



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Implicación de hipersuperficies racionales mediante complejos de  
aproximación

Nicolás Santiago Botbol  
nsbotbol@gmail.com

**Directora:** Dra. Alicia Dickenstein

Febrero de 2007

## Expreso mis agradecimientos...

A mi familia, por soportarme durante todos estos años, por la infinita paciencia que mostraron tenerme, y por bancarme no sólo anímicamente sino también económicamente durante tanto tiempo. Y a Ale, por el mucho amor que me da, dió, y dará (espero), por la mucha paciencia y por soportar mi neurosis y obsesiones y por permitirme estar a su lado.

A Martín A. porque creo que por su “culpa” hoy estoy escribiendo una tesis en matemática, por sus recomendaciones, consejos y explicaciones con muuucha paciencia.

A Fede C. y Mati d. H. por haberme acompañado durante toda mi carrera, por sus consejos, las charlas delirantes y discusiones idiotas y por haberme bancado en momentos oscuros.

A Alicia, porque me guió a lo largo de los varios años que nos conocemos, por las oportunidades que me dio para aprender, por ayudarme a formarme y conducirme en este mundo todavía un poco desconocido para mí como es la investigación en matemática.

A Fernando y Andrea por ayudarme desinteresadamente tantas veces, en diversas circunstancias, por el tiempo que me dedicaron, y todos sus consejos.

A mis amigos del Pelle por haberme acompañado desde cerca durante 12 años y por la confianza que siempre me tuvieron (bah, eso creo...).

A mis amigos de computación, por la enorme ayuda que me daban cuando no entendía nada en Algoritmos 1, por interesarse en lo que estudiaba cuando ya no cursábamos juntos y por invitarme a los asados.

A Lore por haberme acompañado durante dos años muy importantes, las horas de estudio y los viajes juntos.

A Juan Sabia, Flora, Patricia, Elicita y Carlos por ayudarme a crecer profesionalmente.

A Martín M. y Mariano S-A por la paciencia en responder mis muchas preguntas y explicarme cosas una y otra vez hasta que entendiera.

Y a muchos otros que no menciono pero forman parte de mi vida diaria.

gracias a todos...

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>La imagen de una aplicación racional como esquema</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Complejos sobre el álgebra exterior</b>	<b>21</b>
3.1	Las álgebras de Rees y Simétrica de un ideal . . . . .	22
3.2	$d$ -sucesiones . . . . .	26
3.3	Las álgebras de Rees y Simétrica de una aplicación racional . . . . .	28
3.4	El complejo de Koszul . . . . .	32
3.5	El Complejo Doble de Koszul $\mathcal{L}$ . . . . .	38
3.6	Complejos de aproximación . . . . .	42
3.7	Aciclicidad de los complejos de aproximación . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Implicitación</b>	<b>54</b>
4.1	Moving Lines y Moving Surfaces . . . . .	54
4.1.1	Moving curves . . . . .	55
4.1.2	Moving surfaces . . . . .	57
4.2	Implicitación via Complejos de Aproximación . . . . .	59
4.3	Algunas consideraciones especiales para Curvas y Superficies . . . . .	66
4.3.1	El Algoritmo para Curvas Proyectivas . . . . .	67
4.3.2	El Algoritmo para Superficies Proyectivas . . . . .	69
4.4	Algunos ejemplos . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Apéndice</b>	<b>76</b>
5.1	Fórmulas sobre el grado . . . . .	76
5.2	Ideales de Fitting, el invariante de McRae y determinantes de complejos . .	78
5.2.1	Ideales de Fitting . . . . .	78
5.2.2	La Característica de Euler . . . . .	80
5.2.3	El Invariante de McRae . . . . .	81

# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo se presenta una recopilación de los estudios realizados por Busé, Chardin y Jouanolou en el área de implícitación de hipersuperficies racionales proyectivas, usando complejos de aproximación [B-J, B-C, Cha1, Busé, BCJ]. El estudio de estos temas, además del interés teórico, está motivado por posibles aplicaciones a problemas de modelado geométrico en diseño asistido por computadoras [Hoff, GK].

Para principios de los años 80, Wolmer V. Vasconcelos desarrolló los *Complejos de Aproximación* en el contexto del estudio de las syzygies del módulo conormal [SV], a partir de dos complejos de Koszul, [HSV1, HSV2, Vas1]. Esta técnica fue utilizada por primera vez por Busé y Jouanolou en 2001 para proponer una nueva alternativa a los métodos de eliminación conocidos para resolver el problema de implícitación, y a su vez, generalizando y dando un contexto teórico a los nuevos mecanismos introducidos por Sederberg y Cheng pocos años antes, conocidos como “*moving lines*” y “*moving surfaces*” [SC, CSC, ZSCC].

El esquema de este trabajo consiste en emplear una técnica similar a la del cálculo de la resultante de Macaulay de  $n$  polinomios homogéneos  $F_1, \dots, F_n$  en  $n$  variables mediante una resolución apropiada. Esta resultante genera el anulador del cociente por el ideal  $I = (F_1, \dots, F_n)$  sobre el anillo  $A[X_1, \dots, X_n]$  de polinomios con coeficientes genéricos en grado  $\nu$ , para todo  $\nu$  no inferior a la regularidad, y está íntimamente vinculada con el invariante de MacRae del anillo coordinado  $A[X_1, \dots, X_n]/I$  en grado  $\nu$ . Este método teórico se efectiviza como el cómputo del determinante de la capa homogénea de grado  $\nu$  del complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\{F_1, \dots, F_n\}$  [Nor, MacRae, GKZ, K-M].

Más precisamente el mecanismo que desarrollaremos es el siguiente:

Se desea dar una fórmula para la ecuación implícita de la variedad (o esquema) que define la imagen de un morfismo racional  $\phi : \mathbb{P}_k^{n-2} \dashrightarrow \mathbb{P}_k^{n-1}$ , sobre un cuerpo  $k$ , para el cual asumiremos además, agregando las hipótesis técnicas que sean necesarias, que su imagen define un hipersuperficie. Este morfismo de esquemas tiene asociada su aplicación correspondiente en la categoría de álgebras, que denotamos por  $h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A := k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ . Lo que se desea ahora es calcular el núcleo del morfismo  $h$ , que por lo supuesto sobre  $\phi$ , resulta un ideal principal de  $k[T_1, \dots, T_n]$ , y presentar al esquema imagen de  $\phi$  como el conjunto de ceros de  $\ker(h)$ .

Dado que  $\phi$  puede tener puntos de indefinición, es decir un base locus no trivial en  $\mathbb{P}_k^{n-2}$ , explotamos el esquema ambiente a lo largo de la variedad  $V(I)$ . Se obtiene ahora una nueva aplicación definida desde la explosión,  $Bl_{V(I)}(\mathbb{P}_k^{n-2})$ , cuya imagen coincide con la de  $\phi$ , y que a su vez es un morfismo proyectivo. Para poder obtener una ecuación implícita del esquema en cuestión. Si denotamos por  $\mathcal{R}_A(I)$  al álgebra correspondiente a  $Bl_{V(I)}(\mathbb{P}_k^{n-2})$  según la dualidad, conocida como *álgebra de Rees* asociada al ideal  $I$ , basta entonces conocer el núcleo del morfismo asociado en la categoría de álgebras que aplica  $k[T_1, \dots, T_n]$  en  $\mathcal{R}_A(I)$ , que se estudia mediante el morfismo  $\beta : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{R}_A(I)$ .

Según el método recién mencionado, bajo hipótesis convenientes que se detallan en el trabajo, vía el cálculo del ideal de McRae de  $\mathcal{R}_A(I)$ , que denotaremos por  $\mathfrak{S}(\mathcal{R}_A(I)_\nu)$ , se obtiene un generador del ideal principal buscado.

Lamentablemente, si bien varias de las condiciones técnicas necesarias para que el ideal  $\ker(h)$  coincida con  $\text{ann}(\mathcal{R}_A(I)_\nu)$  sobre  $k[T_1, \dots, T_n]$  se satisfacen, ésta álgebra no admite una resolución libre universal, impidiendo esto el cálculo de  $\mathfrak{S}(\mathcal{R}_A(I))$ . Con el objeto de solucionar este problema se la “aproxima” mediante el álgebra simétrica asociada a  $I$ , denotada por  $\text{Sym}_A(I)$ . Con lo cual, procedemos al estudio de condiciones sobre el ideal  $I$ , para las cuales el morfismo canónico  $\sigma : \text{Sym}_A(I) \rightarrow \mathcal{R}_A(I)$  resulta un isomorfismo. Cuando esto se satisface se dice que  $I$  es de *tipo lineal*.

Bajo la hipótesis de linealidad de  $I$ , basta conseguir una resolución libre para  $\text{Sym}_A(I)$ , que no dependa de los generadores; es en este punto donde entra en juego uno de los complejos de aproximación. El complejo  $\mathcal{L}_\bullet$ , construido a partir de los ciclos del complejo de Koszul asociado a la sucesión de generadores elegidos para  $I$ , satisface que es independiente de éstos y además resulta acíclico en el caso que se desea estudiar. Con lo cual, un generador para el ideal principal  $\ker(h)$ , puede calcularse a partir de conocer el ideal de McRae de  $\text{Sym}_A(I)_\nu$ , que notamos  $\mathfrak{S}(\text{Sym}_A(I)_\nu)$ , es decir como  $\det((\mathcal{L}_\bullet)_\nu)$ , para  $\nu$  conveniente.

De esta forma se presenta el cálculo de la ecuación implícita de la imagen de  $\phi$ , no como un problema de implícitación que involucra el “costoso” cómputo de bases de Groebner, sino como productos y cocientes de determinantes de ciertas submatrices de los morfismos del complejo de espacios vectoriales  $(\mathcal{L}_\bullet)_\nu$ . Esto permite presentar algoritmos que efectiven el cálculo de estas ecuaciones, mediante rutinas que involucran solamente álgebra lineal, inteligentemente organizada.

En el *Capítulo 2* presentaremos el contexto geométrico en el que se trabajará. Definiremos los morfismos  $\phi$  y  $h$  antes mencionados, estudiaremos con cuidado el problema en que la imagen de una aplicación racional no resulta cerrada, y mostraremos que su clausura está dada por los ceros de  $\ker(h)$  (en su versión para haces). Explotaremos luego  $\mathbb{P}_k^{n-2}$  a lo largo de  $V(I)$  y estudiaremos la relación entre la imagen de  $\phi$  con su extensión a  $Bl_{V(I)}(\mathbb{P}_k^{n-2})$ . Se presenta al final de este capítulo un ejemplo en el cual bajo la hipótesis de regularidad de la sucesión de generadores de  $I$ ,  $\text{Sym}_A(I)$  resulta isomorfa a  $\mathcal{R}_A(I)$ . En este capítulo supondremos que  $k$  es un anillo conmutativo con unidad, que los espacios considerados son espacios sobre  $k$ .

En el *Capítulo 3* nos dedicaremos a desarrollar las herramientas teóricas necesarias para poder abordar el problema de implícitación con el enfoque que se desea. Para ello

primeramente nos concentraremos en determinar el ideal de presentación de las álgebras  $\mathcal{R}_A(I)$  y  $\text{Sym}_A(I)$  que aparecieron en el capítulo anterior, y a estudiar la relación entre ellas y cómo se vinculan éstas con las álgebras  $\text{gr}_A(I)$  y  $\text{Sym}_{A/I}(I/I^2)$ . Estas cuatro álgebras se construyen como dos tipos distintos de “álgebras de blow-up”, como se explicará pertinentemente. Con este objetivo, primero haremos un paneo sobre las cuestiones más generales de las presentaciones de las álgebras mencionadas y los módulos de syzygies que aparecen. Luego, para estudiar en más detalle estos objetos, introducimos técnicas más sofisticadas del álgebra conmutativa y homológica. Repasaremos las propiedades básicas del complejo de Koszul de una sucesión, y se expondrá el papel destacado de las sucesiones regulares y luego, introduciremos nociones más débiles como la de  $d$ -sucesión y sucesión propia. Posteriormente mencionaremos algunos complejos clásicos, y luego introduciremos una clase especial de complejos que funcionan mejor en el tipo de aplicaciones que estamos buscando. Introduciremos ahí el lenguaje de los complejos de aproximación, en la sección 3.6, no sólo como respuestas a las preguntas que aparecen motivadas por las  $d$ -sucesiones y sucesiones propias, sino porque ésta es la herramienta que deseamos para resolver el problema de implicitación planteado, es decir, una resolución  $\text{Sym}_A(I)$  en grado conveniente, a partir de cual poder calcular el núcleo de  $h$  como un invariante de MacRae.

Luego de que hayamos definidos los *complejos de aproximación*, veremos que estos resultan más convenientes que los complejos de Koszul estándares en dos sentidos: en primer lugar sus módulos de homología son independientes de los generadores elegidos; y en segunda instancia, éstos no presentan el tipo de rigidez que sí presentan el complejo de Koszul estandar. Se verá que frecuentemente uno de estos complejos resulta un resolución proyectiva de las álgebras simétricas y de Rees asociadas a  $I$ ,  $\text{Sym}_A(I)$  y  $\mathcal{R}_A(I)$ ; el otro, está vinculado con la preservación de estos resultados al tensorizar por  $A/I$ . Veremos también que así mismo se obtienen conclusiones similares en el estudio de las álgebras  $\text{Sym}_{A/I}(I/I^2)$  y  $\text{gr}_A(I)$  y que estos dos complejos, que denotaremos por  $\mathcal{L}_\bullet$  y  $\mathcal{M}_\bullet$ , están íntimamente vinculados entre sí.

En el *Capítulo 4* trataremos el problema de implicitación desde dos perspectivas. Primero repasaremos brevemente los métodos introducidos por Sederberg y Cheng, y posteriormente algebrizados por Cox, conocidos como “*moving lines*” y “*moving surfaces*” [SC, CSC, ZSCC]. En la segunda sección exhibiremos el método propuesto por Busé, Chardin y Jouanolou en [B-J, B-C, Cha1, Busé, BCJ], que consiste en el cálculo del núcleo del morfismo  $h$  como un invariante de MacRae del álgebra simétrica de  $I$ ,  $\mathcal{R}_A(I)$ . Se estudian aquí las distintas posibilidades para el ideal  $I$ : sin puntos base, con un base locus finito que es localmente una intersección completa y se menciona el caso en que este es casi una intersección completa y el caso de codimensión  $n - 3$ . En cada uno de estos settings se describe la situación algebraica que se presenta y se estudia de qué forma responden los complejos de aproximación.

Una vez desarrollado el método en toda su generalidad, se repasará brevemente su funcionamiento en dimensión 2 y 3, es decir, en el problema de implicitación de curvas y superficies. Se presentan ahí mismo dos algoritmos, que pretenden exhibir el funcionamiento de esta técnica en estos casos particulares. Las rutinas implementadas sólo involucran cálculos de álgebra lineal, haciendo de esta forma plausible el cómputo de ecuaciones implícitas, para las cuales los algoritmos que involucran técnicas de eliminación no termi-

narían o requerirían cantidades enormes de memoria para procesar los cálculos.

El *Apéndice* contiene algunos temas suplementarios necesarios para la buena comprensión de los temas desarrollados en este trabajo. Primeramente se define el concepto de multiplicidad algebraica, y se recorre el camino mínimo para poder enunciar la *fórmula del grado*, necesaria en el Capítulo 4 para los teoremas de implicitación enunciados en la sección 4,2 [B-J, Busé]. Posteriormente, dado un anillo  $A$  y un  $A$ -módulo  $M$ , definiremos los *Ideales de Fitting* de  $M$ , notaremos con  $\mathfrak{F}_i(M)$  al  $i$ -ésimo de estos. Luego definiremos el *invariante de MacRae* de  $M$ , que notaremos como  $\mathfrak{S}(M)$ , y lo vincularemos con el determinante de una resolución libre de  $M$ . Estos dos objetos son utilizados en los teoremas de implicitación centrales de este trabajo. Para los últimos temas, se puede consultar [MacRae, Nor, Busé].

## Capítulo 2

# La imagen de una aplicación racional como esquema

Lo que se pretende a lo largo de este trabajo es obtener ecuaciones implícitas para la variedad que describe la imagen de un morfismo  $\phi : \mathbb{P}^{n-2} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  definido como  $\phi = (f_1, \dots, f_n)$ , donde las funciones  $\{f_i\}_{i=1, \dots, n}$  son homogéneas de grado  $d$ .

En general, la imagen de este morfismo no resulta un subesquema cerrado de  $\mathbb{P}^{n-1}$  por lo que se pretenderá encontrar ecuaciones que describan su clausura, o en un lenguaje más técnico, al *esquema imagen* también denominado la “*scheme-theoretic image*” de  $\phi$ .

Consideremos un morfismo de esquemas  $\mu : X \rightarrow Y$ . La *imagen conjuntista*, denominada “*set-theoretic image*” se describe como el subconjunto  $S \subseteq Y$  formado por los puntos  $y \in Y$  tales que existe  $x \in X$ , con  $\mu(x) = y$ . Como observamos antes, este conjunto no es necesariamente cerrado. Por ejemplo, si  $X$  es el esquema definido por el ideal primo  $I = (xy - 1) \subset k[x, y]$ , en el espacio afín bidimensional sobre  $k$ ,  $\mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } k[x, y]$ , entonces la imagen conjuntista de la proyección de  $X$  sobre la recta  $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[x]$  es el complemento del origen, que no es un conjunto cerrado.

Antes de continuar con sofisticaciones de estos conceptos, veamos otro ejemplo también bastante clásico. Consideremos el 2-embedding de Veronese de  $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^5$  definido como  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2)$  y compongámoslo con la proyección en 4 de sus coordenadas, obteniendo un morfismo  $\phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$  que aplica  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2)$ . Observar que estamos en presencia de puntos base, es decir, puntos donde todas las coordenadas se anulan. Estos puntos forman lo que se denomina el base locus y está dado como conjunto por la unión de  $(x_0 = x_1 = 0)$  con  $(x_0 = x_2 = 0)$ . Con el mismo argumento con el que se ve que la aplicación dada por el 2-embedding resulta cerrada, se puede ver que la clausura de la imagen de la aplicación  $\phi$  está dada por los ceros de  $I = (f = y_0y_3 - y_1y_2)$ , que es una hipersuperficie proyectiva. Observemos que el punto  $p = (0 : 0 : 1 : 0)$  está en la clausura de la imagen ( $f(p) = 0$ ) pero no en la imagen, ya que la nulidad de la primera coordenada implica que  $x_0^2 = 0$ , pero como no se anula la tercera tendríamos  $x_0x_2 \neq 0$ , con lo cual esto contradice que  $x_0$  se anule. Exploraremos todas estas cuestiones más adelante.

Para comenzar, recordemos primero algunos conceptos.

*2.0.1 Nota.* En lo que sigue usaremos el lenguaje de la teoría de esquemas. Para el lector no

familiarizado con estos conceptos sugerimos referirse a [Harts, Ch. II] ó [E-H]. La notación empleada sigue la utilizada en estas referencias.

Aun así, recordaremos algunas definiciones que serán de frecuente uso.

**2.0.2 Definiciones Varias.** Un *espacio anillado* es un par  $(X, \mathcal{O}_X)$  que consiste en un espacio topológico  $X$  y en un haz de anillos  $\mathcal{O}_X$  en  $X$ .

Un *morfismo* de espacios anillados de  $(X, \mathcal{O}_X)$  a  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  es un par  $(f, f^\#)$ , donde  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  es un morfismo de haces de anillos sobre  $Y$ .

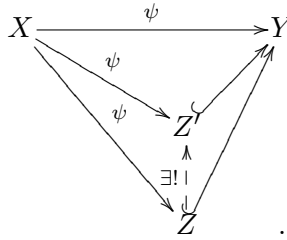
El espacio  $(X, \mathcal{O}_X)$  se dice *localmente anillado* si para cada  $x \in X$ , el anillo de gérmenes  $\mathcal{O}_{X,x}$  es un anillo local.

Un *morfismo de espacios localmente anillados* es un morfismo  $(f, f^\#)$  de espacios anillados, tal que para cada  $x \in X$  el morfismo inducido entre los anillos locales  $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{X,x}$  es un morfismo local de anillos locales.

Dado que todo esquema es un tipo particular de espacio localmente anillado, un morfismo de esquemas es un morfismo de espacios de este tipo. En lo sucesivo, abusaremos de la notación y escribiremos directamente  $f : X \rightarrow Y$  para referirnos al morfismo de esquemas  $(f, f^\#)$  de  $(X, \mathcal{O}_X)$  en  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ .

Para más referencia sobre este tema, consultar la bibliografía antes citada.

**2.0.3 Definición.** Dado un morfismo de esquemas  $\psi : X \rightarrow Y$ , existe un único subesquema cerrado  $Z$  de  $Y$ , tal que el morfismo  $\psi$  se factoriza a través de  $Z$ , y si  $Z'$  es otro posible esquema a través del cual hay una factorización de  $\psi$ , entonces la inclusión de  $Z$  en  $Y$  se factoriza por  $Z'$ , es decir:



Un tal  $Z$  se denomina la “scheme-theoretic image” del morfismo  $\psi$ , y esta es su caracterización por su propiedad universal.

Más concretamente definimos la “scheme-theoretic image” de  $\psi$ , que frecuentemente notaremos como  $\bar{\psi}(X)$ , como:

**2.0.4 Definición.** Si  $\psi : X \rightarrow Y$  es un morfismo de esquemas,  $\bar{\psi}(X)$  consiste del subesquema cerrado de  $Y$  cuyo haz de ideales es el haz de funciones regulares en abiertos de  $Y$  tales que al hacerles pull-back por  $\psi$  se anulan, es decir:

$$\bar{\psi}(X) = V(\ker(\psi^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow \psi_*\mathcal{O}_X)),$$

que con la notación de espacios anillados, consiste en el par  $(Z, \mathcal{I})$ , donde  $Z$  es la clausura de la imagen conjuntista, e  $\mathcal{I}$  es el haz de ideales  $\ker(\psi^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow \psi_*\mathcal{O}_X)$ .

Este esquema consiste, como espacio topológico, de la clausura Zariski de la imagen conjuntista de  $\psi$ , esto es,  $\{y \in Y \text{ tales que } f(y) = 0 \text{ para todo } f \text{ tal que } f(\psi(x)) = 0 \text{ para todo } x \in X\}$ , que frecuentemente se nota  $I(\psi(X))$ .

*2.0.5 Nota.* Se prueba también (ver [E-H, Prop. V-3]) que si se tiene un morfismo de esquemas  $\psi : X \rightarrow Y$ , la clausura de la “set-theoretic image” es el esquema reducido asociado a  $\bar{\psi}(X)$ ,  $\bar{\psi}(X)_{red}$ . Para el caso en que  $X$  es un esquema reducido (esto es que para cada abierto  $U$ ,  $\mathcal{O}_X(U)$  es un anillo sin elementos nilpotentes), la “scheme-theoretic image” de  $\psi$  coincide con la clausura de la imagen conjuntista de  $\psi$ ,  $f(X)$ , como esquema reducido.

Más precisamente, la situación que se nos presenta es la siguiente. Sea  $k$  un anillo conmutativo, y  $A$  una  $k$ -álgebra  $\mathbb{Z}$ -graduada. Los enteros  $n, d \geq 1$  ahora son tales que se tienen elementos  $\{f_i\}_{i=1, \dots, n}$  de  $A$  de grado  $d$ , y un morfismo de  $k$ -álgebras

$$h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A, \quad T_i \mapsto f_i. \quad (2.1)$$

Este morfismo de  $k$ -álgebras induce un morfismo de  $k$ -esquemas afines

$$\mu : \bigcup D(f_i) \rightarrow \bigcup D(T_i) = \mathbb{A}_k^n - \{0\}, \quad (2.2)$$

donde los conjuntos  $D(f_i)$  son abiertos de  $\text{Spec } A$  y se definen como el conjunto de puntos  $\mathcal{P}$  de  $\text{Spec } A$  tales que  $f_i \notin \mathcal{P}$  y  $\mathbb{A}_k^n = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ .

A su vez, dado que los elementos  $\{f_i\}_{i=1, \dots, n}$  son homogéneos de grado  $d$ ,  $h$  resulta un morfismo graduado (de grado  $d$ ) de álgebras graduadas (donde la graduación en el anillo de la izquierda está dada por  $\deg(T_i) = 1$  para todo  $i = 1 \dots, n$ ). Entonces  $h$  induce un morfismo de  $k$ -esquemas proyectivos

$$\phi : \bigcup D_+(f_i) \rightarrow \bigcup D_+(T_i) = \mathbb{P}_k^{n-1}, \quad (2.3)$$

donde los conjuntos  $D_+(f_i)$  son abiertos de  $\text{Proj } A$  y se definen como el conjunto de puntos  $\mathcal{P}$  de  $\text{Proj } A$  tales que  $f_i \notin \mathcal{P}$  y  $\mathbb{P}_k^{n-1} = \text{Proj } k[x_1, \dots, x_n]$ .

Obsérvese que si denotamos con  $D(\mathbf{f}) := \bigcup D(f_i)$  y  $D_+(\mathbf{f}) := \bigcup D_+(f_i)$ , éstos representan el dominio de definición de los morfismos  $\mu$  y  $\phi$  respectivamente, es decir  $D(\mathbf{f}) = \text{Spec } A - V(f_1, \dots, f_n)$  y  $D_+(\mathbf{f}) = \text{Proj } A - V(f_1, \dots, f_n)$ . Estos abiertos son el resultado de quitar el conjunto (cerrado) de puntos base de  $\text{Spec } A$  y  $\text{Proj } A$  respectivamente.

Con las notaciones anteriores, el objetivo principal de este trabajo será dar una fórmula para la clausura de la imagen de estos morfismos  $\mu$  y  $\phi$  en el caso en que definan hipersuperficies, es decir, un generador del ideal principal  $\ker(\phi^\# : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_{D_+(\mathbf{f})})$ .

Antes de probar el próximo teorema que da una descripción de la “scheme-theoretic image” de  $\mu$  y  $\phi$ , exhibiendo sus haces de ideales, introduciremos algunas definiciones, notaciones y resultados que resultarán útiles:

**2.0.6 Definiciones Varias.** Denotaremos por  $R$  al anillo de polinomios  $k[T_1, \dots, T_n]$ , y sean  $I$  y  $J$  dos ideales de  $R$  y  $M$  un  $R$ -módulo. Definimos:

- (a)  $\text{ann}(J) = \{f \in R \text{ tales que } f.J = 0\}$ , el anulador de  $J$ ;
- (b)  $(I :_R J) = \{f \in R \text{ tales que } f.J \subset I\}$ , que notaremos  $(I : J)$  cuando  $R$  esté claro por el contexto;
- (c)  $(I :_R J^\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (I :_R J^n)$ , la saturación de  $I$  por  $J$ , que también notaremos  $TF_J(I)$ ;
- (d)  $H_J^0(M) = \{m \in M \text{ tales que } m.J^n = 0, \forall n \gg 0\}$ , el 0-ésimo grupo de cohomología local de  $M$  con soporte en  $J$ .

*2.0.7 Observación.* De acuerdo a las definiciones anteriores, es claro que si  $R$  es un anillo conmutativo y  $J$  un ideal de  $R$ , entonces  $(0 :_R J) = \{f \in R \text{ tales que } f.J \subset 0\} = \text{ann}(J)$ . Además  $\{f \in R \text{ tales que } f.J^n = 0, \forall n \gg 0\} = \{f \in R \text{ tales que } f.J^n = 0 \text{ para algún } n \gg 0\} = (0 :_R J^\infty)$ . Hemos visto entonces que el 0-ésimo grupo de cohomología local de  $R$  con soporte en  $J$ ,  $H_J^0(R)$ , coincide con la saturación de 0 respecto de  $J$ . Es decir que  $H_J^0(R) = (0 :_R J^\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{ann}(J^n)$ . En lenguaje más categórico, como la cadena de transportadores (y por lo tanto de anuladores) es encajada, entonces la saturación resulta el colímite filtrante de los anuladores, es decir  $H_J^0(R) = \varinjlim \text{ann}(J^n)$ .

**2.0.8 Teorema.** *Para los morfismos  $h$ ,  $\mu$  y  $\phi$  definidos en (2.1), (2.2) y (2.3), se tiene que sus respectivos haces de ideales  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  que son la hacificación del ideal  $\ker(h)$  en el contexto afín y proyectivo respectivamente, coinciden con la hacificación de la saturación respecto de  $(T_1, \dots, T_n)$  de  $\ker(h)$ . Se tiene así que*

$$V(\mathcal{I})|_{\mathbb{A}_k^n - \{0\}} = V(\ker(h)^\sim)|_{\mathbb{A}_k^n - \{0\}} = V((\ker(h) : (T_1, \dots, T_n)^\infty)^\sim)|_{\mathbb{A}_k^n - \{0\}}$$

en el contexto afín y análogamente con  $V(\mathcal{J})$ .

Antes de demostrar este teorema, daremos algunas definiciones, observaciones y resultados más que resultarán necesarios para la prueba.

**2.0.9 Más Definiciones.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas. Definimos:

- (a)  $X$  es un esquema noetheriano si  $X$  es un espacio topológico cuasicompacto tal que como esquema  $X = \bigcup \text{Spec} A_i$ , donde los  $A_i$  son anillos noetherianos;
- (b) el morfismo  $f$  es cuasicompacto si existe un cubrimiento de  $Y$  por abiertos afines  $V_i$  tales que  $f^{-1}(V_i)$  es cuasicompacto para todo  $i$ . O equivalentemente para todo abierto afín  $V$ ,  $f^{-1}(V)$  es cuasicompacto;
- (c) el morfismo  $f$  se dice finito, o de tipo finito, si para todo abierto afín  $V = \text{Spec } B \subset Y$  y para todo abierto afín  $U = \text{Spec } A \subset f^{-1}V$ ,  $A$  es una  $B$ -álgebra finitamente generada.
- (d) el morfismo  $f$  es separado si la aplicación diagonal  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ , de  $X$  en el pullback de  $X$  con  $X$  sobre  $Y$  es cerrada;

- (e) el morfismo  $f$  se dice afín si existe un cubrimiento por abiertos afines  $V_i$  de  $Y$ , tal que  $f^{-1}(V_i)$  un abierto afín para todo  $Y$ . Equivalentemente, si esto sucede para todo cubrimiento por abiertos afines.

**2.0.10 Observaciones y Resultados.** De acuerdo a las definiciones anteriores, son válidas las siguientes afirmaciones:

- (a) Todo morfismo finito es afín,  
 (b) Todo morfismo afín es cuasicompacto y separado.

Se puede encontrar más sobre morfismos afines en [Harts, Ex 5.17 Ch.II].

**2.0.11 Más Observaciones y Resultados.** Sea  $R$  un anillo,  $X = \text{Spec } A$ ,  $A \rightarrow B$  un morfismo de anillos, y  $g : \text{Spec } B \rightarrow X$  el morfismo correspondiente en los esquemas. Si denotamos por  $M^\sim$  al haz asociado a  $M$ , entonces:

- (a) para toda familia  $\{M_i\}$  de  $A$ -módulos,  $(\bigoplus_i M_i)^\sim \simeq \bigoplus_i M_i^\sim$ ;  
 (b) para todo  $B$ -módulo  $N$ ,  $g_*(N^\sim) \simeq (N_A)^\sim$ , donde  $(N_A)^\sim$  denota la hacificación de  $N$  como  $A$ -módulo.

**2.0.12 Proposición.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas. Si  $X$  es noetheriano o  $f$  es cuasicompacto y separado; entonces si  $\mathcal{F}$  es cuasicoherente como haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos,  $f_*\mathcal{F}$  resulta un haz cuasicoherente de  $\mathcal{O}_Y$ -módulos.*

*Demostración.* Como la afirmación es local en  $Y$ , ya que se quiere ver que  $f_*\mathcal{F}$  es localmente la hacificación de un módulo, podemos suponer que  $Y$  es un esquema afín. Como  $X$  es cuasicompacto (como espacio topológico, es decir todo cubrimiento por abiertos admite un subcubrimiento finito), se tiene la siguiente escritura  $X = \bigcup U_i$ , donde los  $U_i$  son finitos abiertos afines. Sea  $V$  un abierto de  $Y$ . Como  $\mathcal{F}$  es un haz, es lo mismo tener una sección global  $s \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F})$ , que una familia de secciones  $\{s_i\}_i \subset \Gamma(f^{-1}(V) \cap U_i, \mathcal{F})$  compatibles con las restricciones. Entonces existe una sucesión exacta de haces

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_i f_*^{(i)}\mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \bigoplus_{i,j} f_*^{(i,j)}\mathcal{F}|_{U_{i,j}}, \quad (2.4)$$

donde  $U_{i,j} := U_i \cap U_j$ , y  $f^{(i)}$  y  $f^{(i,j)}$  denotan las restricciones de  $f$  a los abiertos  $U_i$  y  $U_{i,j}$  respectivamente.

Como  $\mathcal{F}|_{U_i}$  y  $\mathcal{F}|_{U_{i,j}}$  son módulos hacificados, se sigue del resultado 2.0.11 que  $f_*(\mathcal{F}|_{U_i})$  y  $f_*(\mathcal{F}|_{U_{i,j}})$  son haces cuasicoherentes, y como el funtor de hacificación es exacto, entonces el núcleo de un morfismo de haces cuasicoherente es cuasicoherente, luego  $f_*\mathcal{F}$  resulta un haz cuasicoherente de  $\mathcal{O}_Y$ -módulos. □

**2.0.13 Lema.** *Con la notación anterior:*

$$TF_{(T_1, \dots, T_n)}(\ker(h)) = \{p \in A[T_1, \dots, T_n] \text{ tales que } p(f_1, \dots, f_n) \in H_{(f_1, \dots, f_n)}^0(A)\}.$$

*En particular, cuando  $H_{(f_1, \dots, f_n)}^0(A) = 0$ , se tiene que el ideal  $\ker(h)$  coincide con su saturado,  $TF_{(T_1, \dots, T_n)}(\ker(h))$ ; esto dice que  $\ker(h)$  es un ideal saturado respecto de  $(T_1, \dots, T_n)$  en  $k[T_1, \dots, T_n]$ .*

Recordemos primero que si  $I, J = (g_1, \dots, g_s)$  son ideales de un anillo  $R$ , entonces la saturación de  $I$  por  $J$ ,  $(I :_R J^\infty)$ , se define como  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} (I :_R J^m) = \{f \in R \text{ tales que } \exists m \in \mathbb{N}, f \cdot (g_1, \dots, g_s)^n \subset I\}$ . Veamos que:

*2.0.14 Observación.*

$$(I :_R J^\infty) = \{f \in R \text{ tales que } \exists m \in \mathbb{N}, f \cdot g_i^m \in I \forall i\}$$

Esto se debe a que  $(g_1^m, \dots, g_s^m) \subset J^m$  y además, si  $f \in J$ ,  $f = \sum_{i=1}^s \alpha_j g_j$ . Luego  $f^{m(s-1)+1} = (\sum_{i=1}^s \alpha_i g_i)^{m(s-1)+1} = \sum_{\sum i_j = m(s-1)+1} \alpha_{(i_1, \dots, i_s)} g_1^{i_1} \dots g_s^{i_s} \in (g_1^m, \dots, g_s^m)$ . Entonces  $J^{m(s-1)+1} \subset (g_1^m, \dots, g_s^m)$ . Tal como queríamos probar.

*Demostración del Lema 2.0.13.* Escribiendo al ideal saturado se tiene que

$$\begin{aligned} TF_{(T_1, \dots, T_n)}(\ker(h)) &= (\ker(h) : (T_1, \dots, T_n)^\infty) = \\ &= \{p \in A[T_1, \dots, T_n] \text{ tales que } \exists m \in \mathbb{N}, P.T_i^m \subset \ker(h) \forall i\}, \end{aligned}$$

donde esta última igualdad sale de la Observación 2.0.14. Ahora, como  $P.T_i^m \in \ker(h)$  es equivalente a que  $(P.T_i^m)(f_1, \dots, f_n) = 0$ , se tiene que  $P(f_1, \dots, f_n) \cdot f_i^m = 0$ .

