UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Escuchando la forma de un triángulo

Luis Alberto Escudero

Director: Pablo Amster

Julio de 2018

Índice general

Agradecimientos **v**

1. Introducción **1**
1.1. Caso unidimensional 2
1.2. Reseña histórica del problema 5
1.3. Objetivo del trabajo 7

2. Preliminares **9**
2.1. Los autovalores del Laplaciano 9
2.1.1. Formas bilineales 10
2.1.2. Teoría espectral para formas bilineales simétricas 15
2.1.3. Existencia de soluciones para el problema espectral 20
2.1.4. Cálculo del espectro del rectángulo 22
2.2. Isometrías 25
2.3. Conjuntos isométricos y espectro 30
2.3.1. La pregunta de Kac 32
2.3.2. Algunos resultados espectrales 33

3. La traza del calor **35**
3.1. Estimaciones asintóticas de la traza del calor 37
3.2. Estimación asintótica de la traza del calor en el rectángulo 44
3.2.1. La traza del calor en rectángulos 49

4. Escuchando triángulos **51**
4.1. Escuchando todo el espectro de un triángulo 51
4.2. Escuchando parcialmente el espectro de un triángulo 58

5. Escuchando polígonos **59**

Bibliografía **69**

Agradecimientos

A mi mamá, papá y a mi hermano Facu, por haberme apoyado en los proyectos que encaré. En especial, por la gran mano que me dieron para que pueda terminar esta carrera. A mis abuelos y sus hermanos, por todo su amor, valores y por haberme enseñado el camino del esfuerzo y del conocimiento. A mis tíos y primos, por todos los momentos compartidos.

A Zucy, Osvaldo, Inés, Gustavo y familia: por haber sido ese puente que me acercó a esta facultad y a la música. Por haberme permitido entrar en su casa como si fuera uno más de la familia.

A mi director Pablo por haber aceptado dirigir esta tesis. Por ser un gran docente. Por su tarea como divulgador, rol fundamental para que la sociedad se arrime a la Matemática dejando de lado cualquier clase de prejuicios. Por sus consejos, correcciones, paciencia, tiempo y apoyo a lo largo de este último tramo.

A los jurados, Pablo De Napoli y Juan Pablo Pinasco, por el tiempo dedicado a leer esta tesis, sus correcciones y valiosos comentarios.

A Daniel Grieser y Svenja Maronna por haber leído y contestado mis mails, por haberme cedido el uso de los gráficos de su artículo [GM13] que aparecen en el capítulo 4 de esta tesis. A Alberto Enciso y Javier Gómez-Serrano, por la misma razón, en particular por prestarme los gráficos de su artículo [EG17] que aparecen en el capítulo 5.

A todos los integrantes de este Departamento de Matemática, por ofrecer una carrera de grado de excelencia. A Carlos Cabrelli, Fernando Cukierman, Alicia Dickenstein y Daniel Galicer: por ser excelentes docentes con una gran calidad humana. Por haberme dado una respuesta alentadora o consejo cada vez que les consulté algo. A José Luis Romero, por haber depositado su confianza en mí para los años que vienen.

A mis compañeros: por las juntadas de estudio, por su solidaridad al momento de prestarme sus carpetas para preparar exámenes, por las charlas, los asados, las bondiolas post-parcial en los carritos de costanera, los viajes a las reuniones de la UMA y todo lo compartido fuera del ámbito académico. Espero no olvidarme de nadie, y si así fuera pido disculpas. Mil gracias Andrés M. R., Aye, Bruno, Carlo, Dani C., Dani K., Di, Diego, Facu P., Fede M., Euge B., Fran V., Gise, Ivan S., Ivan R., Javi B., Jaz, Juli, Juanma, Kari, Luz, Lupi, Mauro, Mauri M., Mari, Mati, Maca, Maga, Maxi, Mer, Melanie, Meli, Nacho Pota, Nahuel, Namis, Nati, Nico Villagrán, Pau, Pancho K., Santi D., Santi V., Sofi, Tincho M., Tincho V. y Yami. A Marcelo Paredes no sólo por ser un gran compañero, sino por tus talleres que tanto me sirvieron.

A mis amigos del DC: Raúl, Julián, Pablo, Saveliy y Lean.

A José, Juan D. y Juan Z. porque cuando más necesitaba renovar las ganas para

terminar de cursar, preparar los finales y encarar esta tesis, ustedes estaban ahí y todo fue más sencillo. A sus familias, porque ellos pusieron todo de su parte para que llegáramos al objetivo que nos propusimos. Porque llegamos. A Javi García por las charlas, almuerzos, las vueltas en el auto después de cursar y el apoyo moral. A Gastón Bujía por haber estado siempre.

A los amigos de la infancia y adolescencia: Fede, Lovi, Maxi, Nacho y Seba, porque a pesar de los años nos seguimos viendo y seguimos compartiendo la vida.

A Fran Pesa, 8a, y Barto, por todas las anécdotas bellavistenses.

A los pibes del Conservatorio: Cristian, David H., Emi, Isra, Leo, por una amistad que ya tiene 20 años y una pasión compartida por la música. En especial a David P. y Carlina por haberme elegido para ser parte de su familia.

Al Colegio Monseñor Terrero y sus profesores. Especialmente quería agradecerle a (sin ningún orden en particular): Claudia Ísola, Mariana Gigena, Eduardo Cancio, Iris García Heredia, Ana María Lederer, Ana Battista y Roque Bazán porque me dieron buena parte de las herramientas que necesité para poder arrancar (y terminar) esta etapa.

Capítulo 1

Introducción

La ecuación de onda es uno de los ejemplos más elementales dentro de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La misma nos permite, entre otras aplicaciones, describir cómo es el movimiento de una cuerda o membrana vibrante.

Veremos a lo largo de este trabajo, que la búsqueda de soluciones para esta ecuación, está íntimamente ligada a la búsqueda de autovalores del operador Laplaciano (con condiciones de borde Dirichlet homogéneas).

Este conjunto de autovalores recibirá el nombre de *espectro*, que calculado sobre un intervalo en la recta, resultan ser las frecuencias que pueden oírse al hacer sonar la cuerda que es modelada por ese intervalo. Desde la Física o bien en la terminología musical, nos referimos a este conjunto como los *armónicos* de la cuerda.

Veremos que si dos intervalos de la recta poseen el mismo espectro, entonces ambos intervalos tienen la misma longitud, lo cual caracteriza a esta región, a menos de una traslación.

Uno podría preguntarse si esta identificación entre una región y el espectro del mencionado operador, es válida enunciada para alguna clase de dominios en el plano. Puesto en términos musicales, Marc Kac en su célebre artículo [Kac66] se preguntó:

> Si uno tuviera oído absoluto y escuchara un tambor, ¿podría decir qué forma tiene el mismo?

De esta forma, tomó impulso el área luego denominada *geometría espectral* que tiene por objetivo estudiar la determinación espectral de dominios en el plano y más en general la determinación espectral de variedades diferenciales, en cuyo caso, el operador que generaliza al Laplaciano, es el operador de Laplace-Beltrami.

Si la respuesta fuera afirmativa, esto podría ser el disparador de una cantidad importante de aplicaciones. A modo de analogía podemos pensar en las huellas dactilares de un ser humano: dos personas distintas, tienen huellas dactilares distintas. Ante la necesidad de saber si dos personas son esencialmente la misma persona, se pueden comparar los registros dactilares. Si tales registros coinciden, entonces lógicamente la persona es la misma y si tales registros no coinciden, entonces estamos ante dos personas distintas.

La determinación espectral de una clase de dominios es por sí misma un resultado muy importante para geómetras y analistas, y tal como fuera ilustrado con la analogía anterior,

Figura 1.1: Movimiento de una cuerda con extremos fijos

podría ser una herramienta con aplicaciones computacionales en materia de protección de derechos de autor, indexación de registros en bases de datos e incluso procesamiento de imágenes médicas [Nie+07].

Respecto a la pregunta de Kac, pasaron 30 años para que alguien pudiera dar una respuesta. En esa oportunidad Gordon, Webb y Wolpert exhibieron en [GWW92], dos polígonos en el plano isoespectrales pero no isométricos.

Con estos ejemplos, la pregunta de Kac quedó respondida: no es posible con toda generalidad, reconstruir la geometría de un dominio en el plano sólo conociendo su espectro. Sin embargo, si supiéramos que la región pertenece a una clase de dominios, podríamos restringir el problema a tratar de averiguar si dentro de esa clase de dominios, la región queda determinada por su espectro.

De esta forma, existen casos concretos donde es posible responder afirmativamente la pregunta de Kac y en este trabajo, intentaremos analizar algunas de las técnicas utilizadas para demostrar esta conexión (siempre y cuando esto sea posible).

1.1. Caso unidimensional

Como motivación para entender la pregunta de Kac, vamos a ver un caso elemental. Consideremos una cuerda, sujeta a una cierta tensión uniforme en sus bordes, cuyo movimiento se da en la dirección perpendicular a su plano original. Para modelar esto, consideramos un intervalo $\Omega = [0, l] \subseteq \mathbb{R}$, y llamamos $u : \Omega \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ a la función que nos indica el movimiento de la cuerda, en el lugar $x \in \Omega$, a tiempo $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. La figura 1.1 ilustra este movimiento.

Sabiendo que u obedece a la ecuación de onda y que los extremos de la cuerda están fijos, obtenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{si } x \in (0, l) \ , \quad (1.1) \\ u(x,t) = 0 & \text{si } x \in \{0, l\} \text{ y } t > 0 \ , \quad (1.2) \end{cases}$$

donde c es una constante dependiente del medio físico y de la tensión en los bordes.

Una posible forma de obtener soluciones para esta ecuación es a través del método de separación de variables donde supondremos que u puede ser expresada como $u(x,t) = f(x)g(t)$.

Aplicando la ecuación a $u(x,t) = f(x)g(t)$ obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ,$$

$$\iff \qquad f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t) \ ,$$
$$\iff \qquad \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)} \ .$$

Como el término izquierdo sólo depende de x y el término derecho sólo depende de t, esto implica necesariamente que existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)} = \lambda \ . \tag{1.3}$$

Reescribiendo la ecuación para f vemos que en particular, estamos buscando f y λ tales que:

$$f''(x) = \lambda f(x) \ .$$

Volviendo a (1.3) tenemos que:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda \ , \qquad \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)} = \lambda \ ,$$
$$\iff \qquad f''(x) = \lambda f(x) \ , \qquad g''(t) = c^2\lambda g(t) \ ,$$
$$\iff \qquad f''(x) - \lambda f(x) = 0 \ , \qquad g''(t) - c^2\lambda g(t) = 0 \ .$$

Si tomamos $f(x) = e^{rx}$ y $g(x) = e^{st}$ para constantes r y s a determinar, se tiene que son soluciones si y sólo si:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{rx} - \lambda e^{rx} = 0 \ , \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{st} - c^2\lambda e^{st} = 0 \ , \tag{1.4}$$
$$\iff \qquad (r^2 - \lambda)e^{rx} = 0 \ , \qquad (s^2 - c^2\lambda)e^{st} = 0 \ ,$$
$$\iff \qquad r^2 - \lambda = 0 \ , \qquad s^2 - c^2\lambda = 0 \ ,$$
$$\iff \qquad r = \pm\sqrt{\lambda} \ , \qquad s^2 = \pm c\sqrt{\lambda} \ .$$

Si $\lambda \neq 0$, entonces tenemos dos soluciones linealmente independientes $e^{\sqrt{\lambda}x}$ y $e^{-\sqrt{\lambda}x}$ para f. Como el sistema es de segundo orden, se tiene que las soluciones pertenecen a un espacio vectorial de dimensión 2, y por lo tanto, está generado por las soluciones halladas. Es decir, existen constantes a_1, a_2 tales que:

$$f(x) = a_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \ .$$

Análogamente, si $\lambda \neq 0$ tenemos dos soluciones linealmente independientes $e^{c\sqrt{\lambda}t}$ y $e^{-c\sqrt{\lambda}t}$ para g y existen constantes a_3, a_4 tales que

$$g(x) = a_3 e^{c\sqrt{\lambda}t} + a_4 e^{-c\sqrt{\lambda}t} \ .$$

Si $\lambda = 0$ entonces, la ecuación (1.4) se convierte en:

$$f'' = 0 \ , \qquad g'' = 0 \ ,$$

y la solución general es:

$$f(x) = a_1 + a_2 x \ , \qquad\qquad g(t) = a_3 + a_4 t \ ,$$

donde a_1, a_2, a_3, a_4 son constantes arbitrarias. Luego, las soluciones encontradas son:

$$u(x,t) = \begin{cases} (a_1 + a_2 x)(a_3 + a_4 t) & \text{si } \lambda = 0, \\ (a_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda}x})(a_3 e^{\sqrt{\lambda}x} + a_4 e^{-\sqrt{\lambda}x}) & \text{si } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Un detalle no menor es que si $f_i(x)g_i(t)$ soluciona la ecuación de onda (1.1) entonces, también lo hace $\sum_i d_i f_i(x) g_i(t)$, para cualquier elección de los d_i. Por otro lado, nos interesaría que la solución satisfaga la condición de borde (1.2), en particular esto ocurre si y sólo si:

$$\sum_i d_i f_i(0) g_i(t) = 0 \qquad \text{para todo } t > 0 \ ,$$
$$\sum_i d_i f_i(l) g_i(t) = 0 \qquad \text{para todo } t > 0 \ .$$

Si consideramos que los d_i son no nulos y que los $g_i(t)$ son linealmente independientes, entonces tiene que ocurrir que $f_i(0) = f_i(l) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Primero veamos el caso $\lambda = 0$. Vimos que en este caso, $f(x) = a_1 + a_2 x$. De la condición $f(0) = 0$ se tiene que $a_1 = 0$ y de la condición $f(l) = 0$ se tiene que $a_2 = 0$. Luego f es la función nula.

Ahora veamos el caso $\lambda \neq 0$. Luego $f(x) = a_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. De la condición $f(0) = 0$ obtenemos que $a_1 + a_2 = 0$, es decir $a_2 = -a_1$ y de la condición $f(l) = 0$ obtenemos que $a_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = a_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - a_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} = a_1(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}) = 0$. Como $a_1 \neq 0$, porque si no, estaríamos nuevamente en presencia de la solución trivial, se tiene que:

$$e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \iff e^{\sqrt{\lambda}l} = e^{-\sqrt{\lambda}l} \iff e^{2\sqrt{\lambda}l} = 1 \ ,$$

y esto ocurre si y sólo si para un $k \in \mathbb{N}$:

$$2\sqrt{\lambda}l = 2k\pi i \iff \sqrt{\lambda} = k\frac{\pi}{l} i \iff \lambda = -k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \ . \tag{1.5}$$

Reescribiendo tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x)g(t) &= a_1(e^{i\frac{k\pi}{l}x} - e^{-i\frac{k\pi}{l}x})(a_3 e^{i\frac{ck\pi}{l}t} + a_4 e^{-i\frac{ck\pi}{l}t}) \ , \\ &= 2ia_1 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\left[(a_3 + a_4)\cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + i(a_3 - a_4)\sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right)\right] \ , \\ &= \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\left[\alpha_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right)\right] \ , \end{aligned}$$

donde $\alpha_k = 2ia_1(a_3 + a_4)$ y $\beta_k = -2a_1(a_3 - a_4)$.

Podemos tomar como solución general de este problema a la siguiente expresión:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\left[\alpha_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right)\right] \ . \tag{1.6}$$

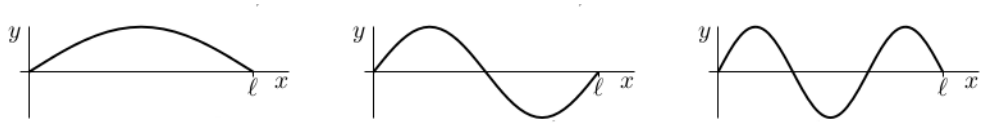


Figura 1.2: El tono fundamental, el primer armónico y el segundo armónico. Funciones obtenidas para $\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$ en los casos $k=1$, $k=2$, $k=3$, respectivamente.

Adicionalmente, observamos que:

$$h(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \ ,$$
$$z(x) = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{ck\pi}{l} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \ .$$

Cuando hacemos sonar una cuerda, además de resolver el sistema (1.1), estamos imponiendo las condiciones $u(x,0) = h(x)$ y $u_t(x,0) = z(x)$ para unas funciones determinadas h y z, que si son lo suficientemente suaves (por ejemplo pertenecen a $L^2([0,l])$), entonces admiten un desarrollo en serie de Fourier que nos va a permitir encontrar los coeficientes α_k y β_k deseados.

Notamos, que para cada t fijo, cada sumando de (1.6) es un múltiplo de $\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$ dando lugar a los llamados *modos* que pueden observarse en la figura 1.2.

Hay que remarcar que para encontrar soluciones a la ecuación de onda, tuvimos que resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} f''(x) = \lambda f(x) & \text{si } x \in (0,l) \ , \\ f(x) = 0 & \text{si } x \in \{0,l\} \ , \end{cases}$$

que es la búsqueda de autovalores para el operador Laplaciano con condiciones Dirichlet homogéneas.

Como vimos en (1.5), los autovalores son $\lambda_k = -k^2\frac{\pi^2}{l^2}$ y volviendo a la pregunta de Kac podemos responder que: si conociéramos la sucesión de autovalores del Laplaciano, entonces, podríamos dar la longitud de la cuerda. Más aún, alcanza con conocer el primer autovalor pues en ese caso $\lambda_1 = -\frac{\pi^2}{l^2}$ y por lo tanto $l = \sqrt{\frac{\pi}{-\lambda_1}}$.

Tal como mencionamos anteriormente, una pregunta que surge a partir de este resultado, es si esta correspondencia entre *región* y *autovalores* se sigue preservando para regiones que modelen el parche de un tambor en $\mathbb{R}^2$.

1.2. Reseña histórica del problema

Tanto el caso unidimensional, como así también el hecho de que las bolas estén espectralmente definidas, alimentan la esperanza de pensar que el espectro del Laplaciano

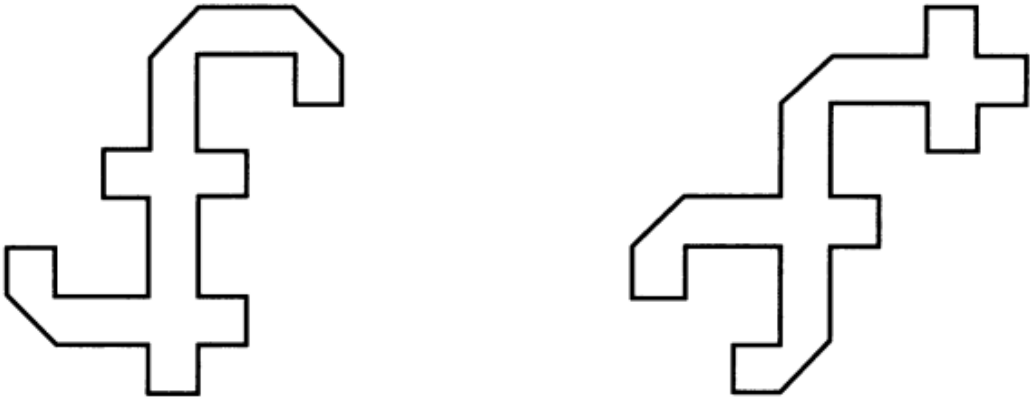


Figura 1.3: Dominios planares con idéntico espectro no isométricos

calculado sobre una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ defina su forma a menos de una isometría en el plano. Lamentablemente, esto no es así si la región Ω es arbitraria.

Ya en la época de Kac, Milnor mostró en [Mil64] con una demostración muy breve, que existen variedades en $\mathbb{R}^{16}$ con igual espectro pero que no son isométricas.

En 1985, Sunada, exhibió en [Sun85] un método algebraico para encontrar variedades de dimensión cuatro, con igual espectro pero no isométricas. Un año más tarde, Buser pudo adaptar el método para encontrar variedades de dimensión dos isoespectrales pero no isométricas. Para ese entonces, la pregunta de Kac, seguía abierta pues, aún faltaba saber qué ocurría en dominios planares (es decir, en $\mathbb{R}^2$).

Fueron Gordon, Webb y Wolpert quienes en 1992, pudieron adaptar en [GWW92] el método de Sunada para encontrar dominios planares isoespectrales que no eran isométricos.

De esta forma, quedaba probado que la asignación dominio-espectro no era inyectiva.

Muchos de los investigadores que venían siguiendo el problema, cesaron en su interés por continuar desarrollando esta área que Kac había impulsado. No obstante, uno podría seguir preguntándose qué otras propiedades son invariantes por espectro o bien, cuáles son las condiciones que hay que imponer para que un conjunto quede definido por el mismo.

En ese sentido, una de las variantes posibles se da cuando consideramos dominios con borde poligonal. En esta dirección fue que Durso logró demostrar en [Dur88] que los triángulos quedaban espectralmente determinados dentro de la clase de triángulos a partir del análisis de las singularidades de la traza del operador solución para la ecuación de onda.

Mucho tiempo después, Grieser y Maronna pudieron dar una demostración alternativa de este hecho en [GM13]. La misma toma una idea que Kac había sugerido, utilizando la traza del operador solución de la ecuación de calor. Para manipular adecuadamente la misma se emplea la expresión asintótica enunciada en [BS88].

1.3. Objetivo del trabajo

El objetivo del presente trabajo es comprender y analizar con profundidad los resultados exhibidos en [GM13].

Para lograr tal objetivo, describiremos en el capítulo 2, algunas generalidades acerca de los autovalores del Laplaciano con condiciones de borde Dirichlet homogéneas. A modo de ejemplo, procederemos en la sección 2.1.4 a realizar el cálculo del espectro de un rectángulo. Demostraremos cómo el espectro es invariante por traslaciones en la sección 2.3 para luego poder formular correctamente la pregunta de Kac en la sección 2.3.1.

En el capítulo 3 analizaremos una herramienta clave para la demostración del resultado principal, que es la estimación asintótica de la traza del calor en dominios con frontera poligonal. En la sección 3.1 realizaremos la demostración de la misma asumiendo las cotas demostradas en [BS88]. En la Sección 3.2, teniendo presente que tenemos el espectro del rectángulo, daremos una demostración de esta expresión en este caso particular.

En el capítulo 4 realizaremos la demostración del resultado principal, que es la determinación espectral de los triángulos dentro de la clase de triángulos en el plano, basado en las ideas de [GM13].

