UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Soluciones periódicas del péndulo forzado y condiciones de Landesman-Lazer

Marina Sosa

Director: Dr. Pablo Amster

Año 2006

Si Dios no existe, no se pierde nada creyendo en Él, mientras que si sí existe, se perdería todo no creyendo (en Él).

Blaise Pascal

Índice general

1. Un poco de historia **4**

1.1. El péndulo linealizado 10

1.2. Construcción de relojes 12

1.3. Movimiento planetario 18

2. Algunas ideas en la teoría de puntos críticos **27**

3. Minimización de funcionales débilmente semicontinuos inferiormente en un espacio de Banach reflexivo **33**

4. Deformación de funcionales reales en un espacio de Banach y el principio variacional de Ekeland **37**

5. La geometría del paso de la montaña **52**

6. Una aplicación al problema de Dirichlet **60**

7. Soluciones periódicas del péndulo forzado y condiciones de Landesman-Lazer **69**

Índice de figuras

1.1. El péndulo 6
1.2. Longitud recorrida por el péndulo 7
1.3. Recorrido del péndulo 9
1.4. Período del péndulo en función del ángulo inicial 10
1.5. Solución del péndulo linealizado 12
1.6. Perfil de la función $f(x)$ 13
1.7. Longitud de arco de f 15
1.8. Cicloide invertida 17
1.9. Reloj de péndulo de Huygens 18
1.10. Movimiento Planetario 22
1.11. Área barrida 24
1.12. Velocidad del planeta 25

Agradecimientos

A mis padres, Hilda y Camilo, por todo.

A mi hermana Laura, por sus consejos y por quererme más de lo yo lo merezco.

A Pablo Amster, por aceptar dirigir este trabajo, por su paciencia y constante aliento.

A Claudia Lederman, por su comprensión y consejos.

A mis amigos (¡¿qué haría sin ellos?!) Mariana Perez (por esforzarse en mejorar este trabajo), Ezequiel Martin, Mercedes Marchesin, María Marta Canillia, Alejandro Weil, Irene Drelichman y Leandro del Pezzo, por ayudarme a ser mejor persona.

Introducción

En estas notas nos proponemos estudiar la existencia de soluciones de la ecuación del péndulo forzado. Este a su vez, constituye un ejemplo de los llamados problemas resonantes, de los cuales se probará otro resultado de existencia, usando herramientas del cálculo variacional.
Para empezar, en el capítulo 1, describiremos el problema físico que motivó el interés por el péndulo. Posteriormente, estudiaremos la vibraciones de un péndulo y su relación con la construcción de relojes de precisión. También analizaremos en detalle el movimiento planetario.

Recientemente, la teoría de puntos críticos constituyó una herramienta muy útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Para algunas de ellas, es posible trasladar el problema a otro de la teoría de puntos críticos, es decir, encontrar un funcional cuyo conjunto de puntos críticos coincida con el conjunto de soluciones de nuestra ecuación diferencial. Al estudiar este funcional, podemos ser capaces de mostrar que tiene un punto crítico, y así que la correspondiente ecuación tiene una solución. En el capítulo 2, se mencionará la evolución histórica de estas técnicas que usaremos en lo sucesivo.

Si el funcional φ está acotado inferiormente (o superiormente), puede tener un mìnimo (o máximo) absoluto. Tal punto es un punto crítico, y así, una solución a la correspondiente ecuación diferencial. En muchos casos, el funcional no está acotado, y no tiene un máximo o mínimo global. Así, un *método minimax* puede ser útil. El teorema minimax más conocido es el del PASO DE LA MONTAÑA. En esta ocasión, pensamos a $\varphi(y)$ representando

la altura de una montaña en el punto y. De esta manera, si el valor de φ en 0 y en algún punto e (valles), son estrictamente más pequeños que el ínfimo de los valores de φ en una esfera de centro 0 y radio $r < \|e\|$ (cordillera), uno puede esperar que, dado un camino γ que une 0 y e, si el número $\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t))$ es la altura máxima sobre tal camino, y si se toma ínfimos sobre todos los caminos que unen 0 y e (que llamaremos c), se obtendrá el valor de φ en algún punto crítico. No obstante, no siempre existe un valor mínimo de $\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t))$.
Aún si no podemos encontrar una altura máxima más pequeña, siempre podemos encontrar una sucesión $(x_j)_j \subset E$ tales que

$$\varphi(x_j) \to c$$

$$\varphi'(x_j) \to 0$$

es decir, una sucesión de **puntos casi críticos**. Casos especiales de este razonamiento fueron usados en dimensión finita para estudiar el problema de Plateau, pero el lema general del paso a la montaña en un espacio de Banach fue introducido por Ambrosetti y Rabinowitz en 1973, desde entonces fue una de las herramientas más usadas y más fructíferas del análisis funcional no lineal. Este estudio será objeto del capítulo 5.

La demostración de la existencia de una sucesión de puntos casi críticos es una *técnica de deformación* que fue introducida en 1934 por Lusternik y Schnirelman. Ésta consiste, en el caso de un espacio de Hilbert, en deformar un funcional φ, afuera del conjunto de sus puntos críticos, a través de soluciones de su *sistema gradiente asociado* $\sigma' = -\nabla\varphi(\sigma)$ u otro cualitativamente equivalente. Recientes versiones de esta técnica, en particular el *lema*

cuantitativo de deformación introducido por Willem en 1983, se decribirán en el capítulo 4, y se usará también, para motivar la introducción de varias *condiciones de compacidad* (siguiendo la hecha en 1965, por Palais y Smale), que llevan a la existencia de puntos críticos. Se darán las definiciones básicas en el capítulo 3 y se probará el lema de deformación en el capítulo 4.

El problema de existencia de soluciones periódicas de ecuaciones del péndulo forzado será analizado con técnicas de minimización y paso de la montaña, en el capítulo 7. La solución asociada a un mínimo del correspondiente funcional de acción fue esencialmente descubierto por Hamel en 1922, y sesenta años después una segunda solución del tipo paso a la montaña fue obtenida por Mawhin y Willem. El péndulo provee, tal vez, el caso más simple de un funcional que no satisface la clásica condición de Palais-Smale, es decir el de un problema *sin compacidad*. Finalmente, se dará una breve descripción de los problemas resonantes, y se probará un resultado de existencia usando condiciones del *tipo Landesman-Lazer*.

Para terminar, basta aclarar que al comienzo de cada uno de los capítulos se encontrará una pequeña introducción local, para que queden más claros los resultados expuestos en esta tesis.

Capítulo 1

Un poco de historia

El interés por el péndulo fue y aún sigue siendo inmenso. A través de los siglos ha constituido una fuente inagotable de problemas, ideas y técnicas. Por un lado, describiremos el período del péndulo y veremos que éste no es propiamente independiente de la amplitud inicial de la oscilación. Pero sí lo es cuando se trata de oscilaciones pequeñas. Galileo fue el primero en notar esto, observando una lámpara en oscilación de la catedral de Pisa. Esto condujo al reloj de péndulo, el primero realmente preciso que llegó a ser el estándar durante siglos. Sin embargo, hubo gente que estudió el problema general de encontrar una curva sobre la cual las oscilaciones debidas a la acción de la gravedad fueran independientes de la posición inicial. Christian Huygens (1629-1695) llegó a demostrar, con argumentos geométricos,que esta curva era una cicloide.

Por otra parte, el estudio del péndulo estaba ligado a dos problemas fundamentales de la época: la forma de la tierra y la verificación de la ley de atracción gravitatoria. Aunque el período de oscilación de un péndulo depende de la amplitud de oscilación, con una buena aproximación y para

oscilaciones pequeñas, este viene dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ donde l es la longitud del péndulo y g es la aceleración de la gravedad. De esta forma, si se calculan los distintos valores de g a lo largo de un meridiano de la Tierra y se sabe la relación entre g y la distancia al centro de gravedad, se puede obtener la forma de la Tierra.
También, conocida la forma de la Tierra, se podría utilizar esta fórmula para verificar la ley de la gravitación universal combinando el hecho de que la Tierra gira y, por lo tanto, todo cuerpo sobre la superficie experimenta dos fuerzas, una centrípeta, por la rotación que es conocida si se sabe la forma de la Tierra, y la fuerza de gravedad. El valor experimental de g obtenido es una combinación de las dos fuerzas.

Vamos a analizar ahora en detalle la ecuación del péndulo.
El péndulo consiste en un objeto puntual de masa m suspendida de una cuerda (que no se estira) sin masa de longitud l, cuyo extremo superior está fijo. Vamos a expresar la posición del péndulo en cada instante t por la función $\theta(t)$ que expresa el desplazamiento angular de la masa con respecto a su posición de equilibrio $\theta = 0$, ver figura 1.1.

Al moverse el péndulo, la masa describe arcos de circunferencia de radio l y al trasladarse del ángulo θ_1 hasta θ_2, la masa ha recorrido la longitud $l(\theta_1 - \theta_2)$. Por lo tanto, el espacio recorrido por la masa entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2 es $l(\theta(t_1) - \theta(t_2))$. La velocidad y la aceleración instantánea serán respectivamente, $l\theta'(t)$,$l\theta''(t_2)$, ver figura 1.2.

Las fuerzas que actúan sobre el objeto son: la fuerza T que se ejerce a lo largo de la cuerda y la fuerza de gravedad mg.

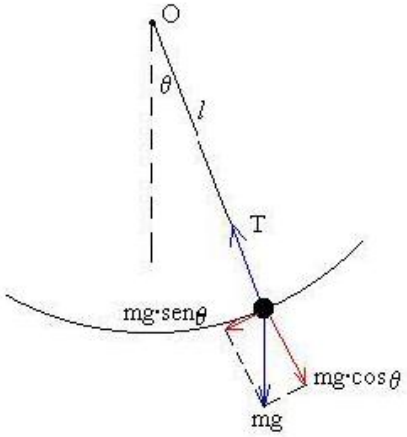

Figura 1.1: El péndulo

La componente normal de esta fuerza se anula con la T, por la ley de acción y reacción. La componente tangencial de la fuerza de gravedad $mg\,\mathrm{sen}(\theta)$ siempre actua hacia $\theta = 0$, en sentido opuesto al desplazamiento.

La fuerza tangencial es, por lo tanto, una fuerza restauradora y podemos utilizar la segunda Ley de Newton para escribir la ecuación del movimiento en la dirección tangente como (suponiendo la situación ideal en donde no hay rozamiento de ningún tipo):

$$F_t = ma_t \Longleftrightarrow -mg\,\mathrm{sen}(\theta(t)) = ml\theta''(t)$$

o lo que es equivalente :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(\theta(t)) = 0 \tag{1.0.1}$$

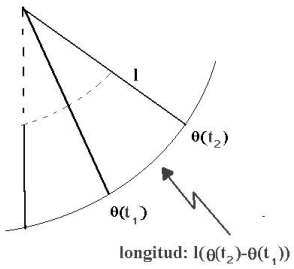

Figura 1.2: Longitud recorrida por el péndulo

La ecuación (1.0.1) es la conocida **Ecuación del péndulo**

Analicemos el comportamiento del péndulo cuando la masa se suelta desde el reposo a un cierto ángulo $\theta_0 \in (0, \pi)$, es decir, fijamos las condiciones iniciales del movimiento por $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$

Multiplicando la ecuación 1.0.1 por $\theta'(t)$ obtenemos por una parte, el término:

$$\theta''(t)\theta'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\theta'(t))^2$$

y por otra parte:

$$\frac{g}{l}\operatorname{sen}(\theta(t))\theta'(t) = -\frac{g}{l}\frac{d}{dt}\cos(\theta(t))$$

de donde se deduce que:

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(\theta'(t)) - \frac{g}{l}\cos(\theta(t)) = 0$$

Por lo tanto, la cantidad $\frac{1}{2}(\theta'(t)) - \frac{g}{l}\cos(\theta(t))$ se conserva a lo largo del movimiento. Esto no es más que la ley de conservación de energía, pues la energía total (mecánica), energía cinética más potencial, viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

donde y es la altura vertical del péndulo en cualquier momento. Por lo tanto,

$$E = \frac{1}{2}m(l\theta')^2 - mg(l - l\cos(\theta))$$

En particular, tenemos que dada la posición inicial del péndulo θ_0 y suponiendo que la masa se deja caer del reposo ($v_0 = 0$), tendremos que para todo tiempo t:

$$\frac{1}{2}ml^2\theta'^2 + mgl - mgl\cos(\theta) = cte.$$
$$-mgl + l\cos(\theta_0) = cte$$

Luego,

$$\frac{1}{2}\theta'(t)^2 + \frac{g}{l}\cos(\theta(t)) = \frac{g}{l}\cos(\theta_0)$$

o lo que es equivalente:

$$\frac{1}{2}\theta'(t)^2 = \frac{g}{l}(\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0))$$

En particular, puesto que $\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 \geq 0$ tendremos que $\cos(\theta(t) \geq \cos(\theta_0)$, lo que implica que siempre tendremos que $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$ (nunca puede subir más alto que $\theta = \pm\theta_0$).

Una de las características importantes del péndulo, es el período de oscilación $T(\theta_0)$, es decir el tiempo que tarda en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$ y volver de nuevo a θ_0. Obviamente, por simetría este tiempo es el doble que el toma en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$.

Mientras el péndulo va desde θ_0 hasta $-\theta_0$, tendremos que $\theta'(t) < 0$. Despe-

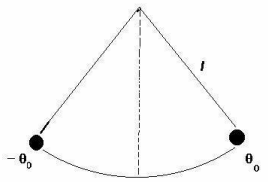

Figura 1.3: Recorrido del péndulo

jando de la última ecuación obtenemos que:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}$$

Separando variables e integrando, obtenemos que si τ es el tiempo que tarda en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$, entonces

$$-\int_{\theta_0}^{-\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} = \int_0^{\tau} dt = \tau$$

Por lo tanto, el período viene dado por:

$$T(\theta_0) = 2\tau = 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} = 2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}}$$

tras el cambio de variable $\text{sen}(\theta/2) = \text{sen}(\theta_0/2)sen(\phi)$, teniendo en cuenta que $\cos(\alpha) = 1 - 2\,\text{sen}^2(\alpha/2)$, el valor de $T(\theta_0)$ se puede expresar por la integral:

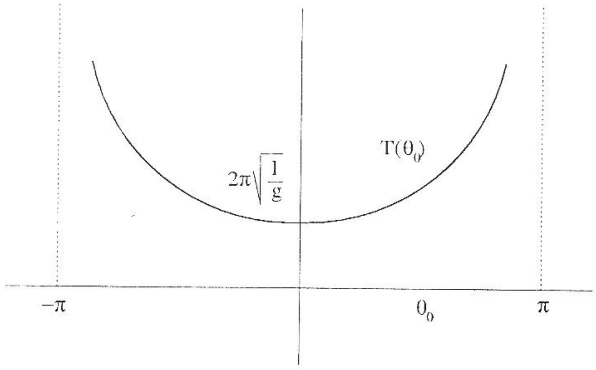

Figura 1.4: Período del péndulo en función del ángulo inicial

$$T(\theta_o) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\phi)}}$$

donde $k = \operatorname{sen}(\theta_0/2)$.

Se sabe que $T(\theta_0)$ realmente depende de θ_0. De hecho, la gráfica de $T(\theta_0)$ es como la de la figura 1.4. Se observa que para oscilaciones pequeñas, es decir, para θ_0 próximo a 0, el período de oscilación es aproximadamente $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

1.1. El péndulo linealizado

A diferencia de las oscilaciones de la ecuación del péndulo ya vista, las del péndulo linealizada sí tienen un período constante. Si suponemos que la amplitud de la oscilación es pequeña, es decir, θ_0 es muy cercano a cero y, por lo tanto, $\theta(t)$ estará también cercano a cero, podemos aproximar $\operatorname{sen}(\theta)$

por θ[1] y la ecuación se transforma en:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0 \tag{1.1.1}$$

que es la **ecuación del péndulo linealizada**.

