$ es un subconjunto de dos elementos acotado inferiormente, entonces tiene un ínfimo q. Ahora, por un lado, $q \leq q'' \leq p_i$ para todo $1 \leq i \leq n-1$ y $q \leq p_n$. Por otro lado, si $p \leq p_i$ para todo i entonces $p \leq q''$ y $p \leq p_n$, por lo que $p \leq q$. Por lo tanto, q es el ínfimo de P' y el lema queda demostrado. □

El Ejemplo 5.2.7 muestra que para que un poset provenga de un complejo simplicial debe ser necesariamente un lattice reducido. Sin embargo, no es cierto que todo lattice reducido provenga de un complejo simplicial. El siguiente resultado establece la condición necesaria y suficiente para que esto ocurra.

Proposición 5.2.10. *Un lattice reducido finito P es $\mathcal{X}(K)$ para un cierto complejo simplicial K si, y sólo si, todo elemento $z \in P$ es el supremo de los elementos minimales menores o iguales a z y no es supremo de ningún otro conjunto.*

Demostración. Si $P = \mathcal{X}(K)$ y $z \in P$ entonces $z = \sigma \in K$. Los elementos minimales de z son entonces los vértices de σ y el resultado es directo. Si ahora P es un lattice reducido finito que verifica la hipótesis mencionada, podemos definir un complejo simplicial K cuyos vértices son los elementos minimales de P y cuyos n-símplices son los conjuntos $\{p_0, ..., p_n\}$ de vértices acotados superiormente. Afirmamos que $P = \mathcal{X}(K)$. En efecto, podemos hacer corresponder a cada $z \in P$ con el simplex $\sigma = \{p_0, ..., p_n\} \in K$ cuyos vértices son los elementos minimales menores o iguales a z. Por hipótesis, z debe ser el supremo de $\{p_0, ..., p_n\}$, lo que prueba la biyectividad de la asignación (pues sólo puede ser supremo de este conjunto). Es fácil ver que además la inclusión de símplices de K se corresponde con la relación de orden de P. Esto demuestra la proposición. □

Para más detalles sobre lattices reducidos y la relación entre posets y complejos simpliciales, el lector puede consultar [Bar]. Podemos ahora caracterizar el poset de funciones de Morse normalizadas.

Teorema 5.2.11. *El poset $M(K)$ es un lattice reducido y cumple las hipótesis de la Proposición 5.2.10. En particular, $M(K) = \mathcal{X}(L)$ para cierto complejo simplicial L.*

Demostración. Sean f y g dos funciones de Morse normalizadas tales que $f, g \lesssim h$ para cierta $h \in M(K)$. Si existe un $\sigma \in K$ que es cara regular de h pero no lo es de f ni de g entonces redefinamos V_h para que tome el valor 0 en σ. Notar que este nuevo campo vectorial combinatorio V no admite tampoco V-caminos cerrados no estacionarios. Procedemos de idéntica manera para toda cara regular de h que no sea cara regular de f ni de g a fin de obtener un campo vectorial V sin V-caminos cerrados no estacionarios. Por el Teorema 4.4.3 existe una función de Morse combinatoria f' tal que $V = V_{f'}$. Veamos que $\hat{f}'$ es el supremo de $\{f, g\}$. Si $\sigma \prec \tau$ y $\hat{f}'(\sigma) \geq \hat{f}'(\tau)$ entonces σ es cara regular de f' y, luego, de f o de g. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que σ es cara regular de f. Luego, existe $\tau' \succ \sigma$ tal que $f(\sigma) \geq f(\tau')$. Como $f' \geq f$ entonces $\hat{f}'(\sigma) \geq \hat{f}'(\tau')$; luego, $\tau = \tau'$. Por lo tanto, $f(\sigma) \geq f(\tau)$. Si ahora h es una cota superior de $\{f, g\}$ entonces, en particular, $h \geq f$. Luego, $h(\sigma) \geq h(\tau)$ y, por lo tanto, $\hat{f}' \lesssim h$. Esto prueba que $M(K)$ es un lattice reducido.

Es sencillo ver que además $M(K)$ está en las condiciones de la Proposición 5.2.10 pues las funciones minimales son las que codifican una única cara regular y cualquier $f \in M(K)$ queda determinada exactamente por las funciones minimales que codifican sus diferentes caras regulares. □

Es precisamente este complejo simplicial L que se desprende de la Proposición 5.2.11 el que ocupará el lugar estelar en lo que resta de esta tesis. En la próxima sección lo definiremos de una manera más directa y estudiaremos sus principales propiedades.

5.3. Espacio de deformaciones

Definición 5.3.1. Un conjunto de funciones de Morse normalizadas $\{f_1, ..., f_k\}$ en $M(K)$ se dice *compatible* si existe $h \in M(K)$ tal que $f_i \lesssim h$ para todo $i = 1, ..., k$. En particular, cuando $\{f, g\}$ sea compatible diremos que f y g son funciones de Morse compatibles.

Básicamente, un conjunto de funciones de Morse normalizadas es compatible si las flechas que codifica cada función pueden *convivir* en el complejo para dar otra función de Morse combinatoria. Observemos que por la misma definición de compatibilidad un conjunto compatible tiene a todos sus subconjuntos compatibles. Esta propiedad nos va a permitir asociarle al poset $M(K)$ un complejo simplicial que modele geométricamente las deformaciones que codifican sus funciones de Morse. Definimos este espacio en la siguiente

Definición 5.3.2. Dado un complejo simplicial finito K definimos el *espacio de deformaciones de* K como el complejo simplicial cuyos vértices son las funciones minimales en $M(K)$ y cuyos k-símplices son los conjuntos de $k+1$ vértices $\{f_0, ..., f_k\}$ compatibles. Denotamos este espacio por $\mathcal{M}(K)$.

Observación 5.3.3. Notar que la noción de compatibilidad de un conjunto de funciones de Morse normalizadas es equivalente a que dicho conjunto esté acotado superiormente en el poset de funciones de Morse normalizadas no triviales. Por lo tanto, el espacio de deformaciones de un complejo simplicial K es exactamente la construcción realizada en la Proposición 5.2.10. Luego, $\mathcal{X}(\mathcal{M}(K)) = M(K)$, y el complejo L de la Proposición 5.2.11 es exactamente $\mathcal{M}(K)$. En particular, se tiene que $\mathcal{K}(M(K)) = \mathcal{M}(K)'$.

Observación 5.3.4. Un dato colorido acerca del espacio de deformaciones de un complejo simplicial finito K es que este coincide con el nervio del cubrimiento $\mathcal{U}_0$ de $M(K)^{op}$ dado por los abiertos minimales de los elementos maximales de $M(K)^{op}$. Para definiciones se puede consultar [Bar].

Ejemplo 5.3.5. Es sencillo ver que $\mathcal{M}(\Delta^1)$ es el 0-complejo de dos puntos.

Ejemplo 5.3.6. El espacio de deformaciones de la primera subdivisión baricéntrica de Δ^1 se muestra en la Figura 5.7.

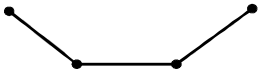

Figura 5.7: Espacio de deformaciones de $(\Delta^1)'$.