Por último, en el capítulo 5, comentaremos el artículo [EG17], que con las mismas herramientas manipuladas en el Capítulo 4, obtiene un resultado de determinación espectral para una clase de polígonos que incluye a los polígonos regulares.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Los autovalores del Laplaciano

Dado un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (de ahora en más, un dominio será un conjunto abierto acotado), consideramos el problema de encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ y una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que cumplan las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \ , \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \ , \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}$ es el operador Laplaciano. En caso de que el par (u, λ) diera solución al problema, diremos que λ es un *autovalor Dirichlet* del dominio Ω y u será una *autofunción* asociada a λ. Además, diremos en este caso que u es una solución **clásica** del problema. Observemos que:

- Por comodidad de ahora en más hablaremos de los autovalores del Laplaciano negativo tal como lo planteamos en (2.1).
- Si (u, λ) es una solución, también lo es $(\alpha u, \lambda)$ para todo número α.
- Excluímos la solución trivial $u \equiv 0$.

Un detalle es que para encontrar soluciones no triviales, λ debe ser positivo, puesto que si tenemos un par (u, λ) solución :

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega u^2 dV &= \int_\Omega (\lambda u) u \, dV \ , \\ &= \int_\Omega -(\Delta u) u \, dV \ , \qquad \text{Utilizando que } (u, \lambda) \text{ es solución.} \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dV \ , \qquad \text{Utilizando la primera identidad de Green.} \\ &= \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \ dV \ , \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Más aún, la desigualdad es estricta si $u \not\equiv 0$.

Dejando de lado la condición de borde, (2.1) es equivalente a $-\Delta u + tu = 0$ con $t = -\lambda$. En ese caso, podemos dar una formulación débil del problema preguntándonos si existen $u \in H_0^1(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfaciendo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \lambda \int_\Omega uv \; dx \qquad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

Cada vez que u satisfaga (2.3), diremos que se trata de una solución **débil** del problema. Lo interesante en este caso es que con las mismas herramientas que se utilizaron en la ecuación (2.2) se puede probar que dada una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ es una solución *clásica* si y sólo si es una solución *débil*.

Respecto de la regularidad, podemos decir que si el dominio Ω tiene frontera suave, entonces, las soluciones débiles que encontremos en $H_0^1(\Omega)$, pertenecerán a $C^\infty(\Omega)$. La demostración de este hecho proviene de aplicar el Corolario 8.11 del libro [GT01].

De esta forma, el problema clásico se puede debilitar y emplear todas las herramientas que nos provee el Análisis Funcional para poder dar una respuesta definitiva a la existencia de soluciones.

2.1.1. Formas bilineales

Resulta imprescindible introducir conceptos provenientes del Análisis Funcional para poder dar una respuesta a la existencia de autovalores de nuestro problema [1]. Uno de los elementos principales para las formulaciones variacionales de los problemas de condiciones de frontera son las *formas bilineales*. Dados dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales V_1, V_2, una **forma bilineal** en $V_1 \times V_2$ es una función

$$a : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R} \; ,$$

satisfaciendo las siguientes propiedades:

(I) Para cada $y \in V_2$ la función

$$x \longmapsto a(x, y) \; ,$$

es lineal en V_1.

(II) Para cada $x \in V_1$ la función

$$y \longmapsto a(x, y) \; ,$$

es lineal en V_2.

Si $V_1 = V_2$ decimos que a es una forma bilineal en V.

Algunos ejemplos:

- El producto interno de un espacio de Hilbert es un caso particular de una forma bilineal.

[1] Las siguientes secciones referidas a los planteos abstractos variacionales están basadas en el capítulo 6 de [Sal08]. Aquellas demostraciones que se hayan omitido pueden encontrarse allí.

- Si Ω es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \, ds \ ,$$

es una forma bilineal en $C^1(\overline{\Omega})$.

Es conveniente recordar que el espacio dual de un $\mathbb{R}-$espacio vectorial V es el conjunto de todos los funcionales lineales continuos de V en el cuerpo base $\mathbb{R}$. Dos notaciones usuales para referirse a este conjunto son V' o V^*. Si u es un elemento de V podemos definir F_u para todo $v \in V$ de la siguiente forma:

$$F_u(v) = \langle v, u \rangle \ ,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno del espacio. Notar que $F_u \in V^*$. Esto permite definir una asignación

$$\begin{aligned} \Phi \colon V &\to V^* \ , \\ u &\mapsto F_u \ . \end{aligned}$$

Si V es un espacio de Hilbert, esta asignación es biyectiva (a este hecho se lo denomina teorema de representación de Riesz). Más aún, se trata de un isomorfismo isométrico entre espacios de Hilbert. Este hecho, justifica la notación $\langle u, v \rangle_*$ para referirse a la evaluación del funcional $F_u \in V^*$, en $v \in V$, es decir, $F_u(v)$.

Sea V un espacio de Hilbert, una forma bilineal a en V y $F \in V^*$, consideramos el problema de encontrar $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = F(v). \tag{2.4}$$

Un resultado fundamental para poder justificar la existencia de soluciones es el siguiente

Teorema 2.1.1 (Lax - Milgram)**.** *Sea V un espacio de Hilbert. Sea $a = a(u,v)$ una forma bilineal en V. Si:*

(I) a es continua, es decir, existe una constante M tal que

$$|a(u,v)| \leqslant M \, \|u\| \, \|v\| \qquad \forall u, v \in V,$$

(II) a es coerciva en V, es decir, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geqslant \alpha \, \|v\|^2 \qquad \forall v \in V,$$

entonces existe una única solución $\overline{u} \in V$ del problema (2.4). Más aún, la siguiente desigualdad se satisface:

$$\|\overline{u}\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V^*} \ . \tag{2.5}$$

Observación 2.1.1. *La desigualdad* (2.5) *garantiza la* estabilidad *de las soluciones obtenidas del problema* (2.4)*. Dicho en otros términos, puesto que el teorema nos asegura que fijado un funcional $F \in V^*$ obtenemos una única solución $u(F) \in V$, esto nos da una asignación*

$$\begin{aligned} S_a \colon V^* &\to V \ , \\ F &\mapsto u(F) \ , \end{aligned}$$

que se encuentra bien definida. Adicionalmente, esta asignación es lineal. Para eso consideramos: λ, $\mu \in \mathbb{R}$; F_1, $F_2 \in V^*$; u_1, u_2 las soluciones correspondientes. Dada la bilinealidad de a, obtenemos:

$$\begin{aligned} a(\lambda u_1 + \mu u_2, v) &= \lambda a(u_1, v) + \mu a(u_2, v) \ , \\ &= \lambda \langle F_1, v \rangle_* + \mu \langle F_2, v \rangle_* \ , \\ &= \langle \lambda F_1 + \mu F_2, v \rangle_* \ . \end{aligned}$$

Puesto que la aplicación S_a es lineal, alcanza con ver que es acotada para ver que es continua, pero eso es exactamente lo que afirma la desigualdad (2.5)*. En particular, se tiene que:*

$$\|u_1 - u_2\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \|F_1 - F_2\|_{V^*} \ ,$$

por lo que si los funcionales están "cerca", las soluciones también lo están. Más aún, mientras más grande sea la constante de coercividad α, más "estable" es el operador solución S_a.

Una aplicación de Lax-Milgram

En la ecuación (2.2) vimos que los autovalores tenían que ser positivos, es decir, para admitir una autofunción que no sea trivial. El teorema 2.4 nos brinda otra posible justificación a este hecho. Consideramos $a_\lambda \colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$a_\lambda(u, v) \coloneqq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \lambda \int_\Omega uv \, dx \ ,$$

Recordemos que la formulación débil de nuestro problema es (2.3). Reescribiéndolo en términos de los objetos que acabamos de definir, nos interesa encontrar una $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que ocurra (2.4) tomando $V = H_0^1(\Omega)$, $a = a_\lambda$ y $F \equiv 0$. Supongamos entonces que $\lambda \leqslant 0$. Es claro que $u \equiv 0$, es una solución al problema. Para ver que es la única solución basta chequear que estamos bajo las hipótesis del teorema 2.1.1 el cual afirma que la solución existe y es única.

Que a_λ es una forma bilineal continua es fácil de verificar. Veamos que es coerciva:

$$\begin{aligned}
a_\lambda(u,u) &\coloneqq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx - \lambda \int_\Omega u^2 \, dx \ , \\
&= \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \ dx - \lambda \int_\Omega u^2 \, dx \ , \\
&\geqslant \underbrace{C}_{>0} \int_\Omega u^2 \, dx - \lambda \int_\Omega u^2 \, dx \ , \qquad \text{Utilizando la desigualdad de Poincaré.} \\
&\geqslant \underbrace{(C-\lambda)}_{>0} \int_\Omega u^2 \, dx \ , \\
&\geqslant (C-\lambda) \left(\|u\|_{L^2}\right)^2 dx \ , \\
&\geqslant \underbrace{(C-\lambda)\beta}_{>0} \left(\|u\|_{H_0^1}\right)^2 \ dx \ , \qquad \text{Pues } ||\cdot||_{L^2(\Omega)} \text{ y } ||\cdot||_{H_0^1(\Omega)} \text{ son equivalentes.}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Luego, si $\lambda \leqslant 0$, estamos bajo las hipótesis del teorema de Lax-Milgram, por lo que existe una única solución de (2.4), que por unicidad resulta ser la trivial. Por lo tanto, si queremos encontrar autovalores tiene que ser $\lambda \in (0, +\infty)$.

Espacios de Hilbert equipados o ternas de espacios de Hilbert

Hay que hacer mención a que en la formulación del problema de la ecuación (2.4) hay dos espacios con los que estamos trabajando simultáneamente: un espacio de Hilbert V donde buscamos soluciones u y por otro lado, el espacio dual V^* al que pertenece F. Sin perder de vista que lo que queremos resolver es una ecuación diferencial con condiciones de contorno, hay que mencionar que en este tipo de problemas aparece un tercer espacio H con las siguientes propiedades:

(I) $V \hookrightarrow H$, es decir V está contínuamente contenido en H. Esto significa que V está contenido en H y además la inclusión $I_{V\to H}$ es continua. Equivalentemente, existe $C > 0$ tal que:

$$\|u\|_H \leqslant C \|u\|_V \qquad \forall u \in V. \tag{2.7}$$

(II) V es denso en H.

Observación. *En el contexto de las formulaciones débiles de las ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno, V suele ser un espacio de Sobolev, y H suele ser $L^2(\Omega)$.*

Usando el teorema de representación de Riesz podemos identificar H con H^*. Además, podemos ver H dentro de V^*. Para llegar a esa conclusión, fijado un $u \in H$, es suficiente ver que el funcional F_u definido como

$$\langle F_u, v\rangle_* = \langle v, u\rangle_H \qquad \forall v \in V, \tag{2.8}$$

es continuo en V. De hecho la desigualdad de Schwartz y la ecuación (2.7) nos permiten obtener:

$$|\langle v, u\rangle_H| \leqslant \|v\|_H \|u\|_H \leqslant C \|v\|_V \|u\|_H \, . \tag{2.9}$$

Luego la asignación $u \to F_u$ es continua, de H en V^*, con $\|F_u\|_{V^*} \leqslant C \|u\|_H$. Además, si $F_u = 0$ entonces

$$\langle u, v\rangle_H = 0 \qquad \forall v \in H,$$

lo cual implica que $u = 0$, por la densidad de V en H.

Entonces, la asignación $u \to F_u$ es inyectiva y define una inclusión continua $I_{H\to V^*}$. Luego esta identificación nos permite escribir:

$$\langle u, v\rangle_* = \langle u, v\rangle_H \qquad \forall v \in V,$$

donde u en la izquierda es visto como un elemento de V^* y en la derecha como elemento de H.

Finalmente, se puede ver que V y H son densos en V^*, luego uno obtiene una serie de inclusiones

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^* \ ,$$

donde las inclusiones son continuas y densas. La construcción mencionada (V, H, V^*) recibe el nombre de terna de Hilbert. Otros nombres aceptados en la literatura son espacio de Hilbert equipado o terna de Gelfand.

Formas bilineales débilmente coercivas

Vimos que con el teorema de Lax-Milgram, podíamos justificar la existencia y unicidad de la ecuación (2.4) donde el problema implicaba una forma bilineal coerciva. La idea ahora, es generalizar este concepto para tratar un grupo de problemas más amplio. Para eso introducimos el siguientes concepto:

Definición 2.1.1. Una forma bilineal $a(u, v)$ se dice *débilmente coerciva* con respecto al par (V, H) si existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ tal que:

$$a(v, v) + \lambda_0 \|v\|^2 \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \qquad \forall v \in V, \tag{2.10}$$

La forma adjunta a^* de a está dada por:

$$a^*(u, v) = a(v, u),$$

obtenida intercambiando los argumentos en a.

Notaremos con $\mathcal{N}(a)$ y $\mathcal{N}(a^*)$ el conjunto de soluciones u y w de los problemas variacionales:

$$a(u, v) = 0 \qquad \forall v \in V, \qquad \text{y} \qquad a^*(w, v) = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Notemos que $\mathcal{N}(a)$ y $\mathcal{N}(a^*)$ son subespacios de V y juegan el rol de los *núcleos* de a y a^*.

Teorema 2.1.2. *Sea (V, H, V^*) una terna Hilbert, con V compactamente incluído en H. Sea $F \in V^*$, y a una forma bilineal en V, continua y debilmente coerciva con respecto a (V, H). Entonces:*

(a) O bien la ecuación

$$a(u,v) = \langle F, v\rangle_* \ , \tag{2.11}$$

tiene una única solución $\overline{u}$ *y existe* C *tal que*

$$\|\overline{u}\| \leqslant C \|F\|_{V^*} \ , \tag{2.12}$$

(b) o bien

$$\dim \mathcal{N}(a) = \dim \mathcal{N}(a^*) = d < \infty \ ,$$

y (2.11) *admite solución si y sólo si* $\langle F, w\rangle_* = 0$ *para cada* $w \in \mathcal{N}(a^*)$.

Para demostrar el teorema 2.1.2 hay que apelar a un hecho más general conocido como la alternativa de Fredholm. Lo que el teorema último nos dice es: o bien (2.11) tiene una solución única para cada $F \in V^*$ o bien la ecuación $a(u,v) = 0$ tiene soluciones no triviales. Las mismas conclusiones aplican para la ecuación "adjunta":

$$a^*(u,v) = \langle F, v\rangle_* \qquad \forall v \in V.$$

Si $w_1, \ldots, w_d$ generan $\mathcal{N}(a^*)$, (2.11) admite solución si y sólo si se dan las siguientes condiciones de compatibilidad

$$\langle F, w_j\rangle_* = 0 \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Si se dan estas condiciones, la ecuación (2.11) tiene infinitas soluciones dadas por

$$u = \overline{u} + \sum_{j=1}^{d} c_j z_j \ ,$$

donde $\overline{u}$ es una solución particular de (2.11) y $z_1, \ldots, z_j$ generan $\mathcal{N}(a)$ y $c_1, \ldots, c_j$ son constantes arbitrarias.

2.1.2. Teoría espectral para formas bilineales simétricas

Espectro de un operador compacto autoadjunto

Definición 2.1.2. Sea H un espacio de Hilbert, $L \in \mathcal{L}(H)$, e I la identidad en H.

(a) El conjunto resolvente $\rho(L)$ de L es el conjunto de los números reales λ tales que $L - \lambda I$ es biyectiva:

$$\rho(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} \colon L - \lambda I \text{ es biyectiva}\} \ .$$

(b) El espectro (real) $\sigma(L)$ de L es

$$\sigma(L) = \mathbb{R} \setminus \rho(L).$$

Observación 2.1.2. *Si* $\lambda \in \rho(L)$, *la resolvente* $(L - \lambda I)^{-1}$ *es un operador acotado.*[2]

[2] Esto es una consecuencia del teorema de gráfico cerrado: Si el gráfico de un operador lineal $A : H_1 \to H_2$ es cerrado en $H_1 \times H_2$ entonces A es acotado.

Si H es un espacio de dimensión finita, entonces L se representa como una matriz con lo cual su espectro está dado por los autovalores. Si por el contrario, H tiene dimensión infinita pueden darse tres situaciones en relación a $(L - \lambda I)^{-1}$:

(I) Puede ocurrir que $(L - \lambda I)$ no sea inyectiva, con lo cual $(L - \lambda I)^{-1}$ no existe. Eso significa que $\mathcal{N}(L - \lambda I) \neq \emptyset$ por lo que la ecuación

$$Lx = \lambda x \ , \tag{2.13}$$

tiene soluciones no triviales. En ese caso decimos que λ es un autovalor y las soluciones de (2.13) son autovectores asociados a λ. El espacio vectorial generado por los autovectores es el *autoespacio* de λ y lo notamos $\mathcal{N}(L - \lambda I)$.

Definición 2.1.3. El conjunto $\sigma_P(L)$ de los autovalores se L se llama el espectro puntual de L.

(II) Otra posibilidad es que $(L - \lambda I)$ sea inyectiva y que $\mathcal{R}(L - \lambda I)$ sea denso en H, pero $(L - \lambda I)^{-1}$ no sea acotado [3]. En este caso, decimos que λ pertenece al *espectro continuo* de L, que lo notamos $\sigma_C(L)$.

(III) La posibilidad restante es que $(L - \lambda I)$ sea inyectiva, pero $\mathcal{R}(L - \lambda I)$ no sea denso en H. Luego, λ pertenece al *espectro residual*.

Estamos en condiciones de enunciar el teorema central de esta sección:

Teorema 2.1.3. *Sea K un operador compacto y autoadjunto de un espacio de Hilbert, separable H. Entonces:*

(a) $0 \in \sigma(K)$ *y* $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_P(K) \setminus \{0\}$.

(b) H tiene una base ortonormal $\{u_m\}$ formada por autovectores de K.

(c) Si $\dim H = \infty$*, los autovalores distintos de cero $\{\lambda_m\}$ pueden ser ordenados de forma decreciente* $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_1| \geqslant \cdots$ *, con* $\lambda_m \to 0$ *cuando* $m \to \infty$.

Este teorema caracteriza el comportamiento de los autovalores de los operadores compactos y autoadjuntos, y esto es particularmente útil ya que muchas veces los operadores definidos en los problemas variacionales abstractos pertenecen a esta clase, o bien sus inversos lo son, con lo cual es una herramienta fundamental.

Espectro de una forma bilineal débilmente coerciva

Para definir el espectro y resolvente de una forma bilineal, consideramos una terna de Hilbert (V, H, V^*), con V incluído compactamente en H. Vamos a suponer que H es separable. Sea a una forma bilineal en V, continua, y débilmente coerciva. En particular consideramos:

$$a_{\lambda_0}(u, v) \coloneqq a(u, v) + \lambda_0 \langle u, v \rangle_H \ , \tag{2.14}$$

[3] En este contexto $\mathcal{R}(\cdot)$ denota el *rango* o imagen del operador

donde λ_0 es tal que:

$$a_{\lambda_0}(v,v) = a(v,v) + \lambda_0 \|v\|_H^2 \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \qquad \forall v \in V. \tag{2.15}$$

Consideramos el problema de encontrar $u \in V$ tal que:

$$a(u,v) = \lambda \langle u, v \rangle_H + \langle F, v \rangle_* \qquad \forall v \in V. \tag{2.16}$$

El conjunto *resolvente* $\rho(a)$ está formado por los números reales λ tal que (2.16) tiene solución única $u(F)$ cualquiera sea $F \in V^*$ y la función que a cada F le asigna la solución $u(F)$

$$S(a,\lambda) : F \mapsto u(F) \ ,$$

es un isomorfismo entre V^* y V. Por otro lado, el espectro real de a es $\sigma(a) = \mathbb{R} \setminus \rho(a)$ y el espectro puntual $\sigma_P(a)$ es el subconjunto del espectro dado por los autovalores, o sea, aquellos λ tales que la ecuación

$$a(u,v) = \lambda \langle u, v \rangle_H \qquad \forall v \in V \ ,$$

tenga soluciones u no triviales. Llamamos a ese conjunto de soluciones el *autoespacio* asociado a λ y lo notaremos $\mathcal{N}(a,\lambda)$.

Observación 2.1.3. *Como corolario del teorema* (2.1.2) *("Alternativa de Fredholm" aplicada a formas bilineales), se tiene que* $\sigma(a) = \sigma_P(a)$.

Vamos a considerar $S_{\lambda_0} \in \mathcal{L}(H)$ definido como la restricción de $S(a_{\lambda_0}, 0)$ a H, es decir:

$$H \xhookrightarrow{i_1} V^* \xrightarrow{S(a_{\lambda_0},0)} V \xhookrightarrow{i_2} H \ .$$
$$\qquad\qquad\qquad

$$\iff \qquad \underbrace{a_{\lambda_0}(u,v) - \lambda\langle u,v\rangle_H}_{\text{Es una forma bilineal coerciva}} = \langle F,v\rangle_* \qquad \forall v \in V. \tag{2.18}$$

Es claro que $\overline{a}(u,v) \coloneqq a_{\lambda_0}(u,v) - \lambda\langle u,v\rangle_H$ es una forma bilineal en $V \times V$ continua. Para ver que es coerciva, consideramos $v \in V$ arbitraria y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\overline{a}(v,v) &= a_{\lambda_0}(v,v) - \lambda\langle v,v\rangle_H, \\
&= a(v,v) + \lambda_0\langle v,v\rangle_H - \lambda\langle v,v\rangle_H, \\
&= a(v,v) + \lambda_0 \|v\|_H^2 - \lambda \|v\|_H^2, \\
&= a(v,v) + (\lambda_0 \underbrace{-\lambda}_{\geqslant 0}) \|v\|_H^2, \\
&\geqslant a(v,v) + \lambda_0 \|v\|_H^2, \\
&\geqslant \alpha \|v\|_H^2,
\end{aligned}$$

por lo que por el teorema de Lax-Milgram existe $u \in V$ solución única para (2.18). □

Observación 2.1.6. *$\lambda \in \sigma_P(a_{\lambda_0})$ si y solo si $\mu = 1/\lambda \in \sigma_P(S_{\lambda_0})$. Más aún:*

$$\mathcal{N}(a_{\lambda_0},\lambda) = \mathcal{N}(S_{\lambda_0} - \mu I)\ , \tag{2.19}$$

y en virtud del teorema (2.1.2), $0 < \dim(\mathcal{N}(a_{\lambda_0},\lambda)) = d < \infty$. Diremos que d es la multiplicidad del autovalor λ.

Demostración. Si λ es autovalor de a_{λ_0}, existe $f \not\equiv 0 \in V$ tal que :

$$a_{\lambda_0}(f,v) = \lambda\langle f,v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{2.20}$$

Luego $f \in V \subseteq H$, y definiendo $\mu = 1/\lambda$, la ecuación (2.20) es equivalente a

$$a_{\lambda_0}(\mu f,v) = \langle f,v\rangle \qquad \forall v \in V, \tag{2.21}$$

por lo que

$$S_{\lambda_0} f = \mu f\,. \tag{2.22}$$

De aquí se ve que (2.20) es equivalente a (2.21), que a su vez implica (2.22). No obstante, también es cierto que (2.22) implica (2.21), por lo que son todas equivalencias. □

Una vez introducidos estos conceptos podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.1.4. *Sea (V,H,V^*) una terna de Hilbert con H separable y V compactamente contenido en H. Sea $\mathfrak{a}$ una forma bilineal simétrica en V, continua y débilmente coerciva. Entonces:*

(a) $\sigma(a) = \sigma_P(a) \subset (-\lambda_0, +\infty)$. En particular, los autovalores forman una sucesión creciente con $\lambda_m \to +\infty$ si hay infinitos autovalores distintos.