Con un análisis similar al hecho para el péndulo (multiplicando la ecuación por θ' y expresando $\theta''\theta' = \frac{1}{2}(\theta')^2$ y $\theta\theta' = \frac{1}{2}(\theta^2)'$, obtenemos que la cantidad

$$V = \frac{1}{2}((\theta'(t))^2) + \frac{g}{2l}(\theta(t))^2$$

se conserva y, por lo tanto,

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{2l}(\theta(t))^2 = \frac{g}{2l}(\theta_0)^2$$

El período en este caso se expresa como:

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta_0)^2 - (\theta)^2}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\pi}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

que es obviamente independiente del ángulo inicial. Este resultado está diciendo que en una primera aproximación y para desplazamientos angulares pequeños, el período de las oscilaciones del péndulo se puede considerar independiente del desplazamiento original y sólo depende de la longitud del péndulo.

[1]Esto puede verse observando el desarrollo en serie de sen(θ):

$$\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...$$

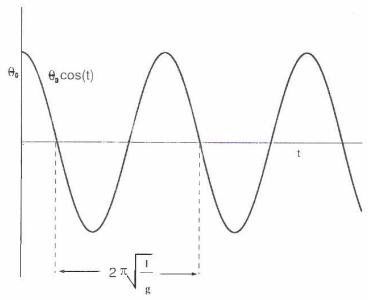

Figura 1.5: Solución del péndulo linealizado

De hecho las soluciones de la ecuación 1.1.1, se pueden obtener directamente y vienen dadas por

$$\theta(t) = A\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + B\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$$

Las constantes A y B vienen determinadas por las condiciones iniciales. Por ejemplo, si el péndulo parte del reposo ($\theta'(0) = 0$) y desde un ángulo $\theta(0) = \theta_0$), la solución viene dada por

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$$

1.2. Construcción de relojes

Los resultados de las secciones anteriores no son suficientes para el diseño de un mecanismo que tenga oscilaciones independientes del desplazamiento angular original, base en la que se asienta la construcciòn de relojes de péndulo. Por lo tanto, cabe preguntarse, y así se lo preguntó Huygens en el siglo XVII, qué condiciones debería tener una curva $y = f(x)$ para que las oscilaciones producidas por un objeto al deslizarse a lo largo de ella no

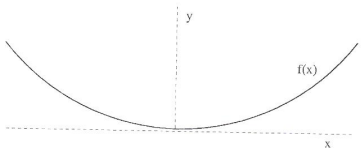

Figura 1.6: Perfil de la función $f(x)$

dependiesen de la posición inicial del objeto.

Ya que el movimiento de una masa acoplada a un péndulo es equivalente al moviemiento de una masa que se desliza a largo de una curva circular es evidente que la función que se está buscando $y = f(x)$ no es circular.
Resulta esperable que la función $y = f(x)$ tenga un perfil como el de la figura 1.6. En particular, debe ser simétrica con respecto del eje vertical, convexa, y asumiremos que es tal que $f(0) = 0$ y $f(x) > 0$ para $x \neq 0$.

Para el movimiento de un objeto deslizándose a lo largo de esta curva también se tiene un principio de conservación de la energía, que viene dado como es usual por la suma de la cinética $\frac{1}{2}mv^2$ y la energía potencial mgh, donde v es la velocidad de la masa y h la altura a la que se encuentra. Si el objeto se mueve de acuerdo a la curva $(x(t), y(t))$ donde $y(t) = f(x(t))$, tenemos que la velocidad v verifica

$$v(t)^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (1 + f'(x(t))^2)(x'(t))^2$$

y

$$mgh = mgf(x(t)).$$

Por lo tanto, tenemos que si originariamente el objeto se deja deslizar

del reposo desde la posición $(x_0, f(x_0))$, tendremos, en virtud de la ley de conservación de la energía, que

$$\frac{1}{2}m(1+f'(x(t))^2)(x'(t))^2 + mgf(x(t)) = mgf(x_0).$$

Por un análisis similar al realizado anteriormente tendremos que

$$(x'(t))^2 = 2g\frac{f(x_0) - f(x(t))}{1+f'(x(t))^2}$$

que implica que

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2g}\frac{\sqrt{f(x_0) - f(x(t))}}{\sqrt{1+f'(x(t))^2}}$$

y separando variables e integrando, el tiempo τ que tarda en ir desde $(x_0, f(x_0))$ hasta $(-x_0, f(x_0))$ viene dado por:

$$\tau = -\sqrt{\frac{1}{2g}}\int_{-x_0}^{x_0}\frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x_0) - f(x)}}dx$$

Por lo tanto, el período, es decir, el tiempo que tarda en ir desde $(x_0, f(x_0))$ hasta $(-x_0, f(x_0))$ y volver a $(x_0, f(x_0))$ viene dado por

$$T(x_0) = 2\tau = 2\sqrt{\frac{2}{g}}\int_0^{x_0}\frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x_0) - f(x)}}dx$$

Se trata, por lo tanto, de obtener una función f tal que la integral no dependa de x_0. Observamos primero que el término $\sqrt{1+f'(x)^2}$ es familiar y está relacionado con la longitud de arco. Hagamos entones, el siguiente cambio de variable

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+f'(z)^2}dz \tag{1.2.1}$$

Este cambio tiene un sentido geométrico: estamos reparametrizando la función y el problema en términos de la longitud de arco de la curva $(x, f(x))$,

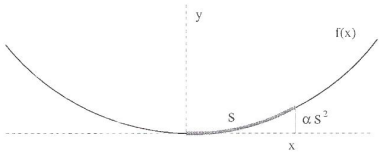

Figura 1.7: Longitud de arco de f

medida desde $x = 0$, con la convención de que para x positivos, la longitud de arco es positiva y para x negativos, la longitud de arco es negativa. Denotaremos por $x(s)$ la función inversa de $s(x)$. Derivando la expresión 1.2.1 con respecto de x, obtenemos que $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$.

$$T(x_0) = 2\sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{s(x_0)} \frac{ds}{\sqrt{f(x_0) - f(x(s))}}$$

En vista de lo establecido para el péndulo linealizado si la función $f(x(s)) = \alpha s^2$ tendremos que

$$T(x_0) = \sqrt{\frac{8}{g\alpha}} \int_0^{s(x_0)} \frac{ds}{\sqrt{s(x_0)^2 - s^2}} = \pi\sqrt{\frac{2}{g\alpha}}$$

y es independiente de la posición inicial x_0. Por lo tanto, se está buscando una función f tal que, en función de su longitud de arco, es una parábola, ver figura 1.7.

Este problema fue resuelto utilizando las herramientas del Cálculo por Jacques Bernoulli en 1960. La demostración se basa en reescribir la ecuación $f(x) = \alpha s^2$ como una ecuación diferencial. La ecuación es equivalente a

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\alpha}s$. Derivando con respecto de x obtenemos

$$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \sqrt{\alpha}\sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Elevando al cuadrado y agrupando términos se llega a

$$(f'(x))^2 = \frac{4\alpha f(x)}{1 - 4\alpha f(x)}$$

que implica

$$\frac{df}{dx} = \sqrt{\frac{4\alpha f(x)}{1 - 4\alpha f(x)}}$$

que es una ecuación de variables separables y, por lo tanto,

$$\int \sqrt{\frac{1 - 4\alpha f(x)}{4\alpha f}} df = x$$

Sustituyendo $4\alpha f = \sin^2(z)$, $2\alpha df = \operatorname{sen}(z)\cos(z)dz$, obtenemos

$$\int \cos^2(z)dz = 2\alpha x$$

$$\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2z) + C = 2\alpha x$$

Por lo tanto, la solución viene dada en coordenadas paramétricas por

$$x = \frac{1}{2\alpha}(\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2z)) + C$$

$$f = \frac{1}{4\alpha}\operatorname{sen}^2(z) = \frac{1}{4\alpha}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2z))$$

Como $f(0) = 0$ tendremos que $C = 0$.

Haciendo el cambio de variable $2z = \theta$, obtenemos

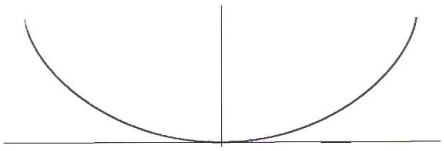

Figura 1.8: Cicloide invertida

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8\alpha}(\theta + \operatorname{sen}(\theta)) \\ f = \frac{1}{8\alpha}(1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

que es la ecuación paramétrica de una cicloide invertida, ver figura 1.8.

Esta curva fue muy estudiada por Galileo, quien intentó calcular el área debajo de la curva y la longitud de un arco de cicloide. Esta curva tiene propiedades geométricas y físicas interesantes. Ya hemos visto que las oscilaciones de una masa que se desliza sobre ella tienen el mismo período, independientemente del punto inicial desde donde parte la oscilación, hecho que fue probado por Huygens. Esta es la propiedad isócrona.

También se probó que esta curva tiene la propiedad braquistócrona (*bráchistos*, en griego, es el superlativo de *brachys*, que significa corto, y *chrónos* significa tiempo): si tenemos dos puntos a distinta altura y nos preguntamos cuál es la curva que une esos dos puntos con la propiedad que un objeto que se desliza sobre la curva toma el menor tiempo posible en ir desde el punto más alto al más bajo con tan sólo la acción de la gravedad, esta curva es una cicloide también. Esto lo probaron Newton, Leibnitz, Bernoulli y L'Hospital.

A partir de la propiedad isocrona de la cicloide, Huygens propuso la con-

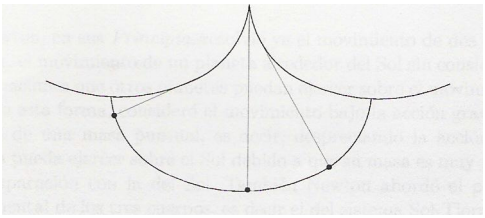

Figura 1.9: Reloj de péndulo de Huygens

strucción de relojes de acuerdo al diseño de la figura 1.9.

1.3. Movimiento planetario

El campo de investigación más activo durante los siglos XVI-XVIII es, sin lugar a duda, el de la astronomía. A partir del establecimiento por Copérnico de la teoría heliocéntrica y con la posterior defensa de esta teoría por parte de Galileo, posición que le valió no pocos problemas con la Iglesia, los científicos se centraron en estudiar y deducir las órbitas planetarias. En base a los innumerables datos experimentales del astrónomo Tycho Brahe, principalmente sobre la órbita de Marte, Kepler en sus trabajos *Astronomía Nueva* (1609)y *La Armonía del Mundo* (1619) llegó a enunciar sus tres leyes fundamentales sobre el movimiento de los planetas:

1. Los planetas se mueven en órbitas elípticas ocupando el Sol uno de los focos de la elipse.

2. El área barrida por el radio vector de un planeta en tiempos iguales es igual.

3. El cuadrado del período de revolución es proporcional al cubo de los semiejes mayores de la elipse.

Estas tres leyes son totalmente empíricas. Newton en su obra *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, dedujo estas tres leyes a partir de las leyes de la Mecánica y de la Ley de Gravitación Universal que él mismo había enunciado. Fue un primer logro de la Mecánica.

El interés por el estudio del movimiento planetario, en especial por el de la Luna, viene motivado entre otros aspectos por la navegación. El método usual para determinar la posición de un barco en el mar dependía de un conocimiento exacto (con un error de menos de 15"de arco) de la posición de la Luna en cada instante en relación a un meridiano dado, que en aquella época se fijó en el meridiano de Greenwich. En esos tiempos, la precisión era mucho peor. Esto provocó el interés por estudiar de forma exacta la órbita de la Luna.

Newton, en sus *Principia*, resolvió ya el movimiento de dos cuerpos, es decir, el movimiento de un planeta alrededor del Sol sin considerar las perturbaciones que otros planetas puedan ejercer sobre el movimiento bajo la acción gravitatoria del Sol de una masa puntual, es decir, despreciando la acción que el planeta pueda ejercer sobre el Sol debido a que su masa es muy pequeña en comparación con la del Sol. También Newton abordó el problema fundamental de los tres cuerpos, es decir, el del sistema Sol-Tierra-Luna. Este es el comienzo de un itinerario científico que llega incluso a nuestros días.

Paradójicamente, a pesar de ser Newton el padre de la Mecánica y uno de los creadores del Cálculo, la mayoría de las demostraciones realizadas en sus obras son de índole geométrica. No obstante, en el siglo XVII y en base a esfuerzos considerables de matemáticos de la talla de Euler, Lagrange, Laplace, etc., se instauró la Mecánica Analítica que utiliza las herramientas del Cálculo para el análisis de los problemas de Mecánica.

Veamos una demostración sencilla del movimiento planetario. Consideremos que el Sol ocupa el origen de coordenadas y que tenemos una masa m que se mueve bajo la acción gravitatoria de éste. Denotamos por $\vec{r}(t)$ el vector posición del planeta a tiempo t, es decir, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Por las leyes de la mecánica, la fuerza que actúa sobre la masa m es responsable de la aceleración del cuerpo, que viene dada por $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Es decir,

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Pero la fuerza que actúa sobre la masa es tan sólo la acción gravitatoria del Sol, que es proporcional al producto de las masas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y va dirigida hacia el Sol, es decir,

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

donde $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, que representa la distancia de la mas al Sol. Obsérvese también que $\frac{\vec{r}}{r}$ representa un vector unitario en la dirección de $\vec{r}$.

Por lo tanto, la ecuación que rige el comportamiento de m viene dada por

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

que, simplificando, se reduce a

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{M}{r^3}\vec{r} \tag{1.3.1}$$

Esta ecuación consta en realidad de tres ecuaciones,

$$\begin{aligned}
\tfrac{d^2x}{dt^2} &= -GM\tfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^3/2} \\
\tfrac{d^2y}{dt^2} &= -GM\tfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^3/2} \\
\tfrac{d^2z}{dt^2} &= -GM\tfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^3/2}
\end{aligned}$$

Multiplicando vectorialmente la ecuación 1.3.1 por $\vec{r}$, es decir,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\times\vec{r} = -G\frac{M}{r^3}\vec{r}\times\vec{r} = 0 \tag{1.3.2}$$

y observando que $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\times\vec{r} = \frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{r})$, se tiene que $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\times\vec{r}$ debe ser constante a lo largo de la trayectoria.

Esto se traduce en que la órbita del planeta está siempre en un mismo plano, que podemos suponer que es el plano (x, y). Por lo tanto, reducimos el número de ecuaciones a dos o, similarmente, podemos considerar que $\vec{r} = (x(t), y(t))$. Es necesario también especificar las condiciones iniciales del planeta. Supongamos, por lo tanto, que el planeta inicialmente está en la posición $\vec{r}(0) = (a, 0)$ y su velocidad inicial viene dada por $\dot{\vec{r}}(0) = (0, v)$, ver figura 1.10.

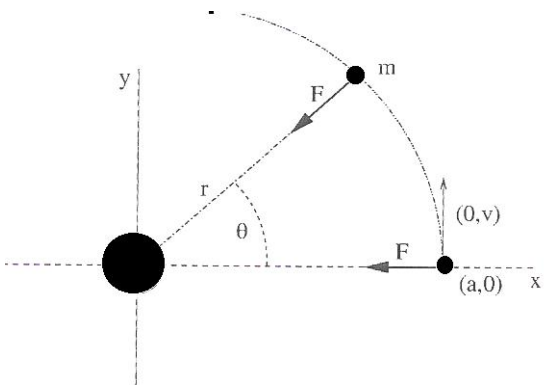

Figura 1.10: Movimiento Planetario

Pasando a coordenadas polares, de forma que $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$ y escribiendo las ecuaciones en estas dos coordenadas, es decir, describiendo el movimiento del planeta como $(r(t), \theta(t))$, tenemos que $\dot{x} = \dot{r}\cos(\theta) - r\,\mathrm{sen}(\theta)\dot{\theta}$, $\dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}(\theta) + r\cos(\theta)\dot{\theta}$. Derivando de nuevo estas expresiones, obtenemos

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2)\cos(\theta) - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\mathrm{sen}(\theta),$$
$$\ddot{y} = (\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2)\,\mathrm{sen}(\theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos(\theta).$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones, se obtiene,

$$(\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2)\cos(\theta) - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\mathrm{sen}(\theta) = -GM\tfrac{\cos(\theta)}{r^2}$$
$$(\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2)\,\mathrm{sen}(\theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos(\theta) = -GM\tfrac{\mathrm{sen}(\theta)}{r^2}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\cos(\theta)$, la segunda ecuación por $\mathrm{sen}(\theta)$ y sumando ambas, obtenemos

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \tag{1.3.3}$$

Multiplicando ahora la primera ecuación por sen(θ), la segunda ecuación por cos(θ), y restando ambas obtenemos

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \tag{1.3.4}$$

Las ecuaciones 1.3.3 y 1.3.4 son equivalentes a las originales y describen todo el movimiento planetario. Observar, además que las condiciones iniciales se pueden escribir como $(r(0), \theta(0)) = (a, 0)$ y $(\dot{r}(0), \dot{\theta}(0)) = (0, v/a)$.

