UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

SOBRE LA CANTIDAD DE SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES POLINOMIALES RALAS

María Isabel Herrero

Directores: Juan Vicente Rafael Sabia

Gabriela Talí Jeronimo

Marzo de 2007

Agradecimientos

A mamá Mon, que me dio el mundo, que fue siempre la fuerza para afrontar los miedos y seguir adelante. Y, que a veces, los afrontó en mi lugar. A papá y mis tres hermanos Juan, Agustín y Sofía, que a su manera cada uno me enseñaron a crecer. A mis abuelos, y toda mi familia por siempre apoyarme y creer en mí.

A vos, Pablo, que sos mi refugio, mis ganas, mi sonrisa. A tu amor, que le da vida a mi vida, que me da ese lugarcito donde olvidarme de todo, y donde disfrutarlo también.

A mis amigas, Florencia y Eliana, con las que puedo contar siempre, sin importar las distancias, o los caminos distintos. Y a los otros amigos, los de la facu, con los que sí compartí este sendero, con sus dudas enormes y sus maravillas. A Martín y Angélica, que aún a kilómetros y kilómetros de distancia me ayudaron un montón. A Vicky, Pablis, Lau, Edu, Ana, Lean, Caro, JL y Laura, que me dieron risas y tan buenos momentos, pero también un hombro en el que apoyarme. Y en particular, a Magui, por todas nuestras charlas y su enorme paciencia. Por escucharme sin juzgar, y siempre entender aunque no supiera explicarme ni un poquito.

A todos mis profesores, que cambiaron completamente mi forma de ver las cosas. Y muy, muy especialmente a mis maestros, Juan y Gabriela, que me enseñaron tanto. Que fueron mucho más que mis Directores, que me cuidaron, me acompañaron en cada paso, caminándolo conmigo e hicieron posible todo esto.

Muy pero muy en serio, Gracias a todos y a cada uno.

Isa.

Índice general

Introducción **7**

1. Preliminares **11**
1.1. Polítopos 11
1.2. Sumas de Minkowski y volumen mixto 19
1.3. Genericidad 22
1.4. Series de potencias racionales 24
1.5. Multiplicidad de intersección 26

2. El Teorema de Bernstein **29**
2.1. Cambios de variable y propiedades genéricas 30
2.2. El Teorema de Bernstein 35
2.2.1. Demostración del Teorema 2.10 36
2.2.2. Demostración del Teorema 2.9 40
2.3. Algunos ejemplos 48
2.3.1. El Teorema de Bernstein en un caso genérico 48
2.3.2. Sistemas no genéricos 57

3. Un refinamiento de la cota de Bernstein **73**
3.1. Integral mixta 73
3.2. Una nueva cota para la cantidad de raíces comunes 76
3.3. Cálculo de la integral mixta 82
3.3.1. Cálculo de la suma de Minkowski de funciones 84
3.3.2. Cálculo de integrales mixtas 92
3.4. Multiplicidad de intersección y la integral mixta 97
3.5. Algunos casos particulares 110
3.5.1. Anillos y órdenes locales 110
3.5.2. Casos particulares 120

Bibliografía **128**

Introducción

Una gran cantidad de problemas tanto de matemáticas como de otras disciplinas pueden modelizarse utilizando sistemas de ecuaciones polinomiales en varias variables. Dependiendo de la información requerida para la resolución de dichos problemas, puede no ser necesario resolver el sistema de ecuaciones asociado sino decidir si el sistema sólo tiene finitas soluciones o estimar la cantidad de estas soluciones. En particular, dados polinomios $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ se busca estimar la cantidad de soluciones sobre $\mathbb{C}$ del sistema de ecuaciones

$$\mathbf{F} = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

El Teorema de Bézout (ver [16, Capítulo IV, Sección 2.1]) relaciona la cantidad de soluciones aisladas en $\mathbb{C}^n$ de un sistema $\mathbf{F}$ con los grados de los polinomios involucrados: si $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ son polinomios genéricos de grados totales $d_1, \ldots, d_n$ respectivamente, entonces la cantidad de soluciones del sistema $\mathbf{F}$ en $\mathbb{C}^n$ es $\prod_{1 \leq i \leq n} d_i$. Más aún, para polinomios arbitrarios de grados $d_1, \ldots, d_n$, el teorema establece que la cantidad de soluciones *aisladas* del sistema $\mathbf{F}$ (contadas con multiplicidad) es a lo sumo $\prod_{1 \leq i \leq n} d_i$ (ver, por ejemplo, [9, Teorema 1] y [8, Capítulo 2]).

A pesar de que la cota dada por el Teorema de Bézout para la cantidad de soluciones aisladas se alcanza genéricamente, en casos particulares esta cota suele ser mucho mayor que la cantidad de soluciones del sistema. Por otro lado, estos casos particulares pueden ser de interés ya que los sistemas de ecuaciones que surgen en las aplicaciones poseen, en general, cierta estructura derivada del problema que modelan.

Un refinamiento del Teorema de Bézout en esta dirección es el Teorema de Bernstein ([1]), que acota la cantidad de soluciones aisladas en $(\mathbb{C}^*)^n$ de un sistema de n ecuaciones dadas por polinomios de Laurent en n variables teniendo en cuenta cuáles son los monomios que efectivamente aparecen en cada una de las ecuaciones del sistema. Dado un polinomio de Laurent $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, se le asocia un polítopo en $\mathbb{R}^n$ (la cápsula convexa del conjunto de exponentes de monomios en f cuyos coeficientes son no nulos) llamado el *polítopo*

de Newton de f. El teorema de Bernstein relaciona la cantidad de soluciones en $(\mathbb{C}^*)^n$ de un sistema de ecuaciones dadas por $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ con la geometría de los polítopos de Newton de dichos polinomios. Más precisamente, este teorema establece que, en el caso genérico, la cantidad de soluciones del sistema en $(\mathbb{C}^*)^n$ es igual al *volumen mixto* de la familia de los polítopos de Newton de los polinomios y, en general, este número da una cota superior para la cantidad de soluciones aisladas en $(\mathbb{C}^*)^n$ (contadas con multiplicidad) de un sistema de ecuaciones del tipo considerado. Este número se conoce como la cota BKK por los trabajos de Bernstein [1], Kushnirenko [12] y Khovanskii [11].

Recientemente, en [15], se obtuvo un refinamiento de la cota BKK para el caso de sistemas de polinomios de Laurent no genéricos. Para la formulación de esta nueva cota se introdujeron ciertas construcciones combinatorias adicionales asociadas al sistema de ecuaciones considerado, análogas al polítopo de Newton de un polinomio de Laurent y al volumen mixto de una familia de polítopos. Esencialmente, la cota está dada por el volumen mixto de la familia de polítopos de Newton de los polinomios del sistema más una sumatoria de términos no positivos que son *integrales mixtas* (ver [14]) de familias de funciones cóncavas definidas a partir de los polinomios dados. Al igual que en el caso del teorema de Bernstein, bajo ciertas condiciones de genericidad, la cota de [15] coincide con la cantidad exacta de raíces aisladas del sistema contadas con multiplicidad y, en cualquier caso, da una cota superior para esta cantidad.

En esta tesis se considera el problema de estimar la cantidad de soluciones aisladas en $(\mathbb{C}^*)^n$ de sistemas de ecuaciones polinomiales ralas, es decir, ecuaciones dadas por polinomios tales que los monomios de cada uno de ellos están en conjuntos prefijados.

En el Capítulo 1 se introducen algunas nociones y se establecen algunas propiedades que se usan a lo largo de la tesis, en particular la de polítopo de Newton asociado a un polinomio de Laurent y la de volumen mixto de una familia de polítopos.

En el Capítulo 2 se hace un análisis detallado del trabajo [1] donde se demuestra los resultados de Bernstein mencionados sobre sistemas de polinomios ralos. A continuación, se exhiben algunos ejemplos que ilustran las demostraciones antedichas.

Finalmente, el Capítulo 3 presenta una demostración alternativa de una variación del resultado principal de [15] restringido al caso de dos polinomios en dos variables. En primer lugar, se define la noción de integral mixta de funciones cóncavas, que juega un papel fundamental en la cota obtenida en [15]. También se muestra cómo asociar a cada $\tau \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y cada polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ una función cóncava $\rho_{f,\tau}$ y se hace un análisis de cómo calcular la integral mixta $\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau})$ en el caso de dos polinomios $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ primitivos. A continuación, se prueba una relación entre $\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau})$ y la multiplicidad de intersección de f y g en los puntos $(0, \tau)$ y (∞, τ) para cada $\tau \in \mathbb{C}^*$ que nos permite deducir que, genéricamente, la cantidad de soluciones aisladas del sistema $f = 0$, $g = 0$ en $(\mathbb{C}^*)^2$ está acotada superiormente por $\mathcal{MV}_2(\mathcal{NP}(f), \mathcal{NP}(g)) + \sum_{\tau \in \mathbb{C}^*} \mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau})$

donde $\mathcal{MV}_2(\mathcal{NP}(f),\mathcal{NP}(g))$ es el volumen mixto de los polítopos de Newton de f y g. El capítulo concluye con el estudio de algunas familias de polinomios para las cuales se prueba que la cota se alcanza genéricamente.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de este capítulo se establecerán algunas definiciones y teoremas sobre polítopos, volumen mixto, series de Puiseux y multiplicidad de intersección que serán necesarios a lo largo de todo este trabajo. Para más detalles, ver [4] y [17].

1.1. Polítopos

La primer noción que introduciremos es la de convexidad.

Definición 1.1 *Un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice* convexo *si contiene el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos.*
Para un conjunto $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$, se llama combinaciones convexas de $\mathbf{S}$ *a todas las combinaciones lineales de la forma $\lambda_1.s_1 + \cdots + \lambda_m.s_m$ tales que $s_i \in \mathbf{S}$, $\lambda_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq m$ y $\sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i = 1$.*

Como la intersección de convexos es convexo, dado un conjunto $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$ tiene sentido decir que $\mathbf{P}$ es el menor convexo que lo contiene si y sólo si $\mathbf{P}$ es convexo, contiene a $\mathbf{S}$ y para todo $\mathbf{Q}$ convexo tal que $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Q}$ vale que $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$.

Definición 1.2 *Para un conjunto $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$, se define $\mathcal{C}onv(\mathbf{S})$ la* cápsula convexa *de $\mathbf{S}$ como el menor convexo que lo contiene.*

Este conjunto puede caracterizarse como sigue:

Proposición 1.3 *Sea $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$. La cápsula convexa de $\mathbf{S}$ es exactamente el conjunto de todas sus combinaciones convexas, es decir $\mathcal{C}onv(\mathbf{S}) = \{\lambda_1.s_1 + \cdots + \lambda_m.s_m \ / \ s_i \in \mathbf{S}$, $\lambda_i \geq 0 \ \forall 1 \leq i \leq m$ y $\sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i = 1\}$.*

Demostración: Dado un conjunto $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$ si notamos

$$\mathrm{C_S} = \{\lambda_1.s_1 + \cdots + \lambda_m.s_m \ / \ s_i \in \mathbf{S}, \ \ \lambda_i \geq 0 \ \ \forall 1 \leq i \leq m \text{ y } \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} \lambda_\mathrm{i} = 1\},$$

vale que $\mathbf{S} \subset \mathrm{C_S}$ pues $\forall s \in \mathbf{S}$ tomando $\lambda = 1$ tenemos que $s = \lambda.s \in \mathrm{C_S}$.

Veamos que $\mathrm{C_S}$ es convexo: para todo $a, b \in \mathrm{C_S}$ vale que $a = \lambda_1.s_1 + \cdots + \lambda_m.s_m$ y $b = \mu_1.r_1 + \cdots + \mu_k.r_k$ con $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, y $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$, $\mu_i \geq 0$. Sea $c \in \overline{ab}$. Tenemos que $c = t.a + (1-t).b$ con $t \in [0,1]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} c &= t.(\lambda_1.s_1 + \cdots + \lambda_m.s_m) + (1-t).(\mu_1.r_1 + \cdots + \mu_k.r_k) \\ &= t.\lambda_1.s_1 + \cdots + t.\lambda_m.s_m + (1-t).\mu_1.r_1 + \cdots + (1-t).\mu_k.r_k, \end{aligned}$$

donde $s_i, r_j \in \mathbf{S}$; $t.\lambda_i \geq 0$, $(1-t).\mu_j \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq k$. Además,

$$\sum_{i=1}^m t.\lambda_i + \sum_{j=1}^k (1-t).\mu_j \ = \ t.\sum_{i=1}^m \lambda_i + (1-t).\sum_{j=1}^k \mu_j \ = \ t.1 + (1-t).1 \ = \ 1.$$

Luego $c \in \mathrm{C_S}$ para todo $c \in \overline{ab}$, con lo cual $\overline{ab} \subseteq \mathrm{C_S}$ y esto vale para todo $a, b \in \mathrm{C_S}$. Por lo tanto, $\mathrm{C_S}$ es convexo. Entonces, como $\mathbf{S} \subset \mathrm{C_S}$, $\mathcal{C}onv(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{C_S}$.

Por último, sea C convexo tal que $\mathbf{S} \subseteq \mathrm{C}$. Veremos que $\mathrm{C_S} \subseteq \mathrm{C}$ usando inducción en m, la cantidad de elementos de $\mathbf{S}$ involucrados en la combinación lineal convexa.

Con $m = 2$, dados $s_1, s_2 \in \mathbf{S} \subseteq \mathrm{C}$, $\overline{s_1 s_2} \subset \mathrm{C}$ por ser C convexo. Luego, para todos los $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ vale que $\lambda_1.s_1 + \lambda_2.s_2 \in \mathbf{C}$.

Si vale para m, veamos que vale para $m+1$: Sea $\lambda_1.s_1 + \cdots + \lambda_m.s_m + \lambda_{m+1}.s_{m+1} \in \mathrm{C_S}$ con $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$ y $s_i \in \mathbf{S}$. Entonces, $\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}}.s_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}}.s_m$ es una combinación convexa de m elementos de $\mathbf{S}$, puesto que $\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}} > 0$ y $s_i \in \mathbf{S}$ para todo $1 \leq i \leq m$, y $\displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{m+1}}.\sum_{i=1}^m \lambda_i = \frac{1}{1-\lambda_{m+1}}.(1-\lambda_{m+1}) = 1$. Por la hipótesis inductiva, $\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}}.s_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}}.s_m \in \mathrm{C}$. Como además $s_{m+1} \in \mathbf{S} \subset \mathrm{C}$, por ser C convexo, vale que $t.s_{m+1} + (1-t).(\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}}.s_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}}.s_m) \in \mathrm{C}$ $\forall t \in [0,1]$. Tomando $t = \lambda_{m+1}$ tenemos que

$$\lambda_1.s_1 + \cdots + \lambda_m.s_m + \lambda_{m+1}.s_{m+1} =$$

$$= \lambda_{m+1}.s_{m+1} + (1-\lambda_{m+1}).(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}}.s_1 + \cdots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}}.s_m) \in \mathrm{C}.$$

Entonces, $C_{\mathbf{S}} \subset C$ para cualquier C convexo que contenga a $\mathbf{S}$.

Por definición de $\mathcal{C}onv(\mathbf{S})$ concluimos que $C_{\mathbf{S}} \subseteq \mathcal{C}onv(\mathbf{S})$. Finalmente, vale que $C_{\mathbf{S}} = \mathcal{C}onv(\mathbf{S})$. □

Consideraremos en particular el caso en que $\mathbf{S}$ sea un conjunto finito. Si $\mathbf{S} = \{s_j\}_{j=1}^r$, entonces su cápsula convexa es $\mathcal{C}onv(\mathbf{S}) = \{\lambda_1.s_1 + \cdots + \lambda_r.s_r \ / \ \lambda_i \geq 0 \ \forall 1 \leq i \leq r \text{ y } \sum_{1 \leq i \leq r} \lambda_i = 1\}$.

Definición 1.4 *Un* polítopo *es la cápsula convexa de un conjunto* $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *finito.*

Los polítopos enteros *son polítopos* $\mathbf{P} = \mathcal{C}onv(\mathbf{S})$ *donde los puntos de* $\mathbf{S}$ *tienen todas sus coordenadas enteras.*

El volumen n-dimensional de un polítopo $\mathbf{P}$ *está dado por* $\mathcal{V}ol_n(\mathbf{P}) = \int_{\mathbf{P}} 1 \ dx_1 \dots dx_n$ *donde* $x_1, \dots, x_n$ *son coordenadas en* $\mathbb{R}^n$.

Nos interesarán en particular los polítopos de la forma $\mathcal{C}onv(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ es finito y está formado por todos los vectores de exponentes de un conjunto de monomios. Por ejemplo, $\mathcal{A}_d = \{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \ / \ |m| \leq d\}$ es el conjunto de los vectores de exponentes de todos los monomios de grado total menor o igual a d.

Lema 1.5 *Sea* $\mathbf{Q}_d = \mathcal{C}onv(\{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \ / \ |m| \leq d\})$. *Entonces* $\mathbf{Q}_d = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ a_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^n a_i \leq d\}$.

Demostración: ($\subseteq$) Sea $\lambda_1.v_1 + \cdots + \lambda_r.v_r$ un elemento de $\mathcal{C}onv(\{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \ / \ |m| \leq d\})$ y por lo tanto que cumple que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ y $v_i \in \{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \ / \ |m| \leq d\}$ para todo $1 \leq i \leq r$. Si escribimos cada v_i como $v_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$ para todo $1 \leq i \leq r$,

$$\lambda_1.v_1 + \cdots + \lambda_r.v_r = (\lambda_1.a_{11} + \cdots + \lambda_r.a_{1r}, \dots, \lambda_1.a_{n1} + \cdots + \lambda_r.a_{nr}),$$

como $\lambda_i \geq 0$ y $v_i \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, resulta que $\lambda_1.a_{i1} + \cdots + \lambda_r.a_{ir} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$. Además, $\sum_{j=1}^r \lambda_j = 1$ y $\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq d$ con lo cual,

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_1.v_1 + \cdots + \lambda_r.v_r)_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_1.a_{i1} + \cdots + \lambda_r.a_{ir}) = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^r \lambda_j a_{ij})$$

$$= \sum_{j=1}^r \lambda_j.(\sum_{i=1}^n a_{ij}) \leq \sum_{j=1}^r \lambda_j.d = d.(\sum_{j=1}^r \lambda_j) = d.1 = d.$$

($\supseteq$) Por inducción en n (donde $\mathbf{Q}_d \subseteq \mathbb{R}^n$). Si $n = 1$ y $a_1 \in \{a_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ / \ a_1 \leq d\}$, tenemos que $a_1 \in \overline{0d} = \mathcal{C}onv(\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ / \ |m| \leq d\})$.

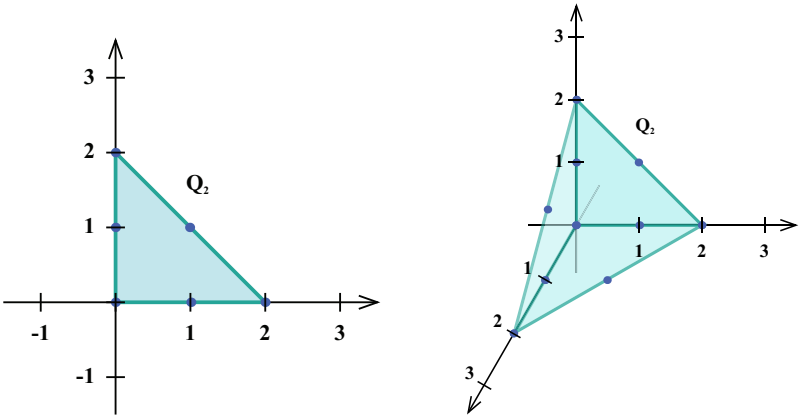
Si vale para $n-1$, queremos ver que vale para n: Sea $(a_1,\ldots,a_n) \in \{(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ a_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^n a_i \leq d\}$. Entonces, si llamamos $k = \sum_{i=1}^n a_i$, tenemos que $k \leq d$, $a_i \geq 0$ y $k - a_n \geq 0$. Si $k = a_n$, $(a_1,\ldots,a_n) = (0,\ldots,0,k) \in \mathcal{C}onv\{(0,\ldots,0);(0,\ldots,0,d)\} \subset \mathbf{Q}_d$. Si no, vale que $\frac{a_i.k}{k-a_n} \geq 0 \ \forall 1 \leq i \leq n-1$ y $\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{a_i.k}{k-a_n}) = \frac{k}{k-a_n}.\sum_{i=1}^{n-1} a_i = \frac{k}{k-a_n}(k-a_n) = k \leq d$, y usando la hipótesis inductiva,

$$(\frac{a_1.k}{k-a_n},\ldots,\frac{a_n.k}{k-a_n}) \in \mathcal{C}onv(\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1} \ / \ |m| \leq d\}),$$

con lo que existen $s_1,\ldots,s_r \in \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1} \ / \ |m| \leq d\}$ tales que $(\frac{a_1.k}{k-a_n},\ldots,\frac{a_n.k}{k-a_n}) = \sum_{j=1}^r \mu_j.s_j$ con $\sum_{j=1}^r \mu_j = 1$. Aquí, usando para cada $s_j = (s_1^j,\ldots,s_{n-1}^j)$, la notación $(s_j,0) = (s_1^j,\ldots,s_{n-1}^j,0) \in \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \ / \ |m| \leq d\}$, tenemos que $(\frac{a_1.k}{k-a_n},\ldots,\frac{a_n.k}{k-a_n},0) = \sum_{j=1}^r \mu_j.(s_j,0)$ con $\sum_{j=1}^r \mu_j = 1$. Luego, $(\frac{a_1.k}{k-a_n},\ldots,\frac{a_n.k}{k-a_n},0) \in \mathcal{C}onv(\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \ / \ |m| \leq d\})$. Como además $(a_1,\ldots,a_n) = \frac{a_n}{k}.(0,\ldots,0,k) + (1-\frac{a_n}{k}).(\frac{a_1.k}{k-a_n},\ldots,\frac{a_n.k}{k-a_n},0)$, vale que $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathcal{C}onv(\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \ / \ |m| \leq d\})$. □

Veamos un ejemplo de $\mathbf{Q}_d$:

Ejemplo 1.6 En $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, tomando $d = 2$, obtenemos los siguientes polítopos:



El Lema 1.5 nos permite hallar el volumen de $\mathbf{Q}_d$.

Proposición 1.7 *Sea $\mathbf{Q}_d$ definido como antes; entonces su volumen es*

$$\mathcal{V}ol_n(\mathbf{Q}_d) = d^n/n!.$$

Demostración: Consideremos en primer lugar, el caso $d = 1$, es decir, $\mathbf{Q}_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ a_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^n a_i \leq 1\}$. Sea $\mathbf{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ 0 \leq x_i \leq 1\}$. Se define la función $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (1 - x_1, x_1.(1 - x_2), x_1.x_2.(1 - x_3), \ldots, x_1.x_2 \ldots x_{n-1}.(1 - x_n)).$$

Veamos primero que $\Phi(\mathbf{C}) = \mathbf{Q}_1$.

($\subseteq$) Como $0 \leq x_i \leq 1$, se tiene que $0 \leq 1 - x_i$; esto implica que $x_1.x_2 \ldots x_{i-1}.(1 - x_i) \geq 0$ $\forall 1 \leq i \leq n$. Además,

$$\sum_{i=1}^n (\Phi(x_1, \ldots, x_n))_i = 1 - x_1 + x_1.(1 - x_2) + x_1.x_2.(1 - x_3) + \cdots + x_1.x_2 \ldots x_{n-1}.(1 - x_n)$$

$$= 1 - x_1 + x_1 - x_1.x_2 + x_1.x_2 - x_1.x_2.x_3 + \cdots + x_1 \ldots x_{n-1} - x_1 \ldots x_n = 1 - x_1 \ldots x_n \leq 1.$$

Por lo tanto $\Phi(\mathbf{C}) \subseteq \mathbf{Q}_1$.

($\supseteq$) Sea $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Q}_1$. Si $\sum_{i=1}^n a_i < 1$, definiendo sucesivamente

$$x_1 = 1 - a_1, \ x_2 = 1 - \frac{a_2}{x_1}, \ldots, \ x_n = 1 - \frac{a_n}{x_1 \ldots x_{n-1}}$$

tenemos que $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (a_1, \ldots, a_n)$. Veamos que $(x_1, \ldots, x_n)$ está bien definido: como $\sum_{i=1}^n a_i < 1$, luego $1 - a_1 > 0$ y por lo tanto podemos tomar $x_2 = 1 - \frac{a_2}{x_1}$. Inductivamente, si $x_1, \ldots, x_i$ están bien definidos, $x_1, \ldots, x_{i-1} \neq 0$. Pero si $x_i = 0$, entonces $\sum_{j=1}^i a_j = 1 - x_1 \ldots x_i = 1$, que no puede ser. Luego $x_i \neq 0$ con lo cual x_{i+1} está bien definido.

Además, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}$: como $0 \leq a_1 < 1$, se tiene que $0 < x_1 \leq 1$. Inductivamente, si $0 < x_1, \ldots, x_{i-1} \leq 1$, se tiene que $\frac{a_i}{x_1 \ldots x_{i-1}} \geq 0$ y por lo tanto $x_i = 1 - \frac{a_i}{x_1 \ldots x_{i-1}} \leq 1$. A su vez, $1 - x_1 \ldots x_i = \sum_{j=1}^i a_j < 1$, por lo que $x_1 \ldots x_i > 0$, y como $x_1 \ldots x_{i-1} > 0$, también lo es x_i.

Si en cambio $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, existe un m tal que $\sum_{i=1}^{m-1} a_i < 1$ y $\sum_{i=1}^m a_i = 1$. Luego vale que $a_i = 0$ para todo $i > m$. Si tomamos $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_{m-1}, 0, \ldots, 0)$, donde $x_1, \ldots, x_{m-1}$ están definidos como antes, tenemos que $\mathrm{X} \in \mathbf{C}$ y $\Phi(\mathrm{X}) = (a_1, \ldots, a_n)$. En efecto, como $\sum_{i=1}^{m-1} a_i < 1$, $0 < x_1, \ldots, x_{m-1} \leq 1$. Además,

$$1 = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i + a_m = 1 - x_1 \ldots x_{m-1} + a_m$$

con lo cual $x_1 \dots x_{m-1} = a_m$.

Ahora, sabiendo que $\Phi(\mathbf{C}) = \mathbf{Q}_1$ y usando el teorema de cambio de variable se tiene que

$$\mathcal{V}ol_n(\mathbf{Q}_1) = \int_{\mathbf{Q}_1} 1 \; da_1 \dots da_n = \int_{\mathbf{C}} |J(\Phi)| dx_1 \dots dx_n$$

donde

$$\begin{aligned} |J(\Phi)| &= \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (1-x_2) & -x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_2 x_3 \dots (1-x_{n-1}) & x_1 x_3 \dots (1-x_{n-1}) & \cdots & -x_1 \dots x_{n-2} & 0 \\ x_2 x_3 \dots (1-x_n) & x_1 x_3 \dots (1-x_n) & \cdots & x_1 \dots x_{n-2}(1-x_n) & -x_1 \dots x_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= |(-1).(-x_1) \dots (-x_1 \dots x_{n-1})| = x_1^{n-1}.x_2^{n-2} \dots x_{n-1}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{V}ol_n(\mathbf{Q}_1) &= \int_{\mathbf{C}} x_1^{n-1}.x_2^{n-2} \dots x_{n-1} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_0^1 x_1^{n-1} dx_1 . \int_0^1 x_2^{n-2} dx_2 \dots \int_0^1 x_{n-1} dx_{n-1} . \int_0^1 1 \; dx_n \\ &= \left. \frac{x_1^n}{n} \right|_0^1 . \left. \frac{x_2^{n-1}}{n-1} \right|_0^1 \dots \left. x_n \right|_0^1 = \frac{1}{n} . \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{2} . \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Por último, sea $\Psi(x_1, \dots, x_n) = (d.x_1, \dots, d.x_n)$. Entonces $\Psi(\mathbf{Q}_1) = \mathbf{Q}_d$ y por lo tanto

$$\mathcal{V}ol_n(\mathbf{Q}_d) = \int_{\mathbf{Q}_d} 1 \; dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathbf{Q}_1} \underbrace{d \dots d}_{n} dx_1 \dots dx_n = d^n.\mathcal{V}ol_n(\mathbf{Q}_1) = \frac{d^n}{n!}.$$

□

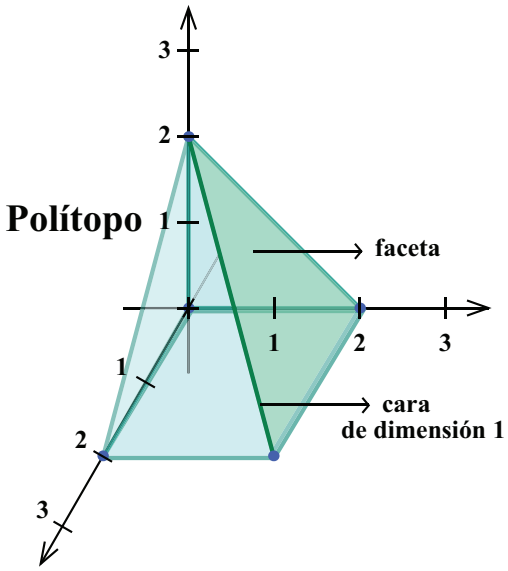
Las caras de un polítopo serán subconjuntos de especial importancia.

Definición 1.8 *Sea $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ un polítopo y sea $v \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.*

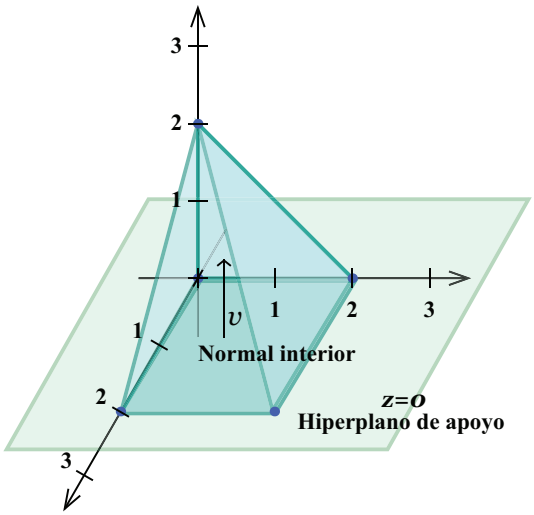
- *Si $m_v(\mathbf{P}) = \min_{m \in \mathbf{P}} \langle m, v \rangle$, el* hiperplano de apoyo de $\mathbf{P}$ *es el hiperplano afín dado por la ecuación $\langle m, v \rangle = m_v(\mathbf{P})$.*
- *Se llama la* cara de $\mathbf{P}$ determinada por v *a $\mathbf{P}_v = \mathbf{P} \cap \{m \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle m, v \rangle = m_v(\mathbf{P})\}$. Se llamará a v su* normal interior. *Si las coordenadas de v son enteras y tienen divisor común máximo 1, se dirá que v es* primitiva.
- *Si $\dim \mathbf{P} = n$, llamaremos* faceta *de $\mathbf{P}$ a toda cara $\mathbf{P}_v$ de $\mathbf{P}$ de dimension $n-1$.*

Si $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^n$ y $\dim \mathbf{P} = n$, toda faceta de $\mathbf{P}$ tiene una única normal interior primitiva, aunque no sucede lo mismo con las caras de dimensión estrictamente menor a $n-1$.

Ejemplo 1.9 Si tomamos $\mathbf{P} = \mathcal{C}onv(\{(0,0,0);(0,2,0);(2,0,0);(2,2,0);(0,0,2)\})$, luego el polítopo $\mathbf{P}$ es el siguiente:



En el gráfico marcamos una cara y una faceta. Vamos a señalar también el hiperplano de apoyo de $\mathbf{P}$ dado por la ecuación $\langle (x,y,z),(0,0,1)\rangle = m_{(0,0,1)}(\mathbf{P})$ (es decir, $z=0$):



Proposición 1.10 *Si* $\{m \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle m,v\rangle = m_v(\mathbf{P})\}$ *es un hiperplano de apoyo para* $\mathbf{P} = \mathcal{C}onv(\mathcal{A})$, *con* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ *finito, entonces* $\mathbf{P}_v = \mathcal{C}onv(\{m \in \mathcal{A} \ / \ \langle m,v\rangle = m_v(\mathbf{P})\})$.

Demostración: Recordemos que, por definición, $\mathbf{P}_v = \mathbf{P} \cap \{m \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle m, v\rangle = m_v(\mathbf{P})\}$.

($\supseteq$): Para cada $m \in \{m \in \mathcal{A} \,/\, \langle m, v\rangle = m_v(\mathbf{P})\} = \mathcal{A} \cap \{m \in \mathbb{R}^n \,/\, \langle m, v\rangle = m_v(\mathbf{P})\}$, como $\mathcal{A} \subset \mathbf{P}$, se tiene que $m \in \mathbf{P} \cap \{m \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle m, v\rangle = m_v(\mathbf{P})\} = \mathbf{P}_v$. Entonces, como $\mathbf{P}_v$ es convexo por ser intersección de convexos, concluimos que $\mathcal{C}onv(\{m \in \mathcal{A} \,/\, \langle m, v\rangle = m_v(\mathbf{P})\}) \subseteq \mathbf{P}_v$.

($\subseteq$): Sea $p \in \mathbf{P}_v$. Entonces $\langle p, v\rangle = m_v(\mathbf{P})$ y $p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i.p_i$ con $p_i \in \mathcal{A}$ $\forall\, 1 \leq i \leq r$. Por la definición de $m_v(\mathbf{P})$, $\langle p_i, v\rangle \geq m_v(\mathbf{P})$ $\forall\, 1 \leq i \leq r$, y si para algún i_0 la desigualdad es estricta,

$$\begin{aligned}
\langle p, v\rangle &= \langle (\sum \lambda_i.p_i), v\rangle = \sum \lambda_i.\langle p_i, v\rangle \\
&= \sum_{i \neq i_0} \lambda_i.\langle p_i, v\rangle + \lambda_{i_0}.\langle p_{i_0}, v\rangle \geq \sum_{i \neq i_0} \lambda_i m_v(\mathbf{P}) + \lambda_{i_0}.\langle p_{i_0}, v\rangle \\
&> \sum_{i \neq i_0} \lambda_i \, m_v(\mathbf{P}) + \lambda_{i_0} \, m_v(\mathbf{P}) = \sum \lambda_i \, m_v(\mathbf{P}) = m_v(\mathbf{P}) = \langle p, v\rangle
\end{aligned}$$

lo cual no puede ser. Luego $\langle p_i, v\rangle = m_v(\mathbf{P})$, es decir, $p_i \in \{m \in \mathcal{A} \,/\, \langle m, v\rangle = m_v(\mathbf{P})\}$ $\forall\, 1 \leq i \leq r$, y por lo tanto $p = \sum \lambda_i.p_i \in \mathcal{C}onv(\{m \in \mathcal{A} \,/\, \langle m, v\rangle = m_v(\mathbf{P})\})$. □

Si $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_s$ son las facetas de un polítopo n-dimensional $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^n$, y $v_1, \ldots, v_s$ sus respectivas normales interiores, el polítopo $\mathbf{P}$ puede caracterizarse por sus facetas (ver la demostración de [6, Teorema 1.4, Cap. II]):

$$\mathbf{P} = \{m \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle m, v_j\rangle \geq m_{v_j}(\mathbf{P}) \ \forall\, 1 \leq j \leq s\}. \tag{1.1}$$

Necesitaremos también alguna manera de calcular el volumen de $\mathbf{P}$ a partir de sus facetas.

Proposición 1.11 *Sean $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^n$ un polítopo de dimensión n, r un elemento de $\mathbf{P}$ y $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_s$ las facetas de $\mathbf{P}$. Entonces, si definimos Π_i como la pirámide de base $\mathcal{F}_i$ y altura determinada por r $\forall\, 1 \leq i \leq s$, tenemos que*

$$\mathcal{V}ol_n(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{V}ol_n(\Pi_i).$$

Demostración: Basta ver que $\mathbf{P} = \bigcup_{i=1}^{s} \Pi_i$ y que $\dim(\Pi_i \cap \Pi_j) < n \ \ \forall i \neq j$.

Como cada faceta de $\mathbf{P}$ está incluida en $\mathbf{P}$ y $r \in \mathbf{P}$, por ser convexo, $\Pi_i \subseteq \mathbf{P}$. Luego, sólo tenemos que ver que $\mathbf{P} \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} \Pi_i$.

Para todo $x \in \mathbf{P}$, sea $\overrightarrow{L_x}$ la semirrecta de origen r que pasa por x. Por (1.1) sabemos que $\mathbf{P} = \bigcap_{l=1}^{s} \{q \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle q, v_l\rangle \geq m_{v_l}(\mathbf{P})\}$ donde v_l es la normal interior primitiva de $\mathcal{F}_l$ $\forall\, 1 \leq l \leq s$. Luego $\langle r, v_l\rangle \geq m_{v_l}(\mathbf{P})$ $\forall l$, pero como $\mathbf{P}$ es acotado y $\overrightarrow{L_x}$ no, existe un punto

$y \in \overrightarrow{L_x}$ tal que para algún i_x, $\langle y, v_{i_x}\rangle < m_{v_{i_x}}(\mathbf{P})$ (pues no será elemento de $\mathbf{P}$). Entonces, existe $y_x \in \overline{r\ y} \cap \mathcal{F}_{i_x}$ (o sea que $\overrightarrow{L_x} \cap \mathbf{P} = \overline{r\ y_x}$). Pero como $r, y_x \in \Pi_{i_x}$ y ésta es convexa, $\overline{r\ y_x} \subset \Pi_{i_x}$. Luego, $x \in \Pi_{i_x} \subset \bigcup_{i=1}^{s} \Pi_i$.

Para ver que $\dim(\Pi_i \cap \Pi_j) < n \ \ \forall i \neq j$, supongamos que no es así para algunos i, j fijos. Luego, existen $x \in \Pi_i \cap \Pi_j$ y $k > 0$ tales que $\mathbf{B}_k(x) \subset \Pi_i \cap \Pi_j$ (donde $\mathbf{B}_k(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ \|y - x\| < k\}$). Ahora, tomando nuevamente $\overrightarrow{L_x}$, como $x \in \Pi_i$ y $x \in \Pi_j$, existen y_i, y_j tal que $y_i \in \overrightarrow{L_x} \cap \mathcal{F}_i$ y $y_j \in \overrightarrow{L_x} \cap \mathcal{F}_j$. Además, r no puede ser un elemento de $\mathcal{F}_i$ o $\mathcal{F}_j$ pues si $r \in \mathcal{F}_i$, $\overline{r, y_i} \subset \mathcal{F}_i$. Luego, $x \in \mathcal{F}_i$ pero entonces $\mathbf{B}_k(x) \nsubseteq \Pi_i$ (igual con $\mathcal{F}_j$).

Si $y_i \neq y_j$, $\|r - y_i\| \neq \|r - y_j\|$ (pues ambos se encuentran en la misma semirrecta de origen r). Entonces, puedo suponer que $\|r - y_i\| < \|r - y_j\|$. Luego existe $t \in [0, 1]$ tal que $y_i = t.r + (1 - t).y_j$. Como dijimos antes que

$$\mathbf{P} = \bigcap_{l=1}^{s} \{q \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle q, v_l\rangle \geq m_{v_l}(\mathbf{P})\}$$

donde v_l es la normal interior primitiva de $\mathcal{F}_l$, $\langle y_j, v_i\rangle < m_{v_i}(\mathbf{P})$ (de lo contrario, $m_{v_i}(\mathbf{P}) = \langle y_i, v_i\rangle = t.\langle r, v_i\rangle + (1-t).\langle y_j, v_i\rangle \geq t.\langle r, v_i\rangle + (1-t).m_{v_i}(\mathbf{P}) > m_{v_i}(\mathbf{P})$ pues $r \in \mathbf{P} \backslash \mathcal{F}_i$, que es absurdo). Pero esto implica que y_j no puede ser un elemento de $\mathbf{P}$ lo cual no es cierto. Luego, tiene que valer que $y_i = y_j$. De la misma forma, para todo $z \in \mathbf{B}_k(x)$, $z \in \Pi_i \cap \Pi_j$ con lo cual existen $y_{z,i} \in \overrightarrow{L_z} \cap \mathcal{F}_i$ y $y_{z,j} \in \overrightarrow{L_z} \cap \mathcal{F}_j$ (definiendo nuevamente $\overrightarrow{L_z}$ como la semirrecta de origen r qe pasa por z). Pero, así como sucede para x, no puede ser que $y_{z,i} \neq y_{z,j}$. Sea $\mathcal{B} = \{z \in \mathbf{B}_k(x) \ / \ \langle x, v_i\rangle = \langle z, v_i\rangle\}$. Como $\dim \mathbf{B}_k(x) = n$, entonces $\dim(\mathcal{B}) = n - 1$ (pues es intersecarlo con un hiperplano y $x \in \mathcal{B}$). Llamemos $\mathcal{A} = \{y_{z,i} \ / \ z \in \mathcal{B}\}$; luego vale también que $\dim(\mathcal{A}) = n - 1$. Sin embargo, como dijimos que $y_{z,i} = y_{z,j}$ para todo $z \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$. Por lo tanto, $\dim(\mathcal{A}) \leq \dim(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j) < n - 1$ (de lo contrario, serían la misma faceta) lo que es un absurdo. □

1.2. Sumas de Minkowski y volumen mixto

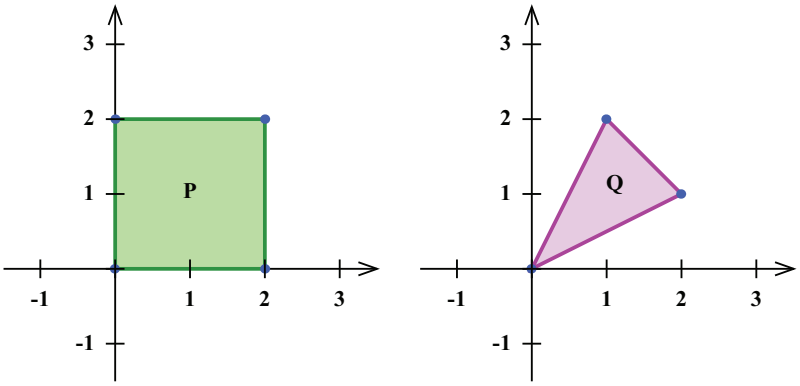
A continuación definiremos dos operaciones con polítopos:

Definición 1.12 *Sean $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \subset \mathbb{R}^n$ polítopos. Se define la* suma de Minkowski de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ *como el polítopo $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \{p + q \ / \ p \in \mathbf{P}, q \in \mathbf{Q}\}$ (con la suma usual en $\mathbb{R}^n$).*

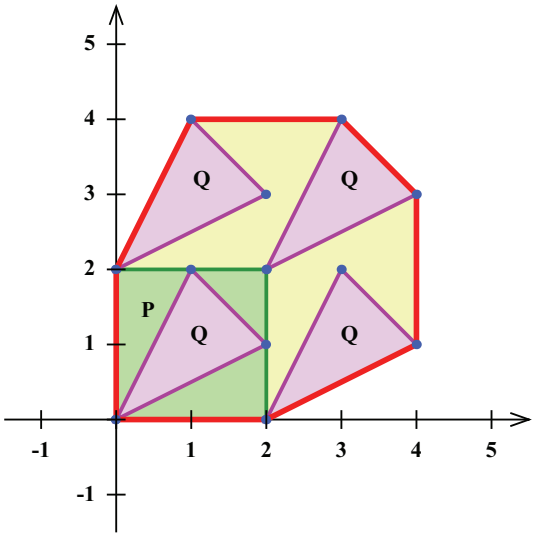
Además, para $\lambda \geq 0$ se define el polítopo $\lambda.\mathbf{P}$ como $\lambda.\mathbf{P} = \{\lambda.p \ / \ p \in \mathbf{P}\}$ (también con el producto usual en $\mathbb{R}^n$).

Ejemplo 1.13 Dados los polítopos

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathcal{C}onv(\{(0,0);(0,2);(2,0);(2,2)\}) \\ \mathbf{Q} &= \mathcal{C}onv(\{(0,0);(1,2);(2,1)\}) \end{aligned}$$

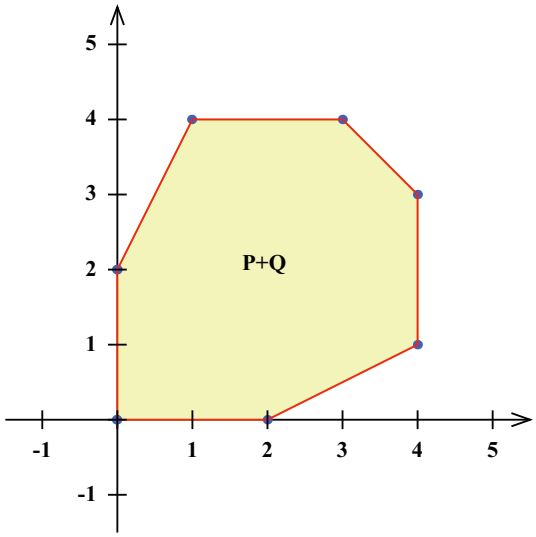


Como $\mathbf{Q}$ contiene al origen, $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ puede obtenerse ubicando una copia de $\mathbf{Q}$ en cada vértice de $\mathbf{P}$ y tomando la cápsula convexa del conjunto obtenido.



Entonces

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathcal{C}onv(\{(0,0);(2,0);(4,1);(4,3);(3,4);(1,4);(0,2)\})$$



Proposición 1.14 *Sean* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_r$ *polítopos en* $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, *y* $v \in \mathbb{R}^n - \{\overrightarrow{0}\}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} m_v(\lambda_1.\mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_r.\mathbf{P}_r) &= \lambda_1.m_v(\mathbf{P}_1) + \cdots + \lambda_r.m_v(\mathbf{P}_r) \\ (\lambda_1.\mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_r.\mathbf{P}_r)_v &= \lambda_1.(\mathbf{P}_1)_v + \cdots + \lambda_r.(\mathbf{P}_r)_v. \end{aligned}$$

Demostración: Primero se verá que vale $m_v(\lambda\mathbf{P}) = \lambda.m_v(\mathbf{P})$ y $(\lambda.\mathbf{P})_v = \lambda.\mathbf{P}_v$. Para ver esto, sea $m \in \lambda\mathbf{P}$ tal que $\langle m, v\rangle = m_v(\lambda\mathbf{P})$. Entonces $m = \lambda.p$ con $p \in \mathbf{P}$ y $m_v(\lambda\mathbf{P}) = \lambda.\langle p, v\rangle$. Luego $\langle p, v\rangle = \frac{m_v(\lambda\mathbf{P})}{\lambda}$ y, en consecuencia, $\frac{m_v(\lambda\mathbf{P})}{\lambda} \geq m_v(\mathbf{P})$, es decir $m_v(\lambda\mathbf{P}) \geq \lambda.m_v(\mathbf{P})$. Como además $\mathbf{P} = \frac{1}{\lambda}.(\lambda\mathbf{P})$, tenemos que $m_v(\mathbf{P}) \geq \frac{1}{\lambda}.m_v(\lambda\mathbf{P})$ y, por lo tanto, $m_v(\lambda\mathbf{P}) = \lambda.m_v(\mathbf{P})$. Usando esto, $(\lambda\mathbf{P})_v = \lambda\mathbf{P} \cap \{m \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle m, v\rangle = \lambda.m_v(\mathbf{P})\} = \lambda\mathbf{P} \cap \lambda\{q \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle q, v\rangle = m_v(\mathbf{P})\} = \lambda.(\mathbf{P})_v$.

Veamos ahora que $m_v(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = m_v(\mathbf{P}) + m_v(\mathbf{Q})$ y $(\mathbf{P} + \mathbf{Q})_v = \mathbf{P}_v + \mathbf{Q}_v$. Por definición, $m_v(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \leq \langle (p + q), v\rangle \ \forall\, p \in \mathbf{P}, q \in \mathbf{Q}$. En particular $m_v(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \leq \text{mín}_{p\in\mathbf{P}}(\langle p, v\rangle) + \text{mín}_{q\in\mathbf{Q}}(\langle q, v\rangle) = m_v(\mathbf{P}) + m_v(\mathbf{Q})$. Al mismo tiempo, existen $p_0 \in \mathbf{P}$ y $q_0 \in \mathbf{Q}$ tales que $m_v(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = \langle (p_0 + q_0), v\rangle = \langle p_0, v\rangle + \langle q_0, v\rangle \geq \text{mín}_{p\in\mathbf{P}}(\langle p, v\rangle) + \text{mín}_{q\in\mathbf{Q}}(\langle q, v\rangle) = m_v(\mathbf{P}) + m_v(\mathbf{Q})$. Entonces $m_v(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = m_v(\mathbf{P}) + m_v(\mathbf{Q})$.

Para ver que $(\mathbf{P} + \mathbf{Q})_v \subseteq \mathbf{P}_v + \mathbf{Q}_v$, sea $m \in (\mathbf{P} + \mathbf{Q})_v$. Sabemos que $m = p + q$ con $p \in \mathbf{P}$ y $q \in \mathbf{Q}$. Luego $\langle p, v\rangle \geq m_v(\mathbf{P})$ y $\langle q, v\rangle \geq m_v(\mathbf{Q})$; pero como $\langle m, v\rangle = m_v(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = m_v(\mathbf{P}) + m_v(\mathbf{Q})$, entonces deben valer las igualdades, y por lo tanto, $p \in \mathbf{P}_v$ y $q \in \mathbf{Q}_v$. A su vez, vale que $(\mathbf{P} + \mathbf{Q})_v \supseteq \mathbf{P}_v + \mathbf{Q}_v$, pues si $m \in \mathbf{P}_v + \mathbf{Q}_v$, entonces $m = p + q$ con $\langle p, v\rangle = m_v(\mathbf{P})$ y $\langle q, v\rangle = m_v(\mathbf{Q})$, y entonces $\langle m, v\rangle = m_v(\mathbf{P}) + m_v(\mathbf{Q}) = m_v(\mathbf{P} + \mathbf{Q})$, con lo que $m \in (\mathbf{P} + \mathbf{Q})_v$.

Por último, las igualdades del enunciado de la proposición se deducen procediendo por inducción en la cantidad r de polítopos. □

La siguiente noción nos permitirá más adelante relacionar la geometría de polítopos con la cantidad de soluciones de sistemas de ecuaciones polinomiales.

Definición 1.15 *Dados* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n \subseteq \mathbb{R}^n$ *polítopos, se define el* volumen mixto de Minkowski *de dichos polítopos como*

$$\mathcal{MV}_n(\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \sum_{\substack{\mathrm{I} \subset \{1,\ldots,n\} \\ |\mathrm{I}| = i}} \mathcal{V}ol_n(\sum_{k \in \mathrm{I}} \mathbf{P}_k).$$

Ejemplo 1.16 *Para los polítopos del Ejemplo 1.13 tenemos que, como* $\mathcal{V}ol_2(\mathbf{P}) = 4$, $\mathcal{V}ol_2(\mathbf{Q}) = \frac{3}{2}$ *y* $\mathcal{V}ol_2(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = \frac{27}{2}$, *entonces*

$$\mathcal{MV}_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathcal{V}ol_2(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) - \mathcal{V}ol_2(\mathbf{P}) - \mathcal{V}ol_2(\mathbf{Q}) = \frac{27}{2} - 4 - \frac{3}{2} = 8.$$

Dados polítopos $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n \subseteq \mathbb{R}^n$ y dados $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, la función $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \mathcal{V}ol_n(\lambda_1.\mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_n.\mathbf{P}_n)$ resulta ser un polinomio homogéneo de grado n en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (ver [4, Proposición (4.9), Capítulo 7]). Una definición alternativa del volumen mixto puede darse de la siguiente forma (para la equivalencia de ambas definiciones ver [4, Capítulo 7, Teorema (4.12)d.]):

Teorema 1.17 *Dados los polítopos* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n \subseteq \mathbb{R}^n$, *su volumen mixto es el coeficiente del monomio* $\lambda_1.\lambda_2 \ldots \lambda_n$ *en* $\mathcal{V}ol_n(\lambda_1.\mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_n.\mathbf{P}_n)$.

Algunas propiedades a destacar en relación al volumen mixto son las siguientes (ver [4, Capítulo 7, Teorema (4.12)]):

Proposición 1.18 *El volumen mixto es simétrico y lineal en cada variable. Si* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$ *son polítopos en* $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{MV}_n(\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n) \geq 0$*; más aún, es 0 si alguno de los* $\mathbf{P}_i$ *tiene dimensión 0, y positivo si todos tienen dimensión n. Además, si los n polítopos coinciden,* $\mathcal{MV}_n(\mathbf{P}, \ldots, \mathbf{P}) = n!.\mathcal{V}ol_n(\mathbf{P})$.

1.3. Genericidad

A lo largo de este trabajo trataremos muchas veces con propiedades que si bien no son válidas para absolutamente todos los polinomios (o polinomios de Laurent), sí lo son para lo que llamaremos el caso *genérico*.

Dado un conjunto finito de exponentes $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset \mathbb{Z}^n$, notaremos $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{c_1.x^{\alpha_1} + \cdots + c_r.x^{\alpha_r} \ / \ c_i \in \mathbb{C}\}$ al conjunto de los polinomios de Laurent en $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ cuyos monomios tienen exponentes en $\mathcal{A}$.

