



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Una construcción de bicolimites 2-filtrantes de
categorías

Matías Ignacio Data

Director: Eduardo J. Dubuc

Fecha de Presentacion: 15 de Diciembre de 2014

Contents

1	Introduccion	5
1.1	Objetivos generales y el contenido de este trabajo	5
1.2	Motivacion	6
1.3	Conocimientos previos y advertencias	7
2	Categoria de fracciones	8
2.1	Categoria filtrante y colimites filtrantes de conjuntos	8
2.2	Categoria de fracciones	10
2.3	Calculo de fracciones	12
2.4	Propiedades de exactitud	20
3	2-Categorias	22
3.1	Definiciones basicas	22
3.2	2-Colimites	28
4	Categorias fibradas	31
4.1	Categorias fibradas, definiciones y yoga basico	31
4.2	Fibraciones discretas	37
4.3	Construccion de Grothendieck	39
4.4	Construccion de laxcolimites de categorias indexados por una categoria	43
4.5	Construccion de pseudocolimites de categorias indexados por una categoria	45
4.6	Construccion de pseudocolimites filtrantes de categorias	46
4.7	Construccion de colimites de conjuntos con la construccion de Grothendieck	48
5	Nociones de 2-filtrabilidad	50
5.1	2-filtrabilidad	50
5.2	Definiciones equivalentes de 2-filtrabilidad	50
5.3	Propiedad fundamental de las 2-categorias strict-2-filtrantes	58
5.4	Construccion de pseudocolimites strict-2-filtrantes de categorias	59
5.5	Construccion de 2-colimites strict-2-filtrantes de categorias	60
5.6	Propiedades de exactitud	62
6	2-Categoria de fracciones	66
6.1	Distintas generalizaciones 2-categoricas de la categoria de fracciones	66
6.2	2-Calculo de fracciones	67
7	2-Categorias fibradas	82
7.1	2-Categorias fibradas, definiciones y yoga basico	82
7.2	Construccion de Grothendieck 2-categorica	86
7.3	2-Fibraciones 2-discretas	90
7.4	Construccion de laxcolimites de categorias	93
7.5	Construccion de pseudocolimites de categorias	95

8	Bicategoria de fracciones	96
8.1	Bicategoria de fracciones	96
8.2	Bicalculo de fracciones	96
9	Construccion de pseudocolimites 2-filtrantes de categorias	101

1 Introduccion

1.1 Objetivos generales y el contenido de este trabajo

El objetivo de este trabajo es generalizar la construccion de pseudocolimites de categorias indexados por una categoria filtrada, realizada por A. Grothendieck en [SGA4-2, Exposé VI, 6]. La construccion es la siguiente, dado un functor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$, se tiene asociada una cofibracion $\int F \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ (en el sentido de [SGA1, Exposé VI, 10]), luego se observa que si se invierten las flechas cocartesianas se obtiene el pseudocolimite. Mas importante aun es el hecho de que si \mathcal{C} es una categoria filtrante entonces las flechas cocartesianas admiten un calculo de fracciones a izquierda (en el sentido de [GZ67, I, 2.3]), por lo tanto la construccion del pseudocolimite es muy simple y manejable ya que los *homs* estan dados por colimites filtrantes de conjuntos.

Este trabajo generaliza el proceso anterior para obtener una construccion de pseudocolimites de categorias indexados por una 2-categoria 2-filtrante, es decir se obtiene una construccion del pseudocolimite de un 2-functor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ donde \mathcal{C} es una 2-categoria 2-filtrante. Para lograr esto utilizamos la teoria de 2-fibraciones desarrollada por I. Bakovic y M. Buckley, estas 2-fibraciones se corresponden con trifuntores $\mathcal{C}^{coop} \longrightarrow \mathcal{B}icat$. Dado que necesitamos mucho menos que esto desarrollamos una teoria de 2-fibraciones 2-discretas que se corresponden con 2-funtores $\mathcal{C}^{coop} \longrightarrow \mathcal{C}at$. Mas aun mostramos que esta teoria es mucho mas simple y similar a la teoria de fibraciones, en particular observamos que hay solo una definicion correcta, mientras que para 2-fibraciones en general hay distintas nociones mas laxas o estrictas (vease [Buc14]). Tambien utilizamos la tecnologia de la bicategoria de fracciones de D. Pronk [Pro96, 2], que generaliza a la construccion de Gabriel-Zisman. Esta bicategoria es la que vuelve equivalencias a una familia de flechas de una bicategoria de forma universal. La construccion es la siguiente, dado el 2-functor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$, se le asocia una coop-2-fibracion 2-discreta $\int F \xrightarrow{p} \mathcal{C}$, en este caso $\int F$ es una 2-categoria. Se prueba que si \mathcal{C} es 2-filtrante entonces las flechas cocartesianas admiten un calculo de fracciones a izquierda (en el sentido de [Pro96, 2.1]). Se obtiene entonces la bicategoria de fracciones $\int F[\Sigma^{eq}]$, y luego se le aplica el functor de componentes conexas en los *homs* obteniendo una categoria $\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}])$, se prueba por construccion que esta categoria es el pseudocolimite.

Por otra parte, en [DS06] se habia construido este pseudocolimite a mano. Probamos en la ultima seccion que nuestra construccion coincide con la de Dubuc-Street.

En las secciones 2, 3 y 4 se da un breve repaso de los contenidos a generalizar, nada de esto es nuevo salvo la subseccion 4.7 en donde observamos como construir los colimites (filtrantes) de conjuntos utilizando la construccion de Grothendieck y un functor de componentes conexas, idea que utilizamos luego. En la seccion 5 se estudia la noción de 2-categoria 2-filtrante, se da una nueva definicion de este concepto y se prueba que coincide con las dos definiciones

existentes. Tambien se introduce la nocion de 2 -categoria strict- 2 -filtrante y se construyen los 2 -colimites y pseudocolimites en este caso. El problema de esta nocion es que es demasiado estricta para aparecer usualmente en la practica. En la seccion 6 se desarrolla una generalizacion del calculo de fracciones de Gabriel-Zisman a 2 -categorias, esta construccion da la 2 -categoria que hace una familia de flechas isomorfismos de forma universal. Los resultados de esta seccion no son utilizados luego ya que las condiciones necesarias para poder aplicar tal construccion son demasiado estrictas. Las seccion 7 contiene un resumen de los resultados de 2 -fibraciones de [Buc14] que utilizaremos, y tambien los resultados anunciados sobre 2 -fibraciones 2 -discretas. La seccion 8 es solo para introducir la bicategoria de fracciones de [Pro96]. Por ultimo, la seccion 9 contienen la demostracion del teorema principal y la comparacion con [DS06].