La segunda ecuación se puede expresar como $\frac{d}{dt}(r^2 \frac{d\theta}{dt}) = 0$, lo que equivale a

$$r^2\dot{\theta} = C \tag{1.3.5}$$

donde C es una constante independiente de t, que se puede calcular a partir de las condiciones iniciales. De hecho, $C = a^2\frac{v}{a} = av$. Es decir, a lo largo de la trayectoria del planeta, la cantidad $r(t) = r^2\frac{d\theta}{dt}$ se mantiene constante. En particular, para dos instantes de tiempo $t_1 < t_2$, tenemos que

$$\int_{t_1}^{t_2} r(t)^2 \frac{d\theta(t)}{dt}\, dt = av(t_1 - t_2)$$

Pero la cantidad $\int_{t_1}^{t_2} r(t)^2 \frac{d\theta(t)}{dt}\, dt$ tiene un significado claro y es el área barrida por el radio vector del planeta desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2. Se obtiene, por lo tanto, la ley de las masas de Kepler: el área barrida por el radio vector de un planeta en tiempos iguales es igual.

A modo de anécdota, Kepler utilizó la siguiente fórmula para el área barrida por un planeta:

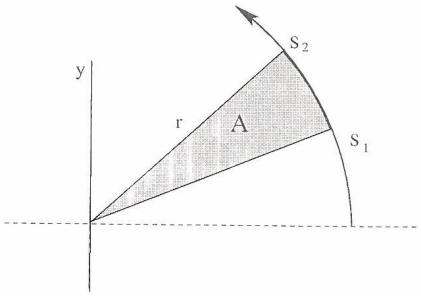

Figura 1.11: Área barrida

$$A = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} r\, ds$$

donde s es la longitud de arco.

Esta fórmula es incorrecta pues se puede ver que si $x = r(\theta)\cos(\theta)$, $y = r(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$, entonces

$$ds = \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2}\, d\theta = \sqrt{(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2}\, d\theta.$$

De forma que la fórmula de Kepler es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sqrt{(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2}\, d\theta$$

que no coincide con la fórmula del área en coordenadas polares:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\, d\theta.$$

Afortunadamente, Kepler cometió otro error que se autocanceló con el primero y así llegó a la formulación correcta de la ley de las áreas. Supuso que la velocidad de un instante dado era inversamente proporcional a la distancia al Sol, cuando, de hecho (y así se puede ver a través de las ecuaciones del

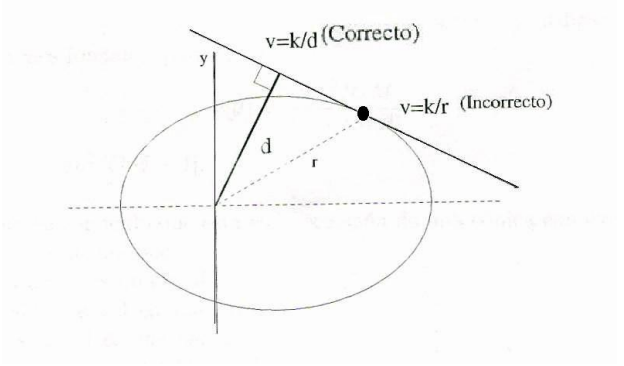

Figura 1.12: Velocidad del planeta

movimiento planetario), es inversamente proporcional a las distancia del Sol a la recta tangente de la órbita del planeta, ver figura 1.12. Volviendo a nuestras ecuaciones y despejando $\dot{\theta}$ de 1.3.5 y sustituyendo en 1.3.3, obtenemos

$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} - \frac{a^2 v^2}{r^3} = 0 \tag{1.3.6}$$

que es una ecuación de segundo orden en r. La variable θ se ha eliminado.

La presencia de términos de la forma $1/r$ en la ecuación sugiere el cambio de variable, $z = 1/r$. Se tiene,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{z}) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{av}{r^2} = -av\frac{dz}{d\theta}$$

en donde hemos utilizado la ecuación 1.3.5. Similarmente se puede obtener

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -av\frac{d}{dt}\frac{dz}{d\theta} = -av\frac{dz^2}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} = -(av)^2 z^2 \frac{dz^2}{d\theta^2}$$

y sustituyendo en 1.3.6, obtenemos que:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \frac{GM}{(av)^2} \tag{1.3.7}$$

Si ahora denotamos por$w = z - \frac{GM}{(av)^2}$ obtenemos que

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = 0$$

que es la **ecuación del péndulo linealizado** (ver Sección 1.1) y cuya solución general viene dada por

$$w(\theta) = A\sin(\theta) + B\cos(\theta)$$

donde A y B se obtienen a partir de las condiciones iniciales. Puesto que $w = \frac{1}{r} - \frac{GM}{(av)^2}$, deshaciendo el cambio de variable y utilizando las condiciones iniciales, podemos obtener que

$$r(\theta) = \frac{a^2v^2/GM}{1 + e\cos(\theta)}$$

donde $e = |av^2/GM - 1|$. Esta es la ecuación de una cónica con excentricidad e. De forma que:

i) Si $e = 0$ es un círculo.

ii) Si $0 < e < 1$ es una elipse.

iii) Si $e = 1$es una parábola.

iv) Si $e > 1$ es una hipérbola.

De est a forma se prueba que las órbitas de los planetas son elipses ($av^2/GM < 1$). Además, del análisis matemático hecho, se desprende la posibilidad de la existencia de otros cuerpos sujetos a la acción gravitatoria del Sol siguiendo órbitas que describen parábolas o hipérbolas. Este hecho ha sido posteriormente corroborado por la obsevación.

Capítulo 2

Algunas ideas en la teoría de puntos críticos

La Teoría de Puntos Críticos es una evolución moderna de una vieja parte del Análisis Matemático llamada *Cálculo de Variaciones*.
Los problemas del Cálculo de variaciones se remontan a los matemáticos griegos, por ejemplo, con el problema de Dido, de encontrar la curva cerrada de longitud fija que encierra el área máxima. Pero si exceptuamos algunas cuestiones de óptica hechas por Pierre de Fermat, los primeros problemas del futuro cálculo de variaciones fueron introducidos en el mismo momento del nacimiento del Cálculo, a fines del siglo diecisiete. Podemos mencionar el problema de Newton del sólido de revolución que ofrece la menor resistencia de un fluido, o el problema de encontrar la trayectoria más corta que une dos puntos fijos en el plano, el espacio o sobre una superficie (*geodésica*), o el problema de encontrar la curva sobre la cual un móvil sin fricción se mueve en un plano vertical, sólo bajo el efecto de la gravedad, desde un punto a otro (*braquistócrona*).

La teoría de puntos críticos aparece naturalmente en Mecánica clásica,

con el llamando principio de mínima acción. Si queremos saber cómo un sistema físico evoluciona de un estado A a un estado B, uno puede definir una función que asocia a cada camino de A a B una cantidad real llamada *acción*. El principio físico dice que el camino seguido por el sistema será un punto crítico de esta función. Acá es donde el nombre del principio es engañoso: el sistema físico no sólo puede seguir caminos de mínima acción, que corresponden a mínimos, sino que también pueden ser máximos o puntos silla. Pero tal formulación del problema es bastante nueva, y los físicos encontraron muchos trucos para evitar esta clase de espacios y funciones.

En términos modernos (ha tomado siglos llegar a esto y hacerlo eficiente), los problemas de cálculo de variaciones consisten en encontrar máximos o mínimos de funciones reales definidas en un espacio de funciones. El problema típico, como mostró Euler a mediados del siglo XVIII, consiste en encontrar el mínimo (ó el máximo) de una expresión del tipo

$$\int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{2.0.1}$$

sobre todas las funciones suaves y que vayan de $(a, y(a))$ a $(b, y(b))$.

Euler mostró de una manera bastante indirecta y luego Lagrange, que si tal función y existe, debe ser solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\frac{d}{dx}\partial_{y'} f(x, y(x), y'(x)) - \partial_y f(x, y(x), y'(x)) = 0 \tag{2.0.2}$$

Esta es la ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE que corresponde para el problema de Cálculo de variaciones, la condición necesaria

$$\nabla F(x) = 0.$$

para que la función con valores reales F alcance un màximo o un mìnimo. Por supuesto, cuando $y(x)$ es una función de n variables, y 2.0.1 una correspondiente integral múltiple sobre un conjunto n-dimensional, Ω, entonces la ecuación de Euler-Lagrange asociada es una ecuación diferencial en derivadas parciales, y las condiciones en a y b se reemplazan por condiciones para y sobre el borde $\partial\Omega$ (condiciones de borde).

Por mucho tiempo, el esfuerzo de los matemáticos se ha concentrado en resolver explícitamente cuando fuera posible la ecuación de Euler-Lagrange, y luego encontrar un candidato para mínimo de 2.0.1 sobre una familia de funciones. Pero esto no siempre se podía hacer, por ejemplo, cuando la ecuación 2.0.2 es no lineal o no es integrable.

Por mucho tiempo, la existencia de un mínimo ó máximo no fue cuestionada, siendo considerada como evidente en contextos matemáticos o físicos. Cerca de la mitad del siglo XIX, se desarrolló un nuevo punto de vista, motivado por el creciente interés por los teoremas de existencia iniciado por Gauss. Este nuevo punto de vista, consistía en mostrar la existencia de una solución a la ecuación 2.0.2 que satisfacía las condiciones de borde:

$$y(a) = A \qquad , y(b) = B \tag{2.0.3}$$

y probar directamente que la expresión 2.0.1 tiene un máximo o mínimo sobre la clase de funciones que satisfacen las condiciones 2.0.3. Tal método, llamado el *método directo del cáculo de Variaciones* primero surgió de forma heurística en demostraciones incompletas de Gauss, Dirichlet, Kelvin y Riemann sobre

la solubilidad del llamado *Problema de Dirichlet*:

$$\Delta y(x) = 0 \quad x \in \Omega,\ y(x) = f(x) \quad x \in \partial\Omega \tag{2.0.4}$$

donde Δ es el Laplaciano y f es una función con valores reales definida sobre $\partial\Omega$.

La ecuación 2.0.4 es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a la *integral de Dirichlet*

$$\int_{\Omega} |\nabla y(x)|^2 \, dx \tag{2.0.5}$$

y la existencia de un mínimo fue considerada una consecuencia trivial de su positividad (*Principio de Dirichlet*), hasta que Weierstrass dio un contraejemplo en 1870, en dimensión 1, mostrando que la integral

$$\int_{-1}^{1} [xy'(x)]^2 \, dx$$

no tiene mínimos sobre el conjunto de funciones C^2 tales que $y(-1) = a$, $y(1) = 1$ cuando $a \neq b$.
No obstante, este no fue un contraejemplo del principio de Dirichlet, y, a fines del siglo XIX, Arzelá trató de usar su teorema de compacidad para una familia de funciones equiacotadas y equicontinuas, para probar la existencia del mínimo y llegó a estar cerca de la conclusión en 1897.

Aparentemente desconociendo las contribuciones de Arzelá (al menos no las mencionaba), Hilbert esbozó una demostración rigurosa del Principio de Dirichlet cuando $n = 2$ en 1900, bajo ciertas condiciones sobre f y Ω. Fue el primer paso de una larga sucesión de artículos que daban cuenta de la profecía que Hilbert hizo en su famosa conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticos en Paris:

> Estoy convencido de que será posible probar teoremas de existencia usando un principio general, cuya naturaleza está motivada por el Principio de Dirichlet.

En particular, el trabajo de Levi, Fubini, Lebesgue, Zaremba, Lichtenstein, Courant, Tonelli y otros ha enfatizado el importante rol que juega la integral 2.0.1, a saber: su *semicontinuidad*, con respecto a un tipo de convergencia apropiada para y. La famosa monografía *Fundamenti di Calcolo delle Variazioni*, de Tonelli, publicada entre 1921 y 1923 mayormente dedicada a este concepto, ha motivado el trabajo posterior de matemáticos como Hahn, Lavrentiev, Graves y otros en los treinta. La situación en este momento es bien resumida por Volterra, quien en 1932, escribió:

> En lugar de estudiar los problemas de cálculo de variaciones reduciéndolos a ecuaciones diferenciales, es conveniente reducir los problemas que, a primera vista son de ecuaciones diferenciales , a problemas de cálculo de variaciones. Esto tiene una importancia, que puede decirse filosófica, y también una importancia práctica. Los nuevos métodos del Calculo de Variaciones no sólo son importantes desde el punto de vista de esta ciencia, sino también tienen gran interés para el estudio de ecuaciones diferenciales y de muchos problemas que están conectados. También le dan un nuevo interés a la teoría de funcionales.

En la terminologìa de su fundador Volterra, la teoría de funcionales, es lo que ahora llamamos, debido a Paul Levy, *análisis funcional*. Esta parte de la matemática ha unificado y generalizado el método del cálculo de variaciones. No es de sorprender, que un artículo sobre *minimizar un funcional en*

un espacio de Banach, debido a los matemáticos polacos Mazur y Schauder, haya sido presentado en Oslo en 1936, después de que Golomb definió el concepto de *gradiente de un funcional* en un espacio de Hilbert. Algunas condiciones restrictivas fueron eliminadas en lo sucesivo por Lusternik, Sobolev, Tsitlanadze, Vainberg y otros. Este tipo de resultados serán descriptos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Minimización de funcionales débilmente semicontinuos inferiormente en un espacio de Banach reflexivo

Si φ es una función real definida en un subconjunto de un espacio de Banach E, y si queremos encontrar condiciones para que φ tenga un mínimo, necesitamos una generalización apropiada del concepto de derivada. La más simple es la de *derivada de Gateaux*.
Denotemos por E^* el espacio dual de E y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la *dualidad* entre E^* y E. Sea $U \subset E$ un abierto no vacío.

Definición 3.0.1 *Si $\varphi : U \to \mathbb{R}$, decimos que φ tiene una* ***derivada de Gateaux*** *$u^* \in E$ en $y \in U$, si para todo $h \in E$ se tiene*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(y + th) - \varphi(y) - \langle u^*, th \rangle}{\|t\|} = 0$$

Una condición más fuerte es la *derivabilidad de Fréchet*:

Definición 3.0.2 *Si $\varphi : U \to \mathbb{R}$, decimos que φ tiene una derivada de Fréchet $u^* \in E$ en $y \in U$, si*

$$\lim_{v \to 0} \frac{\varphi(y+v) - \varphi(y) - \langle u^*, v \rangle}{\|v\|} = 0.$$

Claramente la derivada de Fréchet en y es la derivada de Gateaux en y y la notamos por $u^* = \varphi'(y)(v) = \langle \varphi'(y), v \rangle$. Decimos que φ **pertenece a** $C^1(U, \mathbb{R})$ si su derivada de Fréchet existe y es continua en U.

Con estas notaciones, es sencillo generalizar en el contexto de espacios de Banach la condición necesaria para la existencia de un máximo o un mínimo local de φ en $y \in U$,

$$\varphi'(y) = 0 \tag{3.0.1}$$

cuando φ es diferenciable Gateaux en y. Cualquier $y \in A$ que satisface la ecuación 3.0.1 se llama un **punto crítico** de φ, y el correspondiente número $\varphi(y)$ se llama **valor crítico**.

En consecuencia, si una aplicación $\Phi : E \to E^*$ puede escribirse como $\Phi = \varphi'$ para alguna función diferenciable Gateaux $\varphi : E \to \mathbb{R}$, todo punto crítico de φ es una solución de la ecuación

$$\Phi(u) = 0$$

En particular, es el caso de un máximo o un mínimo local de φ.