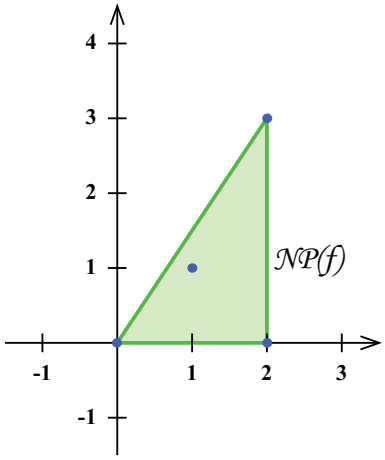
Definición 1.19 *Sean $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^n$. Una propiedad se dice que vale* genéricamente *para polinomios de Laurent $(f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(\mathcal{A}_m)$ si existe un polinomio no nulo P en los coeficientes de los f_i tal que la propiedad se cumple para todos aquellos $f_1, \ldots, f_m$ cuyos coeficientes no anulan al polinomio P.*

La principal conexión entre polítopos y polinomios de Laurent está dada por la siguiente noción:

Definición 1.20 *Sea $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$. Se define el* polítopo de Newton de f *como*

$$\mathcal{NP}(f) = \mathcal{C}onv(\{\alpha \in \mathbb{Z}^n \ / \ c_\alpha \neq 0\}).$$

Ejemplo 1.21 Si tomamos el polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $f(x, y) = 5 - x^2 + 2xy + 3y^3x^2$, su polítopo de Newton es:



Notar que si $f \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, entonces $\mathcal{NP}(f) \subseteq \mathcal{C}onv(\mathcal{A})$. Más aún, usando la Definición 1.19 de propiedad genérica, podemos hablar de polinomios genéricos con polítopos de Newton fijos:

Observación 1.22 *Sea $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ y sea $\mathbf{P} = \mathcal{C}onv(\mathcal{A})$. Entonces, para un polinomio genérico $f \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, se tiene que $\mathcal{NP}(f) = \mathcal{C}onv(\mathcal{A})$.*

1.4. Series de potencias racionales

En esta sección introducimos algunas nociones y propiedades básicas sobre series formales y de Puiseux y su relación con la parametrización de curvas algebraicas que nos serán de utilidad para el estudio de conjuntos de soluciones no aisladas de sistemas de ecuaciones polinomiales. Un desarrollo más extenso del tema puede encontrarse en [17, Capítulo 4].

Definición 1.23 *Llamaremos* conjunto de las series de potencias formales sobre $\mathbb{C}$, *y lo notaremos* $\mathbb{C}[\![t]\!]$, *al conjunto de todas las expresiones del tipo* $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *con* $a_n \in \mathbb{C}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}_0$.

Los elementos de $\mathbb{C}[\![t]\!]$ se suman y multiplican como los polinomios, constituyendo así un dominio que incluye a $\mathbb{C}[t]$. El *cuerpo de fracciones de* $\mathbb{C}[\![t]\!]$, que notaremos $\mathbb{C}(\!(t)\!)$, puede caracterizarse de la siguiente forma (ver la demostración de [17, Capítulo 4, Teorema (1.2)]):

Teorema 1.24 *El cuerpo* $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ *es el conjunto de las series formales con finitos exponentes negativos, y todo* $f \in \mathbb{C}(\!(t)\!)$ *puede escribirse en forma única como* $f(t) = t^h . \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *donde* $h \in \mathbb{Z}$ *y* $a_0 \neq 0$.

Si $f(t) = t^h . \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, con $h \in \mathbb{Z}$ y $a_0 \neq 0$, llamamos *orden de* f a $ord(f) = h$. Definimos también para la serie nula, $ord(0) = \infty$.
Para cualesquiera $f, g \in \mathbb{C}(\!(t)\!)$ vale que $ord(f.g) = ord(f) + ord(g)$ y $ord(f \pm g) \geq$ mín$\{ord(f), ord(g)\}$ (y son iguales si $ord(f) \neq ord(g)$).

Sea ahora $\mathbf{F}(x) = 0$ la ecuación de una curva algebraica $\mathcal{C}$ en el plano proyectivo dada por un polinomio homogéneo $\mathbf{F} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Decimos que $x_0(t), x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{C}(\!(t)\!)$ son las *coordenadas de una parametrización de* $\mathcal{C}$ si $\mathrm{X}(t) = \big(x_0(t) : x_1(t) : x_2(t)\big)$ cumple que $\mathbf{F}\big(\mathrm{X}(t)\big) = 0$ y no existe $e(t) \neq 0$ en $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ tal que $e(t).x_i(t) \in \mathbb{C}$ para todo $0 \leq i \leq 2$. Las parametrizaciones pueden considerarse como puntos de la curva $\mathcal{C}$: si pensamos a la ecuación $\mathbf{F}(x) = 0$ como definiendo una curva $\mathcal{C}'$ en el plano proyectivo sobre el cuerpo $\mathbb{C}(\!(t)\!)$, los puntos de $\mathcal{C}'$ consisten en todos los puntos de $\mathcal{C}$ y todas sus parametrizaciones.
Si $x_0(t) \neq 0$, $\big(x_1(t)/x_0(t), x_2(t)/x_0(t)\big)$ pueden considerarse como coordenadas afines de la parametrización. A su vez, si $f(x, y) = \mathbf{F}(1, x, y)$ y $x(t), y(t) \in \mathbb{C}(\!(t)\!)$ cumplen que $f\big(x(t), y(t)\big) = \mathbf{F}\big(1 : x(t) : y(t)\big) = 0$, y no pertenecen todos a $\mathbb{C}$, $\big(1 : x(t) : y(t)\big)$ son las coordenadas proyectivas de una parametrización de $\mathcal{C}$.
Si $\mathrm{X}(t)$ es una parametrización de $\mathcal{C}$ y $h = -$ mín$\{ord(x_i)\}$, podemos escribir esta misma parametrización como $\big(y_0(t) : y_1(t) : y_2(t)\big)$ donde $y_i(t) = t^h.x_i(t)$, de manera que existe al menos un y_i cuyo orden es cero. Luego, $y_i(0) = a_{0i} \neq 0$ para algún i. Llamaremos al punto $a = (a_{00} : a_{01} : a_{02}) \in \mathbb{P}^2$ el *centro de la parametrización,* que es único.

Diremos que dos parametrizaciones $\mathrm{X}(t)$, $\mathrm{Y}(t)$ de una curva son *equivalentes* si $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{X}\big(z(t)\big)$ con $ord(z) = 1$. Notar que dos parametrizaciones equivalentes de una curva tienen el mismo centro.
Hasta aquí sólo trabajamos con parametrizaciones de curvas de $\mathbb{P}^2$. De igual forma, todas estas nociones pueden generalizarse a n coordenadas afines $x_1, \ldots, x_n$ de una parametrización. A partir de esa generalización, podemos enunciar el siguiente teorema cuya demostración consiste en una generalización a n coordenadas de la prueba de [17, Capítulo 4, teorema (2.2)]:

Teorema 1.25 *En un sistema de coordenadas adecuado, cualquier parametrización es equivalente a una de la forma*

$$\begin{cases} x_1(t) = t^{m_1} \\ x_2(t) = a_{21}t^{m_{21}} + a_{22}t^{m_{22}} + \ldots \\ \quad \vdots \\ x_n(t) = a_{n1}t^{m_{n1}} + a_{n2}t^{m_{n2}} + \ldots \end{cases}$$

donde $m_1, m_{ij} \in \mathbb{N}$ *y* $0 < m_{i1} < m_{i2} < \ldots$ *para todo* $2 \leq i \leq n$, $\forall j$.

A continuación, extenderemos la noción de series de potencias a series con exponentes racionales:

Definición 1.26 *Llamaremos* cuerpo de series de potencias racionales sobre $\mathbb{C}$ *o* series de Puiseux *al conjunto* $\mathbb{C}(t)' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}(\!(t^{\frac{1}{n}})\!)$, *donde, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *los elementos de* $\mathbb{C}(\!(t^{\frac{1}{n}})\!)$ *son todos los de la forma* $p(t) = t^{\frac{h}{n}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{\frac{j}{n}}$ *con* $h \in \mathbb{Z}$, $a_j \in \mathbb{C}$ *para todo* $j \in \mathbb{N}_0$ *y* $a_0 \neq 0$.

Dado $p(t) = t^{\frac{h}{n}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{\frac{j}{n}} \in \mathbb{C}(t)'$ con $a_0 \neq 0$, definimos $ord(p(t)) = \dfrac{h}{n}$. El conjunto de los elementos de $\mathbb{C}(t)'$ de orden no negativo se notará $\mathbb{C}[t]'$.
Si $x(t), y(t) \in \mathbb{C}(t)'$, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $x \in \mathbb{C}(\!(t^{\frac{1}{m}})\!)$, $y \in \mathbb{C}(\!(t^{\frac{1}{n}})\!)$. Luego, $x, y \in \mathbb{C}(\!(t^{\frac{1}{mn}})\!)$ y por lo tanto también pertenecen a $\mathbb{C}(\!(t^{\frac{1}{mn}})\!)$ su suma, producto y cociente (si $y \neq 0$). Así, $\mathbb{C}(t)'$ resulta un cuerpo.

El teorema básico sobre parametrizaciones de curvas algebraicas es el siguiente (ver [17, Capítulo 4, Sección 3, Teorema (3.1)]):

Teorema 1.27 *El cuerpo de las series de potencias racionales* $\mathbb{C}(t)'$ *es algebraicamente cerrado.*

En la Sección 2.2 utilizaremos este teorema para hallar, dada una curva de raíces de un sistema $\mathbf{F}$, una parametrización de esta curva donde cada coordenada es una serie de Puiseux.

1.5. Multiplicidad de intersección

Dados polinomios $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ con finitos ceros comunes en $\mathbb{C}^n$, se dice que el ideal $\mathrm{I} = < f_1, \ldots, f_n >$ generado por los polinomios en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ es un *ideal cero-dimensional*, o bien que $f_1(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$ es un *sistema cero-dimensional*.
Bajo estas condiciones, el cociente $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\mathrm{I}$ es un álgebra de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ (ver [3, Capítulo 5, Sección 3, Teorema 6]). La dimensión D de esta álgebra es mayor o igual que la cantidad de ceros comunes de los polinomios (ver [4, Capítulo 2, Teorema (2.10)]). Sin embargo, en forma análoga a lo que sucede en el caso de un polinomio en una variable, es posible definir una *multiplicidad* algebraica para cada uno de estos ceros de manera que la suma de estas multiplicidades sea igual a D.
Una forma de asignar multiplicidades a los ceros aislados de un sistema de ecuaciones polinomiales es a través de ciertos anillos asociados al punto y el ideal generado por los polinomios.

Definición 1.28 *Un* anillo local *es un anillo con exactamente un ideal maximal.*

Dado $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ notaremos $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{<x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n>}$ al conjunto de todas las funciones racionales $\dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ tales que $g(p_1, \ldots, p_n) \neq 0$. Los anillos de este tipo verifican (ver [4, Capítulo 4, Proposición (1.2)]):

Proposición 1.29 *Para cada $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{<x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n>}$ es un anillo local, y subanillo del cuerpo de funciones racionales de $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ que contiene a $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.*

Si I es un ideal de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ y $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$, notaremos $\mathrm{I}_{<x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n>}$ al ideal generado por los elementos de I en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{<x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n>}$.
Ahora estamos en condiciones de definir la multiplicidad de una solución de un sistema de ecuaciones polinomiales cero-dimensional:

Definición 1.30 *Sean $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ polinomios con finitos ceros comunes en $\mathbb{C}^n$ y sea $\mathrm{I} = < f_1, \ldots, f_n >$. Para cada $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ raíz del sistema*

$$\mathbf{F} = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

definimos la multiplicidad de intersección de $f_1, \ldots, f_n$ en p *(o* multiplicidad de p como cero de $\mathbf{F}$*) como:*

$$\mathrm{mult}(f_1, \ldots, f_n; p) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{<x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n>}/\mathrm{I}_{<x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n>}.$$

Observamos que la misma definición de multiplicidad puede también aplicarse en el caso en que $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ es una solución *aislada* de un sistema de n ecuaciones polinomiales con n incógnitas (ver [8]).

Capítulo 2

El Teorema de Bernstein

El Teorema de Bernstein, cuya demostración analizaremos en este capítulo, nos permite, dados n polinomios en n variables, hallar una cota para el número de sus raíces aisladas comunes en $(\mathbb{C}^*)^n$ contadas con su multiplicidad a partir de los polítopos de Newton de los polinomios. Más aún, en el caso genérico nos dice exactamente cuántas son esas raíces en función únicamente de dichos polítopos. También da información sobre las condiciones de genericidad bajo las cuales la cota se alcanza.

En primer lugar introduciremos algunas notaciones que se usarán en lo sucesivo.
Dados $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, se define $\mathcal{L}(\mathbf{F})$ como la cantidad de raíces aisladas en $(\mathbb{C}^*)^n$ del sistema

$$\mathbf{F} = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

contadas con su multiplicidad.

Sea $\mathfrak{S} = (\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n)$ una colección de subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^n$. Para $i = 1, \ldots, n$ consideramos una familia $(c_{iq})_{q \in \mathbf{S}_i}$ de nuevas indeterminadas sobre $\mathbb{C}$. Entonces, el sistema

$$\begin{cases} \sum_{q \in \mathbf{S}_1} c_{1q} x^q = 0 \\ \quad \vdots \\ \sum_{q \in \mathbf{S}_n} c_{nq} x^q = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

tiene finitas soluciones en $(\overline{\mathbb{C}(c_{iq})}^*)^n$, donde $\overline{\mathbb{C}(c_{iq})}$ es una clausura algebraica del cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}[c_{iq}]$. A este número de soluciones lo notamos $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$.
Si especializamos los coeficientes c_{iq} del sistema (2.2) en valores genéricos en $\mathbb{C}^*$, el sistema obtenido tendrá finitas soluciones aisladas en $(\mathbb{C}^*)^n$ y, contadas con multiplicidad,

su número resulta ser también $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ (ver [9, Proposición 1], [16, Capítulo II, Sección 6, Teorema 3]).

Notar que $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ es simétrico ya que la cantidad o multiplicidad de las soluciones del sistema no varía cambiando el orden de sus ecuaciones.

2.1. Cambios de variable y propiedades genéricas

Para la demostración del Teorema de Bernstein será especialmente útil el uso de ciertos cambios de variables. Es necesario entonces ver que tanto $\mathcal{L}(\mathbf{F})$ como $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ no cambian al aplicarlos.

Para cada $f(x_1,\dots,x_n) = \sum c_q x^q \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\dots,x_n^{\pm 1}]$ definimos el *soporte* de f como $\operatorname{sop}(f) = \{q \in \mathbb{Z}^n / c_q \neq 0\}$.

Para toda matriz $\mathbf{U} = (u_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $\det(\mathbf{U}) = \pm 1$, se define el cambio de variables $x = y^{\mathbf{U}}$ de la siguiente manera: $x_j = \prod_{i=1}^n y_i^{u_{ij}}\ \forall 1 \leq j \leq n$. Este cambio de variables induce un isomorfismo $\mathbf{U}^* : \mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\dots,x_n^{\pm 1}] \to \mathbb{C}[y_1^{\pm 1},\dots,y_n^{\pm 1}]$, $\mathbf{U}^*(x^q) = y^{\mathbf{U}q}$.

Lema 2.1 *Con las notaciones anteriores se tiene que si* $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\dots,x_n^{\pm 1}]$, *entonces* $\operatorname{sop}(\mathbf{U}^*(f)) = \mathbf{U}(\operatorname{sop}(f))$. *Además, para cada sistema de ecuaciones* $\mathbf{F}$ *del tipo (2.1), vale* $\mathcal{L}(\mathbf{F}) = \mathcal{L}(\mathbf{U}^*(\mathbf{F}))$.

Demostración: Sea $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{q\in \operatorname{sop}(f)} c_q x^q$, luego $\mathbf{U}^*(f) = \sum_{q\in \operatorname{sop}(f)} c_q \mathbf{U}^*(x^q) = \sum_{q\in \operatorname{sop}(f)} c_q y^{\mathbf{U}q}$. Esto implica que $\operatorname{sop}(\mathbf{U}^* f) = \{\mathbf{U}q \ / \ q \in \operatorname{sop}(f)\} = \mathbf{U}(\operatorname{sop}(f))$.

Para ver que $\mathcal{L}(\mathbf{F}) = \mathcal{L}(\mathbf{U}^*(\mathbf{F}))$, sea $x_0 \in (\mathbb{C}^*)^n$ tal que $f_i(x_0) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Así, tomando $y_0 = x_0^{\mathbf{U^{-1}}}$ tenemos que

$$\mathbf{U}^*(f_i)(y_0) = \sum_{q\in \operatorname{sop}(f_i)} c_q y_0^{\mathbf{U}q} = \sum_{q\in \operatorname{sop}(f_i)} c_q x_0^{\mathbf{U^{-1}U}q} = \sum_{q\in \operatorname{sop}(f_i)} c_q x_0^q = 0.$$

Con esto, y_0 es raíz de $\mathbf{U}^*(\mathbf{F})$, y como $y = x^{\mathbf{U^{-1}}}$ es un cambio de variables, esto implica que $\mathcal{L}(\mathbf{F}) = \mathcal{L}(\mathbf{U}^*(\mathbf{F}))$. □

También podemos observar que la traslación $\mathbf{T} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ definida por $\mathbf{T}(q) = q + p$ con $p \in \mathbb{Z}^n$ fijo induce un isomorfismo $\mathbf{T}^* : \mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\dots,x_n^{\pm 1}] \to \mathbb{C}[y_1^{\pm 1},\dots,y_n^{\pm 1}]$, $\mathbf{T}^*(x^q) = y^{q+p}$. En este caso, para cada $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\dots,x_n^{\pm 1}]$, se tiene que $\mathbf{T}^*(f) = y^p f(y)$ y $\operatorname{sop}(\mathbf{T}^*(f)) = \mathbf{T}(\operatorname{sop}(f))$. En consecuencia, para cada sistema de ecuaciones $\mathbf{F}$ del tipo (2.1), si $\mathbf{T}_1,\dots,\mathbf{T}_n$ son traslaciones, se tiene que $\mathcal{L}(\mathbf{F}) = \mathcal{L}(\mathbf{T}_1^*(f_1),\dots,\mathbf{T}_n^*(f_n))$.

Corolario 2.2 *Dada* $\mathbf{U} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ *tal que* $\det(\mathbf{U}) = \pm 1$, *si* $\mathbf{U}\mathfrak{S} = (\mathbf{U}\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{U}\mathbf{S}_n)$ *vale que* $\mathcal{L}(\mathfrak{S}) = \mathcal{L}(\mathbf{U}\mathfrak{S})$. *Si* $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ *son traslaciones en* $\mathbb{Z}^n$ *y* $\mathbf{T}\mathfrak{S} = (\mathbf{T}_1\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{T}_n\mathbf{S}_n)$ *entonces* $\mathcal{L}(\mathfrak{S}) = \mathcal{L}(\mathbf{T}\mathfrak{S})$.

El siguiente lema nos permitirá hacer cambios de variables convenientes.

Lema 2.3 *Dado* $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ *primitivo (es decir, tal que* $mcd(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$*), existe* $\mathbf{U} = (u_{ij})_{ij} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ *tal que* α *es su primera fila y* $\mathbf{U^{-1}} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

Demostración: Seguiremos la idea para la demostración dada en [4, Capítulo 7, Sección 5, Ejercicio 9]. Para ver que existe $\mathbf{U}$ como la buscada, basta ver que existe una matriz $\widetilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ con inversa entera y α como su primera columna (luego tomamos $\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{U}}^t$). A su vez, alcanza hallar $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ y $\mathbf{A}.\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ pues entonces $\alpha = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A}.\alpha = \mathbf{A}^{-1}.(\mathbf{A}.\alpha) = \mathbf{A}^{-1}.(1, 0, \ldots, 0)^t$, que es la primera columna de $\mathbf{A}^{-1}$, y tomando $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^{-1}$ conseguiríamos lo buscado.

Aplicaremos al vector columna α una cantidad finita de operaciones elementales enteras de filas (permutar dos filas, multiplicar una fila por -1 o sumar a una fila un múltiplo entero de otra) de manera de obtener el vector $(1, 0, \ldots, 0)^t$. Dado que las operaciones de este tipo se pueden interpretar como multiplicar por matrices elementales enteras cuyas inversas son también enteras, el producto de las matrices elementales correspondientes a las operaciones efectuadas será una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ con inversa entera tal que $\mathbf{A}.\alpha = (1, 0, \ldots, 0)^t$.

Podemos suponer que todas las coordenadas de α son no negativas, pues de lo contrario, multiplicamos por -1 cada una de las coordenadas negativas.

Como α es primitivo, existe $\alpha_i \neq 0$. Sea $\alpha_{i_0} = \text{mín}\{\alpha_i \neq 0\}$. Así, intercambiando las coordenadas 1 e i_0 obtenemos un vector $b = (b_1, \ldots, b_n)^t$ donde $b_j \geq 0$ para todo j y $0 < b_1 \leq b_i$ para todo i con $b_i \neq 0$. Para cada $i \geq 2$, aplicando el algoritmo de división, tenemos que $b_i = q_i.b_1 + r_i$ con $q_i \geq 0$ y $0 \leq r_i < b_1$.

Restándole $q_i.b_1$ a la coordenada i de b para cada $2 \leq i \leq n$, se obtiene el vector $(b_1, r_2, \ldots, r_n)$, que resulta primitivo. Si $r_i = 0$ para todo $2 \leq i \leq n$, el vector obtenido es $(1, 0, \ldots, 0)^t$. Si no, $\text{mín}\{b_1, r_2, \ldots, r_n\} < b_1$ y, por lo tanto, repitiendo el procedimiento anterior un número finito de veces, obtendremos el vector $(1, 0 \ldots, 0)^t$. □

Definición 2.4 *Sean* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$, $\mathbf{S} \subset \mathbb{Z}^n$ *un conjunto finito,* $m_\alpha(\mathbf{S}) = \text{mín}\{\langle \alpha, q\rangle \ / \ q \in \mathbf{S}\}$ *y* $\mathbf{S}_\alpha = \{q \in \mathbf{S} \ / \ \langle \alpha, q\rangle = m_\alpha(\mathbf{S})\}$ *(ver la Definición 1.8 del Capítulo 1). Si* $f(x) = \sum_{q\in\mathbf{S}} c_q.x^q$, *definimos*

$$f_\alpha(x) = \sum_{q\in\mathbf{S}_\alpha} c_q.x^q$$

y para cada sistema de ecuaciones $\mathbf{F} = \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$ *definimos* $\mathbf{F}_\alpha = \begin{cases} f_{1\alpha}(x) = 0 \\ \vdots \\ f_{n\alpha}(x) = 0 \end{cases}$.

Proposición 2.5 *Dado un sistema* $\mathbf{F}$ *de* n *ecuaciones en* n *variables, vía un cambio de variables,* $\mathbf{F}_\alpha$ *resulta ser equivalente a un sistema de* n *ecuaciones en a lo sumo* $n-1$ *variables y, por lo tanto, sin raíces en el caso genérico.*

Demostración: Sin perder generalidad podemos suponer que $\alpha \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ es primitivo, pues $\forall \lambda > 0$ sabemos que $m_{\lambda\alpha}(\mathbf{S}) = \min\{\langle \lambda.\alpha, q\rangle \ / \ q \in \mathbf{S}\} = \lambda.\min\{\langle \alpha, q\rangle \ / \ q \in \mathbf{S}\} = \lambda.m_\alpha(\mathbf{S})$. De esta manera, resulta que $\mathbf{S}_{\lambda.\alpha} = \mathbf{S}_\alpha$ para todo $\lambda > 0$. Así, si $\alpha = (\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_0})$ con $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, tomando $\lambda = \alpha_0.\mathrm{mcd}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{-1}$, $\lambda\alpha$ resulta entero y primitivo.

Usando el lema anterior, sea $\mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{U^{-1}} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ y las coordenadas de α son las de la primera fila de $\mathbf{U}$. Si $\beta = \alpha.\mathbf{U^{-1}} = (1, 0, \ldots, 0)$ vale que para todo $q \in \mathbb{Z}^n$,

$$\langle \beta, (\mathbf{U}.q^t)^t\rangle = \langle \alpha.\mathbf{U^{-1}}, (\mathbf{U}.q^t)^t\rangle = \alpha.\mathbf{U^{-1}}.\mathbf{U}.q^t = \alpha.q^t = \langle \alpha, q\rangle.$$

Entonces

$$\min\{\langle \alpha, q\rangle / q \in \mathbf{S}\} = \min\{\langle \beta, (\mathbf{U}.q^t)^t\rangle / q \in \mathbf{S}\} = \min\{\langle \beta, p\rangle / p \in \mathbf{U}.\mathbf{S}\}.$$

Esto implica que, si $q \in \mathbf{S}_\alpha$, entonces $\mathbf{U}q \in (\mathbf{U}.\mathbf{S})_\beta$, y vale la vuelta. Por lo tanto, $\mathbf{U}.(\mathbf{S}_\alpha) = (\mathbf{U}.\mathbf{S})_\beta$.

Con el cambio de variables $\mathbf{U}^*$ inducido por $x = y^{\mathbf{U}}$, resulta entonces que $\mathbf{U}^*\mathbf{F}_\alpha = (\mathbf{U}^*\mathbf{F})_\beta$. Como $\beta = (1, 0, \ldots, 0)$, cada uno de los polinomios $\mathbf{U}^*(f_i)_\beta$ puede escribirse como una potencia de y_1 por un polinomio que no depende de la variable y_1. Luego, las soluciones en $(\mathbb{C}^*)^n$ del sistema $(\mathbf{U}^*\mathbf{F})_\beta$ coinciden con las de un sistema de n ecuaciones en $n-1$ incógnitas. Por lo tanto, genéricamente, $\mathcal{L}(\mathbf{F}_\alpha) = \mathcal{L}((\mathbf{U}^*\mathbf{F})_\beta) = 0$. □

Otra propiedad que vale genéricamente para sistemas ralos es que todas sus raíces son simples (ver [13, Corolario (3.2.1), Capítulo V]):

Proposición 2.6 *Sean* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$ *polítopos en* $\mathbb{R}^n$. *Si existen, todas las raíces de un sistema genérico de* n *ecuaciones polinomiales en* n *variables con soportes* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$ *son aisladas y de multiplicidad 1.*

Los dos lemas siguientes relacionan la multiplicidad de una raíz de un sistema con su jacobiano:

Lema 2.7 *Sean* $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *tal que el sistema* $\mathbf{F} = \begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_n = 0 \end{cases}$ *tiene finitas soluciones, y una de ellas es el origen. Si la multiplicidad de intersección de* $f_1, \ldots, f_n$ *en el origen es 1, entonces* $\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(\overrightarrow{0}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{0}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overrightarrow{0}) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overrightarrow{0}) \end{pmatrix} \neq 0.$

Demostración: Con las hipótesis del lema, y siendo I_0 el ideal $< x_1, \ldots, x_n >$, supongamos que $< x_1, \ldots, x_n >_{\mathrm{I}_0} \not\subseteq < f_1, \ldots, f_n >_{\mathrm{I}_0}$. Luego existe $x_i \notin < f_1, \ldots, f_n >_{\mathrm{I}_0}$. Por lo tanto, $[x_i] \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathrm{I}_0} / < f_1, \ldots, f_n >_{\mathrm{I}_0}$ es no nula, con lo cual $\{1, [x_i]\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathrm{I}_0} / < f_1, \ldots, f_n >_{\mathrm{I}_0}$. Si no fuera así, existiría una combinación lineal tal que $[a + bx_i] = 0$, pero entonces $a + bx_i \in < f_1, \ldots, f_n >_{\mathrm{I}_0}$. Esto nos dice que se anularía en el origen, lo cual no puede suceder con a no nulo. Como $\{1, [x_i]\}$ es linealmente independiente, $\dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathrm{I}_0} / < f_1, \ldots, f_n >_{\mathrm{I}_0} \geq 2$, lo cual es un absurdo pues el origen es una raíz simple del sistema. Por lo tanto, vale que $< x_1, \ldots, x_n >_{\mathrm{I}_0} \subset < f_1, \ldots, f_n >_{\mathrm{I}_0}$.

Usando esto, podemos escribir $\forall\ 1 \leq i \leq n$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_1, \ldots, x_n).f_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Entonces, derivando con respecto a x_k tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n).f_j(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{n} g_{ji}(x_1, \ldots, x_n).\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{si} \quad k = i \\ 0 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n).f_j(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{n} g_{ji}(x_1, \ldots, x_n).\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{si} \quad k \neq i \end{aligned}$$

y evaluándolo en el origen, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^{n} g_{ji}(\overrightarrow{0}).\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{0}) \quad \text{si} \quad k = i \\ 0 &= \sum_{j=1}^{n} g_{ji}(\overrightarrow{0}).\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\overrightarrow{0}) \quad \text{si} \quad k \neq i \end{aligned}$$

con lo cual

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Id}} = \begin{pmatrix} g_{11}(\overrightarrow{0}) & \dots & g_{1n}(\overrightarrow{0}) \\ g_{21}(\overrightarrow{0}) & \dots & g_{2n}(\overrightarrow{0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(\overrightarrow{0}) & \dots & g_{nn}(\overrightarrow{0}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overrightarrow{0}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overrightarrow{0}) \end{pmatrix}$$

De esta manera, $\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(\overrightarrow{0}) \neq 0$. □

Lema 2.8 *Sean $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tales que el origen es una solución aislada del sistema* $\mathbf{F} = \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$. *Supongamos que $\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(\overrightarrow{0}) \neq 0$. Entonces la multiplicidad del origen como raíz del sistema es 1 (es una raíz simple).*

Demostración: Buscamos hallar $\mathrm{mult}(f_1, \dots, f_n; \overrightarrow{0}) = \dim \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{\mathrm{I}_0} / < f_1, \dots, f_n >_{\mathrm{I}_0}$, donde $\mathrm{I}_0 =< x_1, \dots, x_n >$. Usando el desarrollo de Taylor, podemos escribir a los polinomios

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overrightarrow{0}).x_i + \sum_{k \geq 2} f_{jk}(x_1, \dots, x_n),$$

donde f_{jk} es un polinomio homogéneo de grado k. La hipótesis $\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(\overrightarrow{0}) \neq 0$ implica que la matriz $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overrightarrow{0}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overrightarrow{0}) \end{pmatrix}$ es inversible. Mediante las operaciones entre los polinomios dadas por $\mathbf{H}^{-1}.\begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$, podemos suponer que

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = x_j + \sum_{k \geq 2} f_{jk}(x_1, \dots, x_n) = x_j(1 + x_j.p_j^{(1)}(x_j)) + \sum_{i \neq j} x_i.p_{ji}^{(1)}(x_1, \dots, x_n),$$

donde $p_{ji}^{(1)}(0) = 0$ y $1 + x_j.p_j^{(1)}(x_j)$ es una unidad en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{\mathrm{I}_0}$. Luego, multiplicando por el inverso de $1 + x_j.p_j^1(x_j)$ para cada j :

$$< f_1, \dots, f_n >_{\mathrm{I}_0} =< x_1 + \sum_{i \neq 1} x_i.p_{1i}^{(2)}, \dots, x_n + \sum_{i \neq n} x_i.p_{ni}^{(2)} >_{\mathrm{I}_0} \text{ con } p_{ji}^{(2)}(0) = 0.$$

Llamando $f_j^{(2)} = x_j + \sum_{i\neq j} x_i.p_{ji}^{(2)}$, $u_j = 1 - p_{jn}^{(2)}.p_{nj}^{(2)}$ y $p_{ji}^{(3)} = p_{ji}^{(2)} - p_{jn}^{(2)}.p_{ni}^{(2)}$, tenemos que para todo j entre 1 y $n-1$:

$$f_j^{(2)} - p_{jn}^{(2)}.f_n^{(2)} = x_1.p_{j1}^{(3)} + \cdots + x_{j-1}.p_{jj-1}^{(3)} + x_j.u_j + x_{j+1}.p_{jj+1}^{(3)} + \cdots + x_{n-1}.p_{jn-1}^{(3)},$$

con $p_{ji}^{(3)}(0) = 0$. Luego, multiplicando para cada j por el inverso de u_j tenemos que:
$< f_1, \ldots, f_n >_{\mathrm{I}_0} = < \{x_1.p_{j1}^{(4)} + \cdots + x_{j-1}.p_{jj-1}^{(4)} + x_j + x_{j+1}.p_{jj+1}^{(4)} + \cdots + x_{n-1}.p_{jn-1}^{(4)}\}_{j=1}^{n-1}, f_n^{(2)} >_{\mathrm{I}_0}$
donde $p_{ji}^{(4)}(0) = 0$. Y notando para cada j entre 1 y $n-1$

$$f_j^{(4)} = x_1.p_{j1}^{(4)} + \cdots + x_{j-1}.p_{jj-1}^{(4)} + x_j + x_{j+1}.p_{jj+1}^{(4)} + \cdots + x_{n-1}.p_{jn-1}^{(4)};$$

podemos ver que no tienen un término que sólo dependa de x_n. Repitiendo estos mismos pasos en forma recursiva tenemos que existen p_{ji} $\forall\, 2 \leq j \leq n,\ 1 \neq i < j$ que se anulan en el origen, tales que

$$< f_1, \ldots, f_n >_{\mathrm{I}_0} = < x_1, x_2 + x_1.p_{21}, x_3 + x_1.p_{31} + x_2.p_{32}, \ldots, x_n + x_1.p_{n1} + \cdots + x_{n-1}.p_{nn-1} >_{\mathrm{I}_0}$$

$$= < x_1, x_2, x_3 + x_2.p_{32}, \ldots, x_n + x_2.p_{n2} + \cdots + x_{n-1}.p_{nn-1} >_{\mathrm{I}_0} = \cdots = < x_1, \ldots, x_n >_{\mathrm{I}_0},$$

con lo cual, $\mathrm{mult}(f_1, \ldots, f_n; \overrightarrow{0}) = \dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathrm{I}_0} / < x_1, \ldots, x_n >_{\mathrm{I}_0} = 1$. □

2.2. El Teorema de Bernstein

Con todo esto ya es posible enunciar el teorema de Bernstein que relaciona la cantidad de soluciones en $(\mathbb{C}^*)^n$ de un sistema genérico con soportes prefijados con la geometría de dichos soportes (ver [1, Teorema A]):

Teorema 2.9 *Dada una colección de subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^n$, $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n$, se tiene que*

$$\mathcal{L}(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n) = \mathcal{MV}_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}_1), \ldots, \mathcal{C}onv(\mathbf{S}_n)).$$

El segundo de los teoremas de Bernstein (ver [1, Teorema B]) da condiciones de genericidad bajo las cuales un sistema de ecuaciones polinomiales con soportes $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n$ tiene $\mathcal{MV}_n(Conv(\mathbf{S}_1), \ldots, Conv(\mathbf{S}_n))$ soluciones en $(\mathbb{C}^*)^n$.

Teorema 2.10 *Sean $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ tales que $\mathrm{sop}(f_i) = \mathbf{S}_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, y sea*

$$\mathbf{F} = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}.$$

Entonces, con la notación de la Definición 2.4,

a) si $\mathbf{F}_\alpha$ *no tiene raíces en* $(\mathbb{C}^*)^n$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$*, todas las raíces de* $\mathbf{F}$ *son aisladas y* $\mathcal{L}(\mathbf{F}) = \mathcal{L}(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n)$.

b) si $\mathbf{F}_\alpha$ *tiene alguna raíz en* $(\mathbb{C}^*)^n$ *para algún* $\alpha \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$*,* $\mathcal{L}(\mathbf{F}) < \mathcal{L}(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n)$ *si* $\mathcal{L}(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n) \neq 0$ *y* $\mathcal{L}(\mathbf{F}) = 0$ *si* $\mathcal{L}(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n) = 0$.

Observación 2.11 *Un caso particular de una colección de subconjuntos finitos de* $\mathbb{Z}^n$ *es* $\mathbf{S}_1 = \cdots = \mathbf{S}_n = \{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \ / \ |m| \leq d\}$*. Entonces, se tiene que* $\mathcal{C}onv(\mathbf{S}_1) = \cdots = \mathcal{C}onv(\mathbf{S}_n) = \mathbf{Q}_d$*. En este caso, el Teorema 2.9 nos dice que*

$$\mathcal{L}(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n) = \mathcal{MV}_n(\mathbf{Q}_d, \ldots, \mathbf{Q}_d) = n!\mathcal{V}ol_n(\mathbf{Q}_d).$$

Por la Proposición 1.7, sabemos que $\mathcal{V}ol_n(\mathbf{Q}_d) = d^n/n!$ *con lo cual la cota de Bernstein para la cantidad de soluciones en* $(\mathbb{C}^*)^n$ *de un sistema genérico con soportes prefijados* $\mathbf{S}_1 = \cdots = \mathbf{S}_n = \{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \ / \ |m| \leq d\}$ *es*

$$\mathcal{L}(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n) = d^n,$$

la misma que se obtiene con el Teorema de Bézout (ver [16, Capítulo IV, Sección 2.1]).

En lo que sigue, analizaremos paso por paso las demostraciones originales de los teoremas de Bernstein.

2.2.1. Demostración del Teorema 2.10

Demostración: a) Supongamos primero que las raíces del sistema $\mathbf{F}$ no son aisladas. Podemos entonces tomar una curva irreducible $\mathcal{C}$ de dimensión 1 en la variedad de las raíces (para esto, basta intersecar el conjunto de las soluciones del sistema con suficientes hiperplanos genéricos y considerar una componente irreducible). Sea $\mathbb{C}(\mathcal{C}) = \{\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \ / \ \overline{f}, \overline{g} \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\mathrm{I}(\mathcal{C})$ y $\overline{g} \neq 0\}$ el cuerpo de funciones racionales sobre $\mathcal{C}$. Como $\mathbb{C}(\mathcal{C})/\mathbb{C}$ es una extensión de cuerpos con grado de trascendencia 1, existe i tal que $\overline{x_i}$ en $\mathbb{C}(\mathcal{C})$ es trascendente y $\forall j \neq i$, $\overline{x_j}$ es algebraico sobre $\mathbb{C}[\overline{x_i}]$. Luego para todo $j \neq i$ existe $g_j(\overline{x_i})(z) \in \mathbb{C}[\overline{x_i}][z] - \{0\}$ tal que $g_j(\overline{x_i})(\overline{x_j}) = \overline{0}$. Entonces $(g_j; \ j \neq i) \subset \mathrm{I}(\mathcal{C})$ y, por lo tanto, la inclusión también vale para los ideales extendidos a la clausura algebraica de $\mathbb{C}(\overline{x_i})$. En consecuencia, si para cada $j \neq i$, $\{x_{jk}\}_{k=1}^{d_j} \in \mathbb{C}(\overline{x_i})'$ son las raíces de g_j, existen $k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_n$ tales que $(x_{1k_1}, \ldots, x_{i-1k_{i-1}}, x_i, x_{i+1k_{i+1}}, \ldots, x_{nk_n}) \in (\mathbb{C}(x_i)')^n$ anula a todo polinomio que se anula sobre $\mathcal{C}$, y por lo tanto, a todos los polinomios del sistema $\mathbf{F}$.

Por lo tanto, existe $\mathcal{X}(t) = (\mathcal{X}_1(t), \ldots, \mathcal{X}_n(t))$ donde $\mathcal{X}_j(t) = a_j.t^{\alpha_j} + \mathrm{o}(t^{\alpha_j})$ es una serie de Puiseux, $a_j \in \mathbb{C}^*$, $\alpha_j \in \mathbb{Q}$ $\forall 1 \leq j \leq n$ y $\mathrm{o}(t^{\alpha_j}) \in \mathbb{C}(t)'$ es una serie de Puiseux de orden

mayor estricto que α_j, tal que $f_i(\mathcal{X}(t)) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Es importante notar que $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$.
Luego tenemos que, si

$$f_i(x) = \sum_{q \in \mathbf{S}_i} c_q.x^q = \sum_{q=(q_1,\ldots,q_n) \in \mathbf{S}_i} c_q.x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$$

con $q = (q_1, \ldots, q_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= f_i(\mathcal{X}(t)) = f_i(\mathcal{X}_1(t), \ldots, \mathcal{X}_n(t)) = f_i(a_1.t^{\alpha_1} + \mathrm{o}(t^{\alpha_1}), \ldots, a_n.t^{\alpha_n} + \mathrm{o}(t^{\alpha_n})) = \\
&= \sum_{q \in \mathbf{S}_i} c_q.(a_1.t^{\alpha_1} + \mathrm{o}(t^{\alpha_1}))^{q_1} \ldots (a_n.t^{\alpha_n} + \mathrm{o}(t^{\alpha_n}))^{q_n} = \\
&= \sum_{q \in \mathbf{S}_i} c_q.(a_1^{q_1} \ldots a_n^{q_n}.t^{\alpha_1.q_1 + \cdots + \alpha_n.q_n} + \mathrm{o}(t^{\alpha_1.q_1 + \cdots + \alpha_n.q_n})) = \\
&= \sum_{q \in \mathbf{S}_i} c_q.(a^q.t^{\langle \alpha, q \rangle} + \mathrm{o}(t^{\langle \alpha, q \rangle})) = \\
&= \sum_{q \in \mathbf{S}_{i\alpha}} c_q.a^q.t^{\langle \alpha, q \rangle} + \sum_{q \in \mathbf{S}_i \setminus \mathbf{S}_{i\alpha}} c_q.a^q.t^{\langle \alpha, q \rangle} + \sum_{q \in \mathbf{S}_i} c_q.\mathrm{o}(t^{\langle \alpha, q \rangle}) = \\
&= f_{i\alpha}(a).t^{m_\alpha(\mathbf{S}_i)} + \sum_{h > m_\alpha(\mathbf{S}_i)} \widetilde{c}_h.t^h.
\end{aligned}$$

Como cada coeficiente de cada potencia de t es nulo, en particular vale

$$f_{i\alpha}(a) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n. \tag{2.3}$$

Con esto, a es raíz de $\mathbf{F}_\alpha$, pero esto no puede ser pues como $\alpha \neq 0$, por hipótesis $\mathbf{F}_\alpha$ no tiene raíces en $(\mathbb{C}^*)^n$. Como el absurdo proviene de suponer que podemos tomar una curva de raíces, éstas deben estar aisladas.

Supongamos ahora que las raíces del sistema $\mathbf{F}$ son aisladas, pero $\mathcal{L}(\mathbf{F}) \neq \mathcal{L}(\mathfrak{S})$. Consideremos un polinomio $\mathbf{q}$ en los coeficientes de un sistema con soportes $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n$ cuya no anulación en un vector dado de coeficientes implica que el sistema asociado tiene $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces aisladas en $(\mathbb{C}^*)^n$. Sea

$$\mathbf{F}^t = \begin{cases} (1-t).f_1(x_1, \ldots, x_n) + t.p_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ (1-t).f_n(x_1, \ldots, x_n) + t.p_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

donde $\mathbf{P} = \begin{cases} p_1 = 0 \\ \vdots \\ p_n = 0 \end{cases}$ es un sistema dado por polinomios con soportes $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n$ tal que $\mathbf{q}(\mathbf{P}) \neq 0$ (y por lo tanto con $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces aisladas).

Visto como un sistema que depende de $(t, x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{F}^t$ es un sistema de n ecuaciones en $n+1$ variables. Entonces cada componente irreducible del conjunto de soluciones tiene dimensión al menos 1. Luego, cada raíz aislada de $\mathbf{F} = \mathbf{F}^0$ no puede ser aislada en $\mathbf{F}^t(x)$ y existe una curva que la contiene.

Como para $t = 1$, $\mathbf{q}(\mathbf{F}^1) \neq 0$, entonces $\mathbf{q}(\mathbf{F}^t)$ es un polinomio en una única variable t, que evaluada en 1 es distinto de 0. Por lo tanto

$$\mathbf{q}(\mathbf{F}^t) \neq 0. \tag{2.4}$$

y tiene finitas raíces. En consecuencia, el sistema $\mathbf{F}^t$ tiene $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces en $\left((\mathbb{C}(t)')^*\right)^n$ y, para casi todo $t \in \mathbb{C}$, el sistema $\mathbf{F}^t$ es genérico y tiene $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces. Es decir, la curva definida por $\mathbf{F}^t$ tiene $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ ramas y, además, cada rama de la curva depende de t pues con $t = 1$ la raíz es aislada, con lo cual la coordenada en t de esa curva no puede ser constante.

Veamos que $\mathcal{L}(\mathbf{F}) < \mathcal{L}(\mathfrak{S})$: como $\mathbf{F}^t(x)$ es un sistema de n ecuaciones en $n+1$ variables, cada raíz aislada de $\mathbf{F} = \mathbf{F}^0$ está contenida en una curva de raíces de $\mathbf{F}^t$. Pero como con $t = 0$ la raíz es aislada, la coordenada en t no puede ser constantemente 0 y por lo tanto, está contenida en una rama de soluciones de $\mathbf{F}^t$. Si tomamos dos raíces distintas de $\mathbf{F}$, y consideramos las ramas en las que están contenidas, resulta que para t_0 suficientemente chico corresponden a raíces distintas de $\mathbf{F}^{t_0}$ y, por lo tanto, las ramas son distintas. Luego, existen a lo sumo $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces aisladas distintas del sistema $\mathbf{F}$, es decir

$$\mathcal{L}(\mathbf{F}) \leq \mathcal{L}(\mathfrak{S}). \tag{2.5}$$

Con esto, como habíamos supuesto que $\mathcal{L}(\mathbf{F}) \neq \mathcal{L}(\mathfrak{S})$, resulta $\mathcal{L}(\mathbf{F}) < \mathcal{L}(\mathfrak{S})$.

Sea cada una de las ramas de la curva $\mathbf{F}^t = 0$,

$$\mathcal{X}^{(j)}(t) = (a_{j1}.t^{\alpha_{j1}} + \mathrm{o}(t^{\alpha_{j1}}), \ldots, a_{jn}.t^{\alpha_{jn}} + \mathrm{o}(t^{\alpha_{jn}})) \quad \forall 1 \leq j \leq \mathcal{L}(\mathfrak{S})$$

y notemos $a^{(j)} = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, $\alpha^{(j)} = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn})$. Si $\alpha^{(j)} = 0 \; \forall 1 \leq j \leq \mathcal{L}(\mathfrak{S})$, $\mathcal{X}_j(0) = a^{(j)} \; \forall j$, que es raíz de $\mathbf{F}^0 = \mathbf{F}$. Esto implica que tenemos al menos $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces de $\mathbf{F}$ contadas con su multiplicidad, lo cual es una contradicción. Luego, existe j tal que $\alpha^{(j)} \neq 0$ y repitiendo las cuentas de (2.3) vale que $f_{i\alpha^{(j)}}(a^{(j)}) = 0 \; \forall i$. Entonces $a^{(j)}$ es raíz de $\mathbf{F}_{\alpha^{(j)}}$ lo cual también contradice el enunciado del teorema. Por lo tanto, debe valer que $\mathcal{L}(\mathbf{F}) = \mathcal{L}(\mathfrak{S})$.

b) Sea $\alpha \neq 0$ tal que $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es raíz de $\mathbf{F}_\alpha$. Haciendo un cambio de variables como en la demostración de la Proposición 2.5, podemos suponer que $\alpha = (\alpha_1, 0, \ldots, 0)$ con $\alpha_1 > 0$ y $m_\alpha(\mathbf{S}_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ (vimos en el Lema 2.1 que estos cambios no modifican $\mathcal{L}(\mathbf{F})$).

Con dicho α y usando la notación $a' = (0, a_2, \ldots, a_n)$ y $f_i(x) = \sum_{q \in \mathbf{S}_i} c_q.x^q$, tenemos que

$$f_i(a') = \sum_{q \in \mathbf{S}_i} c_q.(a')^q = \sum c_q.a_2^{q_2} \ldots a_n^{q_n}$$

sumado sobre los $q \in \mathbf{S}_i$ tales que $q_1 = 0$ (pues la primera coordenada de a' es nula). Como $\langle \alpha, q \rangle = \alpha_1.q_1$ y $m_\alpha(\mathbf{S}_i) = 0$, entonces $\mathbf{S}_{i\alpha} = \{q \in \mathbf{S}_i \ / \ \alpha_1.q_1 = m_\alpha(\mathbf{S}_i) = 0\} = \{q \in \mathbf{S}_i \ / \ q_1 = 0\}$. Luego

$$f_i(a') = \sum_{q \in \mathbf{S}_{i\alpha}} c_q.a_2^{q_2} \ldots a_n^{q_n} = f_{i\alpha}(a) = 0.$$

Caso $\mathcal{L}(\mathfrak{S}) > 0$: Sea $\mathbf{P} = \begin{cases} p_1 = 0 \\ \vdots \\ p_n = 0 \end{cases}$ un sistema tal que $\mathbf{q}(\mathbf{P}) \neq 0$, donde (q) es el polinomio en los coeficientes del sistema que asegura que éste tenga $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces aisladas en $(\mathbb{C}^*)^n$ y que, además, cumpla que $p_i(a') \neq 0 \ \forall 1 \leq i \leq n$ y que existe una raíz $b \in (\mathbb{C}^*)^n$ de $\mathbf{P}$ tal que $f_i(b) \neq 0 \ \forall 1 \leq i \leq n$. Consideremos el segmento que une a' con b: $z(t) = t.b + (1-t).a'$, y

$$\mathbf{F}^t = \begin{cases} f_1^t(x) = f_1(x).p_1(z(t)) - p_1(x).f_1(z(t)) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in [0,1]. \\ f_n^t(x) = f_n(x).p_n(z(t)) - p_n(x).f_n(z(t)) \end{cases}$$

Con $t = 0$ tenemos que $f_i^0(x) = f_i(x).p_i(a') - p_i(x).0 = f_i(x).e_i$ con e_i constante no nula $\forall i$. De esta manera, el sistema $\mathbf{F}^0$ es equivalente al sistema $\mathbf{F}$.

Para $t = 1$, como $f_i(b) \neq 0$, $f_i^1(x) = f_i(x).0 - p_i(x).f_i(b) = p_i(x).d_i$ donde d_i es una constante no nula. Por lo tanto, $f_i^1(x) = 0$ si y sólo si $p_i(x) = 0 \ \forall i$, y así el sistema $\mathbf{F}^1$ es equivalente al sistema $\mathbf{P}$. Entonces $\mathbf{q}(\mathbf{F}^1) \neq 0$, con lo cual para casi todo t tenemos que $\mathbf{q}(\mathbf{F}^t) \neq 0$. Por lo tanto, para casi todo t, el sistema $\mathbf{F}^t$ tendrá también $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces aisladas.

De la misma forma en que llegamos a la desigualdad (2.5), cuando t tiende a 0, las $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces de $\mathbf{F}^t$ para casi todo t convergen a raíces aisladas de $\mathbf{F}$ con lo cual, $\mathcal{L}(\mathbf{F}) \leq \mathcal{L}(\mathfrak{S})$. Pero $\mathbf{F}^t(z(t)) = f_i(z(t)).p_i(z(t)) - f_i(z(t)).p_i(z(t)) = 0$ y $z(0) = a' = (0, a_2, \ldots, a_n)$, que no pertenece a $(\mathbb{C}^*)^n$. Esto implica que $\mathcal{L}(\mathbf{F}) < \mathcal{L}(\mathfrak{S})$, que es lo que queríamos ver.

Caso $\mathcal{L}(\mathfrak{S}) = 0$: Sea $a' = (0, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{P} = \begin{cases} p_1 = 0 \\ \vdots \\ p_n = 0 \end{cases}$ un sistema genérico $(\mathbf{q}(\mathbf{P}) \neq 0)$ con $\mathcal{L}(\mathfrak{S}) = 0$ raíces aisladas y tal que $p_i(a') \neq 0$. Tomemos además b tal que $f_i(b) \neq 0$

$\forall 1 \leq i \leq n$. Así, consideremos nuevamente el segmento $z(t) = t.b + (1-t).a'$ y

$$\mathbf{F}^t = \begin{cases} f_1^t(x) = f_1(x).p_1(z(t))(1-t) - p_1(x).f_1(z(t)) \\ \vdots \\ f_n^t(x) = f_n(x).p_n(z(t))(1-t) - p_n(x).f_n(z(t)) \end{cases}$$

Tenemos entonces que, para $t = 1$ vale $f_i^1(x) = f_i(x).p_i(b).0 - p_i(x).f_i(b) = p_i(x).d_i$ donde d_i es una constante no nula. De esta forma, $\mathbf{F}^1$ es equivalente al sistema $\mathbf{P}$ y cumple que $\mathbf{q}(\mathbf{F}^1) \neq 0$. Luego, para casi todo t, el sistema $\mathbf{F}^t$ no tiene soluciones. Por lo tanto, cada componente irreducible del conjunto de soluciones de $\mathbf{F}^t$ visto como un sistema en las $n+1$ variables t, x está incluida en $t = t_0$ para algún valor de t_0. Como cada una de estas componentes tiene dimensión por lo menos 1, las soluciones de $\mathbf{F}^0$, que es equivalente a $\mathbf{F}$ (pues $f_i^0(x) = f_i(x)p_i(a')$), no pueden ser aisladas y, por lo tanto, $\mathcal{L}(\mathbf{F}) = 0$. □

2.2.2. Demostración del Teorema 2.9

Demostración: Se verá que, en el caso genérico, la cantidad de raíces de un sistema

$$\mathbf{F} = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

tal que $\text{sop}(f_i) = \mathbf{S}_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$ es exactamente

$$\mathcal{L}(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n) = \mathcal{MV}_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}_1), \ldots, \mathcal{C}onv(\mathbf{S}_n)).$$

La demostración se hará por inducción en la cantidad n de incógnitas y ecuaciones del sistema. Para esto, se probará en primer lugar una fórmula de tipo

$$\mathcal{L}(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n) = \sum \mathcal{H}_\alpha . \mathcal{L}(\mathbf{S}_{2\alpha}, \ldots, \mathbf{S}_{n\alpha}),$$

donde $\mathcal{H}_\alpha$ son enteros convenientes que dependen de $\mathbf{S}_1$, y la suma se hace sobre todas las direcciones orientadas α, que relaciona la cantidad de soluciones de un sistema en n variables con las de sistemas de ecuaciones en $n-1$ variables (ver la demostración de la Proposición 2.5).