Como  $H_{(f_1, \dots, f_n)}^0(A) = \{a \in A \text{ tales que } a \cdot f_i^m = 0 \forall m >> 0\}$ , se tiene entonces que:

$$TF_{(T_1, \dots, T_n)}(\ker(h)) = \{p \in k[T_1, \dots, T_n] \text{ tales que } P(f_1, \dots, f_n) \in H_{(f_1, \dots, f_n)}^0(A)\} = \ker(h).$$

En particular, si  $H_{(f_1, \dots, f_n)}^0(A) = 0$ , usando nuevamente 2.0.14, de  $P(f_1, \dots, f_n) \cdot f_i^m = 0$ , tomando  $a = P(f_1, \dots, f_n)$  se deduce que  $P(f_1, \dots, f_n) = 0$ , y se tiene que:

$$TF_{(T_1, \dots, T_n)}(\ker(h)) = \{p \in k[T_1, \dots, T_n] \text{ tales que } P(f_1, \dots, f_n) = 0\} = \ker(h).$$

□

*2.0.15 Nota.* Recordemos que en el contexto afín existe una correspondencia entre ideales de un anillo  $A$  con los subesquemas cerrados de  $X = \text{Spec } A$ . Esto resulta de que el functor de secciones globales de la hacificación de un  $A$ -módulo recupera el módulo intactamente, es decir si  $M$  es un  $A$ -módulo,  $\Gamma(X, M^\sim) \simeq M$ . Sin embargo esto no sucede en el caso proyectivo: dos ideales homogéneos de un anillo graduado  $S$  definen el mismo subesquema cerrado de  $X = \text{Proj } S$  si y solo si sus saturaciones (respecto del ideal maximal  $S_+$ ) coinciden. Esto proviene de que el functor de secciones globales de la hacificación de un  $S$ -módulo graduado coincide con el módulo mismo en grado alto, es decir si  $M$  es un  $S$ -módulo graduado,  $\Gamma(X, M^\sim(\nu)) \simeq M_\nu$  para  $\nu \gg 0$ . Si  $M$  es un  $S$ -módulo saturado respecto del ideal maximal  $S_+$ , entonces  $\Gamma(X, M^\sim(\nu)) \simeq M_\nu$  para todo  $\nu$ . Para más información sobre este tema ver [Harts, Ex. 5.9 y 5.10, Ch.II].

**2.0.16 Corolario.** *Del lema anterior se deduce que si  $H_{(f_1, \dots, f_n)}^0(A) = 0$ , entonces  $\ker(h)$  coincide con las secciones globales de su hacificación sobre  $\mathbb{P}_k^{n-1}$ , es decir, se tiene que  $\Gamma(\mathbb{P}_k^{n-1}, \ker(h)^\sim(\nu)) \simeq \ker(h)_\nu$  para todo  $\nu \in \mathbb{Z}$ .*

Recordemos que queríamos probar que  $V(\mathcal{F})|_{\mathbb{A}_k^n - \{0\}} = V(\ker(h)^\sim)|_{\mathbb{A}_k^n - \{0\}} = V((\ker(h) : (T_1, \dots, T_n)^\infty)^\sim)|_{\mathbb{A}_k^n - \{0\}}$  como se enuncia en el Teorema 2.0.8:

*Demostración del Teorema 2.0.8.* Haremos la demostración en el caso afín. Consideremos el morfismo  $\mu$  inducido por  $h$ :

$$\mu : \bigcup D(f_i) \rightarrow \bigcup D(T_i) = \mathbb{A}_k^n - \{0\},$$

donde  $D(f_i) = \{\mathcal{P} \in \text{Spec } A \text{ tales que } f_i \notin \mathcal{P}\} = \text{Spec } A_{f_i}$  y  $A_{f_i}$  es la localización de  $A$  por el menor conjunto multiplicativamente cerrado que contiene a  $f_i$  y similarmente  $D(T_i) = \text{Spec } k[T_1, \dots, T_n]_{T_i}$  y por lo tanto, resultan abiertos afines.

La restricción de  $\mu$  a  $D(f_i)$ ,  $\mu|_{D(f_i)} : D(f_i) \rightarrow D(T_i)$ , corresponde al morfismo local de álgebras locales  $h_{T_i} : k[T_1, \dots, T_n]_{T_i} \rightarrow A_{f_i}$ , además  $\mu^{-1}(D(T_i)) = D(f_i)$ . Resulta de esto que  $\mu$  es un morfismo afín.

De acuerdo a 2.0.9 y por 2.0.10 estamos bajo las hipótesis de la Proposición 2.0.12. Se tiene una sucesión exacta de haces como la descrita en (2.4), donde ahora  $\mathcal{F}$  es el haz estructural del abierto  $D(\mathbf{f})$ , y  $\mathcal{F}_{U_i}$  y  $\mathcal{F}_{U_{i,j}}$  son las restricciones a los abiertos  $D(f_i)$  y  $D(f_i \cdot f_j) = D(f_i) \cap D(f_j)$ :

$$0 \rightarrow \mu_* \mathcal{O}_{D(\mathbf{f})} \rightarrow \bigoplus_i \mu_* \mathcal{O}_{D(f_i)} \rightarrow \bigoplus_{i,j} \mu_* \mathcal{O}_{D(f_i \cdot f_j)}.$$

A partir de la exactitud de esta sucesión se tiene que:

$$\mu_* \mathcal{O}_{D(\mathbf{f})} = \ker\left(\bigoplus_i \mu_* \mathcal{O}_{D(f_i)} \rightarrow \bigoplus_{i,j} \mu_* \mathcal{O}_{D(f_i \cdot f_j)}\right),$$

y como el funtor de hacificación conmuta con sumas directas y con  $f_*$  en el caso afín, entonces

$$\mu_* \mathcal{O}_{D(\mathbf{f})} = \ker\left(\left(\bigoplus_i A_{f_i}\right)^\sim \rightarrow \left(\bigoplus_{i,j} A_{f_i \cdot f_j}\right)^\sim\right) = \left(\ker\left(\bigoplus_i A_{f_i} \rightarrow \bigoplus_{i,j} A_{f_i \cdot f_j}\right)\right)^\sim.$$

Notemos ahora que si llamamos  $\varphi_i : A \rightarrow A_{f_i}$  al morfismo de localización, la imagen del morfismo de anillos antes mencionado  $\varphi_i \circ h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \bigoplus_i A_{f_i}$  cae en  $\ker\left(\bigoplus_i A_{f_i} \rightarrow \bigoplus_{i,j} A_{f_i \cdot f_j}\right)$ , que resulta un  $k[T_1, \dots, T_n]$ -módulo, y consecuentemente  $\mu_* \mathcal{O}_{D(\mathbf{f})}$  es un haz cuasicohérente de  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}$ -módulos. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} \ker(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n - \{0\}} \xrightarrow{\mu^\#} \mu_* \mathcal{O}_{D(\mathbf{f})}) &= \ker(h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \ker\left(\bigoplus_i A_{f_i} \xrightarrow{\xi} \bigoplus_{i,j} A_{f_i \cdot f_j}\right)^\sim)|_{\mathbb{A}_k^n - \{0\}} = \\ &= \ker(k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A/H_{(f_1, \dots, f_n)}^0(A))^\sim|_{\mathbb{A}_k^n - \{0\}}. \end{aligned}$$

Para explicar esta última igualdad recordemos cómo comienza el complejo  $\check{C}^\bullet(f_1, \dots, f_n)$ , llamado complejo de Čech, que notaremos  $\check{C}^\bullet$ :

$$\check{C}^\bullet : \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{\oplus \varphi_i} \bigoplus_i A_{f_i} \xrightarrow{\xi} \bigoplus_{i,j} A_{f_i \cdot f_j} \rightarrow \dots$$

La igualdad en cuestión se debe a que el grupo de cohomología de Čech  $H^1(\check{\mathcal{C}}^\bullet)$  es anulado por  $I = (f_1, \dots, f_n)$ , esto es un resultado general para este complejo (ver por ejemplo [Busé, Wei]). En particular

$$H^1(\check{\mathcal{C}}^\bullet)^\sim|_{D(\mathfrak{f})} = 0,$$

esto dice que  $\ker(\xi)^\sim|_{D(\mathfrak{f})} = \text{im}(\oplus \varphi_i)^\sim|_{D(\mathfrak{f})} \simeq \frac{A}{H^0_{(f_1, \dots, f_n)}(A)}^\sim|_{D(\mathfrak{f})}$ .

Recordemos que de acuerdo a las definiciones 2.0.6, la Observación 2.0.7 y al Lema 2.0.13:

$$\begin{aligned} TF_{(T_1, \dots, T_h)}(\ker(h)) &= \{g \in k[T_1, \dots, T_n] \text{ tales que } g(f_1, \dots, f_n) \in H^0_{(f_1, \dots, f_n)}(A)\} = \\ &= \ker(h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A/H^0_{(f_1, \dots, f_n)}(A)). \end{aligned}$$

Hemos probado que  $\ker(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n - \{0\}} \rightarrow \mu_* \mathcal{O}_{D(\mathfrak{f})}) = TF_{(T_1, \dots, T_h)}(\ker(h))^\sim$ , y de acuerdo a la definición 2.0.4, la “scheme-theoretic image” de  $\mu$  resulta  $V(TF_{(T_1, \dots, T_h)}(\ker(h))^\sim)$ .  $\square$

Recordemos que lo que se pretende es obtener una fórmula para la “scheme-theoretic image” de  $\phi$ . Hemos visto que este morfismo está definido sobre el subesquema abierto que denominamos  $D_+(\mathfrak{f})$ , que resulta ser el complemento del subesquema cerrado  $V(f_1, \dots, f_n)$  de  $\text{Proj } A$  denominado conjunto de puntos base de  $\phi$ . Con el objetivo de eliminar estos puntos de indefinición de  $\phi$  y obtener un morfismo proyectivo  $\tilde{\phi}$  que extienda a  $\phi$  y tal que su imagen coincida con la “scheme-theoretic image” de  $\phi$ , procederemos a explotar a  $\text{Proj } A$  a lo largo del haz de ideales de puntos base  $\mathcal{I} = (f_1, \dots, f_n)^\sim$ .

Es conveniente recordar que en el contexto general, resulta equivalente la existencia de un morfismo de esquemas  $\psi : X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$  (posiblemente con puntos base) a la existencia de un haz inversible generado por  $n + 1$  de sus secciones globales sobre  $X$ . Este resultado se enuncia como sigue:

**2.0.17 Proposición.** *Sea  $S$  un anillo,  $X$  un esquema sobre  $S$ . Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

- (a) *si  $\psi : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$  es un morfismo de  $S$ -esquemas, entonces  $\psi^*(\mathcal{O}(1))$  es un haz inversible en  $X$  generado por sus secciones globales  $s_i = \psi^*(x_i)$  para  $i = 0, \dots, n$ .*
- (b) *Recíprocamente, si  $\mathcal{L}$  es un haz inversible en  $X$ , y si  $s_0, \dots, s_n$  son secciones globales que generan  $\mathcal{L}$ , entonces existe un único morfismo de esquemas sobre  $S$ ,  $\psi : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ , tal que  $\mathcal{L} \simeq \psi^*(\mathcal{O}(1))$  y  $s_i = \psi^*(x_i)$  bajo este isomorfismo.*

Para más referencia sobre este tema ver [Harts, thm. 7.1, ch. II]

Repasaremos a continuación la definición de “blow-up” que usaremos de aquí en adelante y un resultado que será necesario:

**2.0.18 Definición.** Sea  $X$  un esquema noetheriano y sea  $\mathcal{I}$  un haz coherente de ideales en  $X$ . Sea  $\mathcal{L} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$  (que en un futuro denotaremos con  $\mathcal{R}_{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)$ ), donde  $\mathcal{I}^0 = \mathcal{O}_X$ . Como  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^1$  es un haz coherente de  $\mathcal{O}_X$ -módulos y  $\mathcal{L}$  está generada por su componente

de grado uno,  $\mathcal{I}^1$ , como  $\mathcal{O}_X$ -álgebra, podemos considerar  $\tilde{X} = \text{Proj } \mathcal{L}$ . Se dirá que  $\tilde{X}$  es el “blowing-up” de  $X$  respecto del haz coherente de ideales  $\mathcal{I}$ . También si  $Z$  es el subesquema cerrado correspondiente a  $\mathcal{I}$ , entonces se dirá que  $\tilde{X}$  es el “blowing-up” de  $X$  respecto de  $Z$  o con centro en  $Z$ . También notaremos con  $Bl_{\mathcal{I}}(X)$  al “blowing-up” de  $X$  a lo largo de  $\mathcal{I}$ .

**2.0.19 Ejemplo.** En la teoría de eliminación de singularidades, surge como primer caso de estudio el entender la explosión de una variedad en un punto, es decir, cuando  $Z$  consiste de un solo punto.

Consideremos por ejemplo la situación de la explosión de  $\mathbb{A}_k^n$  en el origen. Sea  $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$  (que es una variedad cuasi proyectiva), y denotemos con  $x_1, \dots, x_n$  a las coordenadas afines de  $\mathbb{A}_k^n$  e  $y_1, \dots, y_n$  a las homogéneas de  $\mathbb{P}_k^{n-1}$ . Entonces los cerrados de  $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$  están dados por polinomios que son homogéneos en las  $y_i$ 's.

Definimos el “blowing-up” de  $\mathbb{A}_k^n$  en el origen  $0$ , como el subconjunto cerrado  $\tilde{X}$  de  $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$  definido por las ecuaciones  $\{x_i y_j - x_j y_i\}_{i,j=1,\dots,n}$ . Se obtiene un morfismo natural  $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{A}_k^n$  a partir de la composición de la inclusión con la primera proyección, como se muestra en el diagrama siguiente.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \hookrightarrow & \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1} \\ & \searrow \varphi & \downarrow \\ & & \mathbb{A}_k^n \end{array}$$

Ahora, de acuerdo con la notación introducida en la definición 2.0.18, si  $X$  es  $\mathbb{A}_k^n$  y  $x \in X$  es el origen, entonces el “blowing-up” de  $X$  a lo largo de  $x$ , definido como recién coincide con la forma usual de explotar una variedad en un punto. En efecto, este es el caso donde  $X = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$  y  $x$  corresponde al ideal  $(x_1, \dots, x_n)$ . Se tiene que  $\tilde{X} = \text{Proj } R$ , donde  $R = \bigoplus_{d \geq 0} I^d$ , es el álgebra de Rees de  $I$ , que estudiaremos en el Capítulo 2.

En efecto, se puede definir una aplicación suryectiva de anillos graduados, llamada  $\psi$ ,  $\psi : A[y_1, \dots, y_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ , que se corresponde con la inclusión de  $\text{Proj } R = \tilde{X}$  en  $\text{Proj } A[y_1, \dots, y_n] = \mathbb{P}_A^{n-1}$ , que manda  $y_i$  al elemento  $x_i \in I$  considerado como un elemento de  $R$  en grado 1. Luego  $\tilde{X}$  es isomorfo a un subesquema cerrado de  $\mathbb{P}_A^{n-1}$ . Éste está definido por los polinomios homogéneos en las  $y_i$ 's que generan el núcleo de  $\psi$ , que está dado por  $\{x_i y_j - x_j y_i\}_{i,j=1,\dots,n}$ , como se dijo al principio del ejemplo.

Observemos acá que si  $\mathcal{I} = I^\sim$  es un haz coherente de ideales y  $\mathcal{O}_X$  es el haz estructural de  $\text{Proj } A$ , entonces  $\mathcal{I}|_U \simeq \mathcal{O}_U$ , donde  $\mathcal{O}_U$  es la restricción de  $\mathcal{O}_X$  a  $U$ . Para ver esto sólo hay que ver que los anillos locales correspondientes coinciden, es decir, que  $I_P = A_P$  para todo  $P \in U$ , y recordar que en nuestro contexto  $U = D_+(\mathbf{f})$ .  $I_P = \{g/h$  tales que  $g, h \in A, g \in I, h \notin P\}$  y naturalmente  $A_P = \{g/h$  tales que  $g, h \in A, h \notin P\}$ . Es claro que  $I_P \subset A_P$ . Ahora para la otra inclusión observemos que,  $P \in D_+(\mathbf{f})$  si y solo si  $P$  es un ideal primo homogéneo tal que  $f_i \notin P$  para algún  $i$ . Supongamos que  $g/h$  es un elemento de  $A_P$ , entonces  $h \notin P$ . Sea  $i$  tal que  $f_i \in I$  y  $f_i \notin P$ , entonces como  $g/h = (g \cdot f_i)/(h \cdot f_i)$ ,  $g \cdot f_i \in I$  y  $h \cdot f_i \notin P$  porque  $P$  es primo, se tiene que  $g/h \in I_P$  como se pretendía.

Se tiene entonces el siguiente resultado

**2.0.20 Proposición.** *En las mismas condiciones de antes, donde  $X$  es un esquema noetheriano,  $\mathcal{I}$  un haz coherente de ideales y  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  el “blowing-up” respecto de  $\mathcal{I}$ , denotemos por  $Z$  al subesquema cerrado correspondiente al haz  $\mathcal{I}$ , y  $U = X - Z$ . Entonces  $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  es un isomorfismo.*

Para más referencia sobre este tema ver [Harts, thm. 7.13, ch II].

Si bien el lenguaje de la geometría algebraica es el lenguaje de los haces, la mayor parte de los resultados obtenidos aquí deberán ser traducidos en términos de ideales y módulos sobre anillos para que la “scheme-theoretic image” pueda ser computada. Aún así, para no perder de vista la geometría y también poder implementar efectivamente estos cálculos intentaremos avanzar con ambos enfoques en paralelo.

En nuestro contexto,  $\phi : \text{Proj } A \rightarrow \mathbb{P}_k^{n-1}$  es el morfismo inducido por

$$h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A.$$

$U := D_+(\mathbf{f})$  es el subesquema abierto de definición de  $\phi$ ,  $Z := V(f_1, \dots, f_n)$  el subesquema cerrado de  $\text{Proj } A$  a lo largo del cual se explotará y  $\mathcal{I} := (f_1, \dots, f_n)^\sim$  es haz de ideales de puntos base con soporte en  $Z$ .

Como es sabido, el “blow-up” viene provisto de dos proyecciones, que denotaremos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , como se muestra en el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} Bl_{\mathcal{I}}(\text{Proj } A) & \xrightarrow{\quad} & \text{Proj } A \times_k \mathbb{P}_k^{n-1} = \mathbb{P}_A^{n-1} \\ \downarrow \pi_1 & \searrow \pi_2 & \\ \text{Proj } A & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & \mathbb{P}_k^{n-1} \end{array}$$

Veremos (en la Proposición 2.0.21) que la restricción de  $\pi_2$  a la preimagen de  $U$  por  $\pi_1$ , que denotaremos  $\Omega$ , coincide con  $\phi \circ \pi_1$ , es decir, el triángulo anterior es conmutativo. Hemos mencionado también (en la proposición 2.0.20) que  $\Omega \subset Bl_{\mathcal{I}}(\text{Proj } A)$  es isomorfo como  $k$ -esquema a  $U$  vía el isomorfismo inducido por la restricción de  $\pi_1$  a  $\Omega$ .

Por otro lado, la situación dual en la categoría de álgebras es la siguiente: Denotemos con

$$\mathcal{R}_A(I) = A \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots \tag{2.5}$$

el álgebra de Rees asociada al ideal  $I = (f_1, \dots, f_n)$ . Frecuentemente se presenta a este álgebra como un subanillo del anillo de polinomios con coeficientes en  $A$  en una variable auxiliar  $t$ , como se muestra a continuación.

Sea  $A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A[t]$  el morfismo de  $A$ -álgebras definido por  $T_i \mapsto f_i \cdot t$ . Para que este morfismo resulte graduado de grado 0, es conveniente darle a la indeterminada  $t$  la graduación adecuada (como el grado de las variables  $T_i$  es 1 y el de los polinomios  $f_i$  es  $d$ , entonces  $t$  resultará de grado  $1 - d$ ).

Esto permite presentar al álgebra de Rees de  $I$  como la imagen del morfismo recién definido, obteniendo así la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow J \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{R}_A(I) \rightarrow 0,$$

denotando con  $J$  al núcleo del morfismo recién explicitado; es decir,

$$\mathcal{R}_A(I) \simeq \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{J}.$$

**2.0.21 Proposición.** *De acuerdo con la notación antes establecida, el diagrama resulta conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & & \\ \pi_1|_{\Omega} \downarrow & \searrow \pi_2 & \\ D_+(\mathbf{f}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}_k^{n-1} \end{array}$$

donde  $D_+(\mathbf{f}) \subset \text{Proj } A$ ,  $\Omega := \pi^{-1}(D_+(\mathbf{f})) \subset \text{Bl}_{\mathcal{S}}(\text{Proj } A)$  y  $\pi_1|_{\Omega}$  corresponde a la restricción de  $\pi : \text{Bl}_{\mathcal{S}}(\text{Proj } A) \rightarrow \text{Proj } A$  al abierto  $\Omega$ .

*Demostración.* Consideremos los morfismos de álgebras

$$h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A \subset \mathcal{R}_A(I)$$

que aplica  $T_i \mapsto f_i$  y

$$\rho : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{R}_A(I) \subset A[t]$$

definido como  $T_i \mapsto f_i.t$ .

Le daremos a las indeterminadas  $T_i$  grado  $d$ , y a  $t$  grado 0, con el objetivo de que ambas aplicaciones resulten ser morfismo de  $k$ -álgebras graduadas.

Consideremos uno de los abiertos  $D_+(T_i) \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ . Ahí los morfismos  $\phi \circ \pi|_{D_+(T_i)}$  y  $\pi_2|_{D_+(T_i)}$  son afines.

Estas flechas corresponden a los morfismos de  $k$ -álgebras

$$h_i : k[T_1, \dots, T_n]_{(T_i)} \rightarrow \mathcal{R}_A(I)_{(f_i)},$$

donde  $T_j/T_i \mapsto f_j/f_i$ , y

$$\rho_i : k[T_1, \dots, T_n]_{(T_i)} \rightarrow \mathcal{R}_A(I)_{(f_i.t)},$$

que aplica  $T_j/T_i \mapsto f_j.t/f_i.t$ .

A partir de acá, vemos que  $\rho_i(T_j/T_i) = f_j.t/f_i.t = f_j/f_i = h_i(T_j/T_i)$ . Dado que los morfismos de  $k$ -álgebras coinciden, los morfismos de esquemas correspondientes coinciden también. □

En término de haces, denotando por  $X = \text{Proj } A$  se tiene la situación análoga siguiente:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^2 \oplus \dots$$

el álgebra de Rees asociada al haz de ideales  $\mathcal{S} = (f_1, \dots, f_n)^\sim$ . Así como  $\mathcal{R}_A(I)$  es una  $A$ -álgebra bigraduada,  $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathcal{O}_X)$  resulta una  $\mathcal{O}_X$ -álgebra bigraduada. A su vez el morfismo de

$A$ -álgebras  $A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A[t]$  se traduce a un morfismo  $\mathbb{P}_A^{n-1} \rightarrow \mathcal{O}_X[t]$  de  $\mathcal{O}_X$ -álgebras. Se obtiene así una sucesión exacta de haces similar a la recién exhibida:

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^{n-1}} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X) \rightarrow 0$$

y por lo tanto se obtiene que  $\mathcal{R}_{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^{n-1}}/\mathcal{I}$ .

La construcción del “Blow-up” como  $B_{\mathcal{I}}(X) = \text{Proj}(\mathcal{R}_{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X))$  no es tan explícita como parece. La razón es que aun siendo dadas las ecuaciones explícitas para  $X$  y para el subesquema cerrado  $Y$  definido por  $\mathcal{I}$ , puede no ser obvio cómo expresar  $\mathcal{R}_{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)$  o  $\mathcal{R}_A(I)$  en términos de generadores y relaciones.

La dificultad radica en que el problema de entender cómo se relaciona  $I$  con  $J$  (o  $\mathcal{I}$  con  $\mathcal{J}$ ) no tiene una respuesta inmediata.

Veamos un ejemplo que tal vez motive a que aun así nos embarquemos en la tarea de encontrar estas relaciones.

**2.0.22 Ejemplo.** Sea  $A$  un anillo noetheriano,  $f, g \in A$  y  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A(f, g) = A[ft, gt] \subset A[t]$ . Veremos que si  $(f, g)$  es una sucesión regular, entonces la aplicación

$$A[X, Y] \rightarrow \mathcal{R},$$

definida por  $X \mapsto ft$  y  $Y \mapsto gt$  tiene núcleo generado por  $gX - fY$ . Es decir:

$$\mathcal{R} \simeq A[X, Y]/(gX - fY).$$

Para ver esto, primero invertimos  $f$  y definimos  $B = A[f^{-1}][X, Y]$  y sea  $X' = f^{-1}X \in B$ . Luego  $B = A[f^{-1}][X', Y]$ . El elemento  $gX' - Y \in B$  genera el núcleo del morfismo  $B = A[f^{-1}][X', Y] \rightarrow A[f^{-1}][t]$ , definido como  $X' \mapsto t$  e  $Y \mapsto gt$ .

A partir de que en  $B$ ,  $gX - fY$  y  $gX' - Y$  coinciden, es suficiente ver que  $f$  no es divisor de cero módulo  $gX - fY$  en  $A[X, Y]$ . Obsérvese que en el otro orden, es claro que  $gX - fY$  no es divisor de cero módulo  $f$ , ya que es un producto de dos elementos que no son divisores de cero en el cociente.

En este punto hay varias formas de argumentar: para la primera, basta ver que en este contexto  $(f, gX - fY)$  es una sucesión regular si y solo si  $(gX - fY, f)$  lo es, esto no vale en general, puede suceder que una colección de elementos organizados en un orden resulten formar una sucesión regular, pero en otro orden no; sin embargo, en este contexto, sucede lo que deseamos, para esto consultar [Eis1, Ch. 17.2]. Ahora, una vez visto esto se puede probar mediante un cálculo sencillo que  $gX - fY$  no es divisor de cero en el cociente de  $A[X, Y]$  por  $f$ .

La segunda forma de proceder consiste en observar que: para ver que  $f$  no es divisor de cero, debemos ver que  $(gX - fY : f) = (gX - fY)$ . Es decir, debemos verificar que

$$M = (gX - fY : f)/(gX - fY) = 0.$$

Observar que  $gX - fY \cong gX$  módulo  $f$  y como mencionamos antes que  $gX$  no es divisor de cero en el cociente por  $f$ , entonces  $(f, gX - fY)$  es una sucesión regular en  $A[X, Y]$ . Dado que como  $f$  no es divisor de cero por hipótesis, ningún polinomio en  $X$  e

$Y$  puede anular a  $gX - fY$ , luego  $gX - fY$  no es divisor de cero. Esto dice que  $M$  es isomorfo al primer grupo de homología del complejo de Koszul asociado a la sucesión  $(gX - fY, f)$ , denominado  $\mathcal{K}_\bullet(gX - fY, f)$ :

$$\mathcal{K}_\bullet(gX - fY, f) : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{(-f, gX - fY)} A^2 \xrightarrow{(gX - fY, f)^t} A \longrightarrow 0$$

Usando el mismo argumento que antes, podemos ver que este grupo es isomorfo a

$$N = (f : gX - fY)/(f),$$

que resulta nulo ya que  $(f, gX - fY)$  también es una sucesión regular.

La clave de este argumento es que si  $I$  está generado por una sucesión regular (de longitud 2), entonces el álgebra de Rees  $\mathcal{R}_A(I)$  resulta isomorfa al álgebra simétrica  $\text{Sym}_A(I)$ , que definiremos a continuación.

$$\text{Sym}_A(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^{\otimes n} / (x \otimes y - y \otimes x)_{x, y \in I}.$$

Más en general, este mismo razonamiento funciona cuando se tiene una sucesión regular de longitud  $n$ ,  $(f_1, \dots, f_n)$ . Resulta que así como probamos que el ideal de relaciones  $J$  estaba generado por

$$\det \begin{pmatrix} f & g \\ X & Y \end{pmatrix} = fY - gX,$$

en el caso general se tendrá que el ideal de relaciones está generado por los menores de  $2 \times 2$  de la matriz

$$\begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ X_1 & \dots & X_n \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, la hipótesis de regularidad sobre la sucesión en cuestión es excesiva, veremos más adelante que con hipótesis más débiles basta; para esto se define el concepto de *d-sucesión* que examinaremos en las próximas secciones. Así como las sucesiones regulares son objetos destacados en el estudio de la homología del complejo de Koszul, las *d-sucesiones* realizan un papel similar en los *complejos de aproximación*. Así como de la regularidad de la sucesión del ejemplo 2.0.22 se obtuvo la aciclicidad en el complejo de Koszul  $\mathcal{K}_\bullet(gX - fY, f)$  recién escrito, de la condición de *d-sucesión* se obtendrá la aciclicidad de un complejo de aproximación, y de aquí el isomorfismo buscado entre estas dos álgebras.

## Capítulo 3

# Complejos sobre el álgebra exterior

En este capítulo asumiremos, como en el anterior que  $A$  es una  $k$ -álgebra conmutativa, donde  $k$  es un anillo conmutativo con unidad, y que  $I = (f_1, \dots, f_n)$  es un ideal homogéneo, y cada  $f_i$  es homogénea de grado  $d$ . Nos centraremos en este capítulo en resolver el problema de determinar el ideal de presentación de las álgebras  $\mathcal{R}_A(I)$  y  $\mathbf{gr}_A(I)$ , y estudiaremos con más detalle cómo se vinculan estos dos objetos con las álgebras simétricas  $\mathbf{Sym}_A(I)$  y  $\mathbf{Sym}_{A/I}(I/I^2)$ . Estas cuatro álgebras se construyen como dos tipos distintos de “álgebras de blow-up”. Más explícitamente:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_A(I) &= A \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots \text{ y} \\ \mathbf{Sym}_A(I) &= \bigoplus_{n \geq 0} I^{\otimes n} / (x \otimes y - y \otimes x)_{x, y \in I}.\end{aligned}$$

Mientras que las otras, construidas módulo  $I$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{gr}_A(I) &= A/I \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \dots \text{ y} \\ \mathbf{Sym}_{A/I}(I/I^2) &= \bigoplus_{n \geq 0} (I/I^2)^{\otimes n} / (x \otimes y - y \otimes x)_{x, y \in I}.\end{aligned}$$

Obsérvese que estas últimas dos álgebras verifican que:

$$\begin{aligned}\mathbf{gr}_A(I) &\simeq A/I \otimes_A \mathcal{R}_A(I); \\ \mathbf{Sym}_{A/I}(I/I^2) &\simeq A/I \otimes_A \mathbf{Sym}_A(I).\end{aligned}$$

Con este objetivo, primero haremos un paneo sobre las cuestiones más generales de las presentaciones de las álgebras mencionadas y los ideales y módulos de syzygies que aparecen. Luego necesitaremos estudiar en más profundidad estos ideales, para lo cual será necesario poder acceder a las vinculaciones de orden superior, momento en el cual entrará en escena el álgebra homológica. Primero repasaremos las propiedades básicas del complejo de Koszul de una sucesión, y se expondrá el papel destacado de las sucesiones regulares. Luego, necesitaremos trabajar en un contexto donde exigir la regularidad a la sucesión que define al ideal puede ser causante de mucha pérdida de casos de estudio; aquí es donde introducimos algunas nociones más débiles como la de  $d$ -sucesión, y parece

natural definir ahí mismo, aquellos complejos que realizan un rol análogo al de los complejos de Koszul para las sucesiones regulares, pero ahora para las  $d$ -sucesiones. Estos complejos se llamarán *complejos de aproximación*. Estos objetos fueron introducidos por Vasconcelos en el contexto del estudio de las syzygies del módulo conormal [SV], y desarrollados en varios trabajos sucesivos con diversos objetivos como por ejemplo en [HSV1], [HSV2] y posteriormente en [B-J], [B-C], [Cha1] y [BCJ].

Introduciremos recién el lenguaje de los complejos de aproximación en la sección 3.6, más adelante en este capítulo. Lo haremos en el contexto más abstracto y luego estudiaremos con más detalles algunos casos particulares que son de mayor interés.

### 3.1 Las álgebras de Rees y Simétrica de un ideal

La primera aproximación al estudio del álgebra de Rees de un ideal es obtener a partir de las ecuaciones de las primeras syzygies de  $I = (f_1, \dots, f_n)$  un ideal de presentación  $J$ , que es un ideal graduado  $J = J_1 + J_2 + \dots$  que representa las ecuaciones de  $\mathcal{R}_A(I)$ , donde el módulo  $J_r$  es aquel correspondiente a las syzygies de los  $r$ -productos de  $f_1, \dots, f_n$ .

Supongamos que se tiene una presentación finita de  $I$  (podemos suponer, si resulta más cómodo, que  $A$  es un anillo noetheriano) como la siguiente:

$$0 \rightarrow Z \rightarrow A^n \xrightarrow{\epsilon} I \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

donde  $\epsilon$  es el morfismo que aplica el  $i$ -ésimo vector canónico,  $e_i$ , de  $A^n$  en  $f_i$ , y  $Z = \{(a_1, \dots, a_n) \text{ tales que } \sum a_i f_i = 0\}$  es el módulo de syzygies de  $I$ .

La aplicación recién definida,  $\epsilon$ , induce un morfismo suryectivo  $\alpha$  desde el anillo de polinomios  $A[T_1, \dots, T_n]$  en  $\text{Sym}_A(I)$  de la siguiente forma:  $\text{Sym}(A^n) = \text{Sym}_A(A^n)$  es el álgebra simétrica obtenida a partir de  $A^n$  como  $A$ -módulo, que puede ser identificada con  $A[T_1, \dots, T_n]$  aplicando  $e_i \mapsto T_i$  y que por lo tanto en grado  $m$  queda definida como  $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m} \mapsto T_{i_1} \dots T_{i_m}$ , que resulta un isomorfismo de  $A$ -álgebras. Se tiene entonces que  $\alpha$  está definida por el morfismo inducido en grado 1 que aplica  $T_i$  en  $f_i$ . Si denotamos por  $J'$  a su núcleo, se obtiene así una presentación para  $\text{Sym}_A(I)$  de la forma:

$$0 \rightarrow J' \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\alpha} \text{Sym}_A(I) \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

como se detallará más adelante.

También, veremos en unos momentos que el ideal  $J'$  es el generado por las formas lineales  $\sum_i a_i T_i$  tales que  $\sum_i a_i f_i = 0$ , que codifica mucha información interesante de  $\mathcal{R}_A(I)$ .

Para conocer las ecuaciones buscadas, consideremos la siguiente presentación:

$$0 \rightarrow J \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\beta} \mathcal{R}_A(I) \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

donde el morfismo  $\beta : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{R}_A(I)$  es el morfismo de  $A$ -álgebras tal que  $T_i \mapsto f_i$ . Como se dijo antes, el ideal de relaciones  $J$  resulta graduado y se tiene que su componente

en grado 1,  $J_1$ , es el  $A$ -módulo de formas lineales  $\sum a_i T_i$ , tales que  $\sum a_i f_i = 0$ , es decir coincide con  $J'$ , luego  $J_1 = J'$ .

Hay también una presentación estrechamente vinculada con la anterior: aquella del graduado asociado a la filtración  $I$ -ádica  $\dots \subset I^{n+1} \subset I^n \subset \dots \subset I^2 \subset I$  en  $A$ , que denotaremos por  $\mathbf{gr}_A(I)$ .

**3.1.1 Lema.** *Con la notación anterior, donde  $\mathcal{R}_A(I) \simeq A[T_1, \dots, T_n]/J$ , entonces el ideal de presentación de  $\mathbf{gr}_A(I)$  resulta  $(J, I)$ . Se tiene entonces la siguiente sucesión exacta:*

$$0 \rightarrow J + I \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbf{gr}_A(I) \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta corta (3.3)

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{i} A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\beta} \mathcal{R}_A(I) \rightarrow 0,$$

donde  $i$  denota la inclusión de  $J$  en  $A[T_1, \dots, T_n]$ . Luego tensorizando con  $A/I$  se obtiene:

$$\mathrm{Tor}_1^A(\mathcal{R}_A(I), A/I) \rightarrow J \otimes_A A/I \xrightarrow{i \otimes id} A[T_1, \dots, T_n] \otimes_A A/I \xrightarrow{\beta \otimes id} \mathcal{R}_A(I) \otimes_A A/I \rightarrow 0.$$

Recordemos que  $\mathcal{R}_A(I) \otimes_A A/I \simeq \mathbf{gr}_A(I)$  y por propiedades del producto tensorial se tiene que  $J \otimes_A A/I \simeq J/JI$  y que  $A[T_1, \dots, T_n] \otimes_A A/I \simeq A[T_1, \dots, T_n]/I.A[T_1, \dots, T_n]$ , notaremos directamente con  $I$  a  $I.A[T_1, \dots, T_n]$  asumiendo que se entiende que se trata del ideal extendido cada vez que corresponda.