La introducción por Calkin y Morrey, antes de la Segunda Guerra Mundial, de los espacios de Sobolev en problemas variacionales de dimensión infinita, muestra el rol que cumple la *reflexividad* del espacio para probar la existencia de un mínimo para un funcional. Una versión moderna del teorema de Mazur-Schauder, puede ser enunciada así:

Teorema 3.0.1 *Si E es un espacio de Banach reflexivo, $C \subset E$ es débilmente cerrado, y $\varphi : C \to \mathbb{R}$ es débilmente semicontinua inferiormente, entonces φ tiene un mínimo sobre C sí y sólo sí tiene una sucesión minimizante acotada en C.*

Recordemos algunos conceptos que se mencionan en el teorema:
E es ***reflexivo*** si la inyección canónica $J : E \to E^{**}$ entre E y su doble dual E^{**} es biyectiva. Por ejemplo, cualquier espacio de Hilbert es reflexivo.
C es ***débilmente cerrado*** si contiene el límite de todas sus sucesiones débilmente convergentes.
Que φ sea ***débilmente semicontinua inferiormente (DSCI)*** en $y \in C \subset E$ significa que

$$y_k \rightharpoonup y \quad \Rightarrow \quad \liminf_{k\to\infty} \varphi(y_k) \geq \varphi(y).$$

Finalmente, una ***sucesión minimizante*** para φ en C es una sucesión $(y_k)_{k\geq 1} \subset C$ tal que

$$\varphi(y_k) \to \inf_C \varphi.$$

La demostración del Teorema 3.0.1 depende del siguiente *lema de compacidad débil*:

Lema 3.0.2 *Cualquier sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo contiene una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración:(del teorema 3.0.1)
$\boxed{\Rightarrow}$ Es clara, ya que tomamos la sucesión $(y_k)_{k\geq 1} = \min_{y\in C} \varphi(y)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Se sabe que existe $(y_k)_{k\geq 1} \subset C$ acotada tal que $\varphi(y_k) \to \inf_C \varphi$.
Pasando a una subsucesión si fuera necesario, podemos suponer que

$y_k \rightharpoonup y_0 \in C$, pues C es débil cerrado, entonces

$$\liminf_k \varphi(y_k) \geq \varphi(y_0).$$

Pero $\varphi(y_k) \to \inf_C \varphi$, entonces

$$\inf_C \varphi \geq \varphi(y_0)$$

$$\inf_C \varphi = \varphi(y_0).\diamondsuit$$

Algunas de la hipótesis del Teorema 3.0.1 pueden que no sean fáciles de verificar, por lo que los siguientes resultados serán útiles:

Lema 3.0.3 *Un conjunto convexo en un espacio de Banach es débilmente cerrado si y sólo sí es cerrado (con la topología fuerte).*

Lema 3.0.4 *Una función convexa $\varphi : E \to \mathbb{R}$ es $DSCI$ en y si y sólo si es semicontinua inferiormente (SCI) en y.*

La *semicontinuidad inferior* de una función consiste en reemplazar la convergencia débil por la convergencia fuerte, en la definición de $DSCI$.

Es claro que si C está acotado, cualquier sucesión minimizante φ en C también lo estará. Si C no está acotado, todas las sucesiones minimizantes de φ en C serán acotadas si φ es **coerciva** en C, o sea si

$$\varphi(x) \to +\infty \text{ cuando } \|x\| \to \infty$$

Combinando estos resultados con el Teorema 3.0.1 obtenemos otra proposición más fácil de usar:

Corolario 3.0.5 *Sea E un espacio de Banach reflexivo, $C \subset E$ cerrado convexo y $\varphi : C \to \mathbb{R}$ $DSCI$ y coerciva. Entonces φ tiene un mínimo sobre C.*

En particular, esto ocurre cuando φ es SCI y convexa.

Capítulo 4

Deformación de funcionales reales en un espacio de Banach y el principio variacional de Ekeland

Sabemos que una función coerciva está acotada inferiormente, pero el recíproco no es cierto: una función que está acotada por abajo no necesariamente tiene un mínimo, como lo vemos por ejemplo en la exponencial. No obstante, Ekeland ha mostrado en 1974 que, bajo condiciones bastante generales, las funciones que estan acotadas inferiormente admiten puntos casi críticos. Existen varias demostraciones y variantes del resultado de Ekeland. Una de ellas está basada en un lema cuantitativo de deformación introducido en 1966 por R. Palais. Dada una función con valores reales φ en un Banach, la idea será construirse una ecuación diferencial

$$\sigma'(t) = g(\sigma(t))$$

en E tal que φ decrezca a lo largo de sus soluciones $\sigma(t; y)$ con condición inicial y en $t = 0$. En el caso de un Hilbert se tiene:

$$\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,y)) = \langle \nabla\varphi(\sigma(t,y)), \sigma'(t,y)\rangle = \langle \nabla\varphi(\sigma(t,y)), g(\sigma(t,y))\rangle$$

y esta expresión será negativa (fuera del conjunto de los puntos críticos de φ), si uno elige:

$$g(\sigma) = -h(\sigma)\nabla\varphi(\sigma).$$

donde h es una función escalar positiva apropiada que podemos elegir arbitrariamente de forma tal de facilitar el estudio de la ecuación diferencial.

Ahora hagamos más precisas esas ideas.
Empezaremos introduciendo el concepto de *pseudogradiente*[1].

Definición 4.0.3 *Sean E un espacio Banach, $U \subset E$, y $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$. Entonces, $v \in E$ es un* ***vector pseudogradiente para*** *φ en $y \in U$ si:*

$$\|v\| \leq 2\|\varphi'(y)\|, \quad \langle \varphi'(y), v\rangle \geq \|\varphi'(y)\|^2.$$

Sean $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$ y $\tilde{E} \equiv \{y \in E | \, \varphi'(y) \neq 0\}$. Entonces, $g : \tilde{E} \to E$ es un **campo pseudogradiente** sobre $\tilde{E}$ si g es localmente Lipschitz y $g(x)$ es un vector pseudogradiente para φ para todo $x \in \tilde{E}$.

Observación 4.0.6 *En el caso de un Hilbert H, para $\varphi : H \to \mathbb{R}$, y cada $x \in H$ aplicando el Teorema de Representación de Riesz, existe $y \in H$ único tal que $D\varphi(x)(y) = \langle y, z\rangle$ para todo $z \in H$, luego se pude definir el gradiente de φ en x por $\nabla\varphi(x) = y$. Y en este caso, las desigualdades de la definición anterior se cumplen trivialmente:*

$$\|y\| = \|D\varphi(x)\|$$

y

$$D\varphi(x)(y) = \langle y, y\rangle = \|D\varphi(x)\|^2.$$

[1]Palais introdujo este concepto por primera vez en 1966

Por lo tanto, el gradiente es, en particular, un campo pseudogradiente.

El siguiente lema de existencia se debe a Palais.

Lema 4.0.7 *Con las notaciones y bajo las hipótesis de la definición 4.0.3, existe un campo pseudogradiente para φ sobre $\tilde{E}$.*

Demostración: Para cada $v \in \tilde{E}$, podemos encontrar $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$ y

$$\langle \varphi(v), x \rangle > \frac{2}{3}\|\varphi'(v)\|.$$

Definimos $u := \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|x$, de manera que

$$\|u\| = \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|\|x\| < 2\|\varphi'(v)\|$$

y

$$\langle \varphi'(v), u \rangle = \langle \varphi'(v), \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|x \rangle = \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|\langle \varphi'(v), x \rangle > \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|\frac{2}{3}\|\varphi'(v)\| =$$

$$= \|\varphi'(v)\|^2.$$

Es decir u es un vector pseudogradiente para φ' en v.
La continuidad de φ' implica que u es un vector pseudogradiente para todo $y \in N_v$, un entorno abierto de v, es decir, las desigualdades anteriores valen para todo $y \in N_v$. La familia $\mathcal{N} = \{N_v : v \in M\}$ es un cubrimiento abierto del espacio paracompacto E[2].

[2]Un espacio X es *paracompacto* si todo cubrimiento (abierto) tiene un refinamiento (abierto) localmente finito. Esto es, si $\mathcal{C}$ es un cubrimiento de X entonces existe $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$, otro cubrimiento de X tal que para todo $C \in \mathcal{C}$ existe algún $C_\lambda \in \mathcal{C}'$ tal que $C_\lambda \subset C$ y para todo $x \in X$, existen índices $\lambda_1, ...\lambda_n \in L$ y un entorno $V \ni x$ tales que $V \cap C_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \in \{\lambda_1, ...\lambda_n\}$.
Se sabe que todo espacio métrico es paracompacto.

Entonces, existe un refinamiento de $\mathcal{N}$, digamos $\mathcal{M} = \{M_i : i \in I\}$ localmente finito.

Sea

$$\rho_i(y) := d(y, E \setminus M_i),$$

entonces $\rho_i(y) = 0$ si $x \notin M_i$ y ρ_i es Lipschitz. Veamos esto:

Debemos ver que $\forall\, y, z \in E$

$$|\rho_i(y) - \rho_i(z)| = |d(y, E \setminus M_i) - d(z, E \setminus M_i)| \leq L\|y - z\|$$

Para todo $x \in E \setminus M_i$, tenemos

$$d(y, E \setminus M_i) \leq d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x)$$

o sea

$$d(y, E \setminus M_i) - d(y, z) \leq d(z, x), \quad \forall x \in E \setminus M_i$$

entonces,

$$d(y, E \setminus M_i) - d(y, z) \leq d(z, E \setminus M_i)$$

$$d(y, E \setminus M_i) - d(z, E \setminus M_i) \leq d(y, z)$$

Análogamente, se puede ver que

$$d(z, E \setminus M_i) - d(y, E \setminus M_i) \leq d(y, z)$$

Así,

$$|d(y, E \setminus M_i) - d(z, E \setminus M_i)| \leq d(y, z) = \|y - z\|$$

es decir ρ es Lipschitz, con $L = 1$.

Sea

$$\beta_i(y) = \frac{\rho_i(y)}{\sum_{k \in I} \rho_k(y)}$$

El denominador de β_j es, en realidad una suma finita (y distinta de 0 pues $\{M_i\}$ es un cubrimiento abierto de E), ya que cada $y \in E$ pertenece sólo a finitos M_k. Cada uno de los conjuntos M_i está incluido en algún N_{v_i}.
Con la misma construcción que antes, sea

$$u_i = \frac{3}{2}\|\varphi'(v_i)\|x_i$$

el vector pseudogradiente para φ en M_i y sea

$$g(y) = \sum_{i\in I} \beta_i(y)u_i$$

Resta ver que g es localmente Lipschitz, y $g(y)$ es un vector pseudogradiente para cada $y \in \tilde{E}$.
Teniendo en cuenta que $\sum_j \beta_j = 1$, y la definición 4.0.3,
$\star$ Sea $y \in \tilde{E}$ y sea $z \in N_y$

$$\|g(y) - g(z)\| = \|\sum_{i\in I} \beta_i(y)u_i - \sum_{i\in I} \beta_i(z)u_i\|$$

$$= \|\sum_{i\in I} (\beta_i(y) - \beta_i(z))u_i\|$$

$$\leq \sum_{i\in I} |\beta_i(y) - \beta_i(z)|\|u_i\|$$

$$\leq \sum_{i\in I} \left|\frac{\rho_i(y)}{\sum_{k\in I}\rho_k(y)} - \frac{\rho_i(y)}{\sum_{k\in I}\rho_k(y)}\right| \|u_i\|$$

$$\leq \sum_{i\in I} \left|\frac{\rho_i(y)\sum_{k\in I}\rho_k(y) - \sum_{k\in I}\rho_k(y)\rho_i(y)}{\sum_{k\in I}\rho_k(y)\sum_{k\in I}\rho_k(y)}\right| \|u_i\|$$

$$= \sum_{i\in I} \left|\frac{\sum_{k\in I}\rho_k(z)[\rho_i(y) - \rho_i(z)] + \rho_i(z)[\sum_{k\in I}\rho_k(z) - \sum_{k\in I}\rho_k(y)]}{\sum_{k\in I}\rho_k(y)\sum_{k\in I}\rho_k(y)}\right| \|u_i\|$$

$$\leq \sum_{i\in I} \frac{|\sum_{k\in I}\rho_k(z)|C\|y - z\| + M\|y - z\|}{\sum_{k\in I}\rho_k(y)\sum_{k\in I}\rho_k(y)}\|u_i\|$$

$$\leq L\|y-z\|.$$

$\star$ $\|g(y)\| = \left\|\sum_{i\in I}\beta_i(y)u_i\right\| = sum_{i\in I}\beta_i(y)\|u_i\| \leq sum_{i\in I}\beta_i(y)2\|\varphi'(y)\| \leq 2\|\varphi'(y)\|$.

$\star$ $\langle\varphi'(y), g(y)\rangle = \langle\varphi'(y), \sum_{i\in I}\beta_i(y)u_i\rangle = \sum_{i\in I}\beta_i(y)\langle\varphi'(y), u_i\rangle \geq \|\varphi'(y)\|^2$. Luego, g es un campo pseudogradiente para φ sobre $\tilde{E}$.$\diamondsuit$

Si $S \subset E$, $\alpha > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, usaremos las notaciones:

$$S_\alpha := \{y \in E : dist(y, S) \leq \alpha\},\ \varphi^c := \varphi^{-1}((-\infty, c])$$

Este último se llama *conjunto de nivel* c de la función φ.

Ahora enunciaremos y probaremos el LEMA CUANTITATIVO DE DEFORMACIÓN:

Lema 4.0.8 *Sea E un espacio de Banach, $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$, $S \subset E$, $c \in \mathbb{R}, \varepsilon, \delta > 0$ sean tales que para todo $y \in \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$,*

$$\|\varphi'(y)\| \geq \frac{8\varepsilon}{\delta} \tag{4.0.1}$$

Entonces, existe una deformación $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que:
1. $\eta(t, y) = y$, si t=0 o si $y \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;
2. $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$;
3. $\eta(t, -)$ es un homeomorfismo de E en E, para cada $t \in [0,1]$;
4. $\|\eta(t, y) - y\| \leq \delta$, para todo $y \in E$;
5. Si t_1, $t_2 \in [0,1]$ tal que $t_1 \leq t_2$ entonces $\varphi(\eta(t_2, y)) \leq \varphi(\eta(t_1, y))\ \forall y \in E$,
6. $\varphi(\eta(t, y)) < c$, para todo $y \in \varphi^c \cap S_\delta$, y todo $t \in [0,1]$.

Demostración: Como $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$, por el lema anterior, existe un campo pseudogradiente g, para φ' sobre $\tilde{E}$.