Fijemos un elemento r de $\mathbf{S}_1$.

Sean $\mathfrak{S} = (\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ primitivo. Se define

$$\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S}) = \mathcal{L}(\mathbf{S}_{2\alpha}, \ldots, \mathbf{S}_{n\alpha}). \tag{2.6}$$

Observamos que $\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ no cambia por traslaciones ni automorfismos de $\mathbb{Z}^n$ del tipo considerado en la Sección 2.1.

Trasladando los $\mathbf{S}_i$, podemos suponer que $m_\alpha(\mathbf{S}_i) = 0$ y $\mathbf{S}_{i\alpha} \subset (\mathbb{Z}^n)_\alpha = \{q \in \mathbb{Z}^n \ / \ \langle \alpha, q\rangle = 0\}$ para todo $2 \leq i \leq n$: para ver esto, para cada $2 \leq i \leq n$ fijo, y recordando que

$$\mathbf{S}_{i\alpha} = \{q \in \mathbf{S}_i \ / \ \langle \alpha, q\rangle = m_\alpha(\mathbf{S}_i)\},$$

sea $p_i \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\langle \alpha, p_i\rangle = -m_\alpha(\mathbf{S}_i)$ (por ejemplo $p_i = -q_i$ donde $q_i \in \mathbf{S}_{i\alpha}$). Entonces $m_\alpha(p_i + \mathbf{S}_i) = \langle \alpha, p_i\rangle + m_\alpha(\mathbf{S}_i) = 0$ (tomando $\mathbf{P} = \{p_i\}$ y $\mathbf{Q} = \mathbf{S}_i$ en la Proposición 1.14). Luego, $(p_i + \mathbf{S}_i)_\alpha \subset (\mathbb{Z}^n)_\alpha$.

Llamamos $(\mathbb{Z}^n)' = \mathbb{Z}^n/(\mathbb{Z}^n)_\alpha$. Este es un $\mathbb{Z}-$módulo libre y unidimensional: si $k \in \mathbb{Z}$ y $k[v] = [0]$, entonces $\langle kv, \alpha\rangle = 0$. Luego si $k \neq 0$, $\langle v, \alpha\rangle = 0$, con lo cual $[v] = [0]$. Entonces $(\mathbb{Z}^n)'$ es un $\mathbb{Z}$-módulo sin torsión, y es finitamente generado, luego es un $\mathbb{Z}-$módulo libre. Es unidimensional, pues $\dim_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}^n)_\alpha) = n - 1$.

Tomemos ahora un generador $[e] \in (\mathbb{Z}^n)'$ que cumpla $\langle \alpha, e\rangle > 0$, y consideremos el proyector natural $\Psi : \mathbb{Z}^n \to (\mathbb{Z}^n)'$, $\Psi(x) = [x]$. Definimos $\mathcal{H}_\alpha$ como el número entero que cumple

$$\mathcal{H}_\alpha.\Psi(e) = \Psi(r) - \Psi(\mathbf{S}_{1\alpha}), \tag{2.7}$$

donde $r \in \mathbf{S}_1$ fue fijado al principio de la demostración.

Veamos que $\mathcal{H}_\alpha$ está bien definido y es no negativo:

Como para todo $q \in \mathbf{S}_{1\alpha}$, $\langle q, \alpha\rangle = m_\alpha(\mathbf{S}_1)$, tenemos que si $p, q \in \mathbf{S}_{1\alpha}$, $p - q \in (\mathbb{Z}^n)_\alpha$ y entonces, $[p] = [q]$ en $(\mathbb{Z}^n)'$, o sea que $\Psi(p) = \Psi(q)$ con lo cual tiene sentido hablar de $\Psi(\mathbf{S}_{1\alpha})$.

Por otro lado, observamos que para todo $x \in \mathbb{Z}^n$ se tiene que $\|\alpha\|^2 x - \langle \alpha, x\rangle \alpha \in (\mathbb{Z}^n)_\alpha$, lo que implica que

$$\|\alpha\|^2 \Psi(x) = \langle \alpha, x\rangle \Psi(\alpha).$$

Entonces, usando la igualdad a partir de la cual definimos $\mathcal{H}_\alpha$,

$$\mathcal{H}_\alpha \langle \alpha, e\rangle \Psi(\alpha) = \mathcal{H}_\alpha \|\alpha\|^2 \Psi(e) = \|\alpha\|^2 \big(\Psi(r) - \Psi(\mathbf{S}_{1\alpha})\big) = \langle \alpha, r\rangle \Psi(\alpha) - m_\alpha(\mathbf{S}_1)\Psi(\alpha),$$

con lo cual

$$\big(\mathcal{H}_\alpha.\langle \alpha, e\rangle - \langle \alpha, r\rangle + m_\alpha(\mathbf{S}_1)\big)\Psi(\alpha) = 0.$$

Por ser $(\mathbb{Z}^n)'$ un módulo libre y $\Psi(\alpha) \neq 0$, esto implica que $\mathcal{H}_\alpha\langle \alpha, e\rangle = \langle \alpha, r\rangle - m_\alpha(\mathbf{S}_1)$ y, como $\langle \alpha, e\rangle > 0$,

$$\mathcal{H}_\alpha = \frac{\langle \alpha, r\rangle - m_\alpha(\mathbf{S}_1)}{\langle \alpha, e\rangle}. \tag{2.8}$$

Finalmente, como $r \in \mathbf{S}_1$, vale que $\langle \alpha, r\rangle \geq m_\alpha(\mathbf{S}_1)$, y en consecuencia, $\mathcal{H}_\alpha \geq 0$.

A partir de la fórmula (2.8) es claro que $\mathcal{H}_\alpha$ no cambia por traslaciones y, entonces, sin perder generalidad, podemos suponer que $\mathbf{S}_{1\alpha} \subset (\mathbb{Z}^n)_\alpha$ y $m_\alpha(\mathbf{S}_1) = 0$. En este caso, $\mathcal{H}_\alpha = \dfrac{\langle \alpha, r\rangle}{\langle \alpha, e\rangle}$.

Con r fijo se observa que $\mathcal{H}_\alpha$ depende sólo de α y es invariante por automorfismos:

Si $[e']$ es otro generador de $(\mathbb{Z}^n)'$, entonces $[e'] = \pm[e]$. Si además $\langle \alpha, e'\rangle > 0$, vale que $[e] = [e']$ y luego $\langle \alpha, e'\rangle = \langle \alpha, e\rangle$.

Para ver que es invariante por automorfismos, sea $\mathbf{U} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{U}(x) = x.\mathbf{U}^t$ automorfismo. Para todo $b \in \mathbf{U}((\mathbb{Z}^n)_\alpha)$, $b = q.\mathbf{U}^t$ para algún $q \in (\mathbb{Z}^n)_\alpha$. Como $\langle q, \alpha\rangle = 0$, entonces $\langle b, \alpha\mathbf{U}^{-1}\rangle = q.\mathbf{U}^t.(\mathbf{U}^t)^{-1}.\alpha^t = 0$ y por lo tanto $b \in (\mathbb{Z}^n)_{\alpha\mathbf{U}^{-1}}$.

A su vez, si $b \in (\mathbb{Z}^n)_{\alpha\mathbf{U}^{-1}}$, $\langle b, \alpha\mathbf{U}^{-1}\rangle = 0$. Usando esto $b.(\mathbf{U}^{-1})^t.\alpha^t = 0$ y como $\mathbf{U}$ es un automorfismo, existe $x \in \mathbb{Z}^n$ tal que $b = x.\mathbf{U}^t$. Así, $\langle x, \alpha\rangle = x.\mathbf{U}^t.(\mathbf{U}^{-1})^t.\alpha^t = 0$. Entonces, $b = \mathbf{U}(x)$ con $x \in (\mathbb{Z}^n)_\alpha$, con lo cual $b \in \mathbf{U}((\mathbb{Z}^n)_\alpha)$.

Luego $\mathbf{U}((\mathbb{Z}^n)_\alpha) = (\mathbb{Z}^n)_{\alpha\mathbf{U}^{-1}}$ y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\mathbf{U}}{} & \\ \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n \\ \Psi_\alpha \downarrow & & \downarrow \Psi_{\alpha\mathbf{U}^{-1}} \\ & \overset{\overline{\mathbf{U}}}{} & \\ \mathbb{Z}^n/(\mathbb{Z}^n)_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n/(\mathbb{Z}^n)_{\alpha\mathbf{U}^{-1}} \end{array}$$

es decir, $\overline{\mathbf{U}} \circ \Psi_\alpha = \Psi_{\alpha\mathbf{U}^{-1}} \circ \mathbf{U}$.

Tomamos como generador de $\mathbb{Z}^n/(\mathbb{Z}^n)_{\alpha\mathbf{U}^{-1}}$ a $\mathbf{U}(e)$ pues $\langle \mathbf{U}(e), \alpha\mathbf{U}^{-1}\rangle = \langle e.\mathbf{U}^t, \alpha\mathbf{U}^{-1}\rangle = \langle e, \alpha\rangle > 0$. Como $\mathcal{H}_\alpha\Psi_\alpha(e) = \Psi_\alpha(r) - \Psi_\alpha(\mathbf{S}_{1\alpha})$, aplicando $\overline{\mathbf{U}}$, se tiene que $\mathcal{H}_\alpha\Psi_{\alpha\mathbf{U}^{-1}}(\mathbf{U}(e)) = \Psi_{\alpha\mathbf{U}^{-1}}(\mathbf{U}(r)) - \Psi_{\alpha\mathbf{U}^{-1}}(\mathbf{U}(\mathbf{S}_{1\alpha}))$. Pero $\mathcal{H}_{\alpha\mathbf{U}^{-1}}$ es el que cumple esto. Luego, tiene que valer

$$\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}_{\alpha\mathbf{U}^{-1}}.$$

Una vez definidos $\mathcal{H}_\alpha$ y $\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ (como en (2.6)) veremos por un lado que vale que

$$\sum \mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S}) = \mathcal{L}(\mathfrak{S}), \tag{2.9}$$

donde la suma se hace sobre todas las direcciones orientadas; y por otro lado, que si la igualdad (2.9) es válida, el Teorema 2.9 se cumple.

Supongamos primero que la igualdad (2.9) es cierta. Como $\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ no depende de $\mathbf{S}_1$ y $\mathcal{H}_\alpha$ sólo depende de $\mathbf{S}_1$ linealmente (pues $\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S}) = \mathcal{L}(\mathbf{S}_{2\alpha}, \ldots, \mathbf{S}_{n\alpha})$ y si $\widetilde{\mathbf{S}_1} = a.\mathbf{S}_1 + b.\mathbf{S}_1'$, $\widetilde{r} = a.r + b.r'$ tendremos que $\widetilde{\mathcal{H}_\alpha}.\Psi(e) = \Psi(a.r + b.r') - \Psi\big((a.\mathbf{S}_1 + b.\mathbf{S}_1')_\alpha\big) = a.\Psi(r) + b.\Psi(r') - a.\Psi\big((\mathbf{S}_1)_\alpha\big) - b.\Psi\big((\mathbf{S}_1')_\alpha\big) = (a.\mathcal{H}_\alpha + b.\mathcal{H}_\alpha')\Psi(e))$, entonces $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ depende linealmente de

$\mathbf{S}_1$. Como no depende del orden de los $\mathbf{S}_i$ resulta multilineal. Si notamos $\mathcal{MV}_n(\mathfrak{S}) = \mathcal{MV}_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}_1),\ldots,\mathcal{C}onv(\mathbf{S}_n))$, usando que por definición

$$\mathcal{MV}_n(\mathfrak{S}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j} \sum_{\substack{\mathrm{J}\subset\{1,\ldots,n\}\\ |\mathrm{J}|=j}} \mathcal{V}ol_n(\sum_{k\in\mathrm{J}}\mathcal{C}onv(\mathbf{S}_k)),$$

que es multilineal y que $\mathcal{MV}_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}),\ldots,\mathcal{C}onv(\mathbf{S})) = n!.\mathcal{V}ol_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}))$ (por el Teorema 1.17), entonces

$$\mathcal{MV}_n(\mathfrak{S}) = \frac{1}{n!}\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j} \sum_{\substack{\mathrm{J}\subset\{1,\ldots,n\}\\ |\mathrm{J}|=j}} \mathcal{MV}_n(\sum_{k\in\mathrm{J}}\mathcal{C}onv(\mathbf{S}_k),\ldots,\sum_{k\in\mathrm{J}}\mathcal{C}onv(\mathbf{S}_k))\Big). \quad (2.10)$$

También $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ es multilineal y, por lo tanto, puede escribirse:

$$\mathcal{L}(\mathfrak{S}) = \frac{1}{n!}\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j} \sum_{\substack{\mathrm{J}\subset\{1,\ldots,n\}\\ |\mathrm{J}|=j}} \mathcal{L}(\sum_{k\in\mathrm{J}}\mathbf{S}_k,\ldots,\sum_{k\in\mathrm{J}}\mathbf{S}_k)\Big). \quad (2.11)$$

Entonces, si vale que $\mathcal{MV}_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}),\ldots,\mathcal{C}onv(\mathbf{S})) = \mathcal{L}(\mathbf{S},\ldots,\mathbf{S})$ para todo $\mathbf{S}\subset\mathbb{Z}^n$ finito, igualando cada término de (2.10) y (2.11) tendremos que:

$$\mathcal{MV}_n(\mathfrak{S}) = \mathcal{L}(\mathfrak{S}).$$

De esta manera, es suficiente probar esta igualdad para $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2 = \cdots = \mathbf{S}_n = \mathbf{S}$. Como en este caso $\mathcal{MV}_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}),\ldots,\mathcal{C}onv(\mathbf{S})) = n!\,\mathcal{V}ol_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}))$, veremos por inducción en n que $\mathcal{L}(\mathfrak{S}) = n!\,\mathcal{V}ol_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}))$.

Para el caso $n = 1$ tenemos un único $f(x) = 0$ en una variable. Después de multiplicar por un monomio de Laurent apropiado, obtenemos la ecuación

$$0 = \widetilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$$

con $c_0 \neq 0$ y $c_m \neq 0$, y por el Teorema Fundamental del Algebra, $\mathcal{L}(\mathfrak{S}) = m = 1.\mathcal{V}ol_1([0,m]) = n!.\mathcal{V}ol_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}))$.

Para probarlo para $n \geq 2$, recordemos que para cada $\alpha\in\mathbb{Z}^n$ primitivo, mediante una traslación podemos suponer que $\mathbf{S}_\alpha \subset (\mathbb{Z}^n)_\alpha$ y, por lo tanto, un sistema de $n-1$ ecuaciones con soportes $\mathbf{S}_\alpha$ es, en realidad, un sistema con $n-1$ incógnitas. Dado $\alpha\in\mathbb{Z}^n$ primitivo, por hipótesis inductiva, podemos suponer entonces que

$$\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S}) = (n-1)!\mathcal{V}ol_{n-1}(\mathcal{C}onv(\mathbf{S})_\alpha).$$

Sea Π_α la pirámide de base $\mathbf{S}_\alpha$ y altura h dada por el punto r. El volumen de Π_α es

$$\mathcal{V}ol_n(\Pi_\alpha) = \frac{\mathcal{V}ol_{n-1}(\mathcal{C}onv(\mathbf{S})_\alpha).h}{n}.$$

Sólo debemos calcular h, pero como $\mathbf{S}_\alpha \subset (\mathbb{Z}^n)_\alpha$, usando (2.8),

$$h = d(r,(\mathbb{Z}^n)_\alpha) = \frac{\langle r,\alpha\rangle}{\|\alpha\|^2} = \frac{\mathcal{H}_\alpha.\langle e,\alpha\rangle}{\|\alpha\|^2}. \tag{2.12}$$

Realizando un cambio de variables dado por una matriz $\mathbf{U} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $\det(\mathbf{U}) = \pm 1$ (que por lo tanto, no cambia volúmenes) podemos suponer que $\alpha = (1,0,\ldots,0)$ (construimos esta matriz como en el Lema 2.3). Entonces, $\|\alpha\|^2 = 1$ y para este α, $e = \alpha$ es un generador de $\mathbb{Z}^n/(\mathbb{Z}^n)_\alpha$ con $\langle\alpha, e\rangle > 0$. Luego, $h = \mathcal{H}_\alpha$, lo que implica que,

$$\mathcal{V}ol_n(\Pi_\alpha) = \frac{\mathcal{V}ol_{n-1}(\mathcal{C}onv(\mathbf{S})_\alpha).\mathcal{H}_\alpha}{n}.$$

Luego, usando la hipótesis inductiva, tenemos que

$$n!\mathcal{V}ol_n(\Pi_\alpha) = (n-1)!.n.\frac{\mathcal{V}ol_{n-1}(\mathcal{C}onv(\mathbf{S})_\alpha).\mathcal{H}_\alpha}{n} = \mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S}).$$

Entonces, por la ecuación (2.9) y la Proposición 1.11, concluimos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathfrak{S}) &= \sum \mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S}) = n!\sum \mathcal{V}ol_n(\Pi_\alpha) = n!\mathcal{V}ol_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S})) = \\ &= \mathcal{MV}_n(\mathcal{C}onv(\mathbf{S}),\ldots,\mathcal{C}onv(\mathbf{S})).\end{aligned}$$

Sólo resta ver que la ecuación (2.9) es cierta. En primer lugar, observamos que para que $\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ sea no nulo es necesario que la dimensión de $\mathbf{S}_{i\alpha}$ sea positiva para cada $2 \le i \le n$, porque si para algún i_0 fuese 0, $f_{i_0\alpha}$ sería un monomio. En consecuencia, la sumatoria (2.9) tiene una cantidad finita de términos no nulos.

Sea $\mathbf{q}$ un polinomio cuya no anulación asegura que un sistema de ecuaciones con soportes $\mathbf{S}_1,\ldots,\mathbf{S}_n$ tiene $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces simples, y sea

$$\mathbf{F} = \begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{cases}$$

un sistema tal que $\mathbf{q}(\mathbf{F}) \neq 0$ (con lo cual es genérico con $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ raíces aisladas). Consideremos el sistema

$$\mathbf{F}^t = \begin{cases} f_1^t(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{1}{t}.x_1^{r_1}\ldots x_n^{r_n} + f_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ f_2^t(x_1,\ldots,x_n) = f_2(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ f_n^t(x_1,\ldots,x_n) = f_n(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{cases},$$

donde $(r_1, \ldots, r_n) = r \in \mathbf{S}_1$ es el que fijamos inicialmente.
El sistema $\mathbf{F}^t$ tiene $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ ceros en $(\mathbb{C}(t)')^n$ sin coordenadas nulas: esto vale pues, si $b_0, \ldots, b_k$ son los coeficientes del sistema $\mathbf{F}$ (donde b_0 es el coeficiente en f_1 de $x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}$), los coeficientes de $\mathbf{F}^t$ serán $b_0 + \frac{1}{t}, \ldots, b_k$, y entonces

$$\mathbf{q}(\mathbf{F}^t) = \mathbf{q}(b_0 + \frac{1}{t}, \ldots, b_k) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{q}_i(b_0, \ldots, b_k)\frac{1}{t^i},$$

que es no nulo pues $\mathbf{q}_0(b_0, \ldots, b_k) = \mathbf{q}(b_0, \ldots, b_k) \neq 0$ por la elección del sistema $\mathbf{F}$.
Cada uno de estos ceros es un vector de series de Puiseux

$$\mathcal{X}_i(t) = (a_{i1}.t^{\beta_{i1}} + \mathrm{o}(t^{\beta_{i1}}), \ldots, a_{in}.t^{\beta_{in}} + \mathrm{o}(t^{\beta_{in}})) \tag{2.13}$$

con $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in (\mathbb{C}^*)^n$ y $\beta_i = (\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in}) \in \mathbb{Q}^n \ \forall\ 1 \leq i \leq \mathcal{L}(\mathfrak{S})$. Además, $\beta_i \neq 0$ para todo i. Si fuera $\beta_i = 0$, tendríamos que

$$0 = f_1^t(\mathcal{X}_i(t)) = \frac{1}{t}.a_{i1}^{r_1} \ldots a_{in}^{r_n} + f_1(a_{i1}, \ldots, a_{in}) + \mathrm{o}(t^{-1})$$

que, multiplicándolo por t, da lugar a la ecuación

$$0 = a_{i1}^{r_1} \ldots a_{in}^{r_n} + t.f_1(a_{i1}, \ldots, a_{in}) + \mathrm{o}(1).$$

Así, tendríamos que $a_{i1}^{r_1} \ldots a_{in}^{r_n} = 0$, lo que no puede ser porque $a \in (\mathbb{C}^*)^n$. Entonces, cada α_i debe ser no nulo.
Veamos ahora que, para cada dirección orientada α, la cantidad de vectores (2.13) con $\beta = \lambda.\alpha$ y $\lambda > 0$ es $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$. De esta manera, tendremos que vale la igualdad (2.9).
Haciendo un cambio de variables, podemos suponer que $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ y $m_\alpha(\mathbf{S}_i) = 0$. Luego, usando (2.12), para dicho α la altura h resulta $h = \dfrac{\langle r, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} = r_1$ y $h = \mathcal{H}_\alpha$; entonces $r = (\mathcal{H}_\alpha, r_2, \ldots, r_n)$.
Sea $\mathcal{X}(t) = a.t^\beta(1 + \mathrm{o}(1))$ un cero tal que $\beta = \lambda.\alpha$ y $\lambda > 0$. Entonces

$$\mathcal{X}(t) = (a_1.t^\lambda + \mathrm{o}(t^\lambda), a_2 + \mathrm{o}(1), \ldots, a_n + \mathrm{o}(1)).$$

Como para cada $2 \leq i \leq n$, $0 = f_i^t(\mathcal{X}(t)) = f_i(\mathcal{X}(t))$, esto implica que, para todo $2 \leq i \leq n$, vale que

$$0 = f_i(0, a_2, \ldots, a_n) = f_{i\alpha}(a_2, \ldots, a_n),$$

con lo que $a' = (a_2, \ldots, a_n)$ es raíz del sistema

$$\mathbf{F}'_\alpha = \begin{cases} f_{2\alpha}(x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_{n\alpha}(x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}.$$

Para cada uno de los finitos α con $\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S}) \neq 0$, sea q_α un polinomio cuya no anulación en los coeficientes de un sistema con soportes $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n$ asegura que el sistema $\mathbf{F}_\alpha$ no tiene soluciones en $(\mathbb{C}^*)^n$ (ver Proposición 2.5) y que el sistema $\mathbf{F}'_\alpha$ tiene $\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ soluciones simples (ver Proposición 2.6).

Si el sistema $\mathbf{F}$ elegido al principio de la demostración cumple que $(\mathbf{q}\prod_\alpha q_\alpha)(\mathbf{F}) \neq 0$, entonces

- $f_{1\alpha}(a') \neq 0$ (ver Proposición 2.5).
- $\mathbf{F}'_\alpha$ es genérico con $\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ raíces simples.

Ahora, evaluando f_1^t en $\mathcal{X}(t)$ tenemos que

$$0 = f_1^t(\mathcal{X}(t)) = t^{-1}.\mathcal{X}(t)^r + f_1(\mathcal{X}(t)) =$$

$$= f_1(\mathcal{X}(t)) + t^{-1}.(a_1 t^\lambda.(1+\mathrm{o}(1)))^{\mathcal{H}_\alpha}.(a_2+\mathrm{o}(1))^{r_2}\ldots(a_n+\mathrm{o}(1))^{r_n} =$$

$$= f_{1\alpha}(\mathcal{X}(t)) + (f_1 - f_{1\alpha})(\mathcal{X}(t)) + a_1^{\mathcal{H}_\alpha}.t^{\lambda\mathcal{H}_\alpha - 1}(1+\mathrm{o}(1)).(a_2^{r_2}+\mathrm{o}(1))\ldots(a_n^{r_n}+\mathrm{o}(1)) \quad (2.14)$$

y como $f_{1\alpha}$ no depende de la primera coordenada de $\mathcal{X}(t)$ $\big($o sea que podemos escribirlo como $f_{1\alpha}(\mathcal{X}(t)) = f_{1\alpha}(a') + \mathrm{o}(1)\big)$ y en $(f_1 - f_{1\alpha})$ toda potencia de x_1 es mayor que cero (o sea que todo término de $(f_1 - f_{1\alpha})(\mathcal{X}(t))$ tiene t^ξ con $\xi \geq \lambda$), la ecuación (2.14) implica que

$$0 = f_{1\alpha}(a') + \mathrm{o}(1) + t^{\lambda.\mathcal{H}_\alpha - 1}.a_1^{\mathcal{H}_\alpha}.a_2^{r_2}\ldots a_n^{r_n}(1+\mathrm{o}(1)).$$

Como $f_{1\alpha}(a')$ es una constante no nula, debe valer $\lambda.\mathcal{H}_\alpha - 1 = 0$ y $a_1^{\mathcal{H}_\alpha}a_2^{r_2}\ldots a_n^{r_n} = -f_{1\alpha}(a')$. Por lo tanto, si $\mathcal{H}_\alpha \neq 0$,

$$\lambda = \frac{1}{\mathcal{H}_\alpha}.$$

Notar que en el caso $\mathcal{H}_\alpha = 0$, no existe λ posible, es decir, no hay ceros con exponentes dados por esa dirección; pero al mismo tiempo $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S}) = 0$ con lo cual sigue valiendo que $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ cuenta la cantidad de ceros asociados a esa dirección orientada.

Si $\mathcal{H}_\alpha \neq 0$, para la dirección orientada α hay un único $\beta = \lambda.\alpha$ (con $\lambda > 0$) para el cual pueden existir raíces de la forma buscada. Para ese β la cantidad de términos iniciales posibles $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$, pues existen $\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ puntos $a' = (a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ distintos entre sí (que son las raices de $\mathbf{F}'_\alpha$), y, para cada uno de ellos, existen $\mathcal{H}_\alpha$ posibles (y diferentes) $a_1 \in \mathbb{C}^*$ soluciones de la ecuación

$$a_1^{\mathcal{H}_\alpha} = -\frac{f_{1\alpha}(a')}{a_2^{r_2}\ldots a_n^{r_n}}$$

pues $f_{1\alpha}(a') \neq 0$. Así, para que $\mathcal{X}(t) = (a_1.t^\lambda + \mathrm{o}(t^\lambda), a_2 + \mathrm{o}(1), \ldots, a_n + \mathrm{o}(1))$ sea una solución de $\mathbf{F}^t$, existen $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ posibles $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ distintos.

Veamos ahora que para cada uno de ellos existe exactamente una raíz $\mathcal{X}(t)$. Empezaremos haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} y_1 = x_1.t^{-\lambda} \\ y_2 = x_2 \\ \quad \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}.$$

Con este cambio,

$$t^{-1}.x^r = t^{-1}.(y_1.t^\lambda)^{\mathcal{H}_\alpha}.y_2^{r_2} \ldots y_n^{r_n} = y_1^{\mathcal{H}_\alpha}.y_2^{r_2} \ldots y_n^{r_n}.t^{\lambda.\mathcal{H}_\alpha - 1} = y_1^{\mathcal{H}_\alpha}.y_2^{r_2} \ldots y_n^{r_n}$$

y, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = f_i(y_1.t^\lambda, y_2, \ldots, y_n) = f_{i\alpha}(y_2, \ldots, y_n) + p_i^t(y_1, \ldots, y_n),$$

donde p_i^t es un polinomio cuyos coeficientes tienen potencias positivas de t^λ. Con la notación $y' = (y_2, \ldots, y_n)$, el sistema $\mathbf{F}^t$ queda:

$$\widetilde{\mathbf{F}}^t = \begin{cases} 0 = \widetilde{f}_1^t(y) = f_{1\alpha}(y') + p_1^t(y) + y_1^{\mathcal{H}_\alpha}.y_2^{r_2} \ldots y_n^{r_n} \\ 0 = \widetilde{f}_2^t(y) = f_{2\alpha}(y') + p_2^t(y) \\ \quad \vdots \\ 0 = \widetilde{f}_n^t(y) = f_{n\alpha}(y') + p_n^t(y) \end{cases}.$$

Tomando $t = 0$, queda el sistema

$$\mathbf{F}^0 = \begin{cases} 0 = f_{1\alpha}(y') + y_1^{\mathcal{H}_\alpha}.y_2^{r_2} \ldots y_n^{r_n} \\ 0 = f_{2\alpha}(y') \\ \quad \vdots \\ 0 = f_{n\alpha}(y') \end{cases}$$

que sabíamos tiene $\mathcal{H}_\alpha\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ soluciones distintas. Además, las raíces de $\mathbf{F}^0$ son simples pues, para cada (a_1, a') raíz, se tiene que $\mathcal{J}_{\mathbf{F}^0}(a_1, a') = \mathcal{H}_\alpha.a_1^{\mathcal{H}_\alpha - 1}.a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n}.\mathcal{J}_{\mathbf{F}'_\alpha}(a')$ donde $\mathcal{J}_{\mathbf{F}'_\alpha}(a')$ es el jacobiano de $f_{2\alpha}, \ldots, f_{n\alpha}$ en a'. Como a' es raíz simple de $\mathbf{F}'_\alpha$, por el Lema 2.7, $\mathcal{J}_{\mathbf{F}'_\alpha}(a') \neq 0$ y por lo tanto $\mathcal{J}_{\mathbf{F}^0}(a_1, a') \neq 0$. Luego, por el Lema 2.8 las raíces de $\mathbf{F}^0$ son simples.

Para terminar, veremos que cada una de estas raíces se extiende de forma única a una raíz de $\widetilde{\mathbf{F}}^t$ (y, en consecuencia, da lugar a una única raíz de $\mathbf{F}^t$). Para extenderlas, la

demostración de Bernstein usa el Teorema de la Función Implícita. Nosotros utilizaremos la versión de [10, Lema 3], que las extiende por medio del algoritmo de Newton-Hensel.

Tomando $s = t^\lambda$ y llamando $P_i^s(y)$ a los polinomios que se obtienen haciendo este cambio en los $p_i^t(y)$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$, el sistema $\widetilde{\mathbf{F}}^t$ queda

$$\begin{cases} 0 = f_{1\alpha}(y') + P_1^s(y) + y_1^{\mathcal{H}_\alpha}.y_2^{r_2}\dots y_n^{r_n} \\ 0 = f_{2\alpha}(y') + P_2^s(y) \\ \quad \vdots \\ 0 = f_{n\alpha}(y') + P_n^s(y) \end{cases}.$$

Observar que este sistema tiene coeficientes polinomiales en s. Además, al evaluar $s = 0$, se obtiene el sistema $\mathbf{F}^0$, que tiene $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ raíces en $(\mathbb{C}^*)^n$ y, para cada una de ellas, el jacobiano del sistema es no nulo. Por [10, Lema 3], para cada a raíz del sistema $\mathbf{F}^0$ existe una única n-upla $\mathcal{Y}^a(s)$ de series de potencias en $\mathbb{C}[[s]]^n = \mathbb{C}[[t^\lambda]]^n$, que satisface:

- $\mathcal{Y}^a(0) = a$
- $\widetilde{f}_i^t(\mathcal{Y}^a(t^\lambda)) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Entonces, para cada a raíz de $\mathbf{F}^0$, $\mathcal{X}^a(t) = (t^\lambda\mathcal{Y}_1^a(t^\lambda), \mathcal{Y}_2^a(t^\lambda), \dots, \mathcal{Y}_n^a(t^\lambda))$ es la única raíz del sistema $\mathbf{F}^t$ asociada. Por lo tanto, el sistema $\mathbf{F}^t$ tiene exactamente $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$ raíces asociadas a la dirección orientada α.

Como esto es cierto para cada dirección orientada α, resulta que $\mathcal{L}(\mathfrak{S}) = \sum \mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathfrak{S})$, donde la suma recorre todas las direcciones orientadas α, como queríamos ver. □

2.3. Algunos ejemplos

A partir de este momento nos dedicaremos al caso de sistemas de dos ecuaciones en dos variables. En esta sección vamos a ver, a través de algunos ejemplos, tanto de casos genéricos como no genéricos, el desarrollo de las demostraciones de los Teoremas 2.9 y 2.10.

2.3.1. El Teorema de Bernstein en un caso genérico

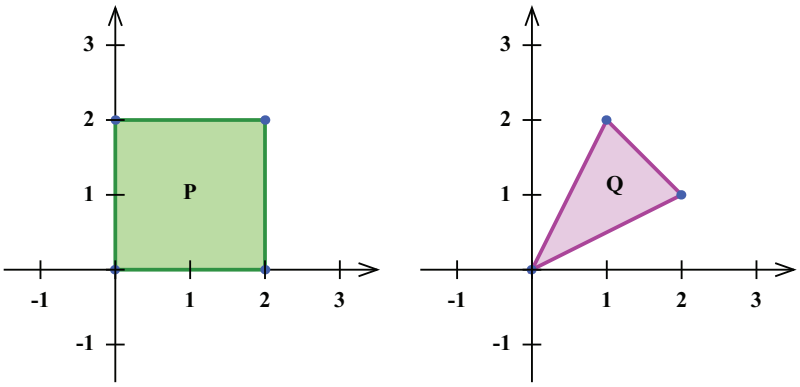
En nuestro primer ejemplo, analizaremos la demostración tomando un sistema genérico:

Ejemplo 2.12 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} f(x,y) = 1 + 2x.y^2 + 2x^2.y \\ g(x,y) = 1 - x^2 - y^2 + x^2.y^2 \end{cases}$$

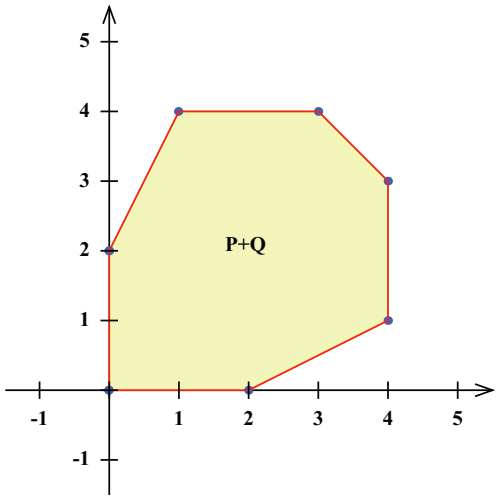
Los polítopos de Newton de estos polinomios son exactamente los del Ejemplo 1.13:

$$\begin{aligned} \mathcal{NP}(f) &= \mathcal{C}onv(\{(0,0);(1,2);(2,1)\}) = \mathbf{Q} \\ \mathcal{NP}(g) &= \mathcal{C}onv(\{(0,0);(0,2);(2,0);(2,2)\}) = \mathbf{P}. \end{aligned}$$



En dicho ejemplo calculamos que $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ es:

$$\mathbf{P}+\mathbf{Q} = \mathcal{C}onv(\{(0,0);(2,0);(4,1);(4,3);(3,4);(1,4);(0,2)\})$$



Al mismo tiempo, en el Ejemplo 1.16 hallamos que $\mathcal{MV}_2(\mathbf{Q},\mathbf{P}) = 8$.

Veamos siguiendo la demostración del Teorema 2.10, que estamos dentro del caso a).

Si las raíces del sistema no fueran aisladas, tendríamos una curva de raíces

$$\sigma(t) = \Big(\sum_{i=s}^{\infty} a_i t^{\frac{i}{m}}, \sum_{j=d}^{\infty} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big).$$

Luego, evaluando los polinomios en esta curva de raíces,

$$0 = f(\sigma(t)) = 1 + 2\big(\sum_{i=s}^{\infty} a_i t^{\frac{i}{m}}\big).\big(\sum_{j=d}^{\infty} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2 + 2\big(\sum_{i=s}^{\infty} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2.\big(\sum_{j=d}^{\infty} b_j t^{\frac{j}{n}}\big) = 1 + 2a_s b_d^2 t^{\frac{s}{m}+\frac{2d}{n}} +$$

$$+2a_s t^{\frac{s}{m}}\big[2b_d\big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{d+j}{n}}\big) + \big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2\big] + 2\big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i}{m}}\big).\big(\sum_{j\geq d} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2 + 2a_s^2 b_d t^{\frac{2s}{m}+\frac{d}{n}} +$$

$$+2b_d t^{\frac{d}{n}}\big[2a_s\big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{s+i}{m}}\big) + \big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2\big] + 2\big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{j}{n}}\big).\big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2 = f(a_s t^{\frac{s}{m}}, b_d t^{\frac{d}{n}}) +$$

$$+2t^{\frac{s}{m}+\frac{2d}{n}}\Big(a_s\big[2b_d\big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{j-d}{n}}\big) + \big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{j-d}{n}}\big)^2\big] + \big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\big).\big(\sum_{j\geq d} b_j t^{\frac{j-d}{n}}\big)^2\Big) +$$

$$+2t^{\frac{2s}{m}+\frac{d}{n}}\Big(b_d\big[2a_s\big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\big) + \big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\big)^2\big] + \big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{j-d}{n}}\big).\big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\big)^2\Big) =$$

$$= f(a_s t^{\frac{s}{m}}, b_d t^{\frac{d}{n}}) + 2t^{\frac{s}{m}+\frac{2d}{n}}.q_1(t) + 2t^{\frac{2s}{m}+\frac{d}{n}}.q_2(t)$$

donde q_1 y q_2 son series de Puiseux de orden positivo. De igual forma,

$$0 = g(\sigma(t)) = 1 - \big(\sum_{i=s}^{\infty} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2 - \big(\sum_{j=d}^{\infty} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2 + \big(\sum_{i=s}^{\infty} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2.\big(\sum_{j=d}^{\infty} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2 =$$

$$= 1 - a_s^2 t^{\frac{2s}{m}} - \big[\sum_{i>s} 2a_s a_i t^{\frac{i+s}{m}} + \big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2\big] - b_d^2 t^{\frac{2d}{m}} - \big[\sum_{j>d} 2b_d b_j t^{\frac{j+d}{n}} + \big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2\big] +$$

$$+a_s^2 b_d^2 t^{\frac{2s}{m}+\frac{2d}{n}} + a_s^2 t^{\frac{2s}{m}}.\big[\big(\sum_{j>d} 2b_d b_j t^{\frac{j+d}{n}}\big) + \big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2\big] +$$

$$+\big(\sum_{i>s} 2a_s a_i t^{\frac{i+s}{m}}\big).\big(\sum_{j\geq d} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2 + \big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2.\big(\sum_{j\geq d} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2 =$$

$$= g(a_s t^{\frac{s}{m}}, b_d t^{\frac{d}{n}}) + \Big(t^{\frac{2s}{m}+\frac{2d}{n}}.\big[a_s^2 b_d\big(\sum_{j>d} 2b_j t^{\frac{j-d}{n}}\big) + a_s^2\big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{j-d}{n}}\big)^2 +$$

$$+2a_s\big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\big).\big(\sum_{j\geq d} b_j t^{\frac{j-d}{n}}\big)^2 + \big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\big)^2.\big(\sum_{j\geq d} b_j t^{\frac{j-d}{n}}\big)^2\big] -$$

$$-t^{\frac{2s}{m}}.\big[2a_s\big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\big) + \big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\big)^2\big] - t^{\frac{2d}{n}}.\big[2b_d\big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{j-d}{n}}\big) + \big(\sum_{j>d} b_j t^{\frac{j-d}{n}}\big)^2\big]\Big) =$$

$$= g(a_s t^{\frac{s}{m}}, b_d t^{\frac{d}{n}}) + t^{\frac{2s}{m}+\frac{2d}{n}}.p_1(t) - t^{\frac{2s}{m}}.p_2(t) - t^{\frac{2d}{n}}.p_3(t),$$

donde p_1, p_2 y p_3 son series de Puiseux de orden positivo.
Tomando $\alpha = \left(\frac{s}{m}, \frac{d}{n}\right)$, tenemos que

$$m_\alpha(\mathbf{P}) = \text{mín}\left\{0, \frac{2s}{m}, \frac{2d}{n}, \frac{2s}{m}+\frac{2d}{n}\right\} \quad \text{y} \quad m_\alpha(\mathbf{Q}) = \text{mín}\left\{0, \frac{s}{m}+\frac{2d}{n}, \frac{2s}{m}+\frac{d}{n}\right\}.$$

Y como cada p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 es una serie con orden positivo, podemos re-escribir las igualdades anteriores como:

$$\begin{cases} 0 &= f(a_s t^{\frac{s}{m}}, b_d t^{\frac{d}{n}}) + 2t^{\frac{s}{m}+\frac{2d}{n}}.q_1(t) + 2t^{\frac{2s}{m}+\frac{d}{n}}.q_2(t) = \\ &= f_\alpha(a_s, b_d).t^{m_\alpha(\mathbf{Q})} + \Big[(f - f_\alpha)(a_s t^{\frac{s}{m}}, b_d t^{\frac{d}{n}}) + q(t)\Big] \\ 0 &= g(a_s t^{\frac{s}{m}}, b_d t^{\frac{d}{n}}) + t^{\frac{2s}{m}+\frac{2d}{n}}.p_1(t) - t^{\frac{2s}{m}}.p_2(t) - t^{\frac{2d}{n}}.p_3(t) = \\ &= g_\alpha(a_s, b_d).t^{m_\alpha(\mathbf{P})} + \Big[(g - g_\alpha)(a_r t^{\frac{r}{m}}, b_d t^{\frac{d}{n}}) + p(t)\Big] \end{cases}$$

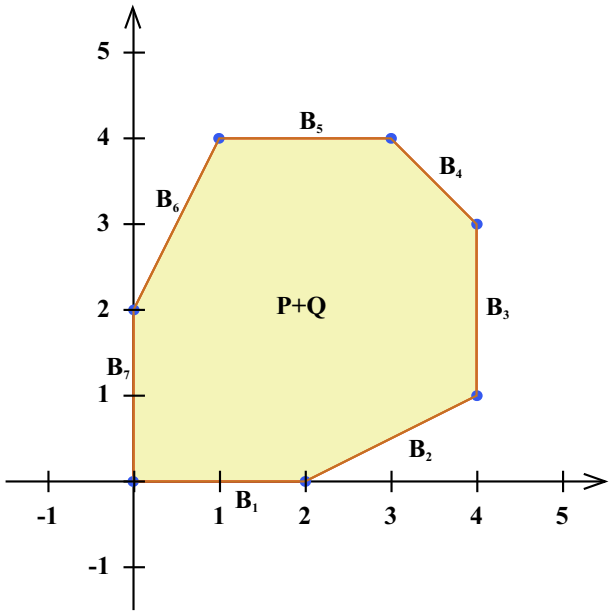
donde $q(t) = 2t^{\frac{s}{m}+\frac{2d}{n}}.q_1(t) + 2t^{\frac{2s}{m}+\frac{d}{n}}.q_2(t)$ y $p(t) = t^{\frac{2s}{m}+\frac{2d}{n}}.p_1(t) - t^{\frac{2s}{m}}.p_2(t) - t^{\frac{2d}{n}}.p_3(t)$, y el orden en t de $\big(f - f_\alpha\big)(a_s t^{\frac{s}{m}}, b_d t^{\frac{d}{n}}) + q(t)$ es mayor que $m_\alpha(\mathbf{Q})$, y el orden en t de $\big(g - g_\alpha\big)(a_s t^{\frac{s}{m}}, b_d t^{\frac{d}{n}}) + p(t)$ es mayor que $m_\alpha(\mathbf{P})$.

Finalmente, cada coeficiente de cada potencia de t debe ser nulo, y por lo tanto:

$$f_\alpha(a_s, b_d) = 0 \qquad \text{y} \qquad g_\alpha(a_s, b_d) = 0,$$

lo que nos daría una raíz $(a_s, b_d) \in (\mathbb{C}^*)^2$ del sistema $\mathbf{F}_\alpha = \begin{cases} f_\alpha(x, y) = 0 \\ g_\alpha(x, y) = 0 \end{cases}$.

Sin embargo, veremos ahora que los sistemas $\mathbf{F}_\alpha$ no tiene raíces en $\mathbb{C}^*$ para ningún $\alpha \neq 0$. Luego, las raíces deben de ser aisladas. Nos bastará chequearlo para un α normal interior de una cara de $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ para cada cara de dimensión mayor a cero (pues en los casos de dimensión cero f_α y g_α resultan ser monomios, y por lo tanto no tienen soluciones en $(\mathbb{C}^*)^2$). Si llamamos $B_1, \ldots, B_7$ a los lados (facetas) de $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ como en la siguiente figura:



entonces

$$\begin{array}{llllllll} \alpha_{B_1} & = & (0,1) & \alpha_{B_2} & = & (-1,2) & \alpha_{B_3} & = & (-1,0) \\ \alpha_{B_4} & = & (-1,-1) & \alpha_{B_5} & = & (0,-1) & \alpha_{B_6} & = & (2,-1) & \alpha_{B_7} & = & (1,0). \end{array}$$

Si ahora consideramos cada $\mathbf{F}_{\alpha_{B_i}}$ nos encontramos con que $f_{\alpha_{B_1}} = 1$, $g_{\alpha_{B_2}} = -x^2$, $f_{\alpha_{B_3}} = 2x^2.y$, $g_{\alpha_{B_4}} = x^2.y^2$, $f_{\alpha_{B_5}} = 2x.y^2$, $g_{\alpha_{B_6}} = -y^2$ y $f_{\alpha_{B_7}} = 1$, con lo que $\mathbf{F}_{\alpha_{B_i}}$ no tiene raíces en $(\mathbb{C}^*)^2$ para todo $1 \leq i \leq 7$.

Luego, para todo α tenemos que $\mathbf{F}_\alpha$ no tiene raíces en $(\mathbb{C}^*)^2$ y por lo tanto, estamos dentro de las hipótesis de la parte *a)* del Teorema 2.10.

Si las raíces fueran menos que $\mathcal{L}(\mathfrak{S}) = 8$, tomamos $p, q \in \mathbb{C}[x,y]$ de la siguiente manera: $p(x,y) = (x^2-4)(y^2+4)$, $q(x,y) = 1 + 5xy^2 + 5x^2y$, que tienen 8 raíces en común, y consideremos ahora

$$\mathbf{F}^t = \begin{cases} (1-t).f + t.q = 0 \\ (1-t).g + t.p = 0 \end{cases}.$$

Como para $t = 1$ el sistema tiene 8 raíces, para casi todo t las tiene. Así, el sistema $\mathbf{F}^t$ tiene 8 raíces en $(\mathbb{C}(t)')^2$ de la forma:

$$\sigma_j(t) = \left(\sum_{i \geq s_j} a_{i,j} t^{\frac{i}{m_j}}, \sum_{i \geq d_j} b_{i,j} t^{\frac{i}{n_j}} \right) \quad \text{para } 1 \leq i \leq 8.$$

Luego, si $\alpha = (\frac{s_j}{m_j}, \frac{d_j}{n_j}) \neq 0$ para algún j, $\begin{cases} f(\sigma_j(t)) + t.\big((q-f)(\sigma_j(t))\big) = 0 \\ g(\sigma_j(t)) + t.\big((p-g)(\sigma_j(t))\big) = 0 \end{cases}$ con lo cual

$$\begin{cases} 0 = f_\alpha(\sigma_j(t)) + \underbrace{(f-f_\alpha)(\sigma_j(t)) + t.\Big[(q-f)(\sigma_j(t))\Big]}_{\text{orden en t mayor que } m_\alpha(\mathbf{Q})} \\ 0 = g_\alpha(\sigma_j(t)) + \underbrace{(g-g_\alpha)(\sigma_j(t))}_{\text{orden en t mayor que } m_\alpha(\mathbf{P})} + \underbrace{t.\Big[(p-g)(\sigma_j(t))\Big]}_{\text{orden en t mayor o igual que } m_\alpha(\mathbf{P})+1} \end{cases}$$

Como cada coeficiente de cada potencia de t es nulo,

$$\begin{cases} f_\alpha(a_s, b_d) = 0 \\ g_\alpha(a_s, b_d) = 0 \end{cases}$$

que es un absurdo pues $\mathbf{F}_\alpha$ no tiene raíces en $(\mathbb{C}^*)^2$. Luego, debe valer que $s_j = d_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq 8$. Pero como para cada $1 \leq j \leq 8$, tenemos que

$$\begin{cases} 0 = (1-0).f(\sigma_j(0)) + 0.q(\sigma_j(0)) = f(a_{0,j}, b_{0,j}) \\ 0 = (1-0).g(\sigma_j(0)) + 0.p(\sigma_j(0)) = g(a_{0,j}, b_{0,j}) \end{cases}$$

los puntos $\sigma_j(0) = (a_{0,j}, b_{0,j}) \in (\mathbb{C}^*)^2$ con $1 \leq j \leq 8$ dan 8 raíces del sistema $\mathbf{F}$ contadas con multiplicidad. Esto es un absurdo, pues supusimos $\mathcal{L}(\mathbf{F}) < 8$.

Finalmente, las raíces del sistema $\mathbf{F}$ contadas con su multiplicidad son exactamente 8. En efecto, las soluciones del sistema $\mathbf{F} = \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ son todas distintas:

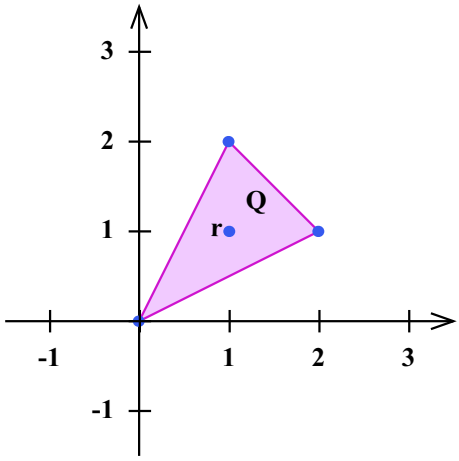
$$\{(1, \frac{-1+i}{2}); (1, \frac{-1-i}{2}); (\frac{-1+i}{2}, 1); (\frac{-1-i}{2}, 1);$$

$$(-1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}); (-1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}); (\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, -1); (\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, -1)\}.$$

Vemos que son exactamente 8, y cada una de ellas de multiplicidad 1.

Veamos ahora la demostración de la igualdad $\mathcal{L}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \sum_\alpha \mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ del Teorema 2.9, donde $\mathbf{S}_1 = \text{sop}(f)$ y $\mathbf{S}_2 = \text{sop}(g)$.

Tomamos $r = (1,1)$. Es importante notar que si bien r no está en el soporte de f, como pedíamos en la prueba del Teorema 2.9, sí pertenece a $\mathbf{Q} = \mathcal{C}onv(\text{sop}(f))$, que es en realidad todo lo que se usa en dicha demostración.



Sea

$$\mathbf{F}^t = \begin{cases} 0 = f^t(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{t}.x.y = 1 + \frac{1}{t}.xy + 2.x.y^2 + 2.x^2.y \\ 0 = g^t(x,y) = g(x,y) = 1 - x^2 - y^2 + x^2.y^2 \end{cases}.$$

Las únicas direcciones α para las cuales $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) > 0$ son aquéllas que definen facetas de $\mathbf{P}$ (pues de lo contrario $\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \mathcal{L}(g_\alpha) = 0$).

Siendo los ceros de $\mathbf{F}^t$ de la forma $\sigma(t) = \left(\sum_{i \geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}, \sum_{j \geq d} b_j t^{\frac{j}{n}}\right)$, veamos cuántos hay en cada dirección:

Para $\alpha = (1,0) = \alpha_{B_7}$, tenemos que $m_\alpha(\mathbf{P}) = m_\alpha(\mathbf{Q}) = m_\alpha(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) = 0$. Si $\sigma(t)$ es un vector de series de Puiseux en esa dirección, $\left(\frac{s}{m}, \frac{d}{n}\right) = \lambda.(1,0)$ con $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$. Luego, $d = 0$ y $\frac{s}{m} \in \mathbb{Q}_{>0}$. Haciendo t tender a cero,

$$0 = g_\alpha^t\big(\sigma(0)\big) = g_\alpha(0, b_0) = 1 - b_0^2.$$

Por lo tanto, existen dos posibles b_0, $b_0 = 1$ o $b_0 = -1$, y son raíces simples de $g_\alpha(0, b_0)$. Esto concuerda con que $\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \mathcal{L}(\mathbf{S}_{2\alpha}) = \mathcal{V}ol_1(\overline{(0,0);(0,2)}) = 2$.
Además, $f_\alpha(0, b_0) = 1 \neq 0$ y

$$0 = f^t\big(\sigma(t)\big) = 1 + \frac{1}{t}.\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big).\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big) + 2.\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big).\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)^2 +$$

$$+2.\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big)^2.\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big) = 1 + t^{\frac{s}{m}-1}.a_s b_0 + \frac{1}{t}.\Big[\Big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big).b_0 + \Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big).\Big(\sum_{j>0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)\Big] +$$

$$+2.\Big[\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big).\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)^2 + \Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big)^2.\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)\Big] = 1 + t^{\frac{s}{m}-1}.a_s b_0(1 + \mathrm{o}(1)).$$

Luego, cada coeficiente de cada potencia de t es nulo, y como $a_s \neq 0$ y $b_0 \neq 0$, $a_s.b_0 \neq 0$. Por lo tanto, $t^{\frac{s}{m}-1}.a_s b_0$ debe anularse con el término 1. Entonces, $\frac{s}{m} = 1$, $a_s = \frac{-1}{b_0}$ y $(a_s, b_0) = (-1, 1)$ o $(a_s, b_0) = (1, -1)$. Veamos que para cada uno de estos posibles (a_s, b_0) tenemos un único vector de series de Puiseux, y por lo tanto existen dos en esa dirección (que es justo el valor de $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ para ese α, pues $\mathcal{H}_\alpha = 1$).