Además, con esta notación, se tiene que

$$\mathbf{gr}_A(I) \simeq \frac{A[T_1, \dots, T_n]/I}{i \otimes id(J/JI)} \simeq \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{J + I}.$$

Luego (3.4) resulta exacta. □

El objetivo es, a partir de conocer el ideal  $I$  y una presentación de  $I$  como la dada en (3.1), describir al ideal  $J$ .

Para el caso en que el  $I$  esté dado por una sucesión regular  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , mencionamos que el álgebra de Rees coincide con el álgebra simétrica, que está dada por el cociente por el núcleo de relaciones formado por los menores de  $2 \times 2$  de la matriz  $M = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ X_1 & \dots & X_n \end{pmatrix}$ .

Esto vale por la caracterización (3.5) de la Proposición 3.1.3, sumado al hecho de que si  $(f_1, \dots, f_n)$  es una sucesión regular, las syzygies están generadas por los menores de  $2 \times 2$  de esta matriz. Entonces

$$\mathcal{R}_A(I) \simeq \mathrm{Sym}_A(I) \simeq A[T_1, \dots, T_n]/(\text{menores de } 2 \times 2 \text{ de } M).$$

La manera más frecuente en la que se obtiene el ideal de presentación del álgebra  $\mathcal{R}_A(I)$  es usando teoría de la eliminación, como se explica en la próxima Proposición. Sin embargo este método no resulta muy beneficioso a la hora de implementarlo, los cálculos

usando teoría de la eliminación involucran computar bases de Groebner lo cual hace que los tiempos de procesamiento sean muy altos, o incluso que el programa no termine.

Supondremos ahora que el anillo  $A$  es el cociente de un anillo de polinomios  $S$  por un ideal  $I'$ , es decir,  $A$  es un álgebra finitamente generada sobre el anillo de coeficientes de  $S$ , y sea  $I$  un ideal en  $A$ . Entonces las ecuaciones del álgebra de Rees  $\mathcal{R}_A(I)$  se obtienen del siguiente modo:

**3.1.2 Proposición.** *Sean  $f_1, \dots, f_n \in S$  tales que las clases de estos elementos en  $A$  generen  $I$ . Sean  $T_1, \dots, T_n, t$  variables independientes. Entonces*

$$\mathcal{R}_A(I) \simeq S[T_1, \dots, T_n]/J,$$

donde  $J$  se obtiene como  $J = (T_1 - f_1 t, \dots, T_n - f_n t, I') \cap S[T_1, \dots, T_n]$ , y

$$gr_A(I) \simeq S[T_1, \dots, T_n]/(f_1, \dots, f_n, J)$$

Consideremos un ejemplo sencillo, sea  $A = S$  un anillo de polinomios y denotemos por  $\iota : A[T_1, \dots, T_n] \hookrightarrow A[T_1, \dots, T_n, t]$  la inclusión natural. Sea  $\tilde{\beta} : A[T_1, \dots, T_n, t] \rightarrow A[t]$  el morfismo de  $A[t]$ -álgebras que aplica  $T_i \mapsto f_i \cdot t$  y cuyo núcleo es  $\tilde{J} = (T_1 - f_1 t, \dots, T_n - f_n t)$ . Sea  $\beta = \tilde{\beta} \circ \iota$  la composición. Entonces  $\beta : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A[t]$ , así definido es un morfismo de  $A$ -álgebras, que aplica  $T_i \mapsto f_i \cdot t$  (como antes) y cuya imagen es el álgebra de Rees  $\mathcal{R}_A(f_1, \dots, f_n)$ . El núcleo de  $\beta$ ,  $J$ , está dado por la preimagen vía  $\iota$  de  $\tilde{J}$ , es decir  $J = (T_1 - f_1 t, \dots, T_n - f_n t) \cap A[T_1, \dots, T_n]$ .

La dificultad de calcular las ecuaciones de  $J$  se debe principalmente a que este ideal puede resultar muy sofisticado, dependiendo de cómo sean las componentes homogéneas  $J_r$ .

Con el objeto de entender en qué radica la dificultad de poder explicitar  $J$ , mostraremos a continuación quién es el ideal de presentación de  $\mathbf{Sym}_A(I)$ , que ya denominamos  $J'$ . Consideremos el morfismo  $\alpha : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbf{Sym}_A(I)$  definido más arriba, que se obtiene pasando al cociente el morfismo de grado 0 que aplica  $T_{j_1} \dots T_{j_s} \mapsto f_{j_1} \otimes \dots \otimes f_{j_s}$ . Y recordemos que se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow J' \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Sym}_A(I) \rightarrow 0.$$

**3.1.3 Proposición.**

$$J' = \left( \sum a_i T_i \text{ tales que } (a_1, \dots, a_n) \in Z \right),$$

más aún,  $J'$  que está generado por las relaciones de grado 1 en las variables  $T_1, \dots, T_n$ , está caracterizado de la siguiente forma

$$J' = \left\{ \sum g_i T_i, \text{ tales que } g_i = g_i(T_1, \dots, T_n) \in A[T_1, \dots, T_n], \text{ y } \sum g_i(T_1, \dots, T_n) f_i = 0 \right\}.$$

*Demostración.* Para probar la primera parte, consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow Z = \ker(f) \rightarrow A^n \rightarrow I \rightarrow 0,$$

donde  $f$  es el morfismo definido como  $f(e_i) = f_i$ . A partir de [Eis1, Prop. A.2.2.(d), App. A], se tiene que la siguiente sucesión es exacta:

$$Z \otimes_A \text{Sym}(A^n) \rightarrow \text{Sym}(A^n) \rightarrow \text{Sym}_A(I) \rightarrow 0,$$

donde el último morfismo corresponde al ya definido  $\alpha$ , y el primero es el inducido por la inclusión. Ahora, identificando  $\text{Sym}(A^n)$  con  $A[T_1, \dots, T_n]$  se tiene que

$$Z \otimes_A A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\iota} A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\alpha} \text{Sym}_A(I) \rightarrow 0$$

es exacta y se puede observar que  $\iota(Z \otimes_A A[T_1, \dots, T_n]) \simeq (\sum a_i T_i \text{ tales que } (a_1, \dots, a_n) \in Z)$ , con lo cual se tiene que:

$$\text{Sym}_A(I) \simeq \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{(\sum a_i T_i \text{ tales que } (a_1, \dots, a_n) \in Z)}. \quad (3.5)$$

Para probar la segunda parte basta ver las dos inclusiones:

Primero, supongamos que  $g \in (\sum a_i T_i \text{ tales que } (a_1, \dots, a_n) \in Z)$ , entonces  $g = \sum_j h_j(T_1, \dots, T_n)(\sum_i a_{i,j} T_i) = \sum_i (\sum_j h_j(T_1, \dots, T_n) a_{i,j}) T_i$ .

Ahora, se tiene que  $\sum_i (\sum_j h_j(T_1, \dots, T_n) a_{i,j}) f_i = 0$ , ya que  $\sum_i a_{i,j} f_i = 0$  para todo  $j$ , como se quería probar.

Queremos probar ahora la otra inclusión, es decir, que todo polinomio  $P$  de la forma  $P = \sum_i g_i(T_1, \dots, T_n) T_i$  tal que  $\sum_i g_i(T_1, \dots, T_n) f_i = 0$ , se escribe como combinación polinomial de los elementos  $\sum_i a_i T_i$  tales que  $\sum_i a_i f_i = 0$ . Para ello sean  $g_i(T_1, \dots, T_n) = \sum_{\beta} g_{i,\beta} T^{\beta}$ , donde  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  y  $T^{\beta} = \prod_i T_i^{\beta_i}$ .

Se tiene entonces que

$$P = \sum_i \left( \sum_{\beta} g_{i,\beta} T^{\beta} \right) T_i = \sum_{\beta} \left( \sum_i g_{i,\beta} T_i \right) T^{\beta},$$

donde  $\sum_{\beta} (\sum_i g_{i,\beta} f_i) T^{\beta} = 0$ , es decir, donde  $\sum_i g_{i,\beta} f_i = 0$  para todo  $\beta$ . Luego

$$\sum_i g_{i,\beta} T_i \in \left( \sum a_i T_i \text{ tales que } (a_1, \dots, a_n) \in Z \right)$$

y entonces se tiene lo buscado. □

Vimos que el núcleo de relaciones del álgebra simétrica está generado por polinomios de la forma  $P = \sum a_i T_i$ , de grado 1 en las variables  $T_1, \dots, T_n$ , que al ser evaluado en  $f_1, \dots, f_n$  se anula, es decir, que sus coeficientes  $a_1, \dots, a_n$  son elementos del módulo  $Z$  de las syzygies correspondientes a la sucesión  $f_1, \dots, f_n$ . Y entonces se tiene que

$$\text{Sym}_A(I) \simeq \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{\{\sum g_i T_i : g_i \in A[T_1, \dots, T_n], \sum g_i f_i = 0\}} = \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{(\sum a_i T_i : a_i \in A, \sum a_i f_i = 0)}. \quad (3.6)$$

*3.1.4 Observación.* Esto dice que en el caso en que el álgebra simétrica y de Rees coinciden, la parte homogénea  $J_r$  del ideal de presentación de  $\mathcal{R}_A(I)$  está generado por la componente de  $J$  de grado 1, que coincide con el ideal de presentación de  $\mathbf{Sym}_A(I)$ . En este caso diremos que  $I$  es de *tipo lineal*, como ya señalamos.

Más en general se tiene:

**3.1.5 Definición.** El *tipo de relación (relation type)* de  $I$  es el menor entero  $s$  tal que  $J = (J_1, \dots, J_s)$  y este valor resulta independiente de los generadores elegidos (para ver esto referirse a [Vas1]). Cuando  $s = 1$ , se dice que  $I$  es de *tipo lineal*.

Volvamos a las presentaciones obtenidas en (3.2) y en (3.3) para  $\mathbf{Sym}_A(I)$  y  $\mathcal{R}_A(I)$  respectivamente, obsérvese que como  $\mathcal{R}_A(I)$  es una  $A$ -álgebra conmutativa, entonces existe un morfismo  $\mathbf{Sym}_A(I) \rightarrow \mathcal{R}_A(I)$  que denotaremos por  $\sigma$ , que resulta suryectivo, y que grado a grado está dado por  $I^{\otimes m} / \sim \rightarrow I^m$  definido como  $\overline{f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_m}} \mapsto f_{i_1} \dots f_{i_m}$ . Se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J' = J_1 & \hookrightarrow & A[T_1, \dots, T_n] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{Sym}_A(I) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \sigma \\ 0 & \longrightarrow & J & \hookrightarrow & A[T_1, \dots, T_n] & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{R}_A(I) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Si llamamos  $K$  al  $\ker(\sigma)$ , se tiene que  $K = J/J'$ , y  $K = 0$  si y solo si  $I$  es de tipo lineal, que es equivalente a decir que  $\sigma$  es un isomorfismo. Entonces el tamaño de  $K$  permite medir cuán lejos está  $J$  de estar generado en grado 1, o sea, cuán lejos estamos de poder aproximar  $\mathcal{R}_A(I)$  con  $\mathbf{Sym}_A(I)$ .

## 3.2 $d$ -sucesiones

En esta sección definiremos el concepto de  $d$ -sucesión, que generaliza al de sucesión regular, y que está íntimamente relacionada con los aún no definidos complejos de aproximación, así como las sucesiones regulares lo están con los complejos de Koszul.

Recordemos que en el primer capítulo mencionamos que si el ideal  $I$  estaba dado por una sucesión regular entonces éste resultaba de tipo lineal. La razón por la que las  $d$ -sucesiones son relevantes es porque ésta es la condición que es necesario poner para que  $I$  resulte de tipo lineal, es decir para que  $\sigma$  sea un isomorfismo.

**3.2.1 Definición.** Sea  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  una sucesión de elementos en un anillo  $A$ , generando un ideal  $I$ .  $\mathbf{x}$  se llama:

(a) *sucesión regular en  $M$* , o *sucesión  $M$ -regular*, donde  $M$  es un  $A$ -módulo, si:

1.  $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$ ;
2. para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_i$  no es divisor de cero en  $M/(x_1, \dots, x_{n-1})M$ .

En particular, cuando  $M = A$ , se dirá que la sucesión es *regular* en lugar de  $A$ -regular.

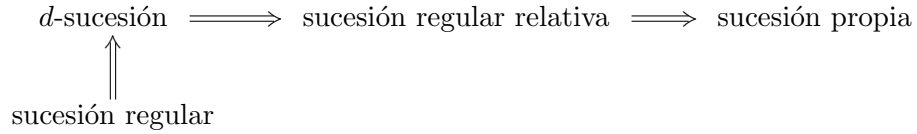
(b)  $d$ -sucesión si:

1.  $\mathbf{x}$  es un sistema minimal de generadores de  $I$ ;
2.  $((x_1, \dots, x_i) : x_{i+1}x_k) = ((x_1, \dots, x_i) : x_k)$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$  y  $k \geq i+1$ .

(c) *sucesión regular relativa* si  $((x_1, \dots, x_i) : x_{i+1}) \cap I = (x_1, \dots, x_i)$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ .

(d) *sucesión propia* si  $x_{i+1}H_j(x_1, \dots, x_i; A) = 0$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $j > 0$ , donde  $H_j(x_1, \dots, x_i; A)$  denota el  $j$ -ésimo módulo de homología de Koszul asociado a la sucesión  $\{x_1, \dots, x_i\}$ .

Estas condiciones están relacionadas como se ilustra en el diagrama siguiente:



Para mostrar la importancia de las  $d$ -sucesiones, enunciaremos el siguiente resultado:

**3.2.2 Teorema.** *Todo ideal generado por una  $d$ -sucesión es de tipo lineal.*

La demostración del teorema se desprende de los siguientes lemas haciendo inducción en la longitud de lasiguiente sucesión como se explica en [Vas1]:

**3.2.3 Lema.** *Sea  $I$  un ideal de un anillo  $A$ , sea  $f$  un elemento de  $I$  tal que para cada entero  $m$ ,  $I^m \cap (0 : f) = I^m \cdot (0 : f)$ . Entonces si  $I/(f)$  es de tipo lineal como ideal de  $A/(f)$ , entonces  $I$  también lo es como ideal de  $A$ .*

Por ejemplo si  $A$  es un anillo conmutativo íntegro, las hipótesis pedidas se satisfacen, entonces si  $I/(f)$  es de tipo lineal como ideal de  $A/(f)$ ,  $I$  también lo es como ideal de  $A$ .

*Demostración.* La inclusión de  $(f)$  en  $I$  pensada como morfismo de  $A$ -módulos, induce una sucesión exacta en las álgebras simétricas, y a partir del morfismo  $\sigma$  ya considerado, se tiene una aplicación entre las reespectivas álgebras de Rees, como se ilustra en el próximo diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & (f)\text{Sym}_A(I) & \hookrightarrow & \text{Sym}_A(I)_+ & \longrightarrow & \text{Sym}_{A/(f)}(I/(f))_+ \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma_+ \\
 0 & \longrightarrow & f \cdot \mathcal{R}_A(I)_+ & \longrightarrow & \mathcal{R}_A(I)_+ & \longrightarrow & \mathcal{R}_{A/(f)}(I/(f)) \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

donde la notación  $B_+$  denota la parte de grado positivo de  $B$ . La exactitud de la fila inferior resulta del hecho de que  $\sigma_+$  sea un isomorfismo (esta es la hipótesis).

Supongamos que  $K$  no es nulo, entonces tomemos  $\omega \neq 0$  un elemento de grado mínimo,  $t$ , en  $K = \ker(\sigma)$ . Como  $\sigma(\omega) = 0$  y  $\sigma_+$  es un iso (basta con que sea inyectivo) entonces también es nulo en  $\mathbf{Sym}_{A/(f)}(I/(f))_+$ . De la exactitud de la fila superior se deduce que existe un elemento  $\omega' \in \mathbf{Sym}_A(I)$  tal que  $\omega = f.\omega'$ , además  $\omega' \in \mathbf{Sym}_A(I)_{t-1}$ . Como  $\sigma(\omega) = 0 = f.\sigma(\omega')$ , entonces  $\sigma(\omega') \in I^{t-1} \cap (0 : f) = I^{t-1}(0 : f)$  y por lo tanto como  $K_{-1} = 0$  (por la minimalidad de  $t$ ) se tiene que  $\omega' \in (0 : f)\mathbf{Sym}_A(I)_{t-1}$ . Entonces  $\omega = f.\omega' = 0$  en contra de la elección de  $\omega$ . □

**3.2.4 Lema.** *Si  $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$  es una  $d$ -sucesión, entonces:*

- (a) *las imágenes de  $f_2, \dots, f_n$  en  $A/(f_1)$  forman una  $d$ -sucesión;*
- (b)  $(0 : f_1) \cap (f_1, \dots, f_n) = 0$ .

*Demostración.*

- (a) Se deduce directamente de la definición 3.2.1(b).
- (b) Demostraremos esto por inducción en  $n$ . Supongamos que  $n \geq 2$ , y sea  $\sum r_i f_i \in (0 : f_1)$ . Como  $(0 : f_1) \subset (0 : f_1 f_n) = (0 : f_n)$ , esta igualdad se tiene a causa de la segunda condición que verifica por ser  $d$ -sucesión, luego  $r_n f_n^2 \in (f_1, \dots, f_{n-1})$ , entonces obtenemos que  $r_n f_n \in (f_1, \dots, f_{n-1})$  como se quería. □

Del Teorema 3.2.2 se deduce el siguiente resultado:

**3.2.5 Corolario.** *Todo ideal generado por una sucesión regular es de tipo lineal. Esto prueba el resultado que mencionamos al final del primer capítulo, es decir, que en este caso, las álgebras de Rees y simétricas coinciden.*

### 3.3 Las álgebras de Rees y Simétrica de una aplicación racional

Como se dijo al comienzo del capítulo anterior, lo que se pretende es obtener ecuaciones implícitas para la variedad que describe la imagen del morfismo  $\phi : \mathbb{P}^{n-2} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  definida por las funciones homogéneas  $\{f_i\}_{i=1, \dots, n}$  de grado  $d$ .

Como antes, sea  $k$  un anillo conmutativo y sea  $A$  una  $k$ -álgebra  $\mathbb{Z}$ -graduada. Denotamos por  $\iota$  al morfismo que aplica  $k$  en  $A_0$  y se tienen elementos de  $A$  de grado  $d$ ,  $\{f_i\}_{i=1, \dots, n}$  y un morfismo de  $k$ -álgebras

$$h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A, \quad T_i \mapsto f_i.$$

Recordemos que este morfismo de  $k$ -álgebras induce un morfismo de  $k$ -esquemas afines  $\mu : \bigcup D(f_i) \rightarrow \bigcup D(T_i) = \mathbb{A}_k^n - \{0\}$  y otro morfismo de esquemas proyectivos  $\phi : \bigcup D_+(f_i) \rightarrow \bigcup D_+(T_i) = \mathbb{P}_k^{n-1}$ .

Vimos en el capítulo anterior que el álgebra  $\mathcal{R}_A(I)$  aparece naturalmente en nuestra situación. Y dado que  $\mathcal{R}_A(I) = A \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots$ , se puede describir a este álgebra como un subanillo del anillo de polinomios con coeficientes en  $A$  en una variable auxiliar  $t$ , via el morfismo de  $A$ -álgebras definido por  $T_i \mapsto f_i \cdot t$ . Dijimos que para que este morfismo resulte de grado 0, era conveniente darle a las variables  $T_i$  grado 1 y a la indeterminada  $t$  la graduación  $1 - d$ .

Esto nos permitió presentar al álgebra de Rees como  $\mathcal{R}_A(I) \simeq \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{J}$ , mediante la sucesión exacta:

$$0 \rightarrow J \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\beta} \mathcal{R}_A(I) \rightarrow 0.$$

Como se puede apreciar en la Proposición 3.1.2 el ideal  $J$  se puede describir como

$$J = (T_1 - f_1 \cdot t, \dots, T_n - f_n \cdot t) \cap A[T_1, \dots, T_n].$$

Recordemos que el morfismo de  $A$ -álgebras  $A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A[t]$ , está definido como  $T_i \mapsto f_i \cdot t$ . Es conveniente a veces considerar el álgebra de Rees extendida, que consiste en mirar a  $\mathcal{R}_{A[t^{-1}]}(I)$  dentro de la  $A$ -álgebra  $A[t, t^{-1}]$ . Entonces agregando la variable  $t^{-1}$ , se tiene un morfismo de  $A$ -álgebras  $\eta$  (que también resulta de  $A[t^{-1}]$ -álgebras) que extiende al anterior.

Por una cuestión de comodidad notemos con  $u$  a  $t^{-1}$ , y naturalmente con  $u^{-1}$  a  $t$ . Se tiene entonces que:

$$\eta : A[T_1, \dots, T_n, u] \rightarrow A[u, u^{-1}], \quad T_i \mapsto f_i \cdot u^{-1}.$$

Como vimos esto da una manera de calcular el ideal  $J$ , usando teoría de eliminación, ya que lo único que debemos hacer deshacernos de la variable  $t$ . El siguiente lema describe  $\ker(\beta)$  en término de la variable  $u$ .

**3.3.1 Lema.**  $J = ((T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n) : u^\infty) \cap A[T_1, \dots, T_n]$ , con la notación de 2.0.6.

*Demostración.* Con la notación anterior llamemos  $D$  al cociente de  $A[T_1, \dots, T_n, u]$  por el núcleo de  $\eta$ , que resulta  $\ker(\eta) = (T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n)$ . Se tiene entonces que:

$$D = A[T_1, \dots, T_n, u] / (f_1 - T_1 \cdot u, \dots, f_n - T_n \cdot u).$$

Sea  $\varphi_u : D \rightarrow D_{(u)}$  el morfismo de localización en el conjunto multiplicativo formado por las potencias de  $u$ . Esto permitirá obtener inversos de  $u$ , es decir, introducir la variable  $t$ . El núcleo de la localización está dado por  $\{\bar{f} \in D \text{ tales que } \bar{f} \cdot \bar{1} = 0\}$ , donde la notación  $\bar{f}$  indica la clase de  $f$  en  $D$ . Obsérvese que valen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \ker(\varphi_u) &= \{\bar{f} \in D \text{ tales que } \exists m \in \mathbb{N}, u^m \cdot \bar{f} = 0\} = \\ &= \{\bar{f} \in D \text{ tales que } u^m \cdot \bar{f} = 0, \forall m \gg 0\} = H_{(u)}^0(D) \end{aligned}$$

Además, se tiene un isomorfismo entre  $D_{(u)}$  y  $A[u, u^{-1}]$ , que viene de aplicar  $T_i$  en  $f_i/u$ .

A partir de esto se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \beta & & \\
 & \swarrow & \xrightarrow{\quad} & \searrow & \\
 A[T_1, \dots, T_n] & \hookrightarrow & A[T_1, \dots, T_n, u] & \xrightarrow{\eta} & A[u, u^{-1}] \\
 & & \downarrow \pi & & \uparrow \sim \\
 & & D & \xrightarrow{\varphi_u} & D_{(u)}
 \end{array}$$

Claramente, el núcleo del morfismo  $\eta$  resulta la imagen inversa por la proyección a  $D$  de  $H_{(u)}^0(D) = \{\bar{f} \in D \text{ tales que } u^m \cdot \bar{f} = 0 \ \forall m \gg 0\}$ , que consiste en el conjunto  $\{f \in A[T_1, \dots, T_n, u] \text{ tales que } u^m \cdot f \in (T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n), \forall m \gg 0\}$  y resulta entonces que  $f \in ((T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n) : u^\infty)$ . Como  $\ker(\beta)$  se obtiene intersectando con  $A[T_1, \dots, T_n]$ , se tiene lo buscado.  $\square$

Recordemos que  $h$  es el morfismo de  $k$ -álgebras  $h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A$  que aplica  $T_i \mapsto f_i$ , definido en (2.1). Denotando por  $\epsilon$  al morfismo (de  $k[T_1, \dots, T_n]$ -álgebras) de extensión de escalares  $\epsilon : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A[T_1, \dots, T_n]$ , observamos que el núcleo de  $h$  está dado por:

$$\ker(h) = \epsilon^{-1}((T_1 - f_1, \dots, T_n - f_n)) = \{g \in k[T_1, \dots, T_n] : g(f_1, \dots, f_n) = 0\}. \quad (3.7)$$

Ahora, si denotamos por  $i$  la inclusión de  $A[T_1, \dots, T_n]$  en  $A[T_1, \dots, T_n, u]$  y por  $\theta = i \circ \epsilon$  a la composición, se obtiene una descripción del ideal  $\ker(h)$ , que vincularemos con  $\ker(\beta)$ .

**3.3.2 Lema.**  $\ker(h) = \theta^{-1}((T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n) : u^\infty)$

*Demostración.* Consideremos  $p$ , un elemento del anillo  $k[T_1, \dots, T_n]$ , con la propiedad:  $\theta(p) \in ((T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n) : u^\infty)$ . Se tiene entonces que existe  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  tal que  $u^n \cdot \epsilon(p) \in (T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n)$  en  $A[T_1, \dots, T_n, u]$ . Evaluando  $u$  en 1, a partir de (3.7) obtenemos que  $p \in \ker(h)$ .

Recíprocamente, sea  $p \in \ker(h)$ . Como el ideal  $\ker(h)$  es homogéneo en  $k[T_1, \dots, T_n]$ , podemos suponer que  $p$  es homogéneo de grado  $m$ , entonces podemos escribir que:

$$u^m \cdot p(T_1, \dots, T_n) = p(T_1 \cdot u, \dots, T_n \cdot u) = p(T_1 \cdot u, \dots, T_n \cdot u) - p(f_1, \dots, f_n),$$

que pertenece al ideal  $(T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n)$ , y por lo tanto se tiene probado lo que se buscaba.  $\square$

**3.3.3 Observación.** Si  $k \subset A_0$  entonces se tiene que

$$\ker(h) = ((T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n) : u^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n].$$

Más aún, si  $k = A_0$  (como sucede en el caso en que  $A = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ ) y  $\deg(T_i) = 0$  y  $\deg(t) = d \geq 1$ , entonces se obtiene que  $k[T_1, \dots, T_n] = (A[T_1, \dots, T_n, u])_0$  y por lo tanto

$$\ker(h) = ((T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n) : u^\infty)_0.$$

Ahora que conocemos cómo se calculan  $\ker(h)$  y  $\ker(\beta)$ , estamos en condiciones de relacionarlos, y esto se hace de acuerdo al siguiente resultado:

**3.3.4 Proposición.** *Supongamos que el morfismo  $\iota : k \rightarrow A$  antes considerado es la inclusión (cosa que sucede cuando  $A$  es el anillo  $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ ), entonces*

$$\ker(h) = \ker(\beta) \cap k[T_1, \dots, T_n] = ((T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n) : u^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n].$$

Más aun, si  $I'$  es un ideal de  $A$  tal que  $H_{I'}^0(A) = 0$ , entonces

$$\ker(\beta) = (\ker(\beta) : (I')^\infty)$$

y por lo tanto

$$\ker(h) = (\ker(\beta) : (I')^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n].$$

*Demostración.* Por la observación 3.3.3, se tiene que  $\ker(h) = ((T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n) : u^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n]$ . Ahora, de acuerdo con el Lema 3.3.1,  $\ker(\beta) = ((T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n) : u^\infty) \cap A[T_1, \dots, T_n]$ , de lo cual se deduce que  $\ker(h) = \ker(\beta) \cap k[T_1, \dots, T_n] = ((T_1 \cdot u - f_1, \dots, T_n \cdot u - f_n) : u^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n]$ .

Para probar la segunda parte, procedamos como en la demostración del Lema 3.3.1, sea  $u = t^{-1}$ , consideremos la  $A$ -álgebra cociente

$$D = A[T_1, \dots, T_n, u] / (f_1 - T_1 \cdot u, \dots, f_n - T_n \cdot u).$$

Además, recordemos que se tiene un isomorfismo definido en el Lema 3.3.1,  $D_{(u)} \rightarrow A[u, u^{-1}]$ , que aplica  $T_i$  en  $f_i/u$ . Ahora sea  $I'$  es un ideal de  $A$  tal que  $H_{I'}^0(A) = 0$ , entonces por el isomorfismo anterior se tiene que  $H_{I'}^0(D_{(u)}) = H_{I'}^0(A[u, u^{-1}]) = H_{I'}^0(A) = 0$ . Como  $H_{I'}^0(D_{(u)}) = \{d/u^l \in D_{(u)} \text{ tales que existen } m, m' \in \mathbb{N}, I'^{m'} \cdot d \cdot u^m = 0\}$ , entonces la condición anterior implica que  $H_{I'}^0(D) \subset H_{(u)}^0(D)$ . De acá se deduce que

$$TF_{I'}(f_1 - T_1 \cdot u, \dots, f_n - T_n \cdot u) \subset TF_{(u)}(f_1 - T_1 \cdot u, \dots, f_n - T_n \cdot u).$$

A partir de acá se tiene que  $TF_{(u)}(f_1 - T_1 \cdot u, \dots, f_n - T_n \cdot u) \subset TF_{(u)}TF_{I'}(f_1 - T_1 \cdot u, \dots, f_n - T_n \cdot u) = TF_{I'}TF_{(u)}(f_1 - T_1 \cdot u, \dots, f_n - T_n \cdot u)$ , e intersectando con  $A[T_1, \dots, T_n]$  se obtiene que  $\ker(\beta) = TF_{I'}(\ker(\beta))$ . □

En este resultado se ve la relación que hay entre los núcleos de los morfismo  $h$  y  $\beta$ . Sin embargo, a pesar de que teóricamente es fácil obtener  $\ker(h)$  a partir de  $\ker(\beta)$ , en la práctica, este tipo de cálculos involucran la implementación de bases de Groebner, que son necesarias en el proceso de eliminación, es decir a la hora de calcular la intersección con  $k[T_1, \dots, T_n]$ .

Con el objeto de poder estudiar  $\ker(\beta)$ , o análogamente  $\mathcal{R}_A(I)$ , estudiaremos el ideal de relaciones  $\ker(\alpha)$ , que denotábamos  $J'$ , que es el núcleo del morfismo de  $A$ -álgebras, de  $\alpha : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbf{Sym}_A(I)$ , definido como  $T_i \mapsto f_i$ . Vimos que se tiene sucesión exacta:

$$0 \rightarrow J' \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Sym}_A(I) \rightarrow 0,$$

y que el ideal  $J'$  está dado por:

$$J' = \left\{ \sum g_i T_i, \text{ tales que } g_i \in A[T_1, \dots, T_n], \text{ y } \sum g_i f_i = 0 \right\}.$$

Ahora nos concentraremos en calcular  $\ker(\beta)$  a partir de conocer  $J'$  y entonces tener así una manera de poder obtener  $\ker(h)$  sin utilizar bases de Groebner u otras herramientas que hagan los cálculos muy lentos o imposibles.

En la proposición siguiente relacionaremos  $\ker(\beta)$  con  $\ker(\alpha)$  y veremos en qué sentido  $\text{Sym}_A(I)$  es una aproximación de  $\mathcal{R}_A(I)$ , es decir, cuándo es que  $K = 0$ .

**3.3.5 Proposición.** *Sea  $I'$  un ideal de  $A$ , tal que  $I$  es de tipo lineal fuera de  $V(I')$ , entonces*

$$TF_{I'}(\ker(\alpha)) = TF_{I'}(\ker(\beta)).$$

Más aún, si  $H_{I'}^0(A) = 0$  entonces

$$\ker(\beta) = TF_{I'}(\ker(\alpha)).$$

*Demostración.* Como  $I$  es de tipo lineal fuera de  $V(I')$ , entonces el módulo cociente  $K = \ker(\beta)/\ker(\alpha)$  está soportado en  $V(I')$ , es decir, si denotamos con  $I'^e$  a  $I'.A[T_1, \dots, T_n]$ , se tiene que  $I'^e \subset \text{rad}(I'^e) \subset \text{rad}(\text{ann}_{A[T_1, \dots, T_n]}(K))$ , lo cual implica que  $TF_{I'}(\ker(\alpha)) = TF_{I'}(\ker(\beta))$ .

La segunda parte se deduce de lo recién probado junto con la proposición anterior.  $\square$

Veremos más adelante, como un caso particular, que si el 0-ésimo grupo de homología del complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\{f_1, \dots, f_n\}$  se anula fuera de  $V(I')$ , entonces  $I$  es de tipo lineal fuera de  $V(I')$ .

Para comprender la vinculación entre los núcleos de  $h$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ , tenemos el siguiente resultado.

**3.3.6 Corolario.** *Supongamos que  $k \subset A_0$ . Si  $I'$  es un ideal de  $A$  tal que  $H_{I'}^0(A) = 0$  y además  $I$  es de tipo lineal fuera de  $V(I')$ , entonces*

$$\ker(h) = \ker(\beta) \cap k[T_1, \dots, T_n] = TF_{I'}(\ker(\beta)) \cap k[T_1, \dots, T_n] = TF_{I'}(\ker(\alpha)) \cap k[T_1, \dots, T_n].$$

## 3.4 El complejo de Koszul

El complejo de Koszul fue primeramente introducido por Jean-Louis Koszul para definir una teoría de cohomología para álgebras de Lie, y resultó ser una construcción homológica muy valiosa para el álgebra conmutativa.

Para comenzar supongamos que se tiene  $A$  es un anillo que por ahora asumiremos que es conmutativo, con unidad y no necesariamente noetheriano ni local, y  $M$  un  $A$ -módulo. Sea  $y$  un elemento de  $A$ , entonces el morfismo “multiplicar por  $y$ ” (que se denotará con  $y$ )

es un morfismo de  $A$ -módulos, de  $A$  en  $A$ . Agregando ceros fácilmente podemos obtener un complejo:

$$\mathcal{K}(y) \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{y} A \rightarrow 0$$

y resulta ser el complejo de Koszul asociado a  $y$  (también se puede notar como  $\mathcal{K}_\bullet(y)$ ).

Este caso simple ilustra dos propiedades importantes del complejo de Koszul. Si se indexa con la posición cero a la copia de  $A$  que está a la derecha y con uno a la que está a la izquierda, se puede observar que la homología en lugar cero es la imagen homomórfica de  $A$  módulo los múltiplos de  $y$ . Mientras que la homología en primer lugar representa el anulador del elemento  $y$ . Es decir:

$$H_1(\mathcal{K}_\bullet(y)) = \text{ann}(\{y\}),$$

$$H_0(\mathcal{K}_\bullet(y)) = A/A(y).$$

Supóngase ahora que se tienen dos elementos  $x, y$  en  $A$ , considérese la sucesión (ordenada)  $x, y$ , que se puede pensar como un vector en  $A^2$ . Se construye el complejo de Koszul asociado a la sucesión  $x, y, \mathcal{K}_\bullet(x, y)$ , de la siguiente forma:

$$\mathcal{K}_\bullet(x, y) : \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi_1} A^2 \xrightarrow{\varphi_0} A \rightarrow 0$$

Donde los morfismos  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  son tales que  $\varphi_0$  es la matriz vertical  $(x, y)^t$  y  $\varphi_1$  es la matriz horizontal  $(-y, x)$ . La condición  $(x, y)^t \cdot (-y, x) = 0$  dice que  $\mathcal{K}_\bullet(x, y)$  resulta ser un complejo.

Más generalmente, dados elementos  $x_1, \dots, x_n$  del anillo  $A$ , se construye el complejo de Koszul asociado a la sucesión (importa el orden)  $x_1, \dots, x_n$ , denotado por  $\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n)$ , como el producto tensorial en la categoría de  $A$ -complejos de los complejos  $\mathcal{K}_\bullet(x_i)$ , para cada  $i$ . Asumiremos ahora que los productos tensoriales, y las construcciones de álgebras simétricas y exteriores son como  $A$ -módulos.