Definamos:

$$A = \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$$

$$B = \varphi^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap S_{\delta}$$

$$\psi(y) = \frac{d(y, E \setminus A)}{d(y, E \setminus A) + d(y, B)}$$

entonces ψ es localmente Lipschitz:

$\star$ Sea $y \in \tilde{E}$ y $z \in N_y$

$$|\psi(y) - \psi(z)| = \left| \frac{d(y, E \setminus A)}{d(y, E \setminus A) + d(y, B)} - \frac{d(z, E \setminus A)}{d(z, E \setminus A) + d(z, B)} \right|$$

$$= \left| \frac{d(y, E \setminus A)[d(z, E \setminus A) + d(z, B)] - d(z, E \setminus A)[d(y, E \setminus A) + d(y, B)]}{[d(y, E \setminus A) + d(y, B)][d(z, E \setminus A) + d(z, B)]} \right|$$

$$= \left| \frac{d(y, E \setminus A)[d(z, B) - d(y, B] + d(y, B)[d(y, E \setminus A) - d(z, E \setminus A)]}{[d(y, E \setminus A) + d(y, B)][d(z, E \setminus A) + d(z, B)]} \right|$$

$$\leq \left| \frac{d(y, E \setminus A)d(z, y) + d(y, B)d(y, z)}{[d(y, E \setminus A) + d(y, B)][d(z, E \setminus A) + d(z, B)]} \right|$$

$$= \left| \frac{d(y, E \setminus A) + d(y, B)}{[d(y, E \setminus A) + d(y, B)][d(z, E \setminus A) + d(z, B)]} d(y, z) \right|$$

es decir,

$$|\psi(y) - \psi(z)| \leq C\|y - z\|$$

$\star$ $\psi|_{E \setminus A} = 0$, $\psi|_B = 1$ y $0 \leq \psi \leq 1$

Definimos también, el campo vectorial localmente Lipschitz:

$$f(y) := \begin{cases} -\psi(y).\frac{g(y)}{\|g(y)\|^2} & si \quad y \in A \\ \\ 0 & si \quad y \in E \setminus A \end{cases}$$

Entonces, por definición de campo pseudogradiente y la hipótesis 4.0.1, tenemos que:

$$\|f(y)\| = \|\psi(y)\|.\frac{\|g(y)\|}{\|g(y)\|^2} \leq 1.\frac{1}{\|\varphi'(y)\|}$$

Esta última desigualdad la tenemos por Cauchy-Schwartz y la definición de pseudogradiente: $\|\varphi'(y)\|^2 \leq \langle \varphi'(y), g(y)\rangle \leq \|\varphi'(y)\|\|g(y)\|$

Continuando con la acotación

$$\|f(y)\| \leq \frac{1}{\|\varphi'(y)\|} \leq \frac{\delta}{8\varepsilon}$$

Consideremos ahora, el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \sigma'(t,y) = f(\sigma(t,y)) \\ \\ \sigma(0,y) = y \end{cases} \tag{4.0.2}$$

Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias [3], existe una única solución $\sigma(t,y)$ definida para t en un intervalo maximal $(t^-(y), t^+(y))$. Definimos $\eta : [0,1] \times E \to E$ por $\eta(t,y) := \sigma(8\varepsilon t, y)$. Veamos que $(t^-(y), t^+(y)) = (-\infty, +\infty)$. Si esto no fuera cierto, digamos

[3]Sea $W \subset E$ un abierto de un espacio normado, $f : W \to E$ una aplicación C^1 y $x_0 \in W$. Entonces, existe algún $a > 0$ y una única solucíón

$$x : (-a, a) \to W$$

de la ecuación diferencial

$$x' = f(x)$$

satisfaciendo la condición inicial

$$x(0) = x_0$$

$t^+(y) < \infty$. Tomemos $t_n \nearrow t^+$, entonces

$$\|\eta(t_{n+1}, y) - \eta(t_n, y)\| = \| \int_0^{t_{n+1}} f(\sigma(8\varepsilon s, y))\, ds - \int_0^{t_n} f(\sigma(8\varepsilon s, y))\, ds\|$$

$$= \| \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\sigma(8\varepsilon s, y))\, ds\| \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f(\sigma(8\varepsilon s, y))\| ds$$

$$\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\delta}{8\varepsilon} ds = \frac{\delta}{8\varepsilon} |t_{n+1} - t_n|$$

Entonces, $(\eta(t_n, y))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto converge a algún $y_0 \in E$. Pero este y_0 es una continuación de la solución $\eta(t, y)$ para valores de $t > t^+(y)$, lo que contradice la maximalidad de $t^+(y)$. Entonces, $t^+(y) = +\infty$. Análogamente, se prueba que $t^-(y) = -\infty$. Por otro lado, el Teorema de dependencia continua de las condiciones iniciales f[4], $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$. Veamos que η cumple las condiciones del lema.

1 Tenemos que $\eta(0, y) = \sigma(0, y) = y$, por 4.0.2.

Supongamos, ahora que $y \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, es decir $y \notin A$ con lo cual $f(y) = 0$, así, $\eta(t, y) = \sigma(8\varepsilon t, y) = y + \int_0^{8\varepsilon t} f(\sigma(s, y))ds = y$, por la unicidad de la solución.

3 Por las propiedades del flujo de una ecuación diferencial[5] , ϕ_t: $\phi_t\phi_s(y) = \phi_{t+s}(y)$ y $\phi_{-t}\phi_t = \phi_t\phi_{-t} = id$, ϕ_t es un homeomorfismo (con inversa ϕ_{-t}).

[4]Sea E un Banach, $W \subset E$ un abierto, y sea $f : W \to E$ Lipschitz, con constante K. Sean $y(t)$, $z(t)$ soluciones de

$$x' = f(x)$$

en el intervalo cerrado $[t_0, t_1]$. Entonces, para todo $t \in [t_0, t_1]$:

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)|e^{K(t-t_0)}$$

.

[5]Si $f : W \subset E \to E$, es localmente Lipschitz y W es un abierto de un espacio normado E, se define, para cada $y \in W$, el *flujo asociado a la ecuación diferencial* $x'(t) = f(y(t))$, por $\phi(t) = \phi(t, y)$ la única solución de la ecuación tal que $\phi(0, y) = \phi(y)$ definida en un intervalo maximal $J(y) \subset \mathbb{R}$

4

$$\|\eta(t,y)-y\| = \|\sigma(8\varepsilon t,y)-y\| =$$
$$\|y+\int_0^{8\varepsilon t} f(\sigma(s,y))ds - y\| = \|\int_0^{8\varepsilon t} f(\sigma(s,y))ds\|$$
$$\leq \int_0^{8\varepsilon t} \|f(\sigma(s,y))\|ds$$
$$\leq 8\varepsilon t.\frac{\delta}{8\varepsilon} \leq \delta.$$

5 Como

$$\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,y)) = \langle \varphi'(\sigma(t,y)), \frac{d}{dt}\sigma(t,y)\rangle =$$
$$= \langle \varphi'(\sigma(t,y)), f(\sigma(t,y))\rangle = \langle \varphi'(\sigma(t,y)), -\psi(\sigma(t,y))\frac{g(\sigma(t,y))}{\|g(\sigma(t,y))\|^2}\rangle$$
$$= \frac{-\psi(\sigma(t,y))}{\|(\sigma(t,y))\|^2}\langle \varphi'(\sigma(t,y)), g(\sigma(t,y))\rangle \leq -\psi(\sigma(t,y))\frac{\|\varphi'(\sigma(t,y))\|^2}{\|(\sigma(t,y))\|^2}$$
$$\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,y)) \leq \frac{-\psi(\sigma(t,y))}{4}. \tag{4.0.3}$$

entonces φ es decreciente como función de t.

6 Sean $y \in \varphi^c \cap S_\delta$, $t \in [0,1]$, entonces $\varphi(y) < c$. Por otro lado 5 dice que si $0 < t$ se tiene

$$\varphi(\eta(t,y)) < \varphi(\eta(0,y)) = \varphi(y)$$

donde la última igualdad se sigue de 1.

Así,

$$\varphi(\eta(t,y)) < c.$$

2 Supongamos que $y \in \varphi^{c+\varepsilon} \cap S$. Debemos ver que $\eta(1,y) \in \varphi^{c-\varepsilon}$

Si existe algún $t \in [0,8\varepsilon]$ tal que $\varphi(\sigma(t,y)) < c-\varepsilon$ entonces por 5, $\varphi(\sigma(8\varepsilon,y)) \leq \varphi(\sigma(t,y)) < c-\varepsilon$.

Si $\sigma(t,y) \in \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c-\varepsilon])$ para todo $t \in [0, 8\varepsilon]$, entonces usando 4.0.3 podemos escribir

$$\int_0^t \varphi'(\sigma(s,y))ds \leq -\frac{1}{4}\int_0^t \psi(\sigma(s,y))ds$$

para todo t. En particular, $t = 8\varepsilon$,

$$\int_0^{8\varepsilon} \varphi'(\sigma(s,y))ds \leq -\frac{1}{4}\int_0^{8\varepsilon} \psi(\sigma(s,y))ds$$

$$\varphi(\sigma(8\varepsilon,y)) - \varphi(\sigma(0,y)) \leq -\frac{1}{4}\int_0^{8\varepsilon} \psi(\sigma(s,y))ds$$

$$\varphi(\eta(1,y)) - \varphi(\eta(0,y)) \leq -\frac{1}{4}8\varepsilon$$

$$\varphi(\eta(1,y)) \leq \varphi(y) - 2\varepsilon = c - \varepsilon,$$

es decir $\eta(1,y) \in \varphi^{c-\varepsilon}$.$\diamondsuit$

Observación 4.0.9 *Este teorema dice que si c no es un valor crítico, los conjuntos de nivel cerca de c se parecen y es posible deformarlos uno en el otro, sin cambiar las propiedades topológicas de los conjuntos.*
Una forma simple de encontrar un punto crítico sería mirar los conjuntos de nivel φ^a y φ^b: si tienen diferente topología, entonces sabemos que debería haber un valor crítico en $[a,b]$.

El siguiente es el *Principio de Ekeland* que es una consecuencia inmediata del lema anterior:

Corolario 4.0.10 *Sea E un espacio de Banach, $\varphi \in C^1(E,\mathbb{R})$, acotada inferiormente, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ y $z \in E$ tales que*

$$\varphi(z) \leq \inf_E \varphi + \varepsilon.$$

Entonces, existe $y \in E$ con las siguientes propiedades:

1. $\varphi(y) \leq \text{ínf}_E\, \varphi + 2\varepsilon$;

2. $\|y - z\| \leq 2\delta$;

3. $\|\varphi'(y)\| < \frac{8\varepsilon}{\delta}$.

Demostración: Aplicaremos el lema anterior con $S = \{z\}$ y $c := \text{ínf}_E\, \varphi$. Supongamos que para todo $y \in \varphi^{-1}([c, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ se tiene $\|\varphi'(y)\| \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}$. Luego, por *2.* del lema tendremos que $\varphi(\eta(1, z)) \leq c - \varepsilon$, lo que contradice la definición de c. Por lo tanto, existe $y \in E$ con las propiedades pedidas. $\diamondsuit$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{k^2}$, $\delta = \frac{1}{k}$, $(k = 1, 2, ...)$ en el corolario 4.0.10, se obtiene la existencia de una sucesión minimizante formada por casi puntos críticos:

Corolario 4.0.11 *Sea E un espacio de Banach, $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$, acotada inferiormente. Entonces, existe una sucesión $(y_k)_{k\geq 1}$ tal que*

$$\varphi(y_k) \to \inf_E \varphi, \varphi'(y_k) \to 0, k \to \infty$$

Otra consecuencia del corolario 4.0.8 es este resultado probado por Brezis y Niremberg en 1991.

Corolario 4.0.12 *Sea E un espacio de Banach y $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$ tal que*

$$c := \liminf_{\|y\| \to \infty} \varphi(y) \in \mathbb{R}.$$

Entonces, para todo ε, $\delta > 0$, $R > 2\delta$, *existe* $y \in E$ *tal que:*

1.$c - 2\varepsilon \leq \varphi(y) \leq c + 2\varepsilon$;

2.$\|y\| \geq R - 2\delta$;

3.$\|\varphi'(y)\| < \frac{8\varepsilon}{\delta}$.

Demostración: Supongamos que la tesis es falsa, y sea $S = E \setminus B(0, R)$. Por la definición de c, el conjunto $\varphi^{c+\varepsilon} \cap S$ es no acotado y $\varphi^{c-\varepsilon} \subset B(0, R)$ para $r > 0$ grande. Por 2 del lema 4.0.8, se tiene $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$, también, por 4, se tiene que

$$\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon}) \subset (\varphi^{c-\varepsilon})_\delta \subset B(0, \delta + \varepsilon)$$

lo que es una contradicción. $\diamondsuit$

El corolario anterior 4.0.12, da una relación entre la existencia de sucesiones minimizantes de casi puntos críticos y la coercitividad para funciones acotadas inferiormente. Este resultado fue dado por Shujie Li en 1986.

Corolario 4.0.13 *Sea* E *un espacio de Banach,* $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$, *acotada inferiormente. Si, para cada* $c \in \mathbb{R}$, *toda sucesión* $(y_n)_{n\geq 1} \in E$ *tal que*

$$\varphi(y_n) \to c, \varphi'(y_n) \to 0 \quad n \to \infty$$

está acotada, entonces φ *es coerciva.*

Demostración: Supongamos que φ no es coerciva.

Tomando $c = \liminf_{\|y\|\to\infty} \varphi(y) \in \mathbb{R}$, por el corolario 4.0.12 con $\varepsilon = \frac{1}{k^2}$. $\delta = \frac{1}{k}$ y $R = k$, $k = 1, 2...$, existe una sucesión $(y_k)_{k\geq 1} \subset E$ tal que

$$\varphi(y_k) \to c, \quad \varphi'(y_k) \to 0 \quad \|y_k\| \to \infty,$$

si $k \to \infty$, lo que contradice que $(y_k)_k$ está acotada. $\diamondsuit$

Para estudiar la existencia de puntos críticos de una función acotada inferiormente, introduciremos variantes en las condiciones de compacidad, debidas a Palais y Smale.
Sea E un espacio de Banach y $\varphi : E \to \mathbb{R}$ diferenciable Gateaux. La condición original de Palais-Smale es la siguiente:

Definición 4.0.4 *Una* ***sucesión de Palais-Smale*** *para φ es una sucesión $(y_n)_{n\geq 1} \in E$ tal que $(\varphi(y_n))_{n\geq 1}$ está acotada y $(\varphi'(y_n))_{n\geq 1}$ converge a 0. La función φ satisface la* ***condición de Palais-Smale*** *(PS) si cada sucesión de Palais-Smale contiene una subsucesión convergente.*

Una condición *más débil* es la siguiente:

Definición 4.0.5 *Sea E un espacio de Banach y $\varphi : E \to \mathbb{R}$ diferenciable Gateaux. Una* ***sucesión de Palais-Smale en el nivel*** *c para φ es una sucesión $(y_n)_{n\geq 1} \subset E$ tal que*

$$\varphi(y_n) \to c, \varphi'(y_n) \to 0 \quad n \to \infty$$

La función φ satisface la ***condición de*** *$(PS)_c$ si la existencia de una sucesión de Palais-Smale en el nivel c implica que c es un valor crítico de φ.*

Observación 4.0.14 *Por el corolario 4.0.13, una función $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$, acotada inferiormente, que tiene, para cada $c \in \mathbb{R}$ sus sucesiones $(PS)_c$ acotadas, es coerciva. Recíprocamente, es inmediato que una función coerciva tiene todas sus sucesiones $(PS)_c$ acotadas.*

El siguiente resultado es una consecuencia de la definición anterior y el corolario 4.0.11.

Corolario 4.0.15 *Sea E un espacio de Banach, $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$, acotada inferiormente. Si φ satisface la condición $(PS)_c$ para $c = \text{ínf}_E \varphi$, entonces φ tiene un mínimo y c es un valor crítico de φ.*

Demostración: Como φ está acotada inferiormente, por el corolario 4.0.11, existe una sucesión $(y_k)_{k\geq 1} \subset E$ tal que

$$\varphi(y_k) \to \inf_E \varphi, \varphi'(y_k) \to 0, \quad k \to \infty$$

es decir,$(y_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión de (PS) para φ en el nivel $c \Longrightarrow$ como φ satisface $(PS)_c$, c es una valor crítico para φ, es decir, existe $y \in E$ punto crítico tal que $\varphi(y) = c.\diamondsuit$

Capítulo 5

La geometría del paso de la montaña

A partir del lema de deformación obtendremos algunos resultados de existencia para puntos casi críticos, bajo la geometría del paso de la montaña.

Teorema 5.0.16 *Sean E un espacio de Banach y $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R}), e \in E, r > 0$, tales que $\|e\| > r$ y*

$$a := max\{\varphi(e), \varphi(0)\} < b := \inf_{\|y\|=r} \varphi(y).$$

Sean

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

.