(b) Si u_k, u_j son autofunciones de distintos autovalores de a, entonces $a(u_k,u_j) = \langle u_k,u_j\rangle_H = 0$. Más aún, H tiene una base ortonormal $\{w_m\}$, donde cada w_m es una autofunción asociada a λ_m, para cada $m \geqslant 1$.

(c) Si $\{w_m\}_{m\geqslant 1}$ *denota una base ortonormal de* H *formada por autofunciones de* a*, entonces* $\left\{w_m/\sqrt{\lambda_m+\lambda_0}\right\}_m$ *es una base ortonormal de* V *con respecto al producto*

$$\langle u,v\rangle_{\tilde{V}} \coloneqq a(u,v)+\lambda_0\langle u,v\rangle.$$

Demostración. Para ver *(a)*, recordemos que $S_{\lambda_0}\in\mathcal{L}(H)$ está definido como la restricción de $S(a_{\lambda_0},0)$ a H, es decir:

$$H \xhookrightarrow{\ i_1\ } V^* \xrightarrow{\ S\,(a_{\lambda_0},0)\ } V \xhookrightarrow{\ i_2\ } H\ ,$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad S_{\lambda_0}$$

donde $S(a_{\lambda_0},0)\circ i_1$ es continua y i_2 es un operador compacto. Luego, S_{λ_0} es un operador compacto de H en H. Por otro lado, por la simetría de a, se tiene que S_{λ_0} es autoadjunto, esto es:

$$\langle S_{\lambda_0}f,g\rangle_H=\langle f,S_{\lambda_0}g\rangle_H \qquad \forall f,g\in H\ .$$

Para ver esto, definimos $u=S_{\lambda_0}f$ y $w=S_{\lambda_0}g$. Luego, para cada $v\in V$,

$$a_{\lambda_0}(u,v)=\langle f,v\rangle_H \quad \text{y} \quad a_{\lambda_0}(w,v)=\langle g,v\rangle_H\ .$$

En particular,

$$a_{\lambda_0}(u,w)=\langle f,w\rangle_H \quad \text{y} \quad a_{\lambda_0}(w,u)=\langle g,u\rangle_H\ ,$$

por lo que $a_{\lambda_0}(u,w)=a_{\lambda_0}(w,u)$ y $\langle g,u\rangle=\langle u,g\rangle$ podemos escribir

$$\langle S_{\lambda_0}f,g\rangle_H=\langle u,g\rangle_H=\langle f,w\rangle_H=\langle f,S_{\lambda_0}g\rangle_H\,.$$

Luego, por el teorema 2.1.3 – teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos – y puesto que $0\notin\sigma_P(S_{\lambda_0})$, se sigue que $\sigma(S_{\lambda_0})\setminus\{0\}=\sigma_P(S_{\lambda_0})\setminus\{0\}=\sigma_P(S_{\lambda_0})$ y los autovalores de S_{λ_0} forman una sucesión no creciente $\{\mu_m\}$ tal que $\mu_m\longrightarrow 0$. En vistas de la observación 2.1.6, $\lambda\in\sigma_P(a_{\lambda_0})$ si y solo si $\mu=1/\lambda\in\sigma_P(S_{\lambda_0})$, por lo que $\sigma_P(a_{\lambda_0})$ puede ser expresado como una sucesión creciente de autovalores $\{\lambda_m^0\}$ donde los mismos se repiten de acuerdo a la multiplicidad de cada autovalor, con $\lambda_m^0\longrightarrow\infty$. Para terminar de probar la parte *(a)* basta con verificar que los autovalores de a son $\lambda_m=\lambda_m^0-\lambda_0$.

Para ver la parte *(b)*, consideramos u_k, u_j, dos autofunciones correspondientes con λ_k y λ_j respectivamente, con $\lambda_k\neq\lambda_j$. Luego

$$a(u_k,u_j)=\lambda_k\langle u_k,u_j\rangle_H \quad \text{y} \quad a(u_k,u_j)=\lambda_j\langle u_k,u_j\rangle_H.$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$(\lambda_k-\lambda_j)\langle u_k,u_j\rangle_H=0,$$

por lo que $\langle u_k,u_j\rangle_H=0=a(u_k,u_j)$. Más aún, considerando la parte *(b)* del teorema 2.1.3, H tiene una base ortonormal $\{w_m\}_{m\geqslant 1}$ de autovectores correspondientes a $\{\lambda_m\}_{m\geqslant 1}$.

Para ver *(c)*, observamos que [4]

$$a(w_m,w_k)=\lambda_m\langle w_m,w_k\rangle_H=\lambda_m\delta_{mk}\ ,$$

[4] En lo que sigue δ_{mk} es la delta de Kronecker.

por lo que

$$\begin{aligned}\langle w_m, w_k\rangle_{\tilde{V}} &= a(w_m, w_k) + \lambda_0 \langle w_m, w_k\rangle_H \ , \\ &= \lambda_m \delta_{mk} + \lambda_0 \delta_{mk} \ , \\ &= (\lambda_m + \lambda_0)\, \delta_{mk} \ .\end{aligned}$$

Esto muestra que $\left\{w_m/\sqrt{\lambda_m + \lambda_0}\right\}_m$ es un conjunto ortonormal en V para el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{V}}$. Para ver que es una base, alcanza con mostrar que el único elemento en V ortogonal a todos los w_m es $v = 0$. Para eso consideramos $v \in V$ y suponemos que

$$\langle v, w_m\rangle_{\tilde{V}} \coloneqq a(v, w_m) + \lambda_0 \langle v, w_m\rangle_H = 0 \qquad \forall m \geqslant 1.$$

Puesto que $a(v, w_m) = \lambda_m \langle v, w_m\rangle_H$, se tiene que

$$(\lambda_m + \lambda_0)\langle v, w_m\rangle_H = 0 \qquad \forall m \geqslant 1,$$

y puesto que $(\lambda_m + \lambda_0) \in \sigma_P(a_{\lambda_0})$ y $0 \notin \sigma_P(a_{\lambda_0})$ se tiene que para cada $m \geqslant 1$

$$\langle v, w_m\rangle_H = 0.$$

Como $\{w_m\}$ es una base en H se tiene que $v = 0$. □

2.1.3. Existencia de soluciones para el problema espectral

Nos interesaría poder escribir (2.1) como un problema abstracto de autovalores y utilizar todas las herramientas provistas en la sección anterior para autovalores de formas bilineales en espacios de Hilbert equipados.

Introducimos la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$:

$$a(u, v) \coloneqq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, . \tag{2.23}$$

La misma es una forma bilineal continua:

$$|a(u, v)| \leqslant \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.24}$$

simétrica:

$$a(u, v) = a(v, u), \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.25}$$

y además es coerciva, pues:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, , && (2.26)\\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \ , && (2.27)\\ &\geqslant C \int_\Omega |u|^2 && (2.28)\\ &\geqslant C \, \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \ , && (2.29)\end{aligned}$$

utilizando la desigualdad de Poincaré, en particular una forma bilineal coerciva es débilmente coerciva con $\lambda_0 = 0$.

Recordemos que habíamos visto que la búsqueda de autovalores del Laplaciano es equivalente a :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega uv\,, \qquad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

que reescrito en términos de la notación introducida es

$$a(u,v) = \lambda \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)}, \qquad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.30}$$

Para utilizar lo visto en la sección anterior veamos que $\left(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), (H_0^1(\Omega))^*\right)$ es una terna de Hilbert:

- La inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es continua y compacta[5].
- $H_0^1(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$. Puesto que $C_0^\infty(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ y dado que el conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ es denso[6] en $L^2(\Omega)$ también lo es $H_0^1(\Omega)$.
- $L^2(\Omega)$ es separable[7].

Teniendo en cuenta estas observaciones, podemos aplicar el teorema (2.1.4) a la forma bilineal a obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 2.1.5. *Si Ω es acotado:*

(I) Existe una base ortonormal $\{w_m\}_{m\geqslant 1}$ de $L^2(\Omega)$ formada por autofunciones del operador Laplaciano con condiciones homogéneas.

(II) Los autovalores correspondientes $\{\lambda_m\}_{m\geqslant 1}$ forman una sucesión monótona creciente

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots \nearrow \infty\,,$$

donde cada autovalor aparece tantas veces como la dimensión de su autoespacio asociado, esto es, una cantidad finita de veces.

(III) El conjunto $\left\{w_m/\sqrt{\lambda_m}\right\}_{m\geqslant 1}$ es una base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$ con respecto al producto interno:

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Observación 2.1.7. *Dado un autovalor λ_k, el término* multiplicidad*, hace referencia a la dimensión del autoespacio asociado al mismo.*

Definición 2.1.4. El teorema 2.1.5 nos dice que fijado un dominio Ω podemos obtener la sucesión de autovalores Dirichlet $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, la cual denominaremos *el espectro* de Ω que denotaremos $\sigma(\Omega) \coloneqq (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Observación 2.1.8. *La mayor ventaja de las herramientas vistas en esta sección es que fácilmente permiten estudiar otros tipos de problemas de autovalores (por ejemplo el espectro del Laplaciano con condiciones de borde Neumann), donde alcanza con definir adecuadamente la formulación débil del problema y probar que los espacios que jueguen el rol de (V, H, V^*) conformen una terna de Hilbert, con V compactamente incluído en H.*

[5]Este es el teorema de Rellich, una demostración puede verse en [Agh07].
[6]Puede verse una demostración de este hecho en el Corolario 9.8 de [Bre11].
[7]Para mayor detalle puede consultarse la Sección 4.3 de [Bre11].

2.1.4. Cálculo del espectro del rectángulo

Generalmente, el cálculo de $\sigma(\Omega)$ no suele ser sencillo, pero a modo de ejemplo realizaremos el cálculo del espectro de un rectángulo.

Consideremos $l, h \in \mathbb{R}$. Vamos a trabajar en la región

$$\Omega \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,l),\, y \in (0,h)\right\},$$

que es el interior del rectángulo de lado l y altura h. Nos interesa encontrar una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que cumpla

$$-\Delta u(x,y) = \lambda^2 u(x,y)\ , \tag{2.31}$$

y además queremos que

$$u(0,y) = u(l,y) = u(x,0) = u(x,h) = 0\ , \tag{2.32}$$

para $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y \leqslant h$.

Observación. *La razón por la cual consideramos λ^2 en lugar de λ en (2.31) es porque sabemos que los mismos serán positivos y de esa forma se puede simplificar la notación a futuro.*

Vamos a proponer encontrar alguna solución mediante el método de separación de variables, por lo que suponemos que $u(x,y) = X(x)Y(y)$ con las condiciones

$$X(0) = X(l) = 0, \qquad\qquad Y(0) = Y(h) = 0.$$

Sustituyendo en (2.31) obtenemos que

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda^2 = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu^2\ ,$$

donde μ es una constante que introducimos.

Sea $\nu^2 = \lambda^2 - \mu^2$, tenemos que resolver estos dos sistemas de ecuaciones de una sola variable:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0\ , \\ X(0) = X(l) = 0\ , \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0\ , \\ Y(0) = Y(h) = 0\ , \end{cases},$$

y las soluciones son:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_m \sin \mu_m x, & \mu_m &= \frac{m\pi}{l}, \\ Y(y) &= B_n \sin \nu_n y, & \nu_n &= \frac{n\pi}{h}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde $m, n \in \mathbb{N}$. Como $\lambda^2 = \nu^2 + \mu^2$, tenemos que

$$\lambda_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{h^2}\right)\ , \qquad\qquad m,n \in \mathbb{N}\ ,$$

$$X(x)Y(y) = C_{nm} \left(\sin \frac{m\pi}{l} x\right) \left(\sin \frac{n\pi}{h} y\right)\ , \qquad m,n \in \mathbb{N},\ C_{nm} \in \mathbb{R}.$$

Llegamos a la conclusión de que esas son todas las autofunciones que pueden obtenerse mediante separación de variables. Nos preguntamos ahora si puede existir alguna autofunción que no provenga de hacer este procedimiento y en ese caso, haber quizás omitido algún autovalor.

Para dar una respuesta a este hecho recordemos que $\left\{\frac{\sin\mu_m x}{\|\sin\mu_m x\|}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una base del espacio de Hilbert[8] $L^2([0,l])$, y análogamente $\left\{\frac{\sin\nu_n y}{\|\sin\nu_n y\|}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $L^2([0,h])$. Una consecuencia de esto es que, $\left\{\frac{(\sin\mu_m x)(\sin\nu_n x)}{\|\{(\sin\mu_m x)(\sin\nu_n x)\}\|}\right\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ es una base de $L^2(\overline{\Omega})$, cuestión que veremos a continuación.

Para poder justificar este hecho, mostraremos que toda función $f \in L^2(\overline{\Omega})$ podrá ser aproximada por productos de funciones en variables separadas y luego, que cada una de estas puede ser aproximada por elementos del $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por $\left\{\frac{(\sin\mu_m x)(\sin\nu_n x)}{\|\{(\sin\mu_m x)(\sin\nu_n x)\}\|}\right\}_{m,n\in\mathbb{N}}$.

Recordemos el teorema de Stone Weierstrass:

Teorema 2.1.6 (Stone-Weierstrass)**.** *Sea X un espacio métrico compacto y el conjunto*

$$C(X,\mathbb{R}) = \{f : X \mapsto \mathbb{R} : f \text{ es continua}\},$$

dotado con la norma del supremo $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Sea A una subálgebra unitaria de $C(X,\mathbb{R})$, es decir, que contiene alguna función constante distinta de 0, decimos que separa puntos si para cada par x e y en X, existe una función $p \in A$ tal que $p(x) \neq p(y)$. Luego A es densa en $C(X,\mathbb{R})$ si y sólo si A separa puntos.

En particular, como $[0,l]\times[0,h]$ con la métrica subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es un espacio métrico compacto, consideramos A el álgebra generada por

$$\{f(x)g(y) : f \in C([0,l]),\ g \in C([0,h])\}$$

Es claro que la función constante

$$\begin{aligned} 1 : [0,l]\times[0,h] &\mapsto \mathbb{R}\ , \\ x &\mapsto 1\ , \end{aligned}$$

pertenece a A. Así mismo, si tomamos $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in [0,l]\times[0,h]$, consideramos las funciones:

$$\begin{aligned} f : [0,l] &\mapsto \mathbb{R}, & g : [0,h] &\mapsto \mathbb{R}, & f.g : [0,l]\times[0,h] &\mapsto \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{x-a_1}{b_1-a_1}, & y &\mapsto \frac{y-a_2}{b_2-a_2}, & (x,y) &\mapsto \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}. \end{aligned}$$

En efecto, f y g son ambas funciones continuas, $f.g(a_1,a_2) = 0$ y $f.g(b_1,b_2) = 1$, $f.g \in A$, luego A separa puntos. Por el teorema 2.1.6, A es denso en $C([0,l]\times[0,h],\mathbb{R})$

[8] Una base en un espacio de Hilbert es un sistema ortonormal completo.

con la métrica del supremo. Esto significa que para todo elemento $f \in C([0,l]\times[0,h],\mathbb{R})$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Lógicamente esto implica que la sucesión también converge en $L^2(\Omega)$ pues:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^2}^2 &= \int_{[0,l]\times[0,h]} |f_n - f|^2 \, dxdy \,, \\
&\leqslant \int_{[0,l]\times[0,h]} \|f_n - f\|_\infty^2 \, dxdy \,, \\
&\leqslant \|f_n - f\|_\infty^2 \int_{[0,l]\times[0,h]} 1 \, dxdy \,, \\
&\leqslant \|f_n - f\|_\infty^2 \int_{[0,l]\times[0,h]} 1 \, dxdy \,, \\
&\leqslant \|f_n - f\|_\infty^2 \, lh \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} 0 -
\end{aligned}$$

Luego $\overline{A}^{L^2(\overline{\Omega})} = C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ y $\overline{C(\overline{\Omega},\mathbb{R})}^{L^2(\overline{\Omega})} = L^2(\overline{\Omega})$. En particular $\overline{A}^{L^2(\overline{\Omega})} = L^2(\overline{\Omega})$.

Sea:

$$B' \coloneqq \{(\sin\mu_m x)\,(\sin\nu_n y)\}_{m,n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(\overline{\Omega}).$$

Nótese que B' es un conjunto ortogonal, en particular si a cada elemento lo dividimos por su norma, nos queda un conjunto ortonormal en $L^2(\overline{\Omega})$ que llamaremos simplemente B. Nos gustaría ver que $\operatorname{span}(B)$ es denso en A provisto de la norma de $L^2(\Omega)$ y en ese caso B sería una base de este espacio de Hilbert. Como $\operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(B')$ por comodidad en la notación veremos que $\operatorname{span}(B')$ es denso en A. Para probarlo, alcanza con ver que cada elemento del conjunto generador de A:

$$\{f(x)g(y) : f \in C([0,l]),\ g \in C([0,h])\} \ ,$$

puede ser aproximado por elementos de $\operatorname{span}(B')$.

Sabemos que existen $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{b_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, tales que

$$\begin{aligned}
S_M^f &= \sum_{k=1}^{M} a_k \sin\mu_k\, x \xrightarrow[M\to\infty]{L^2} f \\
S_N^g &= \sum_{k=1}^{N} b_k \sin\nu_k\, y \xrightarrow[N\to\infty]{L^2} g \ .
\end{aligned}$$

Sea L un número natural, consideramos

$$S_L^f \cdot S_L^g = \sum_{p,q=1}^{L} a_p b_q \,(\sin\mu_p\, x)\,(\sin\nu_q\, y)\,.$$

Afirmamos que $S_L^f \cdot S_L^g \xrightarrow[L\to\infty]{L^2} f.g.$

Observación 2.1.9. *Podemos reescribir S_M^f de la siguiente forma*

$$S_M^f = \sum_{k=1}^{M} a_k \left\|\sin \mu_k x\right\|_{L^2((0,l))} \frac{\sin \mu_k x}{\left\|\sin \mu_k x\right\|_{L^2((0,l))}},$$

donde el interés de esta escritura es que la base utilizada es ortonormal. Luego:

$$\begin{aligned} \left\|S_M^f\right\|_{L^2((0,l))}^2 &= \sum_{k=1}^{M} \left|a_k \left\|\sin \mu_k x\right\|_{L^2((0,l))}\right|^2, && \textit{Usando que la base utilizada es ortonormal,} \\ &\leqslant \|f\|_{L^2((0,l))}^2, && \textit{Utilizando la desigualdad de Bessel.} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esto último, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\|f.g - S_L^f \cdot S_L^g\right\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \left\|f.g - S_L^f.g\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|S_L^f.g - S_L^f.S_L^g\right\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leqslant \left\|(f - S_L^f).g\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|S_L^f.(g - S_L^g)\right\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leqslant \left\|f - S_L^f\right\|_{L^2((0,l))} \|g\|_{L^2((0,h))} + \left\|S_L^f\right\|_{L^2((0,l))} . \|g - S_L^g\|_{L^2((0,h))}, \\ &\leqslant \underbrace{\left\|f - S_L^f\right\|_{L^2((0,l)}}_{\longrightarrow 0} \|g\|_{L^2(0,h)} + \|f\|_{L^2((0,l))} \cdot \underbrace{\|g - S_L^g\|_{L^2((0,h)))}}_{\longrightarrow 0} \cdot \end{aligned}$$

Como $S_L^f \cdot S_L^g$ son elementos de $\operatorname{span}(B') = \operatorname{span}(B)$ esto demuestra que $\operatorname{span}(B)$ es denso en A y por lo tanto en $L^2(\Omega)$, lo cual termina de justificar por qué B es una base de $L^2(\Omega)$.

Supongamos que existe una autofunción no trivial $\Phi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \subseteq L^2(\Omega)$ distinta de las mencionadas en (2.33). Luego, como B es base de $L^2(\Omega)$, se tiene que existen $\{d_{j_1,j_2}\}_{j_1,j_2} \subseteq \mathbb{R}$ tales que:

$$\Phi = \sum_{j_1,j_2=1}^{\infty} d_{j_1,j_2} (\sin \mu_{j_1} x)(\sin \nu_{j_2} y). \tag{2.34}$$

Notemos que:

$$d_{j_1,j_2} = \langle \Phi, (\sin \mu_{j_1} x)(\sin \nu_{j_2} y) \rangle = 0, \tag{2.35}$$

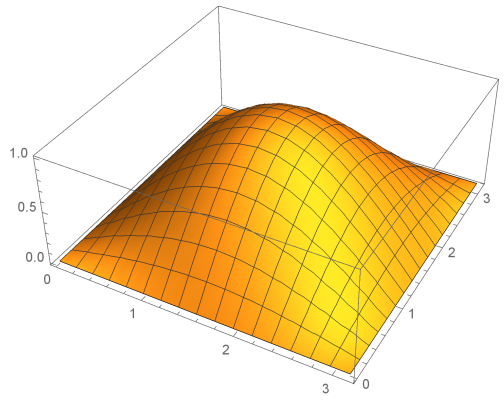
puesto que según los resultados de la sección anterior, autofunciones asociadas con distintos autovalores son ortogonales en $L^2(\Omega)$, lo cual implica que $\Phi \equiv 0$ contradiciendo el hecho de que la solución era no trivial.