Ejemplo 5.3.7. El espacio de deformaciones de $\dot{\Delta}^2$ se muestra en la Figura 5.8.

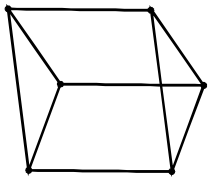

Figura 5.8: Espacio de deformaciones de $\dot{\Delta}^2$.

Ejemplo 5.3.8. Sea K el 1-complejo de vértices a, b, c y d y 1-símplices $\{a, b\}, \{b, c\}$ y $\{c, d\}$. La Figura 5.9 muestra $\mathcal{M}(K)$.

Ejemplo 5.3.9. Sea L el 1-complejo de vértices a, b, c y d y 1-símplices $\{a, b\}, \{a, c\}$ y $\{a, d\}$ (i.e., L es el cono de tres vértices). La Figura 5.10 muestra $\mathcal{M}(L)$.

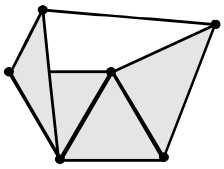

Figura 5.9: Espacio de deformaciones de K.

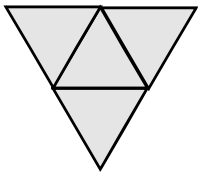

Figura 5.10: Espacio de deformaciones de L.

Ejemplo 5.3.10. Es fácil chequear que si $r \geq 2$ entonces el espacio de deformaciones del cono de un 0-complejo de r vértices es el complejo homogéneo de dimensión $r-2$ generado por $r-1$ $(r-2)$-símplices con un vértice exclusivo y un único $(r-2)$-simplex adyacente a todos los demás.

Definición 5.3.11. Para un complejo simplicial finito K y una función de Morse combinatoria sobre K definimos el *grado* de f como la cantidad de caras regulares que determine. Esto es,

$$\deg(f) = \sharp\{\sigma \in K \mid \exists\, \tau \succ \sigma \text{ tal que } f(\tau) \leq f(\sigma)\}.$$

Observación 5.3.12. Como las caras regulares y los top símplices regulares vienen en pares entonces $\deg(f) = \sharp\{\sigma \in K \mid \exists\, \nu \prec \sigma \text{ tal que } f(\nu) \geq f(\sigma)\}$.

Nota. Como los complejos simpliciales de dimensión 0 poseen espacios de deformaciones vacíos (pues no admiten funciones de Morse normalizadas no triviales) supondremos de aquí en más que $\dim(K) \geq 1$. Más aún, nos restringiremos al estudio de los complejos simpliciales conexos.

A continuación establecemos algunas propiedades básicas de los espacios de deformaciones. Las contenidas en la siguiente proposición son de fácil verificación.

Proposición 5.3.13. *Sea K un complejo simplicial finito conexo. Entonces, se tiene:*

(i) Hay tantos k-símplices en $\mathcal{M}(K)$ como funciones de Morse normalizadas de grado $k+1$.

(ii) Una función de Morse normalizada f es maximal en $M(K)$ si, y sólo si, el simplex $\{g_0, g_1, ..., g_r\}$ de todas las funciones minimales para las que $g_i \lesssim f$ es un simplex maximal en $\mathcal{M}(K)$.

(iii) La dimensión de $\mathcal{M}(K)$ es $\max_{f \in M(K)}\{\deg(f)\} - 1$.

Un resultado aún más interesante está contenido en la siguiente proposición. Antes de enunciarlo, recordemos que notamos con (σ, τ) a la función minimal f en $M(K)$ (o, equivalentemente, al vértice $f \in \mathcal{M}(K)$) que codifica a $\sigma \prec \tau$ como el único par regular de ella.

Proposición 5.3.14. *Si K contiene más de un 1-simplex entonces $\mathcal{M}(K)$ es conexo.*

Demostración. Sean f y g dos funciones minimales distintas en $M(K)$. Nos alcanza ver que podemos unirlas por un edge path en $\mathcal{M}(K)$. Si f y g son compatibles entonces son extremo del 1-simplex $\{f, g\}$ y no hay nada más que probar. Si, en cambio, f y g no fueran compatibles, analizamos individualmente los tres posibles casos:

- **f y g codifican la misma cara regular.** Escribamos $f = (\sigma, \tau)$ y $g = (\sigma, \tau')$. Tomemos $\upsilon \prec \tau$ y $\upsilon' \prec \tau'$ ninguno σ. Consideremos $f' = (\upsilon, \tau)$ y $g' = (\upsilon', \tau')$. Se tiene f compatible con g', g' compatible con f' y f' compatible con g. Luego, podemos unir f y g en $\mathcal{M}(K)$.

- **f y g codifican el mismo top simplex regular.** Escribamos $f = (\sigma, \tau)$ y $g = (\sigma', \tau)$. Si $dim(\tau) = 1$ entonces, como por hipótesis hay otro 1-simplex υ en K que tiene a σ o a σ' en el borde (por conexión), podemos construirnos la función $h = (\sigma'', \upsilon)$ (si $\upsilon =< \sigma, \sigma'' >$) que resulta compatible con f y con g. Luego, en este caso podemos unirlas. Si ahora $dim(\tau) \geq 2$ tomamos $\nu \prec \sigma$ y $\nu' \prec \sigma'$ con $\nu, \nu' \neq \sigma \cap \sigma'$ y nos construimos $f' = (\nu, \sigma)$ y $g' = (\nu', \sigma')$. Se tiene que f es compatible con g', g' es compatible con f' y f' es compatible con g.

- **f codifica una cara regular que es a su vez un top simplex regular para g.** Escribamos $f = (\sigma, \tau)$ y $g = (\nu, \sigma)$. Podemos escribir $\tau = v.\sigma$ para un vértice $v \in \tau$. Sea $h = (v, \{v, v'\})$ para cierto v'. Es fácil ver que f y g son compatibles con h.

□

Introducimos a continuación la definición de f-vector de un complejo simplicial. Estos objetos serán utilizados para determinar la cantidad de vértices en el espacio de deformaciones de un complejo simplicial y resultarán de gran utilidad en la última sección del capítulo.

Definición 5.3.15. Sea K un complejo simplicial finito de dimensión n. El f-vector de K es el vector $(f_0, ..., f_n) \in \mathbb{N}^n$ cuyas coordenadas f_k son la cantidad de k-símplices en K.

La caracterización de f-vectores de ciertos tipos de complejos simpliciales es un problema central de la geometría combinatoria. En nuestro desarrollo no necesitaremos más que su definición. Más información sobre la teoría de f-vectores puede encontrarse en [Gru].

Observación 5.3.16. Si K es un complejo simplicial finito cualquiera entonces la cantidad de vértices de $\mathcal{M}(K)$ es

$$(n+1)f_n + nf_{n-1} + \cdots + 3f_2 + 2f_1$$

donde $(f_0, ..., f_n)$ es el f-vector de K.

Supongamos que tenemos un subcomplejo L de un complejo simplicial finito K. Es fácil ver que $\mathcal{M}(L) \subset \mathcal{M}(K)$, pues las deformaciones llevadas a cabo en L pueden verse como tomando lugar dentro de K (o, análogamente, una función de Morse combinatoria sobre L puede extenderse a una función de Morse combinatoria sobre K de acuerdo a la Proposición 4.2.8). Formalizaremos este resultado como corolario de un resultado más general: los morfismos simpliciales inyectivos entre dos complejos simpliciales L y K (i.e., que induce una inyección en el conjunto de vértices V_L y V_K) inducen morfismos simpliciales inyectivos entre sus espacios de deformación.