Se definirá a continuación el producto tensorial de complejos:

Sean  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  los complejos de cadenas de  $A$ -módulos, acotados inferiormente.

$$\mathcal{F} : \quad \dots \xrightarrow{\varphi_{i+2}} F_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \dots,$$

y

$$\mathcal{G} : \quad \dots \xrightarrow{\psi_{i+2}} G_{i+1} \xrightarrow{\psi_{i+1}} G_i \xrightarrow{\psi_i} G_{i-1} \xrightarrow{\psi_{i-1}} \dots$$

Se tiene el siguiente diagrama asociado al producto tensorial:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \uparrow 1 \otimes \psi_{j-1} & & \uparrow 1 \otimes \psi_{j-1} & & \uparrow 1 \otimes \psi_{j-1} \\
\cdots & \longrightarrow & F_{i+1} \otimes G_{j-1} & \xrightarrow{\varphi_{i+1} \otimes 1} & F_i \otimes G_{j-1} & \xrightarrow{\varphi_i \otimes 1} & F_{i-1} \otimes G_{j-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1} \otimes 1} \cdots \\
& & \uparrow 1 \otimes \psi_j & & \uparrow 1 \otimes \psi_j & & \uparrow 1 \otimes \psi_j \\
\cdots & \longrightarrow & F_{i+1} \otimes G_j & \xrightarrow{\varphi_{i+1} \otimes 1} & F_i \otimes G_j & \xrightarrow{\varphi_i \otimes 1} & F_{i-1} \otimes G_j \xrightarrow{\varphi_{i-1} \otimes 1} \cdots \\
& & \uparrow 1 \otimes \psi_{j+1} & & \uparrow 1 \otimes \psi_{j+1} & & \uparrow 1 \otimes \psi_{j+1} \\
\cdots & \longrightarrow & F_{i+1} \otimes G_{j+1} & \xrightarrow{\varphi_{i+1} \otimes 1} & F_i \otimes G_{j+1} & \xrightarrow{\varphi_i \otimes 1} & F_{i-1} \otimes G_{j+1} \xrightarrow{\varphi_{i-1} \otimes 1} \cdots \\
& & \uparrow 1 \otimes \psi_{j+2} & & \uparrow \psi_{j+2} & & \uparrow 1 \otimes \psi_{j+2} \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

La construcción que haremos es bastante estandar y al complejo que resulta se lo conoce como complejo total asociado al complejo doble, de todas formas la detallaremos a continuación.

Sea  $D_k$  el elemento que resulta de la suma de los elementos de la “ $k$ -ésima” diagonal. Como el caso estudiado es el caso de complejos finitos, se tendrá que  $D_k = \bigoplus_{i+j=k} F_i \otimes G_j$ , con lo cual queda definido el complejo producto como:

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} : \quad \cdots \xrightarrow{\phi_{k+2}} D_{k+1} \xrightarrow{\phi_{k+1}} D_k \xrightarrow{\phi_k} D_{k-1} \xrightarrow{\phi_{k-1}} \cdots$$

Donde los morfismos  $\phi_k$  están definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\phi_k|_{F_i \otimes G_j} &: F_i \otimes G_j \rightarrow F_r \otimes G_s \\
\phi_k|_{F_i \otimes G_j} &= \varphi_{i-1} \otimes 1, \text{ si } r = i - 1 \\
\phi_k|_{F_i \otimes G_j} &= (-1)^i 1 \otimes \psi_{j-1}, \text{ si } s = j - 1 \\
\phi_k|_{F_i \otimes G_j} &= 0, \text{ en caso contrario.}
\end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que con estos morfismos  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$  resulta ser un complejo de cadenas, que es el producto tensorial de  $\mathcal{F}$  con  $\mathcal{G}$  en la categoría de complejos de cadenas.

Como se comentó antes se puede obtener el complejo de Koszul asociado a una sucesión arbitraria (finita),  $x_1, \dots, x_n$ , de elementos del anillo  $A$ ,  $\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n)$ , mediante la tensorización de los complejos  $\mathcal{K}_\bullet(x_i)$ , es decir

$$\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n) = \bigotimes_{1 \leq i \leq n} \mathcal{K}_\bullet(x_i).$$

De esto se deduce que como el producto tensorial de complejos es conmutativo (salvo isomorfismos), entonces el complejo de Koszul asociado a una sucesión, resulta invariante (salvo isomorfismos) por reordenamientos en la sucesión. Es decir, dado  $\sigma$  un elemento del grupo de automorfismos  $G_n$ , se tiene que

$$\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n) = \bigotimes_{1 \leq i \leq n} \mathcal{K}_\bullet(x_i) \simeq \bigotimes_{1 \leq i \leq n} \mathcal{K}_\bullet(x_{\sigma(i)}) = \mathcal{K}_\bullet(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Esta construcción puede automatizarse de la siguiente manera:

Dados  $A$  un anillo con las mismas hipótesis que hasta recién y un  $A$ -módulo libre  $M$  de dimensión  $n$ , consideremos el álgebra exterior  $\bigwedge M = \bigoplus \bigwedge^i M$ , como ya se sabe,  $\bigwedge^i M$  es un  $A$ -módulo libre de dimensión  $\binom{n}{i}$  y resulta ser el módulo trivial si  $i > n$ .

Con esta notación, el complejo de Koszul asociado a la sucesión  $x_1, \dots, x_n$ , resulta ser el complejo del álgebra exterior de  $M = A^n$ , es decir:

$$\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n) : 0 \rightarrow \bigwedge^n M \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots \rightarrow \bigwedge^{i+1} M \xrightarrow{\varphi_i} \bigwedge^i M \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_1} \bigwedge^1 M \xrightarrow{\varphi_0} \bigwedge^0 M \rightarrow 0,$$

donde los morfismos  $\varphi_i : \bigwedge^{i+1} M \rightarrow \bigwedge^i M$ , están definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Dado el elemento } e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_{i+1}} \in \bigwedge^{i+1} M, \\ \varphi_i(e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_{i+1}}) = \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{j-1} x_{k_j} e_{k_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{k_j}} \wedge \dots \wedge e_{k_{i+1}} \end{aligned}$$

Obsérvese entonces que hay alguna vinculación entre la regularidad sobre  $A$  de la sucesión considerada y la aciclicidad del complejo extendido. (Aquí se consideró la regularidad sobre  $A$ , pero esto se puede estudiar para un módulo finitamente generado arbitrario, como se hará más adelante).

Se expondrán a continuación (sin demostración), algunos de los resultados más importantes que vinculan estos conceptos. Las demostraciones de estos resultados se pueden consultar en [Eis1]. Lamentablemente el complejo no determina si una dada sucesión es regular o no, pero determina algo aun más importante: dada una sucesión  $x_1, \dots, x_n$ , éste permite determinar la longitud de una sucesión regular maximal en el ideal  $I = (x_1, \dots, x_n)$ .

**3.4.1 Teorema.** *Sea  $N$  un módulo finitamente generado sobre un anillo  $A$ . Supóngase que  $H_j(\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n) \otimes N) = 0$  para  $j > n - r$ , y que  $H_{n-r}(\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n) \otimes N) \neq 0$ , entonces toda  $N$ -sucesión maximal en  $I = (x_1, \dots, x_n) \subseteq A$  tiene longitud  $r$ .*

Se notará también por  $\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n; N)$  al complejo  $\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n) \otimes N$ . (Se suele notar  $\mathcal{K}_\bullet^A(x_1, \dots, x_n; N)$ , cuando no se sobrentiende que el anillo de base es  $A$ ).

En particular se tiene el siguiente resultado:

**3.4.2 Corolario.** *: Si  $x_1, \dots, x_n$  es una  $N$ -sucesión en  $I$ . Entonces el complejo extendido*

$$\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n; N) : 0 \rightarrow \bigwedge^n M \otimes N \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_1} \bigwedge^1 M \otimes N \xrightarrow{\varphi_0} \bigwedge^0 M \otimes N \xrightarrow{\pi} A/I \otimes N \rightarrow 0$$

*resulta acíclico, es decir, el complejo de Koszul asociado a la sucesión considerada es una resolución libre del módulo  $A/I \otimes N$ .*

Como es sabido, todo módulo libre es proyectivo, entonces el complejo  $\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n; N)$  resulta una resolución proyectiva del módulo  $A/I \otimes_A N$ . De esto último, tomando homología, se obtienen los funtores derivados del funtor  $-\otimes_A N$ , con lo cual, resulta que:

$$H_i(\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n; N)) = \text{Tor}_i^A(A/I, N).$$

Además, resulta que esta es la resolución más corta posible del módulo. Como la longitud del complejo es finita, entonces también se tiene que sólo finitas homologías pueden ser no nulas, esto nos permite asociarle al módulo  $A/I \otimes_A N$  un valor entero no negativo que se denominará: la *profundidad* del módulo.

**3.4.3 Definición.** Dado  $A$  un anillo,  $I$  un ideal en  $A$  finitamente generado y  $N$  un  $A$ -módulo también finitamente generado. Se define la profundidad de  $I$  en  $N$  como la longitud de una (cualquiera)  $N$ -sucesión en  $I$ , y se notará por  $\text{depth}(I : N)$ . En el caso en que  $N$  sea simplemente el anillo  $A$ , se hablará directamente de la profundidad de  $I$  y se notará por  $\text{depth}(I)$ . Si  $I \cdot N = N$ , se dirá que  $\text{depth}(I : N) = \infty$ .

Lamentablemente la recíproca del corolario anterior es falsa en el caso general, aunque resulta cierta si el anillo de base es local. Más en general se tiene el siguiente resultado:

**3.4.4 Teorema.** *Sea  $N$  un módulo finitamente generado sobre un anillo local  $A$  con ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Sea  $x_1, \dots, x_n$  una sucesión en  $\mathfrak{m}$ . Supóngase que para algún  $i$  se tiene que  $H_i(N \otimes \mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n)) = 0$ , entonces se tiene que  $H_j(N \otimes \mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n)) = 0$  para todo  $j \geq i$ .*

*En particular si  $H_1(N \otimes \mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n)) = 0$ , entonces  $x_1, \dots, x_n$  forma una sucesión  $N$ -regular en  $\mathfrak{m}$ .*

Esto permite dar para el caso local una versión más fuerte del corolario anterior

**3.4.5 Corolario.** *Dado un anillo local  $A$  con ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , y  $N$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Sea  $I = (x_1, \dots, x_n)$  un ideal propio de  $A$ , que contiene una sucesión  $N$ -regular de longitud  $n$ . Entonces  $x_1, \dots, x_n$  es una sucesión  $N$ -regular.*

De aquí se deduce un resultado de importante valor geométrico, ya que éste expresa la naturaleza geométrica del concepto de profundidad anteriormente mencionado.

**3.4.6 Corolario.** *Dado un anillo  $A$  y  $N$  un  $A$ -módulo finitamente generado, se tiene que si  $x_1, \dots, x_r$  es una sucesión  $N$ -regular, entonces  $x_1^m, \dots, x_r^m$  también lo es, para todo natural  $m$ .*

Con lo cual, si  $I$  es un ideal de  $A$ , cuyo radical es  $J$ , entonces  $\text{depth}(I : N) = \text{depth}(J : N)$

**3.4.7 Observación.** Este corolario es de índole geométrico ya que: dado  $I$  un ideal de  $A = k[X_1, \dots, X_n]$ , el anillo de polinomios en  $n$  variables. Sea  $V = V(I)$  la variedad afín asociada a  $I$  en  $k^n$ , sea  $J = I(V) = \text{rad}(I)$  el ideal de la variedad (que es radical). Queda unívocamente determinada la profundidad de  $I$  en  $A$  como  $\text{depth}(J) = \text{depth}(I(V(I))) = \text{depth}(V)$ .

**3.4.8 Lema.** *Sea  $A$  un anillo conmutativo, noetheriano,  $I$  un ideal propio de  $A$ , y*

$$\mathcal{C}_\bullet : \quad 0 \rightarrow M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_0$$

*un complejo de  $A$ -módulos finitamente generados, tal que cada módulo de homología  $H_i(\mathcal{C}_\bullet)$  satisface que  $\text{depth}(I : H_i(\mathcal{C}_\bullet)) = 0$ . Entonces si  $\text{depth}(I : M_k) \geq k$  para todo  $k = 1, \dots, n$ ,  $\mathcal{C}_\bullet$  resulta exacto.*

Enunciaremos a continuación alguna versión de la fórmula de Künneth, que nos será útil para probar algunos resultados de aciclicidad de los complejos de aproximación.

**3.4.9 Teorema.** *(Fórmula de Künneth) Sea  $\mathcal{C}_\bullet$  un complejo de cadenas de  $A$ -módulos, y  $x$  es un elemento de  $A$ , entonces para cada  $i$  se tiene una sucesión exacta de la forma*

$$0 \rightarrow H_0(x, H_i(\mathcal{C}_\bullet)) \rightarrow H_i(\mathcal{K}_\bullet(x) \otimes_A \mathcal{C}_\bullet) \rightarrow H_1(x, H_{i-1}(\mathcal{C}_\bullet)) \rightarrow 0,$$

donde  $H_i(x, M)$  denota el  $i$ -ésimo módulo de homología de del complejo de Koszul  $\mathcal{K}_\bullet(x; M)$ .

*Demostración.* Consideremos  $A$  como complejo concentrado en grado cero, entonces existe una sucesión exacta corta de complejos de la forma

$$0 \rightarrow A \rightarrow \mathcal{K}_\bullet(x) \rightarrow A[-1] \rightarrow 0,$$

donde la notación  $A[-l]$  es la notación estandar de “shifsts” de complejos y módulos, esto indica que  $(A[-l])_m = A_{m-l}$ . Tensorizando con  $\mathcal{C}_\bullet$  se obtiene una sucesión exacta corta de complejos, cuya sucesión exacta larga de homologías es

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(\mathcal{C}_\bullet[-1]) \xrightarrow{\delta} H_i(\mathcal{C}_\bullet) \rightarrow H_i(\mathcal{K}_\bullet(x) \otimes_A \mathcal{C}_\bullet) \rightarrow H_i(\mathcal{C}_\bullet[-1]) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(\mathcal{C}_\bullet) \rightarrow \dots,$$

identificando  $H_{i+1}(\mathcal{C}_\bullet[-1])$  con  $H_i(\mathcal{C}_\bullet)$ , el morfismo  $\delta$  es la multiplicación por  $x$ , con lo cual se obtiene

$$\dots \rightarrow H_i(\mathcal{C}_\bullet) \xrightarrow{x} H_i(\mathcal{C}_\bullet) \rightarrow H_i(\mathcal{K}_\bullet(x) \otimes_A \mathcal{C}_\bullet) \rightarrow H_{i-1}(\mathcal{C}_\bullet) \xrightarrow{x} H_{i-1}(\mathcal{C}_\bullet) \rightarrow \dots$$

Ahora partiendo la sucesión exacta larga en sucesiones exactas cortas, tomando núcleo y conúcleo, e identificando al primero con  $H_0(x, H_i(\mathcal{C}_\bullet))$  y al segundo con  $H_1(x, H_{i-1}(\mathcal{C}_\bullet))$ , se tiene lo deseado. □

**3.4.10 Lema.** *Sea  $\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n)$  el complejo de Koszul asociado a la sucesión  $x_1, \dots, x_n$ , y supongamos que  $x_j$  es una unidad de  $A$ . Entonces el complejo  $\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n)$  resulta acíclico.*

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta de la fórmula de Künneth

$$0 \rightarrow H_0(x_j, H_i(\mathcal{C}_\bullet)) \rightarrow H_i(\mathcal{K}_\bullet(x_j) \otimes_A \mathcal{C}_\bullet) \rightarrow H_1(x_j, H_{i-1}(\mathcal{C}_\bullet)) \rightarrow 0,$$

donde  $\mathcal{C}_\bullet$  es el complejo de Koszul formado por los elementos restantes, es decir, el complejo  $\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$ . Por la construcción del complejo  $\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n)$  y la conmutatividad del producto tensorial,  $\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{K}_\bullet(x_j) \otimes_A \mathcal{C}_\bullet$ . Queremos ver que éste es acíclico.

En los primeros párrafos de esta sección vimos que  $H_0(x_j, H_i(\mathcal{C}_\bullet)) = H_i(\mathcal{C}_\bullet)/(x_j)H_i(\mathcal{C}_\bullet)$ , que es trivial ya que por hipótesis  $x_j$  es inversible. Además el complejo  $0 \rightarrow A \xrightarrow{x_j} A \rightarrow 0$  es acíclico, luego también lo es si se tensoriza con  $\mathcal{C}_\bullet$ , luego  $H_1(x_j, H_{i-1}(\mathcal{C}_\bullet)) = 0$ . De acá se deduce que  $H_i(\mathcal{K}_\bullet(x_j)) = 0$  para todo  $i$  y por lo tanto  $H_i(\mathcal{K}_\bullet(x_1, \dots, x_n)) = 0$  para todo  $i$ .  $\square$

### 3.5 El Complejo Doble de Koszul $\mathcal{L}$

Introduciremos a continuación un clase de complejos que extienden a la familia de complejos de Koszul y que permitirán obtener resultados más ajustados en el estudio del álgebra de Rees y simétrica de un ideal dado.

Primeramente mencionaremos algunos complejos clásicos, y luego introduciremos una clase especial de complejos que funcionan mejor en el tipo de aplicaciones que estamos buscando. Estos complejos, llamados de aproximación, los estudiaremos más adelante, en el capítulo próximo.

Luego de que hayamos definidos los *complejos de aproximación*, veremos que estos resultan en dos sentidos más beneficiosos que los complejos de Koszul estándares, ya que: en primer lugar sus módulos de homología son independientes de los generadores elegidos; y en segunda instancia, estos complejos no presentan el tipo de rigidez que sí presenta el complejo de Koszul estandar, y las versiones más generales de este complejo. En esta última dirección se mencionará que los complejos de aproximación tienen la propiedad de que si la homología se anula en una dimensión, ésta podría no anularse en lo sucesivo.

Como consecuencia de la primera “virtud” podemos considerar una sucesión arbitraria de generadores de un ideal  $I$  que notaremos  $f_1, \dots, f_n$ . Se verá que frecuentemente (cuando se trata de una  $d$ -sucesión) uno de estos complejos resulta una resolución  $A$ -proyectiva de las álgebras simétricas y de Rees asociadas a  $I$ ,  $\text{Sym}_A(I)$  y  $\mathcal{R}_A(I)$ . Y el otro está vinculado con la preservación de estos resultados al tensorizar por  $A/I$ , en definitiva, veremos también que asimismo se obtienen conclusiones similares en el estudio de las álgebras  $\text{Sym}_{A/I}(I/I^2)$  y  $\text{gr}_A(I)$ . Estos dos complejos, que denotaremos por  $\mathcal{L}_\bullet$  y  $\mathcal{M}_\bullet$ , están íntimamente vinculados entre sí y se le dará un paneo rápido a esta cuestión.

Nos centraremos ahora en repasar brevemente aquel grupo de resoluciones libres finitas que han servido como punto de partida de muchas construcciones generales: el complejo de Eagon-Northcott, y una de sus variantes (por Gorenstein).

El complejo de Koszul que tratamos en la sección anterior, 3.4, es el complejo del álgebra exterior asociado a un morfismo muy particular  $\phi : A^m \rightarrow A$ . Con más generalidad, ligado a un morfismo de  $A$ -módulos  $\psi : F \rightarrow G$ , uno puede definir un nuevo morfismo

$$\bar{\psi} : \bigwedge^r F \otimes \text{Sym}_s(G) \rightarrow \bigwedge^{r-1} F \otimes \text{Sym}_{s+1}(G),$$

que se define como:  $\bar{\psi}(e_1 \wedge \dots \wedge e_r \otimes f) = \sum_i (-1)^{r-i} e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge e_r \otimes \psi(e_i).f$ , donde  $\psi(e_i).f$  denota la multiplicación de dos elementos del álgebra simétrica  $\text{Sym}(G)$ . Acá, como antes, todas las operaciones y construcciones se realizan sobre el anillo  $A$ .

Sólo por una cuestión de clasicismo vamos a examinar una simetrización del complejo que se obtiene a partir del morfismo introducido. Esta revisión sigue el enfoque de Buchbaum y Eisenbud y proporciona una introducción natural al complejo de Eagon-Northcott.

Supongamos que  $F$  y  $G$  son dos  $A$ -módulos libres de rango  $m$  y  $n$  respectivamente. En este caso, es sabido que se tiene un morfismo  $F^* \otimes_A G \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(F, G)$ , dado por  $f \otimes g \mapsto f_g$  y donde, si  $e$  es un elemento de  $F$  entonces  $f_g(e) = f(e)g$ . Bajo las hipótesis mencionadas, este morfismo es un isomorfismo, para lo cual sólo basta verificar que si  $\{e_1, \dots, e_m\}$  es una base de  $F$ , y  $\{e_1^*, \dots, e_m^*\}$  es la base dual asociada de  $F^*$ , entonces a cada flecha  $\theta : F \rightarrow G$  se le asocia el elemento  $\sum e_i^* \otimes \theta(e_i)$ . Por abuso de notación escribiremos  $\theta = \sum a_i \otimes b_i \in F^* \otimes G$ , al cual pensaremos como un elemento de (bi)grado 1-1 en el álgebra

$$\mathcal{K} := \bigwedge F^* \otimes \text{Sym}(G).$$

Dado que  $\theta^2 = 0$ , con el producto en el álgebra  $\mathcal{K}$ , se tiene una estructura de álgebra diferencial, o de complejo de cadenas, con el diferencial determinado por la multiplicación por  $\theta$  en el álgebra  $\mathcal{K}$ , que escribiremos - sólo aquí -  $\partial_\theta$ . Y en realidad,  $\mathcal{K}$ , es una suma directa de complejos de cadenas de  $A$ -módulos de la forma

$$\dots \rightarrow \bigwedge^r F^* \otimes_A \text{Sym}_s(G) \xrightarrow{\partial_\theta} \bigwedge^{r+1} F^* \otimes_A \text{Sym}_{s+1}(G) \rightarrow \dots,$$

donde, como se comentó antes, el morfismo  $\partial_\theta$  está definido tal que  $\partial_\theta(e_1 \wedge \dots \wedge e_r \otimes f) = \sum_i a_i \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_r \otimes b_i \cdot f$

A partir de acá supondremos, a menos que se aclare lo contrario, que todos los anillos son conmutativos y noetherianos, y los módulos, finitamente generados. En un futuro, para resumir notación, denotaremos por  $\bigwedge M$  y  $\mathbf{S}(M)$  a las álgebras exterior y simétrica sobre un  $A$ -módulo  $M$ . Naturalmente  $\bigwedge^r M$  y  $\mathbf{S}_r(M)$  denotarán las respectivas componentes de grado  $r$  de  $\bigwedge M$  y  $\mathbf{S}(M)$ .

Los dos complejos que queremos se obtienen tomando duales de algunos de estos sumandos y aumentándolos adecuadamente. Para el caso en que los módulos considerados resulten  $A^m$  y  $A^n$  respectivamente, con  $m \geq n$ . Sean:

$\mathcal{E} - \mathcal{N}(\theta) :$

$$0 \rightarrow \bigwedge^m F \otimes \mathbf{S}_{m-n}(G^*) \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^i F \otimes \mathbf{S}_{i-n}(G^*) \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^n F \otimes \mathbf{S}_0(G^*) \xrightarrow{\wedge^{n\theta}} \bigwedge^n G \otimes A,$$

y  $\mathcal{G}(\theta) :$

$$0 \rightarrow \bigwedge^m F \otimes \mathbf{S}_{m-n-1}(G^*) \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^i F \otimes \mathbf{S}_{i-1-n}(G^*) \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^{n+1} F \otimes \mathbf{S}_0(G^*) \xrightarrow{\epsilon} F \rightarrow G,$$

y donde los diferenciales se obtienen también dualizando, más explícitamente, si llamamos  $d_\theta : \bigwedge^r F \otimes \mathbf{S}_i(G^*)$  a los diferenciales de borde, se tiene:  $d_\theta(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \otimes f_{l_1} \dots f_{l_t}) = \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} (e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) \otimes f_j(\theta(e_{i_k})) (f_{l_1} \dots \hat{f}_{l_j} \dots f_{l_t})$ . Y el morfismo  $\epsilon$  está definido como:  $\epsilon(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{n+1}}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} (\theta(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge \hat{\theta}(e_{i_j}) \wedge \dots \wedge \theta(e_{i_{n+1}})) e_{i_j}$ , identificando  $\bigwedge^n G$  y  $\mathbf{S}_0(G^*)$  con  $A$ .

En una notación más acorde al problema que nos convoca, reanalizaremos algunas de estas cuestiones clásicas en un lenguaje más propicio y con menos rodeos.

Consideremos el siguiente diagrama de  $A$ -módulos:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\psi} & G \\ \downarrow \phi & & \\ A & & \end{array}$$

Consideraremos ahora el *complejo doble de Koszul* asociado a este diagrama. Interpretamos al álgebra bigraduada  $\bigwedge F \otimes_A \mathbf{Sym}(G)$  como un complejo doble, con los diferenciales  $\partial$  y  $\partial'$  abajo definidos:

$$\partial = d_\phi : \bigwedge^r F \otimes_A \mathbf{S}_s(G) \rightarrow \bigwedge^{r-1} F \otimes_A \mathbf{S}_s(G) ,$$

$$\partial(e_1 \wedge \dots \wedge e_r \otimes f) = \sum_i (-1)^{r-i} e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge e_r \otimes \phi(e_i) f, \text{ y}$$

$$\partial' = d_\psi : \bigwedge^r F \otimes_A \mathbf{S}_s(G) \rightarrow \bigwedge^{r-1} F \otimes_A \mathbf{S}_{s+1}(G) ,$$

$$\partial'(e_1 \wedge \dots \wedge e_r \otimes f) = \sum_i (-1)^{r-i} e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge e_r \otimes \psi(e_i) \cdot f .$$

donde  $\phi(e_i) f$  es la multiplicación de un elemento de  $\mathbf{Sym}(G)$  por un escalar de  $A$ , y  $\psi(e_i) \cdot f$  denota la multiplicación de dos elementos del álgebra simétrica de la misma forma en que se definió antes a  $\bar{\psi}$ .

Verificaremos ahora que efectivamente esta estructura define un complejo doble; para ello sólo basta verificar cómo conmutan los diferenciales así definidos:

$$\begin{aligned} \partial \partial'(e_1 \wedge \dots \wedge e_r \otimes f) &= \\ &= \partial(\sum_i (-1)^{r-i} e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge e_r \otimes \psi(e_i) \cdot f) = \\ &= \sum_i (-1)^{r-i} \partial(e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge e_r \otimes \psi(e_i) \cdot f) = \\ &= \sum_i (-1)^{r-i} (\sum_{j < i} (-1)^{r-j} e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge \widehat{e}_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes \phi(e_j) (\psi(e_i) \cdot f) + \\ &\quad \sum_{j > i} (-1)^{r-1-j} e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge \widehat{e}_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes \phi(e_j) (\psi(e_i) \cdot f)). \end{aligned}$$

Por otro lado, un cálculo idéntico nos permite obtener que  $\partial' \partial(e_1 \wedge \dots \wedge e_r \otimes f) = \sum_i (-1)^{r-i} (\sum_{j < i} (-1)^{r-j} e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge \widehat{e}_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes \phi(e_j) (\psi(e_i) \cdot f) + \sum_{j > i} (-1)^{r-1-j} e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge \widehat{e}_j \wedge \dots \wedge e_r \otimes \phi(e_j) (\psi(e_i) \cdot f))$ . Y como  $\mathbf{Sym}(G)$  es  $A$ -álgebra, se tiene que  $\psi(e_j) \cdot (\phi(e_i) f) = \phi(e_i) (\psi(e_j) \cdot f)$ . Ahora, reordenando las sumas, se tiene la igualdad buscada.

**3.5.1 Definición.** Al álgebra bigraduada resultante, también llamada *complejo doble de Koszul*, la notaremos con  $\mathcal{L}(\phi, \psi)$ .

Nos interesará analizar un caso particular de esto. Para ello consideremos una sucesión de elementos de  $A$   $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ , que genera un ideal  $I$ . Fijemos  $F = G = A^n$ , el morfismo  $\phi : A^n \rightarrow A$  de Koszul dado por la multiplicación por la matriz fila  $(x_1, \dots, x_n)$ , y la flecha  $\psi$  la identidad.

**3.5.2 Definición.** Este complejo doble denotado por  $\mathcal{L}((x_1, \dots, x_n), Id_{A^n})$  también lo notaremos simplemente con  $\mathcal{L}$ , y luce como se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & (3.8) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \bigwedge^r F \otimes_A \mathbf{S}_s(G) & \xrightarrow{\partial} & \bigwedge^{r-1} F \otimes_A \mathbf{S}_s(G) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & & \\
 \dots & \longrightarrow & \bigwedge^{r-1} F \otimes_A \mathbf{S}_{s+1}(G) & \xrightarrow{\partial} & \bigwedge^{r-2} F \otimes_A \mathbf{S}_{s+1}(G) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & 
 \end{array}$$

Si  $F = G = A^n$  este diagrama se reescribe como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & (3.9) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \bigwedge^r A^n \otimes_A A[T_1, \dots, T_n]_s & \xrightarrow{\partial} & \bigwedge^{r-1} A^n \otimes_A A[T_1, \dots, T_n]_s & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & & \\
 \dots & \longrightarrow & \bigwedge^{r-1} A^n \otimes_A A[T_1, \dots, T_n]_{s+1} & \xrightarrow{\partial} & \bigwedge^{r-2} A^n \otimes_A A[T_1, \dots, T_n]_{s+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & 
 \end{array}$$

Es claro que, mirando el diagrama 3.8 para  $s$  fijo (o sea, observando el complejo horizontal), se tiene un complejo de cadenas  $\dots \xrightarrow{\partial} \bigwedge^r F \otimes_A \mathbf{S}_s(G) \xrightarrow{\partial} \bigwedge^{r-1} F \otimes_A \mathbf{S}_s(G) \xrightarrow{\partial} \dots$ , que no es más que el complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\mathbf{x}$ , con coeficientes en el módulo  $\mathbf{S}_s(G)$ . Además, considerando sólo la graduación en la parte antisimétrica y sumando en la variable  $s$ , se tiene un complejo

$$\dots \xrightarrow{\partial} \bigwedge^r F \otimes_A \mathbf{Sym}(G) \xrightarrow{\partial} \bigwedge^{r-1} F \otimes_A \mathbf{Sym}(G) \xrightarrow{\partial} \dots,$$

que es el complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\mathbf{x}$  con coeficientes en el álgebra graduada  $\mathbf{Sym}(G)$ , llamado  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}, \mathbf{Sym}(G))$ .

Paralelamente podemos considerar el complejo total que se obtiene sumando a lo largo de las columnas, que denotaremos por  $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\partial)$ , cuyos diferenciales son los morfismos

$\partial$ . Se obtiene

$$\dots \rightarrow \sum_{i+j=t+1} (\bigwedge^i F \otimes \mathbf{S}_j(G)) \xrightarrow{\partial} \sum_{i+j=t} (\bigwedge^i F \otimes \mathbf{S}_j(G)) \xrightarrow{\partial} \sum_{i+j=t-1} (\bigwedge^i F \otimes \mathbf{S}_j(G)) \rightarrow \dots$$

Si denotamos por  $\mathcal{L}_t := \sum_{i+j=t} (\bigwedge^i F \otimes \mathbf{S}_j(G))$  a la componente de grado total  $t$  de  $\mathcal{L}$ , el complejo anterior se reescribe como:

$$\dots \rightarrow \mathcal{L}_{t+1} \xrightarrow{\partial} \mathcal{L}_t \xrightarrow{\partial} \mathcal{L}_{t-1} \rightarrow \dots$$

A su vez, cada uno de estos módulos  $\mathcal{L}_t$  también admite una estructura de complejo de Koszul con los diferenciales  $\partial'$  y consisten en los complejos que se obtiene a partir de cada columna del diagrama (3.8). Veremos en los próximos párrafos que estos complejos se construyen a partir de una sucesión de elementos de  $A[T_1, \dots, T_n]$  muy particular.

Por otro lado, sumando a lo largo de  $s$ , para  $r$  constante, el complejo  $\mathcal{L}(\partial')$  también resulta un complejo de Koszul, éste es el complejo vertical con los morfismos de borde  $\partial'$ , pero construido sobre otra sucesión de elementos de  $A[T_1, \dots, T_n]$ , distinta a la anterior, como se explica a continuación.

Sea  $\psi$  definido como la composición de los dos morfismos exhibidos en el diagrama:

$$(\mathrm{Sym}(A^n))^n \xrightarrow{\sim} A^n \otimes_A \mathrm{Sym}(A^n) \rightarrow \mathrm{Sym}(A^n),$$

que aplica  $(b_1, \dots, b_n) \mapsto \sum_i b_i T_i$ . Entonces  $\mathcal{L}(\partial')$  es el complejo de Koszul correspondiente, es decir, el complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\{T_1, \dots, T_n\}$ , que escribíamos como  $\mathcal{K}_\bullet((T_1, \dots, T_n), \mathrm{Sym}(A^n))$ .

Se tiene entonces una graduación en el complejo  $\mathcal{L}(\partial')$  dada por subcomplejos de  $A$ -módulos,  $\mathcal{L} = \sum_t \mathcal{L}_t$ , donde los  $\mathcal{L}_t$  son los complejos antes definidos (como álgebras diferenciales), que debido a la regularidad de la sucesión  $\{T_1, \dots, T_n\}$  resultan acíclicos.

### 3.6 Complejos de aproximación

Hemos mencionado en la sección anterior en un contexto muy general la definición del complejo doble de Koszul y algunas de sus propiedades básicas. Un poco más en particular, definimos  $\mathcal{L}$  como el complejo doble que se obtiene considerando una sucesión de elementos del anillo conmutativo  $A$ ,  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  (que a partir de ahora se llamará  $\{f_1, \dots, f_n\}$ ), que generan un ideal  $I$ ,  $F = G = A^n$  módulos libres,  $\phi : A^n \rightarrow A$  el morfismo de Koszul dado por la multiplicación por la matriz fila  $(f_1, \dots, f_n)$ , y  $\psi$  la identidad. En este contexto es que definiremos los complejos de aproximación tan mencionados.

Es conveniente no perder de vista el problema original, en donde  $A = k[X_1, \dots, X_n]$  e  $I = (f_1, \dots, f_n)$ . Con esta notación, se tienen dos complejos de Koszul asociados:

$$\mathcal{K}_\bullet(f_1, \dots, f_n; A[T_1, \dots, T_n]) : \dots \rightarrow \bigwedge^1 A[T_1, \dots, T_n]^n \xrightarrow{d_f} A[T_1, \dots, T_n]$$

que se denotará  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{f}; A[\mathbf{T}])$ , y

$$\mathcal{K}_\bullet(T_1, \dots, T_n; A[T_1, \dots, T_n]) : \dots \rightarrow \bigwedge^1 A[T_1, \dots, T_n]^n \xrightarrow{d_T} A[T_1, \dots, T_n]$$

que se denotará  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{T}; A[\mathbf{T}])$ .

Estos dos complejos son los asociados a los morfismos

$$A[T_1, \dots, T_n]^n \xrightarrow{(f_1, \dots, f_n)} A[T_1, \dots, T_n] : (b_1, \dots, b_n) \mapsto \sum b_i f_i$$

y

$$A[T_1, \dots, T_n]^n \xrightarrow{(T_1, \dots, T_n)} A[T_1, \dots, T_n] : (b_1, \dots, b_n) \mapsto \sum b_i T_i$$

respectivamente.

A partir de ahora denotaremos por  $d_f$  a los diferenciales  $\partial = d_\phi$  y por  $d_T$  a  $\partial' = d_\psi$ , se verifica que

$$\partial \circ \partial' \pm \partial' \partial = d_f \circ d_T \pm d_T \circ d_f = 0,$$

y el signo depende de cómo se coloquen los signos a la hora de definir los diferenciales (obteniéndose así o bien un complejo doble o bien un complejo de complejos).

En particular esto dice que  $d_T$  induce un morfismo en los ciclos, en los bordes y en las homología de  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{f}; A[\mathbf{T}])$ . Ésto se muestra de la siguiente forma:

Sea  $\omega$  tal que  $d_f(\omega) = 0$ , para ver que  $d_T(\omega)$  es un los ciclo de  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{f}; A[\mathbf{T}])$  basta observar que:  $d_f(d_T(\omega)) = \pm d_T(d_f(\omega)) = \pm d_T(0) = 0$ . Nótese también que si  $\omega$  está en los bordes, entonces  $\omega = d_f(\theta)$  para algún  $\theta$ . Luego  $d_T(\omega) = d_T(d_f(\theta)) = -d_f(d_T(\theta)) = d_f(-d_T(\theta))$  lo cual muestra que  $d_T(\omega)$  es un borde de  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{f}; A[\mathbf{T}])$ . Y por lo tanto como los ciclos van a parar a ciclos y los bordes a bordes los morfismos inducidos en los primeros pasan al cociente por los segundos, es decir se inducen morfismos en las homología.