2.2. Isometrías

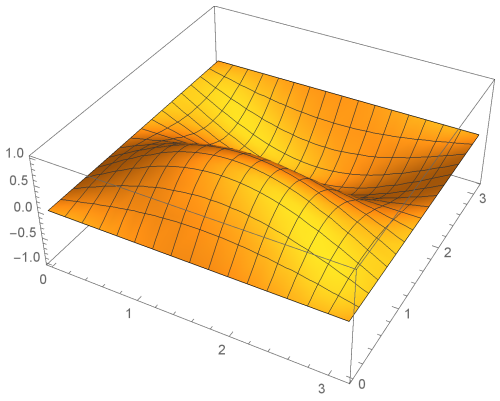
Consideremos la siguiente

Definición 2.2.1 (Isometría)**.** Una transformación $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama *isometría* o *movimiento rígido* si para cualquiera dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ ocurre que

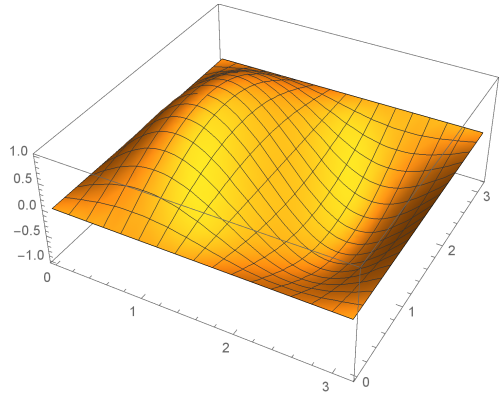
$$\|f(x) - f(y)\|_2 = \|x - y\|_2 . \tag{2.36}$$



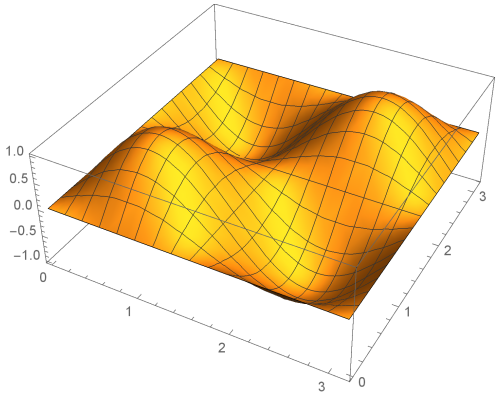
(a) $u(x,y) = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)\left(\sin \frac{1}{2}y\right)$



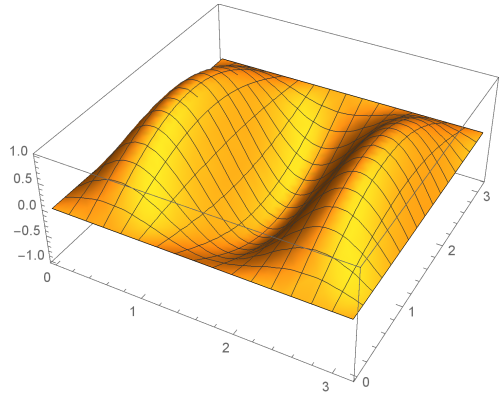
(b) $u(x,y) = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)(\sin y)$



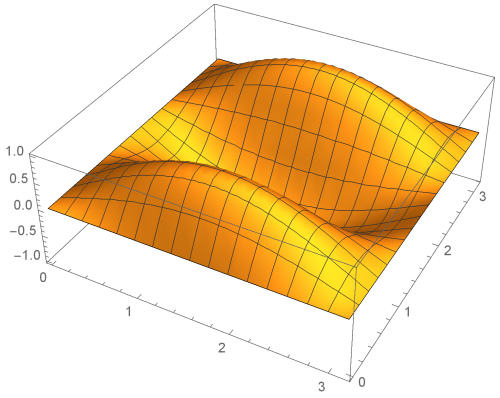
(c) $u(x,y) = (\sin x)\left(\sin \frac{1}{2}y\right)$



(d) $u(x,y) = (\sin x)(\sin y)$



(e) $u(x,y) = \left(\sin \frac{3}{2}x\right)\left(\sin \frac{1}{2}y\right)$



(f) $u(x,y) = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)\left(\sin \frac{3}{2}y\right)$

Figura 2.1: Primeras 6 autofunciones en $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Ejemplo (Traslación). Fijado $u \in \mathbb{R}^n$, definimos $t_u(v) = v + u$. Se verifica inmediatamente que $\|t_u(v) - t_u(w)\| = \|v - w\|$.

Definición 2.2.2. Dados conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que son *isométricos* o *congruentes* si existe una isometría $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $h(A) = B$.

Notación. $A \sim B$.

Observación. $\sim$ *es una relación de equivalencia.*

Lema 2.2.1. *Una isometría se escribe de forma única como la composición $t \circ k$ donde t es una traslación y k es una isometría que fija al* 0.

Demostración. Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría. Si $h = t_w \circ k$, donde t_w es la traslación por un vector w y k es una isometría que fija al 0, se tiene que para todo $v \in \mathbb{R}^n$ ocurre $h(v) = t_w(k(v)) = k(v) + w$. Si $v = 0$, entonces tenemos que $h(0) = w$, por lo que w está determinado por h. Luego $k(v) = h(v) - w = h(v) - h(0)$, entonces k también está determinado por h y es una isometría. Del mismo modo, si h es una isometría, definimos $t(v) = v + h(0)$ y $k(v) = h(v) - h(0)$, luego t es una traslación, k es una isometría que fija al 0, y $h(v) = h(0) + k(v) = t_w \circ k$, donde $w = h(0)$. □

Lema 2.2.2. *Para una función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son equivalentes:*

(I) h es una isometría y $h(0) = 0$,

(II) $\langle h(x), h(y)\rangle = \langle x, y\rangle \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Recordemos que

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle.$$

Supongamos que h satisface (1). Luego para cualquier par de vectores v y w en $\mathbb{R}^n$,

$$\|h(v) - h(w)\| = \|v - w\|. \tag{2.37}$$

Tomando $v = 0$, obtenemos $\|h(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in R^n$. Elevando ambos términos al cuadrado y escribiendo en términos de productos internos se tiene

$$\langle (h(v) - h(w)), (h(v) - h(w))\rangle = \langle (v - w), (v - w)\rangle. \tag{2.38}$$

Distribuyendo,

$$\langle h(v), h(v)\rangle - 2\langle h(v), h(w)\rangle + \langle h(w), h(w)\rangle = \langle v, v\rangle - 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle. \tag{2.39}$$

Observemos que $\langle h(v), h(v)\rangle = \|h(v)\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v\rangle$ y análogamente $\langle w, w\rangle = \langle h(w), h(w)\rangle$. Cancelando los términos en (2.39) obtenemos que $-2\langle h(v), h(w)\rangle = -2\langle v, w\rangle$ por lo que $\langle h(v), h(w)\rangle = \langle v, w\rangle$.

Supongamos que h satisface (2), luego

$$\langle h(v), h(w)\rangle = \langle v, w\rangle, \tag{2.40}$$

para todos los v y $w \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|h(v) - h(w)\|^2 &= \langle (h(v) - h(w)), (h(v) - h(w)) \rangle, \\ &= \langle h(v), h(v) \rangle - 2\langle h(v), h(w) \rangle + \langle h(w), h(w) \rangle, \\ &= \langle v, v \rangle - 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle, \\ &= \langle (v - w), (v - w) \rangle, \\ &= \|v - w\|^2,\end{aligned}$$

por lo que $\|h(v) - h(w)\| = \|v - w\|$ y h es una isometría. □

Corolario 2.2.1. *La única isometría que fija el origen y la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es la identidad.*

Demostración. Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría que satisface

$$h(0) = 0,\ h(e_1) = e_1,\ \ldots,\ h(e_n) = e_n.$$

El lema 2.2.2 afirma que

$$\langle h(v), h(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para todo par de vectores v, $w \in \mathbb{R}^n$. En particular si consideramos un vector $v \in \mathbb{R}^n$, y tomamos por w a los vectores de la base canónica $e_1, e_2, \ldots, e_n$, se tiene que

$$\langle h(v), h(e_i) \rangle = \langle v, e_i \rangle,$$

y como $h(e_i) = e_i$,

$$\langle h(v), e_i \rangle = \langle v, e_i \rangle.$$

En particular observamos que

$$h(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle h(v), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i = v.$$

Como $h(v) = v$ y v era arbitrario, se tiene que h es la identidad. □

Definición 2.2.3. Sea $U \in GL_n(\mathbb{R})$, decimos que es ortogonal si cumple $U^{-1} = U^t$.

Observación. *Las matrices ortogonales forman un subgrupo multiplicativo de $GL_n(\mathbb{R})$ y lo notaremos O_n.*

Lema 2.2.3. *Si $A \in O_n$, la transformación $h_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida como*

$$h_A(v) = Av\ ,$$

es una isometría que fija el origen.

Demostración. Que $h_A(0) = 0$ es claro. Para mostrar que h_A es una isometría, por el lema 2.2.2 alcanza con ver que

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle\ ,$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$. Puesto que vale para cualquier $A \in \mathbb{R}n \times n$ y $v, w \in \mathbb{R}^n$ que

$$\langle v, Aw \rangle = \langle A^t v, w \rangle \ ,$$

tomando $v = Aw$ se tiene,

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle A^t(Av), w \rangle = \langle (A^t A)v, w \rangle = \langle v, w \rangle \ ,$$

en donde utilizamos que $A^t = A^{-1}$. □

Observación 2.2.1. *En particular sabemos que si $U \in O_n$, $v, w \in \mathbb{R}^n$:*

$$\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow \langle Uv, Uw \rangle = 0 \ . \tag{2.41}$$

Lema 2.2.4. *Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisface (2.41) si y sólo existen $c \in \mathbb{R}, U \in O_n$ tal que $A = cU$.*

Demostración. Si $A = cA'$ donde A es ortogonal, entonces

$$\langle Av, Aw \rangle = c^2 \langle A'v, A'w \rangle = c^2 \langle v, w \rangle,$$

por lo que si $\langle v, w \rangle = 0$, ocurre que $\langle Av, Aw \rangle = 0$.

Recíprocamente, si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisface (2.41), como $e_1, \ldots, e_n$ son ortogonales, se tiene que $Ae_1, \ldots, Ae_n$ también lo son, por lo que las columnas de A son ortogonales. Veamos que tienen la misma longitud. Notar que $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ si $i \neq j$, como la matriz preserva ortogonalidad y por linealidad se tiene que $Ae_i + Ae_j \perp Ae_i - Ae_j$, en particular se tiene que

$$0 = \langle (Ae_i + Ae_j), (Ae_i - Ae_j) = \|Ae_i\|^2 - \|Ae_j\|^2 \ ,$$

de donde obtenemos

$$\|Ae_i\| = \|Ae_j\| \, .$$

Luego, todas las columnas de A tienen la misma norma, la llamamos c. Si $c = 0$, luego $A = 0 = cI_n$. Si $c \neq 0$, entonces la matriz $(1/c)A$ tiene una base ortonormal en sus columnas, por lo que es una matriz ortogonal. Luego $A = c\,((1/c)\,A)$ es un múltiplo escalar de una matriz ortogonal. □

Lema 2.2.5. *Toda isometría $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que fija el origen tiene la forma $h(v) = Uv$ para alguna matriz $U \in O_n$. En particular h es lineal e inversible.*

Demostración. Por el lema (2.2.2) se tiene

$$\langle h(v), h(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ ,$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$. En particular si $v = e_i$, $w = e_j$, se tiene que

$$\langle h(e_i), h(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Es decir que los vectores $h(e_1), \ldots, h(e_n)$ son vectores ortogonales de norma 1.

Sea $A \in \mathbb{R}^n$ la matriz que tiene al vector $h(e_i)$ en la i-ésima columna. Como sus columnas son vectores unitarios ortogonales, se tiene que $A^t A = AA^t = Id_n$. Por lo tanto,

su transformación lineal asociada es una isometría en $\mathbb{R}^n$ y además, por construcción se tiene que $A(e_i) = h(e_i)$ para todo i. Más aún, sabemos que A es inversible. Ahora consideramos la isometría $A^{-1} \circ h$. Sabemos que fija 0 y que fija la base canónica. Por el corolario (2.2.1) se tiene que $A^{-1} \circ h = Id_n$, y por unicidad tiene que ocurrir que $h(v) = Av$. □

Teorema 2.2.1. *Dada $U \in O_n$ y $w \in \mathbb{R}^n$ la función $h_{U,w} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por:*

$$h_{U,w}(v) = w + Uv \ ,$$

es una isometría. En particular, toda isometría en $\mathbb{R}^n$ tiene esta forma con únicos U y w.

Demostración. Es claro que $h_{U,w}(v) = w + Uv$ es una isometría, pues es una composición de una traslación y una transformación ortogonal las cuales son isometrías.

Para ver que cualquier isometría de $\mathbb{R}^n$ tiene la forma $h_{A,w}$ para algún par (A, w), consideremos una isometría $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Por el lema (2.2.1) se tiene que $h(v) = k(v) + h(0)$ donde k es una isometría en $\mathbb{R}^n$ que fija al 0. Por el lema (2.2.5), existe $A \in O_n$ tal que $k(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, luego

$$h(v) = Av + h(0) = h_{A,w}(v),$$

donde $w = h(0)$. Por último, si $h_{A,w} = h_{A',w'}$, evaluando en 0, obtenemos que $w = h(0) = w'$. Luego, $Av + w = A'v + w$, de donde obtenemos que $A = A'$. □

2.3. Conjuntos isométricos y espectro

Tras haber introducido el concepto de espectro, nos preguntamos qué grado de relación existe entre Ω y $\sigma(\Omega)$. Por ejemplo, cómo dependen los autovalores de la geometría del dominio. Este es el objeto del área denominada *geometría espectral*.

Nuestro primer objetivo es ver cómo se comporta el laplaciano con las isometrías y por lo tanto ver cómo se comporta el espectro frente a isometrías.

Lema 2.3.1. *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $f \in C^2(\Omega_2)$ y una isometría $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donde $h(\Omega_1) = \Omega_2$. Luego*

$$\Delta(f \circ h) = (\Delta f) \circ h.$$

Antes de realizar la demostración de este lema, notamos que dada g una función contínua en D, se tiene que $g \equiv 0$ en D si y sólo si, para toda $\varphi \in C_0^1(D)$ tenemos que:

$$\int_D g\varphi \, dV = 0.$$

Si no fuera así, consideramos P tal que $g(P) \neq 0$, por ejemplo $g(P) > 0$, y por lo tanto, $g > 0$ en una bola suficientemente pequeña B_ϵ centrada en P. En ese caso, consideramos $\varphi_P \in C_0^\infty(B_\epsilon)$ positiva por lo que $g\varphi_P > 0$ para todo punto en $supp(\varphi_P)$, luego $0 = \int_D g\varphi_P \, dV = \int_{supp(\varphi_P)} g\varphi_P \, dV > 0$ obteniendo una contradicción.

Demostración. Puesto que queremos ver $\Delta(f \circ h) = (\Delta f) \circ h$, por la observación basta con ver:

$$\int_{\Omega_1} \Delta(f \circ h)\varphi \, dV = \int_{\Omega_1} [(\Delta f) \circ h]\varphi dV. \tag{2.42}$$

Observación 2.3.1. *Recordemos que gracias al lema 2.2.1 tenemos que existe un punto $v \in \mathbb{R}^n$ y una matriz $U \in O_n$ tal que $h(x) = v + Ux$, por lo que la matriz jacobiana de h, $D\mathbf{h}(x_1, \ldots, x_n)$ es U. Además,* $\det D\mathbf{h} = \pm 1$.

Desarrollando el lado izquierdo de (2.42) y utilizando una de las *identidades de Green* tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} \Delta(f \circ h)\varphi \, dV &= -\int_{\Omega_1} \nabla(f \circ h) \cdot \nabla\varphi \, dV \ , \\ &= -\int_{\Omega_1} [((\nabla f) \circ h)U] \cdot \nabla\varphi \, dV \ ,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad utilizamos la regla de la cadena y la observación 2.3.1 para afirmar que $\nabla(f \circ h) = ((\nabla f) \circ h) \cdot D\mathbf{h} = ((\nabla f) \circ h) \cdot U$. Además, utilizando el teorema de cambio de variable para la isometría h vemos que:

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega_1} [((\nabla f) \circ h)U] \cdot \nabla\varphi \, dV &= -\int_{\Omega_2} \left[((\nabla f) \circ h \circ h^{-1})U\right] \cdot \left((\nabla\varphi) \circ (h^{-1})\right) \, |\det \, D\mathbf{h^{-1}}| \, dV, \\ &= -\int_{\Omega_2} [(\nabla f)U] \cdot \left((\nabla\varphi) \circ (h^{-1})\right) \, |\det \, D\mathbf{h^{-1}}| \, dV, \\ &= -\int_{\Omega_2} [(\nabla f)U] \cdot \left((\nabla\varphi) \circ (h^{-1})\right) \, dV,\end{aligned}$$

donde utilizamos que $|\det \, D\mathbf{h^{-1}}| = 1$ por ser h^{-1} una isometría.

Desarrollando el lado derecho de (2.42) se obtiene que:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} [(\Delta f) \circ h]\varphi dV &= \int_{\Omega_2} [(\Delta f) \circ h \circ h^{-1}](\varphi \circ h^{-1}) \, |\det \, D\mathbf{h^{-1}}| \, dV, \\ &= \int_{\Omega_2} [(\Delta f)] \cdot (\varphi \circ h^{-1}) \, dV, \\ &= -\int_{\Omega_2} (\nabla f) \cdot \nabla(\varphi \circ h^{-1}) \, dV, \\ &= -\int_{\Omega_2} (\nabla f) \cdot \left[\left((\nabla\varphi) \circ (h^{-1})\right) U^{-1}\right] \, dV, \\ &= -\int_{\Omega_2} (\nabla f) \cdot \left[\left((\nabla\varphi) \circ (h^{-1})\right) U^{t}\right] \, dV.\end{aligned}$$

donde nuevamente utilizamos las identidades de Green y el teorema de cambio de variables. Ademas, utilizamos el hecho que si $h(x) = v + Ux$, su inverso $h^{-1}(x)$ es $U^{-1}v + U^{-1}x$, luego su matriz diferencial es U^{-1} que también es U^t por ser U ortogonal.

Hemos visto que (2.42) es equivalente a probar:

$$\int_{\Omega_2} [(\nabla f)U] \cdot \left((\nabla\varphi) \circ (h^{-1})\right) \, dV = \int_{\Omega_2} (\nabla f) \cdot \left[\left((\nabla\varphi) \circ (h^{-1})\right) U^{t}\right] \, dV,$$

pero esto es cierto puesto que para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$ ocurre que:

$$\langle (vA), w\rangle = (vA)w^t = v(Aw^t) = v(wA^t)^t = \langle v, (wA^t)\rangle.$$

Tomando $v = \nabla f$, $A = U$, $w = ((\nabla\varphi) \circ (h^{-1}))$ se obtiene el resultado deseado. □

Lema 2.3.2. *Dos conjuntos isométricos tienen el mismo espectro.*

Demostración. Nuestra intención aquí será ver que los dominios isométricos tienen esencialmente el mismo conjunto de soluciones, *desplazadas* vía la isometría de un dominio en el otro.

Esto también implica que la multiplicidad de los autovalores es la misma. De otro modo, si alguno de los dominios tiene para un determinado autovalor una mayor multiplicidad, se puede trasladar al otro dominio el conjunto linealmente independiente de autofunciones llegando a una contradicción.

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, tales que $\Omega_1 \sim \Omega_2$. Sea Sol_Ω el conjunto de soluciones del problema ya conocido por nosotros:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) & \text{si } x \in \Omega, \quad (2.43) \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \quad (2.44) \end{cases}$$

Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos:

$$\mathrm{Sol}_\Omega(h) = \{u \circ h \mid u \in \mathrm{Sol}_\Omega\}.$$

Recordemos entonces que nuestra intención es demostrar $\mathrm{Sol}_{\Omega_2}(h) = \mathrm{Sol}_{\Omega_1}$. Como dijimos antes, $\Omega_1 \sim \Omega_2$ existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometría tal que $h(\Omega_1) = \Omega_2$. Consideremos una $u \in \mathrm{Sol}_{\Omega_2}$, veamos que $u \circ h \in \mathrm{Sol}_{\Omega_1}$. Verifiquemos primero (2.43).

$$\begin{aligned} -\Delta(u \circ h)(x) &= -(\Delta u)(h(x)), \\ &= \lambda u(h(x)), \\ &= \lambda(u \circ h)(x), \end{aligned}$$

donde utilizamos el lema 2.3.1 en la primera identidad.

Para ver que $(u\circ h)$ se anula en el borde del dominio, procedemos de la siguiente forma: como h es un homeomorfismo, $\partial\Omega_2 = h(\partial\Omega_1)$ y $\partial\Omega_1 = h^{-1}(\partial\Omega_2)$, entonces si $x \in \partial\Omega_1$, existe algún punto $y \in \partial\Omega_2$, tal que $h^{-1}(y) = x$. Luego, $(u \circ h)(x) = (u \circ h)(h^{-1}(y)) = u(y) = 0$ pues $u \in \mathrm{Sol}_{\Omega_2}$, $y \in \partial\Omega_2$, lo cual prueba la condición (2.44).

Hemos visto entonces que $\mathrm{Sol}_{\Omega_2}(h) \subseteq \mathrm{Sol}_{\Omega_1}$. Para ver $\mathrm{Sol}_{\Omega_1} \subseteq \mathrm{Sol}_{\Omega_2}(h)$, consideramos $\widetilde{u} \in \mathrm{Sol}_{\Omega_1}$. De manera análoga a la demostración de la primera inclusión, se tiene que $(\widetilde{u} \circ h^{-1}) \in \mathrm{Sol}_{\Omega_2}$. Luego $\widetilde{u} = (\widetilde{u} \circ h^{-1}) \circ h \in \mathrm{Sol}_{\Omega_2}(h)$. □

2.3.1. La pregunta de Kac

Diremos que dos conjuntos que tienen el mismo espectro son *isoespectrales*. De esa forma, lo que afirma en particular el lema 2.3.2 es que dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ se tiene:

$$A \sim B \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B)\ .$$

Luego si $\mathcal{N}$ denota la colección de dominios acotados con frontera suave a trozos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{M} \coloneqq {}^{\mathcal{N}}\!/_{\sim}$ es la colección de clases de equivalencia de dominios en el plano congruentes según un movimiento rígido, queda bien definida la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Upsilon : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} , \\ \overline{\Omega} &\longrightarrow \sigma(\Omega) = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ...), \end{aligned} \tag{2.45}$$

que a cada dominio le asigna el espectro del Laplaciano con condiciones Dirichlet homogéneas.

Luego, desde el punto de vista matemático, la pregunta a la que se refiere Marc Kac en [Kac66] es si la asignación Υ es inyectiva.

2.3.2. Algunos resultados espectrales

Puesto que no existe una expresión global para el espectro calculado sobre una región arbitraria, determinar si Υ o una restricción de ella a una subcolección de dominios, es inyectiva, requiere cierto conocimiento de aquellas propiedades geométricas que sólo dependen del espectro. Las llamamos *invariantes espectrales*.

En ese sentido, un resultado clásico es el siguiente:

Lema 2.3.3 (Fórmula de Weyl)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos*

$$N(\lambda) = \#\{n \mid \lambda_n \leqslant \lambda\},$$

la cantidad de autovalores Dirichlet de Ω (contados con multiplicidad) menores o iguales a λ. Entonces:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{n/2}} = (2\pi)^{-n}\, \omega_n \operatorname{Vol}(\Omega),$$

donde ω_n es el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$ y $\operatorname{Vol}(\Omega)$ la medida de Ω.

Para una demostración de este hecho puede consultarse [Wey11], [Wey12]. En [Str08] puede verse la demostración para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ así como también algunos ejemplos.