Teorema 5.3.17. *Sean K y L complejos simpliciales finitos. Si $f : K \to L$ es un morfismo simplicial inyectivo entonces la función $f_* : \mathcal{M}(K) \to \mathcal{M}(L)$ dada por*

$$f_*((\sigma, \tau)) = (f(\sigma), f(\tau))$$

es un morfismo simplicial inyectivo.

Demostración. Notemos que si $\sigma \prec \tau$ en K, entonces $f(\sigma) \prec f(\tau)$ en L (por la inyectividad de f). Debemos ver que si $\{(\sigma_i, \tau_i)\}_i$ son compatibles entonces $\{(f(\sigma_i), f(\tau_i))\}_i$ son compatibles. Alcanza con probar que las funciones de este conjunto son compatibles dos a dos y que no forman caminos cerrados no estacionarios. Ahora, si $(f(\sigma), f(\tau))$ y $(f(\sigma'), f(\tau'))$ no son compatibles entonces $f(\sigma) = f(\sigma')$, $f(\tau) = f(\tau')$, $f(\sigma) = f(\tau')$ ó $f(\sigma') = f(\tau)$. En cualquier caso, la inyectividad de f determinaría que $(\sigma, \tau) \nsim (\sigma', \tau')$ por los mismos motivos. Esto constituye una contradicción. Si ahora $\{(f(\sigma_i), f(\tau_i))\}_i$ formaran un camino cerrado no estacionario entonces, en particular, $f(\sigma_{i+1}) \prec f(\tau_i)$ para todo i. Luego, $\sigma_{i+1} \prec \tau_i$ para todo i y se formaría un camino cerrado no estacionario, obteniendo nuevamente una contradicción.

Por último, la inyectividad de f_* es inmediata de la inyectividad de f. □

Corolario 5.3.18. *Si L es un subcomplejo de un complejo simplicial finito K entonces $\mathcal{M}(L)$ es un subcomplejo de $\mathcal{M}(K)$.*

Demostración. Simplemente considerar la inclusión $i : L \to K$ para hallar que $i_* : \mathcal{M}(L) \to \mathcal{M}(K)$ es morfismo simplicial inyectivo por Teorema 5.3.17. □

En la próxima sección estableceremos algunas propiedades más profundas del espacio de deformaciones de un complejo simplicial.

5.4. Propiedades de pegado y adjunción

Los espacios de deformaciones tienen una estructura muy compleja. Aún para complejos simpliciales simples, estos pueden ser de dimensiones muy grandes y contener muchos símplices. Nuestra intención en esta sección es presentar ciertos resultados que relacionen el espacio de deformaciones de un complejo simplicial con ciertos subcomplejos que posean una estructura más amena y fácil de calcular. De este modo podremos describir un espacio de deformaciones por medio de espacios más pequeños.

Recordemos de la Observación 4.2.5 que una función de Morse combinatoria siempre alcanza un mínimo en un vértice que resulta crítico. Sea entonces para un vértice $v \in K$ el subconjunto $M_v(K)$ de $M(K)$ conformado por todas las funciones de Morse normalizadas no triviales f que tienen a v como punto crítico (o, equivalentemente, $f(v) = 0$). $M_v(K)$ hereda el orden parcial de $M(K)$ y es cerrado bajo la acción de tomar subconjuntos de sus conjuntos de funciones compatibles. Luego, podemos asociar a $M_v(K)$ un complejo simplicial de idéntica forma que lo hicimos a $M(K)$. Esto motiva la introducción del espacio de deformaciones de K en el punto base v.

Definición 5.4.1. Dado un complejo simplicial finito K y un vértice $v \in K$ definimos el *espacio de deformaciones de K con punto base en v* (o *alrededor de v*) como el complejo simplicial cuyos vértices son las funciones minimales en $M_v(K)$ y cuyos k-símplices son los conjuntos de $k+1$ vértices $\{f_0, ..., f_k\}$ compatibles.

Muchas veces nos referiremos a $\mathcal{M}_v(K)$ como el *espacio local* de K en v y a $\mathcal{M}(K)$ como el *espacio total* de K.

Ejemplo 5.4.2. La Figura 5.11 muestra los posets de funciones de Morse normalizadas no triviales que tienen un vértices fijo crítico para los complejos del Ejemplo 5.2.3.

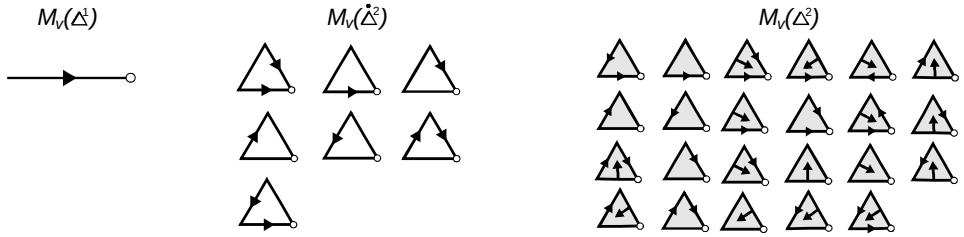

Figura 5.11: Poset de funciones normalizadas no triviales alrededor de v (representado en círculo blanco).

Ejemplo 5.4.3. No es difícil de chequear que $\mathcal{M}_v(\dot{\Delta}^2)$ coincide con el espacio de deformaciones del complejo simplicial del Ejemplo 5.3.6.

Ejemplo 5.4.4. El espacio de deformaciones local de Δ^2 se muestra en la Figura 5.12.

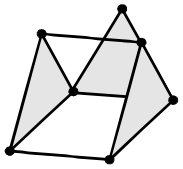

Figura 5.12: Espacio de deformaciones local de Δ^2.

El espacio de deformaciones alrededor de un punto base resulta una herramienta muy útil en esta teoría. Una comprobación en esta dirección es introducida en la siguiente

Proposición 5.4.5. *Sea K un complejo simplicial finito. Entonces se tiene*

(i) $\mathcal{M}_v(K) \subset \mathcal{M}(K)$

(ii) $\bigcup_{v \in V_K} \mathcal{M}_v(K) = \mathcal{M}(K)$.

Demostración. (i) es inmediato. *(ii)* es consecuencia del hecho que toda función de Morse combinatoria tiene un vértice crítico. □

Si K y L son dos complejos simpliciales con un vértice distinguido v entonces la unión en el punto v de K y L es el complejo simplicial que se obtiene de la unión disjunta de K y L identificando el vértice $v \in K$ con el vértice $v \in L$. Lo notamos $K \vee_v L$. Con el concepto de espacio de deformaciones local podemos hallar la relación entre el espacio total de un complejo simplicial que es la unión por un punto de dos de sus subcomplejos.