Si denotamos por  $Z_i$ ,  $B_i$  y  $H_i$  al  $i$ -ésimo módulo de ciclos, bordes y a la homología del complejo  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{f}; A[\mathbf{T}])$  respectivamente, entonces para todo  $i$  lo anterior se resume en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Z_i & \xrightarrow{d_T} & Z_{i-1} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ H_i = \frac{Z_i}{B_i} & \xrightarrow{d_T} & H_{i+1} = \frac{Z_{i-1}}{B_{i-1}} \end{array}$$

Los complejos obtenidos a partir de ciclos, bordes y homología, y cuyos morfismos son los recién construidos, se denotarán con  $\mathcal{L}_\bullet$ ,  $\mathcal{B}_\bullet$ ,  $\mathcal{M}_\bullet$  respectivamente.

Hemos desarrollado toda esta teoría como respuesta a los problemas de encontrar generadores para el ideal de presentación de las álgebras de Rees  $\mathcal{R}_A(I)$  y  $\mathbf{gr}_A(I)$ , y obtener

condiciones, lo más finas posibles para que estas álgebras coincidan con sus respectivas álgebras simétricas. Con este objeto estudiaremos los módulos de homología de los complejos introducidos.

El complejo  $\mathcal{Z}_\bullet$  termina con la sucesión  $\ker(d_f) \xrightarrow{d_T} A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow 0$ . Entonces el 0-ésimo módulo de homología  $H_0(\mathcal{Z}_\bullet) = A[T_1, \dots, T_n]/d_T(\ker(d_f))$ , donde  $d_T(\ker(d_f)) = \{\sum_i g_i(T_1, \dots, T_n)T_i \text{ tales que } g_i \in A[T_1, \dots, T_n], \sum_i g_i(T_1, \dots, T_n)f_i = 0\}$ , que coincide con el ideal de presentación de  $\text{Sym}_A(I)$  que notábamos por  $J'$ , definido en (3.2), luego:

$$H_0(\mathcal{Z}_\bullet) = \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{d_T(\ker(d_f))} \simeq \text{Sym}_A(I). \quad (3.10)$$

Una situación similar se presenta con el complejo  $\mathcal{M}_\bullet$ . Dado que este complejo termina con la sucesión:

$$\dots \rightarrow \mathcal{M}_1 = \frac{\{(g_1, \dots, g_n) : \sum_i g_i f_i = 0\}}{d_f(\wedge^2 A[T_1, \dots, T_n])} \xrightarrow{d_T} \mathcal{M}_0 = \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{d_f(A[T_1, \dots, T_n]^n)} \rightarrow 0.$$

Luego  $H_0(\mathcal{M}_\bullet) = \frac{\mathcal{M}_0}{d_T(\mathcal{M}_1)}$ . Basta observar que el morfismo se puede definir entre los numeradores como se hace en el caso del complejo  $\mathcal{Z}_\bullet$ . Ahora, componiendo con la proyección al cociente, se tiene la flecha a  $\mathcal{M}_0$ , que por la buena definición del complejo  $\mathcal{M}_\bullet$  pasa al cociente  $\mathcal{M}_1$ . Esto dice que:

$$H_0(\mathcal{M}_\bullet) = \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{d_T(\ker(d_f)) + I \cdot A[T_1, \dots, T_n]} \simeq \frac{A[T_1, \dots, T_n]}{d_T(\ker(d_f))} \otimes_A \frac{A}{I} \simeq \text{Sym}_{A/I}(I/I^2). \quad (3.11)$$

Recordemos, que denominábamos  $Z_i$  al  $i$ -ésimo ciclo del complejo  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{f}; A[\mathbf{T}])$ , denotaremos con  $Z_i(\mathcal{K})$  al correspondiente módulo de ciclos de  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\bullet(\mathbf{f}, A)$  y con  $B_i(\mathcal{K})$  y  $H_i(\mathcal{K})$  a sus respectivos bordes y homología. Como la diferencial de  $\mathcal{K}$ , llamémos la  $d$ , verifica que

$$d(x \wedge y) = d(x) \wedge y + (-1)^{\deg(x)} x \wedge d(y),$$

$Z(\mathcal{K}) := \oplus_i Z_i(\mathcal{K})$  resulta una  $A$ -subálgebra de  $\mathcal{K}$  y  $B(\mathcal{K}) := \oplus_i B_i(\mathcal{K})$  es un ideal en  $Z(\mathcal{K})$ . Además, existe otro ideal relevante de  $Z(\mathcal{K})$ , que es aquel formado por los elementos con coeficientes en  $I$ , es decir  $\dot{Z}(\mathcal{K}) := Z(\mathcal{K}) \cap I \cdot \mathcal{K}$ . Como  $B(\mathcal{K}) \subset \dot{Z}(\mathcal{K})$ , existe un morfismo de  $A$ -álgebras (que también lo es de  $A/I$ -álgebras) tal que se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \delta(I) := \dot{Z}(\mathcal{K})/B(\mathcal{K}) \rightarrow H(\mathcal{K}) = Z(\mathcal{K})/B(\mathcal{K}) \rightarrow \dot{H}(\mathcal{K}) = Z(\mathcal{K})/\dot{Z}(\mathcal{K}) \rightarrow 0.$$

Con esta notación, los complejos  $\mathcal{Z}_\bullet$ ,  $\mathcal{B}_\bullet$  y  $\mathcal{M}_\bullet$  introducidos al comienzo de esta sección resultan:

$$\mathcal{Z}_\bullet \simeq Z(\mathcal{K}) \otimes_A \text{Sym}_A(A^n) \simeq Z(\mathcal{K}) \otimes_A A[T_1, \dots, T_n];$$

$$\mathcal{B}_\bullet \simeq B(\mathcal{K}) \otimes_A \text{Sym}_A(A^n) \simeq B(\mathcal{K}) \otimes_A A[T_1, \dots, T_n];$$

$\mathcal{M}_\bullet \simeq H(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{Sym}_A(A^n) \simeq H(\mathcal{K}) \otimes_A A[T_1, \dots, T_n] \simeq H(\mathcal{K}) \otimes_{A/I} A/I[T_1, \dots, T_n] \simeq H(\mathcal{K}) \otimes_{A/I} \mathbf{Sym}_{A/I}((A/I)^n)$ , donde los dos últimos isomorfismos resultan de que el ideal  $I$  anula a  $H(\mathcal{K})$ .

Un punto clave de esta sección es interpretar la aciclicidad de los complejos  $\mathcal{L}_\bullet$  y  $\mathcal{M}_\bullet$ .

Una propiedad importante de los complejos de aproximación es que éstos, a diferencia del complejo de Koszul, no dependen de los generadores elegidos para el ideal  $I$ , como se enuncia en el siguiente resultado.

**3.6.1 Proposición.** *Con las definiciones anteriores,  $H_i(\mathcal{L}_\bullet)$ ,  $H_i(\mathcal{B}_\bullet)$  y  $H_i(\mathcal{M}_\bullet)$  son independientes de los generadores elegidos para  $I$ , para todo  $i$ .*

Para la demostración de este resultado, ver la Proposición 3.2.6 y Corolario 3.2.7 de [Vas1].

Denotemos por  $(\mathcal{L}_\bullet)_t$ ,  $(\mathcal{B}_\bullet)_t$  y  $(\mathcal{M}_\bullet)_t$  a las componentes de grado  $t$  en las variables  $T_1, \dots, T_n$ , de  $\mathcal{L}_\bullet$ ,  $\mathcal{B}_\bullet$  y  $\mathcal{M}_\bullet$  respectivamente y  $\mathbf{S}_s$  a la componente de grado  $s$  de  $\mathbf{Sym}(A^n)$ . Extendamos por cero para  $s < 0$ , así  $\mathbf{S}_s$  está definido para todo  $s \in \mathbb{Z}$ .

Como el morfismo  $d_T$  tiene grado 1 en las variables  $T_i$ , se tiene, para cada  $t$ , el sub-complejo de  $\mathcal{L}_\bullet$  correspondiente a la capa de grado  $t$ ,

$$(\mathcal{L}_\bullet)_t : \quad 0 \rightarrow (Z_n)_t \xrightarrow{d_T} (Z_{n-1})_t \xrightarrow{d_T} \dots \xrightarrow{d_T} (Z_1)_t \xrightarrow{d_T} (Z_0)_t \rightarrow 0.$$

Por la definición de los complejos de aproximación (mirando el complejo doble de Koszul asociado) podemos escribir al módulo  $(Z_i)_t$  como  $Z_i(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_{t-i}$ . Se tiene entonces que

$$(\mathcal{L}_\bullet)_t : \quad 0 \rightarrow Z_n(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_{t-n} \xrightarrow{d_T} \dots \xrightarrow{d_T} Z_1(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_{t-1} \xrightarrow{d_T} Z_0(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_t \rightarrow 0.$$

Análogamente, el complejo  $(\mathcal{M}_\bullet)_t$  se obtiene como:

$$(\mathcal{M}_\bullet)_t : \quad 0 \rightarrow H_n(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_{t-n} \xrightarrow{d_T} \dots \xrightarrow{d_T} H_1(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_{t-1} \xrightarrow{d_T} H_0(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_t \rightarrow 0.$$

Dado que el complejo  $\mathcal{L}_\bullet$  será de gran utilidad en el capítulo siguiente, proponemos aquí una notación que será muy conveniente. Obsérvese que el módulo  $\mathcal{L}_i$  es un ideal de del  $i$ -ésimo módulo del complejo de Koszul  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{f}; A[\mathbf{T}])$ , donde los morfismos tienen grado  $d$  en la graduación de  $A$ . Si escribimos a este complejo con el “shift” correspondiente, se obtiene lo siguiente:

$$\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{f}; A[\mathbf{T}]) : \quad 0 \rightarrow K_n[-dn] \xrightarrow{d_f} K_{n-1}[-d(n-1)] \xrightarrow{d_f} \dots \xrightarrow{d_f} K_1[-d] \xrightarrow{d_f} A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow 0,$$

Con esta notación, el complejo  $\mathcal{L}_\bullet$  es aquel cuyos objetos son

$$\mathcal{L}_i = Z_i(\mathcal{K})[di] \otimes_A A[T_1, \dots, T_n]. \quad (3.12)$$

Es decir, escribimos al complejo  $\mathcal{L}_\bullet$  como:

$$0 \rightarrow Z_n(\mathcal{K})[dn] \otimes_A A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{d_T} \dots \xrightarrow{d_T} Z_1(\mathcal{K})[d] \otimes_A A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{d_T} A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow 0.$$

En el futuro, también notaremos con  $\mathcal{L}_\bullet$ , o simplemente con  $\mathcal{L}$  al complejo  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{T}; A[\mathbf{T}])$ . Con esta notación se tiene una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_\bullet \hookrightarrow \mathcal{L}_\bullet \xrightarrow{d_f} \mathcal{B}_\bullet[-1] \rightarrow 0.$$

Seteando el grado de  $T_i$  como cero, se tiene, para cada  $t$ , una sucesión exacta corta de complejos como sigue:

$$0 \rightarrow (\mathcal{L}_\bullet)_t \hookrightarrow (\mathcal{L}_\bullet)_t \xrightarrow{d_f} (\mathcal{B}_\bullet[-1])_{t-1} \rightarrow 0,$$

donde la  $i$ -ésima fila es  $0 \rightarrow (Z_i)_t \hookrightarrow (\mathcal{L}_i)_t \xrightarrow{d_f} (B_{i-1})_{t-1} \rightarrow 0$ , que con la notación anterior corresponde a:

$$0 \rightarrow Z_i(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_{t-i} \hookrightarrow \bigwedge^i A^n \otimes_A \mathbf{S}_{t-i} \xrightarrow{d_f} B_{i-1}(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_{t-i} \rightarrow 0.$$

Luego, para cada  $t$ , se tiene una sucesión exacta corta de complejos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (Z_{i+1})_t & \hookrightarrow & (\mathcal{L}_{i+1})_t & \xrightarrow{d_f} & (B_i)_{t-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d_T & & \downarrow d_T & & \downarrow d_T \\ 0 & \longrightarrow & (Z_i)_t & \hookrightarrow & (\mathcal{L}_i)_t & \xrightarrow{d_f} & (B_{i-1})_{t-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d_T & & \downarrow d_T & & \downarrow d_T \\ 0 & \longrightarrow & (Z_{i-1})_t & \hookrightarrow & (\mathcal{L}_{i-1})_t & \xrightarrow{d_f} & (B_{i-2})_{t-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Aquí el cuadrado

$$\begin{array}{ccccc} (Z_{i+1})_t & \hookrightarrow & (\mathcal{L}_{i+1})_t & \xrightarrow{d_f} & (B_i)_{t-1} \\ & & \downarrow d_T & & \downarrow d_T \\ (Z_i)_t & \hookrightarrow & (\mathcal{L}_i)_t & \xrightarrow{d_f} & (B_{i-1})_{t-1} \end{array}$$

se reescribe como

$$\begin{array}{ccccccc} Z_{i+1}(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_{t-(i+1)} & \hookrightarrow & \bigwedge^{i+1} A^n \otimes_A \mathbf{S}_{t-(i+1)} & \xrightarrow{d_f} & \bigwedge^i A^n \otimes_A \mathbf{S}_{t-(i+1)} & \longleftarrow & (B_i)_{t-1} \\ & & \downarrow d_T & & \downarrow d_T & & \\ Z_i(\mathcal{K}) \otimes_A \mathbf{S}_{t-i} & \hookrightarrow & \bigwedge^i A^n \otimes_A \mathbf{S}_{t-i} & \xrightarrow{d_f} & \bigwedge^{i-1} A^n \otimes_A \mathbf{S}_{t-i} & \longleftarrow & (B_{i-1})_{t-1} \end{array}$$

De la sucesión exacta corta de complejos  $0 \rightarrow \mathcal{L}_\bullet \hookrightarrow \mathcal{L}_\bullet \xrightarrow{d_f} \mathcal{B}_\bullet[-1] \rightarrow 0$ , se tiene una sucesión exacta larga en las homología

$$\dots \rightarrow H_2(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow H_1(\mathcal{B}_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_1(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow H_1(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow H_0(\mathcal{B}_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_0(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow H_0(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow 0,$$

donde  $H_i(\mathcal{B}_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_i(\mathcal{L}_\bullet)(1)$  es el morfismo de conexión y  $H(\mathcal{L}_\bullet)(1)$  es el módulo graduado  $H(\mathcal{L}_\bullet)$  con un corrimiento en el grado. Luego para cada  $t$  se tiene  $(H_i(\mathcal{B}_\bullet))_t \xrightarrow{\delta} (H_i(\mathcal{L}_\bullet))_{t+1}$ .

Recordemos que como el complejo  $\mathcal{L}_\bullet$  es el complejo  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{T}; A[\mathbf{T}])$  con el diferencial  $d_T$ , y la sucesión  $\{T_1, \dots, T_n\}$  es regular, entonces  $(\mathcal{L}_\bullet, d_T)$  es acíclico en grado positivo. Más precisamente

$$(H_i(\mathcal{L}_\bullet))_t = 0 \quad \text{si } i > 0 \text{ ó } t > 0.$$

Entonces se tiene que para  $i, t > 0$ ,  $(H_i(\mathcal{B}_\bullet))_t \xrightarrow{\delta} (H_i(\mathcal{L}_\bullet))_{t+1}$  resulta un isomorfismo. Si llamamos  $\pi$  al último morfismo (no nulo) de la sucesión exacta larga de homologías, se obtiene la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow H_0(\mathcal{B}_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_0(\mathcal{L}_\bullet) \xrightarrow{\pi} H_0(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow 0,$$

lo cual dice que  $H_0(\mathcal{B}_\bullet) \simeq \ker(\pi)$  vía  $\delta$ . Como además  $(H_0(\mathcal{L}_\bullet))_t = 0$  si y solo si  $t = 0$  y  $(H_0(\mathcal{L}_\bullet))_0 = A$ , definimos nuevos módulos graduados  $H'_i(\mathcal{L}_\bullet)$ :

$$(H'_i(\mathcal{L}_\bullet))_t = (H_i(\mathcal{L}_\bullet))_t \text{ si } i \geq 0 \text{ y } t > 0;$$

$$(H'_0(\mathcal{L}_\bullet))_0 = 0.$$

Se tiene entonces que

**3.6.2 Teorema.** *Para todo  $i$  y todo  $t$ , el morfismo de conexión  $\delta : (H_i(\mathcal{B}_\bullet))_t \rightarrow (H_i(\mathcal{L}_\bullet))_{t+1}$  induce un isomorfismo*

$$\delta' : (H_i(\mathcal{B}_\bullet))_t \xrightarrow{\sim} (H'_i(\mathcal{L}_\bullet))_{t+1}$$

Por la definición de los complejos  $\mathcal{L}_\bullet$ ,  $\mathcal{B}_\bullet$  y  $\mathcal{M}_\bullet$ , para cada  $t$  se tiene otra sucesión exacta de complejos

$$0 \rightarrow (\mathcal{B}_\bullet)_t \rightarrow (\mathcal{L}_\bullet)_t \rightarrow (\mathcal{M}_\bullet)_t \rightarrow 0,$$

y un sucesión exacta corta de complejos graduados

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_\bullet \rightarrow \mathcal{L}_\bullet \rightarrow \mathcal{M}_\bullet \rightarrow 0.$$

De esta última, se obtiene una sucesión exacta larga en las homologías, y por el teorema 3.6.2, se rescribe como sigue

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{i+1}(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{\Delta} H'_i(\mathcal{L}_\bullet)(1) \rightarrow H_i(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow H_i(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{\Delta} H'_{i-1}(\mathcal{L}_\bullet)(1) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_1(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{\Delta} H'_0(\mathcal{L}_\bullet)(1) \rightarrow H_0(\mathcal{L}_\bullet) \rightarrow H_0(\mathcal{M}_\bullet) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $H_i(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{\Delta} H'_{i-1}(\mathcal{L}_\bullet)$  es la composición del morfismo de conexión obtenido en la nueva sucesión exacta larga, con el morfismo inducido  $\delta'$  del teorema 3.6.2.

Se deduce de acá el siguiente resultado:

**3.6.3 Proposición.** *Si  $H_i(\mathcal{M}_\bullet) = 0$  entonces  $H_i(\mathcal{Z}_\bullet) = 0$ . En particular, si  $\mathcal{M}_\bullet$  es acíclico, entonces  $\mathcal{Z}_\bullet$  también lo es.*

*Demostración.* En primer lugar es fácil ver que si  $H_{i+1}(\mathcal{M}_\bullet) = H_i(\mathcal{M}_\bullet) = 0$  entonces  $H_i(\mathcal{Z}_\bullet) = 0$ , ya que de la sucesión exacta larga de las homología se concluye  $0 = H_{i+1}(\mathcal{M}_\bullet) \rightarrow H'_i(\mathcal{Z}_\bullet)(1) \rightarrow H_i(\mathcal{Z}_\bullet) \rightarrow H_i(\mathcal{M}_\bullet) = 0$ .

Probaremos ahora el resultado enunciado. A partir de la sucesión exacta larga de recién se tiene que  $H_i(\mathcal{Z}_\bullet)(1) \rightarrow H_i(\mathcal{Z}_\bullet) \rightarrow H_i(\mathcal{M}_\bullet)$  resulta exacta para todo  $t$  y todo  $i > 0$ . Por hipótesis,  $H_i(\mathcal{M}_\bullet) = 0$ , luego el morfismo de  $A[T_1, \dots, T_n]$ -módulos  $H'_i(\mathcal{Z}_\bullet)(1) \rightarrow H_i(\mathcal{Z}_\bullet)$  resulta suryectivo. Como estamos bajo la hipótesis de noetherianidad de  $A$  y entonces  $A[T_1, \dots, T_n]$  también lo es, luego  $H_i(\mathcal{Z}_\bullet)$  resulta un  $A[T_1, \dots, T_n]$ -módulo de tipo finito ya que es un cociente de módulos de ciclos de un complejo de Koszul. Como el morfismo  $H_i(\mathcal{Z}_\bullet)(1) \rightarrow H_i(\mathcal{Z}_\bullet)$  viene dado por la composición del isomorfismo  $\delta'$  con la inclusión de  $(\mathcal{B}_\bullet)_t$  en  $(\mathcal{Z}_\bullet)_t$ , entonces se tiene un isomorfismo  $H_i(\mathcal{Z}_\bullet)(1) \xrightarrow{\sim} H_i(\mathcal{Z}_\bullet)$ . Esto dice que para cada  $t$

$$(H'_i(\mathcal{Z}_\bullet))_{t+1} \xrightarrow{\sim} (H_i(\mathcal{Z}_\bullet))_t.$$

Como  $(H_i(\mathcal{Z}_\bullet))_{-1} = 0$ , iterando, se deduce que  $(H_i(\mathcal{Z}_\bullet))_t = 0$  para todo  $t$ . □

**3.6.4 Observación.** Obsérvese que si  $H_i(\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{f}; A[\mathbf{T}])) = 0$ , entonces por construcción del complejo  $\mathcal{M}_\bullet$ , éste se anula. En particular  $H_i(\mathcal{M}_\bullet) = 0$ .

Recordemos que nuestro principal interés se centra en el estudio de la cola de la sucesión exacta larga anterior para cada grado  $t$  fijo, esto es

$$\dots \rightarrow H_1((\mathcal{M}_\bullet)_t) \xrightarrow{\Delta} H'_0((\mathcal{Z}_\bullet)_{t+1}) \xrightarrow{\lambda} H_0((\mathcal{Z}_\bullet)_t) \rightarrow H_0((\mathcal{M}_\bullet)_t) \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

que reemplazando de acuerdo con los isomorfismos (3.10) y (3.11) se reescribe como

$$\dots \rightarrow H_1((\mathcal{M}_\bullet)_t) \xrightarrow{\Delta} (\mathbf{Sym}_A(I))_{t+1} \xrightarrow{\lambda} (\mathbf{Sym}_A(I))_t \rightarrow (\mathbf{Sym}_{A/I}(I/I^2))_t \rightarrow 0,$$

donde, como antes  $\Delta$  es el morfismo de conexión (compuesto con  $\delta'$ ) y  $\lambda$  es el morfismo que baja el grado, es decir

$$\lambda : (\mathbf{Sym}_A(I))_{t+1} \simeq (H'_0(\mathcal{Z}_\bullet))_{t+1} \xrightarrow{\delta'^{-1}} (H_0(\mathcal{B}_\bullet))_t \hookrightarrow (H_0(\mathcal{Z}_\bullet))_t \simeq (\mathbf{Sym}_A(I))_t,$$

inducido por la flecha  $T_I^{t+1}(A) \rightarrow T_I^t(A)$ , donde  $T_I(A)$  denota el álgebra tensorial en  $A$  de  $I$ , definido como  $x_1 \otimes \dots \otimes x_{t+1} \mapsto x_1 x_2 \otimes x_3 \otimes \dots \otimes x_{t+1}$ . El correspondiente morfismo en las álgebras simétricas es el morfismo  $(\mathbf{Sym}_A(I))_{t+1} \rightarrow I \cdot (\mathbf{Sym}_A(I))_t \subset (\mathbf{Sym}_A(I))_t$ , que aplica  $x_1 \cdot \dots \cdot x_{t+1} \mapsto x_1(x_2 \cdot \dots \cdot x_{t+1})$ .

Veremos ahora cómo se relacionan estos resultados con el estudio de la “aproximación” del álgebra de Rees por el álgebra simétrica. Como consecuencia de la sucesión exacta larga de las homología proveniente de  $0 \rightarrow \mathcal{B}_\bullet \rightarrow \mathcal{Z}_\bullet \rightarrow \mathcal{M}_\bullet \rightarrow 0$  (3.13), se obtiene una condición para que el morfismo  $\sigma : \mathbf{Sym}_A(I) \rightarrow \mathcal{R}_A(I)$  resulte un isomorfismo, es decir, condiciones para determinar cuándo  $I$  es de tipo lineal.

Juntando la cola de la sucesión exacta larga (3.14) con la sucesión exacta

$$0 \rightarrow I^{n+1} \rightarrow I^n \rightarrow I^n/I^{n+1} \rightarrow 0$$

se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(\mathcal{M}_\bullet) & \longrightarrow & \mathbf{Sym}_A(I) & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{Sym}_A(I) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{Sym}_{A/I}(I/I^2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_A(I)_+ & \longrightarrow & \mathcal{R}_A(I) & \longrightarrow & \mathbf{gr}_A(I) \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde  $\mathcal{R}_A(I)_+$  consiste en el ideal de  $\mathcal{R}_A(I)$  de grado positivo.

Supongamos, que se tuviera que  $H_1(\mathcal{M}_\bullet) = 0$ , entonces a partir de estas dos sucesiones exactas, miradas grado a grado, se puede confeccionar un diagrama

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow & (\mathbf{Sym}_A(I))_{i+1} & \xrightarrow{\lambda} & (\mathbf{Sym}_A(I))_i \\ & \downarrow \sigma_{i+1} & & \downarrow \sigma_i \\ 0 \longrightarrow & (\mathcal{R}_A(I)_+)_{i+1} & \longrightarrow & (\mathcal{R}_A(I))_i \end{array}$$

Obsérvese que  $\sigma_0 : A = (\mathbf{Sym}_A(I))_0 \rightarrow (\mathcal{R}_A(I))_0 = A$  es la identidad (por ser morfismo de  $A$ -álgebras). Ahora, como  $\sigma_0 \circ \lambda$  es inyectivo, entonces  $\sigma_1$  también, y como ya era suryectivo, se tiene que es un isomorfismo. Iterando, se obtiene que  $\sigma_t$  es un isomorfismo para todo  $t$ . Hemos probado que:

**3.6.5 Proposición.** *Si  $H_1(\mathcal{M}_\bullet) = 0$  entonces  $\sigma : \mathbf{Sym}_A(I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_A(I)$  resulta un isomorfismo, es decir,  $I$  es de tipo lineal.*

**3.6.6 Teorema.** *Si denotamos por  $\sigma : \mathbf{Sym}_A(I) \rightarrow \mathcal{R}_A(I)$  al morfismo de la proposición anterior y por  $\gamma : \mathbf{Sym}_{A/I}(I/I^2) \rightarrow \mathbf{gr}_A(I)$  a su reducción módulo  $I$ , se tiene que para el caso en que  $A$  sea un anillo noetheriano,  $\sigma$  es un isomorfismo si y sólo si  $\gamma$  lo es.*

*Demostración.* Es claro que si  $\sigma$  es un isomorfismo, entonces su reducción módulo  $I$  también lo es.

Para ver que vale la afirmación contraria, apliquemos el lema de la serpiente al diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & K_{i+1} & \longrightarrow & (\mathbf{Sym}_A(I))_{i+1} & \longrightarrow & I^{i+1} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow \lambda_{i+1} & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & K_i & \longrightarrow & (\mathbf{Sym}_A(I))_i & \longrightarrow & I^i & \longrightarrow 0, \end{array}$$

se obtiene una sucesión exacta corta como la siguiente:

$$0 \rightarrow K_i/\lambda_{i+1}(K_{i+1}) \rightarrow \mathbf{Sym}_{A/I}(I/I^2)_i \rightarrow \mathbf{gr}_A(I)_i \rightarrow 0.$$

Por hipótesis  $K_i = \lambda_{i+1}(K_{i+1})$  si  $i > 1$ . Por otro lado, como  $K$  es un ideal finitamente generado de  $\text{Sym}_A(I)$ , existe un natural  $n > 1$  tal que  $K_{i+1} = \text{Sym}_A(I)_1 \cdot K_i$ , para  $i \geq n$ . Aplicando  $\lambda$  a la ecuación anterior se obtiene

$$K_i = \lambda(K_{i+1}) = \lambda(\text{Sym}_A(I)_1 \cdot K_i) = IK_i .$$

Ahora, por un argumento de localización seguido del lema de Nakayama, se obtiene que  $K_i = 0$  para  $i \geq n$ . Usando inducción descendente se prueba la nulidad de las otras componentes. □

### 3.7 Aciclicidad de los complejos de aproximación

Probaremos en esta sección resultados sobre la aciclicidad de los complejos de aproximación, que usaremos en el capítulo siguiente.

En lo que sigue asumiremos que  $A$  es un anillo noetheriano,  $\mathbb{N}$ -graduado. Denotamos por  $\mathfrak{m}$  al ideal formado por los elementos de grado positivo, es decir  $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i>0} A_i$ , que frecuentemente denotaremos  $A_+$ .

*3.7.1 Observación.* Si  $I$  y  $\mathfrak{m}$  tienen el mismo ideal radical, entonces los módulos de homología  $H_i(\mathcal{K}_\bullet)$  del complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\mathcal{K}_\bullet = \mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; A)$ , están soportados en  $V(\mathfrak{m})$ , es decir,  $H_i(\mathcal{K}_\bullet)_{\mathfrak{p}} = 0$  para  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ .

Esto se debe a que como localizar en  $\mathfrak{p}$  equivale a tensorizar sobre  $A$  con  $A_{\mathfrak{p}}$ , y la localización conmuta con tomar cocientes, basta ver que el complejo de Koszul  $\mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; A_{\mathfrak{p}})$  es acíclico. Ahora, si algún  $x_j$  no está en  $\mathfrak{p}$ , este es una unidad en  $A_{\mathfrak{p}}$ , y por el Lema 3.4.10 se tiene que el complejo en cuestión resulta acíclico. Por otro lado, obsérvese que no puede suceder que todo  $x_j$  esté en  $\mathfrak{p}$ , ya que si no,  $I$  resultaría dentro de  $\mathfrak{p}$ , y como  $\mathfrak{p}$  es primo (entonces radical), resultaría que el radical de  $I$ , que coincide con  $\mathfrak{m}$  (por ser maximal), coincidiría con  $\mathfrak{p}$  en contra de la hipótesis.

*3.7.2 Observación.* Teniendo en cuenta lo visto recién, la Observación 3.6.4 y la Proposición 3.6.3, se tiene que los módulos  $H_i(\mathcal{M}_\bullet)$  y  $H_i(\mathcal{L}_\bullet)$  también están soportados en  $V(\mathfrak{m})$

A continuación enunciaremos el primer resultado sobre aciclicidad de los complejos de aproximación.

**3.7.3 Proposición.** *Sea  $I = (x_1, \dots, x_n)$  un ideal de  $A$  tal que los ideales  $I$  y  $\mathfrak{m}$  tienen el mismo radical. Supongamos además que  $r = \text{depth}(\mathfrak{m} : A) \geq 1$ . Entonces los módulos de homología  $H_i(\mathcal{L}_\bullet)$  se anulan para  $i \geq \max\{1, n - r\}$ . En particular si  $n \geq 2$  y  $r \geq n - 1$ , entonces el complejo  $\mathcal{L}_\bullet$  resulta acíclico.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{K}_\bullet = \mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; A)$  el complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , con coeficientes en  $A$ . Sea  $H_i(\mathcal{K}_\bullet)$  el  $i$ -ésimo módulo de homología de  $\mathcal{K}_\bullet$ ,  $Z_i$  y  $B_i$  a los ciclos y bordes de  $\mathcal{K}_\bullet$  respectivamente.

Como  $I$  y  $\mathfrak{m}$  tienen el mismo radical, por la Observación 3.7.1, entonces los módulos de homología  $H_i(\mathcal{K}_\bullet)$  están soportados en  $V(\mathfrak{m})$ , es decir,  $H_i(\mathcal{K}_\bullet)_{\mathfrak{p}} = 0$  para  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ .

Ahora, por la Observación 3.7.2 se tiene que los módulos  $H_i(\mathcal{M}_\bullet)$  y  $H_i(\mathcal{L}_\bullet)$  también están soportados en  $V(\mathfrak{m})$ , y consecuentemente se tiene que

$$\text{depth}(\mathfrak{m} : H_i(\mathcal{L}_\bullet)) = 0 \text{ para todo } i > 0, \text{ si } H_i(\mathcal{L}_\bullet) \neq 0. \quad (3.15)$$

Como  $I$  y  $\mathfrak{m}$  tienen el mismo radical, entonces por la Observación 3.4.7 y el Teorema 3.4.4, se tiene que  $\text{depth}(I : A) = \text{depth}(\mathfrak{m} : A) = r$  y se deduce del Lema 3.4.8 que  $H_i(\mathcal{K}_\bullet) = 0$  para  $i > n - r$ . Se deduce de acá que el complejo de Koszul truncado siguiente es exacto:

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow K_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow K_{n-r+1} \rightarrow K_{n-r},$$

y como  $r \geq 1$  se tiene sucesiones exactas como las siguientes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K_n & \rightarrow & B_{n-1} & \rightarrow & 0, \\ 0 & \rightarrow & B_{n-1} & \rightarrow & K_{n-1} & \rightarrow & B_{n-2} \rightarrow 0, \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \rightarrow & B_{n-r+1} & \rightarrow & K_{n-r+1} & \rightarrow & B_{n-r} \rightarrow 0, \end{array}$$

Usaremos ahora [Eis1] Cor. 18.6 . Como  $\text{depth}(\mathfrak{m} : K_i) \geq r$  para todo  $i$ , iterando se obtiene que  $\text{depth}(\mathfrak{m} : B_i) \geq r - (n - i) + 1$  para  $n - r \leq i \leq n - 1$ . Como  $r \geq 1$  se tiene que  $Z_n = 0$  y que  $Z_i = B_i$  para  $i$  como antes. Más aún,  $Z_{n-r} \subset K_{n-r}$  y  $\text{depth}(\mathfrak{m} : K_{n-r}) \geq 1$  y por lo tanto  $\text{depth}(\mathfrak{m} : Z_{n-r}) \geq 1$ . Finalmente, usando que  $\mathcal{Z}_i = Z_i[T_1, \dots, T_n]$  para todo  $i = 0, \dots, n$  se obtiene que  $\mathcal{Z}_n = 0$  y que  $\text{depth}(\mathfrak{m} : \mathcal{Z}_i) \geq i - (n - r - 1)$  para  $n - r \leq i < n$ .

Por el Lema 3.4.8, (3.15) y lo recién observado, se tiene que el complejo

$$0 \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_{n-r+1} \rightarrow Z_{n-r}$$

es exacto, y por lo tanto se tiene que  $H_i(\mathcal{L}_\bullet) = 0$  para  $i \geq \max(1, n - r)$ .  $\square$

El resultado anterior sólo vale cuando ambos ideales  $I$  y  $\mathfrak{m}$  tienen el mismo radical. Por lo tanto, desde un enfoque más geométrico, sólo podremos aplicarlo cuando el conjunto de puntos base es vacío. Enunciaremos a continuación otros casos, que nos permitirán trabajar cuando sí existan puntos base.

Previamente, repasaremos la definición de un *ideal de intersección completa local proyectiva*. Dado un ideal  $J$  de un anillo  $A$  denotamos por  $\mu(J)$  al entero que corresponde al número minimal de generadores de  $J$ .

**3.7.4 Definición.** Sea  $I$  un ideal de un anillo  $A$ . Se dice que  $I$  es una intersección completa local en  $\text{Proj}(A)$  si y solo si para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) - V(\mathfrak{m})$  se tiene que  $\mu(I_{\mathfrak{p}}) = \text{depth}(I_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}})$ .



para  $n - 1 \geq i \geq 3$ . Se tiene además que  $Z_1 \subset K_1$  y  $\text{depth}(\mathfrak{m} : K_1) \geq 1$ , entonces  $\text{depth}(\mathfrak{m} : Z_1) \geq 1$ . Como  $\mathcal{Z}_i = Z_i[T_1, \dots, T_n]$  (con el shift de índices correspondiente), se tiene que

$$\mathcal{Z}_n = 0,$$

y que

$$\text{depth}(\mathfrak{m} : \mathcal{Z}_i) \geq i \text{ para } i \geq 3, \text{ ó } i = 1.$$

Bastaría probar que  $\text{depth}(\mathfrak{m} : \mathcal{Z}_2) \geq 2$  y usar el Lema 3.4.8 para poder afirmar que el complejo  $\mathcal{Z}_\bullet$  es acíclico. Para poder demostrar este caso restante se usarán dos lemas que se enuncian (sin demostración) al final de esta prueba.