Del lema (2.3.3) deducimos que fijado el espectro, y la dimensión del espacio, podemos calcular la medida de Ω. En particular, dos dominios isoespectrales del plano, tienen que tener necesariamente la misma área.

Notación. Notaremos por $\lambda_k(\Omega)$ al k-ésimo autovalor Dirichlet calculado en la región Ω.

Otro resultado clásico donde podemos notar la relación que existe entre la forma de un dominio y el cálculo de sus autovalores es el siguiente

Teorema 2.3.1 (Desigualdad de Rayleigh-Faber-Krahn)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio y sea B la bola centrada en el origen con $\operatorname{Vol}(B) = \operatorname{Vol}(\Omega)$. Luego, $\lambda_1(\Omega) \geqslant \lambda_1(B)$. Más en general, la igualdad es cierta si y sólo si $\Omega \sim B$ c.t.p.*

Esta desigualdad nos permite llegar al primer resultado de la caracterización de una clase de conjuntos según su espectro.

Notación. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $R \in \mathbb{R}$. $B_R(x) = \{y \mid \|x - y\|_2 < R\}$.

Corolario 2.3.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto acotado, $R \in \mathbb{R}_{>0}$ y $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma(\Omega) = \sigma(B_R)$. Luego $\Omega \sim B_R$.*

Demostración. Dado que $\sigma(\Omega) = \sigma(B_R)$, por el lema 2.3.3, se tiene $\mathrm{Vol}(\Omega) = \mathrm{Vol}(B_R)$. En particular, R está unívocamente determinado. Por otro lado, como $\sigma(\Omega) = \sigma(B_R)$, obtenemos que $\lambda_1(\Omega) = \lambda_1(B_R)$, y debido al teorema 2.3.1, ocurre que $\Omega \sim B_R$ c.t.p. □

Esto significa que si un dominio arbitrario en $\mathbb{R}^n$, tiene el mismo espectro que una bola, entonces, es una bola a menos de un movimiento rígido del plano.

Capítulo 3

La traza del calor

Entre las herramientas más importantes para determinar la relación entre la geometría de Ω y su espectro $\sigma(\Omega)$ encontramos a las trazas. ¿Qué es la traza de un operador en este contexto? Esencialmente es una generalización a espacios de Hilbert, del concepto de traza de una matriz en espacios de dimensión finita. En esta ocasión para el problema espectral del Laplaciano trabajaremos con la traza del operador solución de la ecuación de calor a la que llamaremos simplemente traza del calor.

Definición 3.0.1. Un operador lineal acotado A definido sobre un espacio de Hilbert separable H se llama de *clase de traza o de traza finita* si para alguna base ortonormal $\{e_k\}_k$ de H la suma de términos positivos:

$$\|A\|_1 = \text{tr } |A| := \sum_k \langle (A^*A)^{1/2} e_k, e_k \rangle \ ,$$

es finita.

En ese caso la suma:

$$\text{tr } A := \sum_k \langle Ae_k, e_k \rangle \ ,$$

es absolutamente convergente y es independiente de la elección de la base ortonormal. Este valor se denomina *traza de A*. En [Sim79] pueden encontrarse las demostraciones de estas propiedades así como el marco general sobre teoría de trazas.

Por ejemplo, si H tiene dimensión finita entonces, cualquier operador definido sobre él es acotado y es de traza finita. Más aún, en ese caso la misma coincide con la traza de una matriz que represente al operador en una base dada.

Cuando hablamos de la traza del calor, podemos decir que su utilidad para proveer una conexión entre la geometría del dominio y su espectro reside en que la misma puede calcularse directamente desde el espectro, o bien, por integración del núcleo del calor sobre el dominio. Adicionalmente, la misma tiene una estimación asintótica para regiones poligonales que es de gran interés para obtener resultados en estos dominios.

El núcleo de la ecuación del calor, es un objeto que nos permite encontrar soluciones

a la ecuación del calor, recordemos que la misma es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{si } x \in \Omega \text{ y } t \in \mathbb{R}_{>0} \ , \quad (3.1) \\ u(0,x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \ , \quad (3.2) \\ u(t,x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \ , \quad (3.3) \end{cases}$$

donde $f(x)$ representa la temperatura inicial para cada punto x y $u(x,t)$ es la función que nos dice la evolución de la temperatura a tiempo t para el punto x.

Sea $\{u_k\}$ una base de $L^2(\Omega)$ formada por autofunciones del Laplaciano con condiciones Dirichlet homogéneas. Para cada $k \in \mathbb{N}$, notamos por $-\lambda_k$ al autovalor asociado a u_k [1] . Consideramos entonces $e^{-t\lambda_k}u_k$ la cual podemos verificar fácilmente que es solución de las ecuaciones (3.1) y (3.3) . Como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de $L^2(\Omega)$, se tiene que existen coeficientes $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$, más aún $a_k = \int_\Omega u_k(x)f(x)dx$, luego podemos escribir la solución a la ecuación del calor de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-t\lambda_k} u_k(x), \\ &= \int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k} u_k(x)u_k(y)f(y)dy. \end{aligned}$$

La función $H(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k}u_k(x)u_k(y)$ es llamada el *núcleo del calor*.

Supongamos que $t \in \mathbb{R}_{>0}$ está fijo. Podemos definir un operador solución:

$$\begin{aligned} e^{t\Delta} \colon L^2(\Omega) &\to L^2(\Omega) \ , \\ f &\to \int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k} u_k(x)u_k(y)f(y)dy \ . \end{aligned}$$

En particular, podemos tratar de calcular la *traza del calor* es decir, la traza de este operador:

$$\begin{aligned} h(t) &= \operatorname{Tr}\, e^{t\Delta} \ , \quad (3.4) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle e^{t\Delta}u_k, u_k\rangle \ , \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \left(e^{t\Delta}u_k\right)(x)\ u_k(x)dx \ , \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} u_j(x)u_j(y)\ u_k(y)\ dy \right) u_k(x)dx \ , \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega e^{-t\lambda_k} u_k(x)\ u_k(x)dx \ , \end{aligned}$$

[1] El signo menos es para que λ_k sea positivo

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k} \int_\Omega u_k(x)\ u_k(x)dx\ ,$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k}\ .$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_\Omega H(t,x,x)\ dx &= \int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k} u_k(x)u_k(x)dx\ , \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega e^{-t\lambda_k} u_k(x)u_k(x)dx\ , \\ &= h(t)\ , \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde en la primera identidad se intercambian la serie con la integral debido al teorema de convergencia monótona notando que la serie es de términos positivos, por lo tanto la sucesión generada por las sumas parciales es creciente. La tercera identidad ya la habíamos mostrado en la ecuación (3.4).

Estas dos deducciones nos proporcionan información muy útil respecto al problema de nuestro interés. La ecuación (3.4) nos dice que el cálculo de la traza de calor sólo depende del espectro del Laplaciano (por lo tanto es un invariante espectral). Mientras que la ecuación (3.5) nos dice que podemos obtener la traza integrando el núcleo del calor en Ω.

3.1. Estimaciones asintóticas de la traza del calor

Ha sido de gran interés el estudio de formas alternativas de representación de la traza de calor y la influencia que la frontera del dominio tiene en la misma. De hecho se sabe que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio con frontera suave, o más en general una variedad Riemanniana de dimensión 2 compacta, y $t \searrow 0$ [MR15]:

$$\text{Tr } e^{t\Delta} \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{-1+\frac{j}{2}}. \tag{3.6}$$

Cada coeficiente a_j se obtene como suma de dos integrales: una integral sobre Ω de algún polinomio sobre la curvatura Gaussiana K y sus derivadas covariantes, y una integral sobre la frontera $\partial\Omega$ de otro polinomio sobre la curvatura geodésica κ y sus derivadas. Las fórmulas para estos polinomios puede ser complicadas o bien desconocidas, aunque se sabe que los primeros coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega 1dA = \frac{1}{4\pi}|\Omega|, \quad a_1 = -\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\int_{\partial\Omega} 1ds = -\frac{1}{8\sqrt{\pi}}|\partial\Omega|, \tag{3.7}$$

y

$$a_2 = \frac{1}{12\pi}\left(\int_\Omega K\ dA + \int_{\partial\Omega} \kappa\ ds\right), \tag{3.8}$$

donde $|\cdot|$ significa área del dominio o longitud de su frontera según corresponda.

Casi el mismo resultado se tiene si la frontera de Ω es suave a trozos. Para ser más preciso, supongamos que $\partial\Omega$ es una unión finita de n curvas suaves, $\beta_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ con $i = 1, \ldots, n-1$ donde $\beta_i(1) = \beta_{i+1}(0)$ es decir que β_i *une* con β_{i+1} (los índices deben ser tomados mod n) en el vértice v_i con ángulo interior $\gamma_i \in (0, 2\pi)$. En este caso, las expresiones para a_0 y a_1 siguen iguales, pero:

$$a_2 = \frac{1}{12\pi}\left(\int_\Omega K \; dA + \sum_{j=0}^{n-1}\int_{\gamma_j} \kappa \; ds\right) + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\pi^2 - \gamma_j^2}{24\pi\gamma_j}, \tag{3.9}$$

Que el término a_2 tenía una expresión que dependía de los vértices era un hecho al que se hacía referencia en [Kac66], aunque la expresión que aquí presentamos puede verse en [Che83]. Un caso particular es el siguiente

Teorema 3.1.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio con frontera poligonal, con n vértices y ángulos γ_i para $i = 0, \cdots, n-1$. Sea $h(t)$ la traza del calor, definida en (3.4). Si $t \to 0$:*

$$h(t) = \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{24}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\gamma_j}{\pi}\right) + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{c}{t}}\right) \;, \tag{3.10}$$

para una cierta constante $c \geqslant 0$ que sólo depende del dominio.

Observación 3.1.1. *Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que $f \in \mathcal{O}(g(x))$ cuando x tiende a cero, si existen $M > 0$ y $x_0 > 0$, tal que si $|x| \leqslant x_0$ entonces $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$.*

Idea de demostración. La demostración de este teorema excede los alcances de este trabajo. La misma requiere de la prueba de múltiples cotas técnicas, que pueden verse en detalle en [BS88].

No obstante, podemos mencionar que la misma se basa en aproximar el núcleo del calor sobre los puntos del espacio ubicados en la *diagonal*, puesto que en vistas de la ecuación (3.5) la traza del calor a tiempo t es exactamente $\int_\Omega H(x, x, t)\; dx$.

Por lo tanto, trataremos de estimar correctamente $H(x, x, t)$ según la región de Ω que estemos observando:

(I) En la región cercana a un vértice se puede emplear la estimación conocida para el cono.

(II) En la región cercana a la frontera pero lejana de los vértices se puede utilizar la estimación conocida para el semiplano.

(III) En la región alejada de la frontera se puede utilizar la estimación conocida para el plano.

Asumiendo la notación anterior, una definición de estos conjuntos es:

$$\begin{aligned} B_i(R) &= \{x \in \Omega \mid d(x, v_i) < R\} \;, \\ C(\delta, R) &= \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < \delta,\; x \notin \cup_i \; B_i(R)\} \;, \\ D(\delta, R) &= \{x \in \Omega \mid x \notin C(\delta, R),\; x \notin \cup_i \; B_i(R)\} \;, \end{aligned} \tag{3.11}$$

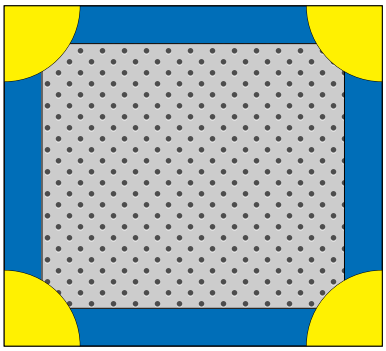


Figura 3.1: La figura muestra los distintos conjuntos propuestos para estimar el núcleo del calor. En las secciones amarillas se utiliza la estimación para conos. En las secciones azules mediante la estimación para semiplanos. En la superficie punteada se utiliza la estimación para planos.

donde las constantes R y δ son las necesarias para que las estimaciones funcionen. Una ilustración de estos conjuntos se puede ver en la figura 3.1.

En efecto, supongamos que Ω tiene frontera poligonal, y que tiene vértices $P_0, \ldots, P_{n-1}$, con ángulos interiores $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$. Por otro lado, consideramos W_i el cono que resulta de fijar el vértice P_i y considerar la extensión en forma de semi-recta de los segmentos adyacentes $\overline{P_{i-1}P_i}$, $\overline{P_iP_{i+1}}$ (donde los subíndices deben ser tomados módulo n). W_i es el cono de ángulo γ_i, centrado en P_i.

Notación. Antes de proseguir, recordamos que $\exp(z) \coloneqq e^z$. Usaremos indistintamente ambas notaciones según sea conveniente, con la única ventaja de que la notación exp permite leer más claramente el exponente.

De ahora en más,

$$\gamma = \min \gamma_i \ ,$$
$$R = \frac{1}{2} \sup \left\{ y \mid B_i(y) \cap B_j(y) = \emptyset \text{ para todo } i \neq j,\ \bigcup_{k=0}^{n-1} B_k(y) \subseteq \Omega \right\} \ . \tag{3.12}$$

Luego, podemos considerar $H_{\gamma_i}(x, x, t)$ el núcleo del calor para la región W_i evaluado en su diagonal, que podemos integrarlo en la bola $B_i(R) \subseteq W_i$, dando lugar a:

$$h_{\gamma_i}(t; R) = \int_{B_i(R)} H_{\gamma_i}(x, x, t)\ dx \ . \tag{3.13}$$

En efecto, según [BS88, Teorema 2], para h_{γ_i} como en (3.13) se tiene que si $t > 0$

$$h_{\gamma_i}(t; R) = \frac{\gamma_i R}{8\pi t} - \frac{R^2}{2\pi t} \int_0^1 e^{-R^2y^2/t}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\ dy + \frac{\pi^2 - \gamma_i^2}{24\pi\gamma_i} + A_{\gamma_i}(t) \ , \tag{3.14}$$

donde de acuerdo a [BS88, Corolario 3] se tiene que:

$$|A_{\gamma_i}(t)| \leqslant \begin{cases} \frac{\gamma_i}{8\pi} e^{-R^2/t}, & \text{si } \frac{1}{2}\pi < \gamma_i \leqslant 2\pi \ , \\ \\ \frac{3\pi^2}{64\gamma_i^2} e^{-(R\sin\gamma_i)^2/t}, & \text{si } 0 < \gamma_i \leqslant \frac{1}{2}\pi. \end{cases} \tag{3.15}$$

Por otro lado, en [BS88, Lema 6] se demuestra que, si $x \in B_i(R)$:

$$|H_\Omega(x,x,t) - H_{\gamma_i}(x,x,t)| \leqslant \frac{1}{\pi t}\exp\left(-\frac{R^2}{2t}\right) \ . \tag{3.16}$$

De acuerdo a [BS88, Lema 7], si $x \in C(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma, R)$ se obtiene

$$\left| H_\Omega(x,x,t) - \frac{1}{4\pi t}\left(1 - \exp\left(-d(x,\partial\Omega)^2/t\right)\right)\right| \leqslant \frac{1}{\pi t}\exp\left(-\frac{R^2\sin^2(\gamma/2)}{8t}\right) , \tag{3.17}$$

y de acuerdo a [BS88, Lema 5], si $x \in D(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma, R)$

$$\left| H_\Omega(x,x,t) - \frac{1}{4\pi t}\right| \leqslant \frac{1}{\pi t}\exp\left(-\frac{R^2\sin^2(\gamma/2)}{8t}\right) . \tag{3.18}$$

Notemos que:

$$\Omega = D\left(\tfrac{1}{2}R\sin\tfrac{1}{2}\gamma, R\right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} B_i(R)\right) \cup C\left(\tfrac{1}{2}R\sin\tfrac{1}{2}\gamma, R\right) \ . \tag{3.19}$$

Luego, aplicando (3.16), (3.17), (3.18) y (3.19):

$$\begin{aligned} &\left| h(t) - \int\limits_{C(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} \frac{1}{4\pi t}\left(1 - e^{\left(-d(x,\partial\Omega)^2/t\right)}\right) dx - \int\limits_{D(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} \frac{1}{4\pi t}\ dx - \sum_{i=0}^{n-1} h_{\gamma_i}(t;R) \right| , \\ = &\left| \int\limits_\Omega H(x,x,t)\ dx - \int\limits_{C(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} \frac{1}{4\pi t}\left(1 - e^{\left(-d(x,\partial\Omega)^2/t\right)}\right)\ dx - \int\limits_{D(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} \frac{1}{4\pi t}\ dx - \sum_{i=0}^{n-1} h_{\gamma_i}(t;R)\right| , \\ \leqslant &\left| \int\limits_{C(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} H(x,x,t) - \frac{1}{4\pi t}\left(1 - e^{\left(-d(x,\partial\Omega)^2/t\right)}\right)\ dx + \int\limits_{D(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} H(x,x,t) - \frac{1}{4\pi t}\ dx \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{B_i} H(x,x,t) - H_{\gamma_i}(x,x,t)\ dx \right| , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int\limits_{C(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} \left| H(x,x,t) - \frac{1}{4\pi t}\left(1 - e^{\left(-d(x,\partial\Omega)^2/t\right)}\right) \right| dx + \int\limits_{D(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} \left| H(x,x,t) - \frac{1}{4\pi t} \right| dx \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{B_i} |H(x,x,t) - H_{\gamma_i}(x,x,t)| \; dx, \\
&\leqslant \int\limits_{C(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} \left| H(x,x,t) - \frac{1}{4\pi t}\left(1 - e^{\left(-d(x,\partial\Omega)^2/t\right)}\right) \right| dx + \int\limits_{D(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} \left| H(x,x,t) - \frac{1}{4\pi t} \right| dx \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{B_i} |H(x,x,t) - H_{\gamma_i}(x,x,t)| \; dx, \\
&\leqslant \left|C(\tfrac{1}{2}R\sin\tfrac{1}{2}\gamma,R)\right| \frac{1}{\pi t} e^{\left(-\frac{R^2\sin^2(\gamma/2)}{8t}\right)} + \left|D(\tfrac{1}{2}R\sin\tfrac{1}{2}\gamma,R)\right| \frac{1}{\pi t} e^{\left(-\frac{R^2\sin^2(\gamma/2)}{8t}\right)} \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{n-1} |B_i(R)| \, \tfrac{1}{\pi t} e^{-\frac{R^2}{2t}}, \\
&\leqslant \frac{|\Omega|}{\pi t} e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(8t)}.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Utilizando en (3.20) la expresión (3.14) y que (3.19) es una partición de Ω se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\Bigg| h(t) - \frac{|\Omega|}{4\pi t} + \frac{1}{4\pi t} \int_{C(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} e^{-d^2(x,\partial\Omega)/t} \; dx + \frac{nR^2}{2\pi t} \int_0^1 e^{-R^2x^2/t}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \; dx \\
- \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\pi^2 - \gamma_i^2}{24\pi\gamma_i} - \sum_{i=0}^{n-1} A_{\gamma_i}(t) \Bigg| \leqslant \frac{|\Omega|}{\pi t} e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(8t)}.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Lo cual implica

$$
\begin{aligned}
\Bigg| h(t) - \frac{|\Omega|}{4\pi t} + \frac{1}{4\pi t} \int_{C(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} e^{-d^2(x,\partial\Omega)/t} \; dx + \frac{nR^2}{2\pi t} \int_0^1 e^{-R^2x^2/t}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \; dx \\
- \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\pi^2 - \gamma_i^2}{24\pi\gamma_i} \Bigg| \\
\leqslant \frac{|\Omega|}{\pi t} e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(8t)} + \sum_{i=0}^{n-1} |A_{\gamma_i}(t)| \; .
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Calculando la integral

$$
\begin{aligned}
\int_{C(\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma,R)} e^{-d^2(x,\partial\Omega)/t} \; dx &= \frac{|\partial\Omega|(\pi t)^{1/2}}{2} - \int_{\frac{1}{2}(R\sin\frac{\gamma}{2})}^{\infty} e^{-x^2/t} |\partial\Omega| \; dx \\
&\quad - 2nR^2 \int_0^{\frac{1}{2}(\sin\frac{1}{2}\gamma)} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} e^{-R^2x^2/t} \; dx \; .
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\left| h(t) - \frac{|\Omega|}{4\pi t} + \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\pi^2 - \gamma_i^2}{24\pi\gamma_i} \right| \\
&\qquad \leqslant \frac{|\Omega|}{\pi t} e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(8t)} + \sum_{i=0}^{n-1} |A_{\gamma_i}(t)| + \frac{|\partial\Omega|}{4\pi t} \int_{\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma}^{\infty} e^{-x^2/t} dx \\
&\qquad\qquad + \frac{nR^2}{2\pi t} \int_{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\gamma}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} e^{-R^2x^2/t}\ dx\ , \\
&\qquad \leqslant \frac{|\Omega|}{\pi t} e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(8t)} + \sum_{i=0}^{n-1} |A_{\gamma_i}(t)| + \frac{|\partial\Omega|}{4\pi t} \int_{\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma}^{\infty} \frac{x}{\frac{1}{2}R\sin\frac{1}{2}\gamma} e^{-x^2/t} dx \\
&\qquad\qquad + \frac{nR^2}{2\pi t} \int_{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\gamma}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} e^{-R^2x^2/t}\ dx\ , \\
&\qquad \leqslant \frac{|\Omega|}{\pi t} e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(8t)} + \sum_{i=0}^{n-1} |A_{\gamma_i}(t)| + \frac{|\partial\Omega|}{4\pi R\sin\frac{1}{2}\gamma} e^{-\left(R\sin\frac{1}{2}\gamma\right)^2/(4t)} \\
&\qquad\qquad + \frac{nR^2}{2\pi t} \int_{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\gamma}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} e^{-R^2x^2/t}\ dx\ , \\
&\qquad \leqslant \frac{|\Omega|}{\pi t} e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(8t)} + \sum_{i=0}^{n-1} |A_{\gamma_i}(t)| + \frac{|\partial\Omega|}{4\pi R\sin\frac{1}{2}\gamma} e^{-\left(R\sin\frac{1}{2}\gamma\right)^2/(4t)} \\
&\qquad\qquad + \frac{nR^2}{2\pi t} e^{-\left(R\sin\frac{1}{2}\gamma\right)^2/(4t)}\ . \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

En vistas de (3.15), si $\frac{1}{2}\pi < \gamma_i < 2\pi$:

$$|A_{\gamma_i}(t)| \leqslant \frac{\gamma_i}{8\pi} e^{-R^2/t} \leqslant \frac{2\pi}{8\pi} e^{-R^2/t} \leqslant \frac{1}{4} e^{-R^2/t}\ , \qquad (3.25)$$

y si $\gamma_i \leqslant \frac{1}{2}\pi$:

$$|A_{\gamma_i}(t)| \leqslant \frac{3\pi^2}{64\gamma_i^2} e^{-(R\sin\gamma_i)^2/t} \leqslant \frac{3\pi^2}{64\gamma^2} e^{-(R\sin\gamma)^2/t}\ , \qquad (3.26)$$

donde γ denota al menor de los n ángulos, según establecimos en (3.12).