1.2 Motivacion

En su obra fundamental [SGA4-1, SGA4-2, SGA4-3], A. Grothendieck desarrolla la teoria de Topos como el marco teorico en donde formular un problema matematico y resolverlo utilizando tecnicas homologicas. Un topos es una categoria de haces sobre un sitio, por ejemplo, dado un espacio topologico X uno tiene una categoria de abiertos $\mathcal{O}(X)$, que es un sitio considerando los cubrimientos por abiertos, y la categoria de haces es una subcategoria de $\mathcal{E}ns^{\mathcal{O}(X)^{op}}$ cuyos objetos son los funtores que satisfacen una propiedad de pegado de secciones locales. Dado un sitio \mathcal{C} , se nota $\widetilde{\mathcal{C}}$ a la categoria de haces asociada que es una subcategoria de la categoria de prehaces $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$. Dado un topos \mathcal{E} , se obtiene una *categoria abeliana* $Ab(\mathcal{E})$ que es la categoria de objetos grupos abelianos de \mathcal{E} . Para poner los pies sobre la tierra, si \mathcal{E} es la categoria de haces sobre un sitio \mathcal{C} , entonces tautologicamente $Ab(\mathcal{E})$ se identifica con la categoria de haces de grupos abelianos. Mas aun $Ab(\mathcal{E})$ es una categoria $AB5$ y tiene un generador, por lo tanto un teorema del Tohoku nos garantiza que $Ab(\mathcal{E})$ tiene *suficientes inyectivos*, luego uno tiene resoluciones inyectivas, y por lo tanto uno obtiene naturalmente la cohomologia del topos tomando los funtores derivados a derecha del funtor de secciones globales $Ab(\mathcal{E}) \xrightarrow{hom(1,-)_*} Ab$. Esta idea fantastica unifica las teorias de cohomologia topologicas y de estructuras algebraicas en un mismo marco teorico y permite ademas definir la cohomologia étale de esquemas. La idea general de Grothendieck para atacar un problema, es *encontrar el topos natural del mismo, expresar el problema en terminos de la cohomologia del topos y resolverlo*.

Esta es nuestra principal motivacion para estudiar la teoria de Topos. Este trabajo sin embargo no es estrictamente sobre teoria de topos, o mas bien es sobre una parte tecnica de la misma, pero nuestra motivacion es las aplicaciones que tiene en la misma. Cuando Grothendieck trabaja con topos se da cuenta que la categoria de topos $\mathcal{T}op$ es mas bien una 2 -categoria, y es el primero en prestarle atencion a los detalles que surgen de este hecho. En particular las nociones usuales de limites y colimites en categorias son demasiado rigidas en

este contexto. Es por esto que define el concepto de bilimites y en [SGA4-2], utilizando la teoría de Fibraciones de Grothendieck desarrollada en [SGA1], da una construcción de los bilimites y bicolimites de categorías indexados por una categoría (en realidad eran pseudocolimites pero esta distinción no existía). Mas aun, observa que en el caso filtrante la construcción del bicolimite es muy simple y manejable. Utilizando esta técnica construye los bilimites cofiltrantes de topos. La restricción principal que tienen estas construcciones es que los diagramas tienen que estar indexado por una categoría, cuando mas generalmente un diagrama puede estar indexado por una \mathcal{I} -categoría. Es por esto que en [DS06] se construyen los bicolimites \mathcal{I} -filtrantes de categorías, y como aplicación en [DY11] se construyen los bilimites \mathcal{I} -cofiltrantes de topos. Otra aplicación interesante de esta técnica es [Dub10] donde se prueba que todo topos de galois tiene un punto.

1.3 Conocimientos previos y advertencias

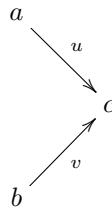
A lo largo de esta tesis no encontrara ningun ejemplo ya que el objetivo no es dar una introducción accesible a un tema conocido, simplemente en las primeras cuatro secciones se repasan los temas con los que se va a trabajar. El lector que este interesado en aprender estos temas por primera vez puede leerlos de una gran variedad de excelentes libros, por ejemplo [Vis06]. En este trabajo se asume que el lector esta familiarizado con el yoga básico de la teoría de categorías. Estos contenidos pueden encontrarse en el famoso libro de S. Mac Lane [CFWM], mas especificamente los primeros 5 capítulos son suficientes. Otra opción es la enciclopedia de F. Borceux [HCA1], [HCA2], [HCA3], especificamente los primeros 4 capítulos del primer tomo cubren los temas básicos. El libro de P. Gabriel y M. Zisman [GZ67] es la mejor referencia del capítulo 2, y en este podemos encontrar muchas aplicaciones interesantes del cálculo de fracciones. El capítulo 3 solo introduce los conceptos básicos \mathcal{I} -categoricos que usaremos mas adelante, para una referencia mas completa ver [KS74],[HCA1]. El capítulo 4 es un resumen de la teoría de Fibraciones de Grothendieck, estos resultados aparecieron originalmente en [SGA1] y [SGA4-2], sin embargo estos trabajos son poco accesibles para un público general. Para el lector interesado en profundizar sobre las categorías fibradas y sus aplicaciones recomendamos las notas de A. Vistoli [Vis06], o en su defecto el capítulo 8 de [HCA2]. En este trabajo nos restringimos a trabajar con \mathcal{I} -categorías en lugar de bicategorías, sin embargo por razones técnicas en las secciones 7, 8 y 9 aparecera aisladamente este concepto. En este trabajo no definimos este concepto, asi como tampoco definimos el concepto de pseudofunctor, ya que no son particularmente relevantes para nuestro objetivo y su definición ocuparia varias hojas. Para estas definiciones damos como referencia el trabajo de J. Bénabou [Ben67] aunque este tiene ciertas notaciones anticuadas que no son usuales, una exposición mas accesible se encuentra en el capítulo 7 de [HCA1].

2 Categoría de fracciones

2.1 Categoría filtrante y colimites filtrantes de conjuntos

Definition 2.1. Decimos que una categoría \mathcal{C} es *filtrante* si es no vacía, y satisface

(F1) Dado un par de objetos $a, b \in \mathcal{C}$, existen flechas u, v y un objeto c como en el diagrama



Informalmente decimos que *dados dos objetos, existe uno después*.

(F2) Todo diagrama del tipo

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$$

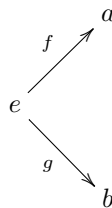
se puede completar a un diagrama conmutativo

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b \xrightarrow{h} c$$

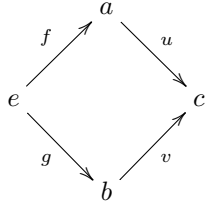
Es decir, *dos flechas son iguales más lejos*.

La categoría se dice *pseudofiltrante* si satisface (F2), pero en lugar de (F1) satisface la condición más débil siguiente

(PF1) Todo diagrama del tipo

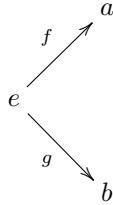


se puede completar a un diagrama (no necesariamente conmutativo)

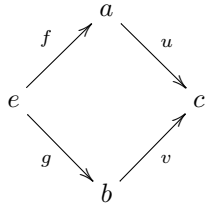


Remark 2.2. (1) Si \mathcal{C} es filtrante entonces \mathcal{C} es pseudofiltrante.