Veremos que tanto si  $\mu(I) = n - 1$  como si  $\mu(I) = n$ , se tiene que  $H_2(\mathcal{M}_\bullet) = 0$ . Para el primer caso, el Lema 3.7.7, implica directamente lo deseado. Para el segundo caso, este mismo lema implica que  $H_2(\mathcal{M}_\bullet) = H_{\mathfrak{m}}^0(H_2(\mathcal{M}_\bullet))$ , y por el Lema 3.7.6 se obtiene que  $H_{\mathfrak{m}}^0(H_2(\mathcal{M}_\bullet)) = 0$ , luego  $H_2(\mathcal{M}_\bullet) = 0$ . En ambos casos se sigue que  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{Z}_2$  y por lo tanto, hemos probado que  $\text{depth}(\mathfrak{m} : \mathcal{B}_2) \geq 2$  y finalmente  $\text{depth}(\mathfrak{m} : \mathcal{Z}_2) \geq 2$  tal como se deseaba.  $\square$

**3.7.6 Lema.** *Sea  $I = (f_1, \dots, f_n)$  un ideal de  $A$  tal que  $\text{depth}(\mathfrak{m} : A) > \text{depth}(I : A) = r$ . Entonces  $H_{\mathfrak{m}}^0(H_{n-r}(\mathcal{K}_\bullet)) = 0$ .*

**3.7.7 Lema.** *Sea  $I = (f_1, \dots, f_n)$  un ideal de  $A$ , se tienen las siguientes dos propiedades:*

- (a) *para todo  $i > \zeta := \mu(I) - \text{depth}(I : A)$ , se tiene que  $H_i(\mathcal{M}_\bullet) = 0$ ;*
- (b) *si además suponemos que para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) - V(\mathfrak{m})$  se tiene que  $\zeta > \zeta_{\mathfrak{p}} := \mu(I_{\mathfrak{p}}) - \text{depth}(I_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}})$ , entonces  $H_{\zeta}(\mathcal{M}_\bullet) = H_{\mathfrak{m}}^0(H_{\zeta}(\mathcal{M}_\bullet))$ .*

Para ver una demostración de estos dos resultados, recurrir a [B-J] Lemas 4.10 y 4.11.

El siguiente resultado vincula lo estudiado en esta sección con las definiciones dadas en la sección 3.2.

**3.7.8 Teorema.** *Sea  $A$  un anillo e  $I$  un ideal de  $A$ . Consideremos las afirmaciones:*

- (a)  *$I$  está generado por una sucesión propia;*
- (b) *el complejo  $\mathcal{Z}_\bullet$  asociado a  $I$  es acíclico.*

*Entonces (a) implica (b). Más aún, si  $A$  es un anillo local, con ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , y cuerpo residual  $k$  infinito, o si  $A$  es un anillo graduado tal que  $A_0 = k$  es un cuerpo infinito y  $\mathfrak{m}$  es su ideal irrelevante, que está generado en grado 1, y tal que  $x_i \in \mathfrak{m}$  son elementos homogéneos; entonces (a) y (b) resultan equivalentes.*

*Demostración.* Se puede encontrar una demostración en [HSV3].  $\square$

## Capítulo 4

# Implicitación

En este capítulo estudiaremos el problema de implicitación. Primeramente, veremos brevemente el método introducido por Sederberg y Chen y luego desarrollado en profundidad por Busé, Cox y D’Andrea, que consiste en el método de Curvas y Superficies móviles, más comunmente llamadas *moving curves* o *moving lines* y *moving surfaces*. Veremos que este método es una “inocente” forma de atacar un profundo problema, que involucra sofisticadas técnicas de geometría algebraica, álgebra conmutativa y homológica.

En la segunda sección abordaremos en el problema de implicitación usando los complejos de aproximación y toda la maquinaria introducida en el capítulo anterior. Este enfoque fue desarrollado por Busé, Chardin y Jouanolou desde comienzos de este siglo.

### 4.1 Moving Lines y Moving Surfaces

El objetivo de esta sección es comentar algunos de los resultados sobre *moving curves* y *moving surfaces* obtenidos por Sederberg y Chen en el artículo [SC], y las posteriores sofisticaciones de Busé, Cox y D’Andrea [Cox1, Cox2, DAn, BCD].

Para esta sección emplearemos la notación clásica utilizada por D. Cox. Para una más fácil lectura del texto siguiente, y para poder vincular con lo ya desarrollado y lo que expondremos en la sección siguiente, exhibimos a continuación un diccionario. Notaremos con  $s, t, u$  a las variables  $X_1, X_2, X_3$ , el cuerpo  $k$  será  $\mathbb{C}$  y entonces el anillo  $A = k[X_1, X_2, X_3]$  o  $A = k[X_1, X_2]$  será  $R = \mathbb{C}[s, t, u]$  o  $\mathbb{C}[s, t]$  respectivamente.  $x, y, z, w$  serán las variables que denotábamos por  $T_1, T_2, T_3, T_4$  y escribiremos como  $a, b, c, d$  a las funciones  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , y con  $A, B, C, D$  a las syzygies que notábamos con  $a, b, c, d$ , es decir, ahora la relación  $\sum A_i f_i = 0$  se traduce a  $A.a + B.b + C.c + D.d = 0$  o  $A.a + B.b + C.c = 0$ , dependiendo del contexto. Además, ahora denotaremos por  $k$  al grado de las funciones  $A, B, C, D$ , antes denotado por  $d$ .

La pregunta que nos interesa responder es cómo obtener una ecuación implícita  $F$  que defina a la curva en cuestión como  $V(F)$ , asumiendo que se conoce una parametrización.

### 4.1.1 Moving curves

Asumiremos que siempre se trabaja sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$ . Supongamos que  $\phi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  es una aplicación (posiblemente con puntos base), cuya imagen es una curva en  $\mathbb{P}^2$ . La idea es tratar de implicitar la imagen de  $\phi$ , dada por  $\phi(s, t) = (a(s, t), b(s, t), c(s, t))$ , donde  $a, b, c \in R = \mathbb{C}[s, t]$  son polinomios homogéneos de grado  $d$ . Primero asumiremos que el mínimo común divisor, denotado por  $gcd$  es 1, es decir,  $gcd(a, b, c) = 1$ . Esto asegura que  $\phi$  no tenga puntos base. Sederberg y sus colaboradores introdujeron en [SC] y [CSC] la idea de *moving lines* en  $\mathbb{P}^1$ .

Sean  $x, y, z$  coordenadas homogéneas para  $\mathbb{P}^2$ , entonces una moving line consiste en una ecuación de la forma

$$A(s, t)x + B(s, t)y + C(s, t)z = 0$$

donde  $A, B, C \in R$  son polinomios homogéneos del mismo grado. Podemos mirar la fórmula anterior como una familia de rectas parametrizadas por  $(s, t) \in \mathbb{P}^1$ .

**4.1.1 Definición.** Se dice que la moving line  $A(s, t)x + B(s, t)y + C(s, t)z = 0$  sigue a la parametrización  $\phi(s, t) = (a(s, t), b(s, t), c(s, t))$  si

$$A(s, t)a(s, t) + B(s, t)b(s, t) + C(s, t)c(s, t) = 0$$

para todo  $(s, t) \in \mathbb{P}^1$ .

Geoméricamente esto significa que para todo  $(s, t)$  el punto yace en la recta parametrizada.

Más importante aún es la interpretación algebraica de la definición 4.1.1 que dice que  $A, B, C$  es una syzygy en  $a, b, c$ . Escribimos esto así:  $(A, B, C) \in \text{Syz}(a, b, c)$ , donde  $\text{Syz}(a, b, c) \subset R^3$  es el módulo de syzygies de  $(a, b, c)$ .

Dado que  $\text{Syz}(a, b, c)$  es un módulo graduado, podemos hablar de su  $s$ -ésima componente graduada, denotada  $\text{Syz}(a, b, c)_s$ . Veremos ahora cómo  $\text{Syz}(a, b, c)_{k-1}$  determina la ecuación implícita de la imagen de  $\phi$ .

Para ello, consideremos la aplicación de Koszul dada por  $(a, b, c)$ . Esto es

$$R_{k-1}^3 \xrightarrow{(a,b,c)} R_{2k-1},$$

estos módulos representan las piezas de grado  $k-1$  y  $2k-1$ , y como se dijo antes el morfismo  $(a, b, c)$  tiene grado  $k$ . Claramente el núcleo de este morfismo resulta  $\text{Syz}(a, b, c)_{k-1}$ . Obsérvese también que la dimensión de  $R_{k-1}^3$  es  $k+k+k=3k$ , y que la dimensión de  $R_{2k-1}$  es  $2k$ . Entonces la dimensión de  $\text{Syz}(a, b, c)_{k-1}$  resulta  $k$  si y solo si el morfismo de multiplicación por  $(a, b, c)$  tiene rango máximo.

Daremos más adelante, en 4.1.3, alguna idea de por qué este morfismo tiene rango máximo, y esto se debe a cierta condición de regularidad que satisface. Asumiremos esto por ahora. Como consecuencia se obtiene que  $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Syz}(a, b, c)_{k-1}) = k$ , de lo cual se sigue que podemos encontrar  $k$  generadores (moving lines) linealmente independientes que siguen a  $\phi$ . Escribiremos a estas moving lines como sigue:

$$A_i x + B_i y + C_i z = \sum_{j=0}^{k-1} L_{i,j}(x, y, z) s^j t^{k-1-j}, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Donde las  $L_{i,j}(x, y, z)$  son formas lineales con coeficientes en  $\mathbb{C}$ .

Uno de los resultados más importantes en este área es el siguiente:

**4.1.2 Teorema.** *Sea  $\mathcal{C}$  la imagen de  $\phi$ , y sea  $e$  el grado genérico del morfismo inducido por la aplicación  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ . Entonces  $\det(L_{i,j}) = \lambda F^e$ , donde  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$  y  $F = 0$  es la ecuación implícita (irreducible) de la curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ .*

Este teorema se puede consultar en cualquiera de los dos artículos de D. A. Cox mencionados [Cox1, Cox2].

Observemos cómo se comportan algunos números en este teorema: dado que  $a, b, c$  tienen grado  $k$ , la curva  $\mathcal{C}$  definida por  $\phi$  tiene grado  $k/e$ , donde  $e$  es el grado genérico. Se deduce que  $F^e$  tiene grado  $k$ . Por otro lado, el determinante del teorema 4.1.2 también tiene grado  $k$ , ya que  $(L_{i,j})$  es una matriz de  $k \times k$  de formas lineales.

El siguiente paso será ver con mayor profundidad cuáles son las herramientas de álgebra conmutativa involucradas en este análisis. Sea  $I = (a, b, c) \subset R$ . Entonces como  $I$  es un ideal de  $R$  se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Syz}(a, b, c) \rightarrow R(-k)^3 \xrightarrow{(a,b,c)} I \rightarrow 0.$$

En el caso de dos variables el Teorema de las Syzygies de Hilbert implica que el módulo de syzygies es libre. Más aún, usando el polinomio de Hilbert, se puede mostrar que

$$\text{Syz}(a, b, c) \simeq R(-k - \mu_1) \oplus R(-k - \mu_2), \quad \mu_1 + \mu_2 = k.$$

Este isomorfismo dice que si escribimos  $\mu = \mu_1 \leq \mu_2 = k - \mu$ , entonces existen syzygies  $p, q \in \text{Syz}(a, b, c)$  tales que

$$\text{Syz}(a, b, c) = R.p \oplus R.q$$

donde el grado de  $p$  es  $\mu$  y el de  $q$  es  $k - \mu$ . En este caso se dice que  $\{p, q\}$  es una  $\mu$ -base de la parametrización  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ .

Se tiene entonces la siguiente presentación libre del ideal  $I$

$$0 \rightarrow R(-k - \mu_1) \oplus R(-k - \mu_2) \rightarrow R(-k)^3 \xrightarrow{(a,b,c)} I \rightarrow 0.$$

La existencia de una  $\mu$ -base tiene algunas consecuencias importantes.

*4.1.3 Nota.* La existencia de una  $\mu$ -base tiene algunas consecuencias importantes:

- (a) esto implica que cada syzygy de grado  $k - 1$  puede ser escrita de forma única como  $h_1.p + h_2.q$ , donde  $h_1$  tiene grado  $k - \mu - 1$  y  $h_2$ ,  $\mu - 1$ . Como hay  $k - \mu$  elecciones linealmente independientes para  $h_1$  y  $\mu$  para  $h_2$  se deduce que hay  $k$  moving lines linealmente independientes de grado  $k - 1$  que siguen la parametrización  $\phi$ . Esto explica por qué afirmábamos que  $R_{k-1}^3 \xrightarrow{(a,b,c)} R_{2k-1}$  tiene rango máximo.

- (b) Otro aspecto interesante es que si se permite que  $h_1$  recorra todos los monomios de grado  $k - \mu - 1$  y  $h_2$  todos los de grado  $\mu - 1$ , entonces la matriz  $(L_{i,j}(x, y, z))$  resulta la matriz de Sylvester de  $p$  y  $q$ . Más precisamente, dado que  $p, q \in \text{Syz}(a, b, c)$ , podemos interpretarlos como polinomios en las variables  $x, y, z$ , de la siguiente forma  $\tilde{p} = p.(x, y, z)$  y  $\tilde{q} = q.(x, y, z)$  que, abusando de la notación, seguiremos escribiendo como  $p$  y  $q$ . Luego podemos reescribir a estos polinomios, hasta ahora pensados con coeficientes en  $R = \mathbb{C}[s, t]$  y variables  $x, y, z$ , como polinomios en  $\mathbb{C}[x, y, z][s, t]$ . En estos términos, la matriz de Sylvester de  $p$  y  $q$  indica la matriz de Sylvester asociada  $\tilde{p}$  y  $\tilde{q}$ , en las variables  $s, t$ , con coeficientes en  $x, y, z$ .

A partir de este segundo ítem se tiene el siguiente resultado que se desprende principalmente a partir del teorema 4.1.2:

**4.1.4 Corolario.** *Si  $p, q$  forman una  $\mu$ -base de la parametrización  $\phi$ . Entonces*

$$\text{Res}(p, q) = F^e,$$

donde como antes  $\mathcal{C}$  es la imagen de  $\phi$ , e el grado genérico del morfismo inducido por la aplicación  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}$  y  $F = 0$  es la ecuación implícita de la curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ .

La regularidad de un ideal  $I$ , en nuestro caso  $I = (a, b, c)$ , denotada  $\text{reg}(I)$  significa lo siguiente: como  $a, b, c \in R = \mathbb{C}[s, t]$  no tienen ceros comunes entonces fijando  $t = 1$  se tienen polinomios  $\tilde{a}(s) = a(s, 1), \tilde{b}(s) = b(s, 1), \tilde{c}(s) = c(s, 1) \in \mathbb{C}[s]$  también sin ceros comunes. Por el teorema de los ceros de Hilbert (Nullstellensatz) se sigue que estos polinomios  $\tilde{a}(s), \tilde{b}(s), \tilde{c}(s)$  generan todo el anillo  $\mathbb{C}[s]$ .

En el caso homogéneo,  $I = (a, b, c)$  no puede resultar todo el anillo  $R$ , ya que los elementos de  $I$  tienen al menos grado  $k$ . Sin embargo, es cierto que para  $k$  suficientemente grande  $I_k = R_k$ , resultado que se sigue de la versión proyectiva del Nullstellensatz. El valor a partir del cual esto sucede se denomina  $\text{reg}(I)$

La regularidad de un ideal es  $I$  es un valor  $\text{reg}(I)$  que puede calcularse a partir de una resolución libre minimal de un ideal.

Es importante destacar que la existencia de una  $\mu$ -base también tiene resultados relevantes sobre la regularidad del ideal  $I = (a, b, c)$ . A partir de la presentación libre obtenida para  $I$ , se puede probar que para este ideal  $\text{reg}(I) = 2k - \mu - 1$ . Y por lo tanto la  $\mu$ -base determina la regularidad del ideal.

### 4.1.2 Moving surfaces

Nos concentraremos ahora en el problema de implicitación de superficies en  $\mathbb{P}^3$ . Para ello consideremos  $\phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3$ , dada por polinomios homogéneos  $a, b, c, d \in R = \mathbb{C}[s, t, u]$  de grado  $k$ . Supongamos, como antes que  $a, b, c, d$  no tienen ceros comunes, esto es que  $\phi$  no tiene puntos base.

El análogo a las moving lines en  $\mathbb{P}^2$  antes estudiadas son los *moving planes* en  $\mathbb{P}^3$ . Esto es una ecuación de la forma

$$A(s, t, u)x + B(s, t, u)y + C(s, t, u)z + D(s, t, u)w = 0,$$

donde  $x, y, z, w$  son coordenadas homogéneas en  $\mathbb{P}^3$  y  $A, B, C, D$  son elementos de  $R$  del mismo grado.

**4.1.5 Definición.** Como antes, diremos que este moving plane sigue la parametrización dada por  $\phi$  si

$$A(s, t, u)a(s, t, u) + B(s, t, u)b(s, t, u) + C(s, t, u)c(s, t, u) + D(s, t, u)d(s, t, u) = 0$$

para todo  $(s, t, u) \in \mathbb{P}^2$ . Es decir, este moving plane sigue la parametrización si y solo si  $A, B, C, D \in \text{Syz}(a, b, c, d)$

Como veremos los moving planes no son suficientes para obtener la ecuación implícita de la imagen de  $\phi$ , será necesario usar *moving surfaces* de grado mayor. En este caso consideraremos las *moving quadrics*, que son ecuaciones de la forma

$$A(s, t, u)x^2 + B(s, t, u)xy + \dots + I(s, t, u)zw + J(s, t, u)w^2 = 0,$$

donde  $A, B, \dots, I, J$  son elementos de  $R$  homogéneos y del mismo grado. Se define como antes qué significa que la moving quadric siga la parametrización, idea que se corresponde con que

$$A, B, \dots, I, J \in \text{Syz}(a^2, ab, \dots, cd, d^2) \subset R^{10}.$$

En este caso, los moving planes y moving quadrics también pueden expresarse como núcleos de morfismos. Consideremos las aplicaciones

$$MP : R_{k-1}^4 \xrightarrow{(a,b,c,d)} R_{2k-1}$$

y

$$MQ : R_{k-1}^{10} \xrightarrow{(a^2, ab, \dots, cd, d^2)} R_{3k-1}$$

Obsérvese que  $\dim(R_{2k-1}) = 2k(2k+1)/2 = k(2k+1)$  y  $\dim(R_{k-1}^4) = 4(k(k+1)/2) = 2k(k+1)$  de lo cual se deduce que el espacio de moving planes tiene dimensión  $2k(k+1) - k(2k+1) = k$  si y solo si el morfismo  $MP$  tiene rango máximo. Análogamente se calcula que el espacio de moving quadrics tiene dimensión  $(k^2 + 7k)/2$  si y solo si  $MQ$  tiene rango máximo.

Es un hecho importante notar que cada moving plane da lugar a cuatro moving quadrics, que son las que se obtienen multiplicando por las cuatro variables  $x, y, z, w$ . Con lo cual, si  $MP$  y  $MQ$  tienen rango máximo, entonces hay exactamente  $(k^2 + 7k)/2 - 4k = (k^2 - k)/2$  moving quadric linealmente independientes, que no provienen de moving planes. Utilizando estas  $(k^2 - k)/2$  moving quadrics y los  $k$  moving planes, se puede construir una matriz  $M$  de  $(k^2 + k)/2 \times (k^2 + k)/2$ , donde:

- (a)  $k$  de las filas corresponden a los  $k$  moving planes de grado  $k - 1$ ;

(b)  $(k^2 - k)/2$  filas que provienen de las moving quadrics de grado  $k - 1$ .

En este caso se tiene un resultado análogo al teorema 4.1.2:

**4.1.6 Teorema.** *Sea  $\phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3$  tal que  $\phi(s, t, u) = (a(s, t, u), b(s, t, u), c(s, t, u), d(s, t, u))$ , sin puntos base, y tal que posea exactamente  $k$  moving planes linealmente independientes de grado  $k - 1$  que sigan su parametrización. Entonces la imagen de  $\phi$  está dada por  $\det(M) = 0$ , donde  $M$  es la matriz recién descrita.*

Reescribiendo esto con una notación un poco más acorde a nuestra notación anterior, donde el morfismo  $\phi$  está dado por los polinomios homogéneos de grado  $k$   $f_1, f_2, f_3, f_4$  y notamos por  $x_1, x_2, x_3$  a las variables  $s, t, u$  y por  $t_1, t_2, t_3, t_4$  a las variables  $x, y, z, w$ , entonces escribimos a los moving planes como polinomios de la forma

$$a_1(x_1, x_2, x_3)t_1 + a_2(x_1, x_2, x_3)t_2 + a_3(x_1, x_2, x_3)t_3 + a_4(x_1, x_2, x_3)t_4$$

y a las moving quadrics de la forma

$$a_{1,1}(x_1, x_2, x_3)t_1^2 + a_{1,2}(x_1, x_2, x_3)t_1t_2 + \dots + a_{3,4}(x_1, x_2, x_3)t_3t_4 + a_{4,4}(x_1, x_2, x_3)t_4^2,$$

donde los  $a_i$  y los  $a_{i,j}$  son polinomios homogéneos. Y tales que estas ecuaciones se anulan al remplazar las variables  $t_i$  por  $f_i$ .

Si tomamos  $k$  moving planes  $L_1, \dots, L_k$  y  $l = (k^2 - k)/2$  moving quadrics  $Q_1, \dots, Q_l$  de grado  $k - 1$  que sigan la parametrización, construimos una matriz cuadrada que llamamos  $M$  correspondiente al morfismo de  $\mathbb{C}[x, y, z, w]$ -módulos

$$(\oplus_{i=1}^k \mathbb{C}[x, y, z, w]) \oplus (\oplus_{j=1}^l \mathbb{C}[x, y, z, w]) \longrightarrow (\mathbb{C}[s, t, u]_{k-1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y, z, w]$$

$$(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l) \longmapsto \sum_{i=1}^k p_i L_i + \sum_{j=1}^l q_j Q_j$$

Se puede ver que siempre es posible elegir  $L_1, \dots, L_k$  y  $Q_1, \dots, Q_l$  tales que el determinante  $\det(M)$  sea no nulo y que los ceros de éste resulten la ecuación implícita de la imagen del morfismo  $\phi$  elevado a su grado. Obsérvese que nuevamente se identifica  $\mathbb{C}[s, t, u]_{k-1}$  con  $\mathbb{C}^l$ , esto permite ocultar las variables  $s, t, u$  y obtener así expresiones que sólo dependan de  $x, y, z, w$ .

## 4.2 Implicitación via Complejos de Aproximación

Recordemos el panorama del primer capítulo: teníamos  $k$  un anillo conmutativo y un morfismo graduado  $h$  de  $k$ -álgebras graduadas, que estaba definido así:

$$h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A, \quad T_i \mapsto f_i.$$

Este morfismo de  $k$ -álgebras induce un morfismo de  $k$ -esquemas proyectivos

$$\phi : \text{Proj } A - V(f_1, \dots, f_n) = \bigcup D_+(f_i) \rightarrow \bigcup D_+(T_i) = \mathbb{P}_k^{n-1}.$$

Se pretende obtener una ecuación implícita para el esquema imagen de  $\phi$ , que llamábamos la “scheme-theoretic image” de  $\phi$ .

Como hemos visto en el Lema 2.0.8, el núcleo del morfismo  $h$  define la clausura de la imagen de  $\phi$ , y con la notación de esquemas, llamando  $\mathcal{J}$  al haz de ideales  $\ker(h)^\sim$ , se tiene que  $V(\mathcal{J}) = V((\ker(h) : (T_1, \dots, T_n)^\infty)^\sim)$  en el contexto proyectivo.

En esta sección investigaremos el problema de implicitación de  $V(\mathcal{J})$  desde un enfoque diferente al de la sección anterior. Para esto, supondremos primero que  $k$  es un cuerpo y que (como ya se venía sugiriendo)  $A$  es el anillo de polinomios en las variables  $X_1, \dots, X_{n-1}$ . De esta forma los morfismos  $h$  y  $\phi$  se reescriben como:

$$h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_{n-1}], \quad T_i \mapsto f_i,$$

y

$$\phi : \mathbb{P}_k^{n-2} - V(f_1, \dots, f_n) = \bigcup D_+(f_i) \rightarrow \bigcup D_+(T_i) = \mathbb{P}_k^{n-1}.$$

Esto dice que  $\phi$  es un morfismo racional de la forma  $\phi : \mathbb{P}_k^{n-2} \dashrightarrow \mathbb{P}_k^{n-1}$ , que aplica  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (f_1, \dots, f_n)(x_1, \dots, x_{n-1})$ . Si el morfismo  $\phi$  es genéricamente finito, entonces el esquema imagen es una hipersuperficie de  $\mathbb{P}_k^{n-1}$ , y el problema de implicitación consiste en calcular explícitamente la ecuación que define al ideal principal  $\ker(h)$ .

Notaremos como antes con  $I$  al ideal formado por los polinomios homogéneos  $\{f_i\}_{i=1, \dots, n}$  de grado  $d$ , la graduación en el anillo  $A$  será la graduación estándar de un anillo de polinomios, donde  $\deg(X_i) = 1$  y  $\mathcal{L}_\bullet$ ,  $\mathcal{B}_\bullet$  y  $\mathcal{M}_\bullet$  serán los complejos de aproximación asociados a  $I$ , definidos como en el capítulo anterior.

*4.2.1 Nota.* El objetivo principal de esta sección será mostrar que bajo ciertas condiciones el complejo  $\mathcal{L}_\bullet$  es acíclico y que resulta una resolución graduada del álgebra simétrica  $\text{Sym}_A(I)$ . Veremos entonces que separando este complejo en sus partes homogéneas, se puede obtener la ecuación implícita buscada como el determinante de una de estas componentes.

La relación de esta parte del trabajo, con lo estudiado en los Capítulos 2 y 3 está dada por el siguiente resultado:

**4.2.2 Teorema.** *Si  $H_m^0(A) = 0$ , cosa que se satisface trivialmente cuando se tiene que  $A = k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ , entonces para todo  $\nu \in \mathbb{N}$*

$$\text{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(\mathcal{R}_A(I)_\nu) = \ker(h).$$

*Demostración.* Recordemos, como se mostró en 3.3 que el álgebra de Rees mencionada se presenta como  $0 \rightarrow J \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\beta} \mathcal{R}_A(I) \rightarrow 0$ , entonces escribimos  $\mathcal{R}_A(I) = A[T_1, \dots, T_n] / \ker(\beta)$ . De acuerdo con la proposición 3.3.4, se tiene que  $\ker(\beta) = (\ker(\beta) : (\mathfrak{m})^\infty)$  y por lo tanto  $\ker(h) = (\ker(\beta) : (\mathfrak{m})^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n]$ .

Ahora, dado que  $H_m^0(\mathcal{R}_A(I)) = \frac{(\ker(\beta) : (\mathfrak{m})^\infty)}{\ker(\beta)}$ , se tiene que  $H_m^0(\mathcal{R}_A(I)) = 0$ .

Por el lema siguiente, tomando  $R = A / \ker(h)$  y  $B = \mathcal{R}_A(I)$ , y usando que

$$\mathcal{R}_A(I)_0 = \frac{k[T_1, \dots, T_n]}{\ker(\beta) \cap k[T_1, \dots, T_n]} = \frac{k[T_1, \dots, T_n]}{\ker(h)},$$

se tiene que:

$$\text{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(\mathcal{R}_A(I)_\nu) = \text{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(\mathcal{R}_A(I)_0) = \ker(h)$$

□

Este resultado se deduce del siguiente lema que puede consultarse en la primera sección de [Busé].

**4.2.3 Lema.** *Sean  $R$  un anillo, y  $B = R[X_1, \dots, X_{n-1}]/I'$ , tales que  $R \cap I' = 0$ , y sea  $\eta \in \mathbb{N}$  un entero tal que  $H_{\mathfrak{m}}^0(B)_\eta = 0$ . Entonces, para todo  $\nu \in \mathbb{N}$*

$$\text{ann}_R(B_\eta) = \text{ann}_R(B_{\eta+\nu}) = H_{\mathfrak{m}}^0(B)_0.$$

A pesar de esta buena propiedad que satisface el álgebra  $\mathcal{R}_A(I)$ , para poder calcular un generador de  $\ker(h)$ , es necesario conocerle una resolución libre. Lamentablemente no existe ninguna resolución “universal” conocida de esta álgebra. Acá es donde aparece en escena, en el problema de implicitación, el álgebra simétrica de  $I$ , que vimos que bajo ciertas condiciones resulta una buena aproximación de  $\mathcal{R}_A(I)$ . Buscaremos en adelante, dar condiciones para poder calcular el generador de  $\ker(h)$  a partir de  $\text{Sym}_A(I)$ .

Como consecuencia de la graduación de los dos anillos de polinomios en cuestión  $k[T_1, \dots, T_n]$  y  $A = k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ , se tiene que  $A[T_1, \dots, T_n]$  resulta bigraduado, esto le confiere a  $\text{Sym}_A(I)$  una doble graduación, que es preservada por la presentación:

$$0 \rightarrow J' \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{\alpha} \text{Sym}_A(I) \rightarrow 0,$$

donde  $J' = \{\sum g_i T_i, \text{tales que } g_i \in A[T_1, \dots, T_n], \text{ y } \sum g_i f_i = 0\}$  según se probó al principio del capítulo 3.

Denotaremos por  $\text{Sym}_A(I)_\nu$  a la parte graduada en grado  $\nu$  de  $\text{Sym}_A(I)$ , correspondiente a la graduación de  $A$ . Para ser más preciso,  $\text{Sym}_A(I)_\nu = \bigoplus_{t \geq 0} A_\nu \text{Sym}_A^t(I)$ , y  $\text{Sym}_A^t(I)$  denota la componente de grado  $t$  respecto de la graduación en las  $T_i$ 's.

Denotemos por  $\mathfrak{m}$  al ideal maximal  $(X_1, \dots, X_{n-1})$  de  $A$ , luego  $V(\mathfrak{m}) = 0 \in \mathbb{A}_k^{n-1}$ .

**4.2.4 Proposición.** *Supongamos que  $I$  es de tipo lineal fuera de  $V(\mathfrak{m})$ , y sea  $\eta$  un entero tal que  $H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Sym}_A(I))_\nu = 0$  para todo  $\nu \geq \eta$ . Entonces*

$$\text{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(\text{Sym}_A(I)_\nu) = \ker(h)$$

para todo  $\nu \geq \eta$ .

*Demostración.* Primero repasemos brevemente algunas definiciones:

- (a)  $\text{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(\text{Sym}_A(I)_\nu) = \{f \in k[T_1, \dots, T_n] \text{ tales que } f \cdot \text{Sym}_A(I)_\nu = 0\}$ ;
- (b)  $H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Sym}_A(I)_\nu) = \{f \in \text{Sym}_A(I)_\nu \text{ tales que } f \cdot \mathfrak{m}^n = 0, \forall n \gg 0\}$ .

De acuerdo con la descripción de  $\mathbf{Sym}_A(I)$  dada, podemos reescribir (a) de la siguiente forma

$$\text{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(\mathbf{Sym}_A(I)_\nu) = \{f \in k[T_1, \dots, T_n] \text{ tales que } f \cdot A[T_1, \dots, T_n]_\nu \subset \ker(\alpha)\}, \quad (4.1)$$

del mismo modo se reescribe la condición  $H_{\mathfrak{m}}^0(\mathbf{Sym}_A(I)_\nu) = 0$  como

$$\{f \in A[T_1, \dots, T_n]_\nu \text{ tales que } \exists n \in \mathbb{N}, f \cdot \mathfrak{m}^n \subset \ker(\alpha)\} = \ker(\alpha)_\nu \quad (4.2)$$

Por el Lema 4.2.3 recién enunciado, la hipótesis  $H_{\mathfrak{m}}^0(\mathbf{Sym}_A(I)) = 0$  para  $\nu \geq \eta$  implica que

$$\text{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(\mathbf{Sym}_A(I)_\nu) = \text{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(\mathbf{Sym}_A(I)_\eta) = H_{\mathfrak{m}}^0(\mathbf{Sym}_A(I))_0.$$

Dado que  $H_{\mathfrak{m}}^0(A) = 0$  porque  $A = k[X_1, \dots, X_{n-1}]$  es íntegro, a partir de la Proposición 3.3.4 se tiene que  $\ker(h) = ((\ker(\beta)) : \mathfrak{m}^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n]$ . Y entonces como  $\ker(\alpha) \subset \ker(\beta)$ , se deduce que:

$$\ker(h) = ((\ker(\beta)) : \mathfrak{m}^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n] \supset ((\ker(\alpha)) : \mathfrak{m}^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n].$$

Por otro lado, como  $I$  es de tipo lineal fuera de  $V(\mathfrak{m})$  por la Proposición 3.3.5 se tiene que

$$\ker(h) = ((\ker(\alpha)) : \mathfrak{m}^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n] = ((\ker(\beta)) : \mathfrak{m}^\infty) \cap k[T_1, \dots, T_n].$$

□

**4.2.5 Corolario.** *Se deduce de la demostración que basta con que  $H_{\mathfrak{m}}^0(\mathbf{Sym}_A(I)_\nu) = 0$  para que*

$$\text{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(\mathbf{Sym}_A(I)_\nu) \subset \ker(h)$$

para todo  $\nu \geq \eta$ .

A partir de acá supondremos que el morfismo  $\phi : \text{Proj } A \dashrightarrow \mathbb{P}_k^n$  es genéricamente finito, lo cual implica que la imagen de  $\phi$  define una hipersuperficie en  $\mathbb{P}_k^n$  y por lo tanto el ideal  $\ker(h)$  es principal. Denotemos por  $H$  a la ecuación libre de cuadrados que define a la clausura de la imagen de  $\phi$ , que está bien definida salvo una constante no nula en  $k$ .

Primero trataremos el problema de implícitación de la imagen de  $\phi$ , para el caso en que  $I$  y  $\mathfrak{m}$  tengan el mismo radical, es decir que  $V(I) = V(\mathfrak{m})$  en  $\text{Spec } A$ , lo cual equivale a decir que  $\phi$  no tenga puntos base.

Supongamos entonces que  $V(I)$  es vacío en  $\text{Proj } A$ . Bajo esta hipótesis, usando la Proposición 3.7.3 se tiene que el complejo  $\mathcal{L}_\bullet$  es acíclico ya que  $\text{depth}(\mathfrak{m} : A) = n - 1$ .

Se obtiene entonces el complejo exacto siguiente:

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{n-1} \rightarrow \mathcal{L}_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbf{Sym}_A(I) \rightarrow 0.$$

Recordemos que tanto  $\mathcal{L}_i$  como  $A[T_1, \dots, T_n]$  y  $\mathbf{Sym}_A(I)$  son bigraduadas. Denotaremos con  $(\mathcal{L}_i)_\nu$  como  $A_\nu[T_1, \dots, T_n]$  y  $\mathbf{Sym}_A(I)_\nu$  a las respectivas componentes homogéneas de grado  $\nu$  respecto de la graduación de  $A$ .

Todo esto sugiere que bajo las hipótesis que se precisaron recientemente, podemos calcular  $\ker(h)$  como el invariante de MacRae  $\mathfrak{S}(\mathrm{Sym}_A(I)_\nu)$ , que es el determinante del complejo  $(\mathcal{Z}_\bullet)_\nu$ , para  $\nu \geq \eta$ . Esto se precisa en el caso en que  $V(I)$  es vacío en  $\mathrm{Proj} A$  en el siguiente teorema.

Para la definición y algunos resultados conocidos sobre el determinante de un complejo ver el Apéndice, sección 2, o para mayor detalle, consultar el Apéndice del libro [GKZ].

**4.2.6 Teorema.** *Supongamos como antes que  $\mathrm{rad}(I) = \mathrm{rad}(\mathfrak{m})$ . Sea  $\eta$  un entero tal que  $H_{\mathfrak{m}}^0(\mathrm{Sym}_A(I))_\nu = 0$  para todo  $\nu \geq \eta$ . Entonces el determinante de la parte homogénea de grado  $\nu$  del complejo*

$$0 \rightarrow (\mathcal{Z}_{n-1})_\nu \rightarrow (\mathcal{Z}_{n-2})_\nu \rightarrow \dots \rightarrow (\mathcal{Z}_1)_\nu \rightarrow A_\nu[T_1, \dots, T_n]$$

es exactamente  $H^{\mathrm{deg}(\phi)}$ , de grado  $d^{n-2}$ .

*Demostración.* Recordemos que como  $\mathrm{rad}(I) = \mathrm{rad}(\mathfrak{m})$ , a partir de las Observaciones 3.7.1 y 3.7.2 se tiene que los módulos de homología  $H_i(\mathcal{K}_\bullet)$  del complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\mathcal{K}_\bullet = \mathcal{K}_\bullet(\mathbf{x}; A)$ , están soportados en  $V(\mathfrak{m})$ , y por lo tanto  $H_i(\mathcal{Z}_\bullet)$  y  $H_i(\mathcal{M}_\bullet)$  también, para todo  $i$ . Luego por la Proposición 3.6.5  $I$  resulta de tipo lineal fuera de  $V(\mathfrak{m})$ .