Con el cambio de variables $\begin{cases} v = \dfrac{x}{t} \\ w = y \end{cases}$, el sistema $\mathbf{F}^t$ queda

$$\begin{cases} 0 = f^t(tv, w) + \dfrac{1}{t}.tv.w = 1 + v.w + 2t.v.w^2 + 2t^2.v^2.w \\ 0 = g^t(tv, w) = 1 - t^2.v^2 - w^2 + t^2.v^2.w^2 \end{cases}.$$

Y evaluando $t = 0$ tenemos que $\begin{cases} 0 = 1 + v.w \\ 0 = 1 - w^2 \end{cases}$ con lo cual $w = 1$ o $w = -1$, y $v = \dfrac{-1}{w}$.
Así, tenemos 2 raíces simples que se extienden (por [10, Lema 3]) de forma única a dos vectores de series de Puiseux de dirección orientada α.

Para $\alpha = (0,1) = \alpha_{B_1}$, haciendo el cambio de variables inducido por el automorfismo $\varphi_1(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ (es decir $x \leftrightarrow y$) volvemos al caso anterior, con lo cual

$\mathcal{H}_{\alpha_{B_1}}.\mathcal{L}_{\alpha_{B_1}}(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2) = \mathcal{H}_{\alpha_{B_7}}.\mathcal{L}_{\alpha_{B_7}}(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2) = 2$. De la misma forma, si analizamos el caso $(-1,0) = \alpha_{B_3}$, entonces el caso $\alpha_{B_5} = (0,-1)$ sale de ese mismo cambio de variables y $\mathcal{H}_{\alpha_{B_3}}.\mathcal{L}_{\alpha_{B_3}}(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2) = \mathcal{H}_{\alpha_{B_5}}.\mathcal{L}_{\alpha_{B_5}}(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2)$.

Para $\alpha = \alpha_{B_3}$ tenemos que $m_\alpha(\mathbf{P}) = -2 = m_\alpha(\mathbf{Q})$ y $m_\alpha(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) = -4$.

Sea nuevamente $\sigma(t) = \Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}, \sum_{j\geq d} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)$; veamos ahora cuántos ceros de esta forma hay con $\Big(\frac{s}{m},\frac{d}{n}\Big) = \lambda.\big(-1,0\big)$ con $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ y por lo tanto, $-\frac{s}{m} \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\frac{d}{n} = 0$.

Con $\alpha = \alpha_{B_3}$, vale que $e = (-1,0), \mathcal{H}_\alpha = \dfrac{<\alpha,(1,1)> - m_\alpha(\mathbf{Q})}{<\alpha,e>} = <\alpha,(1,1)> - m_\alpha(\mathbf{Q}) = -1-(-2) = 1$ y $\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2) = \mathcal{L}(\mathbf{S}_{2\alpha}) = \mathcal{V}ol_1(\overline{((2,0);(2,2))}) = 2$. Así, $\mathcal{H}_{\alpha_{B_3}}.\mathcal{L}_{\alpha_{B_3}}(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2) = 2$. Veamos que realmente podemos conseguir exactamente dos ceros asociados a esta dirección orientada:

$$0 = g^t\big(\sigma(t)\big) = 1 - \Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big)^2 - \Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)^2 + \Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big)^2\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)^2 =$$

$$= t^{\frac{2s}{m}}.\Big[t^{-\frac{2s}{m}} - \Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\Big)^2 - \Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}-\frac{s}{m}}\Big)^2 + \Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\Big)^2\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)^2\Big]$$

con lo cual, multiplicando por $t^{-\frac{2s}{m}}$,

$$0 = t^{-\frac{2s}{m}} - \Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\Big)^2 - \Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}-\frac{s}{m}}\Big)^2 + \Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\Big)^2\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)^2$$

y reemplazando en $t = 0$,

$$0 = -a_s^2 + a_s^2.b_0^2.$$

Por lo tanto, tenemos que $0 = -a_s^2\big(1-b_0^2\big)$ y como a_s es no nulo, $b_0 = 1$ o $b_0 = -1$ (dos posibles b_0, raíces simples de g_α).

Ahora, evaluamos f^t en $\sigma(t)$:

$$0 = f^t\big(\sigma(t)\big) = 1 + \frac{1}{t}\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big) + 2\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)^2 +$$

$$+2\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big)^2\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big) = t^{\frac{2s}{m}}\Big[t^{\frac{-2s}{m}} + t^{-\frac{s}{m}-1}\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big) +$$

$$+2t^{\frac{-s}{m}}\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)^2 + 2\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\Big)^2\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)\Big] = t^{\frac{2s}{m}}\Bigg(t^{\frac{-s}{m}-1}a_s.b_0 + 2a_s^2.b_0 +$$

$$+t^{-\frac{s}{m}-1}\Big[\Big(\sum_{i>s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big) + a_s\Big(\sum_{j>0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)\Big] + 2\Big[\Big(\sum_{i\geq s} a_i t^{\frac{i-s}{m}}\Big)^2\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big) - a_s^2.b_0\Big] +$$

$$+t^{\frac{-2s}{m}}+2t^{\frac{-s}{m}}\Big(\sum_{i\geq s}a_it^{\frac{i-s}{m}}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0}b_jt^{\frac{j}{n}}\Big)^2\Big)=t^{\frac{2s}{m}}\Big[t^{-\frac{s}{m}-1}(a_s.b_0+\mathrm{o}(1))+2a_s^2.b_0+\mathrm{o}(1)\Big].$$

Por lo tanto, debe valer que $-\dfrac{s}{m}-1=0$ y $0=a_s.b_0+2a_s^2.b_0=a_s^2.b_0(1+2a_s)$ (es decir $\Big(\dfrac{s}{m},\dfrac{d}{n}\Big)=\big(-1,0\big)$) y como $b_0=\pm 1$, luego $a_s=\dfrac{-1}{2}$ y tenemos que $\big(a_s,b_0\big)=\big(-\dfrac{1}{2},1\big)$ o $\big(a_s,b_0\big)=\big(-\dfrac{1}{2},-1\big)$.

Sólo nos queda ver que para cada $\big(a_s,b_0\big)$ existe un único cero de la forma $\sigma(t)$ en esa dirección. Con el cambio de variables $\begin{cases}v=xt\\w=y\end{cases}$ y multiplicando por t^2, el sistema queda:

$$\begin{cases}0=t^2+vw+2tvw^2+2v^2w\\0=t^2-v^2-t^2w^2+v^2w^2\end{cases}.$$

Tomando $t=0$ tenemos

$$\begin{cases}0=vw+2v^2w=vw(1+2v)\\0=-v^2+v^2w^2=-v^2(1-w^2)\end{cases}$$

el cual tiene soluciones no nulas $v=\dfrac{-1}{2}$, $w=\pm 1$. Esto nos da dos soluciones simples, que se extienden de forma única por medio del algoritmo de Newton-Hensel (como en [10, Lema 3]) a dos ceros en $(\mathbb{C}(t)')^2$ del sistema $\mathbf{F}^t$ con la dirección orientada α_{B_3}.

Finalmente, sumándo la cantidad de soluciones correspondientes a cada dirección orientada, existen en total 8 soluciones de $\mathbf{F}^t$.

Notar que también podríamos analizar este último caso haciendo el cambio de variables dado por el automorfismo $\varphi(x_1,x_2)=(-x_1+2,x_2)$ con el cual el sistema quedaría:

$$\begin{cases}\widetilde{f}(x,y)^t=x^2+\dfrac{1}{t}x.y+2y+2x.y^2\\\widetilde{g}(x,y)^t=x^2-1-x^2.y^2+y^2\end{cases}$$

con $\varphi(1,1)=(1,1)$, $m_{(1,0)}(\mathbf{Q})=m_{(1,0)}(\mathbf{P})=0$ y la dirección orientada sería $(1,0)$.

2.3.2. Sistemas no genéricos

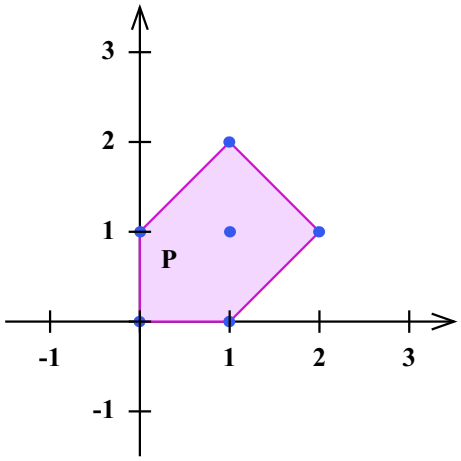
A continuación analizaremos dos ejemplos no genéricos.

Ejemplo 2.13 Consideremos el sistema

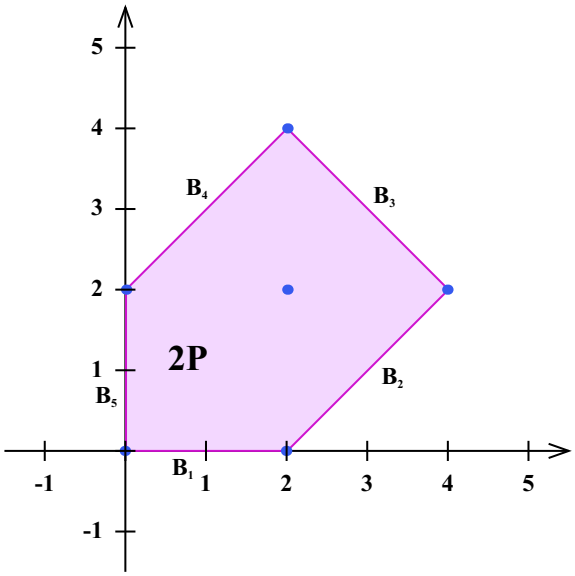
$$\begin{cases} f(x,y) = (y-1) + 2(y-1)^2.x - y.x^2 = 0 \\ g(x,y) = 2(y-1) + (y-1)^2.x - y.x^2 = 0 \end{cases}$$

Observamos que $\text{sop}(f) = \text{sop}(g) = \mathbf{S} = \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,1),(1,2),(1,1)\}$.

Como $(g-f)(x,y) = (y-1)(1-(y-1)x)$ y $f(x,1) = -x^2$, las soluciones en $(\mathbb{C}^*)^2$ serán de la forma $\left(\frac{1}{y-1}, y\right)$ donde y es solución de $3(y-1)^3 - y = 0$. Luego, existen exactamente 3 soluciones del sistema en $(\mathbb{C}^*)^2$ y son simples, pues el jacobiano en $\left(\frac{1}{y-1}, y\right)$ no tiene raíces en común con $3(y-1)^3 - y$. Esto nos dice que este sistema no es genérico, pues $\mathcal{NP}(f) = \mathcal{NP}(g) = \mathbf{P}$ con $\mathcal{V}ol_2(\mathbf{P}) = \frac{5}{2}$ y por lo tanto $\mathcal{MV}_2(\mathbf{P},\mathbf{P}) = 2.\mathcal{V}ol_2(\mathbf{P}) = 5$.



Veamos que estamos en el caso *b)* del Teorema 2.10. Llamando B_i a las facetas de $2\mathbf{P}$ y α_{B_i} sus respectivas normales interiores primitivas como en el siguiente gráfico



se puede calcular:

$$\begin{array}{llll} \alpha_{B_1} = (0,1) & \alpha_{B_2} = (-1,1) & & \\ \alpha_{B_3} = (-1,-1) & \alpha_{B_4} = (1,-1) & \alpha_{B_5} = (1,0). \end{array}$$

El único de los sistemas $\mathbf{F}_\alpha$ que tiene raíces en $(\mathbb{C}^*)^2$ es

$$\mathbf{F}_{\alpha_{B_5}} = \begin{cases} f_{\alpha_{B_5}}(x,y) = y - 1 = 0 \\ g_{\alpha_{B_5}}(x,y) = 2(y-1) = 0 \end{cases}.$$

Así, estamos dentro de las hipótesis de la parte *b)* del Teorema. Para facilitar la notación, a partir de ahora escribiremos $\alpha = \alpha_{B_5} = (1,0)$.

Sea

$$\mathbf{H} = \begin{cases} p(x,y) = 1 + x + y - 2x^2.y - x.y^2 = 0 \\ q(x,y) = -2 + x + y - x^2.y + x.y^2 = 0 \end{cases}.$$

Este sistema tiene 5 raíces distintas de la forma $\left(\dfrac{5-y}{1+3y^2}, y\right)$ donde y es raíz de $(y-1)(6y^4+3y^3+4y^2+22y-3)$.

Tomando $a' = (0,1)$, $b = (1,1)$ y $z(t) = (t,1)$ para todo $t \in [0,1]$, vale que a' es solución de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}_\alpha$ pero no de $\mathbf{H}$ y b lo es de $\mathbf{H}$ pero no de $\mathbf{F}$. Tomando el nuevo sistema

$$\mathbf{F}^t = \begin{cases} 0 = f^t(x,y) = f(x,y).p(z(t)) - f(z(t)).p(x,y) = \\ \quad = (3t^2-2) - (3t^2-4).x - (t^2-2).y + 8(t^2-1).x.y - (5t^2-4).x.y^2 - 2.x^2.y \\ 0 = g^t(x,y) = g(x,y).q(z(t)) - g(z(t)).q(x,y) = -2(2t-1) + (2t-1).x - \\ \quad -(t^2-4t+2).y + 2(t-1)^2.x.y + (2t-1)x.y^2 - (2t-1)x^2.y \end{cases}$$

se tiene que, con $t = 1$, $\mathbf{F}^1 = \mathbf{H}$, y por lo tanto, $\mathbf{F}^t$ tiene 5 raíces para casi todo t. Notar que $z(t)$ es raíz de $\mathbf{F}^t$ para todo t. Haciendo $t = 0$, resulta el sistema $\mathbf{F}^0 = \begin{cases} 2.f(x,y) \\ -g(x,y) \end{cases}$, que es equivalente a $\mathbf{F}$. Como las raíces de $\mathbf{F}^t$ convergen a las raíces de $\mathbf{F}^0$, las raíces de $\mathbf{F}$ son a lo sumo 5. Finalmente, $z(0) = (0,1) \notin (\mathbb{C}^*)^2$ con lo cual la cantidad de raíces de $\mathbf{F}$ es estrictamente menor a 5.

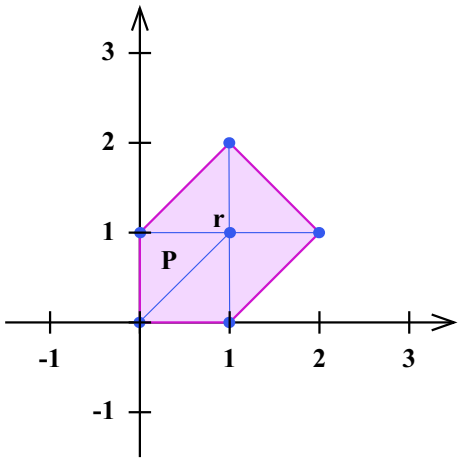
A continuación veremos cómo influye el hecho de que el sistema $\mathbf{F}$ tenga menos raíces aisladas que un sistema genérico con los mismos soportes en la cantidad de raíces del sistema que da la deformación en el Teorema 2.9.

La cantidad de vectores de series de Puiseux que consigamos depende entre otras cosas de donde elijamos el punto r. Como el único de los sistemas $\mathbf{F}_\alpha$ que tiene raíces en $(\mathbb{C}^*)^2$ es el correspondiente a α_{B_5}, si ubicamos el punto r sobre la faceta que tiene a α_{B_5} como normal interior, $\mathcal{H}_{\alpha_{B_5}} = 0$ con lo cual

$$\sum_{\alpha} \mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S},\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{4} \mathcal{H}_{\alpha_{B_i}}.\mathcal{L}_{\alpha_{B_i}}(\mathbf{S},\mathbf{S}),$$

donde la suma del término izquierdo es sobre todas las direcciones orientadas α. De esta forma, con r sobre la faceta B_5, la cantidad de soluciones de $\mathbf{F}^t$ es 5. Si en cambio, tomamos $r = (1,1)$:

$$\mathbf{F}^t = \begin{cases} 0 = \ f^t(x,y) = -1 + 2x + y + (\dfrac{1}{t} - 4)x.y + 2x.y^2 - x^2.y \\ 0 = \ g^t(x,y) = -2 + x + 2y - 2x.y + x.y^2 - x^2.y \end{cases}.$$



Con $\alpha = (1,0) = \alpha_{B_5}$ vale que $\mathcal{H}_\alpha = 1$. Si tomamos $\sigma(t) = \Big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}, \sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)$ con dirección orientada α (con $a_d, b_0 \neq 0,\ d, m, n > 0$) vale que

$$0 = g^t\big(\sigma(t)\big) = -2 + \big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big) + 2\big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\big) - 2\big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big).\big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\big) +$$

$$\big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big).\big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2 - \big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2.\big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)$$

y reemplazando en $t = 0$ tenemos que

$$0 = g\big(\sigma(0)\big) = -2 + 2b_0.$$

Luego, $2(-1 + b_0) = 0$, o sea $b_0 = 1$. Pero, además $f_\alpha(1) = g_\alpha(1) = 0$ y $0 = f^t\big(\sigma(t)\big)$ con lo cual vale

$$0 = \Big(2f^t - g^t\Big)\big(\sigma(t)\big) = 3\big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big) + \big(\frac{2}{t} - 6\big)\big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)\big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\big) +$$

$$+3\big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)\big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)^2 - \big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2\big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\big) = 2a_d t^{\frac{d}{m}-1}.b_0 + \mathrm{o}(t^{\frac{d}{m}-1}).$$

Por lo tanto, $2a_d b_0 = 2a_d = 0$ lo cual es un absurdo. Luego, no existe cero asociado a esta dirección orientada. Como $\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S},\mathbf{S}) = \mathcal{L}(\mathbf{S}_\alpha) = \mathcal{V}ol_1(\overline{(0,0);(0,1)} = 1$, se tiene que $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S},\mathbf{S}) = 1$ con lo cual tenemos una raíz menos que en el caso genérico.

Para las otras 4 direcciones orientadas, se puede ver que en efecto estamos bajo las condiciones del teorema, que en cada uno de los casos $\mathcal{H}_{\alpha_{B_i}}.\mathcal{L}_{\alpha_{B_i}}(\mathbf{S},\mathbf{S}) = 1$ y el único vector de series de Puiseux asociado a la dirección α_{B_i} existe.

Para $(0,1) = \alpha_{B_1}$, usando el cambio de variables $\begin{cases} x = y \\ y = x \end{cases}$ inducido por el isomorfismo $\varphi_1(x_1,x_2) = (x_2,x_1);\ \varphi_1(r) = r$, la dirección orientada queda $\alpha = (1,0)$ y

$$\widetilde{\mathbf{F}_1^t} = \begin{cases} 0 = \ \widetilde{f}_1^t(x,y) = -1 + x + 2y + (t^{-1} - 4)x.y - x.y^2 + 2x^2.y \\ 0 = \ \widetilde{g}_1^t(x,y) = -2 + 2x + y - 2x.y - x.y^2 + x^2.y \end{cases}.$$

Aquí, $\varphi_1(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$; con lo cual $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S},\mathbf{S}) = 1$. Pero si $\sigma(t) = \Big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}, \sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)$ es raíz del sistema $\widetilde{\mathbf{F}_1^t}$, con $a_d, b_0 \neq 0$ y $d, m, n > 0$, entonces para $t = 0$

$$0 = \widetilde{g}_1^0\big(\sigma(0)\big) = \widetilde{g}_1\big(\sigma(0)\big) = -2 + b_0.$$

Entonces, tenemos que $b_0 = 2$. Además $a_d = -\frac{3}{2}$ y $\frac{d}{m} = 1$ pues

$$0 = \widetilde{f}_1^t\Big(\sigma(t)\Big) = -1 + 2.b_0 + \frac{1}{t}.a_d t^{\frac{d}{m}}.b_0 + \mathrm{o}(t^{\frac{d}{m}-1}) = 3 + 2a_d t^{\frac{d}{m}-1} + \mathrm{o}(t^{\frac{d}{m}-1}).$$

Para ver que con $(a_d, b_0) = \big(-\frac{3}{2}, 2\big)$ existe un único cero, usamos el cambio de variables $\begin{cases} x = tv \\ y = w \end{cases}$. El sistema queda entonces

$$\begin{cases} 0 = -1 + tv + 2w + vw - 4tvw + 2t^2v^2w - tvw^2 \\ 0 = -2 + 2tv + w - 2tvw + t^2v^2w - tvw^2 \end{cases}$$

que con $t = 0$ da lugar a $\begin{cases} 0 = -1 + 2w + vw \\ 0 = -2 + w \end{cases}$ cuya única raíz simple es $(v, w) = \big(-\frac{3}{2}, 2\big)$. Por lo tanto, esta única raíz se extiende usando [10, Lema 3] a una única solución $\sigma(t) = \Big(-\frac{3}{2}t(1 + \mathrm{o}(1)), 2(1 + \mathrm{o}(1))\Big)$ de $\widetilde{\mathbf{F}_1^t}$. Luego, el único cero de $\mathbf{F}^t$ con dirección orientada α_{B_1} es

$$\omega_1(t) = \Big(2(1 + \mathrm{o}(1)), -\frac{3}{2}t(1 + \mathrm{o}(1))\Big).$$

De la misma forma, usaremos para $\alpha_{B_2}, \alpha_{B_3}, \alpha_{B_4}$ respectivamente los cambios de variables inducidos por

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_1, x_2) &= (-x_1 + x_2 + 1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_3(x_1, x_2) &= (-x_1 - x_2 + 3, -x_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \\ \varphi_4(x_1, x_2) &= (x_1 - x_2 + 1, -x_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

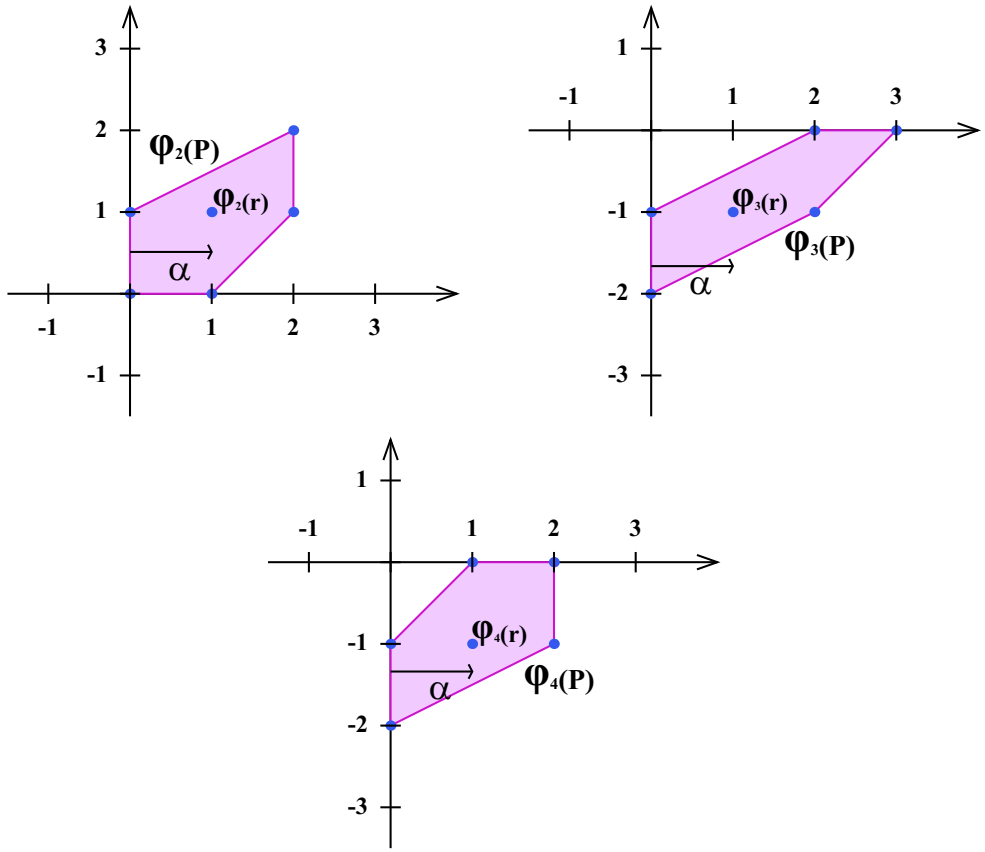
donde cada una de estas tres matrices $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ se construyen como en el Lema 2.3, y por cómo las elegimos cumplen que

$$\begin{aligned} \alpha_{B_2}.\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= (-1, 1).\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0) = \alpha, \\ \alpha_{B_3}.\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} &= (-1, -1).\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1, 0) \quad \text{y} \\ \alpha_{B_4}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} &= (1, -1).\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1, 0). \end{aligned}$$

Podemos observar también gráficamente que estos cambios de variables nos sirven, pues para el caso de α_{B_2} (α_{B_3} y α_{B_4} se ven de la misma manera), ésta es la normal de la faceta

definida por los puntos $(1,0)$ y $(2,1)$. Luego del cambio de variables, como $\varphi_2(1,0) = (0,0)$ y $\varphi_2(2,1) = (0,1)$, la normal interior primitiva de la faceta determinada por $\varphi_2(1,0)$ y $\varphi_2(2,1)$ es $(1,0)$.

Con estos cambios de variables tenemos que $\varphi_2(r) = (1,1)$, $\varphi_3(r) = \varphi_4(r) = (1,-1)$, y para todo $2 \leq i \leq 4$, $m_{(1,0)}(\varphi_i(\mathbf{P})) = 0$ y $\varphi_i(\mathbf{P})$ es:



En cada caso, entonces, podemos usar la dirección orientada $\alpha = (1,0)$ y los nuevos sistemas son:

$$\widetilde{\mathbf{F}_2}^t = \begin{cases} 0 = \widetilde{f_2}^t(x,y) = -x + 2 + x^2y + (\frac{1}{t} - 4)xy + 2x^2y^2 - y \\ 0 = \widetilde{g_2}^t(x,y) = -2x + 1 + 2x^2y - 2xy + x^2y^2 - y \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathbf{F}_3}^t = \begin{cases} 0 = \widetilde{f_3}^t(x,y) = -x^3 + 2x^2 + \frac{x^2}{y} + (\frac{1}{t} - 4)\frac{x}{y} - \frac{1}{y} + \frac{2}{y^2} \\ 0 = \widetilde{g_3}^t(x,y) = -2x^3 + x^2 + 2\frac{x^2}{y} - 2\frac{x}{y} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathbf{F}_4}^t = \begin{cases} 0 = \widetilde{f_4}^t(x,y) = -x + 2x^2 + \frac{1}{y} + (\frac{1}{t} - 4)\frac{x}{y} + \frac{2}{y^2} - \frac{x^2}{y} \\ 0 = \widetilde{g_4}^t(x,y) = -2x + x^2 + \frac{2}{y} - 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{x^2}{y} \end{cases}.$$

En el caso de $\widetilde{\mathbf{F}_3}^t$ (y de igual forma para $\widetilde{\mathbf{F}_4}^t$), dada $\sigma(t) = \big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}, \sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)$, cuando evaluemos $\widetilde{g}_3^t$ en $\sigma(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \widetilde{g}_3^t(\sigma(t)) &= -2(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}})^3 + (\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}})^2 + 2\frac{(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}})^2}{\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}} - \\ &- 2\frac{\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}}{\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}} - \frac{1}{\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}} + \frac{1}{(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}})^2}. \end{aligned}$$

Sabemos que, por [17, Capítulo 4, Teorema (1.1)] y como $b_0 \neq 0$, existe una serie de Puiseux $\sum_{k\geq 0} c_k t^{\frac{k}{n}}$ tal que $(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}).(\sum_{k\geq 0} c_k t^{\frac{k}{n}}) = 1$ y $c_0 = \frac{1}{b_0}$. Luego

$$\begin{aligned} 0 = \widetilde{g}_3(\sigma(t)) &= -2(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}})^3 + (\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}})^2 + 2(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}})^2(\sum_{k\geq 0} c_k t^{\frac{k}{n}}) - \\ &- 2(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}})(\sum_{k\geq 0} c_k t^{\frac{k}{n}}) - (\sum_{k\geq 0} c_k t^{\frac{k}{n}}) + (\sum_{k\geq 0} c_k t^{\frac{k}{n}})^2. \end{aligned}$$

Ahora podemos trabajar siguiendo los mismos argumentos que en los cálculos anteriores. De esta manera conseguimos un único vector de series de Puiseux solución del sistema $\widetilde{\mathbf{F}_i}^t$ para cada $i = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_2(t) &= \Big(-t(1+\mathrm{o}(1)), 1+\mathrm{o}(1)\Big) \\ \widetilde{\omega}_3(t) &= \Big(-t(1+\mathrm{o}(1)), 1+\mathrm{o}(1)\Big) \\ \widetilde{\omega}_4(t) &= \Big(3t(1+\mathrm{o}(1)), \frac{-1}{2}(1+\mathrm{o}(1))\Big). \end{aligned}$$

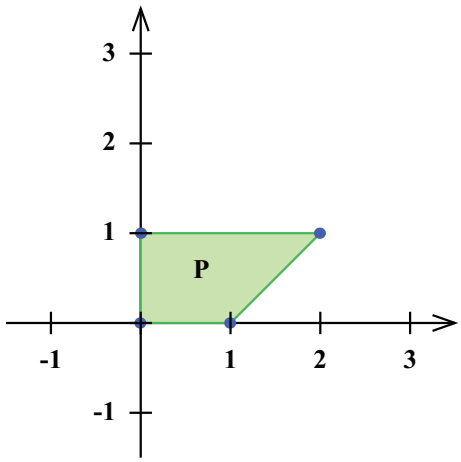
Volviendo atrás nuestros cambios de variable, tenemos para cada $\mathbf{F}_i^t$ $\forall 2 \leq i \leq 4$ un único cero en $(\mathbb{C}(t)')^2$:

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= \Big(-t^{-1}(1+\mathrm{o}(1)), -t(1+\mathrm{o}(1))\Big) \\ \omega_3(t) &= \Big(-t^{-1}(1+\mathrm{o}(1)), -t^{-1}(1+\mathrm{o}(1))\Big) \\ \omega_4(t) &= \Big(3t(1+\mathrm{o}(1)), \frac{-2}{3}t^{-1}(1+\mathrm{o}(1))\Big). \end{aligned}$$

Sin embargo, no siempre sucede que la cantidad de ceros en $(\mathbb{C}(t)')^2$ del sistema $\mathbf{F}^t$ que se pierden en una dirección orientada α, si $\mathbf{F}_\alpha$ tiene raíces en $(\mathbb{C}^*)^2$, es exactamente $\mathcal{H}_\alpha.\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S},\mathbf{S})$. El siguiente es un ejemplo de esto:

Ejemplo 2.14 Se considera el sistema:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} f(x,y) = a(y-1) + bx + cyx^2 \\ g(x,y) = e(y-1) + hx + kyx^2 \end{cases}$$



$\mathbf{S} = \text{sop}(f) = \text{sop}(g) = \{(0,0);(0,1);(1,0);(2,1)\}$, $\mathbf{P} = \mathcal{NP}(f) = \mathcal{NP}(g) = \mathcal{C}onv(\mathbf{S})$; $\mathcal{V}ol_2(\mathbf{P}) = \dfrac{3}{2}$ y $\mathcal{MV}_2(\mathbf{P},\mathbf{P}) = 3$.
Sea $\mathbf{q} \in \mathbb{C}[a,b,c,e,h,k]$ el polinomio en los coeficientes de f y g:

$$\mathbf{q}(a,\ b,\ c,\ e,\ h,\ k) = a.b.c.e.h.k.(ak-ce).(bk-ch).(ah-be).[4(be-ha)(bk-ch)-(ak-ce)^2].$$

Para cada sistema $\mathbf{F}$ tal que al evaluar el polinomio $\mathbf{q}$ en sus coeficientes resulta no nulo, veremos que tiene exactamente dos soluciones simples en $(\mathbb{C}^*)^2$ (y supondremos entonces que nuestro sistema toma valores $a,\ b,\ c,\ e,\ h,\ k$ en estas condiciones).
Como $\mathbf{q}(a,b,c,e,h,k) \neq 0,\ a,b,c,e,h,k \neq 0$. Además, toda raíz de f y g, lo es también de $\Big(kf - cg\Big)(x,y) = (ka-ce)(y-1) + (bk-ch)x$.
Si $y = 1$, como $(bk-ch) \neq 0$ luego $x = 0$. Pero $(0,1) \notin (\mathbb{C}^*)^2$.
Si $y \neq 1$, como $(bk-ch) \neq 0$ luego $x = \dfrac{(ce-ka)(y-1)}{bk-ch}$. Como $ka - ce \neq 0$, entonces $x \neq 0$. Evaluándolo en f,

$$0 = f\Big(\frac{(ce-ak)(y-1)}{bk-ch}, y\Big) = \frac{c(y-1)}{bk-ch}\Big[(be-ah) + \frac{(ce-ak)^2}{bk-ch}y.(y-1)\Big]$$

y como $\dfrac{c(y-1)}{bk-ch} \neq 0$ y $\mathbf{q}(a,b,c,e,h,k) \neq 0$, entonces llamando $p(y) = (be-ah) + \dfrac{(ak-ce)^2}{bk-ch}y.(y-1)$, éste tiene dos raíces distintas entre si, y que no son ni 0 ni 1. Luego, las

dos raíces del sistema $\mathbf{F}$ son de la forma $\Big(\frac{(ce-ak)(y-1)}{bk-ch}, y\Big)$ con y raíz de p, y están en $(\mathbb{C}^*)^2$. Veamos que son simples: evaluando el jacobiano en $\Big(\frac{(ce-ak)(y-1)}{bk-ch}, y\Big)$ obtenemos

$$j(y) = \mathcal{J}_{\mathbf{F}}\Big(\frac{(ce-ak)(y-1)}{bk-ch}, y\Big) = (be-ha) + \frac{(ce-ak)^2}{bk-ch}(y-1)(3y-1),$$

si y fuera raíz tanto de j como de p, lo sería también de $(j-p)(y) = \dfrac{(ce-ak)^2}{bk-ch}(y-1)(2y-1)$. Entonces, $y = \frac{1}{2}$, con lo cual

$$0 = p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4(bk-ch)}\big[4(be-ah)(bk-ch) - (ak-ce)^2\big].$$

Sin embargo, esto no puede suceder si los valores que elegimos para a, b, c, e, h, k no anulan $\mathbf{q}$. Luego, como el jacobiano es no nulo en toda raíz de f y g, las raíces del sistema son simples.

Para ver qué sucede con $\sum \mathcal{H}_\alpha \mathcal{L}_\alpha(\mathbf{S}, \mathbf{S})$, notar que tomando el punto $r = (2, 1)$ el nuevo sistema será

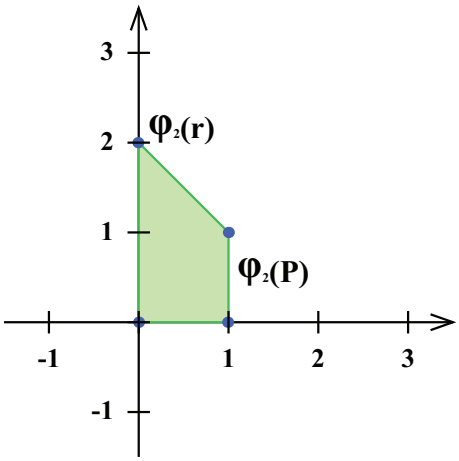
$$\mathbf{F}^t = \begin{cases} 0 = f^t(x,y) = a(y-1) + bx + (\frac{1}{t} + c)yx^2 \\ 0 = g^t(x,y) = e(y-1) + hx + kyx^2 \end{cases}.$$

Como $\mathbf{q}(a, b, c, e, h, k) \neq 0$, deberíamos poder encontrar dos raíces de $\mathbf{F}^t$ en $((\mathbb{C}(t)')^*)^2$.

Las direcciones orientadas que nos van a interesar son las normales interiores de facetas de $\mathbf{P}$: $\alpha_1 = (0, 1)$; $\alpha_2 = (0, -1)$; $\alpha_3 = (-1, 1)$ y $\alpha_4 = (1, 0)$. Para α_2 y α_3, vale que $\mathcal{H}_{\alpha_i}\mathcal{L}_{\alpha_i}(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = 0$ pues $\mathcal{H}_{\alpha_i} = 0$ $(i = 2, 3)$.

En el caso de α_2, con el cambio de variables inducido por

$\varphi_2(x_1, x_2) = (-x_2 + 1, x_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenemos que $m_{(1,0)}(\varphi_2(\mathbf{P})) = 0$ donde $\varphi_2(\mathbf{P})$ es:



Notar que, como $\alpha_2.\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = (0,-1).\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = (1,0) = \alpha$, la nueva normal interior será α. Podemos, como en el ejemplo anterior, verlo gráficamente ya que α_2 es la normal de la faceta determinada por los puntos r y $(0,1)$. Con el cambio de variables, $\varphi_2(r) = (0,2)$ y $\varphi_2(0,1) = (0,0)$ con lo cual la normal interior de la cara determinada por $\varphi_2(r)$ y $\varphi_2(0,1)$ es α.

Ahora bien, el sistema luego del cambio de variables nos queda:

$$\widetilde{\mathbf{F}}_2^t = \begin{cases} 0 = \widetilde{f}_2^t(x,y) = a(1-x) + by.x + (\dfrac{1}{t} + c)y^2 \\ 0 = \widetilde{g}_2^t(x,y) = e(1-x) + hy.x + ky^2 \end{cases}$$

y si $\sigma_2(t) = \left(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}, \sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\right)$ es un cero de $\widetilde{\mathbf{F}}_2^t$, evaluándo en $t=0$ tenemos que

$$0 = \widetilde{g}_2^0\big(\sigma_2(0)\big) = e + k.b_0^2.$$

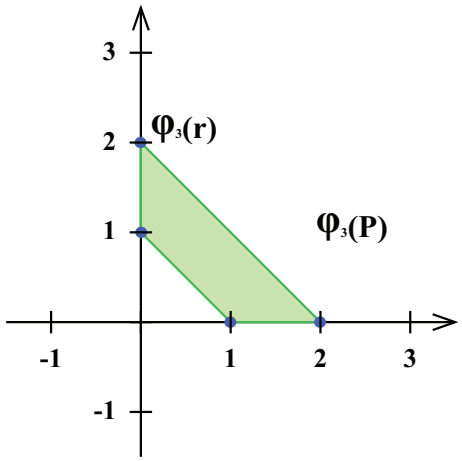
Luego $b_0^2 = \dfrac{-e}{k}$ (son dos, igual que en el caso genérico ya que $\mathcal{L}_{\alpha_2}(\mathbf{S},\mathbf{S}) = \mathcal{L}((\varphi_2(\mathbf{S}))_\alpha) = \mathcal{V}ol_1(\overline{(0,0);(0,2)}) = 2$) y reemplazando en $\widetilde{f}_2^t$,

$$0 = \widetilde{f}_2^t\big(\sigma_2(t)\big) = a + (\frac{1}{t} + c)b_0^2 + \mathrm{o}(t^{-1}),$$

con lo cual $0 = \dfrac{1}{t}.b_0^2$ pero esto es absurdo pues $b_0 \neq 0$. Luego, no tenemos raíces en esta dirección.

En el caso de α_3, con el cambio de variables inducido por $\varphi_3(x_1,x_2) = (-x_1+x_2+1, x_1) = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ tenemos que $\alpha_3.\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = (-1,1).\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = (1,0)$ (que

será entonces la normal luego del cambio de variables) y $m_{(1,0)}(\varphi_3(\mathbf{P})) = 0$ donde $\varphi_3(\mathbf{P})$ es:



A partir del cambio de variables el sistema queda:

$$\widetilde{\mathbf{F}}_3^t = \begin{cases} 0 = \widetilde{f}_3^t(x,y) = a(x^2-x) + by + (\dfrac{1}{t}+c)y^2 \\ 0 = \widetilde{g}_3^t(x,y) = e(x^2-x) + hy + ky^2 \end{cases}$$

y si $\sigma_3(t) = \left(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}, \sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}} \right)$ es uno de sus ceros,

$$0 = \widetilde{g}_3^0\big(\sigma_3(0)\big) = h.b_0 + k.b_0^2 = b_0.(h + k.b_0).$$

Y como $b_0 \neq 0$, tendremos que $b_0 = \dfrac{-h}{k}$ (una sola solución, que coincide con que $1 = \mathcal{V}ol_1(\overline{(0,1);(0,2)}) = \mathcal{L}((\varphi_3(\mathbf{S}))_\alpha) = \mathcal{L}_{\alpha_3}(\mathbf{S},\mathbf{S})\Big)$. Evaluando $\widetilde{f}_3^t$ en $\sigma_3(t)$ tenemos que

$$0 = \widetilde{f}_3^t\big(\sigma_3(t)\big) = b.b_0 + (\frac{1}{t}+c)b_0^2 + \mathrm{o}(t^{-1}).$$

Luego, $0 = b_0^2$. Pero esta afirmación es falsa porque $b_0 \neq 0$. Entonces, en la dirección α_3 tampoco tendremos ningun cero $\sigma(t)$ posible.

Para $\alpha_1 = (0,1)$, el cambio de variables a usar es el inducido por $\varphi_1(x_1,x_2) = (x_2,x_1)$ y con él nuestro sistema queda

$$\widetilde{\mathbf{F}}_1^t = \begin{cases} 0 = \widetilde{f}_1^t(x,y) = a(x-1) + by + (\dfrac{1}{t}+c)x.y^2 \\ 0 = \widetilde{g}_1^t(x,y) = e(x-1) + hy + kx.y^2 \end{cases}$$

y si $\sigma_1(t) = \Big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}, \sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)$ es solución, reemplazando con $t=0$

$$0 = \widetilde{g}_1^0\big(\sigma_1(0)\big) = -e + h.b_0.$$

Luego, $b_0 = \dfrac{e}{h}$ (sólo una solución y $\mathcal{L}_{\alpha_1}(\mathbf{S},\mathbf{S}) = \mathcal{L}((\varphi_1(\mathbf{S}))_\alpha) = \mathcal{V}ol_1(\overline{(0,0);(0,1)}) = 1$). Si ahora lo evaluamos en $\widetilde{f}_1^t(x,y)$

$$0 = \widetilde{f}_1^t\big(\sigma_1(t)\big) = -a + b.b_0 + a.\Big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big) + b.\Big(\sum_{j>0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big) + \Big(\frac{1}{t}+c\Big).\Big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\Big).\Big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\Big)^2 =$$

$$= -a + b.b_0 + \frac{1}{t}.a_d.t^{\frac{d}{m}}.b_0^2 + \mathrm{o}(t^{\frac{d}{m}-1}) = \frac{be-ah}{h} + a_d.\frac{e^2}{h^2}.t^{\frac{d}{m}-1} + \mathrm{o}(t^{\frac{d}{m}-1}).$$

Luego, como $be-ah \neq 0$, debe valer que $\dfrac{d}{m} = 1$ y $0 = \dfrac{be-ah}{h} + a_d.\dfrac{e^2}{h^2} = \dfrac{1}{h}.\Big[be-ah+a_d.\dfrac{e^2}{h}\Big]$ y por lo tanto $a_d = \dfrac{h(ah-be)}{e^2}$.

Así, si existe un cero de $\widetilde{\mathbf{F}}_1^t$ en esa dirección tendrá $\dfrac{d}{m} = 1$ y $(a_d, b_0) = \Big(\dfrac{h(ah-be)}{e^2}, \dfrac{e}{h}\Big)$. Veamos que realmente existe un único cero que cumple con esto:

Haciendo el cambio de variables $\begin{cases} v = \dfrac{x}{t} \\ w = y \end{cases}$ obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 0 = -a + atv + bw + vw^2 + ctvw^2 \\ 0 = -e + etv + hw + ktvw^2 \end{cases}$$

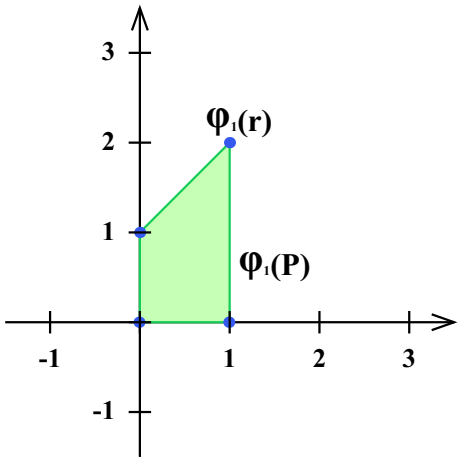
que, evaluando $t=0$, da lugar al sistema $\begin{cases} 0 = -a + bw + vw^2 \\ 0 = -e + hw \end{cases}$. Así, con $t=0$, vale $w = \dfrac{e}{h}$ y $v = \dfrac{h(ah-be)}{e^2}$ (única solución simple con $t=0$ que se extiende a un único vector de series de Puiseux por medio del algoritmo de Newton-Hensel) y por lo tanto

$$\tau_1(t) = \Big(\frac{h(ah-be)}{e^2}t(1+\mathrm{o}(1)), \frac{e}{h}(1+\mathrm{o}(1))\Big)$$

es la única solución de $\widetilde{\mathbf{F}}_1^t$ en dirección $\alpha = (1,0)$, con lo cual la única solución asociada a la dirección orientada α_1 para $\mathbf{F}^t$ es

$$\sigma_1(t) = \Big(\frac{e}{h}(1+\mathrm{o}(1)), \frac{h(ah-be)}{e^2}t(1+\mathrm{o}(1))\Big).$$

Como $\varphi_1(\mathbf{P})$ es



podemos observar que $\mathcal{L}_\alpha(\varphi_1(\mathbf{S}),\varphi_1(\mathbf{S})) = \mathcal{V}ol_1(\overline{(0,0);(0,1)}) = 1$, y dado que $\mathcal{H}_\alpha = 1$, la cantidad de ceros que hallamos (uno) concuerda con $\mathcal{H}_{\alpha_1}.\mathcal{L}_{\alpha_1}(\mathbf{S},\mathbf{S}) = 1$, que es, por la demostración del Teorema 2.9, la cantidad a hallar en el caso genérico.

Sólo nos resta ver qué sucede con $\alpha_4 = (1,0)$, que es justamente donde f_{α_4} y g_{α_4} tendrán una raíz en común. Aquí no tenemos que hacer ningún cambio de variables, y buscamos si existe $\sigma_4(t) = \left(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}, \sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\right)$ solución de $\mathbf{F}^t$. Si existiera, $0 = g^t\big(\sigma_4(t)\big)$, y reemplazando con $t = 0$

$$0 = g\big(\sigma_4(0)\big) = e(b_0 - 1).$$

Luego, $b_0 = 1$. Notar que $1 = \mathcal{V}ol_1(\overline{(0,0);(0,1)}) = \mathcal{L}(\mathbf{S}_{\alpha_4}) = \mathcal{L}_{\alpha_4}(\mathbf{S},\mathbf{S})$, y $\mathcal{H}_{\alpha_4} = 2$, con lo cual, $\mathcal{H}_{\alpha_4}.\mathcal{L}_{\alpha_4}(\mathbf{P},\mathbf{P}) = 2$. Veamos que sin embargo existe sólo un cero en esa dirección. Si tomamos $l = \text{mín}\{j > 0 \ / \ b_j \neq 0\}$ y $s = \text{máx}\{j \ / \ \frac{j}{n} \leq \frac{2d}{m} - 1\}$, y seguimos los pasos de la prueba del Teorema 2.9 tenemos que:

$$0 = f^t(\sigma(t)) = a(\sum_{j>0} b_j t^{\frac{j}{n}}) + b(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}) + (\frac{1}{t} + c)(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}})(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}})^2 =$$

$$= ab_l t^{\frac{l}{n}}(1 + \mathrm{o}(1)) + ba_d t^{\frac{d}{m}}(1 + \mathrm{o}(1)) + b_0 a_d^2 t^{\frac{2d}{m}-1}(1 + \mathrm{o}(1)).$$

Pero esto no nos da información útil. El problema está en que $f^t_{\alpha_4}(1)$ tambien es cero. Sin embargo, si evaluamos en $ef^t - ag^t$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (ef^t - ag^t)\big(\sigma_4(t)\big) = (eb - ah)\big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big) + [e(\frac{1}{t} + c) - ak]\big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2.\big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\big) = \\ &= (eb - ah)a_d t^{\frac{d}{m}} + ea_d^2 b_0 t^{\frac{2d}{m}-1} + \mathrm{o}(t^{\frac{u}{m}}) \quad \text{con } u = min\{d, 2d - m\}. \end{aligned}$$

Luego, $(eb-ah)a_d t^{\frac{d}{m}}$ y $ea_d^2 b_0 t^{\frac{2d}{m}-1}$ deben tener la misma potencia de t, y su suma debe ser nula, con lo cual $\frac{d}{m}=\frac{2d}{m}-1$ y $a_d=\frac{ah-eb}{e}$. Tenemos entonces que $\frac{d}{m}=1$, y hallamos ya b_0 y a_d. Si además evaluamos en (hf^t-bg^t):

$$0=(hf^t-bg^t)\big(\sigma_4(t)\big)=(ha-be)\big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}-1\big)+[h(\frac{1}{t}+c)-kb]\big(\sum_{i\geq d} a_i t^{\frac{i}{m}}\big)^2.\big(\sum_{j\geq 0} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)=$$

$$=(ha-be)\big(\sum_{j=l}^{s} b_j t^{\frac{j}{n}}\big)+h.b_0.a_d^2 t^{\frac{2d}{m}-1}+\mathrm{o}(t^{\frac{2d}{m}-1}).$$

Luego, como $ha-be, a_d, b_0, h$ son todos no nulos, debe valer que $l=s$ y $\frac{l}{n}=\frac{2d}{m}-1=1$. Con esto, $0=(ha-be).b_l+h.a_d^2$ con lo cual $b_l=-\frac{h(ha-be)}{e^2}$. Sólo resta ver que existe una única $\sigma(t)$ que cumple con esto. Para ello usaremos el cambio de variables

$$\begin{cases} v=\dfrac{x}{t} \\ w=y \end{cases}$$

con el cual el sistema queda:

$$\begin{cases} 0=a(w-1)+bvt+v^2wt+cv^2wt^2 \\ 0=e(w-1)+hvt+kv^2wt^2 \end{cases}.$$

Evaluándolo en $t=0$ tenemos que $\begin{cases} 0=a(w-1) \\ 0=e(w-1) \end{cases}$. Entonces, $w=1$ pero de v sólo sabemos que pertenece a $\mathbb{C}$. Como queremos ver que existe una solución $\big(v(t),w(t)\big)=\Big(\frac{ha-eb}{e}+\sum_{i>d} a_i t^{\frac{i-d}{d}}, 1+\sum_{j\geq l} b_j t^{\frac{j}{l}}\Big)$, haciendo un nuevo cambio de variables

$$\begin{cases} u=v \\ z=\dfrac{w-1}{t} \end{cases}$$

tendremos ahora el sistema en las variables u, z :

$$\mathbf{H}^t=\begin{cases} 0=t\Big(az+\big(b+u(1+tz)\big)u+cu^2(1+tz)t\Big) \\ 0=t\Big(ez+hu+ku^2(1+tz)t\Big) \end{cases}$$

que es equivalente al sistema

$$\begin{cases} 0 = az + \big(b + u(1+tz)\big)u + cu^2(1+tz)t \\ 0 = ez + hu + ku^2(1+tz)t \end{cases}.$$

Reemplazando con $t = 0$, este último nos queda: $\begin{cases} 0 = az + bu + u^2 \\ 0 = ez + hu \end{cases}$ cuya única raíz simple en $(\mathbb{C}^*)^2$ es (a_d, b_l) (tiene multiplicidad 1 porque $ha - be \neq 0$). Luego, se extiende a un único cero de $\mathbf{H}^t$ de la forma

$$\tau(t) = \Big(u(t), z(t)\Big) = \Big(\frac{ha-be}{e} + \sum_{i>0} a_{d.(i+1)}t^i, -\frac{h(ha-be)}{e^2} + \sum_{j>0} b_{l.(j+1)}t^j\Big).$$

Y volviendo atrás por nuestros cambios de variables nos da la única solucion de $\mathbf{F}^t$:

$$\sigma_4(t) = \Big(t.u(t), 1 + t.z(t)\Big) = \Big(\frac{ha-be}{e}t + \sum_{i>1} a_{d.i}t^i, 1 - \frac{h(ha-be)}{e^2}t + \sum_{j>1} b_{l.j}t^j\Big).$$

Notar que es única pues $\sigma_4(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ es una solución de $\mathbf{F}^t$ si y sólo si $\tau(t) = \Big(\frac{x(t)}{t}, \frac{y(t)-1}{t}\Big)$ es una solución de $\mathbf{H}^t$.

Capítulo 3

Un refinamiento de la cota de Bernstein

Para un sistema genérico de n ecuaciones en n variables con polítopos de Newton fijos, el Teorema de Bernstein nos asegura cuántas soluciones tendrá el sistema en $(\mathbb{C}^*)^n$. Pero, en el caso no genérico, el volumen mixto de la familia de soportes sólo nos da una cota superior para la cantidad de soluciones aisladas del sistema. El objetivo de este capítulo es mostrar un posible refinamiento a la cota dada por el Teorema de Bernstein. Este refinamiento se basa en [15]. Nos limitaremos al caso de dos polinomios en dos variables.

3.1. Integral mixta

En esta sección introduciremos el concepto de integral mixta en el que se basa la nueva cota que presentaremos. A tal fin, necesitamos definir la suma de Minkowski (o *sup-convolución*, siguiendo la denominación en [15]) de funciones.