Será de importancia recordar las siguientes propiedades:

Lema 3.1.1. *Sea $f(t) \in \mathcal{O}\left(e^{-\frac{c_1}{t}}\right)$, $g(t) \in \mathcal{O}\left(e^{-\frac{c_2}{t}}\right)$, con $c_1, c_2 > 0$, cuando t tiende a cero, entonces:*

(I) $fg \in \mathcal{O}\left(e^{-\frac{c_1+c_2}{t}}\right)$,

(II) $f + g \in \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\min\{c_1,c_2\}}{t}}\right)$,

(III) $\frac{1}{t} f \in \mathcal{O}\left(e^{-\frac{c_1}{2t}}\right)$,

(IV) $\frac{1}{\sqrt{t}} f \in \mathcal{O}\left(e^{-\frac{c_1}{2t}}\right)$.

Demostración. (I) Sea $|f(t)| \leqslant C_1 e^{-\frac{c_1}{t}}$ para $t < t_1$ y $|g(t)| \leqslant C_2 e^{-\frac{c_2}{t}}$ para $t < t_2$. Luego $|fg| \leqslant C_1 C_2 e^{-\frac{c_1}{t}} e^{-\frac{c_2}{t}} = C_1 C_2 e^{-\frac{c_1+c_2}{t}}$, si $t < \text{mín}\{t_1, t_2\}$. Luego, $fg \in \mathcal{O}\left(e^{-\frac{c_1+c_2}{t}}\right)$.

(II) Sean f, g como en el ítem anterior. Si $t < \text{mín}\{t_1, t_2\}$:

$$|f+g| \leqslant |f| + |g| \leqslant C_1 e^{-\frac{c_1}{t}} + C_2 e^{-\frac{c_2}{t}} \leqslant (C_1 + C_2) e^{-\frac{\text{mín}\{c_1,c_2\}}{t}}$$

Luego $f + g \in \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\text{mín}\{c_1,c_2\}}{t}}\right)$.

(III) Con las definiciones del ítem anterior, tenemos que $\left|\frac{1}{t} f(t)\right| \leqslant \frac{1}{t} C_1 e^{-\frac{c_1}{t}} = C_1 \left(\frac{1}{t} e^{-\frac{c_1}{2t}}\right) e^{-\frac{c_1}{2t}}$. Si viéramos que $\frac{1}{t} e^{-\frac{c_1}{2t}}$ está acotado por un cierto B para t cerca de cero, entonces, $\left|\frac{1}{t} f(t)\right| \leqslant C_1 B e^{-\frac{c_1}{2t}}$. Para hacer eso, calculamos el limite de:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} e^{-\frac{c}{2t}}.$$

Utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} e^{-\frac{c}{2t}} &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{c}{2t}}}\ , \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{t^2}}{-\frac{c}{2t^2} e^{\frac{c}{2t}}}\ , \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2}{c e^{\frac{c}{2t}}}\ , \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo que efectivamente, fijado $B > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $t < \delta$, entonces $\left|\frac{1}{t} e^{-\frac{c}{2t}}\right| \leqslant B$. Luego, si $t < \text{mín}\{\delta, t_1\}$, se tiene $\left|\frac{1}{t} f(t)\right| \leqslant C_1 B e^{-\frac{c_1}{2t}}$.

(IV) Tomando $t < 1$, tenemos que $\frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{t}$. Luego, $\frac{1}{\sqrt{t}} f(t) \leqslant \frac{1}{t} f(t)$. Utilizando el ítem anterior se ve que $\frac{1}{\sqrt{t}} f(t) \in \mathcal{O}\left(e^{-\frac{c_1}{2t}}\right)$.

□

Volviendo al problema original, nos interesa dar un orden de convergencia asintótico para $\sum_{i=0}^{n-1} |A_{\gamma_i}(t)|$. En ese sentido, suponemos que la frontera de Ω tiene k ángulos interiores menores o iguales a $\pi/2$ y $n-k$ ángulos mayores a $\pi/2$. Luego, según (3.25) y (3.26):

$$\sum_{i=0}^{n-1} |A_{\gamma_i}(t)| \leqslant k \frac{3\pi^2}{64\gamma^2} e^{-(R\sin\gamma)^2/t} + \frac{n-k}{4} e^{-R^2/t}\ .$$

Si $k = 0$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n-1} |A_{\gamma_i}(t)| \leqslant \frac{n}{4} e^{-R^2/t}\ ,$$

$$= \mathcal{O}\left(e^{-R^2/t}\right) ,$$
$$= \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/t}\right) ,$$

por ser $R^2 \geqslant (R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2$.

Si $k \geqslant 1$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n-1} |A_{\gamma_i}(t)| \leqslant k\frac{3\pi^2}{64\gamma^2}e^{-(R\sin\gamma)^2/t} + \frac{n-k}{4}e^{-R^2/t} ,$$
$$= \mathcal{O}\left(e^{-R^2/t}\right) + \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\gamma)^2/t}\right) ,$$
$$= \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\gamma)^2/t}\right) ,$$
$$= \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/t}\right) ,$$

por ser $\gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$ y en ese caso $R^2 \geqslant (R\sin\gamma)^2 \geqslant \left(R\sin\frac{1}{2}\gamma\right)^2$.

Entonces, cualquiera sea el valor del ángulo menor del polígono se tiene que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |A_{\gamma_i}(t)| = \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/t}\right) . \tag{3.27}$$

Luego, recordando (3.24), aplicando el lema (3.1.1) y la desigualdad (3.27)

$$\left| h(t) - \frac{|\Omega|}{4\pi t} + \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\pi^2-\gamma_i^2}{24\pi\gamma_i} \right|$$
$$\leqslant \frac{|\Omega|}{\pi t}e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(8t)} + \sum_{i=0}^{n-1}|A_{\gamma_i}(t)| + \frac{|\partial\Omega|}{4\pi R\sin\frac{1}{2}\gamma}e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(4t)}$$
$$+ \frac{nR^2}{2\pi t}e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(4t)} ,$$
$$= \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(16t)}\right) + \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/t}\right) + \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(4t)}\right) + \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(8t)}\right) ,$$
$$= \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(16t)}\right) .$$

Luego quedó probado que para un t pequeño:

$$h(t) = \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\pi^2-\gamma_i^2}{24\pi\gamma_i} + \mathcal{O}\left(e^{-(R\sin\frac{1}{2}\gamma)^2/(16t)}\right) . \tag{3.28}$$

□

3.2. Estimación asintótica de la traza del calor en el rectángulo

En esta sección verificaremos la estimación del teorema (3.10) para el caso particular de la traza del calor en un rectángulo.

Las siguientes notas se basan en [Ver15], donde puede encontrarse esta demostración, así como otras análogas para dominios tales como el triangulo equilátero y el triángulo rectángulo isósceles.

La estrategia a desarrollar consistirá en expresar la traza en términos de algunas de las *funciones Theta de Jacobi* (que presentaremos a continuación) las cuales tienen propiedades asintóticas útiles para nuestro propósito.

Antes de probar el resultado, introduciremos algunas herramientas.

Teorema 3.2.1 (Fórmula de Sumación de Poisson)**.** *Sea* $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que:*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\cdot\omega} d\omega \quad , \quad \hat{f}(\omega) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\omega} d\omega \ ,$$

donde además, $|f(x)| \leqslant A(1+|x|)^{-n-\delta}$ *y* $|\hat{f}(y)| \leqslant A(1+|y|)^{-n-\delta}$ *para algún* $A, \delta > 0$*. Entonces:*

$$\sum_{m\in\Lambda} f(x+m) = \sum_{m\in\Lambda} \hat{f}(m) e^{2\pi i m\cdot x} \ , \tag{3.29}$$

en particular si $x = 0$*,*

$$\sum_{m\in\Lambda} f(m) = \sum_{m\in\Lambda} \hat{f}(m). \tag{3.30}$$

Aquí Λ *es el reticulado de enteros* $\mathbb{Z}^n$*.*

Lema 3.2.1. *Para las funciones Theta de Jacobi:*

$$\vartheta_2(q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{(k+\frac{1}{2})^2} \ ,$$
$$\vartheta_3(q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{k^2} \ ,$$

en particular si $q = e^{-a}$ *con* $a > 0$

$$\vartheta_2(q) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} + \mathcal{O}\left(-\frac{\pi^2/2}{a}\right) \ , \tag{3.31}$$

$$\vartheta_3(q) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} + \mathcal{O}\left(-\frac{\pi^2/2}{a}\right) \ . \tag{3.32}$$

Demostración. Vamos a mostrarlo para ϑ_2. Definimos $q = e^{-a}$ y $f(x) = \exp\left(-a(x+\frac{1}{2})^2\right)$. Esta función pertenece al espacio de Schwartz por ser una función Gaussiana reescalada y trasladada, por lo que $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\cdot\omega} d\omega$. La transformada de Fourier de esta función es

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\omega^2\right) \exp\left(2\pi i \frac{1}{2}\omega\right) \ .$$

Esta función también pertenece al espacio de Schwartz, por lo que estamos en las condiciones de aplicar la fórmula de la sumación de Poisson.

Luego,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(-a\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right) \exp\left(2\pi i \frac{1}{2}k\right) \ ,$$

lo cual implica:

$$\vartheta_2(q) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right) \ .$$

Veamos ahora el comportamiento asintótico. Puesto que:

$$(-1)^k \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right) = (-1)^{(-k)} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}(-k)^2\right),$$

se sigue que

$$\vartheta_2(q) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} + 2\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right) \ .$$

Luego, basta ver que

$$\left|2\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right)\right| \leqslant C \exp -\frac{\pi^2/2}{a} \ ,$$

para algún $C > 0$, cuando a tiende a 0.

Usando la serie geométrica vemos que:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right)\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right) \ , \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k\right) \ , \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\right)} \ .\end{aligned}$$

Si $a < \frac{\pi^2}{\ln(2)}$, se tiene que $\exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\right) < \frac{1}{2}$ y $1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\right) > \frac{1}{2}$, por lo que:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right)\right| < 2\exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\right).$$

Para acotar $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, usamos que $\frac{1}{\sqrt{a}} \leqslant 1 + \frac{1}{a} \leqslant e^{\frac{1}{a}} \leqslant e^{\frac{\pi^2}{2a}}$, implicando

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\right) \leqslant \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\right) \exp\left(\frac{\pi^2}{2a}\right) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2a}\right). \tag{3.33}$$

Luego,

$$\left|2\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right)\right| \leqslant 2\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot 2\exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\right) \leqslant 4\sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2a}\right).$$

La demostración para ϑ_3 es análoga tanto para la primera igualdad de (3.32) como para el comportamiento asintótico. Respecto de la primera identidad de (3.32) podemos

mencionar que puede ser demostrada sin apelar a la fórmula de sumación de Poisson, empleando ciertas relaciones y la ecuación del calor [Cou03]. En el citado artículo se exhibe que para probar

$$\vartheta_3(q) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}k^2\right),$$

podemos considerar $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{C}$ el semiplano superior del plano complejo dado por los números complejos con parte imaginaria positiva y la siguiente serie:

$$\theta(z,\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(2\pi i k z + \pi i k^2 \tau\right), \tag{3.34}$$

que converge localmente para $z \in \mathbb{C}$ y $\tau \in \mathcal{H}$, definiendo de esa forma una función holomorfa en $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$.

Esta función satisface algunas relaciones:

$$\theta(z+1,\tau) = \theta(z,\tau), \tag{3.35}$$

y

$$\theta(z+\tau,\tau) = \exp\left(-2\pi i z - \pi i \tau\right)\theta(z,\tau), \tag{3.36}$$

que pueden verificarse directamente de la definición. Además, satisface la siguiente *ecuación de calor*:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 4\pi i \frac{\partial\theta}{\partial\tau}. \tag{3.37}$$

Si definimos $\Lambda(\tau) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, el retículo generado por 1 y τ se sigue que fijado τ, la función $\theta(\cdot,\tau)$ es la única función entera satisfaciendo (3.35) y (3.36) a menos de algún múltiplo por un número complejo [Cou03, Teorema 1.1, Corolario 1.2]. Es decir, si f satisface (3.35) y (3.36) entonces, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = c \cdot \theta(z,\tau)$.

Luego, definimos la siguiente función que resulta ser entera:

$$\vartheta(z) = \exp\left(\pi i \tau z^2\right)\theta(\tau z,\tau), \tag{3.38}$$

la cual satisface $\vartheta(z+1) = \vartheta(z)$, y

$$\vartheta(z - 1/\tau) = \exp\left(-2\pi i z + \pi i/\tau\right)\vartheta(z). \tag{3.39}$$

Observando que si $\tau \in \mathcal{H}$, se tiene que $\tilde{\tau} = -\frac{1}{\tau} \in \mathcal{H}$, podemos utilizar el corolario mencionado en este caso y obtenemos que $\vartheta(z) = c(\tau)\cdot\theta(z,-1/\tau)$. Tomando $\tau = i$ y $z = 0$, encontramos que $c(i) = 1$. Más en general, la ecuación de calor para θ nos permite obtener una ecuación diferencial para $c(\tau)$ de la cual el autor obtiene:

$$\theta(z,-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\exp\left(\pi i\tau z^2\right)\theta(\tau z,\tau), \tag{3.40}$$

lo cual es conocido como la identidad modular para θ. Luego, para demostrar la igualdad del lado izquierdo de (3.32) tomamos $z = 0$ y $\tau = i\frac{\pi}{a}$, aplicamos (3.40) y obtenemos:

$$\theta\left(0,\frac{-a}{i\pi}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\theta\left(0,i\frac{\pi}{a}\right), \tag{3.41}$$

pero tomando $q = e^{-a}$, el lado izquierdo de (3.41) es

$$\theta\left(0, \frac{-a}{i\pi}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(e^{-a}\right)^{k^2} = \vartheta_3(q), \tag{3.42}$$

y el lado derecho de (3.41)

$$\theta\left(0, i\frac{\pi}{a}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\pi i k^2 i\frac{\pi}{a}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{a}\right), \tag{3.43}$$

probando la identidad buscada. Puede verse en [CT05] un argumento similar para otras funciones Theta. □

Vamos a utilizar el siguiente resultado.

Lema 3.2.2. *Sea $g(x) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-xn^2}$, luego*

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{x}} g\left(\pi^2 x\right).$$

Además, si $x > 0$ se tiene:

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\pi^2/2}{x}}\right), \tag{3.44}$$

cuando x tiende a 0.

Demostración. Primero notemos que $2g(x) + 1 = \vartheta_3(e^{-x})$, por lo que usando el lema (3.2.1), obtenemos

$$2g(x) + 1 = \sqrt{\frac{\pi}{x}} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\pi^2/2}{x}}\right),$$

de lo cual se deduce que :

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\pi^2/2}{x}}\right).$$

Para obtener la otra identidad del teorema, aplicamos (3.32) de lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} 2g(x) + 1 &= \sqrt{\frac{\pi}{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2}{x}n^2}, \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{x}} \vartheta_3(e^{-\frac{\pi^2}{x}}), \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{x}} \left(2g\left(\frac{\pi^2}{x} + 1\right)\right). \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{x}} g\left(\frac{\pi^2}{x}\right).$$

□

3.2.1. La traza del calor en rectángulos

Vamos a suponer que tenemos un rectángulo de lados L y H. Según lo calculado en la sección (2.1.4), el espectro del Laplaciano con condiciones Dirichlet homogéneas es:

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{H^2} \right), \tag{3.45}$$

para $m, n \geqslant 1$. Por lo tanto, la traza del calor en esta región es:

$$h(t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 \left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{H^2} \right) t}.$$

Usando que esta serie converge uniformemente, y el hecho que $e^{ab} = e^a e^b$ podemos reescribir $h(t)$ como:

$$h(t) = g\left(\frac{\pi^2}{L^2} t \right) g\left(\frac{\pi^2}{H^2} t \right),$$

donde g es la definida en el lema (3.2.2). Luego usando la relación vista en la ecuación (3.44):

$$\begin{aligned}
h(t) &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\pi^2}{L^2} t}} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{\pi^2/2}{\frac{\pi^2}{L^2} t} \right) \right) \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\pi^2}{H^2} t}} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{\pi^2/2}{\frac{\pi^2}{H^2} t} \right) \right) \right), \\
&= \left(\frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{\pi t}} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{L^2}{2t} \right) \right) \right) \left(\frac{1}{2} \frac{H}{\sqrt{\pi t}} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{H^2}{2t} \right) \right) \right), \\
&= \frac{1}{4} \frac{LH}{\pi t} - \frac{1}{4} \frac{L}{\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{\pi t}} \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{H^2}{2t} \right) \right) - \frac{1}{4} \frac{H}{\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \mathcal{O}\left(e^{-\frac{H^2}{2t}} \right) \\
&\qquad + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{L^2}{2t} \right) \right) \frac{1}{2} \frac{H}{\sqrt{\pi t}} - \frac{1}{2} \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{L^2}{2t} \right) \right) \\
&\qquad + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{L^2}{2t} \right) \right) \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{H^2}{2t} \right) \right), \\
&= \frac{1}{4} \frac{LH}{\pi t} - \frac{2(L+H)}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{4} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{H^2}{4t} \right) \right) + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{H^2}{2t}} \right) + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{L^2}{4t} \right) \right) \\
&\qquad + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{L^2}{2t} \right) \right) + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{L^2+H^2}{2t} \right) \right), \\
&= \frac{1}{4} \frac{A}{\pi t} - \frac{P}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{4} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{H^2}{4t} \right) \right) + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{H^2}{2t}} \right) + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{L^2+H^2}{2t} \right) \right), \\
&= \frac{1}{4} \frac{A}{\pi t} - \frac{P}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{4} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{H^2}{4t} \right) \right).
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Escuchando triángulos

4.1. Escuchando todo el espectro de un triángulo

En lo que sigue veremos por qué los triángulos quedan espectralmente definidos según la demostración de [GM13].

Antes de poder enunciar este teorema, tenemos

Lema 4.1.1. *Dada una función $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, suave, que satisface alguna de las siguientes condiciones:*

(a) f es estrictamente monótona,

(b) f es estrictamente convexa,

(c) f es estrictamente cóncava,

no puede tener 3 ceros distintos.

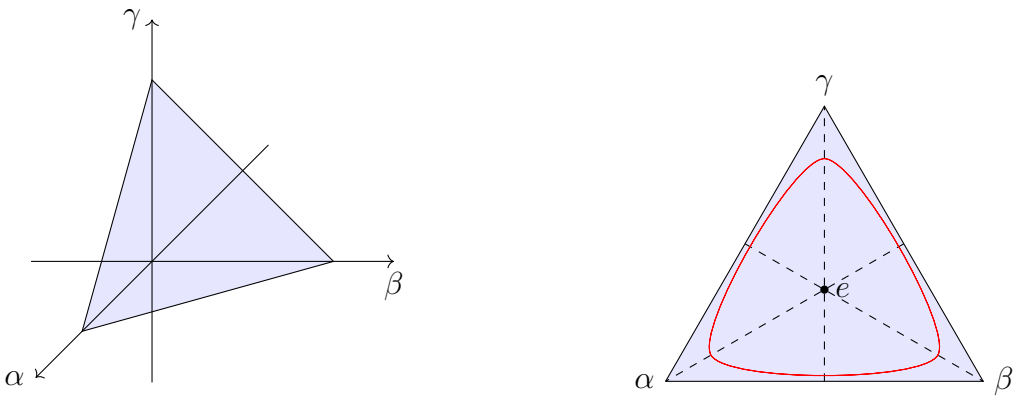
Demostración. (a) Supongamos que x e y son dos ceros distintos de f. Luego $f(x) = 0 = f(y)$ con $x < y$ o $y < x$ lo cual contradice la monotonía.

(b) Como f es estrictamente convexa, se tiene que $f^{''}(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$. En particular esto implica que f' es estrictamente creciente. Tomemos ahora $x_1 < x_2 < x_3$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. Por el teorema de Rolle, existe $c_1 \in (x_1, x_2)$ tal que $f^{'}(c_1) = 0$. Análogamente, existe $c_2 \in (x_2, x_3)$ tal que $f^{'}(c_2) = 0$. Luego $c_1 < c_2$ y $f^{'}(c_1) = f^{'}(c_2) = 0$ lo cual contradice la monotonía de $f^{'}$.

(c) Si f es estrictamente cóncava, $-f$ es estrictamente convexa. Como los ceros de f son los mismos que los de $-f$, aplicando el item anterior nos queda que f no puede tener tener tres ceros distintos.

□

Lema 4.1.2. *La función $G(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ es estrictamente creciente y estrictamente convexa en el intervalo $(0, \pi)$.*



(a) El espacio de ángulos de un triángulo. (b) Una curva de nivel de g.

Figura 4.1: El gráfico del conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Demostración. Para demostrar este hecho observamos que

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-k\pi)^2}. \tag{4.1}$$

Lo cual se obtiene derivando la serie de la cotangente.

Esto implica que $G(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{(x-k\pi)^2}$. Como cada sumando $\frac{1}{(x-k\pi)^2}$ es estrictamente convexo en $(0,\pi)$, se tiene que G también lo es. Más aún, $G(x)$ es regular cerca de 0 y también es par, por lo que $G'(0) = 0$. Puesto que es estrictamente convexa, eso implica que $G'(x)$ es creciente, en particular positiva en $(0,\pi)$, lo cual termina de probar que G es estrictamente creciente en ese intervalo. □

Antes de enunciar el siguiente lema es preciso introducir notación y realizar las siguientes observaciones.

Sea

$$D = \{(\alpha,\beta,\gamma) : \alpha,\beta,\gamma > 0,\ \alpha+\beta+\gamma = \pi\} \subseteq \mathbb{R}^3_{>0}\ . \tag{4.2}$$

Este conjunto, representa a todas las posibles elecciones de los ángulos de un triángulo. Cada punto en él, representa a un triángulo a menos de una dilatación.

En la Figura 4.1 se puede observar el gráfico de D en $\mathbb{R}^3$. Más aún, se puede observar en la Figura 4.1b que:

- Las líneas punteadas representan a las elecciones de ángulos tales que el triángulo resultante es isósceles.
- El centro e representa a los triángulos equiláteros.
- Toda otra elección que no esté en una de las líneas punteadas será un *punto no-isósceles*.
- Las líneas punteadas definen seis subconjuntos conexos, los que llamaremos *cámaras*.