(2) Tautologicamente si \mathcal{C} es pseudofiltrante se tiene que dado un diagrama del tipo



se puede completar a un diagrama *conmutativo*



(3) Si \mathcal{C} tiene objeto final entonces es filtrante.

(4) \mathcal{C} es filtrante si y solo si es pseudofiltrante, no vacia y conexa. Esta es la definicion original de Grothendieck en el [SGA4-1].

(5) Si \mathcal{C} tiene coproductos finitos y coegalizadores entonces es filtrante, en efecto la condicion (F1) nos dice que existe un cono para un diagrama dado por elegir dos elementos, y la condicion (F2) nos dice que existe un cono para un diagrama dado por elegir dos flechas entre dos objetos, entonces basta tomar el coproducto para (F1) y el coegalizador para (F2), y \mathcal{C} es no vacia pues $\coprod_{\emptyset} = 0$.

Es decir que una categoria filtrante es la nocion *no universal* de categoria con coproductos y coegalizadores. En el caso exacto, se tiene que

\mathcal{C} tiene coproductos finitos y coegalizadores

\mathcal{C} tiene colimites finitos

Es de esperar entonces que en este caso se tenga un resultado analogo, es decir se espera que

\mathcal{C} es filtrante

todo diagrama finito en \mathcal{C} tiene un (co-)cono

Esto de hecho es cierto y se deduce tautologicamente de los siguientes hechos,
 (6) \mathcal{C} es no vacia y satisface (F1) si y solo si para toda coleccion finita de objetos existe uno despues de todos.

(7) \mathcal{C} satisface (F2) si y solo si toda coleccion finita de flechas entre dos objetos, son iguales mas lejos.

Estas ultima observacion justifica las definiciones 2-categoricas de filtrabilidad que proponemos posteriormente. Por ultimo, recordamos la construccion de los colimites filtrantes de conjuntos.

Theorem 2.3. Dado un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}ns$, con \mathcal{C} filtrante, entonces el colimite de F se puede construir como $colim F = \coprod_{a \in \mathcal{C}} Fa / \sim$, donde $(x, a) \sim (y, b)$ si y solo si existen flechas

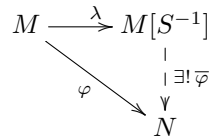


tales que $Fu(x) = Fv(y)$.

2.2 Categoria de fracciones

Como introduccion a esta seccion, recordamos la construccion del monoide de fracciones. Dado un monoide M , y un subconjunto $S \subset M$, nos interesa invertir a los elementos de S de manera universal. Esto se expresa en la siguiente propiedad universal, nos interesa encontrar un monoide $M[S^{-1}]$ con un morfismo

$M \xrightarrow{\lambda} M[S^{-1}]$ tal que $\lambda(s)$ es inversible para todo $s \in S$, y para todo morfismo $M \xrightarrow{\varphi} N$ tal que $\varphi(s)$ es inversible para todo $s \in S$,



Si el monoide M es conmutativo, y S es multiplicativamente cerrado, entonces se puede construir $M[S^{-1}]$ de manera muy simple

$$M[S^{-1}] = \left\{ \frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S \right\}$$

con el producto obvio, y donde $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$ si y solo si existe $s'' \in S$ tal que $s''s'm = s''s'm'$. Sin embargo, si quitamos estas hipotesis, esta construccion no es posible, aunque se puede hacer de una forma canonica. Primero, tomamos M_S el monoide de palabras de M al que le agregamos letras libres s^{-1} para cada $s \in S$, y luego tomamos el cociente por la relacion de equivalencia compatible generada que recuerda la composicion, es decir *la palabra mn es igual a la letra mn* , y que impone $ss^{-1} = s^{-1}s = 1$, es claro que obtenemos el monoide de fracciones buscado

$$M[S^{-1}] = M_S / \sim$$

La primera construccion tiene la gran ventaja de que uno puede realizar cuentas explicitamente en este monoide y los elementos se expresan como fracciones. La segunda construccion tiene la ventaja de funcionar en general, aunque hacer cuentas en este monoide es muy dificil, ya que es un monoide de palabras cocientado por una relacion de equivalencia generada que no conocemos explicitamente.

Dado que un monoide es una categoria con un solo objeto, este problema se puede generalizar de manera obvia a categorias.

Definition 2.4. Dada una categoria \mathcal{C} y un conjunto de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathcal{C})$, decimos que existe una *categoria de fracciones* $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$, si se tiene un funtor

$$\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$$

tal que $h(s)$ es un iso para toda $s \in \Sigma$, y es universal respecto a esta propiedad. Mas precisamente, dado un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ tal que $F(s)$ es un iso para toda $s \in \Sigma$, entonces

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{h} & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \\ & \searrow F & \downarrow \exists! \hat{F} \\ & & \mathcal{D} \end{array}$$

Mas aun, pedimos que tenga una propiedad universal 2-categorica, se pide que h nos de un *isomorfismo de categorias*

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

donde $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$ es la categoria de funtores que invierten a las flechas de Σ .

Remark 2.5. Este problema tiene una solución general similar al caso de monoides, se considera el grafo dirigido de la categoría, y se le agregan flechas s^{-1} en la dirección opuesta para cada s , luego consideramos la categoría libre sobre este grafo, en esta la composición está dada por concatenación. Se cocienta luego por la relación de equivalencia compatible generada que recuerda la composición y que impone $ss^{-1} = 1$, $s^{-1}s = 1$, y se obtiene la categoría de fracciones. Nuevamente, esta construcción es totalmente inmanejable y no nos permite hacer cuentas explícitamente. Ver 1.1 de [GZ67] para una descripción más detallada de esta construcción.

Para resolver este problema P. Gabriel introdujo una serie de propiedades, que permiten dar una construcción de la categoría $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ en la que las flechas se representan como fracciones.

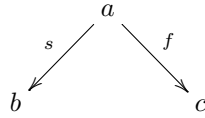
2.3 Cálculo de fracciones

Definition 2.6. Dada una categoría \mathcal{C} y un conjunto de flechas Σ decimos que este *satisface un cálculo de fracciones (a izquierda)* si

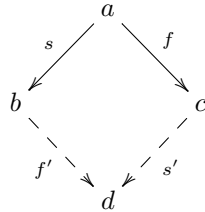
(CF1) $1_a \in \Sigma$ para todo $a \in \mathcal{C}$

(CF2) Si se tienen $a \xrightarrow{s} b \xrightarrow{t} c$, con $s, t \in \Sigma$ entonces $ts \in \Sigma$.

(CF3) Dado un diagrama del tipo



con $s \in \Sigma$, entonces se puede completar a un diagrama conmutativo



con $s' \in \Sigma$.