Definición 3.1 *Sean* $\rho : \mathrm{I}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : \mathrm{I}_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones cóncavas sobre intervalos acotados* $\mathrm{I}_\rho,\ \mathrm{I}_\sigma \subset \mathbb{R}$. *Se define* $\rho \boxplus \sigma : \mathrm{I}_\rho + \mathrm{I}_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}$, *la* suma de Minkowski *entre* ρ *y* σ, *como*

$$\rho \boxplus \sigma(x) = \max\{\rho(x_1) + \sigma(x_2) \ / \ x_1 \in \mathrm{I}_\rho,\, x_2 \in \mathrm{I}_\sigma \ y \ x_1 + x_2 = x\}.$$

Notar que $\rho \boxplus \sigma$ resulta una función cóncava sobre la suma de Minkowski $\mathrm{I}_\rho + \mathrm{I}_\sigma$.

La suma de Minkowski de funciones puede relacionarse con la suma de Minkowski de polítopos de la siguiente forma:

Lema 3.2 *Sean* $\mathbf{Q}_\rho$ *y* $\mathbf{Q}_\sigma$ *polítopos en* $\mathbb{R}^2$ *y sean* $\rho : \mathrm{I}_\rho \to \mathbb{R}$ *y* $\sigma : \mathrm{I}_\sigma \to \mathbb{R}$ *dos funciones cóncavas, que parametrizan los* techos *de* $\mathbf{Q}_\rho$ *y* $\mathbf{Q}_\sigma$ *respectivamente. Entonces,* $\rho \boxplus \sigma$ *parametriza el* techo *de* $\mathbf{Q}_\rho + \mathbf{Q}_\sigma$.

Demostración: Como para cada $x \in \mathrm{I}_\rho + \mathrm{I}_\sigma$, $\rho \boxplus \sigma(x) = \rho(x_1) + \sigma(x_2)$ donde $(x_1, \rho(x_1)) \in \mathbf{Q}_\rho$ y $(x_2, \sigma(x_2)) \in \mathbf{Q}_\sigma$, $(x, \rho \boxplus \sigma(x)) \in \mathbf{Q}_\rho + \mathbf{Q}_\sigma$. Entonces, dada $\tau(x)$ parametrización del techo de $\mathbf{Q}_\rho + \mathbf{Q}_\sigma$, se tiene que $\rho \boxplus \sigma(x) \leq \tau(x)$. Veamos que no puede ser estrictamente menor. Si $(x, \tau(x))$ es un vértice del techo de $\mathbf{Q}_\rho + \mathbf{Q}_\sigma$, $(x, \tau(x)) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ donde (x_1, y_1) es un vértice del techo de $\mathbf{Q}_\rho$ y (x_2, y_2) es un vértice del techo de $\mathbf{Q}_\sigma$. Pero como ρ y σ parametrizan sus techos, $y_1 = \rho(x_1)$ y $y_2 = \sigma(x_2)$. Luego, por la definición de $\rho \boxplus \sigma$, $\rho \boxplus \sigma(x) \geq \rho(x_1) + \sigma(x_2) = \tau(x)$.
Si $(x, \tau(x))$ no es un vértice del techo de $\mathbf{Q}_\rho + \mathbf{Q}_\sigma$, existen ξ_1, ξ_2 tales que $(x, \tau(x))$ pertenece al segmento del techo de $\mathbf{Q}_\rho + \mathbf{Q}_\sigma$ que une los vértices $(\xi_1, \rho \boxplus \sigma(\xi_1))$ con $(\xi_2, \rho \boxplus \sigma(\xi_2))$. Luego, como $\rho \boxplus \sigma$ es cóncava, $\tau(x) \leq \rho \boxplus \sigma(x)$. De esta manera, $\rho \boxplus \sigma$ es la parametrización del techo de $\mathbf{Q}_\rho + \mathbf{Q}_\sigma$. □

A continuación definiremos la integral mixta entre dos funciones cóncavas (ver [14]):

Definición 3.3 *Para* $\rho : \mathrm{I}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : \mathrm{I}_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones cóncavas definidas sobre intervalos acotados en* $\mathbb{R}$, *definimos la* integral mixta *entre ellas* $\mathcal{MI}(\rho, \sigma)$ *como*

$$\mathcal{MI}(\rho, \sigma) = \int_{\mathrm{I}_\rho + \mathrm{I}_\sigma} \rho \boxplus \sigma(x) dx - \int_{\mathrm{I}_\rho} \rho(x) dx - \int_{\mathrm{I}_\sigma} \sigma(x) dx.$$

Notar que la integral mixta resulta ser simétrica (es decir, $\mathcal{MI}(\rho, \sigma) = \mathcal{MI}(\sigma, \rho)$).

Podemos observar que si $\rho : \mathrm{I}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava, $Graf(\rho) = \{(x, \rho(x)) \ / \ x \in \mathrm{I}_\rho\}$ y $c \in \mathbb{R}$ es tal que $c \leq \text{mín}\{0; \rho(x) \ / \ x \in \mathrm{I}_\rho\}$, definiendo $\mathrm{I}_{\rho,c} = \mathcal{C}onv(Graf(\rho),\ \mathrm{I}_\rho \times \{c\})$ y usando que el volumen en dos variables de un convexo es el área entre su *techo* y su *piso*, se tiene que:

$$\int_{\mathrm{I}_\rho} \rho(x) dx = \underbrace{\int_{\mathrm{I}_\rho} \rho(x) - c \ dx}_{\mathcal{V}ol_2(\mathrm{I}_{\rho,c})} + \underbrace{\int_{\mathrm{I}_\rho} c \ dx}_{c.\mathcal{V}ol_1(\mathrm{I}_\rho)} = \mathcal{V}ol_2(\mathrm{I}_{\rho,c}) + c.\mathcal{V}ol_1(\mathrm{I}_\rho). \tag{3.1}$$

Con esta expresión de la integral de una función cóncava, podemos escribir a la integral mixta en términos de volúmenes mixtos:

Proposición 3.4 *Sean* $\rho : \mathrm{I}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : \mathrm{I}_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones cóncavas, y* $c, d \in \mathbb{R}$ *tales que* $c \leq \text{mín}\{0; \rho(x) \ / \ x \in \mathrm{I}_\rho\}$ *y* $d \leq \text{mín}\{0; \sigma(x) \ / \ x \in \mathrm{I}_\sigma\}$. *Entonces,*

$$\mathcal{MI}(\rho, \sigma) = \mathcal{MV}_2(\mathrm{I}_{\rho,c}, \mathrm{I}_{\sigma,d}) \ + \ c.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_\sigma) \ + \ d.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_\rho).$$

Demostración: La demostración será una especialización al caso de dos variables de la demostración hecha en [14, Proposición IV.5.d]. Sean

$$\begin{cases} \rho : \mathrm{I}_\rho = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \sigma : \mathrm{I}_\sigma = [r, s] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases} \text{ funciones cóncavas}$$

y sean $c \leq \min\{0; \rho(x) \ / \ x \in \mathrm{I}_\rho\}$ y $d \leq \min\{0; \sigma(x) \ / \ x \in \mathrm{I}_\sigma\}$ como en las hipótesis de la proposición. Entonces,

$$\mathcal{V}ol_1(\mathrm{I}_\rho + \mathrm{I}_\sigma) = \mathcal{V}ol_1([a+r, b+s]) = b+s-a-r.$$

Notar que $c+d \leq \min\{0; \rho \boxplus \sigma(x) \ / \ x \in \mathrm{I}_\rho + \mathrm{I}_\sigma\}$. Luego, usando la ecuación (3.1) y el Lema 3.2, tendremos que:

$$\mathcal{MI}(\rho,\sigma) = \int_{\mathrm{I}_\rho+\mathrm{I}_\sigma} \rho \boxplus \sigma(x)dx - \int_{\mathrm{I}_\rho} \rho(x)dx - \int_{\mathrm{I}_\sigma} \sigma(x)dx =$$

$$= \mathcal{V}ol_2(\mathrm{I}_{\rho\boxplus\sigma,c+d}) + (c+d)\mathcal{V}ol_1(\mathrm{I}_\rho + \mathrm{I}_\sigma) - \mathcal{V}ol_2(\mathrm{I}_{\rho,c}) - c\mathcal{V}ol_1(\mathrm{I}_\rho) - \mathcal{V}ol_2(\mathrm{I}_{\sigma,d}) - d\mathcal{V}ol_1(\mathrm{I}_\sigma) =$$

$$= \mathcal{V}ol_2(\mathrm{I}_{\rho\boxplus\sigma,c+d}) + (c+d)(b+s-a-r) - \mathcal{V}ol_2(\mathrm{I}_{\rho,c}) - \mathcal{V}ol_2(\mathrm{I}_{\sigma,d}) - c(b-a) - d(s-r) =$$

$$= \mathcal{MV}_2(\mathrm{I}_{\rho,c}, \mathrm{I}_{\sigma,d}) + d(b-a) + c(s-r) = \mathcal{MV}_2(\mathrm{I}_{\rho,c}, \mathrm{I}_{\sigma,d}) + c.\mathcal{V}ol_1(\mathrm{I}_\rho) + d.\mathcal{V}ol_1(\mathrm{I}_\sigma).$$

□

La Proposición 3.4 nos permite probar las siguientes propiedades de la integral mixta:

Proposición 3.5 *Con las notaciones anteriores:*

1. $\mathcal{MI}(\rho,\sigma)$ *es lineal en* ρ *y* σ *con respecto a* $\boxplus$.
2. *Si* $\rho = \sigma$, *entonces* $\mathcal{MI}(\rho,\rho) = 2.\int_{\mathrm{I}_\rho} \rho(x)dx$.
3. *Si* $\rho_1 \leq \rho_2$ *y* $\sigma_1 \leq \sigma_2$, *entonces* $\mathcal{MI}(\rho_1,\sigma_1) \leq \mathcal{MI}(\rho_2,\sigma_2)$. *En particular, si* $\rho \geq 0$ *y* $\sigma \geq 0$, *entonces* $\mathcal{MI}(\rho,\sigma) \geq 0$.

Demostración: Para ver la linealidad, se usará que $\mathrm{I}_{\rho\boxplus\rho',c+c'} = \mathrm{I}_{\rho,c} + \mathrm{I}_{\rho',c'}$ donde $c \leq \min\{0; \rho(x) \ / \ x \in \mathrm{I}_\rho\}$ y $c' \leq \min\{0; \rho'(x) \ / \ x \in \mathrm{I}_{\rho'}\}$ (pues, usando el Lema 3.2, $\rho \boxplus \rho'$ es la parametrización del *techo* de $\mathrm{I}_{\rho,c} + \mathrm{I}_{\rho',c'}$). Con ello y la linealidad del volumen mixto, si $d \leq \min\{0; \sigma(x) \ / \ x \in \mathrm{I}_\sigma\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{MI}(\rho \boxplus \rho', \sigma) &= \mathcal{MV}_2(\mathrm{I}_{\rho\boxplus\rho',c+c'}, \mathrm{I}_{\sigma,d}) + (c+c').\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_\sigma) + d.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_{\rho\boxplus\rho'}) = \\
&= \mathcal{MV}_2(\mathrm{I}_{\rho,c} + \mathrm{I}_{\rho',c'}, \mathrm{I}_{\sigma,d}) + c.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_\sigma) + c'.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_\sigma) + d.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_\rho + \mathrm{I}_{\rho'}) = \\
&= \mathcal{MV}_2(\mathrm{I}_{\rho,c}, \mathrm{I}_{\sigma,d}) + \mathcal{MV}_2(\mathrm{I}_{\rho',c'}, \mathrm{I}_{\sigma,d}) + c.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_\sigma) + d.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_\rho) + \\
&\quad + c'.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_\sigma) + d.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_{\rho'}) \\
&= \mathcal{MI}(\rho,\sigma) + \mathcal{MI}(\rho',\sigma).
\end{aligned}$$

Si $\rho = \sigma$,

$$\mathcal{MI}(\rho,\rho) = \mathcal{MV}_2(\mathrm{I}_{\rho,c}, \mathrm{I}_{\rho,c}) + 2c.\mathcal{V}ol_1(\mathrm{I}_\rho) = 2.\mathcal{V}ol_2(\mathrm{I}_{\rho,c}) + 2c.\mathcal{V}ol_1(\mathrm{I}_\rho) = 2.\int_{\mathrm{I}_\rho} \rho(x)dx.$$

Para ver la monotonía, se usará asimismo la monotonía del volumen mixto con respecto a la inclusión (ver, por ejemplo [6, Capítulo 4, Teorema (4.12)]). Luego, si $c \leq \rho_1 \leq \rho_2$ y $d \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$, tenemos que $\mathrm{I}_{\rho_1,c} \subseteq \mathrm{I}_{\rho_2,c}$ y $\mathrm{I}_{\sigma_1,d} \subseteq \mathrm{I}_{\sigma_2,d}$. A partir de esto,

$$\mathcal{MI}(\rho_1,\sigma_1) = \mathcal{MV}_2(\mathrm{I}_{\rho_1,c},\mathrm{I}_{\sigma_1,d}) + c.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_{\sigma_1}) + d.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_{\rho_1}) \leq$$

$$\leq \mathcal{MV}_2(\mathrm{I}_{\rho_2,c},\mathrm{I}_{\sigma_2,d}) + c.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_{\sigma_2}) + d.\mathcal{MV}_1(\mathrm{I}_{\rho_2}) = \mathcal{MI}(\rho_2,\sigma_2).$$

Por último, para ver que con $\rho,\sigma \geq 0$, se tiene que $\mathcal{MI}(\rho,\sigma) \geq 0$, basta notar que $\mathcal{MI}(0,0) = 0$ y usar la monotonía. □

Observación 3.6 *La definición de integral mixta es muy cercana a la del volumen mixto que fue introducido en la Definición 1.15. En el caso de dos variables, para convexos* $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \subset \mathbb{R}^2$*, tenemos que*

$$\mathcal{MV}_2(\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2) = \mathcal{V}ol_2(\mathbf{Q}_1+\mathbf{Q}_2) - \mathcal{V}ol_2(\mathbf{Q}_1) - \mathcal{V}ol_2(\mathbf{Q}_2).$$

Así como el volumen mixto es simétrico, lineal en cada variable $\mathbf{Q}_i$ *respecto a la suma de Minkowski y monótono respecto a la inclusión, en la Proposición 3.5 se vio que la integral mixta verifica propiedades análogas.*

3.2. Una nueva cota para la cantidad de raíces comunes

Sea $f(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j(y).x^j \in \mathbb{C}[x,y]$ un polinomio primitivo, donde $\alpha_j(y) \in \mathbb{C}[y]$. Notaremos

$$\mathrm{I}_f = \mathcal{C}onv(\{j \in \mathbb{Z} \ / \ \alpha_j \not\equiv 0\})$$

y para cada $\tau \in \mathbb{C}$,

$$\mathbf{Q}_{f,\tau} = \mathcal{C}onv\big(\{(j, -ord_\tau(\alpha_j)) \ / \ \alpha_j \not\equiv 0\}\big) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{Q}_{f,\infty} = \mathcal{C}onv\big(\{(j, gr(\alpha_j)) \ / \ \alpha_j \not\equiv 0\}\big) \subseteq \mathbb{R}^2$$

donde $ord_\tau(\alpha_j)$ es la multiplicidad de τ como raíz de α_j y $gr(\alpha_j)$ es el grado de $\alpha_j(y)$.

Definición 3.7 *Para cada* $\tau \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$*, se define la función cóncava* $\rho_{f,\tau} : \mathrm{I}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *como la parametrización del* techo *de* $\mathbf{Q}_{f,\tau}$*, es decir que* $\rho_{f,\tau}(x) = \max\{y \ / \ (x,y) \in \mathbf{Q}_{f,\tau}\}$.

Observación 3.8 *Como* $\mathbf{Q}_{f,\tau}$ *es un polítopo entero (ver la Definición 1.4) para todo* $\tau \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$*,* $\rho_{f,\tau}$ *es lineal a trozos y las pendientes cambian en puntos de coordenadas enteras. Entonces, para describir* $\rho_{f,\tau}$ *basta encontrar* $\rho_{f,\tau}(x) \ \ \forall\, x \in \mathrm{I}_f \cap \mathbb{Z}$*. Luego, si* $\mathrm{I}_f = [0,h]$*, existen* $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = h$*,* $\xi_i \in \mathbb{Z}\ \forall\, 0 \leq i \leq n$*, y* $a_i \in \mathbb{R}$ *para todo* $1 \leq i \leq n-1$*, tales que*

$$\rho_{f,\tau}(x) = \Big\{ a_i(x-\xi_{i-1}) + \rho_{f,\tau}(\xi_{i-1}) \quad \xi_{i-1} \leq x \leq \xi_i.$$

Además, las pendientes cumplen que $a_i > a_{i+1}$ *para todo* $1 \leq i \leq n-1$.

Demostración: Supongamos que $a_{i+1} > a_i$ (si fueran iguales, lo escribimos como un sólo segmento entre ξ_{i-1} y ξ_{i+1}) y tomemos el segmento que une $(\xi_i - 1, \rho_{f,\tau}(\xi_i - 1))$ con $(\xi_i + 1, \rho_{f,\tau}(\xi_i + 1))$ (y que por ser convexo está incluido en $\mathbf{Q}_{f,\tau}$)

$$\sigma(t) = (t.(\xi_i - 1) + (1-t).(\xi_i + 1), t.\rho_{f,\tau}(\xi_i - 1) + (1-t).\rho_{f,\tau}(\xi_i + 1)).$$

Luego, vale que $\sigma(\frac{1}{2}) = (\xi_i, \rho_{f,\tau}(\xi_i) + \overbrace{\frac{a_{i+1} - a_i}{2}}^{>0}) \in \mathbf{Q}_{f,\tau}$, que es un absurdo pues $\rho_{f,\tau}(\xi_i) + \frac{a_{i+1} - a_i}{2} > \rho_{f,\tau}(\xi_i)$ que es el *techo* de $\mathbf{Q}_{f,\tau}$ en ξ_i. Entonces, tiene que valer $a_i > a_{i+1}$. □

Con las herramientas vistas hasta ahora, podemos enunciar una adaptación del resultado principal de [15] en el caso particular de dos polinomios en dos variables,

Teorema 3.9 *Sean $f(x,y)$ y $g(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ dos polinomios primitivos. Con las notaciones anteriores, la cantidad $\mathcal{L}(f = 0, g = 0)$ de raíces aisladas en común de f y g en $(\mathbb{C}^*)^2$ contadas con su multiplicidad satisface:*

$$\mathcal{L}(f = 0, g = 0) \leq \sum_{\tau \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}).$$

Más aún, es una igualdad para polinomios genéricos con funciones $\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}$ fijas.

En el caso en que f y $g \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ sean polinomios de Laurent sin factores no constantes en $\mathbb{C}[y^{\pm 1}]$, multiplicando cada uno de los polinomios por un monomio adecuado de forma tal que los productos obtenidos f^* y g^* sean primitivos con respecto a y en $\mathbb{C}[x,y]$, el resultado anterior nos permite hallar una cota para la cantidad de raíces comunes aisladas de f y g en $(\mathbb{C}^*)^2$: como $\mathcal{MI}(\rho_{f^*,0}, \rho_{g^*,0}) + \mathcal{MI}(\rho_{f^*,\infty}, \rho_{g^*,\infty}) = \mathcal{MV}_2(\mathcal{NP}(f^*), \mathcal{NP}(g^*)) = \mathcal{MV}_2(\mathcal{NP}(f), \mathcal{NP}(g))$ (ver Lema 3.10 más adelante), la cota dada por el Teorema 3.9 puede reescribirse como

$$\mathcal{L}(f = 0, g = 0) \leq \mathcal{MV}_2(\mathcal{NP}(f), \mathcal{NP}(g)) + \sum_{\tau \in \mathbb{C} - \{0\}} \mathcal{MI}(\rho_{f^*,\tau}, \rho_{g^*,\tau}).$$

Observando que $\mathcal{MI}(\rho_{f^*,\tau}, \rho_{g^*,\tau}) \leq 0$ para todo $\tau \in \mathbb{C}$ debido a la monotonía de la integral mixta (ver Proposición 3.5) y a que las funciones involucradas son negativas o cero, podemos entonces considerar al Teorema 3.9 como un refinamiento del Teorema de Bernstein (ver Sección 2.2).

Lema 3.10 *Sean f y $g \in \mathbb{C}[x,y]$. El volumen mixto de sus polítopos de Newton corresponde a la suma de las integrales mixtas del cero y el infinito. Con las notaciones anteriores,*

$$\mathcal{MV}_2(\mathcal{NP}(f),\mathcal{NP}(g)) = \mathcal{MI}(\rho_{f,0},\rho_{g,0}) + \mathcal{MI}(\rho_{f,\infty},\rho_{g,\infty}).$$

Demostración: (Para el caso general de n variables, ver [15, Proposición 7.2]). Usaremos la notación anterior para f, I_f, $\rho_{f,\tau}$ y $\mathbf{Q}_{f,\tau}$. Llamaremos

$\sigma_f(x) = \mín\{y \ / \ (x,y) \in \mathcal{NP}(f)\}$ a la parametrización del *piso* de $\mathcal{NP}(f)$;

$\eta_f(x) = \máx\{y \ / \ (x,y) \in \mathcal{NP}(f)\}$ a la parametrización del *techo* de $\mathcal{NP}(f)$.

Lo primero que vamos a ver es que $\sigma_f(x) = -\rho_{f,0}(x)$ y $\eta_f(x) = \rho_{f,\infty}(x)$ para todo x en I_f. Como σ_f y η_f son las parametrizaciones del *techo* y el *piso* de $\mathcal{NP}(f)$, que es un polítopo entero, basta ver que son iguales para todo $k \in \mathrm{I}_f \cap \mathbb{Z}$.

- $-\rho_{f,0}(k) \geq \sigma_f(k)$ (recíprocamente $\rho_{f,\infty}(k) \leq \eta_f(k)$) :

Es suficiente probar que $(k,-\rho_{f,0}(k)) \in \mathcal{NP}(f)$. Si $\rho_{f,0}(k) = -ord_0(\alpha_k)$, $(k,-\rho_{f,0}(k)) \in \{(i,j) \ / \ c_{ij}x^iy^j$ monomio de f, $c_{ij} \neq 0\} \subset \mathcal{NP}(f)$ (igual en el caso $\rho_{f,\infty}(k) = gr(\alpha_k)$).
Si no, como $(k,-\rho_{f,0}(k)) \in \mathbf{Q}_{f,0}$ existen $k_1,k_2 \in \mathrm{I}_f$ tales que $(k_i,-\rho_{f,0}(k_i)) \in \mathcal{NP}(f)$ y $(k,\rho_{f,0}(k))$ pertenece al segmento que une $(k_1,\rho_{f,0}(k_1))$ con $(k_2,\rho_{f,0}(k_2))$. Pero entonces, como $\mathcal{NP}(f)$ es convexo, $(k,\rho_{f,0}(k)) \in \mathcal{NP}(f)$. (La desigualdad $\rho_{f,\infty}(k) \leq \eta_f(k)$ se prueba análogamente.)

- $-\rho_{f,0}(k) \leq \sigma_f(k)$ (recíprocamente $\rho_{f,\infty}(k) \geq \eta_f(k)$) :

Como σ_f es una parametrización del *piso* de $\mathcal{NP}(f)$, sabemos que no existe $r < \sigma_f(k)$ tal que (k,r) sea exponente de un monomio de f. Si $(k,\sigma_f(k))$ es un vértice de $\mathcal{NP}(f)$, es también un exponente de un monomio f. Luego, $\sigma_f(k) \geq ord_0(\alpha_k) \geq -\rho_{f,0}(k)$.
Si $(k,\sigma_f(k))$ no es un vértice, existen $k_1,k_2 \in \mathrm{I}_f \cap \mathbb{Z}$ tales que $(k,\sigma_f(k)) = t\underbrace{(k_1,\sigma_f(k_1))}_{\text{vértice}} + (1-t)\underbrace{(k_2,\sigma_f(k_2))}_{\text{vértice}} = t(k_1,-\rho_{f,0}(k_1)) + (1-t)(k_2,-\rho_{f,0}(k_2)) = (k,-t\rho_f(k_1) + (t-1)\rho_f(k_2)) \in \mathbf{Q}_{f,0}$ por ser convexo, con lo cual $\rho_{f,0}(k) \geq -t\rho_f(k_1) + (t-1)\rho_f(k_2) = -\sigma_f(k)$. (De igual forma, se puede ver que $\rho_{f,\infty}(k) \geq \eta_f(k)$.)
Además, como $\mathcal{NP}(f)$ es convexo, para calcular su área es suficiente integrar la diferencia entre la parametrización de su *techo* y la de su *piso*. Así,

$$\mathcal{V}ol_2(\mathcal{NP}(f)) = \int_{\mathrm{I}_f} \eta_f(x) - \sigma_f(x)\,dx = \int_{\mathrm{I}_f} \rho_{f,\infty}(x) + \rho_{f,0}(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathrm{I}_f} \rho_{f,\infty}(x)dx + \int_{\mathrm{I}_f} \rho_{f,0}(x)dx.$$

Finalmente, como $\rho_{f,\infty}$ parametriza el *techo* de $\mathcal{NP}(f)$ y $\rho_{g,\infty}$ parametriza el *techo* de $\mathcal{NP}(g)$, entonces $\rho_{f,\infty} \boxplus \rho_{g,\infty}$ es una parametrización del *techo* de $\mathcal{NP}(f)+\mathcal{NP}(g)$ (ver Lema 3.2). De la misma forma, como $-\rho_{f,0}$ parametriza el piso de $\mathcal{NP}(f)$ (y $-\rho_{g,0}$ el de $\mathcal{NP}(g)$), $\rho_{f,0}$ y $\rho_{g,0}$ serán parametrizaciones de los techos de $-\mathcal{NP}(f)$ y $-\mathcal{NP}(g)$ respectivamente. Entonces, $\rho_{f,0} \boxplus \rho_{g,0}$ es una parametrización del techo de $-(\mathcal{NP}(f)+\mathcal{NP}(g))$. Por lo tanto, $-(\rho_{f,0} \boxplus \rho_{g,0})$ parametriza el *piso* de $\mathcal{NP}(f)+\mathcal{NP}(g)$. Con todo esto,

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,0},\rho_{g,0}) + \mathcal{MI}(\rho_{f,\infty},\rho_{g,\infty}) = \int_{I_f+I_g} \rho_{f,0} \boxplus \rho_{g,0}(x)dx - \int_{I_f} \rho_{f,0}(x)dx -$$

$$- \int_{I_g} \rho_{g,0}(x)dx + \int_{I_f+I_g} \rho_{f,\infty} \boxplus \rho_{g,\infty}(x)dx - \int_{I_f} \rho_{f,\infty}(x)dx - \int_{I_g} \rho_{g,\infty}(x)dx =$$

$$= \int_{I_f+I_g} \Big(\underbrace{\rho_{f,\infty} \boxplus \rho_{g,\infty}(x)}_{\text{techo de } \mathcal{NP}(f)+\mathcal{NP}(g)} - \underbrace{(-(\rho_{f,0} \boxplus \rho_{g,0})(x))}_{\text{piso de } \mathcal{NP}(f)+\mathcal{NP}(g)} \Big)dx -$$

$$- \int_{I_f} \Big(\underbrace{\rho_{f,\infty}(x)}_{\text{techo de } \mathcal{NP}(f)} - \underbrace{(-\rho_{f,0}(x))}_{\text{piso de } \mathcal{NP}(f)} \Big)dx - \int_{I_g} \Big(\underbrace{\rho_{g,\infty}(x)}_{\text{techo de } \mathcal{NP}(g)} - \underbrace{(-\rho_{g,0}(x))}_{\text{piso de } \mathcal{NP}(g)} \Big)dx =$$

$$= \mathcal{V}ol_2\Big(\mathcal{NP}(f)+\mathcal{NP}(g)\Big) - \mathcal{V}ol_2\Big(\mathcal{NP}(f)\Big) - \mathcal{V}ol_2\Big(\mathcal{NP}(g)\Big) = \mathcal{MV}_2\Big(\mathcal{NP}(f),\mathcal{NP}(g)\Big).$$

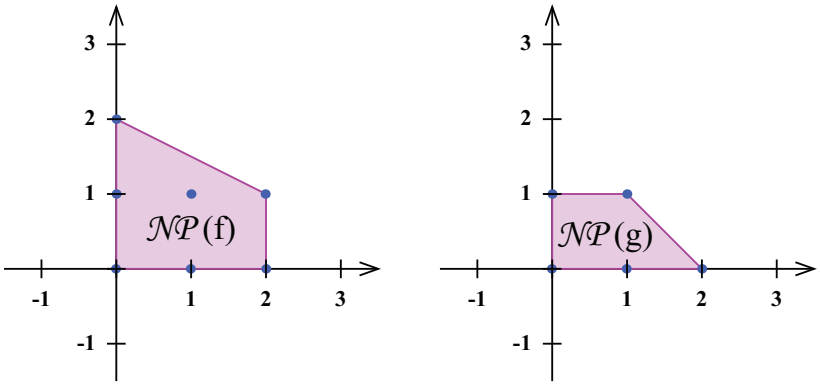
□

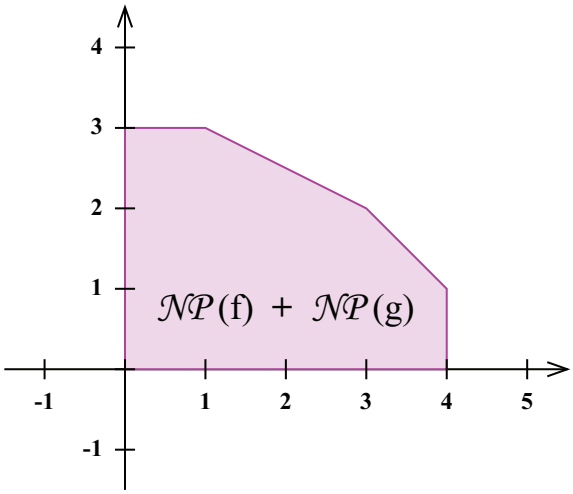
Veremos ahora un ejemplo de esta situación:

Ejemplo 3.11 *Se consideran los polinomios*

$f(x,y) = 3 + 6y + 3y^2 + 2x + x.y + 2x^2 + 2x^2.y = 3(y+1)^2 + (y+2).x + 2(y+1).x^2$
$g(x,y) = 6 + 6y \quad + 2x + x.y + 4x^2 \quad = 6(y+1) + (y+2).x + 4x^2$

Los polítopos de Newton de estos polinomios (y la suma de Minkowski entre ellos) son los siguientes:





Así, si el sistema estuviera dentro del caso genérico para el Teorema de Bernstein, la cantidad de raíces en común de f y g en $(\mathbb{C}^*)^2$ sería exactamente el volumen mixto de $\mathcal{NP}(f)$ y $\mathcal{NP}(g)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{MV}_2\big(\mathcal{NP}(f),\mathcal{NP}(g)\big) &= \mathcal{V}ol_2\big(\mathcal{NP}(f)+\mathcal{NP}(g)\big) - \mathcal{V}ol_2\big(\mathcal{NP}(f)\big) - \mathcal{V}ol_2\big(\mathcal{NP}(g)\big) = \\ &= \frac{28}{2} - 3 - \frac{3}{2} = 5.\end{aligned}$$

Sin embargo, la cantidad de raíces del sistema en $(\mathbb{C}^*)^2$ es sólo 4, pues si (x,y) es una raíz en común, entonces $0 = \big(f-g\big)(x,y) = \big(y-1\big).\big(3(y+1)+2x^2\big)$, de donde se deduce que $y = 1$ o $y = -1 - \frac{2}{3}x^2$.

Si $y = 1$, se tiene que $f(x,1) = g(x,1) = 12 + 3x + 4x^2$ con lo cual las posibles raíces son $\left(\frac{-3-\sqrt{183}i}{8}, 1\right)$ y $\left(\frac{-3+\sqrt{183}i}{8}, 1\right)$.

Si $y = -1 - \frac{2}{3}x^2$, entonces $f(x, -1 - \frac{2}{3}x^2) = (1 - \frac{2}{3}x^2).x$, que se anula para $x = 0$ (con lo cual, $y = -1$) o $x^2 = \frac{3}{2}$ (y para ambas, $y = -2$). Así, conseguimos 3 raíces más $(0,-1)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -2\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -2\right)$.

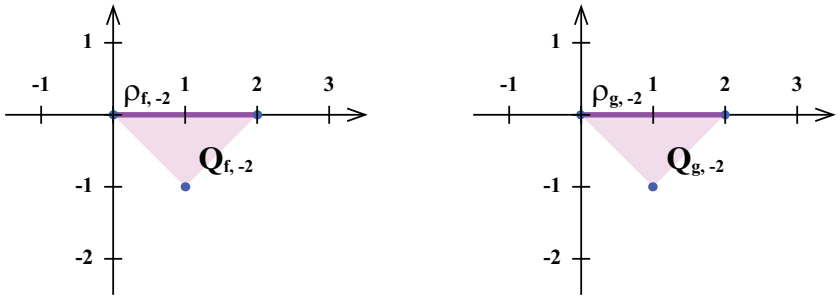
Sin embargo, la raíz $(0,-1)$ no pertenece a $(\mathbb{C}^*)^2$ con lo que nos quedan sólo 4 raíces, cada una de ellas de multiplicidad 1, lo que se puede verificar usando el jacobiano (ver Lema 2.8):

$$\mathcal{J}(x,y) = \det\begin{pmatrix}(y+2)+4(y+1)x & 6(y+1)+x+2x^2 \\ (y+2)+8x & 6+x\end{pmatrix}$$

Así, como $\mathcal{J}(\frac{-3+\sqrt{183}i}{8}, 1) = 6\sqrt{183}i(1-\frac{29+\sqrt{183}i}{32})$, $\mathcal{J}(\frac{-3-\sqrt{183}i}{8}, 1) = -6\sqrt{183}i(1-\frac{29-\sqrt{183}i}{32})$, $\mathcal{J}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -2) = -18$ y $\mathcal{J}(\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -2) = -18$ son todos no nulos, las cuatro raíces son simples. De esta manera, podemos ver que el sistema no tiene cinco raíces aisladas en $(\mathbb{C}^*)^2$, como sucede genéricamente.

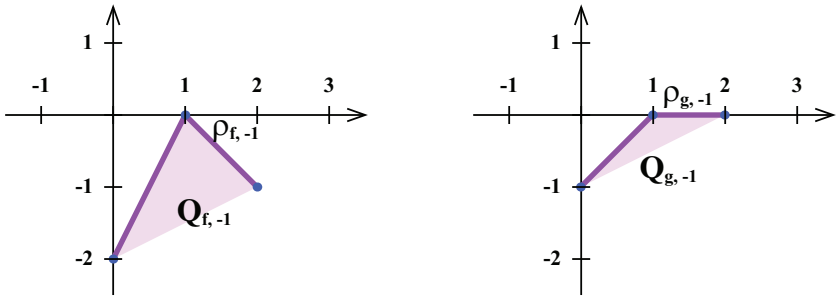
Veamos ahora la cota dada por el Teorema 3.9. Calculemos para cada $\tau \in \mathbb{C} - \{0\}$ las integrales mixtas. Primero es importante notar que $\mathrm{I}_f = \mathrm{I}_g = [0, 2]$ y que para todo τ distinto de $-1, -2$, se tiene que $\rho_{f,\tau} \equiv \rho_{g,\tau} \equiv 0$, con lo cual $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau} \equiv 0$ y $\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}) = 0$. Luego, sólo nos queda hallar $\mathcal{MI}(\rho_{f,-1}, \rho_{g,-1})$ y $\mathcal{MI}(\rho_{f,-2}, \rho_{g,-2})$.

Para el caso de $\tau = -2$, como $\rho_{f,-2}$ y $\rho_{g,-2}$ son las parametrizaciones de los *techos* de $\mathbf{Q}_{f,-2}$ y $\mathbf{Q}_{g,-2}$, podemos observar que $\rho_{f,-2} \equiv \rho_{g,-2} \equiv 0$:



De esta forma tenemos que $\mathcal{MI}(\rho_{f,-2}, \rho_{g,-2}) = 0$.

Por último, para el caso $\tau = -1$, $\rho_{f,-1}$ y $\rho_{g,-1}$ son las parametrizaciones de los *techos* de $\mathbf{Q}_{f,-1}$ y $\mathbf{Q}_{g,-1}$:

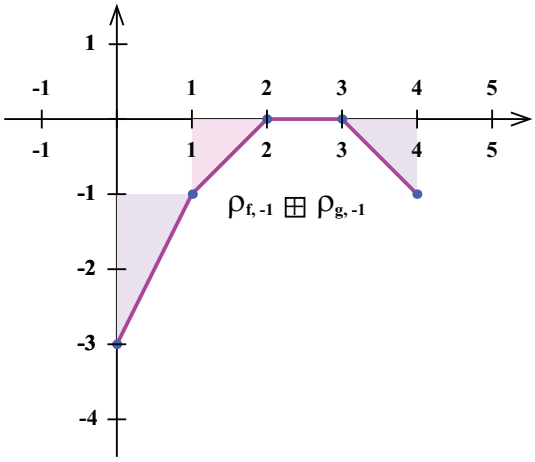


Calculemos ahora $\rho_{f,-1} \boxplus \rho_{g,-1}(x)$: Veremos más adelante que es suficiente hallarla para x enteros, y que para cada x entero, el máximo de las sumas $\rho_{f,-1}(x_1) + \rho_{g,-1}(x_2)$ con $x_1 + x_2 = x$ se alcanza con x_1 y x_2 también enteros. Entonces,

- $\rho_{f,-1} \boxplus \rho_{g,-1}(0) = \text{máx}\{-2 - 1\} = -3$
- $\rho_{f,-1} \boxplus \rho_{g,-1}(1) = \text{máx}\{-2 + 0, -1 + 0\} = -1$

- $\rho_{f,-1} \boxplus \rho_{g,-1}(2) = \max\{-2+0, 0+0, -1-1\} = 0$
- $\rho_{f,-1} \boxplus \rho_{g,-1}(3) = \max\{0+0, -1+0\} = 0$
- $\rho_{f,-1} \boxplus \rho_{g,-1}(4) = \max\{-1+0\} = -1$

Así, el gráfico de $\rho_{f,-1} \boxplus \rho_{g,-1}$ es:



Con esto, podemos ver que vale:

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,-1}, \rho_{g,-1}) = \int_0^4 \rho_{f,-1} \boxplus \rho_{g,-1}(x)dx - \int_0^2 \rho_{f,-1}(x)dx - \int_0^2 \rho_{g,-1}(x)dx =$$

$$= -3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\mathcal{L}(f=0,\, g=0) \;=\; 4 \;=\; 5-1 \;=\; \mathcal{MV}_2(\mathcal{NP}(f), \mathcal{NP}(g)) \;+\; \mathcal{MI}(\rho_{f,-1}, \rho_{g,-1}) \;=$$

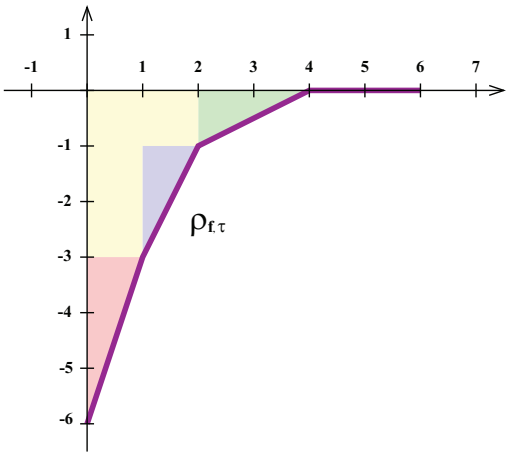
$$= \mathcal{MV}_2(\mathcal{NP}(f), \mathcal{NP}(g)) \;+ \sum_{\tau \in \mathbb{C}-\{0\}} \mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}).$$

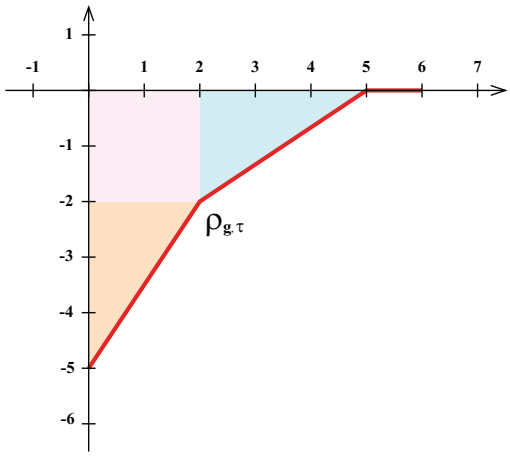
3.3. Cálculo de la integral mixta

A continuación veremos para qué valores de $\tau \in \mathbb{C} - \{0\}$ se tiene $\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}) \neq 0$ en función de f y g. En estos casos, hallaremos una fórmula general para esta integral mixta. Sean $f(x,y) = \sum_{j=0}^{h} \alpha_j(y).x^j$ y $g(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \beta_j(y).x^j \in \mathbb{C}[x,y]$ polinomios primitivos, donde $\alpha_j(y), \beta_j(y) \in \mathbb{C}[y]$ y sea $\tau \in \mathbb{C}^*$. Por la Observación 3.8, sabemos que $\rho_{f,\tau}$ y $\rho_{g,\tau}$ son lineales a trozos.

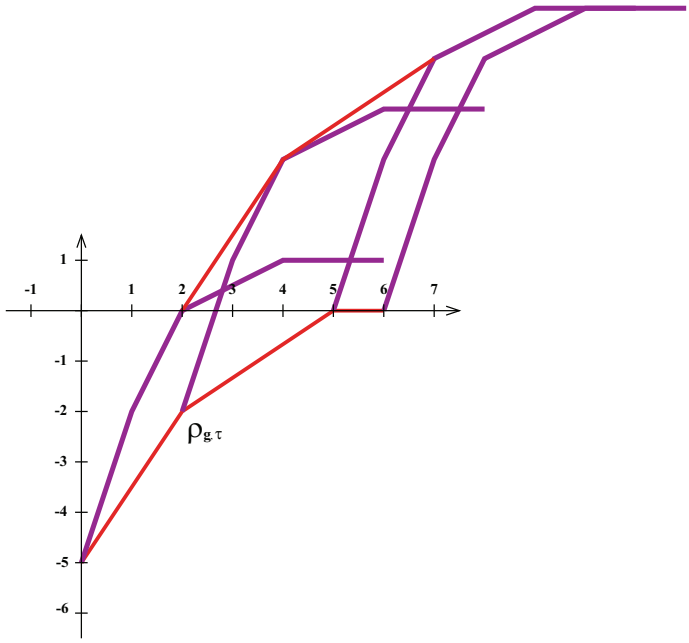
Una forma de construir gráficamente $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ y encontrar así $\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau})$ es sabiendo que $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ es la parametrización del *techo* de $\mathbf{Q}_{f,\tau} + \mathbf{Q}_{g,\tau}$. Veámoslo en un ejemplo:

Ejemplo 3.12 *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ primitivos tales que las parametrizaciones $\rho_{f,\tau}$ y $\rho_{g,\tau}$ son:*

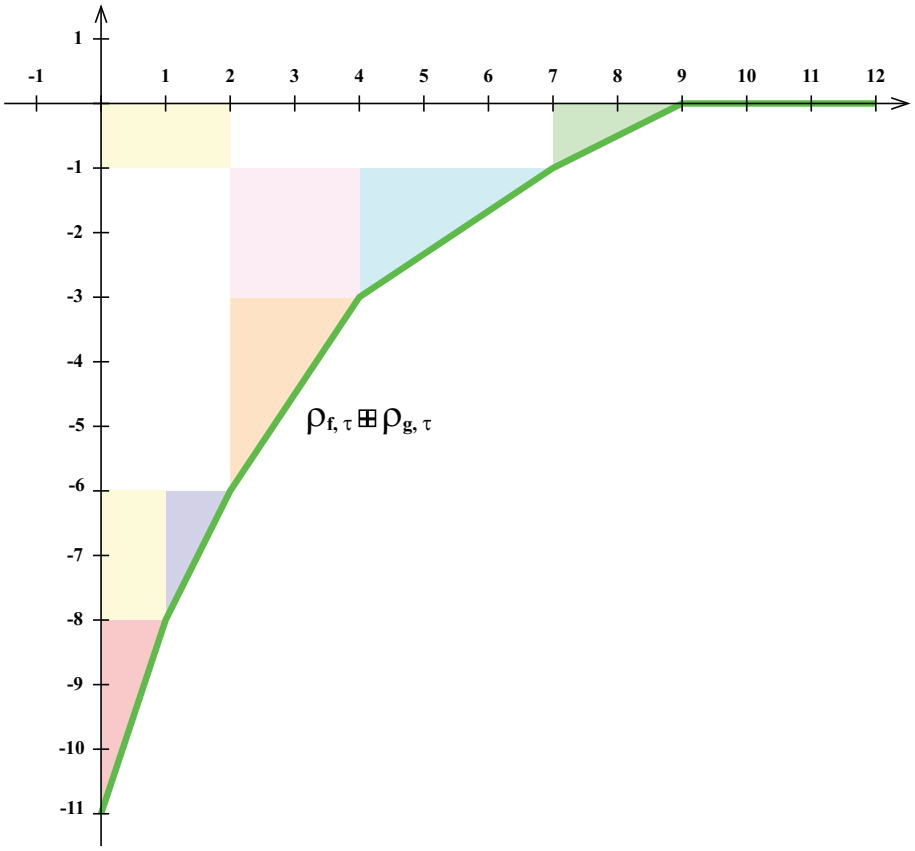




Para hallar entonces $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$, por medio de la traslación $T(x, y) = (x, y + 6)$ el gráfico de $\rho_{f,\tau}$ contiene al origen. De esta forma para hallar la suma sólo debemos pegarlo en cada vértice del gráfico de $\rho_{g,\tau}$ (esta es la misma idea que usamos para hallar la suma de Minkowski de polítopos, pero alcanza hacerlo sólo con el techo *de $\mathbf{Q}_{f,\tau}$ porque sólo nos interesa el* techo *de la suma conseguida). Luego, los unimos de forma tal que su* techo *sea una función cóncava como en la siguiente figura:*



Y finalmente, aplicando la traslación inversa a ese techo, conseguimos el gráfico de $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$:



En nuestro ejemplo, marcamos con color las distintas áreas encerradas entre los gráficos de las funciones $\rho_{f,\tau}$ y $\rho_{g,\tau}$ y el eje x. De esta manera, podemos ubicar esas mismas áreas en el gráfico de $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ y el área que queda en blanco representa $-\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}) = 15$. En el ejemplo se tiene que

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}) = \int_0^{12} \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x)dx - \int_0^6 \rho_{f,\tau}(x)dx - \int_0^6 \rho_{g,\tau}(x)dx = -\frac{65}{2} + \frac{15}{2} + 10 = -15.$$

Nuestro próximo objetivo es calcular integrales mixtas analíticamente. Para esto, en primer lugar veremos cómo calcular la suma de Minkowski de dos funciones.

3.3.1. Cálculo de la suma de Minkowski de funciones

En esta sección veremos cómo calcular la suma de Minkowski de las funciones cóncavas involucradas en las integrales mixtas que aparecen en la cota del Teorema 3.9.

De acuerdo a la Observación 3.8, sean

$$\begin{cases} \rho_{f,\tau}(x) = \begin{cases} a_i(x - \xi_{i-1}) + \rho_{f,\tau}(\xi_{i-1}) & \xi_{i-1} \leq x \leq \xi_i \end{cases} \\ \rho_{g,\tau}(x) = \begin{cases} b_j(x - \widetilde{\xi}_{j-1}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j-1}) & \widetilde{\xi}_{j-1} \leq x \leq \widetilde{\xi}_j \end{cases} \end{cases}$$

donde $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = h$ y $0 = \widetilde{\xi}_0 < \widetilde{\xi}_1 < \ldots < \widetilde{\xi}_m = e$; $a_i > a_{i+1}$ y $b_j > b_{j+1}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq m-1$.

Lema 3.13 *Con la notación anterior, para hallar $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ basta calcularla para $x \in \mathbb{Z}$. Además, para cada $x \in \mathbb{Z}$ vale que $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \max\{\rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2) \ / \ x = x_1 + x_2$ y $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$.*

Demostración: Como $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ es la parametrización del *techo* de $\mathbf{Q}_{f,\tau} + \mathbf{Q}_{g,\tau}$, que es un polítopo entero, es una función lineal a trozos tal que los cambios de pendiente están en puntos de coordenadas enteras. Luego, para hallar $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ es suficiente calcularla para todo $x \in (\mathrm{I}_f + \mathrm{I}_g) \cap \mathbb{Z}$.

Además, sean x_1, x_2 tales que $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2)$, entonces podemos tomarlos enteros. Para verlo, sean x_1, x_2 definidos así, y si notamos para todo x a $\lceil x \rceil$ como el mínimo entero mayor o igual a x, y $\lfloor x \rfloor$ el máximo entero menor o igual a x, entonces $x_1 = \lfloor x_1 \rfloor + \widetilde{x}_1$, $x_2 = \lfloor x_2 \rfloor + \widetilde{x}_2$ donde $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in [0, 1)$. Más aún, como $x = x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 = 0$ o $\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 = 1$.

Si $\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 = 0$, cada uno será nulo, y x_1, x_2 serán enteros. Si en cambio $\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 = 1$, sean $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $\rho_{f,\tau}(x_1) = a_i(x_1 - \xi_{i-1}) + \rho_{f,\tau}(\xi_{i-1})$ y $\rho_{g,\tau}(x_2) = b_j(x_2 - \widetilde{\xi}_{j-1}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j-1})$. Como $\rho_{f,\tau}$ y $\rho_{g,\tau}$ son parametrizaciones de techos de polítopos enteros,

$$\begin{aligned}
\rho_{f,\tau}(\lceil x_1 \rceil) &= a_i(\lceil x_1 \rceil - \xi_{i-1}) + \rho_{f,\tau}(\xi_{i-1}) \\
\rho_{f,\tau}(\lfloor x_1 \rfloor) &= a_i(\lfloor x_1 \rfloor - \xi_{i-1}) + \rho_{f,\tau}(\xi_{i-1}) \\
\rho_{g,\tau}(\lceil x_2 \rceil) &= b_j(\lceil x_2 \rceil - \widetilde{\xi}_{j-1}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j-1}) \\
\rho_{g,\tau}(\lfloor x_2 \rfloor) &= b_j(\lfloor x_2 \rfloor - \widetilde{\xi}_{j-1}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j-1}).
\end{aligned}$$

Si $a_i \geq b_j$, entonces

$$\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) \geq \rho_{f,\tau}(\lceil x_1 \rceil) + \rho_{g,\tau}(\lfloor x_2 \rfloor) = \rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2) + (a_i - b_j)(1 - \widetilde{x}_1) =$$

$$= \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) + \underbrace{(a_i - b_j)}_{\geq 0}\underbrace{(1 - \widetilde{x}_1)}_{>0} \geq \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x).$$

Luego, $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \rho_{f,\tau}(\lceil x_1 \rceil) + \rho_{g,\tau}(\lfloor x_2 \rfloor)$ y sabemos que $\lceil x_1 \rceil, \lfloor x_2 \rfloor \in \mathbb{Z}$. De la misma manera, si $a_i < b_j$, entonces

$$\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) \geq \rho_{f,\tau}(\lfloor x_1 \rfloor) + \rho_{g,\tau}(\lceil x_2 \rceil) = \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) + \underbrace{(b_j - a_i)}_{\geq 0}\underbrace{(1 - \widetilde{x}_2)}_{>0}.$$

Así, $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \rho_{f,\tau}(\lfloor x_1 \rfloor) + \rho_{g,\tau}(\lceil x_2 \rceil)$. □

A lo largo de este capítulo nos será útil hacer ciertos cambios de variables. Por este motivo, en lo que sigue veremos cómo estos cambios de variables modifican la suma de Minkowski de dos funciones.

Los automorfismos T, U y $V : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ definidos por $T(x,y) = (-x+h, y)$, $U(x,y) = (-x+e, y)$ y $V(x,y) = (-x+h+e, y)$ inducen isomorfismos T^*, U^* y $V^* : \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \longrightarrow \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ como en el Capítulo 2, que cumplen que $T^*(f) = \widetilde{f}$ y $U^*(g) = \widetilde{g}$ donde

$$\begin{cases} \widetilde{f}(x,y) = x^h f(\frac{1}{x}, y) = x^h \sum_{i=0}^{h} \alpha_i(y) x^{-i} = \sum_{i=0}^{h} \alpha_{h-i}(y) x^i = \sum_{i=0}^{h} \widetilde{\alpha}_i(y) x^i \\ \widetilde{g}(x,y) = x^e g(\frac{1}{x}, y) = x^e \sum_{j=0}^{e} \beta_j(y) x^{-j} = \sum_{j=0}^{e} \beta_{e-j}(y) x^j = \sum_{j=0}^{e} \widetilde{\beta}_j(y) x^j \end{cases} \tag{3.2}$$

con $\widetilde{\alpha}_i(y) = \alpha_{h-i}(y)$ y $\widetilde{\beta}_j(y) = \beta_{e-j}(y)$.

Lema 3.14 *Sea $\tau \in \mathbb{C}$. Bajo las hipótesis y definiciones anteriores, $T(\mathbf{Q}_{f,\tau}) = \mathbf{Q}_{\widetilde{f},\tau}$, $U(\mathbf{Q}_{g,\tau}) = \mathbf{Q}_{\widetilde{g},\tau}$ y $V(\mathbf{Q}_{f,\tau} + \mathbf{Q}_{g,\tau}) = \mathbf{Q}_{\widetilde{f},\tau} + \mathbf{Q}_{\widetilde{g},\tau}$. Además, $\rho_{f,\tau}(h-x) = \rho_{\widetilde{f},\tau}(x)$, $\rho_{g,\tau}(e-x) = \rho_{\widetilde{g},\tau}(x)$ y $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(h+e-x) = \rho_{\widetilde{f},\tau} \boxplus \rho_{\widetilde{g},\tau}(x)$.*

Demostración: Se tiene que

$$T(\mathbf{Q}_{f,\tau}) = T(\mathcal{C}onv\{(i, -ord_\tau(\alpha_i)) \ / \ 0 \le i \le h\}) = \mathcal{C}onv\{T(i, -ord_\tau(\alpha_i)) \ / \ 0 \le i \le h\} =$$

$$= \mathcal{C}onv\{(h-i, -ord_\tau(\alpha_i)) \ / \ 0 \le i \le h\} = \mathcal{C}onv\{(i, -ord_\tau(\alpha_{h-i})) \ / \ 0 \le i \le h\} = \mathbf{Q}_{\widetilde{f},\tau},$$

y de la misma manera $U(\mathbf{Q}_{g,\tau}) = \mathbf{Q}_{\widetilde{g},\tau}$.