Lema 4.1.3. *Sean $f, g, h : \mathbb{R}^3_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta,\gamma) &= \cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}\ , \\ g(\alpha,\beta,\gamma) &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\ , \\ h(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha + \beta + \gamma\ . \end{aligned}$$

Valen las siguientes afirmaciones:

(a) La función g es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^3_{>0}$.

(b) Los gradientes ∇f, ∇g, ∇h son linealmente independientes en todos los puntos no-isósceles de D.

Demostración. (a) Para probar que g es estrictamente convexa calculamos su Hessiano.

$$H_g(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\alpha^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\beta^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\gamma^3} \end{bmatrix}.$$

Como el mismo es definido positivo para todo $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3_{>0}$, esto implica que g es estrictamente convexa.

(b) Primero calculamos los gradientes:

$$\nabla f = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{2}} \\ \frac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix}, \qquad \nabla g = -\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\beta^2} \\ \frac{1}{\gamma^2} \end{pmatrix}, \qquad \nabla h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Supongamos que hay un punto no-isósceles (α,β,γ) (es decir, que α,β,γ son distintos dos a dos) y coeficientes R, S, T no todos nulos, tales que $R\nabla f + S\nabla g + T\nabla h = 0$. Es decir:

$$-\frac{R}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{2}} \\ \frac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix} - S\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\beta^2} \\ \frac{1}{\gamma^2} \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

Es claro que R y S no pueden ser simultáneamente 0, pues en ese caso $T = 0$. Entonces consideramos la función:

$$F(y) = -\frac{R}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{y}{2}} - S\frac{1}{y^2} + T, \tag{4.5}$$

que según la ecuación (4.4) tendría tres ceros distintos en el intervalo $(0,\pi)$: $y = \alpha,\ y = \beta,\ y = \gamma$. Para ver que eso no puede ocurrir probaremos que la función F es estrictamente monótona o estrictamente cóncava o estrictamente convexa en este intervalo, dependiendo de los valores R, S, T y lo cual contradice el lema 4.1.1 que afirma que la función no puede tener tres ceros distintos y de esa forma concluímos que ∇f, ∇g, ∇h son linealmente independientes.

Caso $R \neq 0$:

Recordemos el lema 4.1.2 el cual afirma que la función $G(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ es estrictamente creciente y estrictamente convexa en el intervalo $(0, \pi)$. Esto implica que si consideramos la función $G_C(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{C}{x^2}$ en el intervalo $(0, \pi)$ la misma resulta ser estrictamente creciente si $C \geqslant 1$ y estrictamente convexa si $C \leqslant 1$. Esto es porque $G_C(x) = G(x) + \frac{1-C}{x^2}$ y la función $H_C(x) = \frac{1-C}{x^2}$ tiene por derivadas:

$$H_C^{'}(x) = \frac{-2+2C}{x^3} \ , \tag{4.6}$$

$$H_C^{''}(x) = \frac{6-6C}{x^4} \ . \tag{4.7}$$

Luego, si $x \in (0, \pi)$ y $C > 1$ se tiene que $H_C^{'} > 0$ por lo que en ese caso H_C es creciente, probando que G_C es creciente en ese caso. Por otro lado, si $C < 1$ y $H_C^{''} > 0$ se tiene que H_C es convexa, con lo que G_C es convexa en ese caso.

Reescribamos F de la siguiente forma:

$$F(y) = -\frac{R}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{y}{2}} + \frac{S}{2R}\frac{1}{\left(\frac{y}{2}\right)^2}\right) + T \ , \tag{4.8}$$

$$F(y) = -\frac{R}{2} G_{-\frac{S}{2R}}\left(\frac{y}{2}\right) + T \ , \tag{4.9}$$

por lo que hay para F tres posibilidades:

(I) Si $-\frac{S}{2R} \geqslant 1$, F es estrictamente monótona en $(0, \pi)$.

(II) Si $-\frac{S}{2R} < 1$ y $\frac{R}{2} < 0$, F es convexa en $(0, \pi)$.

(III) Si $-\frac{S}{2R} < 1$ y $\frac{R}{2} > 0$, F es cóncava en $(0, \pi)$.

Caso $R = 0$:

En ese caso:

$$F(y) = -S\frac{1}{y^2} + T,$$
$$F^{'}(y) = \frac{2S}{y^3},$$

por lo que F según el signo de S resulta ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $(0, \pi)$. Con esto concluye la demostración del lema. □

Sean α, β, γ los ángulos del triángulo.

Proposición 4.1.1. *Una terna (α, β, γ) de reales positivos, tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, está unívocamente determinada (a menos de una permutación) por los valores de:*

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}, \tag{4.10}$$

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}. \tag{4.11}$$

Demostración. Si consideramos que dos puntos de D se relacionan, si y sólo si, un punto se obtiene por permutación de coordenadas del otro, podemos decir que cada cámara es un conjunto de representantes. De hecho, cada una de ellas se corresponde con un orden de las coordenadas, por ejemplo, la que se ubica abajo a la izquierda se corresponde con el orden $\alpha > \beta > \gamma$ o $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ si incluímos los bordes.

La idea es ver que la función f es estrictamente monótona en la intersección entre las superficies de nivel nivel de g y la restricción $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Definición 4.1.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f se dice estrictamente convexa si

$$\forall x_1 \neq x_2, \forall t \in (0,1) : f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \ .$$

Definición 4.1.2. Un conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice estrictamente convexo si dados dos puntos $x, y \in W$ se tiene que el segmento

$$L(x,y) = \{tx + (1-t)y \ \mid \ t \in [0,1]\} \, ,$$

está contenido en W y $L(x,y) \cap \partial W = \{x, y\}$.

Como g es estrictamente convexa, $G_{\leqslant s} = \{p \in \mathbb{R}^3_{>0} \mid g(p) \leqslant s\}$ es estrictamente convexo si $s > 0$ y su frontera es $G_s = \{p \in \mathbb{R}^3_{>0} \mid g(p) = s\}$. Puesto que el valor de g es invariante por permutación en las coordenadas de p, $G_{\leqslant s}$ y G_s son invariantes por permutación de coordenadas. Además, estas propiedades se mantienen en la intersección con el plano $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Observamos que cuando una de las coordenadas de $p \in \mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ tiende a cero, $g(p)$ tiende a infinito. De la desigualdad de la media aritmética-armónica se tiene que

$$3\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^{-1} \leqslant \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}, \tag{4.12}$$

por lo que si consideramos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ esto significa

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geqslant \frac{9}{\pi}, \tag{4.13}$$

y la igualdad sólo se da si $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

De esto último podemos decir que

- Si $s < \frac{9}{\pi}$, $G_s \cap D$ es vacío.
- Si $s = \frac{9}{\pi}$, $G_s \cap D = \{e\} = \{(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})\}$. En particular, vemos que el punto e queda determinado por el valor de g sin necesidad de apelar al valor de f.
- Si $s > \frac{9}{\pi}$, $G_s \cap D$ es una curva cerrada que encierra a e.

Respecto de este último ítem, podemos considerar el arco de la curva $G_s \cap D$ que queda encerrada en cada cámara. Vamos a querer probar que f es estrictamente monótona a lo largo de cada uno de estos arcos. De ese modo, el valor de g individualiza en qué curva de nivel se encuentra (α, β, γ) y luego fijada una cámara, el valor de f termina de mostrar

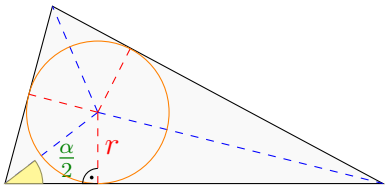


Figura 4.2: Demostración de: $A = r\frac{P}{2}$ y $\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{r}\frac{P}{2}$

que sólo hay una posible combinación de (α, β, γ) que puede corresponderse a cada valor posible de $f(\alpha, \beta, \gamma)$.

Supongamos que f no es estrictamente monótona en ese arco de curva. Luego si p y q son los puntos isósceles, existe un punto r que es punto crítico de f a lo largo de la curva. Luego, por el teorema de los multiplicadores de Lagrange, $\nabla f(r)$ tiene que ser una combinación lineal de $\nabla g(r)$ y $\nabla h(r)$ lo cual contradice al lema previo. Esto concluye la demostración. □

Teorema 4.1.1. *Un triángulo es determinado (a menos de una isometría), por su área A, su perímetro P y la suma R de los inversos de sus ángulos.*

Demostración. En base a las proposiciones y los lemas ya demostrados anteriormente el procedimiento para identificar a un triángulo según A-P-R se divide en dos partes.

La primera parte es determinar los ángulos del mismo. Para ello, utilizamos las identidades geométricas que se observan en la Figura 4.2 de las que se deriva:

$$\frac{P^2}{2A} = \cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = f(\alpha, \beta, \gamma). \tag{4.14}$$

Por otro lado, tenemos R que es la suma de los inversos de los ángulos, o bien, lo que anteriormente denominamos $g(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$. Utilizando la Proposición (4.1.1) esto identifica la terna (α, β, γ) a menos de una permutación.

El segundo paso es construir un triángulo con los ángulos obtenidos, donde fijamos un lado de longitud 1 (ver Fig. 4.3) y mediante una dilatación de este triángulo, buscamos uno tal que coincida el perímetro con P. Más formalmente, definimos la función $\tilde{P}$ que dados tres puntos $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$, obtiene el perímetro del triángulo generado por ellos:

$$\begin{aligned} \tilde{P}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (p_1, p_2, p_3) &\longrightarrow \|p_2 - p_1\| + \|p_3 - p_1\| + \|p_3 - p_2\|. \end{aligned}$$

Sea $a \in \mathbb{R}_{>0}$, definimos la transformación lineal:

$$\begin{aligned} g_a : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y) &\longrightarrow (ax, ay). \end{aligned}$$

Consideramos el perímetro de un triángulo obtenido por la aplicación de g_a a los puntos obtenidos en la primera parte del proceso: $(0,0)$, $(1,0)$, $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

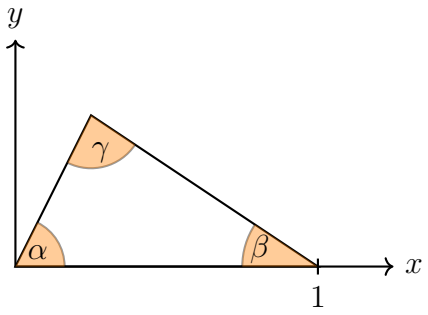


Figura 4.3

El mismo es

$$q(a) = \tilde{P}(g_a(0,0), g_a(1,0), g_a(v_1,v_2)) = \tilde{P}((0,0),(a,0),(av_1,av_2)), \tag{4.15}$$

$$= \|(a,0)\| + \|(av_1,av_2)\| + \|a(v_1-1),av_2\|, \tag{4.16}$$

$$= a + a\,\|(v_1,v_2)\| + a\,\|(v_1-1),v_2\|, \tag{4.17}$$

$$= a\underbrace{(1 + \|(v_1,v_2)\| + \|(v_1-1,\ v_2)\|)}_{\text{constante positiva}}. \tag{4.18}$$

Luego, $q(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Además, $q(0) = 0$, y si $x \to \infty$ entonces $q(x) \to \infty$. Como q además es monótona creciente por tener derivada positiva, se tiene que fijado $P > 0$, existe un único a, tal que $q(a) = P$. Luego, existe una (única) dilatación tal que se obtiene el triángulo con los ángulos y perímetro deseados. □

Sea $\mathcal{I}$ la colección de triángulos en $\mathbb{R}^2$. Consideramos $\mathcal{I}/\sim$ el cociente por la relación de equivalencia ya mencionada anteriormente: $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \sim B$ si y sólo si A y B son isométricos.

Corolario 4.1.1. *La aplicación* $[\tau] \in \mathcal{I}/\sim \longrightarrow \sigma(\tau) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *está bien definida y es inyectiva.*

Demostración. Que la aplicación está bien definida se debe al teorema 2.1.5 que garantiza la existencia de espectro y al lema 2.3.2 que garantiza que el espectro no depende del representante de $[\tau]$ sobre el que se calcule $\sigma(\tau)$.

La aplicación resulta ser inyectiva puesto que

- Según la estimación asintótica de la traza del calor vista en el teorema 3.1.1 y usando que en un triángulo $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \pi$, queda que si $t \to 0$:

$$h(t) = \frac{A}{4\pi}t^{-1} - \frac{P}{8\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{24}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{24} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{c}{t}}\right),$$

$$= \frac{A}{4\pi}t^{-1} - \frac{P}{8\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}} + R\frac{\pi}{24} - \frac{1}{24} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{c}{t}}\right).$$

- Como $\sigma(\tau)$ permite calcular $h(t)$, $h(t)$ viene dada por A, P, R y A, P, R caracterizan a τ a menos de una isometría, queda probado el teorema.

□

4.2. Escuchando parcialmente el espectro de un triángulo

Vimos cómo una estimación asintótica de la traza del calor, nos permitía identificar a cada triángulo en el plano con un espectro distinto.

La demostración si bien logra el objetivo buscado, tiene la desventaja de requerir del conocimiento completo del espectro para poder realizar tal identificación. Esto tiene sentido desde el punto de vista matemático, pero esconde desde el punto de vista físico serias dificultades.

Para ser más específicos, supongamos que quisiéramos desarrollar un dispositivo que pudiera reconocer un triángulo a partir de su sonido. La primera dificultad es que el dispositivo tendría que almacenar un conjunto infinito de valores proveniente de escuchar el espectro íntegramente. La segunda dificultad es que la incidencia de las frecuencias altas en la onda resultante es baja, con lo cual son difíciles de oír o percibir por un artefacto electrónico.

En ese sentido, tenemos el siguiente teorema en [CD89]:

Teorema 4.2.1 (Chang-DeTurck)**.** *Sea T_0 un triángulo en el plano. Existe un entero n, que sólo depende de los primeros dos autovalores del espectro de T_0 tal que si T_1 es otro triángulo cuyos primeros n autovalores coinciden con los de T_0, entonces todos el espectro coincide.*

Desde ya, el teorema asegura que alcanza con comparar una cantidad finita de autovalores, aunque tal cantidad depende de los triángulos. En [AF11] se plantea la siguiente

Conjetura 1 (Antunes-Freitas)**.** *Un triángulo queda determinado por los primeros tres autovalores del espectro.*

La misma se sustenta en cierta evidencia numérica, pero no hay una demostración formal de este hecho hasta el momento.

Capítulo 5

Escuchando polígonos

En la búsqueda de un resultado que extienda lo visto en el Capítulo 4, podríamos preguntarnos qué ocurriría si en lugar de restringirnos al caso de triángulos pensáramos en otro tipo de polígonos.

En ese sentido, es destacable el resultado probado por Enciso y Gómez-Serrano en [EG17]. Este capítulo se basa en el citado artículo y tiene por finalidad ilustrar cómo las herramientas e ideas desarrolladas en el capítulo anterior pueden utilizarse para demostrar teoremas de caracterización espectral en otro tipo de dominios con frontera poligonal.

Antes de mencionar el resultado principal de esta sección, recordamos la siguiente definición:

Definición 5.0.1. Un polígono se dice circunscriptible o circunscribible si todos sus lados son tangentes a una circunferencia.

Adicionalmente vamos a introducir el siguiente concepto:

Definición 5.0.2. Un polígono se dice *semi-regular* si es circunscribible y sus ángulos son todos iguales o bien hay exactamente uno mayor al resto.

Nuestro objetivo de ahora en más, es mostrar que los polígonos regulares (aquellos en los que todos los ángulos son iguales y todos los lados de la misma longitud) son determinados tanto por el espectro del Laplaciano con condiciones Dirichlet como así también por el espectro del Laplaciano con condiciones Neumann, dentro de la clase de dominios convexos con borde suave a trozos. Más en general, el resultado vale para polígonos semi-regulares.

Teorema 5.0.1. *Sea P_n un polígono semi-regular de n lados. Si Ω es un conjunto en el plano, convexo y acotado, con frontera suave a trozos con vértices rectos y su espectro Dirichlet o Neumann concide con el de P_n, entonces Ω es congruente a P_n.*

Recordemos que un dominio en el plano se dice *suave a trozos* si su frontera es una curva C^∞ a excepción de una cantidad finita de puntos que los llamamos *vértices*. Asumimos que los vértices son *rectos*, en el sentido de que en un entorno del vértice, la frontera es recta (es decir, la curvatura es 0). Es importante destacar que en el caso del problema inverso espectral para dominios poligonales, consideramos la restricción del problema a

la clase de regiones con frontera suave a trozos, ya que un dominio con vértices no puede ser isoespectral a un dominio con frontera suave [LR16].

La idea clave es probar el resultado para polígonos convexos, es decir, si P es un polígono convexo isoespectral a un polígono semi-regular de n lados P_n, entonces P y P_n tienen que ser congruentes. Una estimación asintótica de (3.4) para el caso de un dominio suave a trozos, con m vértices (rectos), es

$$h^{\mathrm{Dir}}(t) = \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{12\pi}\left(\int_{\partial\Omega}\kappa\, ds + \sum_{k=1}^{m}\frac{\pi^2-\theta_k^2}{2\theta_k}\right) + \frac{\sqrt{t}}{256\sqrt{\pi}}\int_{\partial\Omega}\kappa^2\, ds + \mathcal{O}(t)\,, \quad (5.1)$$

donde $\theta_j \in (0, 2\pi)$ es el ángulo interior en el j-ésimo vértice y κ es la curvatura en el borde en cada punto donde el mismo sea diferenciable. La razón por la que esto es suficiente para demostrar el teorema 5.0.1 es que observando la ecuación (5.1), podemos deducir que si un cierto dominio convexo con frontera suave a trozos y vértices rectos, es isoespectral a un polígono semi-regular, tiene que tener al término de orden $\sqrt{t}$ igualado a 0, por lo que su curvatura debe ser cero, en aquellos puntos donde la frontera sea diferenciable. En ese caso, la frontera del dominio es poligonal y por lo tanto reducimos el problema a analizar si los polígonos semi-regulares quedan espectralmente determinados dentro de la clase de polígonos convexos.

Para lograr este objetivo vamos a recordar la estimación asintótica para la traza del calor con condiciones Dirichlet:

$$h_P^{\mathrm{Dir}}(t) = \frac{|P|}{4\pi t} - \frac{|\partial P|}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{S(P)}{24\pi} + \mathcal{O}(e^{-c/t})\,,$$

donde $|P|$ y $|\partial P|$ denotan el área y perímetro de P y

$$S(P) := \sum_{k=1}^{m}\frac{\pi^2-\theta_k^2}{\theta_k}\,.$$

En el caso de cambiar las condiciones Dirichlet por Neumann, la traza del calor se define como

$$h^{\mathrm{Neu}}(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_k t}\,,$$

para la que vale una fórmula idéntica al caso anterior a excepción de un cambio de signo [MR15]:

$$h_P^{\mathrm{Neu}}(t) = \frac{|P|}{4\pi t} + \frac{|\partial P|}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{S(P)}{24\pi} + \mathcal{O}(e^{-c/t})\,.$$

En lo que sigue, probaremos que los polígonos semi-regulares pueden caracterizarse como aquellos que maximizan un funcional dado por los 3 parámetros que aparecen en la estimación presentada: área, perímetro y la función $S(P)$. Tal como se realizó en la sección anterior, podemos considerar que el polígono tiene perímetro igual a 1. Si no fuera así, tras hacer aplicar una dilatación podemos reducir el problema al caso $|\partial P| = 1$. Esto nos deja como parámetros a los valores $|P|$ y $S(P)$. Definamos los polígonos maximizantes:

Definición 5.0.3. Diremos que un polígono convexo P con perímetro unitario es *maximizante* si para cada otro polígono convexo Q con perímetro unitario y $S(Q) = S(P)$ se tiene que $|Q| \leqslant |P|$.

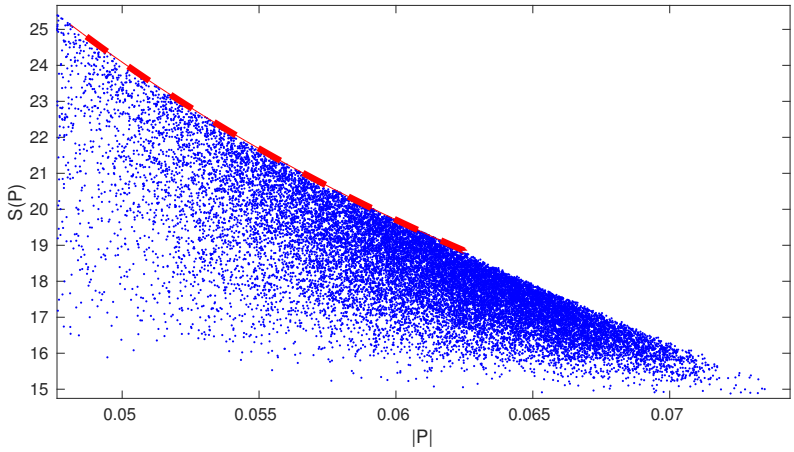


Figura 5.1: Gráfico de los pares $(|P|, S(P))$ para 20.000 polígonos convexos con perímetro unitario generados al azar. La línea punteada se corresponde con polígonos semiregulares.

Como motivación para entender el problema se ilustra en la figura 5.1 los pares $(|P|, S(P))$ sobre 20.000 polígonos convexos de perímetro 1 generados al azar con métodos de Monte Carlo. Sobre estos valores fueron diferenciados los puntos correspondientes a polígonos semi-regulares.

Teorema 5.0.2. *Un polígono convexo de n lados es maximizante, si y sólo si, es circunscriptible y todos sus ángulos son iguales o bien existe exactamente un ángulo mayor al resto. Más aún, si P y Q son dos polígonos como los mencionados no congruentes, posiblemente con distinta cantidad de lados, entonces $S(P) \neq S(Q)$.*

Demostración. Vamos a probar que si un polinomio P es maximizante, entonces tiene que ser de esa forma. Más aún, el maximizante queda determinado por el valor de la función S.

Observamos que en la búsqueda de polígonos maximizantes, podemos restringirnos a la clase de polígonos circunscriptibles. Este es un clásico resultado de L'Huilier [LHu82], del cual hay una extensión a polígonos en la esfera por Steiner [Ste42], la cual afirma que entre todos los polígonos convexos de n lados con perímetro unitario con ángulos dados, sólo aquel que está circunscripto a un círculo tiene el área mayor.