(CF4) Dadas f, g flechas, si existe $s \in \Sigma$ tal que

$$x \xrightarrow{s} a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$$

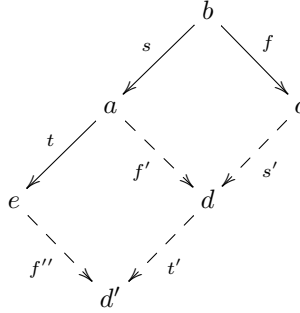
entonces existe $s' \in \Sigma$

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b \xrightarrow{s'} x'$$

Remark 2.7. (1) Las propiedades (CF1) y (CF2) nos garantizan en particular que si tomamos a los objetos de \mathcal{C} con las flechas de Σ entonces forman una subcategoría de \mathcal{C} , que por abuso de notación también llamamos Σ .

(2) Si Σ satisface (CF3) y (CF4) decimos que satisface un pre-cálculo de fracciones, ya que en estas condiciones agregándole a Σ las identidades y las composiciones satisface el cálculo de fracciones.

En efecto, para ver (CF3) se pegan diagramas



Para ver (CF4) basta observar que si tengo que conmuta

$$x \xrightarrow{s} y \xrightarrow{t} a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$$

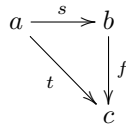
entonces existe un $s' \in \Sigma$ tal que

$$y \xrightarrow{t} a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b \xrightarrow{s'} x'$$

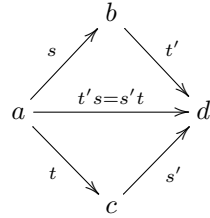
y luego existe un $t' \in \Sigma$ tal que

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b \xrightarrow{s'} x' \xrightarrow{t'} y'$$

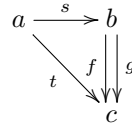
Lemma 2.8. Si Σ satisface un cálculo de fracciones, y $a \in \mathcal{C}$ un objeto, entonces a/Σ es una categoría filtrada. Recordamos que a/Σ es la subcategoría slice debajo de a cuyos objetos son las flechas de Σ con dominio a y una flecha de s a t es una flecha f de \mathcal{C} tal que el diagrama conmuta



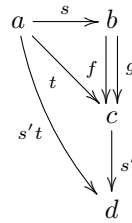
En efecto, para ver (F1) dadas $s, t \in a/\Sigma$ por (CF3) se tiene un diagrama



con $t' \in \Sigma$. Por (CF2) entonces $t's \in \Sigma$ y esto prueba (F1).
 Para ver (F2), dadas flechas f, g



por (CF4) existe $s' \in \Sigma$ tal que



y nuevamente por (CF2) entonces $s't \in \Sigma$, esto prueba (F2).

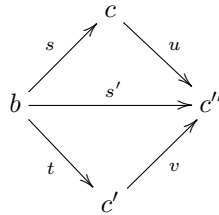
Definition 2.9. Dados $a, b \in \mathcal{C}$ se define $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, b]$ como el colimite filtrante del funtor

$$\begin{array}{ccc}
 b/\Sigma & \longrightarrow & \mathcal{E}ns \\
 \\
 (b \xrightarrow{s} c) & \longrightarrow & [a, c] \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{s} & c \\
 & \searrow t & \downarrow f \\
 & & c'
 \end{array} & \longrightarrow & [a, c] \xrightarrow{f_*} [a, c']
 \end{array}$$

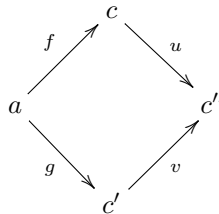
Es decir, $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, b] = \operatorname{colim}_{b \xrightarrow{s} c, s \in b/\Sigma} [a, c]$. De la construcción de colimites filtrantes de conjuntos se sigue que

$$\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, b] = \coprod_{b \xrightarrow{s} c, s \in b/\Sigma} [a, c]/\sim$$

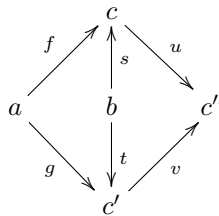
donde $(f, s) \sim (g, t)$ si y solo si son iguales mas lejos, es decir existen u, v y $s' \in \Sigma$ tales que



y tales que conmuta

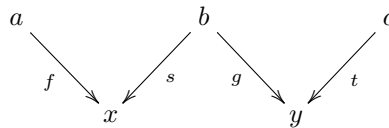


Es decir, en un unico diagrama, $(f, s) \sim (g, t)$ si y solo si existe un diagrama

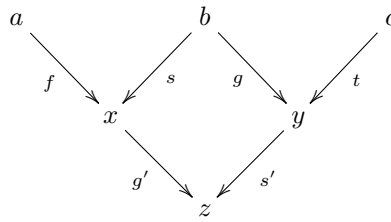


tal que el diagrama exterior conmuta y $us = vt \in \Sigma$. Las fracciones las notamos como $\frac{f}{s}$ o mas precisamente $s^{-1}f$.

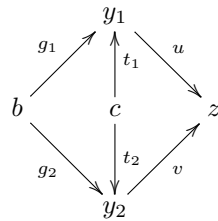
Se define la composicion en $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ utilizando $(CF3)$, es decir dadas fracciones



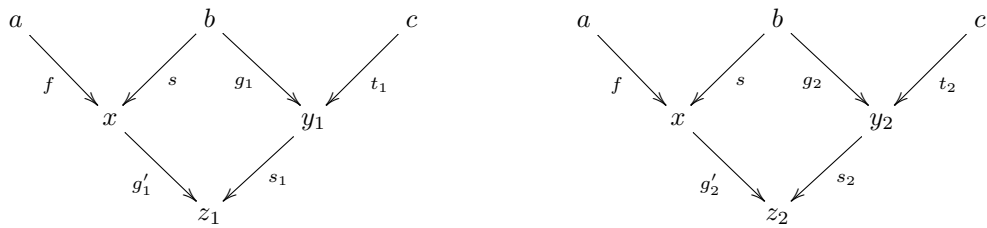
la composicion es la fraccion



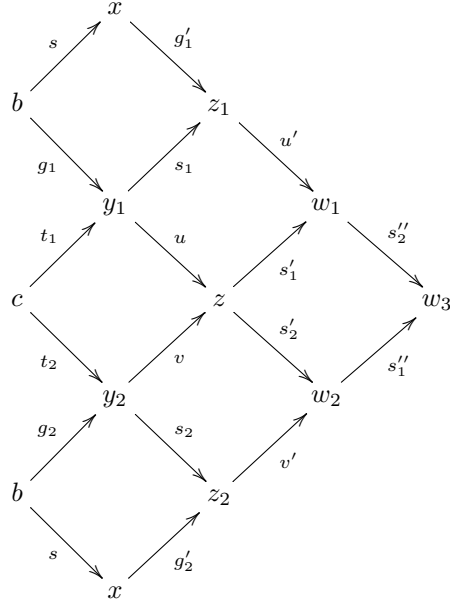
Veamos que la composición esta bien definida, es decir que no depende de las fracciones elegidas. Lo hacemos en dos pasos, si tenemos $(g_1, t_1) \sim (g_2, t_2)$ entonces se tienen u, v tales que