Fijemos  $\nu \geq \eta$ . Por el Teorema 4.2.2, se tiene que

$$\mathrm{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(H_0((\mathcal{Z}_\bullet)_\nu)) = \ker(h) = (H).A.$$

Por la Proposición 3.7.3 el complejo  $\mathcal{Z}_\bullet$  asociado a  $I$  es acíclico, ahora, a partir de algunas propiedades sobre determinantes de complejos, que se pueden consultar en [K-M], se tiene que:

$$\det((\mathcal{Z}_\bullet)_\nu) = \mathrm{div}(H_0((\mathcal{Z}_\bullet)_\nu)) = \mathrm{length}((\mathrm{Sym}_A(I)_\nu)_{(H)}).[H].$$

Faltaría probar que  $\mathrm{length}((\mathrm{Sym}_A(I)_\nu)_{(H)}).[H] = \mathrm{deg}(\phi)$ . Esto se desprende de la demostración de la fórmula sobre el grado 5.1.4 enunciada en el Apéndice. De ahí mismo sale que  $H^{\mathrm{deg}(\phi)}$  tiene grado  $d^{n-2}$ .  $\square$

*4.2.7 Nota.* Se puede probar que si  $d \geq 1$  y el morfismo  $\phi$  no tiene puntos base, entonces éste es genéricamente finito.

A partir del Teorema 5 enunciado en el apéndice, se tiene el siguiente resultado:

**4.2.8 Proposición.** *Bajo las hipótesis del Teorema 4.2.6,  $H^{\mathrm{deg}(\phi)}$  se puede calcular como el máximo común divisor de los menores maximales del morfismo de  $k[T_1, \dots, T_n]$ -módulos con el que el complejo  $\mathcal{Z}_\bullet$  termina, es decir:*

$$(\mathcal{Z}_1)_\nu \xrightarrow{dT} A_\nu[T_1, \dots, T_n],$$

para todo  $\nu \geq \eta$ .

Es posible además, dar una cota específica para el valor  $\eta$  mencionado. Recordemos que para el caso de las “moving curves y surfaces” los tamaños de las matrices en cuestión eran conocidos *a priori* y estaban relacionados con un cierto valor llamado *la regularidad*; de la misma forma este valor  $\eta$  depende de ciertas características intrínsecas del ideal  $I$ .

**4.2.9 Proposición.** *Sea  $n \geq 3$  y supongamos como antes que los ideales  $I$  y  $\mathfrak{m}$  tienen el mismo radical. Entonces  $H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Sym}_A(I))_{\nu} = 0$  para todo  $\nu \geq (n-2)(d-1)$ .*

La demostración de este resultado es un poco técnica y la dejamos para que el lector la consulte en Proposición 5.5 de [B-J]. La idea consiste en ver que  $H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Sym}_A(I))_{\nu} = 0$  para todo  $\nu$  tal que  $H_{\mathfrak{m}}^i(\mathcal{Z}_i)_{\nu} = 0$  para todo  $i$ , a partir de calcular una sucesión espectral asociada a un cierto complejo doble.

En lo que sigue analizaremos el problema de implícitación para cuando  $\phi$  presenta puntos base. Debido a que el tratamiento de este caso en toda su generalidad aún no se conoce, supodremos aquí que la variedad de puntos base que está dada por los ceros de  $I = (f_1, \dots, f_n)$ , es una intersección completa local en  $\text{Proj } A$  (como se definió en 3.7.4) de codimensión  $n-2$ . Entonces se tiene que  $V(I) \subset \mathbb{P}_k^{n-2}$  está localmente generado por una sucesión regular y  $\text{depth}(I : A) = n-2 < \text{depth}(\mathfrak{m} : A) = n-1$ . A partir de la Proposición 3.7.5 se tiene que el complejo  $\mathcal{Z}_{\bullet}$  resulta acíclico. De la misma forma en la que se procedió antes, para el caso en que no había puntos base, este complejo resulta una resolución proyectiva de  $\text{Sym}_A(I)$ , es decir, el complejo

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}_{n-1} \rightarrow \mathcal{Z}_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{Z}_1 \rightarrow A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \text{Sym}_A(I) \rightarrow 0$$

resulta exacto.

De esta forma se obtiene un resultado análogo al obtenido en el contexto sin puntos base:

**4.2.10 Teorema.** *Sea  $I = (f_1, \dots, f_n)$  una intersección completa local en  $\text{Proj } A$  de codimensión  $n-2$ , tal que la aplicación  $\phi$  es genéricamente finita. Sea  $\eta$  un entero tal que  $H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Sym}_A(I))_{\nu} = 0$  para todo  $\nu \geq \eta$ . Entonces el determinante de la parte homogénea de grado  $\nu$  del complejo*

$$0 \rightarrow (\mathcal{Z}_{n-1})_{\nu} \rightarrow (\mathcal{Z}_{n-2})_{\nu} \rightarrow \dots \rightarrow (\mathcal{Z}_1)_{\nu} \rightarrow A_{\nu}[T_1, \dots, T_n]$$

es exactamente  $H^{\text{deg}(\phi)}$ , de grado  $d^{n-2} - \dim_k \Gamma(\text{Proj } A/I, \mathcal{O}_{\text{Proj } A/I})$ .

*Demostración.* Razonando como en la Observación 3.7.1, si  $I$  es localmente una intersección completa en  $\text{Proj } (A)$ , entonces los módulos de homología  $H_i(\mathcal{K}_{\bullet})$  del complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\mathcal{K}_{\bullet} = \mathcal{K}_{\bullet}(\mathbf{x}; A)$  están soportados en  $V(\mathfrak{m})$ , es decir, verifican que  $H_i(\mathcal{K}_{\bullet})_{\mathfrak{p}} = 0$  para  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ . De acuerdo con esto,  $H_i(\mathcal{M}_{\bullet})_{\mathfrak{p}} = 0$  para todo  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$  y para todo  $i > 0$ . Consecuentemente,  $I$  es de tipo lineal fuera de  $V(\mathfrak{m})$ .

Fijemos  $\nu \geq \eta$ . Por el Teorema 4.2.2, se tiene que

$$\text{ann}_{k[T_1, \dots, T_n]}(H_0((\mathcal{Z}_{\bullet})_{\nu})) = \ker(h) = (H) \cdot A .$$

Por la Proposición 3.7.5 el complejo  $\mathcal{L}_\bullet$  asociado a  $I$  es acíclico. Similarmente, como en el Teorema 4.2.6, se obtiene que

$$\det((\mathcal{L}_\bullet)_\nu) = H^{\deg(\phi)},$$

y por el Teorema 5.1.4 se tiene que, como  $V(I)$  es localmente una intersección completa, el polinomio  $H^{\deg(\phi)}$  es de grado  $d^{n-2} - \dim_k \Gamma(\text{Proj } A/I, \mathcal{O}_{\text{Proj } A/I})$ .  $\square$

Nuevamente, a partir del Teorema 5 se tiene que:

**4.2.11 Proposición.** *Bajo las hipótesis del Teorema 4.2.10,  $H^{\deg(\phi)}$  se puede calcular como el máximo común divisor de los menores maximales del morfismo de  $k[T_1, \dots, T_n]$ -módulos con el que el complejo  $\mathcal{L}_\bullet$  termina, es decir:*

$$(\mathcal{L}_1)_\nu \xrightarrow{d_T} A_\nu[T_1, \dots, T_n],$$

para todo  $\nu \geq \eta$ .

Análogamente a lo hecho en la Proposición 4.2.9, es posible dar una cota específica para  $\eta$ , como se enuncia en el siguiente resultado:

**4.2.12 Proposición.** *Sea  $n \geq 3$  y supongamos que el ideal  $I = (f_1, \dots, f_n)$  es una intersección completa local en  $\text{Proj } A$  de codimensión  $n - 2$ . Entonces  $H_m^0(\mathbf{Sym}_A(I))_\nu = 0$  para todo  $\nu \geq (n - 2)(d - 1)$ .*

La demostración de este resultado es similar a la Proposición 4.2.9 y puede ser consultada en [B-J].

A continuación se presentan algunos resultados que extienden lo presentado precedentemente en este capítulo y que resumen los últimos avances en este área. Recordemos que si  $I$  es un ideal de una  $k$ -álgebra  $\mathbb{Z}$ -graduada  $A$ , denotamos  $\epsilon_I = \text{indeg}(I) = \inf\{\nu \in \mathbb{Z} \text{ tales que } I_\nu \neq 0\}$ .

**4.2.13 Teorema.** *Sea  $I = (f_1, \dots, f_n)$  un ideal de  $A$  de codimensión  $n - 2$  en  $\text{Proj } A$ . Sea  $\eta := (n - 1)(d - 1) - \epsilon_I$ .*

(a) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $V(I)$  está localmente definido por a lo sumo  $n - 1$  ecuaciones;
2.  $\mathcal{L}_\bullet$  es acíclico;
3.  $(\mathcal{L}_\bullet)_\nu$  es acíclico para  $\nu \gg 0$ .

(b) Si  $\mathcal{L}_\bullet$  es acíclico, entonces:

$$\det((\mathcal{L}_\bullet)_\nu) = \mathfrak{S}(\mathbf{Sym}_A(I)_\nu) = H^{(\deg(\phi))}G = \mathfrak{F}(\mathbf{Sym}_A(I)_\nu),$$

para cada  $\nu \geq \eta$ .

$G \neq 0$  es un polinomio constante si y solo si  $V(I)$  es localmente una intersección completa en  $\text{Proj}(A)$ .

(c) Además, las siguientes cuatro afirmaciones también resultan equivalentes:

1.  $V(I)$  es localmente de tipo lineal;
2.  $V(I)$  es localmente una intersección completa;
3.  $\text{Proj}(\mathbf{Sym}_A(I)) = \text{Proj}(\mathcal{R}_A(I))$ ;
4.  $G = 1$ , es decir:  $\det((\mathcal{L}_\bullet)_\nu) = \mathfrak{S}(\mathbf{Sym}_A(I)_\nu) = H^{(\deg(\phi))}$  para todo  $\nu \geq \eta$ .

4.2.14 *Nota.* Recordemos que se tiene  $\alpha : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathbf{Sym}_A(I)$  suryectivo, como  $A = k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ , se tiene que existe un morfismo inyectivo  $\text{Proj}(\mathbf{Sym}_A(I)) \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{n-1} \times \mathbb{P}_k^n$ . Con la notación del teorema anterior, se tiene que

$$\mathfrak{S}(\mathbf{Sym}_A(I)_\nu) = (\pi_2)_*(\text{Proj}(\mathbf{Sym}_A(I))) \simeq k[T_1, \dots, T_n](-d^{n-2} + \sum_{x \in V(I)} d_x),$$

para cada  $\nu \geq (n-1)(d-1) - \epsilon_I$ . Esto dice que el grado de  $G$  es la suma de los números que miden cuán lejos está  $V(I)$  de ser una intersección completa en cada uno de sus puntos. Más precisamente

$$\deg(G) = \sum_{x \in V(I)} (e_x - d_x),$$

donde  $e_x := e(J_x, R_x)$  es la multiplicidad en  $x$  y se define como en 5.1, y  $d_x$  es llamado grado de  $A/I$  en  $x$  y se define como  $d_x := \dim_{A_x/x.A_x}(A_x/I_x)$ .

### 4.3 Algunas consideraciones especiales para Curvas y Superficies

En esta sección nos centraremos en analizar para el caso de curvas y superficies la teoría desarrollada en la sección anterior. Estos casos resultan particularmente interesantes, no sólo porque son los que permiten mayor contraste empírico, sino porque son aquellos que fueron estudiados por Sederberg et al. mediante los métodos de moving curves y moving surfaces.

Complementaremos el enfoque teórico antes desarrollado, con una visión más computacional del problema, es decir, presentaremos aquí métodos efectivos para calcular las fórmulas mencionadas.

A continuación expondremos una versión algorítmica de los Teoremas 4.2.6 y 4.2.10 para el caso en que  $n = 3$  y  $n = 4$ . Esto no sólo es beneficioso porque permite hacer efectivo el cálculo de ecuaciones implícitas para dimensiones bajas, sino que además estos procedimientos sólo involucran rutinas de álgebra lineal.

### 4.3.1 El Algoritmo para Curvas Projectivas

Con la notación establecida en el capítulo anterior, para  $n = 3$ , el complejo  $\mathcal{L}_\bullet$  es

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow A[T_1, T_2, T_3] \rightarrow 0,$$

donde los objetos son

$$\mathcal{L}_i = Z_i(\mathcal{K})[di] \otimes_A A[T_1, T_2, T_3],$$

y  $\mathcal{K}$  denota el complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\{f_1, f_2, f_3\}$  en el anillo  $A = k[X_1, X_2]$ . Si denotamos  $v_3, v_2, v_1$  a los morfismos de este complejo, se tiene que:

*4.3.1 Observación.* En el lenguaje de las moving lines introducido en 4.1.1, la imagen de una terna  $(g_1, g_2, g_3) \in (\mathcal{L}_1)_\nu$ , vía el morfismo  $v_1$ , no es más que una moving line de grado  $\nu$  que sigue a la curva parametrizada por los polinomios  $f_1, f_2, f_3$ . Además como alguno de los  $f_i$  es no nulo, se tiene que  $Z_3(\mathcal{K}) = 0$  y por lo tanto  $\mathcal{L}_3 = 0$

En este caso, los teoremas 4.2.6 y 4.2.10 se rescriben como:

### 4.3.2 Teorema. El determinante del complejo

$$0 \rightarrow (\mathcal{L}_2)_{d-1} \rightarrow (\mathcal{L}_1)_{d-1} \rightarrow (\mathcal{L}_0)_{d-1},$$

coincide con  $H^{\deg(\phi)}$ , donde  $H$  es la ecuación implícita de la curva  $\mathcal{C}$  que describen los polinomios  $f_1, f_2, f_3$ .

Más aún, si  $\delta := \gcd(f_1, f_2, f_3) = 0$ , entonces  $(\mathcal{L}_2)_{d-1} = 0$  y el determinante de la matriz del morfismo  $v_1 : (\mathcal{L}_1)_{d-1} \rightarrow (\mathcal{L}_0)_{d-1}$  resulta  $H^{\deg(\phi)}$ .

La segunda afirmación de este teorema da exactamente la matriz construida por el método de las moving lines. La primera afirmación muestra que este método puede ser extendido al caso en que no se asuma  $\deg(\delta) = 0$ , siendo así  $H^{\deg(\phi)}$  obtenido como el cociente de los determinantes de dos matrices, de tamaño  $d \times d$  y  $\deg(\delta) \times \deg(\delta)$  respectivamente.

A continuación, convertimos el teorema recién enunciado en un algoritmo que sólo involucra eficientes rutinas de álgebra lineal.

### 4.3.3 ALGORITMO (Algoritmo de implicitación de curvas racionales projectivas en $\mathbb{P}_k^2$ ).

$$\begin{aligned} \delta &:= \gcd(f_1, f_2, f_3); \\ r_1 &:= \text{rg}((\mathcal{L}_1)_{d-1}); \\ r_2 &:= \text{rg}((\mathcal{L}_2)_{d-1}); \end{aligned}$$

⇐ **INPUT:** Tres polinomios homogéneos  $f_1(X_1, X_2)$ ,  $f_2(X_1, X_2)$  y  $f_3(X_1, X_2)$ , de grado  $d \geq 1$ , tal que  $\deg(\delta) < d$ .

⇒ **OUTPUT:**

- si  $\deg(\text{mcd}(f_1, f_2, f_3)) = 0$ , entonces la matriz  $\Delta_1$  es cuadrada y  $\det(\Delta_1) = H^{\deg(\phi)}$ . **return:**  $\Delta_1$ ;
- o bien, se obtienen dos matrices  $\Delta_1, \Delta_2$  respectivamente de tamaño  $d \times d$  y  $\deg(\delta) \times \deg(\delta)$ , tales que  $\frac{\det(\Delta_1)}{\det(\Delta_2)} = H^{\deg(\phi)}$ . **return:**  $\Delta_1, \Delta_2$ ;

### PROCEDIMIENTO:

- (a) Calcular la matriz  $F_1$  del primer morfismo  $A_{d-1}^3 \rightarrow A_{2d-1}$  de Koszul, en la cual cada entrada es o bien 0 o bien un coeficiente de  $f_1, f_2, f_3$ , y  $F_1$  es una matriz de tamaño  $2d \times 3d$ .
- (b) Calcular la matriz asociada al núcleo de  $F_1$ , que denotaremos por  $K_1$ , que tiene tamaño  $r_1 \times 3d$ .
- (c) Construir la matriz  $M_1$  definida por:
 
$$(M_1)_{(i,j)} := T_1 \cdot (K_1)_{(j,i)} + T_2 \cdot (K_1)_{(j,i+d)} + T_3 \cdot (K_1)_{(j,i+2d)},$$
 con  $i = 1, \dots, d$  y  $j = 1, \dots, r_1$ . Esta es la matriz asociada al morfismo  $(\mathcal{Z}_1)_{d-1} \rightarrow (\mathcal{Z}_0)_{d-1}$ .
- (d) **if**  $M_1$  es cuadrada **then** definimos  $\Delta_1 := M_1$ . **else:**
  1. Computar una lista  $L_1$  de  $d$  enteros indexando columnas independientes de  $M_1$ . Sea  $\Delta_1$  la matriz de  $d \times d$  que se obtiene quitando las columnas que no están en  $L_1$ .
  2. Computar la matriz  $F_2$  correspondiente al segundo morfismo  $A_{d-1}^3 \rightarrow A_{2d-1}^3$ , de Koszul, y la matriz correspondiente al núcleo de este morfismo, de dimensión  $3d \times r_2$ .
  3. Construir la matriz  $M'_2$  formada por: Para cada  $j = 1, \dots, r_2$ 
    - \* **if**  $i = 1, \dots, d \Rightarrow (M'_2)_{(i,j)} := T_2 \cdot (K_2)_{(j,i)} + T_3 \cdot (K_2)_{(j,i+d)}$ ; **else:**
    - \* **if**  $i = d + 1, \dots, 2d \Rightarrow (M'_2)_{(i,j)} := -T_1 \cdot (K_2)_{(j,i-d)} + T_3 \cdot (K_2)_{(j,i+d)}$ ; **else:**
    - \* **if**  $i = 2d + 1, \dots, 3d \Rightarrow (M'_2)_{(i,j)} := -T_1 \cdot (K_2)_{(j,i-d)} - T_2 \cdot (K_2)_{(j,i)}$ .**endif**
  4. Construir la matriz  $M_2$  de tamaño  $r_1 \times r_2$ , tal que la columna  $j$ , es decir  $(M_2) \cdot e_j$ , es solución del sistema lineal  $((M_2) \cdot e_j)^t \cdot K_1 = M'_2 \cdot e_j$ , donde  $e_j$  es el  $j$ -ésimo vector canónico. Esta es la matriz del morfismo  $(\mathcal{Z}_2)_{d-1} \rightarrow (\mathcal{Z}_1)_{d-1}$ .
  5. Definimos  $\Delta_2$  como la matriz formada a partir de  $M_2$ , extrayendo las filas indexadas en  $L_1$ .

**endif**

### 4.3.2 El Algoritmo para Superficies Proyectivas

El problema aquí es computar una ecuación implícita para la imagen de un morfismo dado por polinomios  $f_1, f_2, f_3, f_4$  homogéneos de grado  $d$ , que describen una superficie  $S$  en  $\mathbb{P}_k^3$ . En esta situación las cosas son menos sencillas que antes, ya que aquí no siempre es posible eliminar los puntos base, y estos pueden resultar de naturaleza variada.

Si llegara a haber puntos base, la componente de dimensión 1 del base locus puede ser fácilmente eliminada dividiendo cada  $f_i$  por el máximo común divisor entre ellas, denotado por  $\delta$ . Esto permite suponer que el ideal  $I$  tiene codimensión al menos 2 en  $k[X_1, X_2, X_3]$ , y por lo tanto, define un conjunto de puntos aislados en  $\mathbb{P}_k^2$ .

En este contexto, lo desarrollado en la sección anterior puede resumirse en el siguiente resultado:

**4.3.4 Teorema.** *Supongamos que el ideal  $I = (f_1, f_2, f_3, f_4)$  tiene codimensión al menos 2 en  $A$ . Sea  $V(I)$  el esquema de puntos base, y denotemos por  $I^{\text{sat}}$  a su saturación respecto del maximal  $\mathfrak{m} = (X_1, X_2, X_3)$  de  $A$ . Entonces*

- (a) *El complejo  $\mathcal{Z}_\bullet$  es acíclico si y solo si  $V(I)$  localmente está definido por 3 ecuaciones.*
- (b) *Asumamos que  $V(I)$  está localmente definido por 3 ecuaciones, entonces para todo entero  $\nu \geq \nu_0 := 2(d-1) - \text{indeg}(I^{\text{sat}})$ , el determinante del complejo:*

$$0 \rightarrow (\mathcal{Z}_3)_\nu \rightarrow (\mathcal{Z}_2)_\nu \rightarrow (\mathcal{Z}_1)_\nu \rightarrow (\mathcal{Z}_0)_\nu = A_\nu[T_1, T_2, T_3, T_4],$$

*es un elemento homogéneo de grado  $d^2 - \sum_{x \in V(I)} d_p$ , y es un múltiplo de  $H^{\text{deg}(\phi)}$ , donde  $H$  es la ecuación implícita de la superficie  $S$  que describen los polinomios  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .*

*Es exactamente  $H^{\text{deg}(\phi)}$  si y solo si  $I$  es una intersección completa local.*

- (c) *Más aún, en el caso anterior, para todo  $\nu \in \mathbb{Z}$ ,  $(\mathcal{Z}_3)_\nu$  es siempre un  $k[T_1, T_2, T_3, T_4]$ -módulo de rango  $\frac{(\nu-d+2)(\nu-d+3)}{2}$  (o 0 si este valor es negativo). En particular,  $(\mathcal{Z}_3)_\nu = 0$  si y solo si  $\nu \leq d-1$ .*
- (d) *Más aún, en esta misma situación, si  $\nu \geq \nu_0$ , todo menor maximal no nulo de tamaño  $(\nu+2)(\nu+1)/2$  de la matriz del morfismo  $v_1 : (\mathcal{Z}_1)_\nu \rightarrow A_\nu[T_1, T_2, T_3, T_4] = (\mathcal{Z}_0)_\nu$  resulta un múltiplo no nulo de  $H^{\text{deg}(\phi)}$ ; y si  $V(I)$  es una intersección completa local, entonces el gcd de estos menores maximales coincide con  $H^{\text{deg}(\phi)}$ .*

Como en el caso de curvas, daremos a continuación una versión algorítmica de este teorema.

**4.3.5 ALGORITMO** (Algoritmo de implicitación de superficies racionales proyectivas en  $\mathbb{P}_k^3$ ).

$$\begin{aligned} \delta &:= \gcd(f_1, f_2, f_3); \\ r_1 &:= \text{rg}((\mathcal{Z}_1)_\nu); \\ r_2 &:= \text{rg}((\mathcal{Z}_2)_\nu); \end{aligned}$$

⇐ **INPUT:** Cuatro polinomios homogéneos:

$$f_1(X_1, X_2, X_3), f_2(X_1, X_2, X_3), f_3(X_1, X_2, X_3) \text{ y } f_4(X_1, X_2, X_3),$$

de grado  $d \geq 1$ , tales que el ideal  $I := (f_1, f_2, f_3, f_4) \subset A$  esté localmente generado por 3 elementos fuera de  $V(X_1, X_2, X_3)$  y al menos codimensión 2. Y un valor entero  $\nu := 2d - 2$ .

⇒ **OUTPUT:**

- si la matriz  $\Delta_1$  es cuadrada, entonces  $\det(\Delta_1) = \det((\mathcal{L}_\bullet)_\nu)$ . **return:**  $\Delta_1$ ;
- o bien, se obtienen dos matrices  $\Delta_1, \Delta_2$  cuadradas tales que  $\frac{\det(\Delta_1)}{\det(\Delta_2)} = \det((\mathcal{L}_\bullet)_\nu)$ . **return:**  $\Delta_1, \Delta_2$ ;
- o bien, se obtienen tres matrices  $\Delta_1, \Delta_2$  y  $\Delta_3$  cuadradas tales que  $\frac{\det(\Delta_1)\det(\Delta_3)}{\det(\Delta_2)} = \det((\mathcal{L}_\bullet)_\nu)$ . **return:**  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ .

### PROCEDIMIENTO:

- (a) Calcular la matriz  $F_1$  del primer morfismo  $A_\nu^4 \rightarrow A_{\nu+d}$  de Koszul, en la cual cada entrada es o bien 0 o bien un coeficiente de  $f_1, f_2, f_3$ , y  $F_1$  es una matriz de tamaño  $2d \times 3d$ .
- (b) Calcular la matriz asociada al núcleo de  $F_1$ , que denotaremos por  $K_1$ .
- (c) Sea  $m := (\nu + 2)(\nu + 1)/2$ .
- (d) Construir la matriz  $M_1$  definida por:
 
$$(M_1)_{(i,j)} := T_1 \cdot (K_1)_{(j,i)} + T_2 \cdot (K_1)_{(j,i+m)} + T_3 \cdot (K_1)_{(j,i+2m)} + T_4 \cdot (K_1)_{(j,i+3m)},$$
 con  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, r_1$ . Esta es la matriz asociada al morfismo  $(\mathcal{L}_1)_\nu \rightarrow (\mathcal{L}_0)_\nu$ .
- (e) **if**  $M_1$  es cuadrada **then** definimos  $\Delta_1 := M_1$ . **else:**
  1. Computar una lista  $L_1$  de  $m$  enteros indexando columnas independientes de  $M_1$ . Sea  $\Delta_1$  la matriz de  $m \times m$  que se obtiene quitando las columnas que no están en  $L_1$ .
  2. Computar la matriz  $F_2$  correspondiente al segundo morfismo  $A_\nu^6 \rightarrow A_{\nu+d}^4$ , de Koszul, y la matriz correspondiente al núcleo de este morfismo,  $K_2$ , que tiene  $r_2$  columnas.
  3. Construir la matriz  $M'_2$  formada por: Para cada  $j = 1, \dots, r_2$ 
    - \* **if**  $i = 1, \dots, m$  ⇒  $(M'_2)_{(i,j)} := -T_2 \cdot (K_2)_{(j,i)} - T_3 \cdot (K_2)_{(j,i+m)} - T_4 \cdot (K_2)_{(j,i+3m)}$ ; **else:**
    - \* **if**  $i = m + 1, \dots, 2m$  ⇒  $(M'_2)_{(i,j)} := T_1 \cdot (K_2)_{(j,i-m)} + T_3 \cdot (K_2)_{(j,i+m)} - T_4 \cdot (K_2)_{(j,i+3m)}$ ; **else:**
    - \* **if**  $i = 2m + 1, \dots, 3m$  ⇒  $(M'_2)_{(i,j)} := T_1 \cdot (K_2)_{(j,i-m)} + T_2 \cdot (K_2)_{(j,i)} - T_4 \cdot (K_2)_{(j,i+3m)}$ ; **else:**

\* **if**  $i = 3m + 1, \dots, 4m \Rightarrow (M'_2)_{(i,j)} := T_1 \cdot (K_2)_{(j,i)} + T_2 \cdot (K_2)_{(j,i+m)} + T_3 \cdot (K_2)_{(j,i+2m)}$ .  
**endif**

4. Construir la matriz  $M_2$  de tamaño  $r_1 \times r_2$ , tal que la columna  $j$ , es decir  $(M_2) \cdot e_j$ , es solución del sistema lineal  $((M_2) \cdot e_j)^t \cdot K_1 = M'_2 \cdot e_j$ , donde  $e_j$  es el  $j$ -ésimo vector canónico. Esta es la matriz del morfismo  $(\mathcal{Z}_2)_\nu \rightarrow (\mathcal{Z}_1)_\nu$ .

5. Definimos  $\Delta'_2$  como la submatriz de  $M_2$  que se obtiene al quitar las columnas indexadas en  $L_1$ .

**if**  $\Delta'_2$  es cuadrada **then**  $\Delta_2 := \Delta'_2$  **else:**

i. Computar una lista  $L_2$  de enteros indexando columnas independientes de  $\Delta'_2$  (que son  $m$ ). Sea  $\Delta_2$  la matriz cuadrada que se obtiene quitando las columnas que no están en  $L_2$ .

ii. Computar la matriz  $F_3$  correspondiente al tercer morfismo  $A_\nu^4 \rightarrow A_{\nu+d}^6$ , de Koszul, y la matriz correspondiente al núcleo de este morfismo,  $K_3$ , que tiene  $r_3$  columnas.

iii. Construir la matriz  $M'_3$  formada por: Para cada  $j = 1, \dots, r_3$

\* **if**  $i = 1, \dots, m \Rightarrow (M'_3)_{(i,j)} := -T_3 \cdot (K_2)_{(j,i)} + T_4 \cdot (K_2)_{(j,i+m)}$ ;  
**else:**

\* **if**  $i = m+1, \dots, 2m \Rightarrow (M'_2)_{(i,j)} := -T_3 \cdot (K_2)_{(j,i-m)} + T_4 \cdot (K_2)_{(j,i+m)}$ ;  
**else:**

\* **if**  $i = 2m+1, \dots, 3m \Rightarrow (M'_2)_{(i,j)} := T_1 \cdot (K_2)_{(j,i-2m)} + T_3 \cdot (K_2)_{(j,i-m)}$ ;  
**else:**

\* **if**  $i = 3m+1, \dots, 4m \Rightarrow (M'_2)_{(i,j)} := -T_2 \cdot (K_2)_{(j,i-2m)} - T_3 \cdot (K_2)_{(j,i-m)}$ ;  
**else:**

\* **if**  $i = 4m+1, \dots, 5m \Rightarrow (M'_2)_{(i,j)} := T_1 \cdot (K_2)_{(j,i-3m)} - T_3 \cdot (K_2)_{(j,i-m)}$ ;  
**else:**

\* **if**  $i = 5m+1, \dots, 6m \Rightarrow (M'_2)_{(i,j)} := T_1 \cdot (K_2)_{(j,i-3m)} + T_2 \cdot (K_2)_{(j,i-2m)}$ .  
**endif**

iv. Construir la matriz  $M_3$  de tamaño  $r_2 \times r_3$ , tal que la columna  $j$ , es decir  $(M_3) \cdot e_j$ , es solución del sistema lineal  $((M_3) \cdot e_j)^t \cdot K_1 = M'_3 \cdot e_j$ , donde  $e_j$  es el  $j$ -ésimo vector canónico. Esta es la matriz del morfismo  $(\mathcal{Z}_3)_\nu \rightarrow (\mathcal{Z}_3)_\nu$ .

v. Definimos  $\Delta_3$  como la matriz cuadrada que se obtiene quitando las columnas que no están en  $L_2$ .  $\Delta_3$  tiene tamaño  $\frac{(\nu-d+2)(\nu-d+1)}{2}$ .

**endif**

**endif**

En el lenguaje de las moving surfaces, la matriz  $M_1$ , construida en el algoritmo anterior, guarda los moving planes de grado  $\nu$  que siguen a la superficie  $S$ .

## 4.4 Algunos ejemplos

En esta sección veremos algunos casos que ejemplifiquen y clarifiquen el funcionamiento del método de implícitación desarrollado en la Sección 4.2 y en algunos casos veremos cómo se relaciona éste con aquel desarrollado por Sederberg y Cheng expuesto en la sección 4.1.

**4.4.1 Ejemplo.** Primero veremos cómo funciona el método desarrollado para el caso de implícitación de una curva en  $\mathbb{P}_k^2$ , sin puntos base, usando las técnicas desarrolladas. Supongamos entonces que  $n = 3$ . Se tiene entonces que  $A = k[X_1, X_2]$  y  $\mathfrak{m} = (X_1, X_2)$  el ideal maximal del origen. Sean  $f_1, f_2, f_3$  tres polinomios homogéneos de grado  $d \geq 1$ , que no tienen ceros comunes, salvo eventualmente el 0, esto dice que si  $I = (f_1, f_2, f_3)$   $V(I) = \emptyset$  en  $\mathbb{P}_k^1$ .

Estos polinomios definen una aplicación  $\phi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  definida por  $(X_1 : X_2) \mapsto (f_1 : f_2 : f_3)(X_1, X_2)$ , cuya imagen es la curva  $\mathcal{C}$  que tiene como ecuación implícita reducida al polinomio  $C$ . Es fácil ver que todas las hipótesis requeridas en el teorema 4.2.6 se satisfacen, entonces se tiene que el determinante de la parte homogénea de grado  $\nu$  del complejo

$$0 \rightarrow (\mathcal{Z}_2)_\nu \xrightarrow{d_T} (\mathcal{Z}_1)_\nu \xrightarrow{d_T} A_\nu[T_1, \dots, T_n]$$

es exactamente  $C^{\deg(\phi)}$ , de grado  $d$ , para todo  $\nu \geq \eta = d - 1$ , de acuerdo con la Proposición 4.2.9.

Ahora, dado que  $\text{depth}(I : A) = r \geq 2$ , se tiene que los últimos módulos de homología del complejo de Koszul asociado a la sucesión  $\{f_1, f_2, f_3\}$ , que denotaremos por  $\mathcal{K}_\bullet(I)$ , y escribimos:

$$0 \rightarrow K_3[-3d] \xrightarrow{d_f} K_2[-2d] \xrightarrow{d_f} K_1[-d] \xrightarrow{d_f} A \rightarrow 0$$

se anulan, para  $i \geq n - r$ , es decir  $H_2(\mathcal{K}_\bullet(I)) = 0$ , y se tiene entonces que como  $K_3[-3d] = A[-3d] \simeq Z_2$ , de acuerdo a (3.12) resulta que  $\mathcal{Z}_2 = Z_2[2d] \otimes A[T_1, T_2, T_3] = A[-d] \otimes A[T_1, T_2, T_3]$ . Como  $(\mathcal{Z}_2)_\nu = 0$  para todo  $\nu \leq d - 1$ , deducimos que el determinante del complejo  $(\mathcal{Z}_\bullet)_{d-1}$ , que coincide con  $C^{\deg(\phi)}$ , puede calcularse como el determinante de la matriz del último morfismo, es decir:

$$\det((\mathcal{Z}_\bullet)_{d-1}) = \det(d_T : (\mathcal{Z}_1)_{d-1} \rightarrow A_{d-1}[T_1, \dots, T_n]).$$

Esto dice que este valor puede calcularse como el determinante de las syzygies de  $f_1, f_2, f_3$  en grado  $d - 1$ . Este procedimiento coincide exactamente con el método de las moving curves que hemos mencionado en 4.1.1.

Consideremos ahora un caso particular de lo recién comentado. Sean  $f_1 = X_1^2, f_2 = X_1 \cdot X_2, f_3 = X_2^2$ , con lo cual  $d = 2$ . Aplicando el método anterior, debemos primero calcular la matriz  $F_1$ , que es aquella correspondiente al morfismo  $A_{d-1}^3 \rightarrow A_{2d-1}$ . Se tiene que:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora la matriz  $K_1$  correspondiente al núcleo:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Procediendo como se indica en el paso (c), se obtiene la matriz

$$\Delta_1 := M_1 = \begin{pmatrix} -T_2 & T_1 \\ -T_3 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que la ecuación implícita buscada es

$$\det(M_1) = T_1 T_3 - T_2^2,$$

y resulta de grado  $d = 2$  como se preveía.

A continuación veremos un ejemplo en el que se presentan puntos base. Para ello multiplicaremos artificialmente a las funciones anteriores por la variable  $X_1$ .

**4.4.2 Ejemplo.** Veremos aquí, qué sucede si se multiplica a las funciones anteriores por la variable  $X_1$ . De esta forma se obtiene un base locus no trivial que consiste en el punto  $(0 : 1) \in \mathbb{P}_k^1$ . Nuevamente, como las hipótesis del Teorema 4.2.10 se satisfacen, se tiene que la ecuación implícita puede calcularse como el determinante del complejo  $(\mathcal{L}_\bullet)_\nu$ , para  $\nu \geq d - 1$ .

El primer problema que se presenta, comparando con el ejemplo anterior, es que ahora  $\text{depth}(I : A) = 1$ , luego el problema de implicitación no puede reducirse al cálculo de un único determinante como hicimos antes, habrá entonces que calcular el determinante del complejo, es decir, calcular las dos matrices pertinentes y luego hacer el cociente de los determinantes pertinentes.