Proposición 5.4.6. *Sean K y L dos complejos simpliciales finitos y conexos. Entonces,*

$$\mathcal{M}(K \vee_v L) = \mathcal{M}_v(K)\mathcal{M}(L) \cup \mathcal{M}(K)\mathcal{M}_v(L)$$

Más aún, esta unión no es disjunta en general y se tiene $\mathcal{M}_v(K)\mathcal{M}(L) \cap \mathcal{M}(K)\mathcal{M}_v(L) = \mathcal{M}_v(K)\mathcal{M}_v(L) = \mathcal{M}_v(K \vee_v L)$

Demostración. El resultado es directo del hecho de que todas las funciones minimales en $M(K)$ son compatibles con todas las funciones minimales en $M(L)$ que dejan al vértice v crítico; y viceversa. Es fácil también ver que la intersección es la enunciada. □

Cuando uno de los complejos anteriores es un 1-simplex, el espacio de deformaciones de la unión por un punto toma una forma muy simple que, además, nos permite deducir algunas propiedades topológicas del espacio resultante.

Corolario 5.4.7. *Sea K un complejo simplicial finito y $\sigma = \{v, w\} \in K$ un 1-simplex con un vértice libre v. Si $L = K - \{\sigma, v\}$ y $(v, \sigma), (w, \sigma) \in M(K)$ son las funciones minimales correspondientes entonces*

$$\mathcal{M}(K) = (v, \sigma)\mathcal{M}(L) \cup (w, \sigma)\mathcal{M}_w(L)$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $K = L \vee_w \sigma$ se tiene de la Proposición 5.4.6 que $\mathcal{M}(L \cup \{v, \sigma\}) = (v, \sigma)\mathcal{M}(L) \cup \{(v, \sigma), (w, \sigma)\}\mathcal{M}_w(L)$. Como $(v, \sigma)\mathcal{M}_w(L) \subset (v, \sigma)\mathcal{M}(L)$ el resultado se sigue. □

Definición 5.4.8. La *suspensión* de un espacio topológico X, denotada SX, es el espacio cociente $X \times I/\sim$ donde $(x, 0) \sim (y, 0)$ y $(x, 1) \sim (y, 1)$ para todo $x, y \in X$.

Observación 5.4.9. Es fácil ver que para cualquier espacio topológico X, SX es homeomorfo al join de X con el espacio discreto de dos puntos $\{*, *'\}$. En particular, si X es arcoconexo, SX resulta simplemente conexo por el Teorema de Van Kampen (para información sobre este teorema puede consultarse [Spa]). De la demostración del Corolario 5.4.7 se tiene que, con las mismas notaciones, $\mathcal{M}(K) \simeq C\mathcal{M}(L) \cup S\mathcal{M}_w(L)$.

Con esta observación podemos probar la siguiente

Proposición 5.4.10. *En las mismas condiciones del Corolario 5.4.7 se tiene que $\mathcal{M}(K)$ tiene el tipo homotópico de $S(\mathcal{M}_w(L))$. En particular, si $\mathcal{M}_w(L)$ es conexo entonces $\mathcal{M}(K)$ es simplemente conexo.*

Demostración. Esta demostración utiliza herramientas no introducidas en este trabajo. Igualmente comentamos que se sigue del hecho que $C\mathcal{M}_w(L) \to S\mathcal{M}_w(L)$ es una cofibración, que $C\mathcal{M}_w(L) \to C\mathcal{M}(L)$ es una equivalencia homotópica y que el siguiente diagrama es un pushout:

$$\begin{array}{ccc} C\mathcal{M}_w(L) & \longrightarrow & C\mathcal{M}(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S\mathcal{M}_w(L) & \longrightarrow & \mathcal{M}(K) \end{array}.$$

Como referencia para las definiciones y resultados puede consultarse [Bro]. □

Si bien no lo transcribiremos aquí, puede producirse un resultado acerca de lo que sucede con el espacio de deformaciones al adjuntar un 1-simplex al complejo base K. En este caso, hay que tener cuidado de que cuando adjuntemos el nuevo simplex σ por el borde y construyamos el nuevo poset $M(K \cup_{\dot{\sigma}} \sigma)$ a partir de $M(K)$ no consideremos funciones f cuyos gradientes contengan V_f-caminos cerrados no estacionarios. Esto puede hacerse considerando los nuevos símplices que se forman y descartando aquellos que dan lugares a caminos cerrados no estacionarios.

5.5. Espacio de deformaciones de grafos

Dada la riqueza y complejidad de la estructura de los espacios de deformaciones, puede resultar natural pensar que estos espacios determinan unívocamente el complejo simplicial base. En esta sección presentaremos la teoría de espacios de deformaciones para complejos simpliciales de dimensión 1 y probaremos, como uno de los resultados principales de la tesis, que espacios de deformaciones isomorfos corresponden a grafos isomorfos.

Comenzamos mostrando algunas propiedades básicas acerca de espacios de deformaciones de árboles que nos resultará útiles a lo largo del capítulo.

Lema 5.5.1. *Sea G un grafo finito que no es un árbol. Entonces se tiene:*

(i) Cualquier elemento de $M(G)$ posee una arista crítica contenida en un edge path cerrado de G.

(ii) Si e es una arista contenida en un edge path cerrado reducido de G entonces existe un árbol maximal que no contiene a e.

Demostración. Para *(i)*, sea $f = \{f_0, ..., f_n\}$ un elemento de $M(G)$. Escribamos $f_i = (v_i, \sigma_i)$. Como G no es árbol existe un edge path cerrado reducido $\xi = e_1, ..., e_r$. Afirmamos que alguna de estas aristas es crítica para f. En efecto, si todas fueran regulares entonces no puede suceder que $(orig(e_i), e_i) \lneq f$ para todo $i = 1, .., r$ ó $(end(e_i), e_i) \lneq f$ para todo $i = 1, ..., r$ (pues sino V_f contendría un V_f-camino cerrado no estacionario). Luego, debe haber al menos un $(orig(e_i), e_i)$ y un $(end(e_j), e_j)$ menores a f $(i \neq j)$. Consideremos el siguiente edge path: $\xi' = e_{j+1}, ..., e_r, e_1, ..., e_{i-1}$. Notemos que ξ' no es vacío pues de lo contrario $orig(e_i) = end(e_j)$, lo cual no puede suceder. Vamos a probar que alguna de las aristas de ξ' es crítica para f. Procedemos por inducción en la longitud de ξ'. Si ξ' tiene longitud 1 entonces $e_{j+1} = e_{i-1}$, de donde precisamente esta arista resulta crítica (pues sus dos vértices son caras regulares de otras aristas). Si ahora la longitud de ξ' es $l > 1$, como por hipótesis e_{j+1} es regular, entonces debe necesariamente tener por cara regular a $end(e_{j+1})$ (pues $orig(e_{j+1}) = end(e_j)$ es cara regular de e_j). Ahora, considerando los elementos $(orig(e_i), e_i)$ y $(end(e_{j+1}), e_{j+1})$ estamos en las mismas condiciones que antes y además el edge path $\xi'' = e_{j+2}, ..., e_r, e_1, ..., e_{i-1}$ tiene longitud $l - 1$. Por hipótesis inductiva, existe una arista de ξ'' que es crítica para f. Esto concluye la demostración.