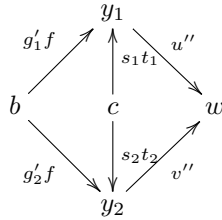
y $ut_1 = vt_2 \in \Sigma$. Queremos ver que las siguientes fracciones son iguales



Aplicando sucesivas veces $(CF3)$ se obtiene un diagrama conmutativo

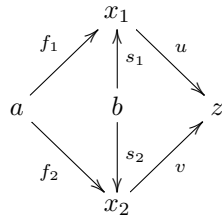


Por lo tanto, se tiene que $s''_2 u' g'_1 s = s''_1 v' g'_2 s$ y por (CF_4) existe $w_3 \xrightarrow{s'} w$ en Σ tal que $s' s''_2 u' g'_1 = s' s''_1 v' g'_2$. Tomando $u'' = s' s''_2 u'$ y $v'' = s' s''_1 v'$ se obtiene que

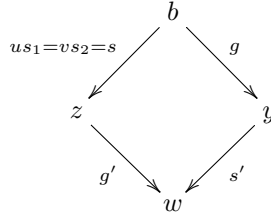


y $u'' s_1 t_1 = v'' s_2 t_2 \in \Sigma$, por lo tanto las fracciones son iguales. Ahora, si tenemos $(f_1, s_1) \sim (f_2, s_2)$ entonces queremos ver que la composicion con (g, t) da la misma fraccion.

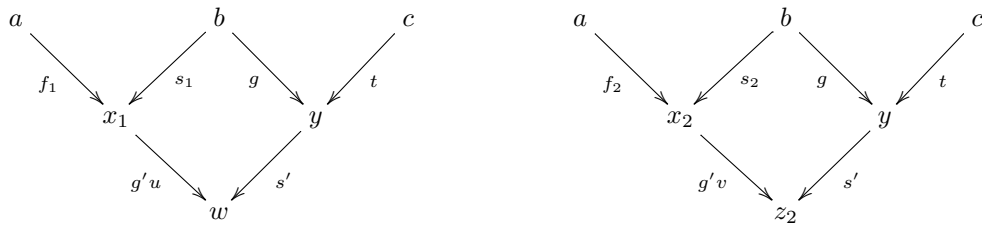
Por hipotesis tenemos u, v tales que



y tal que $us_1 = vs_2 = s \in \Sigma$. Por (CF_3) se tiene entonces un diagrama conmutativo



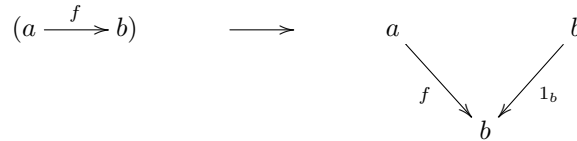
y luego podemos definir las composiciones como



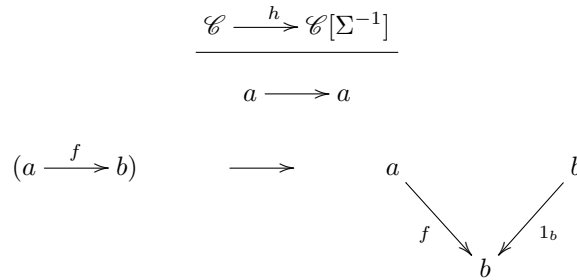
que de hecho son la misma fracción ya que $uf_1 = vf_2$, por lo tanto la composición está bien definida.

Observamos que se tiene naturalmente una función,

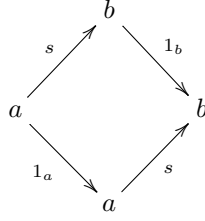
$$[a, b] \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, b] = \operatorname{colim}_{b \xrightarrow{s} x, s \in b/\Sigma} [a, x]$$



A partir de esto podemos concluir que $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ es una categoría, y tenemos un funtor canónico



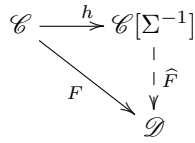
Remark 2.10. (1) Este funtor hace a las flechas de Σ isomorfismos, ya que la inversa de $\frac{s}{1_b}$ está dada por $\frac{1_b}{s}$. En efecto, tenemos que $(s, s) \sim (1_a, 1_a)$ ya que tomamos $u = 1_b, v = s$, luego



y esto prueba la afirmacion.

(2) Dadas flechas $a \xrightarrow[f]{g} b$ entonces $\frac{f}{1_b} = \frac{g}{1_b}$ si y solo si existe $s \in \Sigma$ tal que $sf = sg$.

Por ultimo, verificamos que $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ tiene la propiedad universal deseada. En efecto, dado un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ tal que $F(s)$ es un isomorfismo para todo $s \in \Sigma$ se define



en los objetos igual que F , y en las flechas por la formula

$$\widehat{F}\left(\frac{f}{s}\right) = F(s)^{-1}F(f)$$

Claramente, esta es la unica forma de definirlo para que el diagrama conmute. Hay que ver que esta bien definido, en efecto, si $(f, s) \sim (g, t)$, sean u, v tales que $us = vt \in \Sigma$ y $uf = vg$. Observar que se deduce que $F(u)$ y $F(v)$ son isos. Luego se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{F}\left(\frac{f}{s}\right) &= F(s)^{-1}F(f) = F(s)^{-1}F(u)^{-1}F(u)F(f) = F(us)^{-1}F(uf) = \\ &F(vt)^{-1}F(vg) = F(t)^{-1}F(v)^{-1}F(v)F(g) = F(t)^{-1}F(g) = \widehat{F}\left(\frac{g}{t}\right) \end{aligned}$$

Es functorial, ya que

$$\begin{aligned} \widehat{F}\left(\frac{g}{t} \frac{f}{s}\right) &= \widehat{F}\left(\frac{g'f'}{s't}\right) = F(s't)^{-1}F(g'f') = F(t)F(s')^{-1}F(g')F(f) = \\ &F(t)F(g)F(s)^{-1}F(f) = \widehat{F}\left(\frac{g'}{t}\right)\widehat{F}\left(\frac{f'}{s}\right) \end{aligned}$$

Veamos que h induce un isomorfismo de categorias h^* , que tiene un adjunto

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \mathcal{D}] \begin{array}{c} \xrightarrow{h^*} \\ \xleftarrow{(-)} \end{array} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