Luego, podemos escribir todos los parámetros en función de los ángulos interiores del polígono $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ puesto que el mismo se encuentra circunscripto a un círculo. Como $|\partial P| = 1$:

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2 - \theta_k^2}{\theta_k}, \quad |P| = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} \cot\frac{\theta_k}{2}\right)^{-1}.$$

Vamos a fijar el valor de $S(P)$. Observamos que la función S en el polígono regular de n lados toma el valor $4\pi\frac{n-1}{n-2}$. Más aún, para cualquier polígono P, siempre existe un $s > 2$ tal que $S(P) = 4\pi\frac{s-1}{s-2}$. Para demostrar esto recordamos que la suma de los ángulos

interiores de un polígono satisface

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = (n-2)\pi. \tag{5.2}$$

Con esto en consideración, vemos que la condición

$$S(P) = 4\pi \frac{s-1}{s-2},$$

es equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k} = \frac{1}{\pi}\left(n + \frac{2s}{s-2}\right). \tag{5.3}$$

En este punto hay que tener en cuenta la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética, que establece que si $x_1, \ldots, x_n$ son reales positivos entonces

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \tag{5.4}$$

obteniéndose la igualdad entre ambos términos únicamente si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Tomando $\theta_1, \ldots, \theta_n \in (0, \pi)^n$ y recordando que son los ángulos interiores de un polígono, tenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{\frac{1}{\theta_1} + \ldots + \frac{1}{\theta_n}} \leqslant \frac{\theta_1 + \ldots + \theta_n}{n}, \\
\iff \quad & \frac{n^2}{\frac{1}{\theta_1} + \ldots + \frac{1}{\theta_n}} \leqslant \theta_1 + \ldots + \theta_n, \\
\iff \quad & \frac{n^2}{\frac{1}{\theta_1} + \ldots + \frac{1}{\theta_n}} \leqslant \pi(n-2), \\
\iff \quad & \frac{n^2}{\pi(n-2)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k}, \\
\iff \quad & \frac{1}{\pi}\left(\frac{n^2}{n-2} - n + n\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k}, \\
\iff \quad & \frac{1}{\pi}\left(\frac{n^2 - n(n-2)}{n-2} + n\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k}, \\
\iff \quad & \frac{1}{\pi}\left(\frac{2n}{n-2} + n\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Luego, si definimos $g(x) : (2, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) \coloneqq \frac{1}{\pi}\left(\frac{2x}{x-2} + n\right)$ se ve que

$$g(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k}.$$

Entonces si consideramos $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k}$ una función sobre los θ_k, se tiene que:

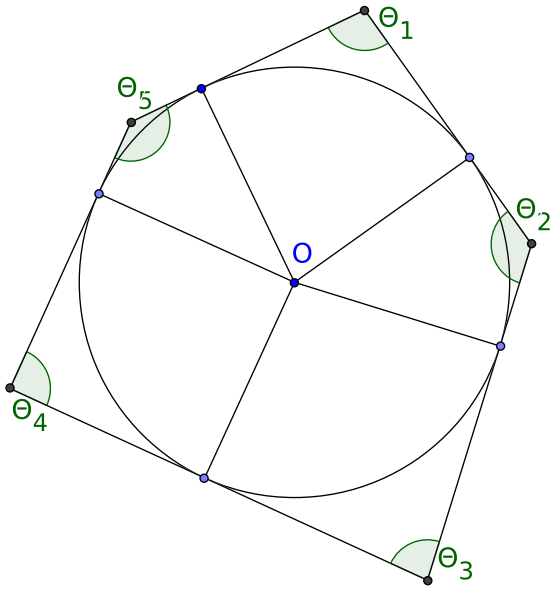


Figura 5.2: Un polígono circunscriptible

- $\text{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k}\right) \subseteq [g(n), +\infty)$.
- Como $\lim_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$, por la continuidad de g se tiene que $[g(n), +\infty) \subseteq \text{Im}(g)$.
- De los ítems anteriores se deduce que $\text{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k}\right) \subseteq \text{Im}(g)$.

Luego, existe un $s > 2$ tal que:

$$S(P) = 4\pi \frac{s-1}{s-2}.$$

Volviendo a la motivación inicial y recordando que queríamos caracterizar a los polinomios maximizantes, consideramos el siguiente problema.

Problema $\mathrm{P}_{s,n}$**.** Maximizar la cantidad

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \cot \frac{\theta_k}{2}\right)^{-1},$$

con $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in (0, \pi)^n$ bajo las siguientes restricciones

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k} = \frac{1}{\pi}\left(n + \frac{2s}{s-2}\right), \qquad \sum_{i=1}^{n} \theta_i = (n-2)\pi\,.$$

Veamos que hay una única solución a este problema, la cual viene dada por un polígono circunscriptible de $\lceil s \rceil$ lados, cuyos ángulos son todos iguales o bien existe exactamente uno que es mayor a los demás. La demostración es por inducción en n.

El caso base es $n = \lceil s \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid s \leq k\}$, puesto que utilizando la desigualdad (5.5) y la Ecuación (5.3) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi}\left(\frac{2n}{n-2} + n\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\left(n + \frac{2s}{s-2}\right), \\ \iff \quad & \frac{n}{n-2} \leqslant \frac{s}{s-2}, \\ \iff \quad & s \leqslant n, \\ \iff \quad & \lceil s \rceil \leqslant n. \end{aligned}$$

Teorema 5.0.3 (Teorema de las variables iguales)**.** *Sean $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$ reales no negativos, y sean $0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ tales que*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p &= a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p, \end{aligned}$$

donde p es un número real, $p \neq 1$. Sea $f(u)$ una función diferenciable en $(0, \infty)$ tal que

$$g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right),$$

es estrictamente convexa en $(0, \infty)$ y sea

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n),$$

si $p \leqslant 0$, entonces F_n es maximal para $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqslant x_n$, y es minimal para $0 < x_1 \leqslant x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n$.

Observación 5.0.1. *Sean $0 < \alpha < \beta$. Si la función f es diferenciable en (α, β) y la función $g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ es estrictamente convexa en $(\alpha^{p-1}, \beta^{p-1})$ o $(\beta^{p-1}, \alpha^{p-1})$, entonces el teorema anterior sigue valiendo para $x_1, \ldots, x_n \in (\alpha, \beta)$.*

Tanto el teorema 5.0.3 como la observación (5.0.1) pueden verse con detalle en [Cir07]. Cabe aclarar que se pueden enunciar las versiones correspondientes a $\tilde{f}$ estrictamente cóncava, aplicando los teoremas anteriores a $f = -\tilde{f}$ que resulta ser estrictamente convexa. Entonces para probar que los únicos maximizantes son aquellos donde todos los ángulos son iguales o hay exactamente uno distinto y es mayor al resto, alcanza con aplicar el teorema 5.0.3 y la observación (5.0.1) para el caso de $p = -1$ viendo que

$$g(x) := f'(x^{-\frac{1}{2}}),$$

sea cóncava en el intervalo (π^{-2}, ∞), donde

$$f(x) := \cot\frac{x}{2}\,.$$

Puesto que

$$g(x) = \frac{1}{\cos x^{-\frac{1}{2}} - 1},$$

su derivada segunda es

$$g''(x) = -\frac{2 + \cos x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} \sin x^{-\frac{1}{2}}}{16x^3 \sin^4(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}.$$

Para ver que g'' es negativa, alcanza con probar

$$z\,(2 + \cos z) - 3\sin z > 0,$$

para todo $z \in (0, \pi)$.

Haciendo un desarrollo de Taylor de orden 6, centrado en 0, se ve que si $z \in (0, \pi)$,

$$\begin{aligned} z\,(2 + \cos z) &= z\left(3 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \frac{1}{5040}\int_0^z (z-\zeta)^6 \sin\zeta\, d\zeta\right), \\ &> z\left(3 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720}\right), \end{aligned}$$

y con un razonamiento análogo

$$3\sin z < 3z - \frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{40},$$

si $z \in (0, \pi)$. Juntando ambas cotas obtenemos que

$$z\,(2 + \cos z) - 3\sin z > \frac{z^5}{60} - \frac{z^7}{720},$$

lo cual es estrictamente positivo en este intervalo. Luego el caso base $n = \lceil s \rceil$ queda probado.

Veamos el paso inductivo. Para eso consideramos un n tal que el único polígono maximizante para el problema $\mathrm{P}_{s,n'}$ para $n' < n$ es el polígono mencionado y veamos que eso sigue siendo válido para el problema $\mathrm{P}_{s,n}$.

Usando multiplicadores de Lagrange, vamos a querer encontrar mínimos de

$$\begin{aligned} F(\theta_1, \ldots, \theta_n, \lambda_1, \lambda_2) := \sum_{k=1}^{n} \cot\frac{\theta_k}{2} + \lambda_1\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta_k} - \frac{n}{\pi} - \frac{2s}{\pi(s-2)}\right) \\ + \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i - (n-2)\pi\right), \end{aligned}$$

en donde fijados (λ_1, λ_2) se satisfaga que $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in (0, \pi)^n$ tal que se realicen los extremos. Como en cualquier otra búsqueda de extremos de una función continua en una región compacta, podemos diferenciar el caso en que los puntos se encuentren en el interior

de $(0,\pi)^n$ y en ese caso sean puntos críticos, o bien se encuentren en la frontera de esta región.

Supongamos que esos puntos están en la frontera de $(0,\pi)^n$. Hay dos posibilidades: o bien $\theta_i = 0$ para algún i o bien $\theta_i = \pi$ para algún i. En el primer caso, la función F se iría a $+\infty$ y por lo tanto no sería un mínimo. Por otro lado, si tuviera un mínimo en un punto de la forma

$$(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \pi, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n), \tag{5.6}$$

entonces el Problema $\mathrm{P}_{s,n}$ se reduce a tener un mínimo en un punto de la forma

$$(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n),$$

del problema $\mathrm{P}_{s,n-1}$, donde vale la hipótesis inductiva.

Luego, alcanza con conocer cómo son los puntos críticos de la función F en $(0,\pi)^n$. Derivando respecto de θ_i, verificamos que si hubiera un extremo en $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ entonces para $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \theta_i}(\theta_1, \ldots, \theta_n, \lambda_1, \lambda_2) = \Phi(\theta_i, \lambda_1, \lambda_2)\,,$$

donde

$$\Phi(z, \lambda_1, \lambda_2) := -\frac{1}{2\sin^2 \frac{z}{2}} - \frac{\lambda_1}{z^2} + \lambda_2\,.$$

Luego la función $\Phi(\cdot, \lambda_1, \lambda_2)$ tiene n raíces, pero esta función es la misma que aparece en la ecuación (4.5) donde habíamos analizado las distintas posibilidades para los parámetros y dimos por conclusión que independientemente de los valores de λ_1 y λ_2 la misma podía tener a lo sumo 2 ceros en el intervalo $(0,\pi)$. Esto implica que si $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ es un punto crítico, entonces los ángulos θ_i pueden tomar a lo sumo dos valores.

Hecha esta observación, supongamos que los valores son $\bar{\theta}_1$ y $\bar{\theta}_2$, de los cuales hay k y $n-k$ copias de cada ángulo. Podemos reformular el problema $\mathrm{P}_{s,n}$ como maximizar la función

$$\left(k \cot \frac{\bar{\theta}_1}{2} + (n-k) \cot \frac{\bar{\theta}_2}{2}\right)^{-1},$$

con $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) \in (0,\pi)^2$ sujeto a las restricciones

$$\frac{k}{\bar{\theta}_1} + \frac{n-k}{\bar{\theta}_2} = \frac{1}{\pi}\left(n + \frac{2s}{s-2}\right), \quad k\bar{\theta}_1 + (n-k)\bar{\theta}_2 = (n-2)\pi\,.$$

Lo interesante aquí es que k y n pueden ser expresadas como funciones de $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ y s obteniendo:

$$n(s, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = \frac{2(s-2)\pi^2 - 2\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 s}{(s-2)(\pi - \bar{\theta}_1)(\pi - \bar{\theta}_2)}\,,$$
$$k(s, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = \frac{2\bar{\theta}_1(\bar{\theta}_2 s - (s-2)\pi)}{(s-2)(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)(\pi - \bar{\theta}_1)}\,.$$

Con esto podemos olvidarnos de las restricciones y minimizar la función

$$G_s(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) := k(s, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) \cot \frac{\bar{\theta}_1}{2} + (n(s, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) - k(s, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)) \cot \frac{\bar{\theta}_2}{2} \ , \tag{5.7}$$

con $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) \in (0, \pi)^2$.

Lo primero que decimos es que k y $n - k$ tienen que ser ambas mayores o iguales a 1. Para verlo, supongamos que $k = 0$, eso implica que $\bar{\theta}_2 = \frac{s-2}{s}\pi$, con $n = s$ cuando s es entero, o sin solución de otra forma. Ahora, como estamos suponiendo que $n \geqslant \lceil s \rceil + 1$, entonces este caso lo descartamos. Análogamente $n - k \geqslant 1$.

Dadas las simetrías del problema uno puede suponer $\bar{\theta}_1 \geqslant \bar{\theta}_2$. De ahí en más, con la información obtenida se puede establecer una región $\mathcal{S}_s$ donde la función alcanza sus valores mínimos cuya frontera está dada por los siguientes segmentos [EG17, Pág. 9]

$$\Gamma_1^{\mathcal{S}_s} := \left\{ \bar{\theta}_1 = \frac{(s^2 - s - 2)\pi}{s^2 + s - 2} - \frac{4\pi^2(s-2)}{(s^2 + s - 2)(\bar{\theta}_2(s^2 + s - 2) + \pi(-s^2 + s + 2))}, \right.$$
$$\left. \bar{\theta}_2 \in \left[0, \frac{s-2}{s}\pi\right] \right\},$$

$$\Gamma_2^{\mathcal{S}_s} := \left\{ \bar{\theta}_1 \in \left[\frac{s-1}{s+1}\pi, \ \pi\right], \bar{\theta}_2 = 0 \right\}, \quad \Gamma_3^{\mathcal{S}_s} := \left\{ \bar{\theta}_1 = \pi, \ \left[0, \frac{s-2}{s}\pi\right] \right\}.$$

Tras un análisis del comportamiento de las derivadas parciales de G_s respecto de θ_1 y θ_2 se llega a que:

$$\min_{(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) \in \mathcal{S}_s} G_s(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) = G_s\left(\pi, \frac{s-2}{s}\pi\right).$$

Más aún, el mínimo sólo se realiza en $(\pi, \frac{s-2}{s}\pi)$. Como vimos que tanto k como $n - k$ eran mayores o iguales a 1, el hecho de que $(\pi, \frac{s-2}{s}\pi)$ sea el único punto que minimice la expresión (5.7) implica que alguno de sus ángulos está igualado a π, y en ese caso, procedemos al razonamiento ya realizado en los ángulos que tenían la forma presentada en la Ecuación (5.6), donde podía aplicarse la hipótesis inductiva. □

Una consecuencia inmediata de este teorema es que los polígonos semi-regulares están espectralmente determinados en la clase de polígonos convexos. Luego, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.0.1. *Sea P_n es un polígono de n lados, circunscriptible cuyos ángulos son todos iguales o bien hay exactamente uno mayor a los demás. Si un polígono convexo P tiene el mismo espectro Dirichlet o Neumann que P_n, entonces es isométrico a él.*

Para finalizar, tenemos la siguiente observación

Corolario 5.0.2. *Sea Ω es un dominio con frontera suave a trozos, con bordes rectos. Si Ω tiene el mismo espectro que un polígono, entonces Ω es un polígono.*

La justificación de este hecho se debe al comportamiento asintótico de la traza del calor. Se sabe que en el caso de la traza del calor Dirichlet la misma viene dada por [BG90]

$$h_\Omega^{\mathrm{Dir}}(t) = \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{12\pi}\left(\int_{\partial\Omega} \kappa\, ds + \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi^2 - \theta_k^2}{2\theta_k}\right) + \frac{\sqrt{t}}{256\sqrt{\pi}} \int_{\partial\Omega} \kappa^2\, ds + \mathcal{O}(t)\,,$$

donde $\theta_k \in (0, 2\pi)$ es el ángulo interior en el k-ésimo vértice y κ es la curvatura en cada punto donde la frontera es diferenciable. En el caso de las condiciones Neumann la traza del calor viene dada por [MR15]

$$h_\Omega^{\mathrm{Neu}}(t) = \frac{|\Omega|}{4\pi t} + \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{12\pi}\left(\int_{\partial\Omega} \kappa\, ds + \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi^2 - \theta_k^2}{2\theta_k}\right) + \frac{5\sqrt{t}}{256\sqrt{\pi}} \int_{\partial\Omega} \kappa^2\, ds + \mathcal{O}(t)\,.$$

Luego, en el caso de que el espectro de Ω coincidiera con el de un polígono, se tiene que el término de orden $\sqrt{t}$ debería anularse lo cual implica que

$$\int_{\partial\Omega} \kappa^2\, ds = 0\,,$$

es decir que la curvatura de la frontera de Ω es cero, con lo cual la misma sólo tiene segmentos, por lo que concluimos que Ω es un polígono.

Con este resultado, junto al corolario 5.0.1 puede concluirse el teorema 5.0.1.

Bibliografía

[AF11] Pedro R. S. Antunes y Pedro Freitas. «On the inverse spectral problem for Euclidean triangles». *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 467.2130 (2011), págs. 1546-1562. ISSN: 1364-5021. DOI: 10.1098/rspa.2010.0540. URL: https://doi.org/10.1098/rspa.2010.0540.

[Agh07] Alen Agheksanterian. «Rellich's theorem and some of its applications» (2007). URL: http://www4.ncsu.edu/~aalexan3/articles/rellich.pdf.

[BG90] Thomas P. Branson y Peter B. Gilkey. «The asymptotics of the Laplacian on a manifold with boundary». *Comm. Partial Differential Equations* 15.2 (1990), págs. 245-272. ISSN: 0360-5302. DOI: 10.1080/03605309908820686. URL: https://doi.org/10.1080/03605309908820686.

[Bre11] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, págs. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[BS88] M. van den Berg y S. Srisatkunarajah. «Heat equation for a region in $\mathbf{R}^2$ with a polygonal boundary». *J. London Math. Soc. (2)* 37.1 (1988), págs. 119-127. ISSN: 0024-6107. DOI: 10.1112/jlms/s2-37.121.119. URL: https://doi.org/10.1112/jlms/s2-37.121.119.

[Bus86] Peter Buser. «Isospectral Riemann surfaces». *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 36.2 (1986), págs. 167-192. ISSN: 0373-0956. URL: http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_2_167_0.

[CD89] Pei-Kun Chang y Dennis DeTurck. «On hearing the shape of a triangle». *Proc. Amer. Math. Soc.* 105.4 (1989), págs. 1033-1038. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.2307/2047071. URL: https://doi.org/10.2307/2047071.

[Che83] Jeff Cheeger. «Spectral geometry of singular Riemannian spaces». *J. Differential Geom.* 18.4 (1983), 575-657 (1984). ISSN: 0022-040X. URL: http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214438175.

[Cir07] Vasile Cirtoaje. «The equal variable method». *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.* 8.1 (2007), Article 15, 21. ISSN: 1443-5756.

[Cou03] Wim Couwenberg. «A simple proof of the modular identity for theta functions». *Proc. Amer. Math. Soc.* 131.11 (2003), págs. 3305-3307. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.1090/S0002-9939-03-06902-8. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-03-06902-8.

[CT05] Y. Choie e Y. Taguchi. «A simple proof of the modular identity for theta series». *Proc. Amer. Math. Soc.* 133.7 (2005), págs. 1935-1939. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.1090/S0002-9939-05-07723-3. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-05-07723-3.

[Dur88] Catherine Durso. *On the inverse spectral problem for polygonal domains*. Thesis (Ph.D.)–Massachusetts Institute of Technology. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1988, (no paging). URL: http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:0379573.

[EG17] A. Enciso y J. Gómez-Serrano. «Spectral determination of semi-regular polygons» (2017). URL: https://arxiv.org/abs/1709.05960.

[GM13] Daniel Grieser y Svenja Maronna. «Hearing the shape of a triangle». *Notices Amer. Math. Soc.* 60.11 (2013), págs. 1440-1447. ISSN: 0002-9920. DOI: 10.1090/noti1063. URL: https://doi.org/10.1090/noti1063.

[GT01] David Gilbarg y Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Reprint of the 1998 edition. Springer-Verlag, Berlin, 2001, págs. xiv+517. ISBN: 3-540-41160-7.

[GWW92] C. Gordon, D. Webb y S. Wolpert. «Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds». *Invent. Math.* 110.1 (1992), págs. 1-22. ISSN: 0020-9910. DOI: 10.1007/BF01231320. URL: https://doi.org/10.1007/BF01231320.

[Kac66] Mark Kac. «Can one hear the shape of a drum?» *Amer. Math. Monthly* 73.4, part II (1966), págs. 1-23. ISSN: 0002-9890. DOI: 10.2307/2313748. URL: https://doi.org/10.2307/2313748.

[LHu82] S. L'Huilier. «De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, geometrice considerata: seu de maximis et minimis» (1782).

[LR16] Zhiqin Lu y Julie M. Rowlett. «One can hear the corners of a drum». *Bull. Lond. Math. Soc.* 48.1 (2016), págs. 85-93. ISSN: 0024-6093. DOI: 10.1112/blms/bdv094. URL: https://doi.org/10.1112/blms/bdv094.

[Mil64] J. Milnor. «Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 51 (1964), pág. 542. ISSN: 0027-8424.

[MR15] Rafe Mazzeo y Julie Rowlett. «A heat trace anomaly on polygons». *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 159.2 (2015), págs. 303-319. ISSN: 0305-0041. DOI: 10.1017/S0305004115000365. URL: https://doi.org/10.1017/S0305004115000365.

[Nie+07] M. Niethammer y col. «Global medical shape analysis using the Laplace-Beltrami spectrum». *Med Image Comput Comput Assist Interv* 10.Pt 1 (2007), págs. 850-857.

[Sal08] Sandro Salsa. *Partial differential equations in action*. Universitext. From modelling to theory. Springer-Verlag Italia, Milan, 2008, págs. xvi+556. ISBN: 978-88-470-0751-2.

[Sim79] Barry Simon. *Trace ideals and their applications*. Vol. 35. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1979, págs. viii+134. ISBN: 0-521-22286-9.

[Ste42] J. Steiner. «Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. Premier mémoire». *J. Reine Angew. Math.* 24 (1842), págs. 93-152. ISSN: 0075-4102. DOI: 10.1515/crll.1842.24.93. URL: https://doi.org/10.1515/crll.1842.24.93.

[Str08] Walter A. Strauss. *Partial differential equations*. Second. An introduction. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2008, págs. x+454. ISBN: 978-0-470-05456-7.

[Sun85] Toshikazu Sunada. «Riemannian coverings and isospectral manifolds». *Ann. of Math. (2)* 121.1 (1985), págs. 169-186. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/1971195. URL: https://doi.org/10.2307/1971195.

[Ver15] Luuk Verhoeven. «Can one Hear the Shape of a Drum?» Bachelorthesis Mathematics. Radboud Universiteit Nijmegen, 2015.

[Wey11] H. Weyl. «Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte». *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1911).

[Wey12] H. Weyl. «Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)». *Mathematische Annalen* 71 (1912), págs. 441-479. URL: http://eudml.org/doc/158545.