Para *(ii)* sea e una arista contenida en un edge path cerrado reducido $\xi = e_1, ..., e_r$ de G. Consideremos $T \subset G$ un árbol maximal cualquiera. Si $e \notin T$, no hay nada más que probar. Supongamos $e \in T$. Como T es un árbol debe suceder que alguna arista $e_i \in \xi$ no esté en T. Afirmamos que $T' = T \cup \{e_i\} - e$ es un árbol maximal de G. Notemos que nos alcanza con probar que T' es un árbol, pues sigue conteniendo todos los vértices de G (Proposición 1.6.4). Supongamos que T' posee un edge path cerrado reducido. Claramente no puede tratarse de ξ pues en T' hemos removido e. Además, como T era un árbol, entonces un tal edge path debe contener a la arista e_i. Escribamos $\xi' = e'_1, ..., e'_l$ con $orig(e'_1) = orig(e_i)$ y $e'_l = e_i$ (notar que, en particular, $end(e'_{l-1}) = orig(e'_l) = end(e_i)$ y que $orig(e'_1) = orig(e_i) = end(e_{i-1})$). Pero entonces, el edge path $\xi'' = e'_1, ..., e'_{l-1}, e_{i+1}, ..., e_r, e_1, ..., e_{i-1}$ resulta un edge path cerrado reducido contenido en T. Esta contradicción provino de suponer que T' contenía un edge path cerrado reducido. Luego, T' es un árbol maximal de G y el resultado se sigue. □

Proposición 5.5.2. *Vale lo siguiente:*

(i) Si T es un árbol entonces $dim(\mathcal{M}(T)) = f_1 - 1$ donde (f_0, f_1) es el f-vector de T.

(ii) Si $T \subset G$ es un árbol maximal entonces $dim(\mathcal{M}(G)) = dim(\mathcal{M}(T))$.

Demostración. Para *(i)* sabemos que T colapsa a cualquiera de sus vértices. El gradiente de una función de Morse que codifica este colapso posee f_1 flechas. Luego, un simplex maximal en $\mathcal{M}(T)$ tiene f_1 vértices. Luego, su dimensión es $f_1 - 1$.

(ii) se prueba por inducción en la cantidad k de aristas de G. El caso $k = 1$ es trivial. Supongamos $k > 1$. Si G es un árbol, no hay nada que probar. Si G no es un árbol, sea $f \in M(G)$ el elemento correspondiente a un simplex de dimensión máxima en $\mathcal{M}(G)$. Por el punto *(i)* del Lema 5.5.1, f tiene una arista e crítica contenida en un edge path cerrado de G. Sea entonces $G' = G - \{e\}$ (notar que como e está contenida en un edge path cerrado entonces G' es conexo). Ahora, $f \in M(G')$ debe generar un simplex de dimensión máxima en $\mathcal{M}(G')$ pues $\mathcal{M}(G') \subset \mathcal{M}(G)$ (Teorema 5.3.17). Sea entonces T un árbol maximal de G'. Como e estaba contenida en un edge path cerrado entonces T posee todos los vértices de G y, por Proposición 1.6.4, T es también árbol maximal para G. Finalmente, como la cantidad de aristas de G' es $k - 1$, se tiene

$$\dim(\mathcal{M}(G)) = \dim(\mathcal{M}(G') = \dim(\mathcal{M}(T)),$$

donde esta última igualdad es por hipótesis inductiva. □

A continuación nos disponemos a demostrar que muchas propiedades de los grafos permanecen invariantes si sus espacios de deformaciones son iguales. Si bien al final todas estas características serán abarcadas por el hecho de que un isomorfismo entre espacios de deformaciones induce un isomorfismo entre los grafos base (Teorema 5.5.12) igualmente las estudiamos de manera independiente pues muchas serán necesarias en el establecimiento de este resultado y otras son interesantes pues muestran como se traducen las deformaciones sobre un grafo G al espacio $\mathcal{M}(G)$. En lo que sigue, G y G' representarán dos grafos simples finitos con más de una arista.

Proposición 5.5.3. *Si $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G')$ entonces G y G' tienen la misma cantidad de aristas.*

Demostración. Por la Observación 5.3.16 la cantidad de vértices de $\mathcal{M}(G)$ es $2f_1$ y la de $\mathcal{M}(G') = 2f_1'$ (donde (f_0, f_1) y $(f_0'f_1')$ son los f-vectores de G y G' respectivamente). Por hipótesis, $2f_1 = 2f_1'$. □

Teorema 5.5.4. *Si $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G')$ entonces G y G' tienen el mismo grupo fundamental.*

Demostración. Del Corolario 1.6.8 sabemos que el π_1 de un grafo es el grupo libre de tantos generadores como aristas queden fuera de un árbol maximal. Como los espacios de deformaciones son iguales entonces $dim(\mathcal{M}(G)) = dim(\mathcal{M}(G'))$; luego, por Proposición 5.5.2 se tiene que $dim(\mathcal{M}(T)) = dim(\mathcal{M}(T'))$ para árboles maximales $T \subset G$ y $T' \subset G'$. Por la misma Proposición, esto quiere decir que el f_1 de un árbol maximal de G es igual al f_1 de un árbol maximal para G'. Como además los f_1 de G y G' coinciden (por Proposición 5.5.3) entonces la cantidad de aristas que quedan fuera de $T \subset G$ es la misma que las que quedan fuera de $T' \subset G'$. Luego, $\pi_1(G) = \pi_1(G')$. □

Para cualquier complejo simplicial de dimensión no nula podemos considerar el grado de un vértice v en el grafo K^1 (el 1-esqueleto de K). La siguiente proposición establece la relación entre el grado de un vértice v de un grafo G y el grado de un vértice (función minimal) en $\mathcal{M}(G)^1$ que tenga a v como única cara regular. Consecuencia de esto obtenemos un resultado muy importante.

Proposición 5.5.5. *Sea $v \in G$ un vértice y sea $\sigma \in G$ un 1-simplex que contenga a v en su borde. Entonces vale la siguiente identidad:*

$$\deg(v) + \deg((v,\sigma)) = 2f_1 - 1$$

donde el grado de v se toma en G y el grado de (v,σ) en $\mathcal{M}(G)^1$. En particular, v es una hoja si, y sólo si, $\deg((v,\sigma)) = 2f_1 - 2$.

Demostración. Sea $\sigma = \{v, w\}$. El grado de (v,σ) en $\mathcal{M}(G)^1$ es la cantidad de funciones de Morse normalizadas minimales compatibles con (v,σ). Una función es compatible con (v,σ) si es distinta de (w,σ) y de cualquier otra función que tenga a v como cara regular. Por cada 1-simplex con v en el borde tendremos una función minimal incompatible con (v,σ). Luego, hay $\deg(v)+1$ funciones incompatibles con (v,σ). Por lo tanto, (v,σ) es compatible con $2f_1 - (\deg(v)+1)$; esto es: $\deg((v,\sigma)) = 2f_1 - 1 - \deg(v)$, que es lo que queríamos probar. □

Corolario 5.5.6. *Si $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G')$ entonces G y G' tienen la misma cantidad de hojas.*

Demostración. Es directo del hecho que cada uno de los conjuntos de hojas de G y de G' está en biyección con los vértices de $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G')$ de grado $2f_1 - 2$ (Proposición 5.5.5). □

Teorema 5.5.7. *Si $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G')$ y G es una 1-esfera combinatoria entonces $G' = G$.*

Demostración. Como $\pi_1(G) = \pi_1(G')$ (por Teorema 5.5.4) y G' no puede tener ramas (por Corolario 5.5.6) entonces G' es una 1-esfera combinatoria. Como además G y G' tienen el mismo f_1 (por Proposición 5.5.3) entonces $G = G'$. □

Para un complejo simplicial cualquiera K notemos que $\dot{\Delta}^n$ será un subcomplejo pleno de $\mathcal{M}(K)$ si, y sólo si, existen funciones de Morse normalizadas minimales $f_0, ..., f_n \in M(K)$ tales que $\{f_0, ..., \hat{f}_i, ..., f_n\} \in \mathcal{M}(K)$ para todo i pero $\{f_0, ..., f_n\} \notin \mathcal{M}(K)$. Esta observación nos ayudará a estudiar los subcomplejos plenos del espacio de deformaciones.