Como ya vimos que h^* es biyectivo en los objetos, basta ver que este par forma una equivalencia adjunta. En efecto, se tiene que dado un funtor $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \xrightarrow{G} \mathcal{D}$ se tiene una biyeccion natural

$$\frac{Gh \xrightarrow{\eta} F}{G \xrightarrow{\eta} \widehat{F}}$$

donde el abuso de notacion esta mas que justificado, pues ambas transformaciones naturales estan definidas por la misma formula. Para chequear la naturalidad de $G \xrightarrow{\eta} \widehat{F}$ basta observar que dada una fraccion $\frac{f}{s}$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Ga & \xrightarrow{\eta_a} & \widehat{F}a \\ G(\frac{f}{s}) \downarrow & & \downarrow \widehat{F}(\frac{f}{s}) \\ Gb & \xrightarrow{\eta_b} & \widehat{F}b \end{array}$$

pues $G(\frac{f}{s}) = (Gh(s))^{-1}Gh(f)$ y $\widehat{F}(\frac{f}{s}) = F(s)^{-1}F(f)$, y luego se puede escribir como el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Ga & \xrightarrow{\eta_a} & \widehat{F}a \\ Gh(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ Gx & \xrightarrow{\eta_x} & \widehat{F}x \\ Gh(s)^{-1} \downarrow & & \downarrow F(s)^{-1} \\ Gb & \xrightarrow{\eta_b} & \widehat{F}b \end{array}$$

Es claro por la misma cuenta que se tiene una biyeccion natural

$$\frac{F \xrightarrow{\eta} Gh}{\widehat{F} \xrightarrow{\eta} G}$$

ya que la direccion de η no importaba en esta ultima cuenta, es decir que se tiene $\widehat{(-)} \dashv h^* \dashv (-)$, en particular $\widehat{(-)}$ es funtorial, y forman una equivalencia adjunta. Esto prueba que se tiene el isomorfismo de categorias deseado.

2.4 Propiedades de exactitud

Proposition 2.11. Sea \mathcal{C} una categoria, $\Sigma \subset Fl(\mathcal{C})$ que satisface el calculo de fracciones a izquierda, entonces

$$\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$$

preserva colimites finitos (i.e. es *exacto a derecha*).

En efecto, queremos ver que dado una categoria finita \mathcal{A} , y un funtor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$, entonces el morfismo canonico

$$h(\operatorname{colim}_{a \in \mathcal{A}} F(a)) \dashrightarrow \operatorname{colim}_{a \in \mathcal{A}} hF(a)$$

es un isomorfismo. Equivalentemente por el lema de yoneda, basta ver que se tiene para cada una biyeccion natural en $c \in \mathcal{C}$,

$$\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][h(\operatorname{colim}_{a \in \mathcal{A}} F(a)), c] \longrightarrow \lim_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{C}[\Sigma^{-1}][hF(a), c]$$

Pero como $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, b] = \operatorname{colim}_{b \xrightarrow{s} x} [a, x]$, entonces

$$\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][h(\operatorname{colim}_{a \in \mathcal{A}} F(a)), c] = \operatorname{colim}_{c \xrightarrow{s} x} [\operatorname{colim}_{a \in \mathcal{A}} F(a), x] = \operatorname{colim}_{c \xrightarrow{s} x} \lim_{a \in \mathcal{A}} [F(a), x]$$

Por la conmutatividad de los colimites filtrantes y los limites finitos se tiene un biyeccion natural

$$\operatorname{colim}_{c \xrightarrow{s} x} \lim_{a \in \mathcal{A}} [F(a), x] \longrightarrow \lim_{a \in \mathcal{A}} \operatorname{colim}_{c \xrightarrow{s} x} [F(a), x]$$

y por ultimo,

$$\lim_{a \in \mathcal{A}} \operatorname{colim}_{c \xrightarrow{s} x} [F(a), x] = \lim_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{C}[\Sigma^{-1}][hF(a), c]$$

Por lo tanto h preserva colimites finitos.

3 2-Categorías

3.1 Definiciones básicas

Definition 3.1. Una *2-categoría* esta dada por

(1) Una colección de *objetos*

$$a, b, c, \dots$$

(2) Para cada par de objetos a, b se tiene un conjunto de *flechas*

$$a \xrightarrow{f} b$$

(3) Para cada par de flechas entre dos objetos se tiene un conjunto de *2-flechas*

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & b \\
 & g &
 \end{array}$$

(4) *Composicion*

Dadas flechas consecutivas se las puede componer

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c = a \xrightarrow{gf} c$$

y dadas 2-flechas se tiene la *composicion vertical*

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ f' \\ \Downarrow \alpha' \\ \curvearrowleft \end{array} & b \\
 & f'' &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & f & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha' \circ \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & b \\
 & f'' &
 \end{array}$$

y la *composicion horizontal*

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & b \\
 & f' &
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & g & \\
 b & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \beta \\ \curvearrowleft \end{array} & c \\
 & g' &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & gf & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \beta \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & c \\
 & g' f' &
 \end{array}$$

que satisfacen las siguientes condiciones

(5) *Asociatividad*

La composicion de flechas, la composicion vertical y la composicion horizontal de 2-flechas son asociativas.

(6) *Identities*

La composicion de flechas y la composicion vertical de 2-flechas tienen identities. Dado un objeto a notamos a su identidad por $a \xrightarrow{1_a} a$ y dada una flecha $a \xrightarrow{f} b$ notamos a la identidad de f por

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow 1_f \\ \curvearrowleft \end{array} & b \\
 & f &
 \end{array}$$

y satisfacen

$$\begin{array}{ccc}
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \xrightarrow{f} \\ \Downarrow 1_f \\ \curvearrowleft \xrightarrow{f} \end{array} & b & \begin{array}{c} \curvearrowright \xrightarrow{g} \\ \Downarrow 1_g \\ \curvearrowleft \xrightarrow{g} \end{array} & c & = & a & \begin{array}{c} \curvearrowright \xrightarrow{gf} \\ \Downarrow 1_{gf} \\ \curvearrowleft \xrightarrow{gf} \end{array} & c
 \end{array}$$

(7) *Ley de Intercambio*

El siguiente diagrama es inambiguo

$$\begin{array}{ccccc}
 & f & & g & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{f'} \\ \Downarrow \alpha' \\ \curvearrowleft \end{array} & b & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{g'} \\ \Downarrow \beta' \\ \curvearrowleft \end{array} & c \\
 & f'' & & g'' &
 \end{array}$$

Es decir que

$$\begin{array}{ccc}
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha' \circ \alpha \\ \curvearrowleft \xrightarrow{f''} \end{array} & b & \begin{array}{c} \curvearrowright \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \beta' \circ \beta \\ \curvearrowleft \xrightarrow{g''} \end{array} & c & = & a & \begin{array}{c} \curvearrowright \xrightarrow{gf} \\ \Downarrow \beta \alpha \\ \xrightarrow{g' f'} \\ \Downarrow \beta' \alpha' \\ \curvearrowleft \xrightarrow{g'' f''} \end{array} & b
 \end{array}$$

o mas explicitamente $(\beta' \circ \beta)(\alpha' \circ \alpha) = (\beta' \alpha') \circ (\beta \alpha)$. Utilizamos el siguiente abuso de notacion, llamamos a la identidad de una flecha igual que la flecha en cuestion. En particular, la composicion horizontal

$$\begin{array}{ccccccc}
 & f & & u & & g & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow 1_f \\ \curvearrowleft \end{array} & b & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & c & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow 1_g \\ \curvearrowleft \end{array} & d \\
 & f & & v & & g &
 \end{array}$$

la escribimos asi

$$\begin{array}{ccccc}
 & & u & & \\
 & & \Downarrow \alpha & & \\
 a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c & \xrightarrow{g} & d \\
 & & \Uparrow v & & & &
 \end{array}$$