Para ver que $V(\mathbf{Q}_{f,\tau} + \mathbf{Q}_{g,\tau}) = \mathbf{Q}_{\widetilde{f},\tau} + \mathbf{Q}_{\widetilde{g},\tau}$, usando lo anterior resulta que $\mathbf{Q}_{\widetilde{f},\tau} + \mathbf{Q}_{\widetilde{g},\tau} = T(\mathbf{Q}_{f,\tau}) + U(\mathbf{Q}_{g,\tau})$. Pero $(a,b) \in T(\mathbf{Q}_{f,\tau}) + U(\mathbf{Q}_{g,\tau})$ si y sólo si $(a,b) = (h - x_1, y_1) + (e - x_2, y_2)$ con $(x_1, y_1) \in \mathbf{Q}_{f,\tau}$, $(x_2, y_2) \in \mathbf{Q}_{g,\tau}$. Equivalentemente$(a,b) = (h + e - (x_1 + x_2), y_1 + y_2)$ con $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbf{Q}_{f,\tau} + \mathbf{Q}_{g,\tau}$, es decir $(a,b) \in V(\mathbf{Q}_{f,\tau} + \mathbf{Q}_{g,\tau})$. Por lo tanto,

$$\mathbf{Q}_{\widetilde{f},\tau} + \mathbf{Q}_{\widetilde{g},\tau} = T(\mathbf{Q}_{f,\tau}) + U(\mathbf{Q}_{g,\tau}) = V(\mathbf{Q}_{f,\tau} + \mathbf{Q}_{g,\tau}).$$

Por último, dado que T, U y V transforman simétricamente los polítopos, también lo hacen con las parametrizaciones consideradas de sus techos. □

La estrategia para el cálculo de la suma de Minkowski $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ se basa en el caso en que las dos funciones son crecientes. Para poder hacer esta reducción, veremos en primer lugar que para calcular la suma de Minkowski basta restringirse a dominios donde ambas funciones tienen igual crecimiento.

Sean

$$i_0 = \text{mín}\{i \in \mathrm{I}_f \ / \ \alpha_i(\tau) \neq 0\} \qquad i_1 = \text{máx}\{i \in \mathrm{I}_f \ / \ \alpha_i(\tau) \neq 0\}$$
$$j_0 = \text{mín}\{j \in \mathrm{I}_g \ / \ \beta_j(\tau) \neq 0\} \qquad j_1 = \text{máx}\{j \in \mathrm{I}_g \ / \ \beta_j(\tau) \neq 0\}$$

Así, $\rho_{f,\tau}(x)$ será estrictamente creciente para los $0 \leq x \leq i_0$, constantemente nula para $i_0 \leq x \leq i_1$ y estrictamente decreciente para $i_1 \leq x \leq h$ por la Observación 3.8. De la misma forma, $\rho_{g,\tau}(x)$ será estrictamente creciente para los $0 \leq x \leq j_0$, constantemente nula para $j_0 \leq x \leq j_1$ y estrictamente decreciente para $j_1 \leq x \leq e$.

Lema 3.15 *Con la notación anterior,* $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2)$ *donde:*

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq i_0, & 0 \leq x_2 \leq j_0 & si & 0 \leq x < i_0 + j_0 \\ i_0 \leq x_1 \leq i_1, & j_0 \leq x_2 \leq j_1 & si & i_0 + j_0 \leq x \leq i_1 + j_1 \\ i_1 \leq x_1 \leq h, & j_1 \leq x_2 \leq e & si & i_1 + j_1 < x \leq h + e \end{cases} .$$

Demostración: Recordemos que, por el Lema 3.13, es suficiente para calcular $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x)$, hacerlo en los $x \in \mathbb{Z}$, y que en ese caso, $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2)$ donde x_1 y x_2 son enteros también.

Para $0 \leq x < i_0 + j_0$, como $x_1 + x_2 = x$, si $x_1 > i_0$ entonces x_2 debe ser menor que j_0 (las cuentas son las mismas si empezamos suponiendo que $x_2 > j_0$). Entonces, $\rho_{f,\tau}(x_1 - 1) \geq \rho_{f,\tau}(x_1)$ y $\rho_{g,\tau}(x_2 + 1) > \rho_{g,\tau}(x_2)$. Luego, $\rho_{f,\tau}(x_1 - 1) + \rho_{g,\tau}(x_2 + 1) > \rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2) = \text{máx}\{\rho_{f,\tau}(\widetilde{x}_1) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{x}_2) \ / \ \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 = x\}$. Pero $(x_1 - 1) + (x_2 + 1) = x$ contradiciendo la definición de $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$. Por lo tanto, debe valer que $0 \leq x_1 \leq i_0$ y $0 \leq x_2 \leq j_0$.

Para $i_0 + j_0 \leq x \leq i_1 + j_1$, existen $x_1 \in [i_0, i_1]$, $x_2 \in [j_0, j_1]$ tales que $x_1 + x_2 = x$ y con ellos $\rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2) = 0 + 0 \geq \rho_{f,\tau}(\widetilde{x}_1) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{x}_2)$ para todo $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$. Por lo tanto, x_1 y x_2 sirven.

Para $i_1 + j_1 < x \leq h + e$, tomando $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ como en (3.2), y como $h + e - x \in [0, h + e - i_1 - j_1)$, existen $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ tales que $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \rho_{\widetilde{f},\tau} \boxplus \rho_{\widetilde{g},\tau}(h + e - x) = \rho_{\widetilde{f},\tau}(\widetilde{x}_1) + \rho_{\widetilde{g},\tau}(\widetilde{x}_2)$ con $0 \leq \widetilde{x}_1 \leq h - i_1$ y $0 \leq \widetilde{x}_2 \leq e - j_1$ (pues $h + e - x \in [0, (h - i_1) + (e - j_1)]$). Así, tomando $x_1 = h - \widetilde{x}_1$, $x_2 = e - \widetilde{x}_2$, se cumple que $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2)$ con $i_1 \leq x_1 \leq h$ y $j_1 \leq x_2 \leq e$. □

Este resultado nos permitirá, haciendo cambios de variables como en el Lema 3.14, restringirnos a estudiar el caso en que tanto $\rho_{f,\tau}$ como $\rho_{g,\tau}$ son crecientes.

Para $F(x, y) = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i(y) x^i \in \mathbb{C}[x, y]$ primitivo, notamos $i_{F,0} = \text{mín}\{i \in \mathcal{I}_F \ / \ \gamma_i(\tau) \neq 0\}$ y $i_{F,1} = \text{máx}\{i \in \mathcal{I}_F \ / \ \gamma_i(\tau) \neq 0\}$, y definimos

$$F_0(x, y) = \sum_{i=0}^{i_{F,0}} \gamma_i(y) x^i \quad \text{y} \quad F_1(x, y) = \sum_{i=0}^{i_{F,1}} \gamma_{k-i}(y) x^i.$$

Entonces, para los polinomios f y g que estamos considerando,

$$\begin{array}{ll} f_0(x, y) = \sum_{i=0}^{i_0} \alpha_i(y) x^i, & g_0(x, y) = \sum_{j=0}^{j_0} \beta_j(y) x^j \\ f_1(x, y) = \sum_{i=0}^{h-i_1} \alpha_{h-i}(y) x^i, & g_1(x, y) = \sum_{j=0}^{e-j_1} \beta_{h-j}(y) x^j. \end{array} \tag{3.3}$$

Notar que, con la notación de (3.2), $f_1(x,y) = (\widetilde{f})_0(x,y)$ y $g_1(x,y) = (\widetilde{g})_0(x,y)$. De esta forma, por el Lema 3.14,

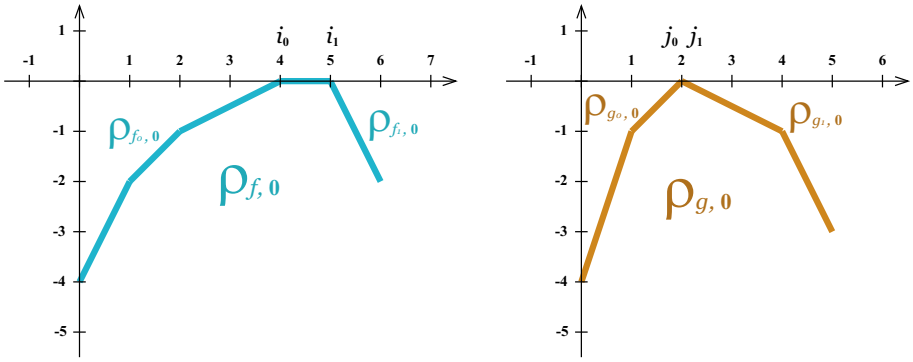
$$\rho_{f,\tau}(x) = \begin{cases} \rho_{f_0,\tau}(x) & \text{si } 0 \le x \le i_0 \\ 0 & \text{si } i_0 \le x \le i_1 \\ \rho_{f_1,\tau}(h-x) & \text{si } i_1 \le x \le h \end{cases} \quad \text{y} \quad \rho_{g,\tau}(x) = \begin{cases} \rho_{g_0,\tau}(x) & \text{si } 0 \le x \le j_0 \\ 0 & \text{si } j_0 \le x \le j_1 \\ \rho_{g_1,\tau}(e-x) & \text{si } j_1 \le x \le e. \end{cases}$$

Considerando que si el dominio de $\rho_{g,\tau}$ es un punto $\{\eta\}$, tenemos que $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \rho_{f,\tau}(x-\eta) + \rho_{g,\tau}(\eta)$; entonces usando el lema anterior y nuevamente el Lema 3.14 conseguimos

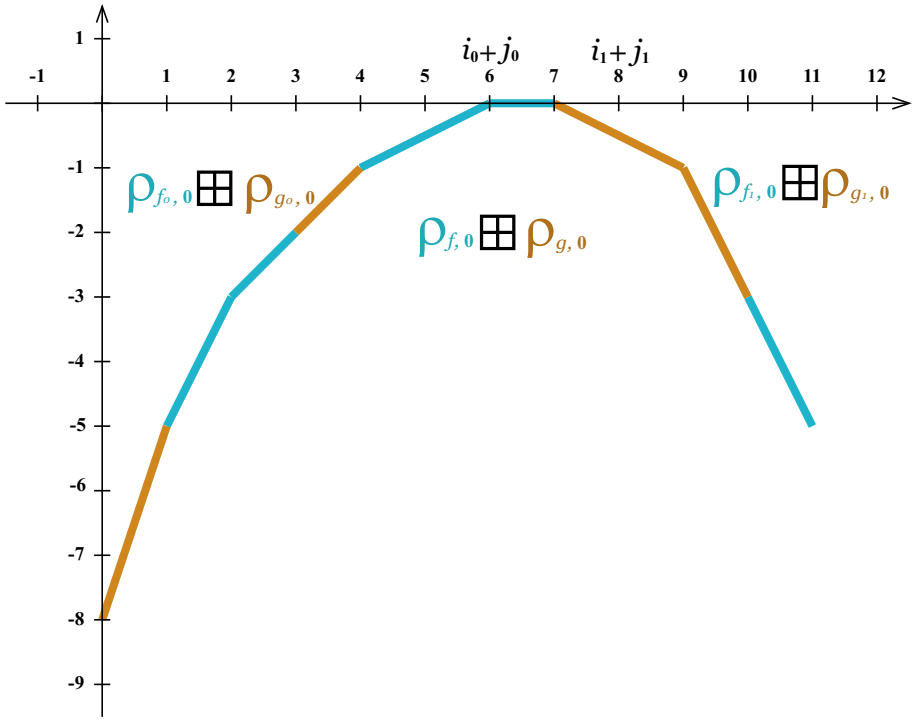
$$\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \begin{cases} \rho_{f_0,\tau} \boxplus \rho_{g_0,\tau}(x) & \text{si } 0 \le x \le i_0 + j_0 \\ 0 & \text{si } i_0 + j_0 \le x \le i_1 + j_1 \\ \rho_{f_1,\tau} \boxplus \rho_{g_1,\tau}(h+e-x) & \text{si } i_1 + j_1 \le x \le h + e \end{cases}. \tag{3.4}$$

Esto nos permitirá, una vez hallada $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ cuando ambas son crecientes, encontrar $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ en el caso general.

Para verlo gráficamente, sean $\rho_{f,0} : [0,6] \to \mathbb{R}$ y $\rho_{g,0} : [0,5] \to \mathbb{R}$ las siguientes funciones:



Entonces, hallando $\rho_{f,0} \boxplus \rho_{g,0}$ podemos observar como, hasta el punto $i_0 + j_0$ es igual a $\rho_{f_0,\tau} \boxplus \rho_{g_0,\tau}(x)$, desde $i_1 + j_1$ es igual a $\rho_{f_1,\tau} \boxplus \rho_{g_1,\tau}(h+e-x)$, y entre ellos, es identicamente nula.



La siguiente observación es un resultado técnico sobre funciones cóncavas lineales a trozos que utilizaremos en el cálculo de la suma de Minkowski.

Observación 3.16 *Sea* $\rho : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *cóncava y lineal a trozos, y* $\eta_1 < \eta_2$ *en* I *tales que*

$$\rho(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1 & \forall\, \eta_1 \leq x < \eta_1 + \epsilon \\ a_2 x + b_2 & \forall\, \eta_2 - \epsilon < x \leq \eta_2 \end{cases}$$

para algún $\epsilon > 0$. *Entonces,* $a_2(\eta_2 - \eta_1) \leq \rho(\eta_2) - \rho(\eta_1) \leq a_1(\eta_2 - \eta_1)$.

Demostración: Como ρ es una función cóncava, cumple para todo $t \in (0,1)$ que

$$\rho(t(\eta_2 - \eta_1) + \eta_1) \geq t(\rho(\eta_2) - \rho(\eta_1)) + \rho(\eta_1).$$

Tomando t suficientemente chico, $t(\eta_2 - \eta_1) + \eta_1 \in (\eta_1, \eta_1 + \epsilon)$ con lo cual $\rho(t(\eta_2 - \eta_1) + \eta_1) = a_1(t(\eta_2 - \eta_1) + \eta_1) + b_1$. Entonces

$$a_1 t(\eta_2 - \eta_1) + \cancel{a_1\eta_1 + b_1} \geq t(\rho(\eta_2) - \rho(\eta_1)) + \cancel{a_1\eta_1 + b_1}.$$

Luego, dividiéndolo por t, tenemos que $a_1(\eta_2 - \eta_1) \geq \rho(\eta_2) - \rho(\eta_1)$. Con cálculos similares, se consigue que $a_2(\eta_2 - \eta_1) \leq \rho(\eta_2) - \rho(\eta_1)$. □

Dadas $\rho_{f,\tau} : [0,h] \to \mathbb{R}$ y $\rho_{g,\tau} : [0,e] \to \mathbb{R}$ lineales a trozos y crecientes, para ver cómo hallamos $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x)$, usaremos la siguiente notación:

$$\rho_{f,\tau}(x) = \Big\{ a_i(x - \xi_{i-1}) + \rho_{f,\tau}(\xi_{i-1}) \quad \text{si } \xi_{i-1} \le x \le \xi_i$$

$$\rho_{g,\tau}(x) = \Big\{ b_j(x - \widetilde{\xi}_{j-1}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j-1}) \quad \text{si } \widetilde{\xi}_{j-1} \le x \le \widetilde{\xi}_j$$

donde $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = h$ y $0 = \widetilde{\xi}_0 < \widetilde{\xi}_1 < \ldots < \widetilde{\xi}_m = e$; $a_i > a_{i+1} \ge 0$ y $b_j > b_{j+1} \ge 0$ para todo $1 \le i \le n-1$, $1 \le j \le m-1$.

Podemos suponer, sin perder generalidad, que $a_1 \ge b_1$. Definimos recursivamente i_k, j_k para $k \in \mathbb{N}_0$:

- $i_0 := 0, \quad j_0 := 0.$
- Para $k \ge 1$, si $j_{k-1} \ne m$, definimos

$$\begin{aligned} i_k &:= \text{máx}\{i \ / \ a_i \ge b_{j_{k-1}+1}\} \\ j_k &:= \begin{cases} \text{máx}\{j \ / \ b_j > a_{i_k+1}\} & \text{si } i_k \ne n \\ m & \text{si } i_k = n \end{cases}. \end{aligned}$$

- Si $j_{k-1} = m, \quad i_k := n, \ j_k := m.$

La recursión termina cuando $i_k = n$ y $j_k = m$.

Notar que $[0, h+e] = \bigcup_{k \ge 1}([\xi_{i_{k-1}} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}, \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}] \cup [\xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}, \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_k}])$.

Proposición 3.17 *Bajo las hipótesis y notaciones anteriores, para $k \ge 1$,*

$$\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \begin{cases} \rho_{f,\tau}(x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) & \textit{si } \xi_{i_{k-1}} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}} \le x \le \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}} \\ \rho_{f,\tau}(\xi_{i_k}) + \rho_{g,\tau}(x - \xi_{i_k}) & \textit{si } \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}} \le x \le \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_k} \end{cases}.$$

Demostración: Sea $x \in [0, h+e]$ y supongamos primero que $x \in [\xi_{i_{k-1}} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}, \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}]$. Sean $x_1 \in [0,h]$, $x_2 \in [0,e]$ tales que $x = x_1 + x_2$. Si $x_2 < \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}$, entonces $x_1 > x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}} \ge \xi_{i_{k-1}}$. Luego, por la Observación 3.16,

$$\rho_{f,\tau}(x_1) - \rho_{f,\tau}(x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) \le a_{i_{k-1}+1}(x_1 - (x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}})) =$$

$$= a_{i_{k-1}+1}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}} - x_2) < b_{j_{k-1}}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}} - x_2) \le \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) - \rho_{g,\tau}(x_2).$$

De esta manera, $\rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2) \le \rho_{f,\tau}(x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}})$.

Si, en cambio, $x_2 > \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}$, entonces $\xi_{i_{k-1}} < x_1 < x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}} \leq \xi_{i_k}$. Por lo tanto, nuevamente por la Observación 3.16,

$$\rho_{f,\tau}(x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) - \rho_{f,\tau}(x_1) \geq a_{i_k}(x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}} - x_1)) =$$

$$= a_{i_k}(x_2 - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) \geq b_{j_{k-1}+1}(x_2 - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) \geq \rho_{g,\tau}(x_2) - \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}).$$

Así, $\rho_{f,\tau}(x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) \geq \rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2)$.

Luego, $\max\{\rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2) \ / \ x_1 + x_2 = x\} = \rho_{f,\tau}(x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}})$.

Veamos ahora qué sucede si $x \in [\xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}, \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_k}]$. Sean nuevamente $x_1,\ x_2$ tales que $x = x_1 + x_2$. Si $x_1 < \xi_{i_k}$, entonces $\widetilde{\xi}_{j_{k-1}} \leq x - \xi_{i_k} < x_2$. Luego,

$$\rho_{f,\tau}(\xi_{i_k}) - \rho_{f,\tau}(x_1) \geq a_{i_k}(\xi_{i_k} - x_1) = a_{i_k}(x_2 - (x - \xi_{i_k})) \geq$$

$$\geq b_{j_{k-1}+1}(x_2 - (x - \xi_{i_k})) \geq \rho_{g,\tau}(x_2) - \rho_{g,\tau}(x - \xi_{i_k}).$$

Por lo tanto $\rho_{f,\tau}(\xi_{i_k}) + \rho_{g,\tau}(x - \xi_{i_k}) \geq \rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2)$.

Si, en cambio $x_1 > \xi_{i_k}$, entonces $x_2 < x - \xi_{i_k} \leq \widetilde{\xi}_{j_k}$. Así

$$\rho_{f,\tau}(x_1) - \rho_{f,\tau}(\xi_{i_k}) \leq a_{i_k+1}(x_1 - \xi_{i_k}) < b_{j_k}(x - \xi_{i_k} - x_2) \leq \rho_{g,\tau}(x - \xi_{i_k}) - \rho_{g,\tau}(x_2).$$

De esta manera, $\rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2) \leq \rho_{f,\tau}(\xi_{i_k}) + \rho_{g,\tau}(x - \xi_{i_k})$ y tenemos que $\max\{\rho_{f,\tau}(x_1) + \rho_{g,\tau}(x_2) \ / \ x_1 + x_2 = x\} = \rho_{f,\tau}(\xi_{i_k}) + \rho_{g,\tau}(x - \xi_{i_k})$. □

Gráficamente, esto puede interpretarse como que ordenamos de mayor a menor las pendientes de cada segmento de los gráficos de $\rho_{f,\tau}$ y $\rho_{g,\tau}$, y construimos el gráfico de $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ pegándolas según ese orden a partir del punto $(0,\ \rho_{f,\tau}(0) + \rho_{g,\tau}(0))$. Si observamos las figuras del Ejemplo 3.12, podemos ver cómo en el gráfico de $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$, las pendientes están justamente ordenadas de mayor a menor.

Ahora, dados cualesquiera $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ polinomios primitivos, $\tau \in \mathbb{C}^*$, podemos hallar $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$: por (3.4) sabemos (con la notación de (3.3)), que

$$\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \begin{cases} \rho_{f_0,\tau} \boxplus \rho_{g_0,\tau}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq i_0 + j_0 \\ 0 & \text{si } i_0 + j_0 \leq x \leq i_1 + j_1. \\ \rho_{f_1,\tau} \boxplus \rho_{g_1,\tau}(h + e - x) & \text{si } i_1 + j_1 \leq x \leq h + e \end{cases}$$

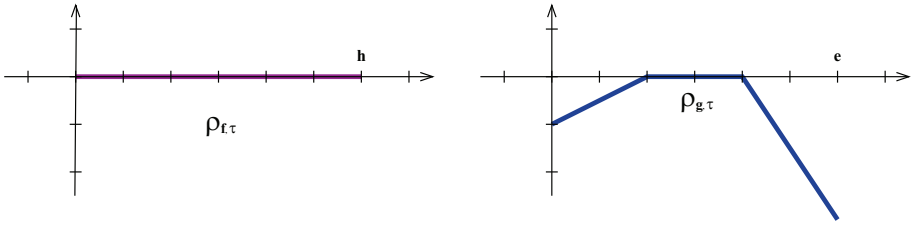
donde las funciones $\rho_{f_0,\tau},\ \rho_{g_0,\tau},\ \rho_{f_1,\tau}$ y $\rho_{g_1,\tau}$ son crecientes, y por lo tanto $\rho_{f_0,\tau} \boxplus \rho_{g_0,\tau}(x)$ y $\rho_{f_1,\tau} \boxplus \rho_{g_1,\tau}(h + e - x)$ se calculan usando la Proposición 3.17.

3.3.2. Cálculo de integrales mixtas

Utilizando los resultados sobre cálculo de sumas de Minkowski vistos en la sección anterior, se calculará la integral mixta $\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau})$.

Para hacerlo, consideraremos distintos casos, dependiendo de cómo sean los gráficos de $\rho_{f,\tau}$ y $\rho_{g,\tau}$. En el último caso se verá qué sucede en general, para cualesquiera $f(x,y) = \sum_{j=0}^{h} \alpha_j(y).x^j$ y $g(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \beta_j(y).x^j \in \mathbb{C}[x,y]$ polinomios primitivos y $\tau \in \mathbb{C}^*$.

- El primer caso que tendremos en cuenta es cuando $\alpha_0(\tau) \neq 0$ y $\alpha_h(\tau) \neq 0$. (Sin pérdida de generalidad elegimos α_0, α_h, como podrían haber sido β_0, β_e los que no se anulen en τ).



Como $\alpha_0(\tau) \neq 0$ y $\alpha_h(\tau) \neq 0$, sus órdenes en τ son $ord_\tau(\alpha_0) = ord_\tau(\alpha_h) = 0$. Luego, $\mathbf{Q}_{f,\tau} = \mathcal{C}onv(\{(0,0);(h,0);\{(j,-ord_\tau(\alpha_j)) \ / \ 1 \leq j \leq h-1\}\})$ y como $\alpha_j \in \mathbb{C}[y]$, $ord_\tau(\alpha_j) \geq 0$. De esta forma, $\mathbf{Q}_{f,\tau} \subset [0,h] \times (-\infty, 0]$. Pero $(0,0),(h,0) \in \mathbf{Q}_{f,\tau}$ lo cual implica, por convexidad, que $\{(x,0) \,/\, 0 \leq x \leq h\} \subset \mathbf{Q}_{f,\tau}$. Así, al ser el *techo* de $[0,h] \times (-\infty, 0]$, debe serlo también de $\mathbf{Q}_{f,\tau}$. Luego, $\rho_{f,\tau} \equiv 0$.

Ahora bien, para g sabemos que, por ser primitivo, existe j tal que $\beta_j(\tau) \neq 0$. Recordemos que $j_0 = \text{mín}\{j \ / \ \beta_j(\tau) \neq 0\}$ y $j_1 = \text{máx}\{j \ / \ \beta_j(\tau) \neq 0\}$. Entonces, por la fórmula (3.4)

$$\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \begin{cases} \rho_{f_0,\tau} \boxplus \rho_{g_0,\tau}(x) = 0 + \rho_{g_0,\tau}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 0 + j_0 \\ 0 & \text{si } j_0 \leq x \leq h + j_1 \\ \rho_{f_1,\tau} \boxplus \rho_{g_1,\tau}(h+e-x) = 0 + \rho_{g_1,\tau}(h+e-x) & \text{si } h + j_1 \leq x \leq h + e \end{cases}$$

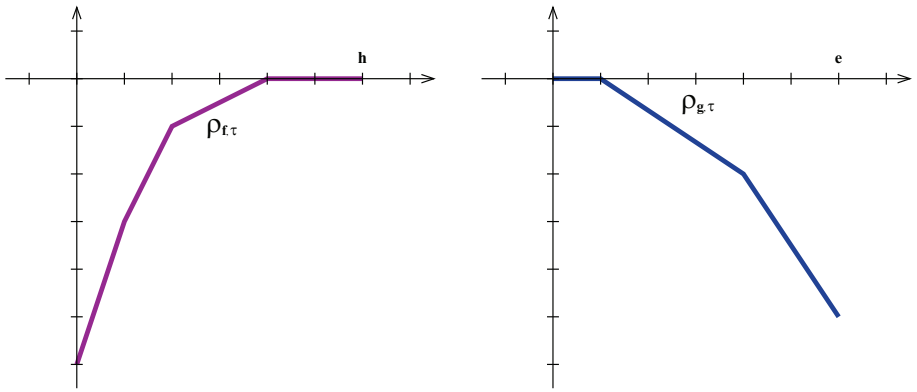
Entonces, la integral mixta resulta:

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}) = \int_0^{h+e} \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x)dx - \int_0^h \rho_{f,\tau}(x)dx - \int_0^e \rho_{g,\tau}(x)dx =$$

$$= \cancel{\int_0^{j_0} \rho_{g_0,\tau}(x)dx} + \int_{j_0}^{j_1+h} 0 \ dx + \int_{h+j_1}^{h+e} \rho_{g_1,\tau}(h+e-x)dx - \int_0^h 0 \ dx - \cancel{\int_0^{j_0} \rho_{g_0,\tau}(x)dx} -$$

$$- \int_{j_0}^{j_1} 0 \ dx - \int_{j_1}^{e} \rho_{g_1,\tau}(e-x)dx = \int_{h+j_1}^{h+e} \rho_{g_1,\tau}(h+e-x)dx - \int_{j_1}^{e} \rho_{g_1,\tau}(e-x)dx = 0.$$

- El segundo caso que tendremos en cuenta es cuando $\alpha_0(\tau) = 0, \beta_0(\tau) \neq 0$ y $\alpha_h(\tau) \neq 0, \beta_e(\tau) = 0$.



En esta situación, $\rho_{f,\tau}$ es creciente con $\rho_{f,\tau}(h) = 0$ y $\rho_{g,\tau}$ es decreciente, con $\rho_{g,\tau}(0) = 0$. Por lo tanto, usando la fórmula (3.4) debe valer que

$$\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \begin{cases} \rho_{f,\tau}(x) + \rho_{g,\tau}(0) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq i_0 \\ 0 & \text{si } i_0 \leq x \leq h + j_1 \\ \rho_{f,\tau}(h) + \rho_{g,\tau}(x-h) & \text{si} \quad h + j_1 \leq x \leq h + e \end{cases}$$

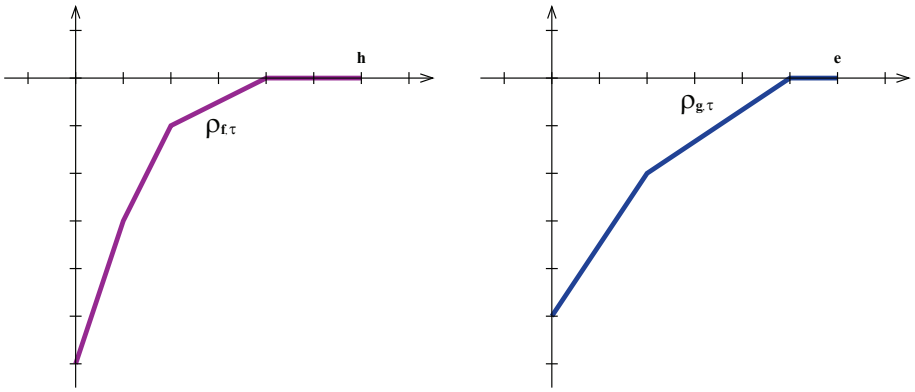
$$= \begin{cases} \rho_{f,\tau}(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq h \\ \rho_{g,\tau}(x-h) & \text{si} \quad h \leq x \leq h + e \end{cases}$$

De esta manera, la integral mixta será:

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}) = \int_0^{h+e} \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x)dx - \int_0^h \rho_{f,\tau}(x)dx - \int_0^e \rho_{g,\tau}(x)dx =$$

$$= \cancel{\int_0^h \rho_{f,\tau}(x)dx} + \int_h^{h+e} \rho_{g,\tau}(x-h)dx - \cancel{\int_0^h \rho_{f,\tau}(x)dx} - \int_0^e \rho_{g,\tau}(x)dx = 0.$$

- El tercer caso que tendremos en cuenta es cuando $\alpha_0(\tau) = \beta_0(\tau) = 0$ y $\alpha_h(\tau) \neq 0, \beta_e(\tau) \neq 0$.



Usando la notación de la Proposición 3.17, sabemos que

$$\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \begin{cases} \rho_{f,\tau}(x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) & \text{si } \xi_{i_{k-1}} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}} \leq x \leq \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}} \\ \rho_{f,\tau}(\xi_{i_k}) + \rho_{g,\tau}(x - \xi_{i_k}) & \text{si } \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}} \leq x \leq \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_k} \end{cases}.$$

Suponiendo como allí que $a_1 \geq b_1$, para $k = 1, \ldots, N$ (donde N es el primer natural tal que $i_N = n$, $j_N = m$), sea

$$\mathcal{MI}_k = \int_{\xi_{i_{k-1}} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_k}} \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x)dx - \int_{\xi_{i_{k-1}}}^{\xi_{i_k}} \rho_{f,\tau}(x)dx - \int_{\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\widetilde{\xi}_{j_k}} \rho_{g,\tau}(x)dx. \tag{3.5}$$

De esta manera, tenemos que

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}) = \int_0^{h+e} \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x)dx - \int_0^h \rho_{f,\tau}(x)dx - \int_0^e \rho_{g,\tau}(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \Big(\int_{\xi_{i_{k-1}} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_k}} \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x)dx - \int_{\xi_{i_{k-1}}}^{\xi_{i_k}} \rho_{f,\tau}(x)dx - \int_{\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\widetilde{\xi}_{j_k}} \rho_{g,\tau}(x)dx \Big) = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{MI}_k.$$

Podemos observar que $\mathcal{MI}_k = \mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}|_{[\xi_{i_{k-1}}, \xi_{i_k}]}, \rho_{g,\tau}|_{[\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}, \widetilde{\xi}_{j_k}]})$, es decir que hallar cualquier integral mixta entre dos funciones cóncavas crecientes $\rho_{f,\tau}$ y $\rho_{g,\tau}$ consistirá en calcular la suma de integrales mixtas más sencillas.

Hallemos entonces para cada $1 \leq k \leq N$, $\mathcal{MI}_k$:

$$\mathcal{MI}_k = \int_{\xi_{i_{k-1}} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_k}} \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x)dx - \int_{\xi_{i_{k-1}}}^{\xi_{i_k}} \rho_{f,\tau}(x)dx - \int_{\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\widetilde{\xi}_{j_k}} \rho_{g,\tau}(x)dx =$$

$$= \int_{\xi_{i_{k-1}} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}} \Big(\rho_{f,\tau}(x - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) \Big) dx + \int_{\xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_k}} \Big(\rho_{f,\tau}(\xi_{i_k}) + \rho_{g,\tau}(x - \xi_{i_k}) \Big) dx -$$

$$-\int_{\xi_{i_{k-1}}}^{\xi_{i_k}} \rho_{f,\tau}(x)dx - \int_{\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\widetilde{\xi}_{j_k}} \rho_{g,\tau}(x)dx = (\xi_{i_k} - \xi_{i_{k-1}})\rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) + (\widetilde{\xi}_{j_k} - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}})\rho_{f,\tau}(\xi_{i_k}).$$

Notar que construimos el gráfico de $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}$ en el intervalo del dominio $[\xi_{i_{k-1}} + \widetilde{\xi}_{j_{k-1}}, \xi_{i_k} + \widetilde{\xi}_{j_k}]$, pegando primero el gráfico de $\rho_{f,\tau}$ en $[\xi_{i_{k-1}}, \xi_{i_k}]$ y luego el de $\rho_{g,\tau}$, en $[\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}, \widetilde{\xi}_{j_k}]$, y la integral mixta en esa sección del dominio resulta ser la suma entre el *ancho* de $graf(\rho_{f,\tau})$ multiplicado por donde comienza $\rho_{g,\tau}$, y el *ancho* de $graf(\rho_{g,\tau})$ multiplicado por donde termina $\rho_{f,\tau}$.

Luego, la integral mixta de $\rho_{f,\tau}$ y $\rho_{g,\tau}$ es:

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}) = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{MI}_k = \sum_{k=1}^{N} (\xi_{i_k} - \xi_{i_{k-1}})\rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) + (\widetilde{\xi}_{j_k} - \widetilde{\xi}_{j_{k-1}})\rho_{f,\tau}(\xi_{i_k}). \quad (3.6)$$

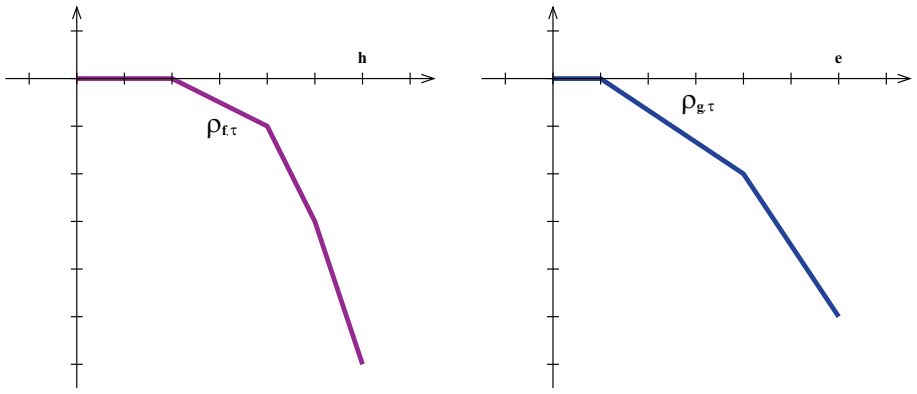
Si en el último paso ($k = N$) sólo quedan pendientes de $\rho_{f,\tau}$, la notación elegida nos permite considerarlo como que a $\rho_{f,\tau}$ le sumamos una función cuyo dominio es un punto.

En el Ejemplo 3.12, que está bajo las hipótesis de este caso,

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}) = \sum_{k=1}^{2} \mathcal{MI}_k = (2-0).\rho_{g,\tau}(0)+(5-0).\rho_{f,\tau}(2)+(6-2).\rho_{g,\tau}(5)+(6-5).\rho_{f,\tau}(6) =$$

$$= 2.(-5) + 5.(-1) + 4.0 + 1.0 = -15.$$

- El cuarto caso que tendremos en cuenta es cuando $\alpha_0(\tau) \neq 0, \beta_0(\tau) \neq 0$ y $\alpha_h(\tau) = \beta_e(\tau) = 0$.



En esta situación, tomando $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ como en (3.2), es decir

$$\begin{cases} \widetilde{f}(x,y) = \sum_{i=0}^{h} \alpha_{h-i}(y)x^i = \sum_{i=0}^{h} \widetilde{\alpha}_i(y)x^i \\ \widetilde{g}(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \beta_{e-j}(y)x^j = \sum_{j=0}^{e} \widetilde{\beta}_j(y)x^j \end{cases}$$

con $\widetilde{\alpha}_i(y) = \alpha_{h-i}(y)$ y $\widetilde{\beta}_j(y) = \beta_{e-j}(y)$, estamos en el caso anterior pues entonces $\widetilde{\alpha}_0(\tau) = \widetilde{\beta}_0(\tau) = 0$ y $\widetilde{\alpha}_h(\tau) \neq 0, \widetilde{\beta}_e(\tau) \neq 0$, y podemos calcular $\mathcal{MI}(\rho_{\widetilde{f},\tau}, \rho_{\widetilde{g},\tau})$. Sabemos por el Lema 3.14 que $\rho_{f,\tau}(h-x) = \rho_{\widetilde{f},\tau}(x)$; $\rho_{g,\tau}(e-x) = \rho_{\widetilde{g},\tau}(x)$ y $\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(h+e-x) = \rho_{\widetilde{f},\tau} \boxplus \rho_{\widetilde{g},\tau}(x)$. Veamos que $\mathcal{MI}(\rho_{\widetilde{f},\tau}, \rho_{\widetilde{g},\tau}) = \mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau})$.

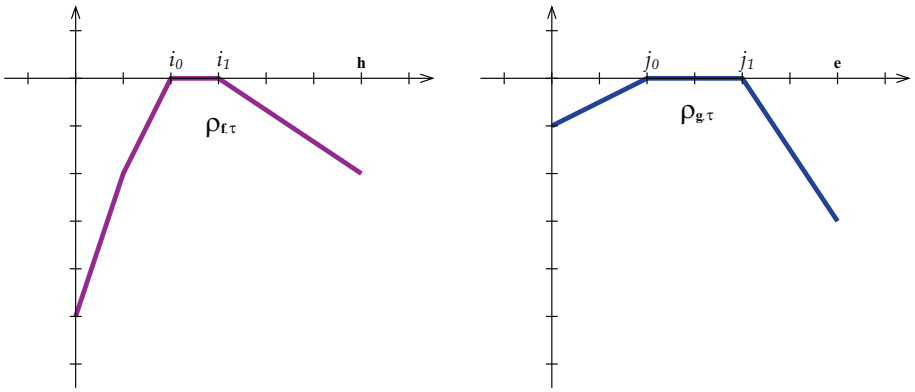
$$\mathcal{MI}(\rho_{\widetilde{f},\tau}, \rho_{\widetilde{g},\tau}) = \int_0^{h+e} \rho_{\widetilde{f},\tau} \boxplus \rho_{\widetilde{g},\tau}(x)dx - \int_0^h \rho_{\widetilde{f},\tau}(x)dx - \int_0^e \rho_{\widetilde{g},\tau}(x)dx =$$

$$= \int_0^{h+e} \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(h+e-x)dx - \int_0^h \rho_{f,\tau}(h-x)dx - \int_0^e \rho_{g,\tau}(e-x)dx =$$

$$= -\int_{h+e}^0 \rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x)dx + \int_h^0 \rho_{f,\tau}(x)dx + \int_e^0 \rho_{g,\tau}(x)dx = \mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}).$$

- El quinto y último caso que tendremos en cuenta es cuando $\alpha_h(\tau) = \beta_e(\tau) = \alpha_0(\tau) = \beta_0(\tau) = 0$.

  Notar que como f y g son primitivos, existen i, j tales que $\alpha_i(\tau) \neq 0$ y $\beta_j(\tau) \neq 0$.



Recordemos que si

$$i_0 = \text{mín}\{i \in \text{I}_f \ / \ \alpha_i(\tau) \neq 0\} \qquad i_1 = \text{máx}\{i \in \text{I}_f \ / \ \alpha_i(\tau) \neq 0\}$$
$$j_0 = \text{mín}\{j \in \text{I}_g \ / \ \beta_j(\tau) \neq 0\} \qquad j_1 = \text{máx}\{j \in \text{I}_g \ / \ \beta_j(\tau) \neq 0\}$$

con la notación dada en (3.3)

$$f_0(x,y) = \textstyle\sum_{i=0}^{i_0} \alpha_i(y)x^i \qquad g_0(x,y) = \sum_{j=0}^{j_0} \beta_j(y)x^j$$
$$f_1(x,y) = \textstyle\sum_{i=0}^{h-i_1} \alpha_{h-i}(y)x^i \qquad g_1(x,y) = \sum_{j=0}^{e-j_1} \beta_{h-j}(y)x^j$$

vimos en (3.4) que

$$\rho_{f,\tau} \boxplus \rho_{g,\tau}(x) = \begin{cases} \rho_{f_0,\tau} \boxplus \rho_{g_0,\tau}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq i_0 + j_0 \\ 0 & \text{si } i_0 + j_0 \leq x \leq i_1 + j_1 \\ \rho_{f_1,\tau} \boxplus \rho_{g_1,\tau}(h+e-x) & \text{si } i_1 + j_1 \leq x \leq h + e \end{cases}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau},\rho_{g,\tau}) = \int_0^{i_0+j_0} \rho_{f_0,\tau} \boxplus \rho_{g_0,\tau}(x)dx - \int_0^{i_0} \rho_{f_0,\tau}(x)dx - \int_0^{j_0} \rho_{g_0,\tau}(x)dx +$$

$$+ \int_{i_1+j_1}^{h+e} \rho_{f_1,\tau} \boxplus \rho_{g_1,\tau}(h+e-x)dx - \int_{i_1}^{h} \rho_{f_1,\tau}(h-x)dx - \int_{j_1}^{e} \rho_{g_1,\tau}(e-x)dx =$$

$$= \mathcal{MI}(\rho_{f_0,\tau},\rho_{g_0,\tau}) + \mathcal{MI}(\rho_{f_1,\tau},\rho_{g_1,\tau}) = \mathcal{MI}(\rho_{f_0,\tau},\rho_{g_0,\tau}) + \mathcal{MI}(\rho_{(\widetilde{f})_0,\tau},\rho_{(\widetilde{g})_0,\tau}).$$

Por último, las dos integrales mixtas $\mathcal{MI}(\rho_{f_0,\tau},\rho_{g_0,\tau})$ y $\mathcal{MI}(\rho_{(\widetilde{f})_0,\tau},\rho_{(\widetilde{g})_0,\tau})$ se calculan como en el tercer caso.

Observación 3.18 *Si* $f(x,y) = \sum_{j=0}^{h} \alpha_j(y).x^j$ *y* $g(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \beta_j(y).x^j \in \mathbb{C}[x,y]$ *son polinomios primitivos y* $\tau \in \mathbb{C}-\{0\}$*, la integral mixta entre* $\rho_{f,\tau}$ *y* $\rho_{g,\tau}$ *es no nula si y sólo si* $\alpha_0(\tau)=0$ *y* $\beta_0(\tau)=0$*, o* $\alpha_h(\tau)=0$ *y* $\beta_e(\tau)=0$*.*

3.4. Multiplicidad de intersección y la integral mixta

Para que la cota dada por el Teorema 3.9 para la cantidad de raíces aisladas en $(\mathbb{C}^*)^n$ de un sistema

$$\mathbf{F} = \begin{cases} f(x,y) = \sum_{j=0}^{h} \alpha_j(y).x^j = 0 \\ g(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \beta_j(y).x^j = 0 \end{cases}$$

sea mejor que la dada por el Teorema de Bernstein, la integral mixta entre $\rho_{f,\tau}$ y $\rho_{g,\tau}$ debe ser no nula para algún $\tau \in \mathbb{C}-\{0\}$. Lo visto en la sección anterior nos permite concluir que esto sucede cuando $\alpha_0(\tau)=0$ y $\beta_0(\tau)=0$, o que $\alpha_h(\tau)=0$ y $\beta_e(\tau)=0$. En estos casos, la cota superior para la cantidad las raíces en común bajará justamente en $-\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau},\rho_{g,\tau})$. Podemos suponer (pues de lo contrario, el Teorema de Bernstein nos dice que la cantidad de raíces es nula, y cualquier intento de mejorar esa cota sería trivial) que $\mathcal{L}(\mathfrak{S}) > 0$ (como fue definido al comienzo del Capítulo 2).

Si $\alpha_0(\tau)=0$ y $\beta_0(\tau)=0$, tenemos que (x,τ) es una raíz de $\mathbf{F}_{(1,0)}$ para cualquier $x \in \mathbb{C}^*$ y $(0,\tau)$ resulta una raíz del sistema $\mathbf{F}$. Si en cambio $\alpha_h(\tau)=0$ y $\beta_e(\tau)=0$, entonces (x,τ) es raíz de $\mathbf{F}_{(-1,0)}$ para todo $x \in \mathbb{C}^*$ y $(0,\tau)$ resulta una raíz del sistema $\widetilde{\mathbf{F}} = \begin{cases} \widetilde{f}(x,y) = 0 \\ \widetilde{g}(x,y) = 0 \end{cases}$.

En ambas situaciones, el Teorema 2.10 de Bernstein nos dice que las raíces aisladas de $\mathbf{F}$ en $(\mathbb{C}^*)^2$ contadas con su multiplicidad son menos que $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$, pues esto sucede si y sólo si $\mathbf{F}_\alpha$ tiene raíces en $(\mathbb{C}^*)^2$ para algún $\alpha \neq 0$, lo cual sucede con (x,τ). A su vez, en la demostración del Teorema 2.10, para ver que el sistema $\mathbf{F}$ tiene estrictamente menos raíces que $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$, construíamos un sistema auxiliar $\mathbf{F}^t$ tal que al menos una de sus ramas de

soluciones tendía (cuando t tiende a cero) a una solución que no pertenece a $(\mathbb{C}^*)^2$: en el primer caso, será $(0,\tau)$ como raíz de $\mathbf{F}$ y, en el segundo, $(0,\tau)$ como raíz de $\widetilde{\mathbf{F}}$ que puede pensarse como una raíz "en el infinito" del sistema $\mathbf{F}$. En lo que sigue relacionaremos la integral mixta entre $\rho_{f,\tau}$ y $\rho_{g,\tau}$ con la multiplicidad de estas raíces.

Dado $\tau \in \mathbb{C}-\{0\}$, considerando los polinomios $f_\tau(x,y) = f(x,y+\tau)$ y $g_\tau(x,y) = g(x,y+\tau)$ tendremos que $\text{mult}(f,g;(0,\tau)) = \text{mult}(f_\tau,g_\tau;(0,0))$, $\text{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,\tau)) = \text{mult}(\widetilde{f_\tau},\widetilde{g_\tau};(0,0))$ y $\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau},\rho_{g,\tau}) = \mathcal{MI}(\rho_{f_\tau,0},\rho_{g_\tau,0})$. Gracias a esto, podemos suponer que $\tau = 0$ y estudiar la relación entre la multiplicidad de intersección de f y g en el origen, y la integral mixta entre $\rho_{f,0}$ y $\rho_{g,0}$.

El siguiente teorema caracteriza la multiplicidad de intersección de dos polinomios f y g en $\mathbb{C}[x,y]$ en un punto $p \in \mathbb{C}^2$ a través de propiedades. La demostración de este teorema es constructiva, de forma tal que nos da la idea para hallar $\text{mult}(f,g;p)$ para f, g y p fijos (ver [7, Capítulo 3, Sección 3, Teorema 3]).

Teorema 3.19 *La multiplicidad de intersección cumple con las siguientes propiedades:*

1. $\text{mult}(f,g;p) = \infty$ *si y sólo si* f *y* g *tienen un factor común* $h \in \mathbb{C}[x,y]$ *que se anula en* p.
2. $\text{mult}(f,g;p) = 0$ *si y sólo si* $f(p) \neq 0$ *o* $g(p) \neq 0$.
3. *Sea* $\Psi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ *un isomorfismo afín,* $f^\Psi \in \mathbb{C}[x,y]$ *definido por:* $f^\Psi(x) = f(\Psi(x))$. *Entonces* $\text{mult}(f,g;p) = \text{mult}(f^\Psi, g^\Psi; q = \Psi^{-1}(p))$.
4. $\text{mult}(f,g;p) = \text{mult}(g,f;p)$.
5. *Si* $m_p(f)$ *es la multiplicidad de* f *en* p *(o sea* $ord(f(x-p_1,y-p_2))$*, entonces* $\text{mult}(f,g;p) \geq m_p(f).m_p(g)$ *y vale la igualdad si y sólo si* f *y* g *no tienen tangentes comunes en* p.
6. *Si* $f = \prod_{i=1}^n f_i^{r_i}$ *y* $g = \prod_{j=1}^m g_j^{s_j}$, $\quad \text{mult}(f,g;p) = \sum_{i,j} r_i s_j \,\text{mult}(f_i,g_j;p)$.
7. $\text{mult}(f,g;p) = \text{mult}(f,g+h.f;p)$ *para todo* $h \in \mathbb{C}[x,y]$.

Además, si $\mathcal{I} : \mathbb{C}[x,y] \times \mathbb{C}[x,y] \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *que cumple las propiedades 1 a 7, entonces* $\mathcal{I}(f,g;p) = \text{mult}(f,g;p)$ *para todo* f,g,p. □

En lo que queda de esta sección, vamos a probar el siguiente resultado que establece la relación fundamental entre multiplicidad de intersección e integral mixta:

Teorema 3.20 *Sean* $f(x,y) = \sum_{i=0}^{h} \alpha_i(y)x^i$ *y* $g(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \beta_j(y)x^j \in \mathbb{C}[x,y]$ *primitivos y genéricos con* $\rho_{f,\tau}$ *y* $\rho_{g,\tau}$ *fijas. Entonces,*

$$\operatorname{mult}(f,g;(0,\tau)) + \operatorname{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,\tau)) \geq -\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau},\rho_{g,\tau}).$$

Recordemos que, usando traslaciones, basta verlo para $\tau = 0$. Una herramienta que usaremos para calcular la multiplicidad de intersección de dos curvas en el origen es la resultante entre dos polinomios:

Definición 3.21 *Sean* $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$ *de grado positivo en* x*,*

$$\begin{cases} f(x,y) = \alpha_h(y)x^h + \cdots + \alpha_0(y) & \text{con } \alpha_h \neq 0 \\ g(x,y) = \beta_e(y)x^e + \cdots + \beta_0(y) & \text{con } \beta_e \neq 0 \end{cases}$$

donde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}[y]$*. Definimos la* resultante *de* f *y* g *con respecto a* x *como el determinante*

$$\operatorname{Res}_x(f,g)(y) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 & & & & \beta_0 & & & \\ \alpha_1 & \alpha_0 & & & \beta_1 & \beta_0 & & \\ & \alpha_1 & \ddots & & & \beta_1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \alpha_0 & \vdots & & \ddots & \beta_0 \\ & \vdots & & \alpha_1 & & \vdots & & \beta_1 \\ \alpha_h & & & & \beta_e & & & \\ & \alpha_h & & \vdots & & \beta_e & & \vdots \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \alpha_h & & & & \beta_e \end{pmatrix}}_{e \text{ columnas}} \underbrace{\qquad\qquad}_{h \text{ columnas}}$$

Para el caso de polinomios genéricos f y $g \in \mathbb{C}[x,y]$ tales que $\rho_{f,0}$ y $\rho_{g,0}$ son ambas crecientes, podemos aplicar el siguiente teorema (ver [17, Capítulo 4, Teorema (5.2)]) para calcular la multiplicidad de intersección de f y g en el origen usando la resultante:

Teorema 3.22 *Sean* $f(x,y) = \sum_{i=0}^{h} \alpha_i(y)x^i$ *y* $g(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \beta_j(y)x^j \in \mathbb{C}[x,y]$ *sin ceros comunes en el eje* x *salvo en el origen y tal que* $\alpha_h(0) \neq 0$ *y* $\beta_e(0) \neq 0$*. Entonces* $\operatorname{Res}_x(f,g)$ *tiene al cero como raíz de multiplicidad igual a* $\operatorname{mult}(f,g;(0,0))$*.*

En el caso de f y g genéricos, y $\rho_{f,0}(x)$ y $\rho_{g,0}(x)$ cualesquiera, consideraremos los polinomios f_0 y g_0:

$$\begin{cases} f_0(x,y) = \sum_{i=0}^{\widetilde{r}_0} \alpha_i(y)x^i \\ g_0(x,y) = \sum_{j=0}^{\widetilde{s}_0} \beta_j(y)x^j \end{cases}$$

donde

$$\widetilde{r}_0 = \text{máx}\{i \in \text{I}_f \ / \ \alpha_i(0) \neq 0\}$$
$$\widetilde{s}_0 = \text{máx}\{j \in \text{I}_g \ / \ \beta_j(0) \neq 0\}$$

Probaremos que en el caso genérico vale que $\text{mult}(f, g; (0,0)) = \text{mult}(f_0, g_0; (0,0))$ y deduciremos entonces la validez del Teorema 3.20 a partir del teorema anterior.