Luego,

$$b \leq c < \infty,$$

y para cada $e > 0, \delta > 0$ *y* $\gamma \in \Gamma$ *tal que*

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon, \tag{5.0.1}$$

existe $y \in E$ *tal que*

1. $c - 2\varepsilon \leq \varphi(y) \leq c + 2\varepsilon$
2. $dist(y, \gamma([0,1]) \leq 2\delta$
3. $\|\varphi'(y)\| \ < \frac{8\varepsilon}{\delta}$

Demostración: Observamos primero que, $\|\gamma(0)\| < r < \|\gamma(e)\|$ y por la conexión, se tiene $\forall \gamma \in \Gamma$, $\exists \tau \in [0,1]$ tal que $\|\gamma(\tau)\| = r$, entonces

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \geq \varphi(\gamma(t)), \forall t \in [0,1]$$

En particular, si $t = \tau$ se tiene $\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \geq \varphi(\gamma(\tau))$
y tomando ínfimos sobre las $\gamma \in \Gamma$

$$c \geq \varphi(\gamma(t)) \geq b$$

Sin pérdidad de generalidad, podemos suponer que: $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$, o sea que $a < b - 2\varepsilon \leq c - 2\varepsilon$. Ahora, supongamos que la última conclusión del teorema no es cierta, es decir: $\forall y \in E$ tal que 1. y 2. se verifican pero $\|\varphi'(y)\| \ \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}$.
Usando el Lema de deformación, con $S = \gamma([0,1]) \subset E$, $\exists \eta \in C^1([0,1] \times E, E)$ tal que se cumple el Lema.
En particular, si $\beta(t) = \eta(1, \gamma(t))$, tenemos que:

$$\beta(0) = \eta(1, \gamma(0)) = \eta(1, 0) = 0,$$

$$\beta(1) = \eta(1, \gamma(1)) = \eta(1, e) = e$$

pues por hipótesis $\varphi(e) \leq a < c - 2\varepsilon$. Análogamente, $\varphi(0) \leq a < c - 2\varepsilon$.
En consecuencia, $\beta \in \Gamma$, entonces, por 5.0.1

$$c + \varepsilon \geq \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \geq \varphi(\gamma(t)) \quad \forall t \in [0,1]$$

entonces $\gamma(t) \in \varphi^{c+\varepsilon}$.
Por 2 del Lema,

$$\varphi(\beta(t)) \leq c - \varepsilon$$

lo que contradice la definición de c. $\diamondsuit$

Necesitaremos una variante de este resultado, dado por Brezis y Nirenberg.

Teorema 5.0.17 *Sean E un espacio de Banach y $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R}), e \in E, r > 0$, tales que $\|e\| > r$ y*

$$a := max\{\varphi(e), \varphi(0)\} < b := \inf_{\|y\|=r} \varphi(y).$$

Sean $P : E \to E$ una aplicación lineal tal que, $\forall y \in E$,

$$\varphi(P(y)) \leq \varphi(y), P(0) = 0, P(e) = e,$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

Luego,

$$b \leq c < \infty,$$

y para cada $e > 0, \delta > 0$ y $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon, \tag{5.0.2}$$

existe $y \in E$ *tal que*

1. $c - 2\varepsilon \leq \varphi(y) \leq c + 2\varepsilon$
2. $dist(y, \gamma([0,1]) \leq 2\delta$
3. $\|\varphi'(y)\| \ < \frac{8\varepsilon}{\delta}$

Demostración: Es análoga a la demostración del teorema 5.0.16. Como $\|\gamma(0)\| < r < \|\gamma(e)\|$ y la conexión, se tiene $\forall \gamma \in \Gamma$, $\exists \tau \in [0,1]$ tal que $\|\gamma(\tau)\| = r$, entonces

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \geq \varphi(\gamma(\tau))$$

y

$$c \geq \varphi(\gamma(t)) \geq b$$

Tomanos $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$, entonces $a < b - 2\varepsilon \leq c - 2\varepsilon$. Usando el Lema de deformación, con $S = P(E) \subset E$, $\exists \eta \in C^1([0,1] \times E, E)$ con las propiedades del Lema.

En particular, si $\beta(t) = \eta(1, P(\gamma(t)))$, tenemos que:

$$\beta(0) = \eta(1, P(\gamma(0))) = \eta(1, P(0)) = 0,$$

$$\beta(1) = \eta(1, P(\gamma(1))) = \eta(1, P(e)) = e$$

pues por hipótesis $\varphi(P(e)) \leq \varphi(e) \leq a < c - 2\varepsilon$. Análogamente, $\varphi(P(0)) \leq \varphi(e) \leq a < c - 2\varepsilon$.

En consecuencia, $\beta \in \Gamma$. Además,

$$c + \varepsilon \geq \max_{t\in[0,1]} \varphi(P(\gamma(t))) \geq \varphi(P(\gamma(t))) \quad \forall t \in [0,1]$$

entonces $P(\gamma(t)) \in \varphi^{c+\varepsilon}$.

Por 2 del Lema,

$$\varphi(\beta(t)) \leq c - \varepsilon$$

lo que contradice la definición de c. $\diamondsuit$

Otra consecuencia inmediata del teorema 5.0.16 es la versión de Ambrosetti-Rabinowitz del *lema del paso de la montaña* obtenida por Brezis-Coron-Nirenberg en 1980 (Ambrosetti-Rabinowitz requirieron la clásica condición de PS).

Teorema 5.0.18 *Sean E un espacio de Banach y $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R}), e \in E, r > 0$, tales que $\|e\| > r$ y*

$$a := \max\{\varphi(e), \varphi(0)\} < b := \inf_{\|y\|=r} \varphi(y) \tag{5.0.3}$$

Sean

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

y supongamos que φ satisface la condición de $(PS)_c$.

Luego, $c \geq b$ es un valor crítico para φ.

Demostración: Por el teorema 5.0.16, $b \leq c$ y para $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$, $\delta = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, ...$, tenemos una sucesión $(y_n)_{n \geq 1} \subset E$ tal que:

$$\varphi(y_n) \to c \quad cuando \quad n \to \infty$$

y

$$\varphi'(y_n) \to 0 \quad cuando \quad n \to \infty$$

entonces $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de PS en el nivel c para φ, así, por hipótesis, c es un valor crítico para φ.$\diamondsuit$

Ahora introduciremos otra condición de compacidad, que permitirá una hipótesis más débil en el teorema del paso de la montaña.

Definición 5.0.6 *Sea E una Banach y $\varphi : E \to \mathbb{R}$ diferenciable Gateaux. La función φ satisface la* ***condición BPS*** *si, cualquier sucesión acotada $(y_n)_{n\geq 1}$ tal que $(\varphi(y_n))$ está acotada y $\varphi'(y_n) \to 0$ tiene una subsucesión convergente.*

El siguiente resultado es una versión del Teorema del paso de la montaña obtenida esencialmente por Pucci y Serrin en la mitad de los ochenta, motivado por un resultado de Mawhin y Willem para la ecuación del péndulo forzado.

Teorema 5.0.19 *Sea E un espacio de Banach y $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$, $e \in E$, $R > r > 0$, sean tales que $\|e\| > R$ y*

$$a := \max\{\varphi(e), \varphi(0)\} < b := \inf_{r\leq\|y\|\leq R} \varphi(y).$$

Sean

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)).$$

y supongamos que φ satisface las condiciones de $(PS)_c$ y BPS.
Entonces, $c \geq b$ es un valor crítico para φ. Además, si $b = c$, existe un punto crítico z tal que $\varphi(z) = b$ y $\|z\| = \frac{R+r}{2}$.

Demostración: Por el Teorema 5.0.18, $c > b$ es un valor crítico de φ, así que supongamos que $c = b$.

Para cada entero positivo n tal que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{R-r}{2} \tag{5.0.4}$$

existe un $\gamma_n \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma_n(t)) \leq b + \frac{1}{n},$$

por definición de ínfimo, ya que $c = b$. Por la conexión, dado que $\|\gamma_n(0)\| = 0$ y $\|\gamma_n(e)\| = \|e\| > \frac{r+R}{2}$, existe una sucesión $(t_n)_{n\geq 1} \subset [0,1]$ tal que

$$\|\gamma_n(t_n)\| = \frac{r+R}{2}.$$

Si llamamos $w_n := \gamma_n(t_n)$, se tiene

$$\varphi(w_n) \leq \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma_n(t)) \leq b + \frac{1}{n}$$

lo que muestra que $w_n \in \varphi^{b+\frac{1}{n}}$ y

$$\|w_n\| = \|\varphi(\gamma_n(t))\| = \tfrac{R+r}{2}, \text{ para } n = 1, 2, 3...$$

Apliquemos el lema de deformación con $S = \{w_n\}$, $c = b$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ y $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Si, $\forall y \in \varphi^{-1}([b - \frac{2}{n}, b + \frac{2}{n}]) \cap S_{2\delta}$, tenemos $\|\varphi'(y)\| \geq \frac{8}{\sqrt{n}}$.

Entonces, $v_n := \eta(1, w_n) \in \varphi^{b-\frac{1}{n}} \cap S_{1/\sqrt{n}}$, (por 2. y 4. del lema).

En consecuencia, usando 5.0.4

$$\|v_n\| = \|v_n - w_n + w_n\| \leq \|v_n - w_n\| + \|w_n\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2} \leq \frac{R-r}{2} + \frac{R+r}{2} = R.$$

Además como

$$|\,\|v_n\| - \|w_n\|\,| \leq \|v - w\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

tenemos que

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} + \|w_n\| \leq \|v_n\|$$

entonces por 5.0.4 es

$$r \leq \|v_n\|.$$

Luego, tenemos que

$$\varphi(v_n) \leq b - \frac{1}{n},$$

lo que contradice la definición de b.

Así, existe alguna sucesión $(y_n)_n$ tal que:

$$b - \frac{2}{n} \leq \varphi(y_n) \leq b + \frac{2}{n}$$

$$\|y_n - w_n\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\|\varphi'(y_n)\| < \frac{8}{\sqrt{n}}$$

Esto implica que $(y_n)_n$ es una sucesión de PS para φ, entonces, por hipótesis, $c = b$ es valor crítico de φ.

Y además, como φ satisface BPS, $(y_n)_n$, tiene una subsucesión convergente, digamos a $y \in E$ tal que $\varphi(y) = c$, por unicidad del límite, y también $\|y\| = \frac{R+r}{2}$, pues

$$\frac{-2}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2} \leq \|y_n\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{R+r}{2}.\diamondsuit$$

Observación 5.0.20 *Cuando $b = c$, el teorema 5.0.19 implica la existencia de un punto crítico en cada esfera centrada en 0 de radio $\rho \in (r, R)$.*

Capítulo 6

Una aplicación al problema de Dirichlet

Pensamos en una partícula que se mueve en una recta y cuya posición, $y = y(t)$, cumple con la ecuación de Newton

$$m\ddot{y} = f(t, y) \tag{6.0.1}$$

La constante m es positiva (masa) y la fuerza f es una función periódica en el tiempo,

$$f(t + T, y) = f(t, y) \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

El período T será fijo.

Como ya mencionamos, en el capítulo 2, el Cálculo de Variaciones, nos lleva a considerar el *funcional de acción* asociado

$$\varphi(y) = \int (T - U)dt, \;\; y = y(t),$$

donde T es la energía cinética y U es la potencial. Para dar contenido a esta afirmación hay que especificar un dominio para el funcional.

Vamos a considerar la acción periódica[1]

$$\varphi : E \to \mathbb{R}, \;\; \varphi(y) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} m\dot{y}(y)^2 - F(t, y(t))\right] dt \tag{6.0.2}$$

donde

$$F(t, x) = -\int_0^x f(t, s)ds$$

y $E = H_0^1(0, \pi)$ es el espacio de Hilbert definido por:

$$H_0^1(0, \pi) = \{y \in AC([0, \pi]) : y' \in L^2(0, \pi), y(0) = y(\pi) = 0\}$$

con el producto interno:

$$\langle y, z\rangle_1 = \int_0^\pi [y(x)z(x) + y'(x)z'(x)]\, dx$$

y como la desigualdad de Poincaré:

$$\int_0^\pi y^2(x)dx \leq \int_0^\pi y'^2(x)dx\, dx$$

vale $\forall y \in H_0^1(0, \pi)$, el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ puede ser reemplazado por otro equivalente:

$$\langle y, z\rangle = \int_0^\pi y'(x)z'(x)\, dx$$

Más específicamente, consideremos el problema de Dirichlet para una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\begin{cases} y'' + f(x, y) = 0 \\ \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \tag{6.0.3}$$

[1]En lo que sigue, supondremos que $m = 1$

donde $f : [0, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y tal que existe una constante $A \geq 0$ tal que su integral

$$F(x, y) := -\int_0^y f(x, s)\, ds$$

satisface la condición

$$|F(x, y)| \leq A, \quad \forall (x, y) \in [0, \pi] \times \mathbb{R} \tag{6.0.4}$$

Los puntos críticos de φ, coinciden con las soluciones de 6.0.3. Veamos esto:

supongamos que y es un punto crítico de φ, digamos, y es un mínimo, entonces $\varphi'(y) = 0$. Defino $i(t) = \varphi(y + tv)$ para alguna $v \in C_0^\infty(0, \pi)$. Así, i tiene un mínimo en $t = 0$, pues $i'(0) = \varphi'(y) = 0$. Tenemos

$$i(t) = \varphi(y + tv) = \int_0^\pi \frac{1}{2}(y + tv)'^2 - F(y + tv)dt$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^\pi \frac{1}{2}(y + tv)'^2 - F(y + tv)dt$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = \int_0^\pi \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(y + tv)'^2 - F(y + tv)\right] dt$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = \int_0^\pi (y' + tv')v' + f(y + tv)v\, dt$$

$$\frac{d}{dt}i(0) = \int_0^\pi y'v' + f(y)v\, dt = 0$$

En otras palabras,

$$\int_0^\pi y'v' = \int_0^\pi -f(y)v\, dt$$

$\forall v \in C_0^\infty(0, \pi)$, y se deduce que $y \in H^2(0, \pi)$, con

$$y'' = -f,$$

esto es

$$y'' + f = 0,$$

que es la ecuación de la cual partimos.

Veamos que $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$:

Para esto, escribamos $\varphi(y) = \varphi_1(y) - \varphi_2(y)$, donde

$$\varphi_1(y) = \int_0^\pi \frac{y'^2(x)}{2} dx = \frac{1}{2}\|y\|^2$$

y

$$\varphi_2(y) = \int_0^\pi F(x, y(x))dx.$$

Veamos entonces, que cada una de ellas, pertenece a $C^1(E, \mathbb{R})$:

$$\varphi_1(y+v) = \frac{1}{2}\|y+v\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^\pi (y'+v')^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi y'^2(x)dx + \int_0^\pi y'v'dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi v'^2(x)dx$$

$$= \varphi_1(y) + \langle y, v\rangle + \frac{1}{2}\|v\|^2$$

Luego,

$$\lim_{v\to 0} \frac{\varphi_1(y+v) - \varphi_1(y) - \langle y, v\rangle}{\|v\|} = 0$$

entonces y $\langle \varphi_1'(y), v\rangle = \int_0^\pi y'v'$, y es continua, por lo tanto $\varphi_1 \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_2(y+tv) - \varphi_2(y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\int_0^\pi F(x, y+tv)dx - \int_0^\pi F(x, y)dx}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \int_0^\pi \frac{F(x, y+tv) - F(x, y)}{t} dx =$$

$$= \lim_{t\to 0} \int_0^\pi \frac{dF}{dx}(x, \xi)v dx = \lim_{t\to 0} \int_0^\pi f(x, \xi)v dx.$$

donde $\xi = \xi(x, t)$ está en $(y, y + tv)$.

Como f es continua, está acotada en el intervalo $(y, y + tv)$, luego

$$\lim_{t\to 0} f(x, \xi) = f(x, y).$$

Entonces, por convergencia mayorada, tenemos

$$\lim_{t\to 0}\int_0^\pi f(x,\xi)v(x)dx = \int_0^\pi f(x,y)v(x)dx$$

Luego, $\lim_{v\to 0}\frac{\varphi_2(y+v)-\varphi_2(y)-\langle f,v\rangle}{\|v\|} = \lim_{v\to 0}\frac{\int_0^\pi [F(x,y+v)-F(x,y)]dx-\int_0^\pi f(x,y)v(x)dx}{\|v\|} =$

$$= \lim_{v\to 0}\frac{1}{\|v\|}\int_0^\pi [f(x,\xi)-f(x,y)]v(x)dx = 0$$

entonces, $\langle\varphi_2'(y),v\rangle = \int_0^\pi f(x,y)v(x)dx$ y es continua, por lo tanto $\varphi_2 \in C^1(E,\mathbb{R})$.

Luego, $\varphi \in C^1(E,\mathbb{R})$ y $\langle\varphi'(y),v\rangle = \int_0^\pi y'(x)v'(x)+f(x,y)v(x)dx$.