Para esto, se computa las matrices correspondientes a este problema como se indica en el Algoritmo 4.3.3, se obtiene que

$$M_1 = \begin{pmatrix} -T_2 & -T_3 & -T_3 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & -T_3 \\ 0 & T_1 & 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Como las primeras tres columnas forman un sistema linealmente independiente, extraemos la submatriz  $\Delta_1$  formada por estas columnas de  $M_1$ , cuyo determinante es  $\det(\Delta_1) = T_1^2 T_3 - T_1 T_2^2$ . Continuando con el algoritmo, se tiene que la matriz  $M_2 = (-T_3, T_2, 0, -T_1)$ , y por lo tanto  $\Delta_2 = (-T_1)$ . Se tiene entonces que la ecuación implícita obtenida es

$$C^{\text{deg}(\phi)} = \frac{\det(\Delta_1)}{\det(\Delta_2)} = \frac{T_1^2 T_3 - T_1 T_2^2}{-T_1}.$$

Lo cual coincide con lo anterior (salvo un signo).

Los ejemplos siguientes consisten en la aplicación del método desarrollado para cuando  $n = 4$ , es decir, implicitación de superficies en  $\mathbb{P}_k^3$ . Presentaremos aquí varios tipos de situaciones: aquella en donde no hay puntos base, y algunas otras en donde sí los hay, y de diversa naturaleza.

Para comenzar, veremos un ejemplo sencillo del primer tipo:

**4.4.3 Ejemplo.** Sean  $f_1, f_2, f_3, f_4$  polinomios de grado  $d$  en las variables  $X_1, X_2, X_3$ , tales que no tienen ceros comunes, ésto dice que si denotamos por  $I = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ , entonces  $V(I)$  es vacío en  $\mathbb{P}_k^2$ . Se tiene entonces definido un morfismo regular de esquemas proyectivos:

$$\phi : \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^3,$$

definido por  $(X_1 : X_2 : X_3) \mapsto (f_1 : f_2 : f_3 : f_4)(X_1, X_2, X_3)$ , cuya imagen es una superficie  $\mathcal{S}$  que está dada por la ecuación implícita reducida  $S$ , que se obtiene de aplicar el Algoritmo 4.3.5. Aplicando los resultados obtenidos en la sección anterior, se tiene que el determinante del complejo  $(\mathcal{L}_\bullet)_\nu$  coincide con la ecuación  $S^{\deg(\phi)}$ , para  $\nu \geq 2(d-1)$ . Estos complejos tienen la forma:

$$0 \rightarrow (\mathcal{L}_3)_\nu \xrightarrow{dT} (\mathcal{L}_2)_\nu \xrightarrow{dT} (\mathcal{L}_1)_\nu \xrightarrow{dT} A_\nu[T_1, \dots, T_n].$$

Al igual que en el caso de curvas, por un argumento similar de profundidad, se tiene que  $\mathcal{L}_3 \simeq A[-d][T_1 : T_2 : T_3 : T_4]$ . Pero acá sucede que como  $d \geq 1$ ,  $2(d-1) \geq d$ . Luego, obtenemos aquí la ecuación  $S^{\deg(\phi)}$ , como el producto de dos determinantes dividido por un tercero. Veremos cómo se aplica esto en dos ejemplos concretos:

- (a) Primero consideraremos la situación dada por  $f_1 = X_1^2$ ,  $f_2 = X_2^2$ ,  $f_3 = X_3^2$ ,  $f_4 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ . Aplicando el método para  $\nu = 2(d-1) = 2$ , se computan las tres matrices del complejo, que resultan respectivamente de tamaño  $6 \times 9$ ,  $9 \times 4$  y  $4 \times 1$ . Calculando los determinantes, y los productos y cocientes pertinentes, se tiene que  $\det((\mathcal{L}_\bullet)_2) = (T_1 + T_2 + T_3 - T_4)^4$ , donde  $4 = \deg(\phi)$ .
- (b) El segundo caso, está dado por las funciones  $f_1 = X_1^2 X_2$ ,  $f_2 = X_2^2 X_3$ ,  $f_3 = X_1 X_3^2$ ,  $f_4 = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ . Aplicando el método para  $\nu = 2(d-1) = 4$ , se obtiene el determinante de  $(\mathcal{L}_\bullet)_4$ , que determina la ecuación implícita de grado 9, como el producto de dos matrices, una de  $15 \times 15$  y otra de  $3 \times 3$ , dividido por el de una de  $9 \times 9$ .

En este último ejemplo se presenta la situación que el ideal  $I$  no es una intersección completa local, obteniéndose así un “factor extraño” en la ecuación provista por el determinante del complejo pertinente.

**4.4.4 Ejemplo.** Consideremos el morfismo  $\phi : \mathbb{P}_k^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^4$  definido por los polinomios  $f_1, f_2, f_3, f_4$  homogéneos de grado 3, donde:

$$f_1 = X_1 X_2^2 - X_2^3 - X_2 X_3^2,$$

$$f_2 = X_2^3 - X_1 X_2 X_3 - X_2^2 X_3 + X_2 X_3^2 + X_3^3,$$

$$f_3 = X_1 X_2 X_3 - 2X_2 X_3^2,$$

$$f_4 = X_2^2 X_3 - 2X_2 X_3^2 + X_3^3.$$

Usando Macaulay2, es fácil ver que  $I$  es un ideal saturado, con una resolución libre de la forma:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^3 A_{-\mu_i-d} \xrightarrow{M} A_{-d}^4 \xrightarrow{f} A \rightarrow A/I \rightarrow 0,$$

donde  $\sum \mu_i = d$ ,  $f$  es el vector  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  y

$$M = \begin{pmatrix} -X_3 & X_2 & 0 \\ -X_3 & -X_1 + X_2 + X_3 & -X_3 \\ X_2 - X_3 & -X_1 - X_2 + 2X_3 & -X_3 \\ X_3 & X_1 - X_3 & X_2 + X_3 \end{pmatrix}$$

También se puede mostrar que  $V(I)$  consiste en los dos puntos proyectivos  $p = (1 : 0 : 0)$  y  $q = (2 : 1 : 1)$ . Para cada  $i = 1, 2, 3$ , denotemos por

$$L_i := \sum_{j=1}^4 M_{j,i} T_j \in A[T_1, T_2, T_3, T_4],$$

como en el método de las moving surfaces.

La resultante de  $L_1, L_2, L_3$  es el determinante de la matriz de Sylvester que se obtiene al escribir a cada uno de estos polinomios en las variables  $X_i$  con coeficientes en las  $T_i$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -T_2 - T_3 + T_4 & 0 \\ T_3 & T_1 + T_2 - T_3 & T_4 \\ -T_1 - T_2 - T_3 + T_4 & T_2 + 2T_3 - T_4 & -T_2 - T_3 + T_4 \end{pmatrix}$$

ya que las  $L_i$  son formas lineales en las  $X_i$ .

Este polinomio se puede factorizar en un producto

$$(-T_2 T_3 - T_3^2 + T_1 T_4 + T_2 T_4 + 2T_3 T_4 - T_4^2)(T_2 + T_3 - T_4).$$

Fácilmente se puede observar que acá el factor extraño  $G$  está dado por  $T_2 + T_3 - T_4$ .

Evaluando la matriz  $M$  en el punto  $p$ , obtenemos que

$$M(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto dice que el módulo de syzygies en este punto está dado por el factor lineal  $L_p = -T_2 - T_3 + T_4$ , que coincide con  $-G$ . Se obtiene que el rango de la matriz  $M(q)$  es 2, con lo cual  $q$  es una intersección completa y se tiene que  $d_q = e_q$ . Si  $X$  denota el conjuntos de puntos base que no son una intersección completa, resulta que el factor extraño está caracterizado como

$$G = \prod_{x \in X} L_x^{e_x - d_x},$$

según el último trabajo realizado en el área [BCJ]. Más aún, todas las syzygies se especializan en  $x$  como un múltiplo de  $L_x$ , y al menos uno de ellos es no nulo.

# Capítulo 5

## Apéndice

A continuación se expondrán algunos resultados que son necesarios para desarrollar la teoría que nos convoca, pero cuyo tratamiento consideramos independiente de los temas desarrollados.

### 5.1 Fórmulas sobre el grado

En lo que sigue daremos algunos resultados que conciernen al grado de la clausura de la imagen de  $\phi$ . Para esto supondremos que  $k$  es un cuerpo y que  $C$  es el anillo de polinomios  $k[X_1, \dots, X_r]$ , que es una  $k$ -álgebra  $\mathbb{N}$ -graduada, donde  $\deg(X_i) = 1$  para todo  $i$ . Asumiremos además que:

- (a) el anillo  $A$  es el cociente de  $C$  por un ideal primo homogéneo;
- (b) si  $I = (f_1, \dots, f_n)$  es un ideal de  $A$ ,  $\text{Proj}(A/I)$  es un esquema cero-dimensional, que podría ser vacío;
- (c)  $\phi$  es genéricamente finito, con lo cual  $\text{Proj}(A)$  y la clausura de la imagen de  $\phi$  tienen la misma dimensión.

A continuación vamos a introducir la noción de multiplicidad algebraica, que será necesaria para poder enunciar la fórmula sobre el grado.

Sea  $(R, \mathfrak{m})$  un anillo local noetheriano, y  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado no trivial. Sea  $I \subset \mathfrak{m}$  un ideal de  $R$ , tal que existe un entero  $t$  que satisface que  $\mathfrak{m}^t M \subset IM$  (un ideal de esta forma se denomina un *ideal de definición de  $M$* ).

#### 5.1.1 Definiciones Varias.

- (a) Para el  $R$ -módulo  $M$ , una *cadena* de submódulos de  $M$ , es una sucesión de submódulos encajados, con inclusiones estrictas de la forma

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_s.$$

Una cadena de este tipo se dice que tiene longitud  $s$ .

- (b) Se dice que la cadena es una *serie de descomposición* de  $M$  si cada cociente  $M_i/M_{i+1}$  es un módulo simple, es decir, no tiene submódulos propios no triviales. Equivalentemente, una serie de descomposición es una cadena maximal de submódulos de  $M$ .
- (c) Se define la *longitud de  $M$* ,  $\text{length}(M)$ , como la menor longitud de una serie de descomposición de  $M$ , o como  $\infty$  si  $M$  no admite series de descomposición finitas.

Obsérvese que para todo entero positivo  $\nu$ , se tiene un submódulo  $I^\nu M$  de  $M$ . Se puede considerar entonces el módulo cociente  $M/I^\nu M$ , y a cada uno de estos objetos, se le puede asociar el valor entero  $\text{length}(M/I^\nu M)$ .

Este valor numérico resulta, para valores altos de  $\nu$ , una función polinomial de  $\nu$ . Ese polinomio, denotado  $S_M^I(x) = \sum_i a_i x^i$ , se lo conoce con el nombre de *polinomio de Hilbert-Samuel* de  $M$  respecto de  $I$ , y su grado está dado por  $\delta = \dim(M)$  y su coeficiente principal se suele escribir como  $a_\delta = e(I, M)/\delta!$ .

**5.1.2 Definición.** La multiplicidad algebraica de  $I$  en  $M$  es el número  $e(I, M)$  que aparece en el coeficiente de mayor grado de  $S_M^I(x)$ .

Con la definición recién dada, se puede definir la dimensión algebraica de un subesquema cero-dimensional de  $\text{Proj}(R)$  como sigue:

**5.1.3 Definición.** Sea  $J$  un ideal homogéneo de un anillo  $\mathbb{N}$ -graduado  $R$ , si denotamos por  $X = \text{Proj}(R/J)$  al subesquema finito  $X$  de  $\text{Proj}(R)$ , definimos la multiplicidad algebraica de  $X$  en  $\text{Proj}(R)$  como:

$$e(X, \text{Proj}(R)) = e(J^\sim, R^\sim) = \sum_{x \in X} e(J_x^\sim, \mathcal{O}_{\text{Proj}(R), x}) = \sum_{x \in X} e(J_x, R_x).$$

Ahora estamos en condiciones de poder escribir la fórmula del grado buscada. Recordemos que teníamos un morfismo de  $k$ -álgebras definido en (2.1) como:

$$h : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A, \quad T_i \mapsto f_i,$$

que inducía un morfismo de  $k$ -esquemas proyectivos definido en (2.3) como sigue:

$$\phi : \bigcup D_+(f_i) \rightarrow \bigcup D_+(T_i) = \mathbb{P}_k^{n-1}.$$

Si asumimos que  $\phi$  es genéricamente finito, entonces el cuerpo de fracciones de  $\text{Proj}(A)$  es una extensión (de cuerpos) finita del cuerpo de fracciones de la imagen de  $\phi$ ,

$$\begin{array}{c} \text{Frac}(A) \\ \text{deg}(\phi) \Big| \\ \text{Frac}\left(\frac{k[T_1, \dots, T_n]}{\ker(h)}\right), \end{array}$$

y el grado de esta extensión lo denominamos  $\text{deg}(\phi)$  como se muestra en el diagrama.

**5.1.4 Teorema.** *Sea  $k$  un cuerpo y  $A$  una  $k$ -álgebra  $\mathbb{N}$ -graduada de la forma  $A = k[X_1, \dots, X_r]/J$ , donde  $J$  es un ideal homogéneo, y cada  $X_i$  tiene grado 1. Denotemos por  $H$  a la clausura de la imagen de  $\phi$ . Sea  $\delta$  la dimensión de  $A$ , e  $I = (f_1, \dots, f_n)$  un ideal de  $A$ , tal que cada  $f_i$  es homogéneo de grado  $d \geq 1$ . Entonces, si  $X = \text{Proj}(A/I)$  es finito sobre  $k$ ,*

$$d^{\delta-1} \deg_{\mathbb{P}_k^{r-1}}(\text{Proj}(A)) - e(X, \text{Proj}(A)) = \deg(\phi) \cdot \deg_{\mathbb{P}_k^{r-1}}(H),$$

si  $\phi$  es genéricamente finita. En el caso en que  $\phi$  no sea genéricamente finita, se tiene que

$$d^{\delta-1} \deg_{\mathbb{P}_k^{r-1}}(\text{Proj}(A)) - e(X, \text{Proj}(A)) = 0.$$

La demostración de este teorema es muy técnica y requiere otros conceptos no introducidos en este trabajo. El lector interesado puede consultarla en [B-J], Thm 2.5.

## 5.2 Ideales de Fitting, el invariante de McRae y determinantes de complejos

En esta sección desarrollaremos el contenido básico sobre ideales de Fitting, y determinantes de complejos, necesario para poder abordar la lectura del trabajo sin necesidad de consultar otra bibliografía sobre el tema. Este tema está vinculado con el invariante de McRae, que se construye a partir de un  $A$ -módulo  $M$ , y que bajo buenas condiciones describe la parte de codimensión uno del soporte de  $M$ . El lector que esté interesado en profundizar las ideas rápidamente expuestas en estas notas, puede consultar el trabajo de McRae [MacRae], que es la fuente original, y un artículo de Northcott [Nor] en el cuál se trata la existencia y algunas propiedades de este invariante.

Para el cálculo de este invariante, que definiremos a partir de ideales de Fitting, haremos uso de una técnica desarrollada por Cayley conocida como determinante de un complejo. Para esto se puede consultar unas notas de Demazure [Demaz] y un tratamiento más general se puede obtener en el Apéndice del libro [GKZ].

### 5.2.1 Ideales de Fitting

Sea  $A$  un anillo conmutativo,  $F$  y  $G$  dos  $A$ -módulos libres, y  $\varphi : F \rightarrow G$  un morfismo de  $A$ -módulos. Consideremos bases para estos módulos, y notemos por  $|\varphi|$  a la matriz de  $\varphi$  escrita en estas bases. Definimos  $\det_\nu(\varphi)$  como el ideal de  $A$  generado por los menores de tamaño  $\nu \times \nu$  de  $|\varphi|$ . Haremos la convención de que la matriz de tamaño nulo tiene determinante 1, con lo cual  $\det_\nu(\varphi) = A$  para todo  $\nu \leq 0$ .

**5.2.1 Proposición.** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado, y sean  $F \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow M \rightarrow 0$  y  $F' \xrightarrow{\varphi'} G' \rightarrow M \rightarrow 0$  dos presentaciones libres de  $M$ . Entonces para todo  $\nu \in \mathbb{Z}$  se tiene que*

$$\det_{rg(G)-\nu}(\varphi) = \det_{rg(G')\nu}(\varphi').$$

Podemos ahora dar la definición de los ideales de Fitting:

**5.2.2 Definición.** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado, y sea  $F \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow M \rightarrow 0$  una presentación libre de  $M$ , definimos para cada  $i \in \mathbb{N}$ , el  $\nu$ -ésimo invariante de Fitting de  $M$ , como el ideal*

$$\mathfrak{F}_\nu := \det_{rg(G)-\nu}(\varphi).$$

En lo sucesivo, el invariante  $\mathfrak{F}_0$  será denotado por  $\mathfrak{F}$  y llamado invariante de Fitting inicial de  $M$ .

Enunciaremos a continuación algunas propiedades sobre estos invariantes:

**5.2.3 Proposición.** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado.*

(a) *Los invariantes de Fitting de  $M$  forman una sucesión creciente:*

$$\mathfrak{F}(M) = \mathfrak{F}_0(M) \subset \mathfrak{F}_1(M) \subset \mathfrak{F}_2(M) \subset \dots$$

*Más aún, si  $M$  puede ser generado por  $m$  elementos, entonces  $\mathfrak{F}_m(M) = A$ .*

(b) *Dado un morfismo  $A \rightarrow B$  de anillos, se tiene que, para todo  $\nu \in \mathbb{N}$*

$$\mathfrak{F}_\nu(M \otimes_A B) = \mathfrak{F}_\nu(M).B.$$

(c) *Para todo  $\nu \geq 1$  se tiene que  $\text{ann}(M)\mathfrak{F}_\nu(M) \subset \mathfrak{F}_{\nu-1}(M)$ . Más aún, si  $M$  puede ser generado por  $m$  elementos, entonces*

$$\text{ann}(M)^m \subset \mathfrak{F}(M) \subset \text{ann}(M).$$

(d) *Si  $M$  es un  $A$ -módulo que admite una presentación finita (se dice que  $M$  es finitamente presentado), entonces cada uno de sus invariantes de Fitting es un ideal finitamente generado de  $A$ .*

Enunciaremos a continuación un resultado muy importante conocido como Lema de McCoy.

**5.2.4 Teorema.** (McCoy) *Sea  $\varphi : F \rightarrow G$  un morfismo entre dos  $A$ -módulos libres de rango  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente. Entonces  $\varphi$  es inyectiva si y solo si  $\text{ann}_A(\det_{r_1}(\varphi)) = 0$ . más aún, cuando se está en esta situación se tiene que  $r_1 \leq r_2$ .*

### 5.2.2 La Característica de Euler

Nuevamente aquí  $A$  es un anillo conmutativo, y  $M$  es un  $A$ -módulo. Antes de poder definir el invariante de McRae de  $M$ , que denotaremos por  $\mathfrak{S}(M)$ , debemos definir algunos conceptos previos que están íntimamente ligados a él.

Definiremos previamente otro invariante, conocido como *Característica de Euler*, que tiene la propiedad de caracterizar a aquellos módulos que tienen anulador trivial.

**5.2.5 Proposición.** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo, y consideremos dos resoluciones libre finitas de  $M$*

$$0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

y

$$0 \rightarrow F'_{n'} \rightarrow F'_{n'-1} \rightarrow \dots \rightarrow F'_1 \rightarrow F'_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

entonces se tiene que

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i r_i = \sum_{i=0}^{n'} (-1)^i r'_i,$$

donde  $r_i = \text{rg}(F_i)$  y  $r'_i = \text{rg}(F'_i)$ .

En particular, si  $0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de módulos libres de rango finito, es decir,  $M$  también es libre, entonces  $\sum_{i=0}^n (-1)^i r_i = 0$ .

Ahora podemos definir la Característica de Euler de  $M$  como sigue:

**5.2.6 Definición.** Sea  $M$  un  $A$ -módulo que admite una resolución libre finita por módulos  $F_i$  de rango  $r_i$

$$0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Definimos la característica de Euler de  $M$  como

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i r_i.$$

El siguiente teorema, debido a Vasconcelos, caracteriza los módulos cuya característica de Euler es cero, y que serán de interés próximamente.

**5.2.7 Teorema.** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo que admite una resolución libre finita de longitud finita. Entonces la característica de Euler de  $M$  es un entero no negativo y:*

(a)  $\chi(M) > 0$  si y solo si  $\text{ann}_A(M) = 0$ ;

(b)  $\chi(M) = 0$  si y solo si  $\text{ann}_A(M) \neq 0$ , si y solo si  $(0 :_A \text{ann}_A(M)) = 0$ .

### 5.2.3 El Invariante de McRae

Estamos ahora en condiciones de definir el invariante de McRae de un  $A$ -módulo que admite una resolución libre finita y tal que  $\chi(M) = 0$ .

**5.2.8 Lema.** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo que tiene una resolución libre finita de longitud uno de la forma  $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  y tal que  $\chi(M) = 0$ . Entonces el ideal inicial de Fitting  $\mathfrak{F}(M)$  es un ideal principal de  $A$ , generado por un elemento que no es divisor de cero. En particular  $\text{ann}_A(\mathfrak{F}(M)) = 0$ .*

De acuerdo con los establecido en el trabajo de Northcott citado [Nor], daremos la siguientes definiciones:

#### 5.2.9 Definiciones Varias.

- (a) Si  $M$  es un  $A$ -módulo que tiene una resolución libre finita de longitud uno de la forma  $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  y tal que  $\chi(M) = 0$ , diremos que  $M$  es un *módulo elemental*.
- (b) Si  $M$  es un  $A$ -módulo elemental, entonces el ideal de Fitting inicial  $\mathfrak{F}(M)$  es principal (además es integro y fraccionario). Notaremos por  $\mathfrak{S}(M)$  al ideal de Fitting inicial de estos módulos.
- (c) Más en general, si  $M$  es un  $A$ -módulo. Dada una resolución por módulos elementales de longitud finita

$$0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

se le asocia un ideal invertible fraccionario

$$\mathfrak{S}(M) = \prod_{i=0}^n \mathfrak{F}(F_i)^{(-1)^i},$$

que se denomina *Invariante de McRae de  $M$* .

Enunciaremos a continuación algunas propiedades importantes del invariante de McRae.

**5.2.10 Proposición.** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo que tiene una resolución finita de módulos elementales. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

- (a) *Supongamos que se tiene dos resoluciones por módulos elementales*

$$0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow F'_{n'} \rightarrow F'_{n'-1} \rightarrow \dots \rightarrow F'_1 \rightarrow F'_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

del  $A$ -módulo  $M$ , entonces

$$\prod_{i=0}^n \mathfrak{F}(F_i)^{(-1)^i} = \prod_{i=0}^{n'} \mathfrak{F}(F'_i)^{(-1)^i}.$$

- (b) Si se tiene una sucesión exacta de la forma  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  de  $A$ -módulos, donde  $M'$  y  $M''$  admiten ambos una resolución finita de módulos elementales, entonces  $\mathfrak{S}(M) = \mathfrak{S}(M')\mathfrak{S}(M'')$ .
- (c) Sea  $S$  un conjunto multiplicativamente cerrado de  $A$ . Entonces el  $A_S$ -módulo  $M_S$  tiene una resolución finita de módulos elementales y  $\mathfrak{S}(M).A_S = \mathfrak{S}(M_S)$ .
- (d) El ideal fraccionario  $\mathfrak{S}(M)$  de  $A$ , resulta un ideal íntegro de  $A$ . Más aún es un ideal principal generado por un elemento que no es divisor de cero, tal que  $\mathfrak{F}(M) \subset \mathfrak{S}(M)$  y es minimal con esta propiedad, es decir, si  $I$  es un ideal principal de  $A$  que contiene a  $\mathfrak{F}(M)$ , entonces también contiene a  $\mathfrak{S}(M)$ .
- (e) La propiedad (d) implica que cualquier generador de  $\mathfrak{S}(M)$  sirve como gcd (máximo común divisor) de cualquier conjunto de generadores de  $\mathfrak{F}(M)$ . En particular, si  $A$  es un DFU,  $\mathfrak{S}(M)$  está generado por el gcd de los generadores de  $\mathfrak{F}(M)$ .

A continuación daremos una serie de equivalencias al hecho de tener una resolución por módulos elementales.

**5.2.11 Lema.** Si  $M$  es un  $A$ -módulo, entonces las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $M$  admite una resolución finita por módulos elementales;
- (b)  $M$  admite una resolución libre finita de característica de Euler cero;
- (c)  $M$  admite una resolución libre finita y  $\text{ann}(M)$  contiene un elemento que no es divisor de cero.

A continuación daremos un método constructivo para calcular el ideal  $\mathfrak{S}(M)$ . Para ello, a partir de ahora supondremos que  $A$  es un dominio íntegro, y que  $M$  es un  $A$ -módulo que admite una resolución finita libre de longitud  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{F}_\bullet : \quad 0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

tal que  $\chi(M) = \sum_i (-1)^i r_i = 0$ , donde  $r_i$  es el rango del módulo  $F_i$ .

Descompongamos ahora los módulos  $F_i$  del complejo  $\mathcal{F}_\bullet$ , empezando desde la izquierda.

Sea  $F_n^{(0)} := 0$  y  $F_n^{(1)} := F_n$ , escribimos entonces  $F = F_n^{(0)} \oplus F_n^{(1)}$ . Como  $\varphi_n$  es inyectivo, entonces por el Lema de McCoy, 5.2.4, se tiene que:

- (a)  $F_{n-1}$  se escinde en  $F_{n-1}^{(0)} \oplus F_{n-1}^{(1)}$ , donde estos dos módulos son libres de rango  $r_n$  y  $r_{n-1} - r_n$  respectivamente. El morfismo  $\varphi_n : F_n \rightarrow F_{n-1}$  se puede escribir matricialmente como  $\varphi_n = (c_n \ d_n)$ , donde  $\det(c_n) \neq 0$ . Se reescribe el comienzo de la resolución anterior de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & F_{n-1}^{(0)} & \longrightarrow & \dots \\ & & \oplus & & \nearrow c_n & & \oplus \\ 0 & \longrightarrow & F_n^{(1)} & \xrightarrow{d_n} & F_{n-1}^{(1)} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

- (b) Ahora, como el morfismo  $c_n$  es biyectivo sobre el cuerpo de fracciones de  $A$  y como  $\text{im}(d_n) = \ker(d_{n-1})$ , se deduce que  $F_{n-2}$  se parte en  $F_{n-2}^{(0)} \oplus F_{n-2}^{(1)}$ , en dos módulos libres de rango  $r_{n-1} - r_n$  y  $r_{n-2} - (r_{n-1} - r_n)$  respectivamente. El morfismo  $\varphi_{n-1} : F_n \rightarrow F_{n-1}$  se escribe matricialmente como

$$\varphi_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}$$

, donde  $\det(c_{n-1}) \neq 0$ . Se reescribe el comienzo de la resolución  $\mathcal{F}_\bullet$  como

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{a_{n-1}} & F_{n-2}^{(0)} \longrightarrow \dots \\ \oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\ & & c_n \nearrow & & c_{n-1} \nearrow & & b_{n-1} \nearrow \\ 0 & \longrightarrow & F_n^{(1)} & \xrightarrow{d_n} & F_{n-1}^{(1)} & \xrightarrow{d_{n-1}} & F_{n-2}^{(1)} \longrightarrow \dots \end{array}$$

- (c) de esta forma se obtiene que para cada  $i = 0, \dots, n$   $F_i$  se escinde como  $F_i = F_i^{(0)} \oplus F_i^{(1)}$  con ambos módulos libres de rango  $\sum_{j=0}^{n-i-1} (-1)^j r_{i+1+j}$  y  $\sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j r_{i+j}$  respectivamente, y para  $i = 1, \dots, n$  el morfismo  $\varphi_i : F_i^{(0)} \oplus F_i^{(1)} \rightarrow F_{i-1}^{(0)} \oplus F_{i-1}^{(1)}$  se escribe matricialmente como

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ b_i & d_i \end{pmatrix},$$

donde el determinante de  $c_i$  es no nulo.

- (d) Finalmente, dado que  $\chi(M) = \sum_{j=0}^n (-1)^j r_j = 0$ , una descomposición de esta forma termina con un morfismo  $\varphi_1$  que se escribe como  $(a_1 \ c_1)^t$ , con  $\det(c_1) \neq 0$ , obteniéndose una resolución libre con morfismos como se ilustra en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{a_{n-1}} & F_{n-2}^{(0)} & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{a_2} & F_1^{(0)} & \xrightarrow{a_1} & F_0^{(0)} \\ \oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\ & & c_n \nearrow & & c_{n-1} \nearrow & & b_{n-1} \nearrow & & c_{n-2} \nearrow & & c_2 \nearrow & & c_1 \nearrow \\ 0 & \longrightarrow & F_n^{(1)} & \xrightarrow{d_n} & F_{n-1}^{(1)} & \xrightarrow{d_{n-1}} & F_{n-2}^{(1)} & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{a_2} & F_1^{(1)} & \xrightarrow{d_1} & F_0^{(1)} \end{array}$$

Obsérvese que se obtiene una familia de matrices cuadradas, que están definidas complementando las filas o columnas de la matriz anteriormente definida, y cuyo determinante es no nulo.

**5.2.12 Teorema.** *Con la notación anterior, se tiene que:*

$$\mathfrak{S}(M) = \det(\mathcal{F}_\bullet) \cdot A := \prod_{i=0}^n \det(c_i)^{(-1)^{i-1}} \cdot A = \frac{\det(c_1) \det(c_3) \dots}{\det(c_2) \det(c_4) \dots} \cdot A .$$

Vimos que  $\mathfrak{S}(M)$  es el menor ideal principal que contiene a  $\mathfrak{F}(M)$ , esto dice que  $\mathfrak{S}(M)$  es la parte de codimensión uno de  $\mathfrak{F}(M)$ . A partir de la Proposición 5.2.3(c), se tiene que los primos asociados de  $\mathfrak{F}(M)$  son exactamente los mismos que los primos asociados de  $\text{ann}_A(M)$ . Más precisamente, si  $A$  es un DFU, y  $P_1, \dots, P_r$  denotan los factores irreducibles del gcd de un sistema de generadores de  $\mathfrak{F}(M)$ , entonces  $P_1^{e_1} \dots P_r^{e_r}$  es un generador de  $\mathfrak{S}(M)$ , donde  $e_i$  denota la multiplicidad de  $\mathfrak{S}(M)$  en  $A/(P_i)$ .

# Bibliografía

- [A-M] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G. Introduction to commutative algebra. *Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.* 1969.
- [BH] Bruns, Winfried; Herzog, Jrgen. Cohen-Macaulay rings. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **39**. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1993.
- [Busé] Busé, Laurent. Étude du résultant sur une variété algébrique. PhD Thesis. *Université de Nice Sophia-Antipolis*, 2001.
- [B-C] Busé, Laurent; Chardin, Marc. Implicitizing rational hypersurfaces using approximation complexes. *J. Symbolic Comput.* 40 (2005), no. 4-5, 1150–1168.
- [BCD] Busé, Laurent; Cox, David; D’Andrea, Carlos Implicitization of surfaces in  $\mathbb{P}^3$  in the presence of base points. *J. Algebra Appl.* 2 (2003), no. 2, 189–214.
- [BCJ] Busé, Laurent; Chardin, Marc; Jouanolou, J-P. Complement to the implicitization of rational hypersurfaces by means of approximation complexes. Por aparecer, math.AC/0610186 v1.
- [B-J] Busé, Laurent; Jouanolou, Jean-Pierre On the closed image of a rational map and the implicitization problem. *J. Algebra* 265 (2003), no. 1, 312–357.
- [Cha1] Chardin, Marc. Implicitation using approximation complexes. Por aparecer, math.AC/0503180.
- [Cha2] Chardin, M. The resultant via a Koszul complex. Computational algebraic geometry (Nice, 1992), 29–39, *Progr. Math.*, 109, Birkhuser Boston, Boston, MA, 1993.
- [Cox1] Cox, David A. Equations of parametric curves and surfaces via syzygies. In Symbolic computation: solving equations in algebra, geometry, and engineering. Contemp. Math., 286, *Amer. Math. Soc.*120, 2001.
- [Cox2] Cox, David A. Curves, surfaces, and syzygies. *Topics in algebraic geometry and geometric modeling*, 131–150, Contemp. Math., 334, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2003.
- [CSC] Cox, David A.; Sederberg, Thomas W.; Chen, Falai The moving line ideal basis of planar rational curves. *Comput. Aided Geom. Design* 15 (1998), no. 8, 803–827.

- [DAn] D’Andrea, Carlos. Resultants and moving surfaces. *J. Symbolic Comput.* 31 (2001), no. 5, 585–602.
- [ZSCC] Zheng, Jianmin; Sederberg, Thomas W.; Chionh, Eng-Wee; Cox, David A. Implicitizing rational surfaces with base points using the method of moving surfaces. *Topics in algebraic geometry and geometric modeling*, 151–168, *Contemp. Math.*, 334, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [Cox2] Cox, David A. Equations of parametric curves and surfaces via syzygies. *Symbolic computation: solving equations in algebra, geometry, and engineering (South Hadley, MA, 2000)*, 1–20, *Contemp. Math.*, 286, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [CGZ] Cox, David; Goldman, Ronald; Zhang, Ming. On the validity of implicitization by moving quadrics of rational surfaces with no base points. *J. Symbolic Comput.* 29 (2000), no. 3, 419–440.
- [CCL] Chen, Falai; Cox, David; Liu, Yang The  $\mathbb{C}$ -basis and implicitization of a rational parametric surface. *J. Symbolic Comput.* 39 (2005), no. 6, 689–706.
- [Demaz] Demazure., M. Une définition constructive du résultant. Preprint de “Notes Informelles du Calcul Formel”, <http://www.gage.polytechnique.fr/notes/1984-1994.html>, mayo 1984.
- [Eis1] Eisenbud, David. Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, **150**. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Eis2] Eisenbud, David. The geometry of syzygies. A second course in commutative algebra and algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, **229**. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [E-H] Eisenbud, David; Harris, Joe. The geometry of schemes. Graduate Texts in Mathematics, **197**. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [GKZ] Gelfand, I. M.; Kapranov, M. M.; Zelevinsky, A. V. Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. Mathematics: Theory & Applications. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.
- [GK] Goldman, R. y Krasauskas, R. (Eds.), Topics in algebraic geometry and geometric modeling. *Contemp. Math.* 334, American Mathematical Society, 2003.
- [Harts] Hartshorne, Robin Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. **52**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [HSV1] Herzog, J.; Simis, A.; Vasconcelos, W. V. Approximation complexes of blowing-up rings. *J. Algebra* 74 (1982), no. 2, 466–493.
- [HSV2] Herzog, J.; Simis, A.; Vasconcelos, W. V. Approximation complexes of blowing-up rings. II. *J. Algebra* 82 (1983), no. 1, 53–83.

- [HSV3] Herzog, J.; Simis, A.; Vasconcelos, W. V. Koszul homology and blowing-up rings. *Commutative algebra (Trento, 1981)*, pp. 79–169, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 84, Dekker, New York, 1983.
- [Hoff] C. M. Hoffmann. Geometric and solid modeling : an introduction. *Morgan Kaufmann publishers, Inc.*, 1989.
- [K-M] Knudsen, Finn Faye; Mumford, David The projectivity of the moduli space of stable curves. I. Preliminaries on "det." and "Div". *Math. Scand.* 39 (1976), no. 1, 19–55.
- [MacRae] MacRae, R. E. On an application of the Fitting invariants. *J. Algebra* 2 1965 153–169.
- [Mats] Matsumura, Hideyuki Commutative ring theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1986.
- [Nor] Northcott, D. G. Finite free resolutions. Cambridge Tracts in Mathematics, No. 71. *Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne*, 1976.
- [SC] T.W. Sederberg y F. Chen. Implicitization using moving curves and surfaces. *Proc. SIGGRAPH*, 301–308, 1995.
- [SV] Simis, A.; Vasconcelos, W. V. The syzygies of the conormal module. *Amer. J. Math.* 103 (1981), no. 2, 203–224.
- [Vas1] Vasconcelos, Wolmer V. Arithmetic of blowup algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, 195. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1994.
- [Vas2] Vasconcelos, Wolmer V. Computational methods in commutative algebra and algebraic geometry. With chapters by David Eisenbud, Daniel R. Grayson, Jrgen Herzog and Michael Stillman. Algorithms and Computation in Mathematics, 2. *Springer-Verlag, Berlin*, 1998.
- [Vas3] Vasconcelos, Wolmer Integral closure. Rees algebras, multiplicities, algorithms. Springer Monographs in Mathematics. *Springer-Verlag, Berlin*, 2005.
- [Wei] Weibel, Charles A. An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1994.