Observación 3.23 *Notar que la definición de f_0 y g_0 varió levemente respecto a la que dimos dos secciones antes en (3.3). Sin embargo, como la integral mixta entre $\rho_{f_0,\tau}$ y $\rho_{g_0,\tau}$ como fueron definidas en (3.3) es la misma que la integral mixta entre $\rho_{f_0,\tau}$ y $\rho_{g_0,\tau}$ con la nueva definición (ya que sólo estamos agregando a los dominios de $\rho_{f_0,\tau}$ y $\rho_{g_0,\tau}$ una sección donde serán identicamente nulas), entonces sigue valiendo que*

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau}, \rho_{g,\tau}) = \mathcal{MI}(\rho_{f_0,\tau}, \rho_{g_0,\tau}) + \mathcal{MI}(\rho_{(\widetilde{f})_0,\tau}, \rho_{(\widetilde{g})_0,\tau}).$$

El primer resultado que probaremos muestra que genéricamente para calcular la multiplicidad de intersección de dos polinomios en el origen, basta considerar sólo algunos de sus monomios:

Lema 3.24 *Sean $f(x,y) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i(y)x^i$ y $g(x,y) = \sum_{j=0}^{s} \beta_j(y)x^j$ polinomios primitivos genéricos con soportes prefijados. Entonces, con la notación anterior, vale que*

$$\text{mult}(f, g; (0,0)) = \text{mult}(f_0, g_0; (0,0)).$$

Demostración: Sean $\mathbf{R}$, $\mathbf{S} \subset \mathbb{Z}^2$ tales que $\mathbf{R} = \text{sop}(f)$ y $\mathbf{S} = \text{sop}(g)$. Como f y g son primitivos, $f(x,0)$ y $g(x,0)$ son no nulos. Más aún, si $f(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbf{R}} a_{ij}x^iy^j$ y $g(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbf{S}} b_{ij}x^iy^j$, tenemos que $f(x,0) = \sum_{i=r_0}^{\widetilde{r}_0} a_{i0}x^i$ y $g(x,0) = \sum_{i=s_0}^{\widetilde{s}_0} b_{i0}x^i$.
Por la genericidad de f y g sabemos que $mcd(f(x,0), g(x,0)) = x^{\text{mín}\{r_0,s_0\}}$. Usando el algoritmo de división de Euclides (podemos suponer, sin perder generalidad que $\widetilde{r}_0 \geq \widetilde{s}_0$) y llamando $r_1 = \text{mín}\{r_0, s_0\}$ y $u_0^{(0)}(x) = g(x,0)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(x,0) &= q_1^{(0)}(x)u_0^{(0)}(x) + u_1^{(0)}(x) \\
u_0^{(0)}(x) &= q_2^{(0)}(x)u_1^{(0)}(x) + u_2^{(0)}(x) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
u_{n_0-1}^{(0)}(x) &= q_{n_0+1}^{(0)}(x)x^{r_1} + 0 \\
u_{n_0}^{(0)}(x) &= x^{r_1} \\
u_{n_0+1}^{(0)}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Si ahora llamamos recursivamente:

$$\begin{aligned} h_0^{(0)}(x,y) &= g(x,y) \\ h_1^{(0)}(x,y) &= f(x,y) - q_1^{(0)}(x)h_0^{(0)}(x,y) \\ h_2^{(0)}(x,y) &= h_0^{(0)}(x,y) - q_2^{(0)}(x)h_1^{(0)}(x,y) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ h_{n_0+1}^{(0)}(x,y) &= h_{n_0-1}^{(0)}(x,y) - q_{n_0+1}^{(0)}(x)h_{n_0}^{(0)}(x,y), \end{aligned}$$

aplicando el Teorema 3.19

$$\begin{aligned} \operatorname{mult}(f,g;(0,0)) &= \operatorname{mult}(f,h_0^{(0)};(0,0)) = \operatorname{mult}(h_0^{(0)},h_1^{(0)};(0,0)) = \\ &= \operatorname{mult}(h_1^{(0)},h_2^{(0)};(0,0)) = \cdots = \operatorname{mult}(h_{n_0}^{(0)},h_{n_0+1}^{(0)};(0,0)), \end{aligned} \tag{3.7}$$

Observamos que

$$h_i^{(0)}(x,0) = u_i^{(0)}(x) \quad \forall\, 0 \le i \le n_0+1. \tag{3.8}$$

Esto último vale pues $h_0^{(0)}(x,0) = g(x,0) = u_0^{(0)}(x)$ y $h_1^{(0)}(x,0) = f(x,0) - q_1^{(0)}(x)g(x,0) = u_1^{(0)}(x)$. Inductivamente, si vale para todo $k \le i$, $h_{i+1}^{(0)}(x,0) = h_{i-1}^{(0)}(x,0) - q_{i+1}^{(0)}(x)h_i^{(0)}(x,0) = u_{i-1}^{(0)}(x) - q_{i+1}^{(0)}(x)u_i^{(0)}(x) = u_{i+1}^{(0)}(x)$.

Multiplicando por constantes apropiadas, definimos $f^{(1)}(x,y) = h_{n_0}^{(0)}(x,y)$ y $g^{(1)}(x,y) = h_{n_0+1}^{(0)}(x,y)$. Usando (3.8) (ya que $h_{n_0}^{(0)}(x,0) = x^{r_1}$ y $h_{n_0+1}^{(0)}(x,0) = 0$) tenemos entonces que $f^{(1)}(x,y)$ y $g^{(1)}(x,y)$ son de la forma

$$\begin{cases} f^{(1)}(x,y) = \sum_{i=0}^{r_1-1} yF_i^{(1)}(y)x^i + x^{r_1} + \sum_{i=r_1}^{\widetilde{r}_1} yF_i^{(1)}(y)x^i \\ g^{(1)}(x,y) = y^{k_1}\widetilde{g}^{(1)}(x,y) \end{cases}$$

donde y no divide a $\widetilde{g}^{(1)}(x,y)$ y $\widetilde{g}^{(1)}(x,0) = \sum_{i=s_1}^{\widetilde{s}_1} b_{i0}^{(1)}x^i + \sum_{i=e_1}^{\widetilde{e}_1} b_{i0}^{(1)}x^i$ con $\widetilde{s}_1 < r_1$ y $e_1 \ge r_1$. (En caso que el algoritmo de Euclides termine en un paso, es decir $n_0 = 0$, los polinomios son $f^{(1)}(x,y) = g(x,y)$ y $g^{(1)}(x,y) = h_1^{(0)}(x,y)$.)

Hasta aquí podemos calcular, usando el ítem 6 del Teorema 3.19

$$\begin{aligned} \operatorname{mult}(f,g;(0,0)) = \operatorname{mult}(f^{(1)},g^{(1)};(0,0)) = \operatorname{mult}(f^{(1)},y^{k_1};(0,0)) + \\ +\operatorname{mult}(f^{(1)},\widetilde{g}^{(1)};(0,0)) = r_1k_1 + \operatorname{mult}(f^{(1)},\widetilde{g}^{(1)};(0,0)). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Sean $\overline{\mathbf{R}} = \{(i,j) \in \mathbf{R} \ / \ i \le \widetilde{r}_0\}$ y $\overline{\mathbf{S}} = \{(i,j) \in \mathbf{S} \ / \ i \le \widetilde{s}_0\}$ los soportes de f_0 y g_0 respectivamente. Entonces, podemos escribir a f_0 y g_0 de la siguiente manera:

$$\begin{cases} f_0(x,y) = \sum_{(i,j)\in\overline{\mathbf{R}}} a_{ij}x^iy^j \\ g_0(x,y) = \sum_{(i,j)\in\overline{\mathbf{S}}} b_{ij}x^iy^j \end{cases}$$

los cuales son también primitivos. Y como $f_0(x,0) = f(x,0)$ y $g_0(x,0) = g(x,0)$, definiendo recursivamente

$$\begin{aligned} H_0^{(0)}(x,y) &= g_0(x,y) \\ H_1^{(0)}(x,y) &= f_0(x,y) - q_1^{(0)}(x)H_0^{(0)}(x,y) \\ H_2^{(0)}(x,y) &= H_0^{(0)}(x,y) - q_2^{(0)}(x)H_1^{(0)}(x,y) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ H_{n_0+1}^{(0)}(x,y) &= H_{n_0-1}^{(0)}(x,y) - q_{n_0+1}^{(0)}(x)H_{n_0}^{(0)}(x,y), \end{aligned}$$

tenemos que $H_i^{(0)}(x,0) = u_i(x) = h_i^{(0)}(x,0)\ \forall 0 \leq i \leq n_0+1$ (como $f_0(x,0) = f(x,0)$ y $g_0(x,0) = g(x,0)$, al aplicar el algoritmo de Euclides se obtienen los mismos cocientes, e inductivamente como antes se obtiene esta igualdad). Además,

$$\begin{cases} f_0^{(1)}(x,y) := H_{n_0}^{(0)}(x,y) = \sum_{i=0}^{r_1-1} yF_i^{(1)}(y)x^i + x^{r_1} + \sum_{i=r_1}^{\widetilde{r}_1} yF_{0i}^{(1)}(y)x^i \\ g_0^{(1)}(x,y) := H_{n_0+1}^{(0)}(x,y) = y^{k_1}\widetilde{g}_0^{(1)}(x,y) \end{cases}$$

donde cada monomio de $F_{0i}^{(1)}$ (o de $\widetilde{g}_0^{(1)}$) lo es de $F_i^{(1)}$ (respectivamente, de $\widetilde{g}^{(1)}$).
Para ver que podemos escribirlo así, primero debemos notar que cada monomio de f_0 o g_0 lo es de f o de g correspondientemente. Como hacemos exactamente las mismas cuentas para obtener $f_0^{(1)}$ y $g_0^{(1)}$ que para $f^{(1)}$ y $g^{(1)}$, y los coeficientes son genéricos (con lo que no se cancelan monomios a menos que el paso del algoritmo de Euclides que estamos llevando a cabo sea dirigido a eliminarlos, con lo cual desaparecerán en las dos cuentas), cada monomio de $f_0^{(1)}$ o $g_0^{(1)}$ aparece en $f^{(1)}$ o $g^{(1)}$ respectivamente (podemos pensarlo como que estamos especializando los coeficientes genéricos $\{a_{ij}\}_{(i,j)\notin\overline{\mathbf{R}}}, \{b_{ij}\}_{(i,j)\notin\overline{\mathbf{S}}}$ en cero.) Por lo tanto, cada monomio de $F_{0i}^{(1)}$ (o de $g_0^{(1)}$) lo es de $F_i^{(1)}$ (respectivamente, de $g^{(1)}$) y como la máxima potencia de y que divide a cada monomio de $g^{(1)}$ es k_1, en particular y^{k_1} divide a $g_0^{(1)}$ (aunque no podemos asegurar que sea la máxima potencia en dividir a todos y cada uno de sus monomios). De esta forma, también cada uno de los monomios de $\widetilde{g}_0^{(1)}$ aparece en $\widetilde{g}^{(1)}$.
Además, $f_0^{(1)}(x,0) = x^{r_1}$ con lo cual éste es uno de los monomios de $f_0^{(1)}$. Sólo nos falta ver entonces que cada monomio $c_{ij}x^iy^j$ de $f^{(1)}(x,y)$ con $i < r_1$ lo será también de $f_0^{(1)}(x,y)$: Lo haremos por inducción en el número de pasos. Por las definiciones, es claro que todo monomio de $h_0^{(0)}$ con exponente de x menor que r_1 lo es de $H_0^{(0)}$. Para $h_1^{(0)}$, se tiene que

$$c_{ij}x^iy^j = a_{ij}x^iy^j - (\sum_{k=0}^{i} b_{kj}(q_1^{(0)})_{i-k})x^iy^j = (a_{ij} - \sum_{k=0}^{i} b_{kj}(q_1^{(0)})_{i-k})x^iy^j$$

(donde $(q_1^{(0)})_{i-k}$ es el coeficiente en $q_1^{(0)}$ de x^{i-k}). Como $c_{ij}x^iy^j$ es tal que $(i,j) \in \overline{\mathbf{R}} \cup \overline{\mathbf{S}}$, $a_{ij}x^iy^j$ es un monomio de f_0 y $\sum_{k=0}^{i} b_{kj}(q_1^{(0)})_{i-k}x^iy^j$ lo es de $q_1^{(0)}g_0$. De esta manera, $c_{ij}x^iy^j$ es un monomio de $H_1^{(0)} = f_0^{(1)}$.

De igual forma, si todo monomio $c_{ij}x^iy^j$ de $h^{(0)}_{n-1}, h^{(0)}_n$ tal que $i < r_1$ lo es de $H^{(0)}_{n-1}, H^{(0)}_n$ (respectivamente), sea ahora $c_{ij}x^iy^j$ monomio de $h^{(0)}_{n+1}$ tal que $i < r_1$. Entonces,

$$c_{ij}x^iy^j = ((h^{(0)}_{n-1})_{ij} - \sum_{k=0}^{i}(h^{(0)}_n)_{kj}(q^{(0)}_{n+1})_{i-k})x^iy^j.$$

Pero como $i < r_1$, luego $i - k < r_1$ $\forall 0 \leq k \leq i$. De esta manera, $(h^{(0)}_{n-1})_{ij}x^iy^j$ es monomio de $H^{(0)}_{n-1}$ y $(h^{(0)}_n)_k(q^{(0)}_{n+1})_{i-k}x^iy^j$ de $H^{(0)}_n.q^{(0)}_{n+1}$, y por lo tanto $c_{ij}x^iy^j$ es monomio de $H^{(0)}_{n+1}$. Como $g^{(1)} = h^{(0)}_{n_0+1}$ y $g^{(1)}_0 = H^{(0)}_{n_0+1}$, de la misma demostración surge que todo monomio $d_{ij}x^iy^j$ de $\widetilde{g}^{(1)}$ tal que $i < r_1$ lo es también de $\widetilde{g}^{(1)}_0$. Así podemos concluir que

$$\begin{array}{c}\text{mult}(f_0, g_0; (0,0)) = \text{mult}(f^{(1)}_0, g^{(1)}_0; (0,0)) = \text{mult}(f^{(1)}_0, y^{k_1}; (0,0)) + \\ +\text{mult}(f^{(1)}_0, \widetilde{g}^{(1)}_0; (0,0)) = r_1k_1 + \text{mult}(f^{(1)}_0, \widetilde{g}^{(1)}_0; (0,0)).\end{array} \tag{3.10}$$

De (3.9) y (3.10) vemos que

$$\begin{array}{rcll}\text{mult}(f, g; (0,0)) & = & r_1k_1 + \text{mult}(f^{(1)}, \widetilde{g}^{(1)}; (0,0)) & \text{y} \\ \text{mult}(f_0, g_0; (0,0)) & = & r_1k_1 + \text{mult}(f^{(1)}_0, \widetilde{g}^{(1)}_0; (0,0)). & \end{array}$$

Veamos entonces que pasa con $\text{mult}(f^{(1)}, \widetilde{g}^{(1)}; (0,0))$ y $\text{mult}(f^{(1)}_0, \widetilde{g}^{(1)}_0; (0,0))$:

Sabemos que $f^{(1)}(x,0) = x^{r_1}$ y $\widetilde{g}^{(1)}(x,0) = \sum_{i=s_1}^{\widetilde{s}_1} b^{(1)}_{i0}x^i + \sum_{i=e_1}^{\widetilde{e}_1} b^{(1)}_{i0}x^i$. Llamando $u^{(1)}_0(x) = f^{(1)}$ y aplicando nuevamente el algoritmo de Euclides, tenemos que

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{g}^{(1)}(x,0) & = & \sum_{i=e_1}^{\widetilde{e}_1} b^{(1)}_{i0}x^{i-r_1}.u^{(1)}_0(x) + u^{(1)}_1(x) \\ u^{(1)}_0(x) & = & q^{(1)}_2(x)u^{(1)}_1(x) + u^{(1)}_2(x) \\ u^{(1)}_1(x) & = & q^{(1)}_3(x)u^{(1)}_2(x) + u^{(1)}_3(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u^{(1)}_{n_1-1}(x) & = & q^{(1)}_{n_1+1}(x)x^{r_2} + 0 \\ u^{(1)}_{n_1}(x) & = & x^{r_2} \\ u^{(1)}_{n_1+1}(x) & = & 0\end{array}$$

donde $u^{(1)}_1(x) = \sum_{i=s_1}^{\widetilde{s}_1} b^{(1)}_{i0}x^i$ y $r_2 = s_1$ si éste existe, y si no $r_2 = r_1$. Así, $0 \leq r_2 \leq r_1$ y si

ahora llamamos recursivamente:

$$\begin{aligned}
h_0^{(1)}(x,y) &= f^{(1)}(x,y)\\
h_1^{(1)}(x,y) &= \widetilde{g}^{(1)}(x,y) - \sum_{i=e_1}^{\widetilde{e}_1} b_{i0}^{(1)} x^{i-r_1}.h_0^{(1)}(x,y)\\
h_2^{(1)}(x,y) &= h_0^{(1)}(x,y) - q_1^{(1)}(x)h_1^{(1)}(x,y)\\
h_3^{(1)}(x,y) &= h_1^{(1)}(x,y) - q_2^{(1)}(x)h_2^{(1)}(x,y)\\
\vdots &\qquad\qquad \vdots\\
h_{n_1+1}^{(1)}(x,y) &= h_{n_1-1}^{(1)}(x,y) - q_{n_1+1}^{(1)}(x)h_{n_1}^{(1)}(x,y).
\end{aligned}$$

donde, como antes, $h_i^{(1)}(x,0) = u_i^{(1)}(x)\ \forall\, 0 \le i \le n_1+1$. Nuevamente multiplicando por una constante apropiada, tenemos que

$$\begin{cases} f^{(2)}(x,y) := h_{n_1}^{(1)}(x,y) = \sum_{i=0}^{r_2-1} yF_i^{(2)}(y)x^i + x^{r_2} + \sum_{i=r_2}^{\widetilde{r}_2} yF_i^{(2)}(y)x^i \\ g^{(2)}(x,y) := h_{n_1+1}^{(1)}(x,y) = y^{k_2}\widetilde{g}^{(2)}(x,y) \end{cases}$$

donde y no divide a $\widetilde{g}^{(2)}(x,y)$ y $\widetilde{g}^{(2)}(x,0) = \sum_{i=s_2}^{\widetilde{s}_2} b_{i0}^{(2)}x^i + \sum_{i=e_2}^{\widetilde{e}_2} b_{i0}^{(2)}x^i$ con $\widetilde{s}_2 < r_2$ y $e_2 \le r_2$.

Usando (3.9) y en forma análoga a (3.7), podemos calcular que

$$\begin{aligned}
\operatorname{mult}(f,g;(0,0)) &= r_1k_1 + \operatorname{mult}(f^{(1)},\widetilde{g}^{(1)};(0,0)) = r_1k_1 + \operatorname{mult}(f^{(2)},g^{(2)};(0,0)) =\\
&= r_1k_1 + \operatorname{mult}(f^{(2)},y^{k_2};(0,0)) + \operatorname{mult}(f^{(2)},\widetilde{g}^{(2)};(0,0)) =\\
&= r_1k_1 + r_2k_2 + \operatorname{mult}(f^{(2)},\widetilde{g}^{(2)};(0,0)).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Vamos a usar la notación $\widetilde{b}_{i0}^{(1)}$ para referirnos al coeficiente con el cual aparece el monomio x^i en $\widetilde{g}_0^{(1)}$. Notar que si $s_1 \le i \le \widetilde{s}_1$, entonces $\widetilde{b}_{i0}^{(1)} = b_{i0}^{(1)}$, y que para todo i tal que $\widetilde{b}_{i0}^{(1)} \neq 0$, entonces $b_{i0}^{(1)} \neq 0$ pues todo monomio que aparece en $\widetilde{g}_0^{(1)}$, aparece en $\widetilde{g}^{(1)}$.

De la misma forma que antes, definamos recursivamente

$$\begin{aligned}
H_0^{(1)}(x,y) &= f_0^{(1)}\\
H_1^{(1)}(x,y) &= \widetilde{g}_0^{(1)} - \sum_{i=e_1}^{\widetilde{e}_1} \widetilde{b}_{i0}^{(1)} x^{i-r_1} H_0^{(1)}(x,y)\\
H_2^{(1)}(x,y) &= H_0^{(1)}(x,y) - q_2^{(1)}(x)H_1^{(1)}(x,y)\\
H_3^{(1)}(x,y) &= H_1^{(1)}(x,y) - q_3^{(1)}(x)H_2^{(1)}(x,y)\\
\vdots &\qquad\qquad \vdots\\
H_{n_1+1}^{(1)}(x,y) &= H_{n_1-1}^{(1)}(x,y) - q_{n_1+1}^{(1)}(x)H_{n_1}^{(1)}(x,y).
\end{aligned}$$

Como $h_0^{(1)}(x,0) = f^{(1)}(x,0) = f_0^{(1)}(x,0) = H_0^{(1)}(x,0)$ y vale que

$$\widetilde{g}^{(1)}(x,0) = \sum_{i=s_1}^{\widetilde{s}_1} b_{i0}^{(1)} x^i + \sum_{i=e_1}^{\widetilde{e}_1} b_{i0}^{(1)} x^i \quad \text{y} \quad \widetilde{g}_0^{(1)}(x,0) = \sum_{i=s_1}^{\widetilde{s}_1} b_{i0}^{(1)} x^i + \sum_{i=e_1}^{\widetilde{e}_1} \widetilde{b}_{i0}^{(1)} x^i,$$

tenemos que $H_1^{(1)}(x,0) = h_1^{(1)}(x,0)$. Inductivamente, $H_i^{(1)}(x,0) = h_i^{(1)}(x,0)\ \forall 0 \leq i \leq n_1 + 1$. Definimos

$$\begin{cases} f_0^{(2)}(x,y) := H_{n_1}^{(1)}(x,y) = \sum_{i=0}^{r_2-1} y F_i^{(2)}(y) x^i + x^{r_2} + \sum_{i=r_2}^{\widetilde{r}_2} y F_{0i}^{(2)}(y) x^i \\ g_0^{(2)}(x,y) := H_{n_1+1}^{(1)}(x,y) = y^{k_2} \widetilde{g}_0^{(2)}(x,y) \end{cases}$$

donde cada monomio de $F_{0i}^{(2)}$ (o de $\widetilde{g}_0^{(2)}$) aparece en $F_i^{(2)}$ (respectivamente $\widetilde{g}^{(2)}$) y los monomios $d_{ij}x^i y^j$ de $F_i^{(2)}$ (correspondientemente $\widetilde{g}^{(2)}$) tales que $i < r_2$ aparece también en $F_{0i}^{(2)}$ (respectivamente, en $\widetilde{g}_0^{(2)}$). Estas afirmaciones se prueban usando los mismos argumentos que en el paso anterior pues todo lo que usamos es que todo monomio de f_0 y g_0 (ahora $f_0^{(1)}$ y $g_0^{(1)}$) lo es de f y g (ahora $f^{(1)}$ y $g^{(1)}$), que todo monomio de f y de g con potencia de x menor que el mínimo entre r_0 y s_0 (ahora sería menor que el mínimo entre r_1 y s_1) es monomio de f_0 y g_0, y que por ser los coeficientes genéricos, al aplicar el algoritmo de Euclides no se producen cancelaciones fuera de las buscadas. Luego,

$$\begin{aligned} \text{mult}(f_0, g_0; (0,0)) = r_1 k_1 + \text{mult}(f_0^{(1)}, \widetilde{g}_0^{(1)}; (0,0)) = r_1 k_1 + \text{mult}(f_0^{(2)}, y^{k_2}; (0,0)) + \\ + \text{mult}(f_0^{(2)}, \widetilde{g}_0^{(2)}; (0,0)) = r_1 k_1 + r_2 k_2 + \text{mult}(f_0^{(2)}, \widetilde{g}_0^{(2)}; (0,0)). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Esta construcción se repite recursivamente. Como f y g son genéricos, $\text{mult}(f, g; (0,0)) < \infty$, y como $k_i \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r_{i+1} \leq r_i$, para cada i, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $r_m = 0$. Entonces, multiplicando por constantes apropiadas,

$$\begin{cases} f^{(m)}(x,y) = 1 + \sum_{i=0}^{\widetilde{r}_m} y F_i^{(m)}(y) x^i \\ g^{(m)}(x,y) = y^{k_m} \widetilde{g}^{(m)}(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} f_0^{(m)}(x,y) = 1 + \sum_{i=0}^{\widetilde{r}_m} y F_{0i}^{(m)}(y) x^i \\ g_0^{(m)}(x,y) = y^{k_m} \widetilde{g}_0^{(m)}(x,y) \end{cases}$$

Entonces, $\text{mult}(f^{(m)}, g^{(m)}; (0,0)) = 0$ y $\text{mult}(f_0^{(m)}, g_0^{(m)}; (0,0)) = 0$ y, por lo tanto,

$$\text{mult}(f, g; (0,0)) = \sum_{i=1}^{m-1} r_i k_i = \text{mult}(f_0, g_0; (0,0)).$$

□

El siguiente resultado que muestra la relación entre integral mixta y multiplicidad de intersección en el caso en que $\rho_{f,0}, \rho_{g,0}$ son crecientes servirá de base para probar el Teorema 3.20. La demostración sigue las ideas de [18, Teorema 3] (otra demostración de este resultado en el caso general de n variables, pero para polinomios cuyas funciones asociadas $\rho_{f,0}$ coinciden, puede encontrarse en [5, Corolario 4.8]).

Proposición 3.25 *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$ polinomios primitivos tales que $\rho_{f,0}, \rho_{g,0}$ son crecientes. Entonces* $\mathrm{mult}(f,g;(0,0)) \geq -\mathcal{MI}(\rho_{f,0}, \rho_{g,0})$.

Demostración: Usando la notación $f(x,y) = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i(y)x^i$ y $g(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \beta_j(y)x^j$ (podemos suponer que $e \geq h$). Por el Teorema 3.22 sabemos que $\mathrm{mult}(f,g;(0,0)) = \max\{k \in \mathbb{N} \ / \ y^k \text{ divide a } \mathrm{Res}_x(f,g)\}$. Con la notación anterior, la matriz de Sylvester entre f y g es

$$\mathrm{M}(y) = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{h-1} & \alpha_{h-2} & \dots & 0 \\ \alpha_h & \alpha_{h-1} & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_h & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_h \end{array}\right.}_{e \text{ columnas}} \underbrace{\left.\begin{array}{cccc} \beta_0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \beta_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{h-1} & \beta_{h-2} & \dots & \beta_0 \\ \beta_h & \beta_{h-1} & \dots & \beta_1 \\ \beta_{h+1} & \beta_h & \dots & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{e-1} & \beta_{e-2} & \dots & \beta_{e-h} \\ \beta_e & \beta_{e-1} & \dots & \beta_{e-h+1} \\ 0 & \beta_e & \dots & \beta_{e-h+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_e \end{array}\right)}_{h \text{ columnas}} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. e \text{ filas} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. h \text{ filas} \end{array}.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$ notaremos $\lceil x \rceil$ al mínimo entero mayor o igual a x, y $\lfloor x \rfloor$ al máximo entero menor o igual a x. Consideremos ahora la matriz $\widetilde{\mathrm{M}}$ que surge de efectuar sobre $\mathrm{M}(y)$ las siguientes operaciones de columnas:

- Multiplicar la columna i-ésima por $y^{\lfloor -\rho_{g,0}(i-1) \rfloor}$ para todo $1 \leq i \leq e$.
- Multiplicar la columna $e+j$-ésima por $y^{\lfloor -\rho_{f,0}(j-1) \rfloor}$ para todo $1 \leq j \leq h$.

Luego, por las propiedades del determinante

$$\begin{aligned} \det(\widetilde{\mathrm{M}}(y)) &= y^{\sum_{i=0}^{e-1} \lfloor -\rho_{g,0}(i) \rfloor + \sum_{j=0}^{h-1} \lfloor -\rho_{f,0}(j) \rfloor} . \det(\mathrm{M}(y)) \\ &= y^{-(\sum_{i=0}^{e-1} \lceil \rho_{g,0}(i) \rceil + \sum_{j=0}^{h-1} \lceil \rho_{f,0}(j) \rceil)} . \det(\mathrm{M}(y)) \end{aligned}$$

donde la matriz $\widetilde{\mathrm{M}}$ es:

$$\begin{pmatrix}
y^{\lfloor -\rho_{g,0}(0)\rfloor}\alpha_0 & 0 & \dots & 0 & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(0)\rfloor}\beta_0 & 0 & \dots & 0 \\
y^{\lfloor -\rho_{g,0}(0)\rfloor}\alpha_1 & y^{\lfloor -\rho_{g,0}(1)\rfloor}\alpha_0 & \dots & 0 & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(0)\rfloor}\beta_1 & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(1)\rfloor}\beta_0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
y^{\lfloor -\rho_{g,0}(0)\rfloor}\alpha_h & y^{\lfloor -\rho_{g,0}(1)\rfloor}\alpha_{h-1} & \dots & 0 & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(0)\rfloor}\beta_h & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(1)\rfloor}\beta_{h-1} & \dots & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(h-1)\rfloor}\beta_1 \\
0 & y^{\lfloor -\rho_{g,0}(1)\rfloor}\alpha_h & \dots & 0 & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(0)\rfloor}\beta_{h+1} & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(1)\rfloor}\beta_h & \dots & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(h-1)\rfloor}\beta_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & y^{\lfloor -\rho_{g,0}(e-1)\rfloor}\alpha_1 & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(0)\rfloor}\beta_e & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(1)\rfloor}\beta_{e-1} & \dots & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(h-1)\rfloor}\beta_{e-h+1} \\
0 & 0 & \dots & y^{\lfloor -\rho_{g,0}(e-1)\rfloor}\alpha_2 & 0 & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(1)\rfloor}\beta_e & \dots & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(h-1)\rfloor}\beta_{e-h+2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & y^{\lfloor -\rho_{g,0}(e-1)\rfloor}\alpha_h & 0 & 0 & \dots & y^{\lfloor -\rho_{f,0}(h-1)\rfloor}\beta_e
\end{pmatrix}$$

En lo que sigue, usaremos que

- Si $b \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $\lfloor a \rfloor + b = \lfloor a + b \rfloor$ y $\lceil a \rceil + b = \lceil a + b \rceil$.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\min\{\lfloor a \rfloor, \lfloor b \rfloor\} = \lfloor \min\{a, b\} \rfloor$ y $\max\{\lceil a \rceil, \lceil b \rceil\} = \lceil \max\{a, b\} \rceil$.

Sabemos que si notamos $ord(\alpha_i(y)) = r_i$ y $ord(\beta_j(y)) = s_j$, entonces $r_i \geq -\rho_{f,0}(i)$ y $s_j \geq -\rho_{g,0}(j)$. De esta forma, $\forall\, 0 \leq i \leq h,\ 0 \leq j \leq e$ vale que

$$\lfloor -\rho_{g,0}(j) \rfloor + r_i \geq \lfloor -\rho_{g,0}(j) - \rho_{f,0}(i) \rfloor \quad \text{y} \quad \lfloor -\rho_{f,0}(i) \rfloor + s_j \geq \lfloor -\rho_{f,0}(i) - \rho_{g,0}(j) \rfloor.$$

Así, comparando el orden en y de cada coordenada no nula en la primera fila de $\widetilde{\mathrm{M}}$, tenemos que

$$\min_{1 \leq j \leq h+e} \{ord((\widetilde{\mathrm{M}}(y))_{1j}) \ / \ (\widetilde{\mathrm{M}}(y))_{1j} \neq 0\} = \min\{\lfloor -\rho_{g,0}(0) \rfloor + r_0, \lfloor -\rho_{f,0}(0) \rfloor + s_0\} \geq$$

$$\geq \lfloor \min\{-\rho_{g,0}(0) - \rho_{f,0}(0), -\rho_{f,0}(0) - \rho_{g,0}(0)\} \rfloor = -\lceil \rho_{f,0}(0) + \rho_{g,0}(0) \rceil = -\lceil \rho_{f,0} \boxplus \rho_{g,0}(0) \rceil.$$

Esto nos da una cota inferior para la máxima potencia de y que aparece como factor en la primera fila. Comparando de la misma manera las potencias de y en cada coordenada no nula de la fila k-ésima tenemos que

$$\min_{1 \leq j \leq h+e} \{ord((\widetilde{\mathrm{M}}(y))_{kj}) \ / \ (\widetilde{\mathrm{M}}(y))_{kj} \neq 0\} =$$

$$= \min\{\{\lfloor -\rho_{g,0}(j) \rfloor + r_i\}_{j+i=k-1, i \leq h, j \leq e-1}, \{\lfloor -\rho_{f,0}(i) \rfloor + s_j\}_{j+i=k-1, i \leq h-1, j \leq e}\} \geq$$

$$\geq \min\{\lfloor -\rho_{g,0}(j) \rfloor + r_i, \lfloor -\rho_{f,0}(i) \rfloor + s_j \ / \ i + j = k-1, i \leq h, j \leq e\} \geq$$

$$\geq \min\{\lfloor -\rho_{g,0}(j) - \rho_{f,0}(i) \rfloor \ / \ i + j = k-1, i \leq h, j \leq e\} =$$

$$= \min\{-\lceil \rho_{f,0}(i) + \rho_{g,0}(j) \rceil \ / \ i + j = k-1, i \leq h, j \leq e\} =$$

$$= -\lceil \max\{\rho_{f,0}(i) + \rho_{g,0}(j) \ / \ i + j = k-1, i \leq h, j \leq e\} \rceil = -\lceil \rho_{f,0} \boxplus \rho_{g,0}(k-1) \rceil.$$

Así, podemos definir la matriz $\mathrm{U}(y) \in \mathbb{C}[y]^{(h+e)\times(h+e)}$ como aquélla que surge de multiplicar cada fila k-ésima de $\widetilde{\mathrm{M}}(y)$ por $y^{\lceil \rho_{f,0} \boxplus \rho_{g,0}(k-1)\rceil}$, y cumple

$$\det(\widetilde{\mathrm{M}}(y)) = y^{-\sum_{k=0}^{h+e-1}\lceil \rho_{f,0}\boxplus\rho_{g,0}(k)\rceil}.\det(\mathrm{U}(y)).$$

Por lo tanto,

$$\det(\mathrm{M}(y)) = y^{-(\sum_{k=0}^{h+e-1}\lceil \rho_{f,0}\boxplus\rho_{g,0}(k)\rceil - \sum_{i=0}^{e-1}\lceil \rho_{g,0}(i)\rceil - \sum_{j=0}^{h-1}\lceil \rho_{f,0}(j)\rceil)}.\det(\mathrm{U}(y)).$$

Con lo cual, por el Teorema 3.22

$$\mathrm{mult}(f,g;(0,0)) \geq -(\sum_{k=0}^{h+e-1}\lceil \rho_{f,0}\boxplus\rho_{g,0}(k)\rceil - \sum_{i=0}^{e-1}\lceil \rho_{g,0}(i)\rceil - \sum_{j=0}^{h-1}\lceil \rho_{f,0}(j)\rceil).$$

A continuación, veremos que

$$\sum_{k=0}^{h+e-1}\lceil \rho_{f,0}\boxplus\rho_{g,0}(k)\rceil - \sum_{j=0}^{h-1}\lceil \rho_{f,0}(j)\rceil - \sum_{i=0}^{e-1}\lceil \rho_{g,0}(i)\rceil = \mathcal{MI}(\rho_{f,0},\rho_{g,0}),$$

de donde se deduce que $\mathrm{mult}(f,g;(0,0)) \geq -\mathcal{MI}(\rho_{f,0},\rho_{g,0})$.

Usando la notación introducida en la Sección 3.3 para la Proposición 3.17 y en la ecuación (3.5) y suponiendo como entonces que $a_1 \geq b_1$, por la Proposición 3.17, $\forall\, 1 \leq k \leq N$ vale que

$$\sum_{t=\xi_{i_{k-1}}+\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k}+\widetilde{\xi}_{j_k}-1}\lceil \rho_{f,0}\boxplus\rho_{g,0}(t)\rceil - \sum_{u=\xi_{i_{k-1}}}^{\xi_{i_k}-1}\lceil \rho_{f,0}(u)\rceil - \sum_{v=\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\widetilde{\xi}_{j_k}-1}\lceil \rho_{g,0}(v)\rceil =$$

$$= \sum_{t=\xi_{i_{k-1}}+\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k}+\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}-1}\Big(\lceil \rho_{f,0}(t-\widetilde{\xi}_{j_{k-1}})\rceil + \rho_{g,0}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}})\Big) + \sum_{t=\xi_{i_k}+\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k}+\widetilde{\xi}_{j_k}-1}\Big(\rho_{f,0}(\xi_{i_k}) + \lceil \rho_{g,0}(t-\xi_{i_k})\rceil\Big) -$$

$$- \sum_{u=\xi_{i_{k-1}}}^{\xi_{i_k}-1}\lceil \rho_{f,0}(u)\rceil - \sum_{v=\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\widetilde{\xi}_{j_k}-1}\lceil \rho_{g,0}(v)\rceil = \cancel{\sum_{t=\xi_{i_{k-1}}+\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k}+\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}-1}\lceil \rho_{f,0}(t-\widetilde{\xi}_{j_{k-1}})\rceil} + (\xi_{i_k}-\xi_{i_{k-1}})\rho_{g,0}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) +$$

$$+ (\widetilde{\xi}_{j_k}-\widetilde{\xi}_{j_{k-1}})\rho_{f,0}(\xi_{i_k}) + \cancel{\sum_{t=\xi_{i_k}+\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k}+\widetilde{\xi}_{j_k}-1}\lceil \rho_{g,0}(t-\xi_{i_k})\rceil} - \cancel{\sum_{u=\xi_{i_{k-1}}}^{\xi_{i_k}-1}\lceil \rho_{f,0}(u)\rceil} -$$

$$- \cancel{\sum_{v=\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\widetilde{\xi}_{j_k}-1}\lceil \rho_{g,0}(v)\rceil} = (\xi_{i_k}-\xi_{i_{k-1}})\rho_{g,0}(\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}) + (\widetilde{\xi}_{j_k}-\widetilde{\xi}_{j_{k-1}})\rho_{f,0}(\xi_{i_k}) = \mathcal{MI}_k.$$

De esta manera,

$$\Big(\sum_{t=0}^{h+e-1}\lceil\rho_{f,0}\boxplus\rho_{g,0}(t)\rceil-\sum_{u=0}^{h-1}\lceil\rho_{f,0}(u)\rceil-\sum_{v=0}^{e-1}\lceil\rho_{g,0}(v)\rceil\Big)=\sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{t=\xi_{i_{k-1}}+\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\xi_{i_k}+\widetilde{\xi}_{j_k}-1}\lceil\rho_{f,0}\boxplus\rho_{g,0}(t)\rceil-$$

$$-\sum_{u=\xi_{i_{k-1}}}^{\xi_{i_k}-1}\lceil\rho_{f,0}(u)\rceil-\sum_{v=\widetilde{\xi}_{j_{k-1}}}^{\widetilde{\xi}_{j_k}-1}\lceil\rho_{g,0}(v)\rceil\Big)=\sum_{k=1}^{N}\mathcal{MI}_k=\mathcal{MI}\big(\rho_{f,0},\rho_{g,0}\big)$$

donde la última igualdad es la identidad (3.6) probada en la sección anterior. □

Proposición 3.26 *Sean $f,g\in\mathbb{C}[x,y]$ polinomios primitivos tales que $\rho_{f,0},\rho_{g,0}$ son decrecientes. Entonces, con la notación (3.2),* $\mathrm{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,0))\geq-\mathcal{MI}(\rho_{f,0},\rho_{g,0})$.

Demostración: Por lo visto en el cuarto caso analizado en la Sección 3.3, $\mathcal{MI}(\rho_{\widetilde{f},\tau},\rho_{\widetilde{g},\tau})=\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau},\rho_{g,\tau})$. Como $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son primitivos y $\rho_{\widetilde{f},0}$ y $\rho_{\widetilde{g},0}$ son crecientes, por la Proposición 3.25, $\mathrm{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,0))\geq-\mathcal{MI}(\rho_{\widetilde{f},0},\rho_{\widetilde{g},0})$ que completa la demostración. □

Por último, dados $f(x,y)=\sum_{i=0}^{h}\alpha_i(y)x^i$ y $g(x,y)=\sum_{j=0}^{e}\beta_j(y)x^j\in\mathbb{C}[x,y]$ polinomios primitivos y genéricos, ya podemos probar el Teorema 3.20 que enunciaba

$$\mathrm{mult}(f,g;(0,\tau))+\mathrm{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,\tau))\geq-\mathcal{MI}(\rho_{f,\tau},\rho_{g,\tau}).\tag{3.13}$$

Demostración: Recordemos que, mediante una traslación, podemos suponer que $\tau=0$. Por la Observación 3.23 sabemos que

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,0},\rho_{g,0})=\mathcal{MI}(\rho_{f_0,0},\rho_{g_0,0})+\mathcal{MI}(\rho_{(\widetilde{f})_0,0},\rho_{(\widetilde{g})_0,0}).$$

Además, por el Lema 3.24, por ser f y g polinomios genéricos tenemos que

$$\mathrm{mult}(f,g;(0,0))=\mathrm{mult}(f_0,g_0;(0,0))\ \text{ y }\ \mathrm{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,0))=\mathrm{mult}((\widetilde{f})_0,(\widetilde{g})_0;(0,0)).$$

Finalmente, como $\rho_{f_0,0},\ \rho_{g_0,0},\ \rho_{(\widetilde{f})_0,0}$ y $\rho_{(\widetilde{g})_0,0}$ son crecientes, aplicando la Proposición 3.25

$$\begin{aligned}\mathrm{mult}(f_0,g_0;(0,0))&\geq-\mathcal{MI}(\rho_{f_0,0},\rho_{g_0,0})\quad\text{y}\\ \mathrm{mult}((\widetilde{f})_0,(\widetilde{g})_0;(0,0))&\geq-\mathcal{MI}(\rho_{(\widetilde{f})_0,0},\rho_{(\widetilde{g})_0,0}).\end{aligned}$$

Luego, con todo esto

$$\mathrm{mult}(f,g;(0,0))+\mathrm{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,0))=\mathrm{mult}(f_0,g_0;(0,0))+\mathrm{mult}((\widetilde{f})_0,(\widetilde{g})_0;(0,0))\geq$$

$$\geq-\mathcal{MI}(\rho_{f_0,0},\rho_{g_0,0})-\mathcal{MI}(\rho_{(\widetilde{f})_0,0},\rho_{(\widetilde{g})_0,0})=-\mathcal{MI}(\rho_{f,0},\rho_{g,0}).$$

□

Observación 3.27 *El Teorema 3.20, teniendo en cuenta las observaciones hechas al comienzo de esta sección y el resultado del Lema 3.10, permite obtener la cota superior enunciada en el Teorema 3.9. Esto da un refinamiento a la cota de Bernstein (ver Teorema 2.9) en el caso de dos polinomios en dos variables en* $(\mathbb{C}^*)^2$.

3.5. Algunos casos particulares

Si bien la cota del Teorema 3.9 es optimal bajo ciertas condiciones de genericidad, la demostración de la igualdad escapa a los alcances de esta tesis. Sin embargo, en esta última sección exhibiremos algunas familias particulares de polinomios para las cuales mostraremos que se alcanza la igualdad en el Teorema 3.20. Para eso, necesitaremos algunas nociones básicas de cálculo de multiplicidad usando anillos locales.

3.5.1. Anillos y órdenes locales

Una forma de calcular la multiplicidad introducida en la Definición 1.30 del Capítulo 1 es usando órdenes locales y bases standard para obtener información sobre ideales de $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{<x_1,\ldots,x_n>}$ (análogamente a como se hace para órdenes monomiales y bases de Gröbner para ideales de $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$).

Definición 3.28 *Un orden* $>$ *en* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, *o equivalentemente en el conjunto de monomios* $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, *con* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, *en* $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ *o* $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{<x_1,\ldots,x_n>}$

- *se dice* total *si para todo* $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *vale una y sólo una de las siguientes condiciones:*

$$x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} > x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n},\quad x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} = x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}\quad o\quad x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} < x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}.$$

- *es* compatible con la multiplicación *si para todo* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *vale que si* $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} > x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}$ *entonces* $x_1^{\alpha_1+\gamma_1}\ldots x_n^{\alpha_n+\gamma_n} > x_1^{\beta_1+\gamma_1}\ldots x_n^{\beta_n+\gamma_n}$.
- *se dice* bien ordenado *si todo conjunto* $M\subset\{x^\alpha \ / \ \alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$ *no vacío tiene primer elemento.*

Cuando un orden es total y compatible con la multiplicación, vale que es bien ordenado si y sólo si $1 < x^\alpha$ para todo $\alpha\neq 0$ (ver [3, Capítulo 2, Sección 4, Corolario 6]).

Definición 3.29 *Un orden* $>$ *en* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$

- *es* monomial *si es total, compatible con la multiplicación y bien ordenado.*

- *se dice* local *si es total, compatible con la multiplicación y* $1 > x^\alpha$ *para todo* $\alpha \neq 0$.
- *se dice* antigraduado *si es total, compatible con la multiplicación y cada vez que* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n < \beta_1 + \cdots + \beta_n$, *entonces* $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} > x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$.

A continuación presentaremos algunos resultados relacionados con órdenes locales y cálculo de multiplicidades. Estos resultados pueden encontrarse en [4, Capítulo 4] para el caso general de n variables y órdenes de semigrupo. Sin embargo, nos restringiremos al caso de dos variables y órdenes locales, ya que es el contexto en el que lo aplicaremos.

Observación 3.30 *Notemos que para todo* $w \in \mathbb{Z}^2_{>0}$ *se puede construir un orden local* $>$ *para monomios en* x, y *de la siguiente manera: decimos que* $x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} > x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$ *si y sólo si* $\langle w, (\alpha_1, \alpha_2)\rangle < \langle w, (\beta_1, \beta_2)\rangle$ *o* $\langle w, (\alpha_1, \alpha_2)\rangle = \langle w, (\beta_1, \beta_2)\rangle$ *y* $x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} \widetilde{>} x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$, *con* $\widetilde{>}$ *algún orden monomial (por ejemplo lexicográfico puro con* $x > y$*).*

Veamos que el orden $>$ así definido es un orden local:

Es un orden total pues $\langle \alpha, w\rangle < \langle \beta, w\rangle$ o $\langle \alpha, w\rangle > \langle \beta, w\rangle$ o en caso de ser iguales, se compara $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$ con $x^{\beta_1}y^{\beta_2}$ usando un orden $\widetilde{>}$ que es un orden total.

Es compatible con el producto porque si $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} > x^{\beta_1}y^{\beta_2}$ y $\langle \alpha, w\rangle < \langle \beta, w\rangle$, $\langle \alpha + \delta, w\rangle < \langle \beta + \delta, w\rangle$ para todo δ. Si $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} > x^{\beta_1}y^{\beta_2}$ y $\langle \alpha, w\rangle = \langle \beta, w\rangle$, valdrá que $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} \widetilde{>} x^{\beta_1}y^{\beta_2}$. Pero entonces $\langle \alpha + \delta, w\rangle = \langle \beta + \delta, w\rangle$ y como el orden $\widetilde{>}$ es compatible con el producto, $x^{\alpha_1+\delta_1}y^{\alpha_2+\delta_2} \widetilde{>} x^{\beta_1+\delta_1}y^{\beta_2+\delta_2}$ para todo δ. Luego, $x^{\alpha_1+\delta_1}y^{\alpha_2+\delta_2} \widetilde{>} x^{\beta_1+\delta_1}y^{\beta_2+\delta_2}$.

El monomio 1 es el mayor pues como $1 = x^0y^0$ y $w \in \mathbb{Z}^2_{>0}$, entonces $\langle (0,0), w\rangle < \langle \alpha, w\rangle$ para todo $\alpha \neq (0,0)$.

Definición 3.31 *Sea* $g(x,y) = \sum_\alpha c_\alpha x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} \in \mathbb{C}[x,y]$.

- *Definimos el* monomio de cabeza *de* g *como* $M_>(g) := \max_>\{x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} \ / \ c_\alpha \neq 0\}$.
- *Notaremos* $C_>(g)$ *al coeficiente del monomio de cabeza de* g, *es decir* $C_>(g) := c_\alpha$ *tal que* $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} = M_>(g)$.
- *Definimos el* término de cabeza *de* g *(leading term) como* $LT_>(g) = C_>(g).M_>(g)$.

De la misma forma que para órdenes monomiales e ideales de $\mathbb{C}[x,y]$, dado $\mathrm{I} \subset \mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$ definimos $LT_>(\mathrm{I})$ como el conjunto de los términos de cabeza de I con el orden $>$, y notamos $< LT_>(\mathrm{I}) >$ al ideal generado por este conjunto en $\mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$.

Al trabajar con ideales cero-dimensionales $\mathrm{I} \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, para hallar la dimensión de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\mathrm{I}$ se usa el hecho de que ésta es igual a la dimensión del cociente

$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/ < LT_>(\mathrm{I}) >$ para cualquier orden monomial $>$. El ideal $< LT_>(\mathrm{I}) >$ puede calcularse encontrando una base de Gröbner para I (ver la definición en [3, Capítulo 2, Sección 5, Definición 5]).

En el caso local, se desarrolla una extensión del algoritmo de división en $\mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$ y se extiende también la noción de bases de Gröbner para anillos y órdenes locales, lo que permite hallar la dimensión $\dim \mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}/ < f,g >_{<x,y>}$ cuando $< f,g >$ es cero-dimensional. Esta dimensión es la multiplicidad de intersección de f y g en el origen.

Dado un orden local $>$, para cualquier $g \in < x,y >$, vale que $LT_>(1+g) = 1$ y $\dfrac{1}{1+g}$ es una unidad en $\mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$. De esta manera, podemos extender la noción de término de cabeza a $\mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$:

Definición 3.32 *Sea $>$ un orden local para monomios en las variables x,y. Sea $h \in \mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$, $h = \dfrac{f}{1+g}$ con f y $1+g \in \mathbb{C}[x,y]$ y $LT_>(1+g) = 1$. Definimos*

$$M_>(h) = M_>(f), \quad C_>(h) = C_>(f) \quad y \quad LT_>(h) = LT_>(f).$$

Para todo $h \in \mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$, $M_>(h), C_>(h)$, y $LT_>(h)$ estan bien definidos, por [4, Capítulo 4, Sección 3, Ejercicio 5]).

El algoritmo de división usual es un proceso que consiste en reducir repetidamente un polinomio por miembros de un conjunto. La reducción de f por g, si $LT_>(f) = c.x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2}.LT_>(g)$ es: $\mathrm{Red}(f,g) = f(x,y) - c.x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2}.g(x,y)$. Los términos de cabeza sucesivos forman una secuencia estrictamente decreciente y, por lo tanto, este algoritmo termina en finitos pasos en el caso de órdenes monomiales en $\mathbb{C}[x,y]$, pues los órdenes monomiales son bien ordenados. En el caso de órdenes locales, podemos definir de igual forma la reducción de f por g, pero la aplicación del algoritmo de división podría no terminar. Usando reducciones no sólo por g si no también por resultados de reducciones anteriores, Mora desarrolló un algoritmo de división para órdenes locales. Lazard mostró cómo hacer lo mismo homogeneizando los polinomios y usando un orden monomial apropiado definido a partir del orden local original. A continuación describiremos brevemente estos procedimientos.

Si $g \in \mathbb{C}[x,y]$, $g(x,y) = \sum_\alpha c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$, su homogeneización con respecto a una nueva variable t es

$$g^h(x,y,t) = \sum_\alpha c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} t^{m-\alpha_1-\alpha_2}$$

donde $m = \max\{\alpha_1+\alpha_2 \ / \ c_\alpha \neq 0\} = gr(g)$.

Observación 3.33 *Cada orden local $>$ de monomios en las variables x, y puede extenderse a un orden $>'$ para monomios en las variables t, x, y como en [4, Capítulo 4, Sección 3, Definición (3.6)]:*
$t^a.x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} >' t^b.x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$ *si* ($a+\alpha_1+\alpha_2 > b+\beta_1+\beta_2$) *o* ($a+\alpha_1+\alpha_2 = b+\beta_1+\beta_2$, *pero* $x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} > x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$).

El orden así definido resulta ser un orden monomial:

Es total pues si $t^a.x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} \neq t^b.x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$ y $a+\alpha_1+\alpha_2$ es mayor o menor que $b+\beta_1+\beta_2$, $t^a.x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} >' t^b.x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$ (o $<'$ respectivamente). Si en cambio $a+\alpha_1+\alpha_2 = b+\beta_1+\beta_2$, entonces $x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} \neq x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$, con lo cual $x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} < x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$ o $x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} > x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$. Entonces, por definición de $>'$, $t^a.x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} >' t^b.x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$ o $t^a.x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} <' t^b.x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$.
Es compatible con el producto pues dado $t^a.x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} >' t^b.x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$ y $\delta = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, si $a+\alpha_1+\alpha_2 > b+\beta_1+\beta_2$, tendremos que $a+\delta_0+\alpha_1+\delta_1+\alpha_2+\delta_2 > b+\delta_0+\beta_1+\delta_2+\beta_2+\delta_2$. Si, en cambio $a+\alpha_1+\alpha_2 = b+\beta_1+\beta_2$, $x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2} > x^{\beta_1}.y^{\beta_2}$. Entonces, tendremos que $a+\delta_0+\alpha_1+\delta_1+\alpha_2+\delta_2 = b+\delta_0+\beta_1+\delta_2+\beta_2+\delta_2$ y como $>$ es compatible con el producto, $x^{\alpha_1+\delta_1}.y^{\alpha_2+\delta_2} > x^{\beta_1+\delta_1}.y^{\beta_2+\delta_2}$. Así, $t^{a+\delta_0}.x^{\alpha_1+\delta_1}.y^{\alpha_2+\delta_2} >' t^{b+\delta_0}.x^{\beta_1+\delta_1}.y^{\beta_2+\delta_2}$.
Es bien ordenado pues $1 = t^0x^0y^0$ y $0+0+0 < a+\alpha_1+\alpha_2$ para todo monomio $t^a.x^{\alpha_1}.y^{\alpha_2}$ distinto del 1.