Proposición 5.5.8. *Sea $n \geq 2$. Los subcomplejos plenos de $\mathcal{M}(G)$ isomorfos a $\dot{\Delta}^n$ están en relación 1 a 1 con las 1-esferas combinatorias de $n+1$ aristas contenidas en G.*

Demostración. Por el comentario anterior, un subcomplejo pleno isomorfo al borde de un n-simplex está determinado por un conjunto de funciones de Morse normalizadas minimales $f_0, ..., f_n \in M(G)$ tales que $\{f_0, ..., \hat{f}_i, ..., f_n\} \in \mathcal{M}(G)$ para todo i pero $\{f_0, ..., f_n\} \notin \mathcal{M}(G)$. Como $\{f_0, ..., \hat{f}_i, ..., f_n\} \in \mathcal{M}(G)$ para todo i entonces la única razón por la que $\{f_0, ..., f_n\}$ no resulta compatible en $M(G)$ es porque forma un camino cerrado no estacionario en el campo vectorial V que determina. En particular, ningún top símplex regular de V puede ser una rama (pues las ramas no influyen en la determinación de uno de estos tales caminos). Por lo tanto, dichos 1-símplices están contenidos en un edge path cerrado ξ. Más aún, ξ debe ser simple pues si no lo fuera entonces alguno de los conjuntos $\{f_0, ..., \hat{f}_i, ..., f_n\}$ no sería compatible, contradiciendo las hipótesis. Como las aristas de ξ constituyen una 1-esfera combinatoria y la longitud del edge path ξ es $n+1$ tenemos definida una asignación inyectiva.

Por otro lado, para una 1-esfera combinatoria de $n+1$ aristas $\{e_0, ..., e_n\}$ contenida en G podemos suponer que $orig(e_{i+1}) = end(e_i)$ para todo i y definir un edge path cerrado y simple $\xi = e_0, ..., e_n$ de longitud $n+1$. Consideremos el conjunto de funciones de

Morse normalizadas minimales $\{f_0, ..., f_n\} \in M(G)$ donde $f_i = (orig(e_i), e_i)$ para todo $i = 0, ..., n$. Es directo corroborar que $\{f_0, ..., \hat{f}_i, ..., f_n\} \in \mathcal{M}(G)$ para todo i pero $\{f_0, ..., f_n\} \notin \mathcal{M}(G)$. Luego, $\dot{\Delta}^n$ aparece como subcomplejo pleno de $\mathcal{M}(G)$. Esto define una asignación inyectiva en el otro sentido.

Es inmediato que estas asignaciones son inversas. Esto demuestra la proposición. □

Corolario 5.5.9. *Si $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G')$ entonces hay la misma cantidad de edge paths cerrados simples de longitud r en G que en G'.*

Como fue comentado anteriormente, uno de los objetivos principales de esta teoría es tratar de decidir si los espacios de deformaciones determinan unívocamente al complejo simplicial base. A lo largo de esta sección hemos encontrado muchos indicios que parecen avalar este resultado para el caso de grafos finitos. Como último resultado de nuestro trabajo presentamos una demostración que confirma que grafos con espacios de deformaciones isomorfos son necesariamente isomorfos.

Con el objetivo entonces de probar que el espacio de deformaciones de Morse determina por completo el espacio base nos disponemos a asociarle a un isomorfismo entre los espacio de deformaciones un isomorfismo entre los espacios base. La ventaja de encontrarnos en el contexto de los grafos es que toda cara regular es un vértice, haciendo fácil la definición del isomorfismo asociado.

Definición 5.5.10. Sea $f : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G')$ un isomorfismo simplicial entre los espacios de deformaciones de dos grafos conexos. Definimos una asignación $\overline{f} : G \to G'$ por $\overline{f}(v) = w$ si existe un $(v, \sigma) \in \mathcal{M}(G)$ y un $(w, \tau) \in \mathcal{M}(G')$ tal que $f((v, \sigma)) = (w, \tau)$.

Básicamente, la función $\overline{f}$ toma un vértice v en G, considera la flecha (v, σ) para algún 1-simplex σ con v en el borde, se fija en qué vértice de $\mathcal{M}(G')$ transforma f a (v, σ) (tiene que ser de la forma (w, τ) para un vértice w por tratarse de grafos) y le asigna el valor w. Notemos que en principio esta asignación podría no estar bien definida. De hecho, veremos que en el caso en el que K y/o L son 1-esferas combinatorias podría no estarlo. Sin embargo, una vez descartado este caso, $\overline{f}$ resultará un morfismo simplicial entre G y G'. Más aún, será el isomorfismo buscado.

Vamos a mostrar en principio que se esta función no está bien definida si ambos grafos son iguales a $\dot{\Delta}^2$. Considerar el isomorfismo entre $\mathcal{M}(\dot{\Delta}^2)$ y $\mathcal{M}(\dot{\Delta}^2)$ definido en la Figura 5.13. Lo que sucede aquí es que a dos flechas con la misma cara regular se les asignan dos flechas con distintas caras regulares. Es central aquí el hecho que se forme un ciclo cerrado cuando sucede esto. En efecto, si dos flechas tienen la misma cara regular entonces serán incompatibles, por lo que sus imágenes en el codominio serán también incompatibles (pues f es isomorfismo). En un grafo la única manera de que suceda esto es que las imágenes compartan el mismo top simplex regular. Veremos en la demostración del teorema que sigue que si un grafo no es exactamente una 1-esfera combinatoria entonces estos sucesos conducen a una contradicción.

Teorema 5.5.11. *Sean G y G' dos grafos finitos y conexos y $f : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G')$ un isomorfismo simplicial. Si G no es una 1-esfera combinatoria entonces $\overline{f} : G \to G'$ está bien definida como aplicación entre el conjunto de vértices de G y el de G'. Más aún, es un isomorfismo simplicial.*

Demostración. Hacemos la demostración en dos pasos.

- **La asignación $\overline{f}$ está bien definida.**

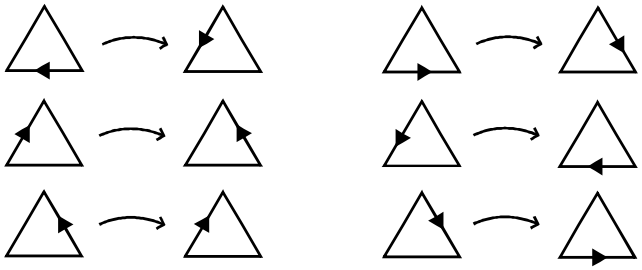

Figura 5.13: $\bar{f}$ no está bien definida en $\mathcal{M}(\dot{\Delta}^2)$.