Por la condición 6.0.4:

$$\varphi(y) = \int_0^\pi [\frac{y'^2(x)}{2} - F(x,y(x))]\,dx \geq \frac{1}{2}\|y\|^2 - \pi A \qquad (6.0.5)$$

y así el funcional φ es coercivo. Ahora probaremos que es $DSCI$.

Sea $(y_k)_k \subset E$ tal que

$$y_k \rightharpoonup y$$

Debemos ver que

$$\liminf_{k\to\infty}\varphi(y_k) \geq \varphi(y).$$

Si $y_k \rightharpoonup y$, entonces, por la inclusión compacta de $H_0^1([0,\pi])$ en $C([0,\pi])$, $y_k \to y$ uniformemente en $[0,\pi]$. Además, como

$$\int_0^\pi (y_k'-y')^2\,dx \geq 0$$

se deduce

$$\int_0^\pi y_k'^2(x) \geq \int_0^\pi 2y_k'(x)y'(x)dx - \int_0^\pi y'^2dx$$

Tomando límite inferior para $k\to\infty$, y por la convergencia débil

$\liminf_{k\to\infty}\int_0^\pi y_k'^2(x) \geq \liminf_{k\to\infty}\int_0^\pi 2y_k'(x)y'(x)dx - \int_0^\pi y'^2dx \geq$

$2\int_0^\pi \liminf_{k\to\infty} y_k'(x)y'(x)dx - \int_0^\pi y'^2 dx = 2\int_0^\pi y'^2(x)dx - \int_0^\pi y'^2(x)dx =$
$= \int_0^\pi y'^2(x)dx.$

Entonces, por la convergencia débil tenemos

$$\liminf_{k\to\infty} \varphi(y_k) \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|y_k\|^2 \geq$$
$$\frac{1}{2}\liminf_{k\to\infty} \|y_k\|^2 \geq \frac{1}{2}\|y\|^2 \geq$$
$$\frac{1}{2}\|y\|^2 - \int_0^\pi F(x, y(x))\, dx = \varphi(y).$$

Luego, φ es $DSCI$ sobre E, y, por el corolario 3.0.5, se sigue que φ tiene un mínimo sobre E. Así, hemos probado el siguiente:

Teorema 6.0.21 *(Lichtenstein- 1915)*
Supongamos que $f : [0, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y su integral F satisface la condición 6.0.4. Entonces, el problema de Dirichlet 6.0.3 tiene por lo menos una solución.

Como aplicación del teorema consideremos el problema

$$u'' - ae^u = h(x), \quad u(0) = u(\pi) = 0, \tag{6.0.6}$$

donde $a > 0$ y $h \in L^1(0, \pi)$. Un simple cálculo muestra que el problema lineal

$$u'' = h(x), \quad u(0) = u(\pi) = 0,$$

tiene una única solución $U(x)$. Haciendo $u(x) = U(x) + y(x)$, el problema 6.0.6 se reduce al equivalente

$$y'' - ae^{U(x)+y} = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

y la correspondiente función F viene dada por

$$F(x, y) = -ae^{U(x)+y} \leq 0$$

satisface la condición 6.0.4. Así, el problema 6.0.5 tiene al menos una solución.

Una segunda aplicación, está dada por el problema de Dirichlet para la *ecuación del péndulo forzado*

$$u'' + a\,\mathrm{sen}(u) = h(x), \quad u(0) = u(\pi) = 0, \tag{6.0.7}$$

con a y h como antes. Con el cambio de variable anterior, se llega al problema equivalente

$$u'' + a\,\mathrm{sen}(U(x) + y) = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \tag{6.0.8}$$

en este caso, la función F está dada por

$$F(x, y) = a\cos(U(x) + y) \leq a$$

y satisface la condición 6.0.4. Así el problema 6.0.7 siempre tiene una solución.

El funcional de acción en este caso está dado por

$$\varphi(y) = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}y'(x)^2 + a\cos(U(x) + y(x))\right] dx$$

y

$$\langle \varphi'(y), v\rangle = \int_0^\pi [y'(x)v'(x) - a\,\mathrm{sen}(U(x) + y(x)v(x)]\, dx$$

Ya vimos, en el caso general, que φ está acotada inferiormente en E.

Ahora, veamos que φ satisface PS.

Sea $(y_n)_{n\geq 1} \subset H_0^1([0,\pi])$ tal que $|\varphi(y_n)| \leq M$ y $(\varphi'(y_n))_{n\geq 1} \to 0$.

Tenemos,

$M \geq |\varphi(y_n)| = \left|\int_0^\pi \frac{y_n'^2}{2}\, dx - \int_0^\pi F(x,y)\, dx\right| \geq \int_0^\pi \frac{y_n'^2}{2}\, dx - \int_0^\pi F(x,y)\, dx \geq$

$$\geq \frac{1}{2}\|y_n\|^2 - \pi A$$

esto es

$$\|y_n\|^2 \leq (M + \pi A)2$$

Entonces, (y_n) está acotada en E.

Luego, existe una subsucesión (y_{n_k}) que converge débilmente a algún $y \in H^1(0,\pi)$, podemos suponer que $y_n \rightharpoonup y$ y, además $y_n \to y$ tiende uniformemente a y sobre $[0,\pi]$, por la inclusión compacta de $H_0^1([0,\pi])$ en $C([0,\pi])$.

Debemos ver que $(y_n)_n$ converge en $H_0^1(0,\pi)$.

Sabemos que $(\varphi'(y_n))_{n\geq 1} \to 0$, es decir $\langle \varphi'(y_n), v\rangle \to 0 \ \forall v \in H_0^1(0,\pi)$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi'(y_n - y), y_n - y\rangle = 0$$

Pero sabemos que $\langle \varphi'(y_n), v\rangle = \int_0^\pi y_n v - a\,\mathrm{sen}(U+y_n)v\,dx$, entonces $\langle \varphi'(y_n - y), y_n - y\rangle = \int_0^\pi \{|y_n' - y'|^2 - [a\,\mathrm{sen}(U+y_n) - a\,\mathrm{sen}(U+y)](y_n - y)\}\,dx$. Por la convergencia uniforme de (y_n) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi [a\,\mathrm{sen}(U+y_n) - a\,\mathrm{sen}(U+y)](y_n - y)\,dx = 0.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi |y_n' - y'|^2 dx = 0$$

lo que implica que $y_n \to y$ en $H_0^1(0,\pi)$.

Entonces, φ satisface PS. Esto implica que $(PS)_c$ vale para todo c y, por el corolario 4.0.15, se sigue que φ tiene un punto crítico.

En 1930, usando un enfoque variacional un poco más complicado para ecuaciones integrales no lineales, Hammerstein generalizó el teorema de Lichtenstein, reemplazando la condición 6.0.4, por otra más general

$$F(x,y) \leq \lambda \frac{y^2}{2} + A \tag{6.0.9}$$

para algún $\lambda < 1$ y $A \geq 0$. No es difícil adaptar el argumento de Lichtenstein, a este caso más general, si se usa la desigualdad de Poincaré para reemplazar

la desigualdad 6.0.5 por

$$\varphi(y) \geq \frac{1-\lambda}{2}\|y\|^2 - \pi A.$$

Capítulo 7

Soluciones periódicas del péndulo forzado y condiciones de Landesman-Lazer

Consideremos el problema de encontrar soluciones periódicas para la ecuación del péndulo periódicamente forzada:

$$\begin{cases} y'' + g(y) = f(t) \\ y(0) = y(T) \\ y'(0) = y'(T) \end{cases} \tag{7.0.1}$$

donde:

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, 2π-periódica y con promedio 0, es decir:

$$\bar{g} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s)ds = 0$$

y $f \in L^1(0, T)$ con promedio 0,

$$\bar{f} := \frac{1}{T} \int_0^{T} f(t)dt = 0$$

Trabajaremos en el espacio

$$E = H_T^1([0,T]) = \{y \in AC[0,T] : y' \in L^2(0,T), y(0) = y(T)\}$$

con el producto interno

$$\langle y, z\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)z(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T y'(t)z'(t)dt$$

y su correspondiente norma, $\|y\|$, con esto E resulta un espacio de Hilbert. Además, las soluciones del problema 7.0.1 corresponden a los puntos críticos del funcional de acción $\varphi : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(y) = \int_0^T \left[\frac{y'^2(t)}{2} - G(y(t)) + f(t)y(t)\right] dt,$$

donde

$$G(y) = \int_0^y g(s)ds.$$

Observamos que G es 2π-periódica, pues g tiene promedio 0:

$$G(y+2\pi) = \int_0^{y+2\pi} g(s)ds = \int_0^y g(s)ds + \int_y^{y+2\pi} g(s)ds$$

$$= \int_0^y g(s)ds + \int_0^{2\pi} g(t+y)dt = \int_0^y g(s)ds = G(y)$$

Notemos, además, que si y es solución de 7.0.1, entonces $y + 2k\pi$ también es solución para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

Dos soluciones de 7.0.1 serán llamadas **geométricamente distintas** si no difieren en un múltiplo de 2π.

Para ver que $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$, procedemos de manera análoga al caso de Dirichlet, teniendo en cuenta que $\|y\|_{L^2} \leq \|y\|$. En este caso, tenemos

$$\langle \varphi'(y), v\rangle = \int_0^T [y'(t)v'(y) - g(y(t))v(t) + f(t)v(t)]dt.$$

Ahora escribamos [1],

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t)$$

donde

$$\int_0^T \tilde{y}(t)dt = 0,$$

En lo que sigue usaremos la *desigualdad de Wirtinger*

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_0^T \tilde{y}^2(t)dt \leq \int_0^T y'^2(t)dt,$$

y la *desigualdad de Sobolev*

$$\max_{t\in[0,T]} |\tilde{y}(t)| \leq \frac{T^{1/2}}{2\sqrt{3}} \left(\int_0^T y'^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

Lema 7.0.22 *φ es 2π-periódica, acotada inferiormente, satisface BPS, y $(PS)_c$ para cada $c \in \mathbb{R}$.*

Demostración: $\boxed{\varphi \text{ es } 2\pi\text{-periódica}}$

Queremos ver que $\varphi(y) = \varphi(y + 2\pi)$

$\varphi(y+2\pi) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}(y + 2\pi)'^2(t) - G(y + 2\pi) + \tilde{f}(t)(\bar{y} + \tilde{y} + 2\pi)\right] dt = \int_0^T \frac{1}{2}y'^2(t) -$
$\int_0^T G(y)dt + \int_0^T \tilde{f}(t)\bar{y}(t)dt + \int_0^T \tilde{f}(t)\tilde{y}(t)dt + \int_0^T 2\pi\tilde{f}(t)dt = \varphi(y)$

pues G es 2π-periódica y f tiene promedio 0.

$\boxed{\varphi \text{ está acotada inferiormente}}$

$$\varphi(y) = \int_0^T \frac{y'^2(t)}{2}dt - \int_0^T G(y(t))dt + \int_0^T \tilde{f}(t)\tilde{y}(t)dt$$

[1] Siempre podemos conseguir esto, ya que

$$y(t) = \bar{y}(t) + (y(t) - \bar{y}(t)),$$

donde $y(t) - \bar{y}(t)$ tiene promedio 0. En particular, si y tiene período 0, $y = \tilde{y}$.

Como

$$\int_0^T \tilde{f}(t)\tilde{y}(t)dt \leq \int_0^T |\tilde{f}(t)||\tilde{y}(t)|dt$$

$$\leq \int_0^T |\tilde{f}(t)| \max_{t\in[0,T]} |\tilde{y}(t)|dt = \max_{t\in[0,T]} |\tilde{y}(t)| \int_0^T |\tilde{f}(t)|dt$$

$$\leq \frac{T^{1/2}}{2\sqrt{3}} \left(\int_0^T y'^2(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T |\tilde{f}(t)|dt\right)$$

entonces,

$$-\int_0^T \tilde{f}(t)\tilde{y}(t)dt \geq -\frac{T^{1/2}}{2\sqrt{3}} \left(\int_0^T y'^2(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T |\tilde{f}(t)|dt\right)$$

donde usamos la desigualdad de Sobolev.

Por otro lado,

$$\int_0^T G(y(t))dt \leq \int_0^T \int_0^y |g(s)|ds \leq \int_0^T \int_0^y \max_{s\in[0,T]} |g(s)| = MT,$$

$$-\int_0^T G(y(t))dt \geq MT$$

Luego,

$$\varphi(y) \geq \int_0^T \frac{y'^2(t)}{2}dt - MT - \frac{T^{1/2}}{2\sqrt{3}} \left(\int_0^T y'^2(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T |\tilde{f}(t)|dt\right)$$

$$\varphi(y) \geq \frac{1}{2}\|y'\|_{L^2}^2 - MT - K\|y'\|_{L^2}^2$$

$$\varphi(y) + MT \geq \|y'\|_{L^2}^2 \left(\frac{1}{2}\|y'\|_{L^2}^2 - K\right).$$

$\boxed{\varphi \text{ satisface } BPS}$

Dada $(y_n)_{n\geq 1} \subset E$ acotada tal que $|\varphi(y_n)| \leq c$ y $\varphi'(y_n) \to 0$. Debemos ver que (y_n) tiene una subsucesión convergente en E.

Podemos suponer que (y_n) converge débil en E, (ya que es acotada) si no, tomamos una subsucesión. Además $y_n \to y$ uniformemente en $[0,T]$.

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi'(y_n) - \varphi'(y), y_n - y\rangle = 0$$

Como

$$\langle \varphi'(y_n) - \varphi'(y), y_n - y\rangle = \int_0^T [y_n'(t) - y'(t)]^2 dt - \int_0^T [g(y_n(t)) - g(y(t))][y_n(t) - y(t)]dt,$$

entonces, por la convergencia uniforme, tenemos,

$$\int_0^T [g(y_n(t)) - g(y(t))][y_n(t) - y(t)]dt \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Luego,

$$\int_0^T [y_n'(t) - y'(t)]^2 dt \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Así, $y_n \to y$ en $H_T^1[0,T]$. Entonces, φ satisface BPS.

Veamos que satisface $(PS)_c$.

Sea $(y_n)_{n\geq 1} \subset E$ tal que $\varphi(y_n) \to c$ y $\varphi'(y_n) \to 0$. Entonces, $(\varphi(y_n))$ está acotada y, además, por estar φ acotada inferiormente tenemos que $\|y_n'\|_{L^2}$ está acotada para cada n.

Ahora bien, como φ es 2π-periódica, existe una sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subset [0, 2\pi)$ tal que $z_n = \bar{y_n} (\text{mod } 2\pi)$.

Sea $w_n(t) = z_n + \tilde{y_n}(t)$, entonces tenemos,

$$\varphi(y_n) = \varphi(\bar{y_n} + \tilde{y_n}) = \varphi(z_n - 2k\pi + \tilde{y_n}) = \varphi(z_n + \tilde{y_n}) =$$

$$= \varphi(w_n).$$

Análogamente, se puede ver que $\varphi'(y_n) = \varphi'(w_n)$. Además, w_n está acotada en H_T^1, por la desigualdad de Wirtinger, ya que teníamos que $\|y_n\|_L^2$ estaba

acotada.

Con el mismo razonamiento al hecho anteriormente, para probar BPS, aplicado a w_n, concluimos que $w_n \to w \in H^1_T[0,T]$. Luego

$$\varphi(w_n) \to \varphi(w) \quad n \to \infty$$

es decir

$$\varphi(y_n) \to c \quad n \to \infty$$

por lo que $\varphi(w) = c$.