Podemos ahora enunciar el Teorema del Algoritmo de la Forma Normal de Mora Homogéneo (ver [4, Capítulo 4, Teorema (3.10)]):

Teorema 3.34 *Dados $F, F_1, \ldots, F_s \in \mathbb{C}[t,x,y]$ polinomios homogéneos no nulos, y un orden monomial $>'$ que extiende un orden local $>$. Entonces, existe un algoritmo para producir polinomios homogéneos $H, U, A_1, \ldots, A_s \in \mathbb{C}[t,x,y]$ tales que*

$$U.F = A_1.F_1 + \cdots + A_s.F_s + H$$

con $LT_{>'}(U) = t^a$ para algún a tal que $a+gr(F) = gr(A_i)+gr(F_i) = gr(H)$ cada vez que $A_i, H \neq 0$, $t^a LT_{>'}(F) \geq' LT_{>'}(A_i)LT_{>'}(F_i)$, y ningún $LT_{>'}(F_i)$ divide a $t^b.LT_{>}(H)$ para ningún $b \geq 0$ si $H \neq 0$.

Si $f \in \mathbb{C}[x,y]$, homogeneizar lleva el término de cabeza con el orden $>$ de f al término de cabeza de f^h con el orden $>'$; y deshomogeneizar (es decir, especializar en $t=1$) lleva el término de cabeza con el orden $>'$ de un polinomio homogéneo $F \in \mathbb{C}[t,x,y]$ al término de cabeza de $f = F|_{t=1}$ con $>$.
Luego, homogeneizando, aplicando el algoritmo de la forma normal de Mora homogéneo, y deshomogeneizando, el Algoritmo de la Forma Normal de Mora (ver [4, Capítulo 4, Teorema (3.13)]) nos dice:

Corolario 3.35 *Sean $f, f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x,y]$ no nulos y $>$ un orden local de monomios en las variables x, y. Entonces, existe un algoritmo para producir polinomios $u, a_1, \ldots, a_s, h \in \mathbb{C}[x,y]$ tales que*

$$uf = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + h,$$

donde $LT_>(u) = 1$, $LT_>(a_i)LT_>(f_i) \leq LT_>(f)$ para todo i con $a_i \neq 0$, y o bien $h = 0$, o bien $LT_>(h)$ no es divisible por ningún $LT_>(f_i)$.

La siguiente noción generaliza la de base de Gröbner en el caso local.

Definición 3.36 *Sea $\mathrm{I} \subset \mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$ un ideal y sea $>$ un orden local. Una* base standard de I *para $>$ es un conjunto $\{g_1, \ldots, g_s\} \subset \mathrm{I}$ tal que $< LT_>(\mathrm{I}) >=< LT_>(g_1), \ldots, LT_>(g_s) >$.*

Todo ideal no nulo tiene una base standard, y al igual que con las bases de Gröbner y el algoritmo de división usual, se puede ver que al dividir f por una base standard usando el algoritmo de Mora obtenemos resto cero si y sólo si f pertenece al ideal generado por esa base standard.

El cálculo de bases standard en el contexto local es análogo al de bases de Gröbner en un anillo de polinomios. La definición de los $\mathcal{S}$-polinomios y el algoritmo de Buchberger son los mismos que en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$:

Definición 3.37 *Dado un orden $>$ fijo, $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$ tales que $M_>(f) = x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$, $M_>(g) = x^{\beta_1}y^{\beta_2}$, si $\gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$ para $i = 1, 2$, se define el* $\mathcal{S}$-polinomio entre f y g *como*

$$\mathcal{S}(f,g)(x,y) = x^{\gamma_1-\alpha_1}y^{\gamma_2-\alpha_2}.\frac{f}{C_>(f)} - x^{\gamma_1-\beta_1}x^{\gamma_2-\beta_2}.\frac{g}{C_>(g)}.$$

El algoritmo de Buchberger consiste en dado un input $\mathbf{F} = \{g_1, \ldots, g_s\}$, hallar los $\mathcal{S}$-polinomios de todos sus elementos, los restos de divisiones por $\mathbf{F}$, sumarlos al input e iterar este proceso. *El test de Buchberger* nos dice que si $>$ es orden monomial fijo e $\mathrm{I} =< g_1, \ldots, g_s >\subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathrm{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ es una base de Gröbner de I si y sólo si para todo $i \neq j$ existen $\{q_k^{(i,j)}\}_{1 \leq k \leq s} \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $\mathcal{S}(g_i, g_j) = \sum_{k=1}^{s} q_k^{(i,j)}.g_k$ con $M_>(q_k^{(i,j)}.g_k) \leq M_>(\mathcal{S}(g_i, g_j))$ si $q_k^{(i,j)} \neq 0$. Entonces, como un orden monomial es bien ordenado, el algoritmo de Buchberger termina, y el criterio de Buchberger garantiza que el output es una base de Gröbner. El siguiente teorema (ver [4, Capítulo 4, Teorema (4.2)]) nos provee de un análogo para órdenes locales:

Teorema 3.38 *Sea $\mathrm{S} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ un conjunto finito de polinomios, $>$ un orden local, $\mathrm{I} \subset \mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$ el ideal generado por* S.

- S *es una base standard de* I *si y sólo si aplicando el algoritmo de la forma normal de Mora, para todo* $\mathcal{S}$*-polinomio formado por elementos del conjunto* S*, el resto obtenido es cero.*
- *El algoritmo de Buchberger, usando el algoritmo de la forma normal de Mora en lugar del algoritmo de division de polinomios usual, permite hallar una base standard de polinomios para el ideal generado por* S*, y termina en finitos pasos.*

Una aplicación importante de las bases de Gröbner es el cálculo de $\dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\mathrm{I}$ cuando es finita. Para la versión local de este resultado, usaremos la siguiente notación: dado un orden local $>$ y un ideal I de $\mathbb{C}[x, y]_{<x,y>}$, se dice que un monomio $x^\alpha y^\beta$ es *standard* si $x^\alpha y^\beta \notin \langle LT(\mathrm{I})\rangle$.
El siguiente teorema (ver [4, Capítulo 4, Teorema (4.3)]) nos permite calcular la multiplicidad mediante el uso de bases standard:

Teorema 3.39 *Sea* I *un ideal de* $\mathbb{C}[x, y]_{<x,y>}$ *y sea* $>$ *un orden local. Entonces, son equivalentes:*

- $\dim(\mathbb{C}[x, y]_{<x,y>}/\mathrm{I})$ *es finita.*
- $\dim(\mathbb{C}[x, y]_{<x,y>}/ < LT(\mathrm{I}) >)$ *es finita.*
- *la cantidad de monomios standard es finita.*

Además cuando se satisface alguna de estas condiciones, las tres cantidades coinciden.

Usando los Teoremas 3.38 y 3.39, una forma de calcular la multiplicidad de intersección entre f y g en el origen es hallando una base standard $\{f_0, \ldots, f_s\}$ del ideal generado por f y g en $\mathbb{C}[x, y]_{<x,y>}$. Luego, por el Teorema 3.39, si $\dim(\mathbb{C}[x, y]_{<x,y>}/ < LT(f_0), \ldots, LT(f_s) >)$ es finita, será exactamente la multiplicidad de intersección entre f y g en el origen.

A continuación, probaremos un resultado que da condiciones suficientes para que dos polinomios sean una base standard del ideal que generan en $\mathbb{C}[x, y]_{<x,y>}$. La demostración utiliza el siguiente lema:

Lema 3.40 *Sea* $>$ *un orden local de monomios en* $\mathbb{C}[x, y]$ *y sea* $>'$ *el orden monomial inducido por* $>$ *en* $\mathbb{C}[x, y, t]$*. Sean* $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ *dos polinomios tales que sus homogeneizaciones* $f^h, g^h \in \mathbb{C}[x, y, t]$ *cumplen que el divisor común máximo entre* $M_{>'}(f^h)$ *y* $M_{>'}(g^h)$ *es* t^n *con* $n \in \mathbb{N}_0$*. Entonces, si* $\mathcal{S}(f, g) \neq 0$*, existen polinomios* $u, p, q \in \mathbb{C}[x, y]$ *con* $LT_>(u) = 1$ *(de esta forma* u *resulta una unidad en* $\mathbb{C}[x, y]_{<x,y>}$*) tales que*

$$u.\mathcal{S}(f, g) = p.f + q.g, \tag{3.14}$$

donde $LT_>(p).LT_>(f) \leq LT_>(\mathcal{S}(f, g))$ *y* $LT_>(q).LT_>(g) \leq LT_>(\mathcal{S}(f, g))$.

Demostración: Dado que el divisor común mayor entre $M_{>'}(f^h)$ y $M_{>'}(g^h)$ es t^n, podemos suponer que

$$\begin{cases} f^h(x,y) = x^a.t^{r+n} + h(x,y,t) \\ g^h(x,y) = y^b.t^n + k(x,y,t) \end{cases}$$

donde $LT_{>'}(f^h) = x^a.t^{r+n}$, $gr(f^h) = a+r+n$, $LT_{>'}(g^h) = y^b.t^n$ y $gr(g^h) = b+n$. Así, su $\mathcal{S}$-polinomio es

$$\mathcal{S}(f^h, g^h) = y^b.f^h - x^a.t^r.g^h = y^b.h(x,y,t) - x^a.t^r.k(x,y,t).$$

Multiplicando por t^n,

$$\begin{aligned} t^n.\mathcal{S}(f^h,g^h)(x,y,t) &= y^b.t^n.h(x,y,t) - x^a.t^{r+n}.k(x,y,t) \\ &= (g^h(x,y,t) - k(x,y,t)).h(x,y,t) - (f^h(x,y,t) - h(x,y,t)).k(x,y,t) \\ &= -k(x,y,t).f^h(x,y,t) + h(x,y,t).g^h(x,y,t). \end{aligned}$$

Tenemos dos casos posibles:

$$LT_{>'}(h).y^b \neq LT_{>'}(k).x^a.t^r \quad \text{o} \quad LT_{>'}(h).y^b = LT_{>'}(k).x^a.t^r.$$

Si $LT_{>'}(h).y^b \neq LT_{>'}(k).x^a.t^r$, entonces $M_{>'}(t^n.\mathcal{S}(f^h,g^h)) = \text{máx}\{M_{>'}(y^b.h), M_{>'}(x^a.t^r.k)\}.t^n$ y deshomogeneizando, resulta que $M_>(\mathcal{S}(f,g)) = \text{máx}\{M_>(y^b.h|_{t=1}), M_>(x^a.k|_{t=1})\} = \text{máx}\{y^b.M_>(h|_{t=1}), x^a.M_>(k|_{t=1})\} = \text{máx}\{M_>(g).M_>(h|_{t=1}), M_>(f).M_>(k|_{t=1})\}$. Entonces, $LT_>(\mathcal{S}(f,g)) \geq LT_>(g).LT_>(h|_{t=1})$ y $LT_>(\mathcal{S}(f,g)) \geq LT_>(f).LT_>(k|_{t=1})$. Tomando $u=1$, $p=-k|_{t=1}$ y $q=h|_{t=1}$ vale la igualdad (3.14).

Si, en cambio, $LT_{>'}(h).y^b = LT_{>'}(k).x^a.t^r$, sean

$$\begin{aligned} M_{>'}(h) &= x^{h_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{h_{3,1}} \text{ con } h_{1,1}+h_{2,1}+h_{3,1} = a+r+n \ \ (h_{i,1} \geq 0) \\ M_{>'}(k) &= x^{k_{1,1}}.y^{k_{2,1}}.t^{k_{3,1}} \text{ con } k_{1,1}+k_{2,1}+k_{3,1} = b+n \ \ (k_{i,1} \geq 0). \end{aligned}$$

Como $y^b.M_{>'}(h) = x^a.t^r.M_{>'}(k)$, $x^{h_{1,1}}.y^{h_{2,1}+b}.t^{h_{3,1}} = x^{k_{1,1}+a}.y^{k_{2,1}}.t^{k_{3,1}+r}$. De esta forma,

$$\begin{cases} h_{1,1} = a + k_{1,1} \\ h_{2,1} + b = k_{2,1} \\ h_{3,1} = r + k_{3,1} \end{cases}$$

Si notamos

$$\begin{aligned} k(x,y,t) &= c_1.x^{k_{1,1}}.y^{b+h_{2,1}}.t^{k_{3,1}} + \widetilde{k}_1(x,y,t) \\ h(x,y,t) &= c_1.x^{a+k_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{r+k_{3,1}} + \widetilde{h}_1(x,y,t) \end{aligned}$$

entonces

$$t^n.\mathcal{S}(f^h,g^h)(x,y,t) = -k(x,y,t).f^h(x,y,t) + h(x,y,t).g^h(x,y,t) = -\widetilde{k}_1(x,y,t).f^h(x,y,t) +$$

$$+\widetilde{h}_1(x,y,t).g^h(x,y,t) - c_1.x^{k_{1,1}}.y^{b+h_{2,1}}.t^{k_{3,1}}.\big(f^h(x,y,t) - LT_{>'}(f^h)(x,y,t)\big)+$$
$$+c_1.x^{a+k_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{r+k_{3,1}}.\big(g^h(x,y,t) - LT_{>'}(g^h)(x,y,t)\big) = -\widetilde{k}_1(x,y,t).f^h(x,y,t)+$$
$$+\widetilde{h}_1(x,y,t).g^h(x,y,t) - c_1.x^{k_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{k_{3,1}}.\big(y^b.h(x,y,t) - x^a.t^r.k(x,y,t)\big)$$
$$= -\widetilde{k}_1(x,y,t).f^h(x,y,t) + \widetilde{h}_1(x,y,t).g^h(x,y,t) - c_1.x^{k_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{k_{3,1}}.\mathcal{S}(f^h,g^h)(x,y,t),$$

y por lo tanto,

$$(t^n + c_1.x^{k_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{k_{3,1}}).\mathcal{S}(f^h,g^h)(x,y,t) = -\widetilde{k}_1(x,y,t).f^h(x,y,t) + \widetilde{h}_1(x,y,t).g^h(x,y,t).$$

Si suponemos por inducción en i que

$$(t^n + c_1.x^{k_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{k_{3,1}} + \cdots + c_i.x^{k_{1,i}}.y^{h_{2,i}}.t^{k_{3,i}})\mathcal{S}(f^h,g^h)(x,y,t) =$$
$$= -\widetilde{k}_i(x,y,t).f^h(x,y,t) + \widetilde{h}_i(x,y,t).g^h(x,y,t)$$

y que $LT_{>'}(\widetilde{h}_i).y^b = LT_{>'}(\widetilde{k}_i).x^a.t^r$ (para $i = 0$, $\widetilde{k}_0(x,y,t) = k(x,y,t)$ y $\widetilde{h}_0(x,y,t) = h(x,y,t)$), definimos

$$\begin{aligned}
\widetilde{k}_{i+1}(x,y,t) &= \widetilde{k}_i(x,y,t) - LT_{>'}(\widetilde{k}_i)(x,y,t),\\
\widetilde{h}_{i+1}(x,y,t) &= \widetilde{h}_i(x,y,t) - LT_{>'}(\widetilde{h}_i)(x,y,t)\\
LT_{>'}(\widetilde{k}_i)(x,y,t) &= c_{i+1.}x^{k_{1,i+1}}.y^{k_{2,i+1}}.t^{k_{3,i+1}},\ \text{y}\\
LT_{>'}(\widetilde{h}_i)(x,y,t) &= \widetilde{c}_{i+1}.x^{h_{1,i+1}}.y^{h_{2,i+1}}.t^{h_{3,i+1}}.
\end{aligned}$$

Entonces, vale que $c_j = \widetilde{c}_j\ \forall\, 1 \leq j \leq i+1$ y $LT_{>'}(y^b\widetilde{h}_i) = LT_{>'}(x^a.t^r\widetilde{k}_i.)$ Por lo tanto, $x^{h_{1,i+1}}.y^{h_{2,i+1}+b}.t^{h_{3,i+1}} = x^{k_{1,i+1}+a}.y^{k_{2,i+1}}.t^{k_{3,i+1}+r}$, con lo cual

$$\begin{cases} h_{1,i+1} = a + k_{1,i+1} \\ h_{2,i+1} + b = k_{2,i+1} \\ h_{3,i+1} = r + k_{3,i+1} \end{cases}.$$

Como antes, podemos calcular

$$(t^n + c_1.x^{k_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{k_{3,1}} + \cdots + c_i.x^{k_{1,i}}.y^{h_{2,i}}.t^{k_{3,i}})\mathcal{S}(f^h,g^h)(x,y,t) =$$
$$= -\widetilde{k}_i(x,y,t).f^h(x,y,t) + \widetilde{h}_i(x,y,t).g^h(x,y,t) =$$
$$= -\widetilde{k}_{i+1}(x,y,t).f^h(x,y,t) + \widetilde{h}_{i+1}(x,y,t).g^h(x,y,t) -$$
$$-c_{i+1}.x^{k_{1,i+1}}.y^{b+h_{2,i+1}}.t^{k_{3,i+1}}.\big(f^h(x,y,t) - LT_{>'}(f^h)(x,y,t)\big)+$$
$$+c_{i+1}.x^{a+k_{1,i+1}}.y^{h_{2,i+1}}.t^{r+k_{3,i+1}}.\big(g^h(x,y,t) - LT_{>'}(g^h)(x,y,t)\big) =$$
$$= -\widetilde{k}_{i+1}(x,y,t).f^h(x,y,t) + \widetilde{h}_{i+1}(x,y,t).g^h(x,y,t) -$$

$$-c_{i+1}.x^{k_{1,i+1}}.y^{h_{2,i+1}}.t^{k_{3,i+1}}.\mathcal{S}(f^h,g^h)(x,y,t).$$

Por lo tanto

$$(t^n + c_1.x^{k_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{k_{3,1}} + \cdots + c_{i+1}.x^{k_{1,i+1}}.y^{h_{2,i+1}}.t^{k_{3,i+1}})\mathcal{S}(f^h,g^h)(x,y,t) =$$

$$= -\widetilde{k}_{i+1}(x,y,t).f^h(x,y,t) + \widetilde{h}_{i+1}(x,y,t).g^h(x,y,t).$$

Como h y k tienen finitos monomios, repitiendo finitas veces el paso anterior tendremos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que en la iteración j-ésima

$$LT_{>'}(\widetilde{h}_j).y^b \neq LT_{>'}(\widetilde{k}_j).x^a.t^r.$$

Si no existiera, sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{k}_j = 0$. Como $LT_{>'}(\widetilde{h}_i).y^b = LT_{>'}(\widetilde{k}_i).x^a.t^r$ para todo $0 \leq i \leq j$, sumándolos, tenemos que $y^b.f^h = x^a.t^r.g^h$ y entonces, $\mathcal{S}(f^h,g^h)(x,y,t) = y^b.f^h - x^a.t^r.g^h = 0$.

Sea ahora $j \in \mathbb{N}_0$ tal que el paso j-ésimo es el primero tal que $LT_{>'}(\widetilde{h}_j).y^b \neq LT_{>'}(\widetilde{k}_j).x^a.t^r$. Entonces, la igualdad

$$\begin{aligned}(t^n + c_1.x^{k_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{k_{3,1}} + \cdots + c_j.x^{k_{1,j}}.y^{h_{2,j}}.t^{k_{3,j}})\mathcal{S}(f^h,g^h)(x,y,t) = \\ = -\widetilde{k}_j(x,y,t).f^h(x,y,t) + \widetilde{h}_j(x,y,t).g^h(x,y,t)\end{aligned}$$

implica que $M_{>'}((t^n + c_1.x^{k_{1,1}}.y^{h_{2,1}}.t^{k_{3,1}} + \cdots + c_j.x^{k_{1,j}}.y^{h_{2,j}}.t^{k_{3,j}})\mathcal{S}(f^h,g^h)) =$ máx$\{M_{>'}(y^bt^n.\widetilde{h}_j), M_{>'}(x^a.t^{r+n}.\widetilde{k}_j)\}$, y deshomogeneizando tenemos que

$$M_>((1 + \cdots + c_j.x^{k_{1,j}}.y^{h_{2,j}}).\mathcal{S}(f,g)) = \text{máx}\{M_>(\widetilde{k}_j|_{t=1}.f(x,y)), M_{>'}(\widetilde{h}_j|_{t=1}.g(x,y))\}.$$

Notar además que para ningún i puede suceder simultáneamente que $k_{1,i} = h_{2,i} = 0$ pues, en ese caso, por ser polinomios homogéneos, $k_{3,i} = n$ y $M_{>'}(f^h) > M_{>'}(-\widetilde{k}_{i-1})(x,y,t) = x^0.y^b.t^n = M_{>'}(g^h)$, $M_{>'}(g^h) > M_{>'}(-\widetilde{h}_{i-1})(x,y,t) = x^a.y^0.t^{r+n} = M_{>'}(f^h)$. Entonces, por ser un orden local, $1 > c_i.x^{k_{1,i}}.y^{h_{2,i}}$ $\forall 1 \leq i \leq j$.

Con todo esto

$$LT_>(\mathcal{S}(f,g)) \geq x^a.LT_>(\widetilde{k}_j|_{t=1}) \quad \text{y} \quad LT_>(\mathcal{S}(f,g)) \geq y^b.LT_>(\widetilde{h}_j|_{t=1}).$$

Por lo tanto, tomando $u = 1 + c_1.x^{k_{1,1}}.y^{h_{2,1}} + \cdots + c_j.x^{k_{1,j}}.y^{h_{2,j}}$, $p = -\widetilde{k}_j|_{t=1}$ y $q = \widetilde{h}_j|_{t=1}$ vale que $LT_>(p).LT_>(f) \leq LT_>(\mathcal{S}(f,g))$ y $LT_>(q).LT_>(g) \leq LT_>(\mathcal{S}(f,g))$. □

Usando este lema y basándonos en las demostraciones de [4, Capítulo 4, Teorema (4.2)] y [3, Capítulo 2, Sección 6, Teorema 6], probaremos:

Proposición 3.41 *Sea $>$ un orden local de monomios en $\mathbb{C}[x,y]$ asociado a un vector $w \in \mathbb{Z}^2_{>0}$ (ver Observación 3.30) y sea $>'$ el orden monomial inducido por $>$ en $\mathbb{C}[x,y,t]$ (ver Observación 3.33). Sean $f,g \in \mathbb{C}[x,y]$ dos polinomios tales que sus homogeneizaciones $f^h, g^h \in \mathbb{C}[x,y,t]$ cumplen que el divisor común máximo entre $M_{>'}(f^h)$ y $M_{>'}(g^h)$ es t^n con $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces $\{f,g\}$ es una base standard.*

Demostración: Si $\mathcal{S}(f,g) = 0$, por el Teorema 3.38, $\{f,g\}$ es una base standard. Si no, veamos que $< LT_>(< f,g >) > \subseteq < LT_>(f), LT_>(g) >$ (la otra inclusión es obvia).

Dado un elemento cualquiera $v \in < f,g >$ en $\mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$, existen polinomios $\widetilde{u}, p_v, q_v \in \mathbb{C}[x,y]$ con $\widetilde{u}$ una unidad en $\mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}$ tales que

$$\widetilde{u}.v = p_v.f + q_v.g.$$

Si existen $\widetilde{U}, P_v, Q_v$ polinomios, donde $\widetilde{U}$ tiene término de cabeza 1, y

$$\widetilde{U}.v = P_v.f + Q_v.g, \tag{3.15}$$

que cumplen además $M_>(P_v.f) \leq M_>(\widetilde{U}.v) = M_>(v)$ y $M_>(Q_v.g) \leq M_>(\widetilde{U}.v) = M_>(v)$, como $M_>(v) \leq \max\{M_>(P_v.f), M_>(Q_v.g)\} \leq M_>(v)$ resulta que $M_>(v) = M_>(P_v.f)$ o $M_>(v) = M_>(Q_v.g)$. Como consecuencia, $M_>(f)|M_>(v)$ o $M_>(g)|M_>(v)$ y, por lo tanto, $M_>(v) \in < M_>(f), M_>(g) >$ que es lo que queríamos ver.

Supongamos entonces que $\max\{M_>(P_v.f), M_>(Q_v.g)\} > M_>(v)$ para toda escritura de tipo (3.15) y tomemos

$$x^{\delta_1}.y^{\delta_2} = \min\big\{x^{\gamma_1}.y^{\gamma_2} \ / \ \exists U \text{ unidad}, A,B \in \mathbb{C}[x,y] \text{ tales que } U.v = A.f + B.g$$
$$\text{y } \max\{M_>(A.f), M_>(B.g)\} = x^{\gamma_1}.y^{\gamma_2}\big\}.$$

Dicho mínimo existe ya que si $M_>(v) = x^{v_1}y^{v_2}$, para todo $x^{\gamma_1}.y^{\gamma_2} > M_>(v)$, tenemos que $< w, (\gamma_1,\gamma_2) > \leq < w, (v_1,v_2) >$, pero existen finitos elementos (γ_1,γ_2) en $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ que cumplen esta condición pues $w \in \mathbb{Z}^2_{>0}$. Esto implica que el conjunto considerado tiene finitos elementos distintos. Como además $v \in < f,g >$, el conjunto es no vacío, y por lo tanto existe un elemento minimal.

Ahora, siguiendo la demostración de [3, Capítulo 2, Sección 6, Teorema 6], tomemos

$$\widetilde{u}.v = p_v.f + q_v.g, \tag{3.16}$$

donde $\max\{M_>(p_v.f), M_>(q_v.g)\} = x^{\delta_1}y^{\delta_2} > M_>(v)$. Luego, $LT_>(p_v.f) = -LT_>(q_v.g)$. Si

$$f^h(x,y) = x^a.t^{r+n} + h(x,y,t) \quad \text{y} \quad g^h(x,y) = y^b.t^n + k(x,y,t)$$

tendremos que

$$LT_>(p_v) = c.x^{\delta_1 - a}.y^{\delta_2} \qquad p_v = c.x^{\delta_1 - a}.y^{\delta_2} + p_2$$

$$LT_>(q_v) = c.x^{\delta_1}.y^{\delta_2-b} \qquad q_v = -c.x^{\delta_1}.y^{\delta_2-b} + q_2$$

y reemplazando en (3.16),

$$\begin{aligned} \widetilde{u}.v &= c.x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.(y^b.f - x^a.g) + p_2.f + q_2.g \\ &= c.x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.\mathcal{S}(f,g) + p_2.f + q_2.g. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.40, existen polinomios $u, p, q \in \mathbb{C}[x,y]$ tales que

$$u.\mathcal{S}(f,g) = p.f + q.g$$

con $LT_>(u) = 1$, $LT_>(p).LT_>(f) \leq LT_>(\mathcal{S}(f,g))$ y $LT_>(q).LT_>(g) \leq LT_>(\mathcal{S}(f,g))$. Entonces

$$\begin{aligned} u.\widetilde{u}.v &= c.x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.u.\mathcal{S}(f,g) + u.p_2.f + u.q_2.g \\ &= (c.x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}p + u.p_2).f + (c.x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}q + u.q_2).g \end{aligned}$$

donde $M_>(u.p_2.f) = M_>(p_2.f) < M_>(p_v.f) = x^{\delta_1}y^{\delta_2}$ y $M_>(u.q_2.g) = M_>(q_2.g) < M_>(q_v.g) = x^{\delta_1}y^{\delta_2}$. Además,

$$M_>(c.x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.p.f) = x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.M_>(p.f) \leq x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.M_>(\mathcal{S}(f,g)) =$$

$$= x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.M_>(y^b.f - x^a.g) < x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.x^a y^b = x^{\delta_1}y^{\delta_2}.$$

Con todo esto,

$$(u.\widetilde{u}).v = (c.x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.p + u.p_2).f + (c.x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.q + u.q_2).g,$$

donde $u.\widetilde{u}$ es una unidad y

$$\text{máx}\{M_>((c.x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.p + u.p_2).f); M_>((c.x^{\delta_1-a}.y^{\delta_2-b}.q + u.q_2).g)\} < x^{\delta_1}.y^{\delta_2}.$$

Esto contradice la minimalidad de $x^{\delta_1}.y^{\delta_2}$. □

3.5.2. Casos particulares

Para algunas familias de f, g primitivos, incluyendo el caso de los binomios, veremos que en el Teorema 3.20 vale la igualdad. Sin embargo, esto no sucede para todos los polinomios primitivos f y g.

Ejemplo 3.42 Consideremos los polinomios

$$f(x,y) = y^n(1+y^2) + a(1+y)x \quad \text{y} \quad g(x,y) = y^n(1+y+y^2) + a(1+y)x$$

con $a \neq 0$. La única raíz en común es $(0,0)$. La multiplicidad de intersección de f y g en el origen es $\text{mult}(f,g;(0,0)) = \text{mult}(f,g-f;(0,0)) = \text{mult}(f,y^{n+1};(0,0)) = (n+1).\text{mult}(f,y;(0,0)) = (n+1).\text{mult}(ax,y;(0,0)) = n+1$. Sin embargo, la integral mixta entre $\rho_{f,0}$ y $\rho_{g,0}$ es

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,0},\rho_{g,0}) = (1-0).n + (1-0).0 = n.$$

Veamos ahora algunas familias de polinomios $f,g \in \mathbb{C}[x,y]$ primitivos para las que vale que:

$$\text{mult}\big(f,g;(0,0)\big) + \text{mult}\big(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,0)\big) = -\mathcal{MI}\big(\rho_{f,0},\rho_{g,0}\big).$$

Recordemos que, si $f(x,y) = \sum_{i=0}^{h} \alpha_i(y)x^i$ y $g(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \beta_j(y)x^j$,

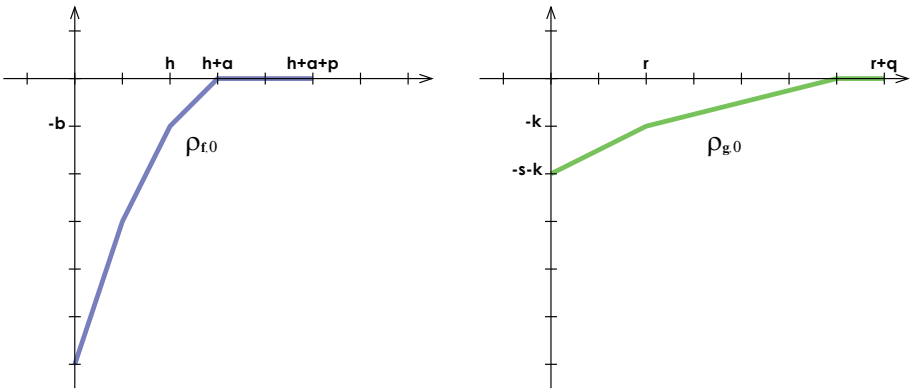
$$\begin{cases} \widetilde{f}(x,y) = x^h.f(\frac{1}{x},y) \\ \widetilde{g}(x,y) = x^e.g(\frac{1}{x},y) \end{cases} \tag{3.17}$$

- Sean f y g polinomios primitivos en $\mathbb{C}[x,y]$ con finitas raíces en común, tales que $\rho_{f,0}$ y $\rho_{g,0}$ son:

$$\begin{cases} \rho_{f,0}(x) = \Big\{ a_i(x-\xi_{i-1}) + \rho_{f,0}(\xi_{i-1}) \quad \xi_{i-1} \leq x \leq \xi_i \qquad 1 \leq i \leq n \\ \rho_{g,0}(x) = \Big\{ b_j(x-\widetilde{\xi}_{j-1}) + \rho_{g,0}(\widetilde{\xi}_{j-1}) \quad \widetilde{\xi}_{j-1} \leq x \leq \widetilde{\xi}_j \qquad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

  con $a_1 > \ldots > a_{n-1} > b_1 > b_2 > \ldots > b_{m-1} > 0$ y $a_n = b_m = 0$. Esto nos dice que $\rho_{f,0}$ y $\rho_{g,0}$ son crecientes, aunque podrá suceder que $\xi_{n-1} = \xi_n$ o que $\widetilde{\xi}_{m-1} = \widetilde{\xi}_m$ (es decir, que alguna de ellas, o ambas, sean estrictamente crecientes).

De esta manera los gráficos de $\rho_{f,0}$, $\rho_{g,0}$ son por ejemplo:



Y llamamos como en el gráfico

$$\begin{array}{cccc} h := \xi_{n-2} & h+a := \xi_{n-1} & & r := \widetilde{\xi}_1 \quad r+q := \widetilde{\xi}_m \\ -b := \rho_{f,0}(\xi_{n-2}) & h+a+p := \xi_n & \text{y} & -s-k = \rho_{g,0}(0) \quad -k = \rho_{g,0}(\widetilde{\xi}_1) \end{array}.$$

Por un lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{MI}(\rho_{f,0},\rho_{g,0}) &= (\xi_{n-1}-\xi_0).\rho_{g,0}(\widetilde{\xi}_0) + (\widetilde{\xi}_{m-1}-\widetilde{\xi}_0).\rho_{f,0}(\xi_{n-1}) \\ &= (a+h-0).\rho_{g,0}(0) + (\widetilde{\xi}_{m-1}-0).\rho_{f,0}(a+h) \\ &= (a+h).(-s-k) + \widetilde{\xi}_{m-1}.0 = -(a+h).(s+k). \end{aligned}$$

Para calcular la multiplicidad de intersección de f y g en el origen, observamos en primer lugar que la hipótesis $a_{n-1} > b_1$ implica que $as < br$. Entonces, teniendo en cuenta que

$$a(s-\frac{as-br}{2a}) = as - \underbrace{\frac{a}{2a}}_{<1}(\underbrace{as-br}_{<0}) < as - as + br = br,$$

definimos el orden $>'$ para monomios en las variables x, y, t a partir del orden inducido por $w = \big(2as-(as-br), 2ar\big)$. Esta manera de elegir w está basada en la demostración de [2, Teorema (3.5)] para resolver el caso de binomios en n variables, y cumple en particular que $2as-(as-br), 2ar \in \mathbb{N}$.

Con este orden monomial, y homogeneizando f y g tenemos que

$$M_{>'}(f^h)(x,y,t) = x^{a+h}t^{m-a-h} \quad \text{y} \quad M_{>'}(g^h)(x,y,t) = y^{s+k}t^{n-s-k}$$

donde m y n son los grados totales de f^h y g^h respectivamente. Como f^h, g^h son homogéneos, es lo mismo ver que $M_>(f) = x^{a+h}$ y $M_>(g) = y^{s+k}$. Para ver esto, sea $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$ un monomio de f, entonces $(\alpha_1, -\alpha_2) \in \mathbf{Q}_{f,0}$. Como $\rho_{f,0}(x) = \dfrac{b}{a}(x-a-h)$ para todo $h \le x \le a+h$, se tiene que $-\alpha_2 \le \rho_{f,0}(\alpha_1) \le \dfrac{b}{a}(\alpha_1-a-h)$ $\big($es decir $\alpha_2 \ge \dfrac{b}{a}(a+h-\alpha_1)\big)$. Si $\alpha_1 < a+h$, entonces

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2), w\rangle = \alpha_1.(2as-(as-br)) + \alpha_2.(2ar) =$$

$$= 2a.\big[\alpha_1(s-\frac{as-br}{2a}) + \alpha_2.r\big] \ge 2a.\big[\alpha_1(s-\frac{as-br}{2a}) + \frac{b}{a}r(a+h-\alpha_1)\big] =$$

$$= 2a.\big[\alpha_1(\underbrace{\frac{as-br}{a} - \frac{as-br}{2a}}_{<0}) + \frac{br}{a}(a+h)\big] > 2a.\big[(a+h).\frac{as-br}{2a} + (a+h)\frac{br}{a}\big] =$$

$$= 2a.\big[(a+h)\frac{as+br}{2a}\big] = 2a.\big[(a+h)(s-\frac{as-br}{2a})\big] = \langle (a+h,0),w\rangle.$$

En consecuencia, $x^{a+h} > x^{a+h}.y^{\alpha_2}$.

Si $\alpha_1 = a+h$, entonces $\alpha_2 > 0$, con lo cual por ser un orden local $x^{a+h} > x^{a+h}.y^{\alpha_2}$.

Si en cambio $\alpha_1 > a+h$,

$$\langle (\alpha_1,\alpha_2),w\rangle = \alpha_1.(2as-(as-br)) + \alpha_2.(2ar) \geq$$

$$\geq \alpha_1.(\underbrace{2as-(as-br)}_{>0}) > (a+h).(2as-(as-br)) = \langle (a+h,0),w\rangle,$$

con lo cual $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} < x^{a+h}$.

De la misma forma, si $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$ es un monomio de g distinto de y^{s+k}, si $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 > s+k$ con lo cual, por ser un orden local, $y^{\alpha_2} < y^{s+k}$. Si en cambio $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \geq \frac{s}{r}(r-\alpha_1)+k$ y por lo tanto

$$\langle (\alpha_1,\alpha_2),w\rangle = \alpha_1.(2as-(as-br)) + \alpha_2.(2ar) \geq$$

$$\geq 2a.\big[\alpha_1(s-\frac{as-br}{2a}) + r(\frac{s}{r}(r-\alpha_1)+k)\big] = 2a.\big[\alpha_1(\underbrace{-\frac{as-br}{2a}}_{>0}) + sr + kr\big] >$$

$$> 2a(s+k)r = \langle (0,s+k),w\rangle.$$

Luego, si $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$ es un monomio de g distinto de y^{s+k}, resulta que $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} < y^{s+k}$.

Así, tenemos que $M_{>'}(f^h)(x,y,t) = x^{a+h}t^{m-a-h}$ y $M_{>'}(g^h)(x,y,t) = y^{s+k}t^{n-s-k}$ (donde m y n eran los grados totales de f^h y g^h respectivamente). Aplicando la Proposición 3.41, concluimos que $\{f,g\}$ es una base standard y

$$\text{mult}(f,g;(0,0)) = \dim \mathbb{C}[x,y]_{<x,y>}/ < x^{a+h}, y^{s+k} >= (a+h).(s+k).$$

Luego, como $\text{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,0)) = 0$,

$$\text{mult}(f,g;(0,0)) + \text{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,0)) = (a+h).(s+k) = -\mathcal{MI}(\rho_{f,0},\rho_{g,0})$$

como queríamos ver.

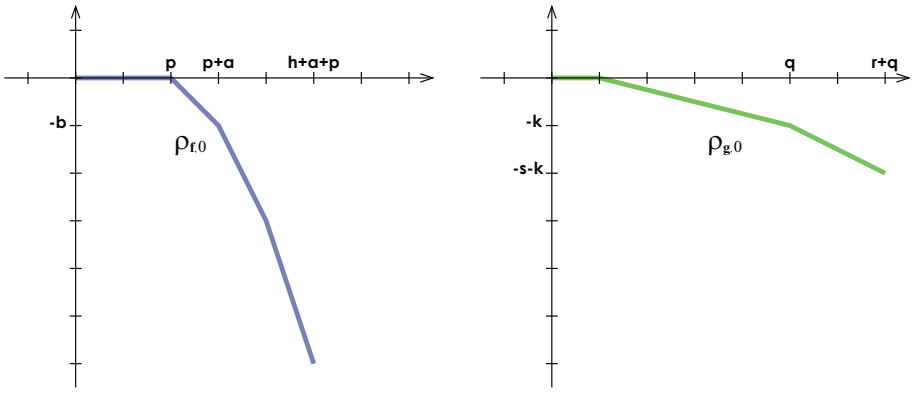
Un ejemplo particular de este caso es cuando f y g son binomios primitivos con finitas soluciones en común, tales que $\rho_{f,0}$ y $\rho_{g,0}$ tienen ambos pendientes positivas y distintas. Con la notación anterior, $\begin{cases} f(x,y) = c_1x^a - c_2y^b \\ g(x,y) = d_1x^r - d_2y^s \end{cases}$ con $a,b,r,s > 0$ y $\det\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix} \neq 0$.

- Sean f y g polinomios primitivos en $\mathbb{C}[x,y]$ con finitas raíces en común, tales que $\rho_{f,0}$ y $\rho_{g,0}$ son:

$$\begin{cases} \rho_{f,\tau}(x) = \begin{cases} a_i(x-\xi_{i-1}) + \rho_{f,\tau}(\xi_{i-1}) & \xi_{i-1} \leq x \leq \xi_i \qquad 1 \leq i \leq n \end{cases} \\ \rho_{g,\tau}(x) = \begin{cases} b_j(x-\widetilde{\xi}_{j-1}) + \rho_{g,\tau}(\widetilde{\xi}_{j-1}) & \widetilde{\xi}_{j-1} \leq x \leq \widetilde{\xi}_j \qquad 1 \leq j \leq m \end{cases} \end{cases}$$

con $a_1 = b_1 = 0$ y $0 > b_2 > \ldots > b_m > a_2 > \ldots > a_n$. Esto nos dice que $\rho_{f,0}$ y $\rho_{g,0}$ son decrecientes, aunque podría suceder que $\xi_1 = 0$ o que $\widetilde{\xi}_1 = 0$ (es decir, alguna sería estrictamente decreciente).

De esta manera los gráficos de $\rho_{f,0},\ \rho_{g,0}$ son por ejemplo:



Llamamos en este caso

$$\begin{array}{cccc} p := \xi_1 & p+a := \xi_2 & & q := \widetilde{\xi}_{m-1} & r+q := \widetilde{\xi}_m \\ -b := \rho_{f,0}(\xi_2) & h+a+p := \xi_n & \text{y} & -k = \rho_{g,0}(\widetilde{\xi}_{m-1}) & -s-k = \rho_{g,0}(\widetilde{\xi}_m) \end{array}.$$

La condición $b_m > a_2$ implica que $as < br$.

Aquí $\text{mult}(f,g;(0,0)) = 0$ y si tomamos como anteriormente $\widetilde{f}(x,y) = x^{a+h+p} f(\frac{1}{x}, y)$ y $\widetilde{g}(x,y) = x^{r+q} g(\frac{1}{x}, y)$, estamos en el caso anterior. Por lo tanto

$$\text{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,0)) = \dim \mathbb{C}[x,y]_{<x,y>} / < x^{a+h}, y^{s+k} >= (a+h).(s+k).$$

A su vez, calculando $\mathcal{MI}(\rho_{\widetilde{f},0}, \rho_{\widetilde{g},0})$ como en el caso anterior resulta que

$$\mathcal{MI}(\rho_{f,0}, \rho_{g,0}) = \mathcal{MI}(\rho_{\widetilde{f},0}, \rho_{\widetilde{g},0}) = -(a+h).(s+k).$$

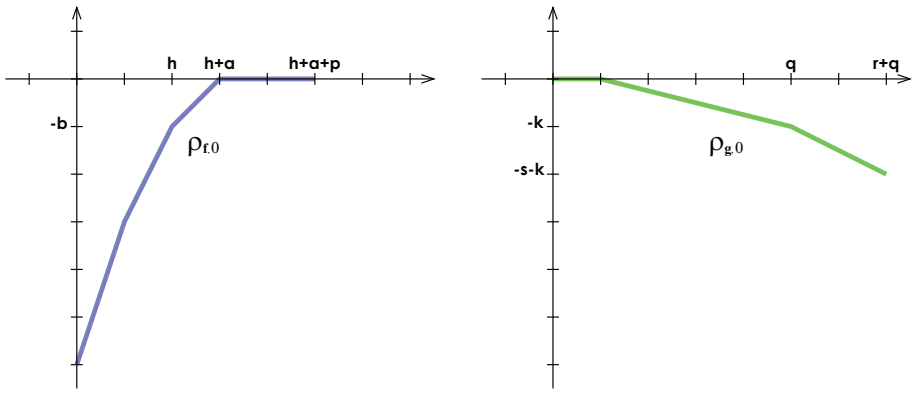
Así,

$$\text{mult}(f,g;(0,0)) + \text{mult}(\widetilde{f},\widetilde{g};(0,0)) = (a+h).(s+k) = -\mathcal{MI}(\rho_{f,0}, \rho_{g,0}).$$

Un ejemplo particular de este caso es cuando f y g son binomios primitivos con finitas soluciones en común, tales que $\rho_{f,0}, \rho_{g,0}$ tienen ambas pendientes negativas y distintas. En este caso, $\begin{cases} f(x,y) = 1 - cx^a y^b \\ g(x,y) = 1 - dx^r y^s \end{cases}$ con $\det \begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix} \neq 0$ y $a, b, r, s > 0$.

- Sean f y g polinomios con finitas soluciones en común, tal que las pendientes de $\rho_{f,0}$ son todas mayores o iguales a cero, y las de $\rho_{g,0}$ son todas menores o iguales a cero.

De esta manera los gráficos de $\rho_{f,0},\ \rho_{g,0}$ son por ejemplo:



En este caso, tenemos que $\text{mult}\big(f, g; (0,0)\big) = \text{mult}\big(\widetilde{f}, \widetilde{g}; (0,0)\big) = 0$. Por otro lado, como vimos en la Sección 3.3.2, $\mathcal{MI}\big(\rho_{f,0}, \rho_{g,0}\big) = 0$. Por lo tanto

$$\text{mult}\big(f, g; (0,0)\big) + \text{mult}\big(\widetilde{f}, \widetilde{g}; (0,0)\big) = 0 = \mathcal{MI}\big(\rho_{f,0}, \rho_{g,0}\big).$$

- Sean f y g binomios genéricos con finitas soluciones en común y $\rho_{f,0}$ y $\rho_{g,0}$ con pendientes positivas iguales. Podemos escribirlos entonces como $\begin{cases} f(x,y) = x^a - cy^b \\ g(x,y) = x^r - dy^s \end{cases}$, $a, b, r, s \in \mathbb{N}$ y $\det \begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix} = 0$ (o sea $as = br$).

Es fácil ver, por nuestros calculos de integrales mixtas, que $-\mathcal{MI}\Big(\rho_{f,0}, \rho_{g,0}\Big) = a.s = b.r$. Calculemos ahora la multiplicidad de intersección de f y g en el origen.

Como por hipótesis $b/a = s/r \in \mathbb{Q}_{>0}$, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ coprimos tales que $b/a = s/r = \beta/\alpha$. Sean $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $b = \beta.k$, $a = \alpha.k$, $s = \beta.l$ y $r = \alpha.l$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^{\alpha.k} - cy^{\beta.k} \\ g(x,y) &= x^{\alpha.l} - dy^{\beta.l}. \end{aligned}$$

Llamemos $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ a las raíces de la ecuación $t^k = c$ y $\delta_1, \ldots, \delta_l$ a las de $t^l = d$. Luego

$$f(x,y) = x^{\alpha.k} - cy^{\beta.k} = y^{\beta.k}\Big((\frac{x^\alpha}{y^\beta})^k - c\Big) = (y^\beta)^k \prod_{1\leq i\leq k} (\frac{x^\alpha}{y^\beta} - \gamma_i) = \prod_{1\leq i\leq k} (x^\alpha - \gamma_i\, y^\beta).$$

Procediendo análogamente con el polinomio g, obtenemos las siguientes factorizaciones:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \prod_{1\leq i\leq k} (x^\alpha - \gamma_i\, y^\beta) \\ g(x,y) &= \prod_{1\leq j\leq l} (x^\alpha - \delta_j\, y^\beta). \end{aligned}$$

Observamos que para cualesquiera $c, d \in \mathbb{C}^*$ tales que $c^l \neq d^k$, se cumple que $\gamma_i \neq \delta_j$ para todo i, j, pues si $\gamma_i = \delta_j$ para alguna elección de i, j, entonces $c^l = (\gamma_i^k)^l = (\delta_j^l)^k = d^k$. Además, en este caso, si (x, y) es raíz del sistema, $x^a = cy^b$ y $x^r = dy^s$; por lo tanto,

$$x^{\alpha.l.k} = (dy^{\beta.l})^k = d^k(y^{\beta.k})^l = \frac{d^k}{c^l}(cy^{\beta.k})^l = \frac{d^k}{c^l}.x^{\alpha.l.k}.$$

Luego, $x = 0$ (e $y = 0$). Esto nos dice que el sistema es cero-dimensional y su única raíz es $(0, 0)$.

A partir de la factorización de f y g y usando las propiedades 6 y 7 de la Proposición 3.19, podemos calcular la multiplicidad de intersección entre f y g en el origen:

$$\operatorname{mult}(f, g; (0,0)) = \sum_{k,l} \operatorname{mult}(x^\alpha - \gamma_i\, y^\beta, x^\alpha - \delta_j\, y^\beta; (0,0)) =$$

$$= \sum_{k,l} \operatorname{mult}(x^\alpha - \gamma_i\, y^\beta, (\gamma_i - \delta_j)x^\alpha; (0,0)) = \sum_{k,l} \operatorname{mult}(-\gamma_i\, y^\beta, x^\alpha; (0,0)) =$$

$$= \sum_{k,l} \operatorname{mult}(y^\beta, x^\alpha; (0,0)) = \sum_{k,l} \beta\alpha \underbrace{\operatorname{mult}(y, x; (0,0))}_{=1} = k.l.\alpha.\beta = as.$$

De esta manera, para cualesquiera $c, d \in \mathbb{C}^*$ tales que $c^l \neq d^k$ vale que $\operatorname{mult}(f, g; (0,0)) = a.s$.

Así, en este caso, $\operatorname{mult}(f, g; (0,0)) = a.s = -\mathcal{MI}(\rho_{f,0}, \rho_{g,0})$ y como además sucede que $\operatorname{mult}(\widetilde{f}, \widetilde{g}; (0,0)) = 0$, valdrá la igualdad

$$\operatorname{mult}(f, g; (0,0)) + \operatorname{mult}(\widetilde{f}, \widetilde{g}; (0,0)) = -\mathcal{MI}(\rho_{f,0}, \rho_{g,0}).$$

- Si f y g son binomios primitivos genéricos con finitas soluciones en común y $\rho_{f,0}, \rho_{g,0}$ con pendientes negativas iguales, podemos suponerlos

$$\begin{cases} f(x,y) = 1 - cx^a y^b \\ g(x,y) = 1 - dx^r y^s \end{cases}$$

con $\det \begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix} = 0$ (o sea $as = br$) y $a, b, r, s \in \mathbb{N}$.

En este caso, tomando $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ como en (3.17), estamos en el caso anterior, y por lo tanto,

$$\text{mult}(f, g; (0,0)) + \text{mult}(\widetilde{f}, \widetilde{g}; (0,0)) = -\mathcal{MI}(\rho_{\widetilde{f},0}, \rho_{\widetilde{g},0}) = -\mathcal{MI}(\rho_{f,0}, \rho_{g,0}).$$

Bibliografía

[1] Bernstein, D. N. *The number of roots of a system of equations.* Funct. Anal. Appl. 9 (1975), 183-185; traducción de Funkts. Anal. Prilozh. 9, No. 3 (1975), 1-4.

[2] Cattani E., Dickenstein A. *Counting solutions to binomial complete intersections.* J. Complexity 23, Issue 1 (Feb. 2007), 82-107.

[3] Cox D., Little J. and O'Shea D. *Ideals, Varieties and Algorithms.* An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Springer-Verlag, New York (1992).

[4] Cox D., Little J. and O'Shea D. *Using Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York (1998).

[5] Cueto A., Dickenstein A. *Some results on inhomogeneous discriminants.* eprint math.AG/0610031. Aparecerá en: Proc. XVI CLA, Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana (2006).

[6] Ewald G. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 168, Springer, New York (1996).

[7] Fulton W. *Algebraic Curves.* An Introduction to Algebraic Geometry. W. A. Benjamin, Inc. New York (1969).

[8] Fulton, W. *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 54. American Mathematical Society, Providence, RI, (1984).

[9] Heintz J. *Definability and fast quantifier elimination in algebraically closed fields*, Theor. Comput. Sci. 24 (1983), 239-277.

[10] Heintz J., Krick T., Puddu S., Sabia J. and Waissbein A. *Deformation Techniques for Efficient Polynomial Equation Solving.* J. Complexity 16, Issue 1 (2000), 70-109.

[11] Khovanskii A.G. *Newton polyhedra and toroidal varieties.* Funct. Anal. Appl. 11 (1978), 289-296; traducción de Funkts. Anal. Prilozh. 11 (1977), No. 4, 56-64.

[12] Kushnirenko A.G. *Newton polytopes and the Bezout theorem.* Funct. Anal. Appl. 10 (1976), 233-235.

[13] Oka, M., *Non-degenerate Complete Intersection Singularity.* Actualités Mathématiques. Hermann, París (1997).

[14] Philippon P., Sombra M. *Hateur normalisée des variétés toriques proyectives.* e-print math.NT/0406476 (2004).

[15] Philippon P., Sombra M. *A refinement of the Kusnirenko-Bernstein Theorem.* Texto en preparación (2007).

[16] Shafarevich I.R., *Basic Algebraic Geometry I*, Springer-Verlag, Berlín (1977).

[17] Walker, Robert J. *Algebraic Curves.* Dover Publications, INC. New York (1962).

[18] Warren J. *A Bound on the Implicit Degree of Polygonal Bézier Surfaces.* Bajaj, Chandrajit L. (ed.), Algebraic geometry and its applications. Collections of papers from Shreeram S. Abhyankar's 60th birthday conference held at Purdue University, West Lafayette, IN, USA, June 1-4, 1990. New York: Springer-Verlag. 513-525 (1994).