Equivalentemente, una 2-categoría es una categoría enriquecida en Cat . Explícitamente, una 2-categoría \mathcal{C} esta dada por

- (1) Una clase de objetos a, b, c, \dots
- (2) Para cada par de objetos una *categoría pequeña* $[a, b]$
- (3) Para cada terna de objetos se tiene un *funtor de composición*

$$[a, b] \times [b, c] \xrightarrow{c_{a,b,c}} [a, c]$$

$$(f, g) \longrightarrow gf$$

$$(f, g) \xrightarrow{(\alpha, \beta)} (f', g') \longrightarrow gf \xrightarrow{\beta * \alpha} g'f'$$

- (4) Para cada objeto $a \in \mathcal{C}$ un *funtor unidad*

$$1 \xrightarrow{u_a} [a, a]$$

tal que se satisfacen

- (5) *Asociatividad*

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 [a, b] \times [b, c] \times [c, d] & \xrightarrow{c_{a,b,c} \times 1} & [a, c] \times [c, d] \\
 \downarrow 1 \times c_{b,c,d} & & \downarrow c_{a,c,d} \\
 [a, b] \times [b, d] & \xrightarrow{c_{a,b,d}} & [a, d]
 \end{array}$$

- (6) *Unidad*

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 [a, a] \times [a, b] & \xrightarrow{c_{a,a,b}} & [a, b] & \xleftarrow{c_{a,b,b}} & [a, b] \times [b, b] \\
 \swarrow u_a \times 1 & & \parallel & & \searrow 1 \times u_b \\
 & & [a, b] & &
 \end{array}$$

A modo de ejercicio observamos que la *ley de intercambio* es la funtorialidad del funtor de composición, en efecto

$$(\beta' \alpha') \circ (\beta \alpha) = c_{a,b,c}(\alpha', \beta') c_{a,b,c}(\alpha, \beta) = c_{a,b,c}(\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta) = (\beta' \circ \beta)(\alpha' \circ \alpha)$$

Definition 3.2. Un 2-functor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ esta dado por funciones en los objetos, flechas y 2-flechas respectivamente

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} & & \\
 \hline
 a \longrightarrow Fa & & \\
 \\
 a \xrightarrow{f} b & \longrightarrow & Fa \xrightarrow{Ff} Fb \\
 \\
 a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{f'} \end{array} b & \longrightarrow & Fa \begin{array}{c} \xrightarrow{Ff} \\ \Downarrow F\alpha \\ \xrightarrow{Ff'} \end{array} Fb
 \end{array}$$

que preserva todas las composiciones y todas las identidades

$$\begin{array}{ccc}
 a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{f'} \\ \Downarrow \alpha' \\ \xrightarrow{f''} \end{array} b \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{g'} \\ \Downarrow \beta' \\ \xrightarrow{g''} \end{array} c & \longrightarrow & Fa \begin{array}{c} \xrightarrow{Ff} \\ \Downarrow F\alpha \\ \xrightarrow{Ff'} \\ \Downarrow F\alpha' \\ \xrightarrow{Ff''} \end{array} Fb \begin{array}{c} \xrightarrow{Fg} \\ \Downarrow F\beta \\ \xrightarrow{Fg'} \\ \Downarrow F\beta' \\ \xrightarrow{Fg''} \end{array} Fc
 \end{array}$$

y preserva las unidades, $F(1_a) = 1_{Fa}$, y $F(1_f) = 1_{Ff}$.

Dado que las construcciones categoricas suelen ser *salvo isomorfismo*, uno puede relajar la definicion de 2-functor a la de *pseudo-functor*, la diferencia es que no le pedimos que preserve la composicion de flechas, si no que lo haga salvo una 2-flecha de manera coherente.

Definition 3.3. Dados 2-funtores $\mathcal{A} \xrightarrow[F]{G} \mathcal{C}$ una transformacion pseudo-

natural esta dada por una familia de flechas $(Fa \xrightarrow{\eta_a} Ga)_{a \in \mathcal{A}}$ y para cada $a \xrightarrow{f} b$ un isomorfismo η_f

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Ga & & \\
 & \nearrow \eta_a & & \searrow Gf & \\
 Fa & & & & Gb \\
 & \searrow Ff & & \nearrow \eta_b & \\
 & & Fb & &
 \end{array}
 \quad \Downarrow \eta_f$$

que satisfacen
(PNT1)

$$\begin{array}{ccc}
 & Ga & \\
 \eta_a \nearrow & & \searrow G1_a \\
 Fa & \Downarrow \eta_{1_a} & Ga \\
 \searrow F1_a & & \nearrow \eta_a \\
 & Fa &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & Ga & \\
 \eta_a \nearrow & & \searrow G1_a \\
 Fa & \Downarrow 1_{\eta_a} & Ga \\
 \searrow F1_a & & \nearrow \eta_a \\
 & Fa &
 \end{array}$$

es decir, $\eta_{1_a} = 1_{\eta_a}$.
(PNT2) Para todas g, f

$$\begin{array}{ccc}
 & Ga & \\
 \eta_a \nearrow & & \searrow Ggf \\
 Fa & \Downarrow \eta_{gf} & Gc \\
 \searrow Fgf & & \nearrow \eta_c \\
 & Fc &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & Ga & \\
 \eta_a \nearrow & & \searrow Gf \\
 Fa & \Downarrow \eta_f & Gb \\
 \searrow Ff & & \nearrow \eta_b \\
 & Fb & \\
 & \searrow Fg & \Downarrow \eta_g \\
 & & Fc \\
 & & \nearrow \eta_c
 \end{array}$$

es decir, $\eta_{gf} = (\eta_g Ff) \circ (Gg\eta_f)$.
(PNT3) Para toda $f \xrightarrow{\alpha} g$

$$\begin{array}{ccc}
 & Ga & \\
 \eta_a \nearrow & & \searrow Gf \\
 Fa & \Downarrow \eta_f & Gb \\
 \searrow Ff & & \nearrow \eta_b \\
 & Fb &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & Ga & \\
 \eta_a \nearrow & & \searrow Gf \\
 Fa & \Downarrow \eta_g & Gb \\
 \searrow Fg & & \nearrow \eta_b \\
 & Fb &
 \end{array}$$

es decir, $(\eta_b F\alpha) \circ \eta_f = \eta_g \circ (G\alpha\eta_a)$.