Supongamos que $f(v,\sigma) = (w,\tau)$ y $f(v,\sigma') = (w',\tau')$ y que $w \neq w'$. Como $(v,\sigma) \nsim (v,\sigma')$ y f es isomorfismo entonces $(w,\tau) \nsim (w',\tau')$ (aquí $\nsim$ quiere decir *no compatibles*). Como estamos suponiendo $w \neq w'$ y no puede ser $w = \tau'$ o que $w' = \tau$ (pues alguno de esos símplices debería tener dimensión 2 y esto no sucede en nuestro caso pues G y G' son grafos), entonces debemos tener que $\tau = \tau'$.

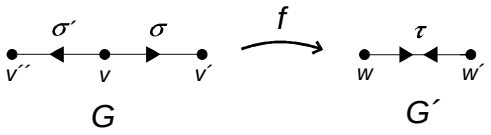

Figura 5.14: Situación inicial.

Si $\sigma = \{v, v'\}$, $\sigma' = \{v, v''\}$ y $\tau = \{w, w'\}$ llamemos:

$$\begin{array}{llll} \cdot\, v_0 = v' & \cdot\, v_1 = v & \cdot\, v_2 = v'' & \cdot\, w_0 = w \\ \cdot\, w_1 = w' & \cdot\, \sigma_0 = \sigma & \cdot\, \sigma_1 = \sigma' & \cdot\, \tau_0 = \tau \end{array} \tag{5.2}$$

De esta manera, tenemos $\sigma_0 = \{v_0, v_1\}$, $\sigma_1 = \{v_1, v_2\}$ y $\tau_0 = \{w_0, w_1\}$ y se verifica

$$\cdot\, f((v_1,\sigma_1)) = (w_1,\tau_0) \qquad \cdot\ f((v_1,\sigma_0)) = (w_0,\tau_0) \tag{5.3}$$

Vamos a probar por inducción en $i \geq 1$ que existen 1-símplices $\sigma_{i-1} = \{v_{i-1}, v_i\}, \sigma_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in G$ y $\tau_{i-1} = \{w_{i-1}, w_i\} \in G'$ tales que

$$\cdot\, f((v_i,\sigma_i)) = (w_i,\tau_{i-1}) \qquad \cdot\ f((v_i,\sigma_{i-1})) = (w_{i-1},\tau_{i-1}) \tag{5.4}$$

El caso $i = 1$ está contemplado por las identificaciones (5.2) y la ecuación (5.3). Supongamos entonces el resultado cierto para k; de manera que se tienen $\sigma_{k-1} = \{v_{k-1}, v_k\}$, $\sigma_k = \{v_k, v_{k+1}\} \in G$ y $\tau_{k-1} = \{w_{k-1}, w_k\} \in G'$ verificando (5.4) para $i = k$. Notemos que la existencia de σ_k ya queda determinada por la hipótesis inductiva.

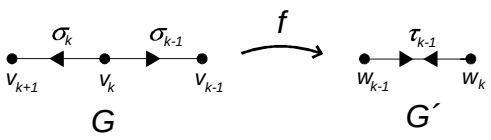

Figura 5.15: Situación general.

Consideremos $(v_{k+1}, \sigma_k) \in \mathcal{M}(G)$. Como $(v_{k+1}, \sigma_k) \nsim (v_k, \sigma_k)$ entonces $f((v_{k+1}, \sigma_k)) \nsim f((v_k, \sigma_k)) = (w_k, \tau_{k-1})$. Notemos que no puede ser $f((v_{k+1}, \sigma_k)) = (w_{k-1}, \tau_{k-1})$ pues f es un isomorfismo y $f((v_k, \sigma_{k-1})) = (w_{k-1}, \tau_{k-1})$. Luego, debe existir $\tau_k = \{w_k, w_{k+1}\} \in G'$ tal que $f((v_{k+1}, \sigma_k)) = (w_k, \tau_k)$.

Si consideramos ahora $(w_{k+1}, \tau_k) \in \mathcal{M}(G')$, entonces $f^{-1}((w_{k+1}, \tau_k)) \nsim (v_{k+1}, \sigma_k)$. Si fuera $f^{-1}((w_{k+1}, \tau_k)) = (v_k, \sigma_k)$ entonces se tendría que $(w_{k+1}, \tau_k) = f((v_k, \sigma_k)) = (w_k, \tau_{k-1})$, lo cual nuevamente no es cierto. Por lo tanto, debe existir $\sigma_{k+1} = \{v_{k+1}, v_{k+2}\}$ tal que $f((v_{k+1}, \sigma_{k+1})) = (w_{k+1}, \tau_k)$. Esto concluye el paso inductivo.

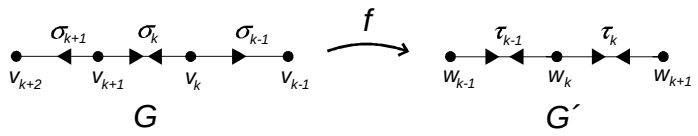

Figura 5.16: Paso inductivo.

El resultado recién probado dice que siempre podemos conseguir los 1-símplices verificando las hipótesis requeridas. En particular, como G es finito, eventualmente se tendrá $v_k = v_i$ con $i \leq k$ y $k - i \geq 2$. Supongamos que k es mínimo con esta propiedad; es decir, que $v_1, ..., v_{k-1}$ son distintos dos a dos. Si $i > 0$ entonces que el vértice v_i será cara regular de al menos tres funciones minimales distintas: (v_i, σ_{i-1}), (v_i, σ_i) y (v_i, σ_{k-1}). En particular, $f((v_i, \sigma_{k-1}))$ debe ser incompatible con $f((v_i, \sigma_{i-1})) = (w_{i-1}, \tau_{i-1})$ y con $f((v_i, \sigma_i)) = (w_i, \tau_{i-1})$. Pero no existe ninguna función minimal en $M(G')$ incompatible con ambas al mismo tiempo. Esto es una contradicción. Si ahora $i = 0$ entonces el complejo S generado por $\{\sigma_0, ..., \sigma_{k-1}\}$ es una 1-esfera combinatoria contenida en G. Como G no es una 1-esfera, combinatoria existe $\nu = \{u, u'\} \in G - S$. Por conexión de G podemos suponer además que $u = v_r$ para algún $0 \leq r \leq k - 1$. Notar entonces que v_r resulta cara regular para al menos tres funciones minimales: (v_r, ν), (v_r, σ_{r-1}) y (v_r, σ_r). El mismo razonamiento anterior nos muestra que $f((v_r, \nu))$ debe ser incompatible con $f((v_r, \sigma_{r-1})) = (w_{r-1}, \tau_{r-1})$ y $f((v_r, \sigma_r)) = (w_r, \tau_{r-1})$, lo cual es, nuevamente, imposible.