También,

$$\varphi'(w_n) \to \varphi'(w) \quad n \to \infty$$

que es lo mismo que

$$\varphi'(y_n) \to 0 \quad n \to \infty$$

entonces, $\varphi'(w) = 0$. Luego, c es un valor crítico de φ.$\diamondsuit$

Observación 7.0.23 *Mostramos en el capítulo anterior que en el caso de Dirichlet, φ verificaba PS en $H^1_0([0,T])$. El resultado del lema muestra que, en el caso periódico, sólo verifica la condición más débil, $(PS)_c$ y la BPS, en $H^1_T([0,T])$. De hecho, φ no puede verificar PS, y esto se debe a su periodicidad. En efecto, supongamos que sí verifica la condición, esto es: si $(y_n)_n$ es una sucesión en $H^1_T([0,T])$ tal que $|\varphi(y_n)| \leq c$ para alguna constante $c > 0$ y $\|\varphi'(y_n)\| \to 0$, entonces existe una subsucesión $(y_{n_j})_j$ convergente en $H^1_T([0,T])$. Consideremos la sucesión $z_{n_j} = y_{n_j} + 2\pi n$, entonces $(z_{n_j})_j$ es una sucesión de PS para φ, por ser ésta 2π-periódica. Pero $(z_{n_j})_j$ no está acotada, por lo tanto no admite ninguna subsucesión convergente, absurdo.*

Teorema 7.0.24 *Para cada $f \in L^1([0,T])$ tales que $\bar{f} = 0$, el problema 7.0.1 tiene como mínimo dos soluciones geométricamente distintas.*

Demostración: Por el lema anterior φ, verifica las hipótesis del corolario 4.0.15. Así, el problema 7.0.1 tiene una solución y^* que minimiza φ sobre $H_T^1([0,T])$.

Veamos que φ tiene otra solución geométricamente distinta.

Sea $\psi(y) = \varphi(y^*+y)$. Entonces ψ satisface las condiciones del lema 7.0.22: que ψ sea 2π-periódica y acotada inferiormente, es claro. Para ver que satisface $(PS)_c$, sea $(y_n)_n \subset E$ tal que $|\varphi_(y_n)| \leq M$ y $|\varphi'_(y_n)| \to 0$. Entonces, por la definición de ψ, la sucesión $(y^* + y_n)_n$ es una sucesión de Palais-Smale en el nivel c para φ, luego c es valor crítico de ψ. Por otro lado, si $(y_n)_n$ está acotada y es tal que $(\psi(y_n))_n$ está acotada y $(\psi'(y_n))_n$ tiende a cero, entonces se sigue inmediatamente que $(y_n)_n$ tiene una subsucesión covergente, ya que φ cumplía BPS.

Además,

$$\psi(0) = \varphi(y^*) = \min_{H_T^1} \varphi$$

$$\psi(2\pi) = \varphi(y^* + 2\pi) = \varphi(y^*) = \min_{H_T^1} \varphi$$

Sean $0 < r < R < 2\pi$, $e = 2\pi$. Entonces, se verifican las condiciones del 5.0.19. Luego, si el valor crítico (de ψ) $c > \min_{H_T^1} \varphi$, entonces el correspondiente punto crítico es geométricamente distinto de y^*. Veamos esto: si pasara que $v - y^* = 2k\pi$, donde v es el punto crítico de ψ correspondiente a c, con lo cual $y^* + v$ es punto crítico de φ. En este caso tendríamos, $\min_{H_T^1} \varphi = \varphi(y^*) = \psi(0) = \psi(v - 2k\pi) = \psi(v) = c$, que es una contradicción. Si $c = \min_{H_T^1} \varphi$, entonces el teorema dice que ψ tiene un punto crítico z tal que $r \leq \|z\| \leq R$. En consecuencia, $y^{**} = y^* + z$ es un punto crítico de φ, pues $\varphi(y^* + z) = \psi(z) = c$ y $\varphi'(y^* + z) = \psi'(z) = 0$.

y^{**} cumple que $0 < r \leq \|y^{**} - y^*\| \leq R < 2\pi$, por lo tanto y^{**} y y^* son dos soluciones geométricamente distintas del problema 7.0.1.$\diamondsuit$

La primera solución fue esencialmente descubierta por Hamel en 1922, y la segunda por Mawhin y Willem en 1983.

Observación 7.0.25 *El teorema anterior también puede ser probado considerando el funcional análogo al que se usó en el capítulo anterior. Como* $\bar{f} = 0$, *el problema*

$$u'' = f, \qquad u(0) = u(T), \;\; u'(0) = u'(T), \;\; \tilde{u} = 0$$

tiene una única solución $U(x)$. *Sea* $y = U + u$, *entonces el problema 7.0.1 es equivalente a*

$$u'' + g(U + u) = 0, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T),$$

con el funcional asociado

$$\varphi(y) = \int_0^T \left[\frac{u'^2(t)}{2} - G(U(t) + u(t)) \right] dt.$$

Para concluir estas notas, veremos un caso diferente del problema periódico del péndulo. En general,

$$\begin{cases} y'' = f(t, y) \\ y(0) = y(T) \\ y'(0) = y'(T) \end{cases} \tag{7.0.2}$$

donde f satisface unas ciertas condiciones, llamadas *condiciones de Landesman-Lazer*, tiene al menos una solución, usando métodos variacionales.

Más explícitamente:

Sea

$$F(t,u) = \int_0^u f(t,s)\,ds$$

tal que $|F(t,u)| = |\int_0^u f(t,s)ds| \leq C|u|$ para alguna constante C. Consideremos el funcional

$$J(y) = \int_0^T \frac{y'^2(t)}{2} - F(t,y)\,dt$$

definido sobre el espacio $E = H_T^1([0,T])$, con la norma usual, que será denotada por $\|\cdot\|$. Entonces,

$$J'(y)(v) = \langle J'(y), v\rangle = \int_0^T y'(t)v'(t) - f(t,y)v(t)dt.$$

Como antes, podemos ver que cualquier punto crítico de J es una solución de 7.0.2.

Como ya habíamos anticipado, probaremos la existencia de puntos críticos de J bajo las siguientes condiciones:

$f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, acotada, con límites en el infinito, es decir

$$\lim_{s\to\pm\infty} f(t,s) := f^{\pm}(t)$$

Teorema 7.0.26 *Supongamos que*

$$\int_0^T f^+(t)dt < 0 < \int_0^T f^-(t)dt \tag{7.0.3}$$

entonces el problema 7.0.2 admite al menos una solución.

Observación 7.0.27 *La condición 7.0.3 se llama condición de Landesman-Lazer.*

Para probar el teorema veremos que J es coerciva y satisface PS, luego por el corolario 4.0.15 se tiene el resultado.

Demostración: En primer lugar, veremos que J verifica PS.

Sea entonces $(y_n)_n \subset E$ tal que

$$|J(y_n)| \leq c, \qquad \|J'(y_n)\| = \varepsilon_n \to 0, \tag{7.0.4}$$

Debemos ver que (y_n) tiene una subsucesión convergente. Afirmamos que $(y_n)_n$ está acotada.

Supongamos que no, entonces $\|y_n\| \to +\infty$. Sea $v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$ (luego, $(v_n)_n$ está acotada en E). Pasando a una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponer que $v_n \rightharpoonup v \in E$ y $v_n \to v$ uniformemente en $[0,T]$. Veamos que $v \equiv c_0$ donde c_0 es una constante.

Como $J(y_n)$ y $|F(t,u)|$ están acotadas, tenemos que

$$\int_0^T \frac{y_n'^2}{\|y_n\|} dt \leq 2\left(c + \int_0^T F(t,y_n)dt\right) \leq \frac{M}{\|y_n\|^2}$$

entonces,

$$\int_0^T \frac{y_n'^2}{\|y_n\|} dt \to 0.$$

Escribamos

$$v_n = \frac{y_n - y_n(0)}{\|y_n\|} + \frac{y_n(0)}{\|y_n\|},$$

entonces como $|y_n - y_n(0)| = |\int_0^t y_n' dt| \leq k\|y_n'\|_{L^2} < \infty$, donde la anteúltima desigualdad la tenemos por Cauchy-Swchartz, tenemos que

$$\frac{y_n - y_n(0)}{\|y_n\|} \to 0.$$

Luego, tomando una subsucesión si fuera necesario, podemos suponer que $v \to c_0$ uniformemente sobre $[0,T]$ (pues $\|v_n\| = 1$ para todo n) donde

$c_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Además, como

$$v_n' = \frac{y_n}{\|y_n\|} \to 0,$$

se concluye que $v_n \to c_0$ en E.

Por otro lado, de 7.0.4 teníamos que

$$-2c \leq \int_0^T y_n'^2(t) - 2F(t, y_n(t))y_n(t)dt \leq 2c$$

y $\langle J'(y_n), y_n\rangle \leq \varepsilon_n\|y_n\|$ o equivalentemente

$$-\varepsilon_n\|y_n\| \leq \int_0^T y_n'^2(t) + f(t, y_n(t))y_n(t)dt \leq \varepsilon_n\|y_n\|$$

Luego,

$$\left|\int_0^T [f(t, y_n(t) - 2\tilde{F}(t, y_n(t))]v_n(t)dt\right| \leq \frac{2c}{\|y_n\|} + \varepsilon_n$$

donde

$$\tilde{F}(t, y_n(t)) = \begin{cases} \frac{\tilde{F}(t,u)}{u} & si \;\; u \neq 0 \\ \\ f(t, 0) & si \;\; u = 0 \end{cases}$$

Esto dice que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T f(t, y_n(t))v_n(t)dt = 2 \lim_{n\to\infty} \int_0^T F(t, y_n(t))v_n(t)dt. \tag{7.0.5}$$

Supongamos, por ejemplo que $c_0 > 0$. Entonces, tenemos que $y_n(t) \to +\infty$, para cada $t \in [0, T]$. Además, por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ y $t \in [0, T]$ existe u_0 tal que si $u \geq u_0$ entonces $|f(t, u) - f^+(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces,

$$\left|\frac{F(t, u)}{u} - f^+(t)\right| = \left|\frac{F(t, u_0)}{u} + \frac{1}{u}\int_{u_0}^u [f(t, u) - f^+(t)]ds - \frac{u_0}{u}f^+(t)\right| < \varepsilon$$

para $u > 0$ grande.

Entonces, $\tilde{F}(t,u) \to f^+(t)$, cuando $u \to +\infty$. Por 7.0.5, y convergencia mayorada, ya que f^+ es integrable sobre el $[0,T]$ tenemos:

$$\int_0^T f^+ c_0 dt = 2\int_0^T f^+ c_0 dt,$$

entonces,

$$\int_0^T f^+ dt = 0,$$

lo que contradice 7.0.3. Luego, y_n está acotada. (Si $c_0 < 0$ la demostración es análoga).

Así, pasando a una subsucesión, podemos suponer que $y_n \rightharpoonup y \in E$ y uniformemente sobre $[0,T]$.

Además, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'(y_n), y_n - y\rangle = 0$$

Pero

$$\langle J'(y_n), y_n - y\rangle = \int_0^T y_n'(t)(y_n' - y')(t) - f(t,y_n)(y_n - y)(t)dt,$$

entonces, por la convergencia uniforme de $(y_n)_n$ y del hecho de que f está acotada, se tiene que

$$\int_0^T f(t,y_n)(y_n - y)(t)dt \to 0$$

con lo cual,

$$\int_0^T y_n'(t)(y_n' - y')(t)dt \to 0.$$

Entonces, por la convergencia débil de y_n, se concluye

$$\int_0^T (y_n' - y')^2 dt \to 0,$$

Así, $y_n \to y$ en E.

Resta ver que J es coerciva.

Supongamos que $J(y_n) \leq c$ y que $\|y_n\| \to +\infty$. De la misma forma que antes, podemos deducir $\frac{y_n}{\|y_n\|} \to c_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si $c_0 > 0$ de nuevo tendríamos,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \frac{F(t, y_n)}{\|y_n\|} dt = c_0 \int_0^T f^+ dt < 0,$$

Análogamente, si $c_0 < 0$. Luego,

$$\frac{J(y_n)}{\|y_n\|} = \int_0^T \frac{y'^2(t)}{2\|y_n\|} dt - \int_0^T \frac{F(t, y_n)}{\|y_n\|} dt \leq \frac{c}{\|y_n\|}$$

$$\int_0^T \frac{y'^2(t)}{2\|y_n\|} dt \leq \frac{c}{\|y_n\|} + \int_0^T \frac{F(t, y_n)}{\|y_n\|} dt$$

es decir, para n grande se tiene

$$\int_0^T \frac{y'^2(t)}{2\|y_n\|} dt \leq \varepsilon + c_0 \int_0^T f^+ dt < 0$$

(donde $0 < \varepsilon < \frac{c}{\|y_n\|}$), que es un absurdo. Por lo tanto, J es coerciva. $\diamondsuit$

Observación 7.0.28 *En particular, el problema*

$$y'' + g(y) = p(t)$$

admite una solución T- periódica cuando $g^- < \bar{p} < g^+$, donde

$$g^{\pm} = \lim_{s\to\pm\infty} g(s).$$

Es el caso, por ejemplo de $f(t, y) = p(t) - \varphi(t) \arctan(y)$, en 7.0.2. Para una φ apropiada.

Resultados como el que se probó en el teorema anterior, surgieron del estudio de los llamados *problemas resonantes* tanto para ecuaciones diferenciales ordinarias, como en derivadas parciales. La mayoría de los problemas del análisis no lineal se pueden escribir de la siguiente forma:

$$L(x) = N(x)$$

donde L es un operador diferencial lineal, definido en un apropiado espacio de funciones y N es un operador no lineal. El problema se llama *no resonante* cuando el operador L es inversible. En tal caso, tenemos

$$x = L^{-1}N(x)$$

y se pueden usar, por ejemplo, teoremas de punto fijo. Cuando L no es inversible, el problema se llama *resonante*.

Para las ecuaciones de segundo orden, se conoce el siguiente resultado.

Teorema 7.0.29 *Supongamos que $c > 0$, $p \in C(\mathbb{R})$ es 2π-periódica y que $g \in C(\mathbb{R})$ tiene límites en el infinito*

$$g^{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} g(x)$$

entonces la ecuación resonante de segundo orden

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = p(t)$$

tiene una solución 2π-periódica si

$$g(-\infty) < \bar{p} < g(+\infty). \tag{7.0.6}$$

Además, si g satisface

$$g(-\infty) < g(x) < g(+\infty) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

entonces, 7.0.6 es también una condición necesaria para la existencia de soluciones 2π-periódicas.

Observación 7.0.30 *En este caso, la ecuación tiene un término lineal, y el estudio no se puede realizar por métodos variacionales sino que se usan herramientas topológicas.*

Condiciones del tipo 7.0.6, son típicas en muchos resultados de existencia de soluciones para problemas resonantes. Se conocen con el nombre de **condiciones del tipo Landesman-Lazer**, por el trabajo pionero de estos autores sobre el problema resonante de Dirichlet para ecuaciones elípticas de segundo orden.

Bibliografía

[1] Amster P. , De Nápoli P. and Mariani M.C.: *Resonant Problems for Ordinary Differential Equations*

[2] Arrieta, Jose M.: *El Cálculo y La Modelización Matemàtica*, artículo.

[3] Brezis,H.: *Análisis Funcional: teoría y aplicaciones*, Serie: Alianza universidad textos, Madrid: Alianza, c1984

[4] Giancoli, D: *Fisica Vol. I*, Editorial Reverté SA, Barcelona, primera edición, 1998.

[5] Hirsh, Morris W.- Smale Stephen: *Differential Equation, Dynamical Systems and Linera Algebra*, Academis Press Inc., 1974.

[6] Lima, Elon Lages: *Espaços metricos*, Conselho Nacional de Desemvolvimiento Científico e Tecnológico, CNPq., Serie Proyeto Euclides, Av. W-3 Norte, Brasilia, DF, 1977.

[7] Maad, Sara: *Critical Point Theory with applications to Semilinear Problems without compactness*, article 2005.

[8] Mawhin, Jean: *Critical Point Theory and Applications to Nonlinear Differential Equations*, Lectures given at the VIGRE Minicourse on Varia-

tional Method and Nonlinear PDE University of Utah, May 28- June 8, 2002.

[9] Ortega, Rafael: *Puntos fijos del plano y mínimos del funcional de acción*, páginas 1-3.

[10] Perko, Lawrence: *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York Inc., 1991.

[11] Rabinowitz, Paul H.: *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Regional conference series in mathematics, ISSN 0160-7642, no.65, Miami January 9-13, 1984.

[12] Rousseau, Olivier: *Ideas in Critical Point Theory*, article, February 15, 2005.

[13] Serway, Raymond A. - Jewett, John W.: *FISICA. 3a. ed*, México DF, International Thomson, 2004.

[14] Wheeden, R- Zygmund, A: *Measure and Integral*, Dekker, 1977.