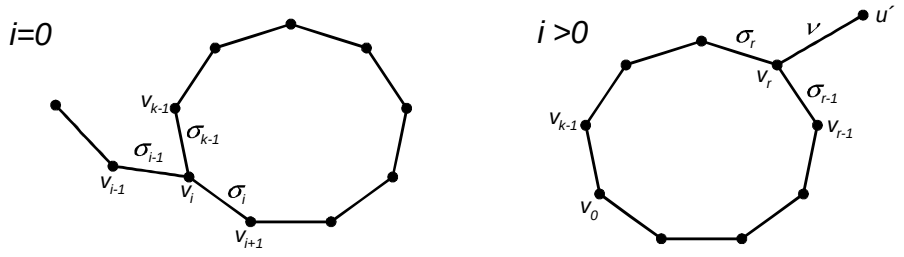

Figura 5.17: Caso $i = 0$ e $i > 0$.

Llegamos así a una contradicción que provino de suponer que $w \neq w'$. Esto prueba que $\overline{f}$ está bien definida.

- **La función $\overline{f}$ es un isomorfismo simplicial.**

Sea $\sigma = \{v, v'\}$ un 1-simplex de K y $\{\overline{f}(v), \overline{f}(v')\} = \{w, w'\}$. Como $(v, \sigma) \nsim (v', \sigma)$ entonces $(w, \tau) \nsim (w', \tau')$ (para ciertos τ y τ'). Como no puede ser $w = \tau'$ o $w' = \tau$

(por un tema de dimensión) entonces debemos tener o bien $w = w'$ o bien $\tau = \tau'$. Si $w = w'$ entonces el mismo razonamiento llevado a cabo para probar la buena definición de $\overline{f}$ aplicado a $f^{-1} : \mathcal{M}(G') \to \mathcal{M}(G)$ nos lleva a una contradicción (notar que G' tampoco es una 1-esfera combinatoria por Teorema 5.5.7). Luego, debemos tener $\tau = \tau'$ y $f((v, \sigma)) = (w, \tau)$ y $f((v', \sigma)) = (w', \tau)$. En particular, $w, w' \prec \tau$, de donde obtenemos que $\tau = \{w, w'\}$. Por lo tanto, $\{\overline{f}(v), \overline{f}(v')\}$ es simplex de G' y $\overline{f}$ es morfismo simplicial.

Por último, es sencillo ver que $\overline{f}$ es un isomorfismo. Si $\overline{f}(v) = w$ entonces existen $\sigma \in G$ y $\tau \in G'$ 1-símplices tales que $v \in \sigma$, $w \in \tau$ y $f((v, \sigma)) = (w, \tau)$. Por definición de $\overline{f^{-1}}$ se tiene que $\overline{f^{-1}}(w) = v$. Esto prueba que $\overline{f^{-1}}$ es inversa a izquierda de $\overline{f}$. Análogamente, $\overline{f}$ resulta inversa a izquierda de $\overline{f^{-1}}$, por lo que $\overline{f}$ es un isomorfismo. □

Del Teorema 5.5.11 y el Teorema 5.5.7 podemos establecer el resultado principal de este capítulo.

Teorema 5.5.12. *Si G y G' son grafos con espacios de deformaciones isomorfos entonces G y G' son isomorfos.*

Bibliografía

[Bar] Barmak, J.A. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, Tesis de Doctorado, UBA (2009).

[BM] Barmak, J.A. y Minian, E.G. *Simple homotopy types and finite spaces*, Advances in Mathematics, Vol. 218, Issue 1, 87-104 (2008).

[Bro] Brown, R. *Topology and Groupoids: A geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid*, BookSourge LLC (2006).

[Coh] Cohen, M.M. *A course in simple homotopy theory*, Springer-Verlag, New York (1973).

[Flo] Flores, A. *Über n-dimensionale Komplexe die in* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *selbstverschlungen sind*, Ergeb. Math. Koll. 6, 4-7 (1933/34).

[For1] Forman, R. *Morse theory for cell complexes*, Advances in Mathematics 134, 90-135 (1998).

[For2] Forman, R. *Combinatorial vector fields and dynamical systems*, Mathematische Zeitschrift 228, 629-681 (1998).

[Fre] Freedman, M.H. *The topology of four-dimensional manifolds*, Diff. Geom. 17, 357-453 (1982).

[Gla] Glaser, L.C. *Geometrical combinatorial topology I*, Van Nostrand (1970).

[Gru] Grünbaum, B. *Convex polytopes*, Springer-Verlag, (2003).

[GR] Gillman, D. y Rolfsen, D. *The Zeeman conjecture for standard spines is equivalent to the Poincaré conjecture.*, Topology 22, 315-323 (1983).

[Hem] Hempel, J. *3-manifolds*, Princeton University Press (1976).

[HY] Hocking, J.G. y Young, G.S. *Topology*, Dover Publications (1998).

[Koz1] Kozlov, D.N. *Discrete morse theory for free chain complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2005).

[Koz2] Kozlov, D.N. *Combinatorial algebraic topology*, Algorithms and Computation in Mathematics, Volume 21, Springer (2007).

[Lee] Lee, J.M. *Introduction to topological manifolds*, Springer-Verlag (2000).

[Lic] Lickorish, W.B.R. *Simplicial moves on complexes and manifolds*, Geometry and Topology Monographs, Volume 2: Proceedings of the Kirbyfest, 299-320 (1999).

[May] May, J.P. *A concise course in algebraic topology* , Chicago Lectures in Mathematics (2004).

[Mil1] Milnor, J. *Morse theory*, Princeton University Press (1963).

[Mil2] Milnor, J. *The Poincaré conjecture*, http://www.claymath.org, Millenium Problems, Official Problem Description (2004).

[Mun] Munkres, J.R. *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley (1984).

[Ran] Ranicki, A.A. (editor) *The Hauptvermutung book*, K-Monographs in Mathematics 1, Kluwer (1996).

[RS] Rourke, C.P. y Sanderson, B.J. *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer-Verlag (1972).

[Rol] Rolfsen, D. *The Poincaré conjecture and its cousins*. Disponible en `http://www.math.ubc.ca/~rolfsen`.

[Sir] Sirolli, N.M. *Teoría de Morse discreta*, Tesis de licenciatura, UBA (2007).

[Sma] Smale, S. *Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four*, Annals Math. 74, 391-406 (1961).

[Spa] Spanier, E.H. *Algebraic topology*, McGraw-Hill (1966).

[Vic] Vick, J.W. *Homology theory*, 2nd. edition, Springer-Verlag (2004).

[vKa] van Kampen, E.R. *Komplexe in euklidischen Räumen*, bh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9 , 72-78 (1933).

[Whi1] Whitehead, J.H.C. *Simplicial spaces, nuclei and m-groups*, Proceedings of London Mathematical Society, 45 pp. 243-327 (1938).

[Whi2] Whitehead, J.H.C. *Combinatorial homotopy*, Bulleting of the American Mathematical Society 55, 213-245 y 453-496 (1949).

[Whi3] Whitehead, J.H.C. *Simple homotopy types*, American Journal of Mathematics 72, 1-57 (1950).

[Zee1] Zeeman, E.C. *The Poincaré conjecture for $n = 5$*, Proc. The Univ. of Georgia Institute, Prentice-Hall, Inc., 198-204 (1961)

[Zee2] Zeeman, E.C. *On the dunce hat*, Topology 2, 341-358 (1964).