Cuando η_f es solo una 2-flecha pero no necesariamente un isomorfismo, obtenemos el concepto de *transformacion laxnatural*. Cuando η_f es la identidad, es decir los cuadrados conmutan, es la noción de *transformacion 2-natural*.

Definition 3.4. Dadas transformaciones pseudonaturales (resp. laxnaturales, y 2-naturales)

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
 \mathcal{A} & \Downarrow \eta & \mathcal{C} \\
 & G & \\
 & \Downarrow \theta & \\
 & & \mathcal{C}
 \end{array}$$

una *modificación* esta dada por una familia de 2-flechas

$$(Fa \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta_a} \\ \Downarrow \psi_a \\ \xrightarrow{\theta_a} \end{array} Ga)_{a \in \mathcal{A}}$$

tales que se satisfacen
(M) Para toda f

$$\begin{array}{ccc} & Ga & \\ \eta_a \nearrow & & \searrow Gf \\ Fa & & Gb \\ Ff \searrow & \Downarrow \eta_f & \nearrow \eta_b \\ & Fb & \\ & \Downarrow \psi_b & \\ & \theta_b & \end{array} = \begin{array}{ccc} & Ga & \\ \eta_a \nearrow & & \searrow Gf \\ Fa & & Gb \\ Ff \searrow & \Downarrow \theta_f & \nearrow \theta_b \\ & Fb & \\ & \Downarrow \psi_b & \\ & \theta_b & \end{array}$$

es decir, $(\psi_b Ff) \circ \eta_f = \theta_f \circ (Gf \psi_a)$.

Remark 3.5. Dado que las transformaciones pseudonaturales (resp. 2-naturales y laxnaturales) satisfacen (PNT3) se deduce que una modificación satisface:

(M') Para toda $f \xrightarrow{\alpha} g$

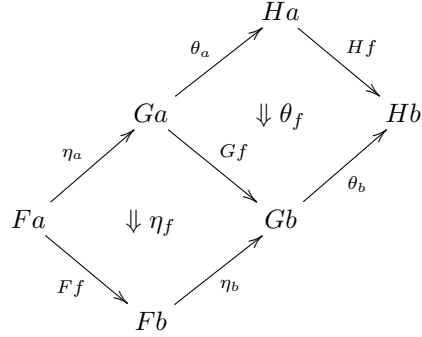
$$\begin{array}{ccc} & Ga & \\ \eta_a \nearrow & & \searrow Gf \\ Fa & & Gb \\ Ff \searrow & \Downarrow \eta_f & \nearrow \eta_b \\ & Fb & \\ & \Downarrow \psi_b & \\ & \theta_b & \end{array} = \begin{array}{ccc} & Ga & \\ \eta_a \nearrow & & \searrow Gf \\ Fa & & Gb \\ Fg \searrow & \Downarrow \theta_g & \nearrow \theta_b \\ & Fb & \\ & \Downarrow \psi_b & \\ & \theta_b & \end{array}$$

es decir, $(\psi_b F\alpha) \circ \eta_f = \theta_g \circ (G\alpha \psi_a)$.

Definition 3.6. Dadas 2-categorías \mathcal{C}, \mathcal{D} se tiene una 2-categoría $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ cuyos objetos son los 2-funtores de \mathcal{C} en \mathcal{D} , cuyas flechas son las transformaciones pseudonaturales, y las 2-flechas son las modificaciones. Dadas transformaciones pseudonaturales

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{H} \end{array} \mathcal{D}$$

definimos la composición vertical por $(\theta \circ \eta)_a = \theta_a \eta_a$, y el isomorfismo $(\theta \circ \eta)_f$ con el diagrama



es decir, $(\theta \circ \eta)_f = (\theta_b \eta_f) \circ (\theta_f \eta_a)$.

Analogamente se obtienen 2-categorías si se toman transformaciones 2-naturales o laxnaturales, aunque cuando nos referimos a estas 2-categorías usamos la misma notación pero lo aclaramos explícitamente.

3.2 2-Colimites

Definition 3.7. Dado un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ un pseudocono (resp. 2-cono, laxcono) $F \xrightarrow{\lambda} c$ es un objeto $c \in \mathcal{C}$ con una transformación pseudonatural (resp. 2-natural, laxnatural) $F \xrightarrow{\lambda} c$ donde llamamos c al 2-functor constante c . Explícitamente, se tiene una familia de flechas $(Fa \xrightarrow{\lambda_a} c)_{a \in \mathcal{A}}$ y una familia de 2-flechas isos

$$\begin{array}{ccc} Fa & \xrightarrow{\lambda_a} & c \\ Ff \downarrow & \Downarrow \lambda_f & \nearrow \\ Fa' & & \end{array}$$

para cada $a \xrightarrow{f} a'$ tales que (PSC1)

$$\begin{array}{ccc} Fa & \xrightarrow{\lambda_a} & c \\ F1_a \downarrow & \Downarrow \lambda_{1_a} & \nearrow \\ Fa' & & \end{array} = \begin{array}{ccc} Fa & \xrightarrow{\lambda_a} & c \\ F1_a \downarrow & \Downarrow 1_{\lambda_a} & \nearrow \\ Fa' & & \end{array}$$

(PSC2) Dadas flechas $a \xrightarrow{f} a' \xrightarrow{g} a''$ en \mathcal{A} ,

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
Fa & & \\
Ff \downarrow & \searrow \lambda_a & \\
& \Downarrow \lambda_f & \\
Fa' & \xrightarrow{\lambda_{a'}} & c \\
Fg \downarrow & \Downarrow \lambda_g & \\
Fa'' & &
\end{array} & = &
\begin{array}{ccc}
Fa & & \\
& \searrow \lambda_a & \\
& \Downarrow \lambda_{gf} & \\
Fgf & & c \\
& \nearrow \lambda_{a'} & \\
Fa'' & &
\end{array}
\end{array}$$

(PSC3) Dada una 2-flecha $a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} a'$ se tiene que

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
& \lambda_a & \\
& \Downarrow \lambda_f & \\
Fa & \xrightarrow{Ff} & Fa' \\
\Downarrow F\alpha & & \lambda_{a'} \\
& \xrightarrow{Fg} & c
\end{array} & = &
\begin{array}{ccc}
& \lambda_a & \\
& \Downarrow \lambda_g & \\
Fa & \xrightarrow{Fg} & Fa' \\
& & \lambda_{a'} \\
& & c
\end{array}
\end{array}$$

Como antes, cuando $\lambda_f = 1_{\lambda_a}$ para toda f , es decir cuando los diagramas conmutan, se tiene la noción de \mathcal{Q} -cono, es claro que en este caso las condiciones (PSC1) y (PSC2) se cumplen automáticamente, y también cuando las flechas λ_f no son necesariamente isos se tiene la noción de *laxcono*.

Dados pseudoconos (resp. 2-conos, laxconos) $F \xrightarrow[h]{\lambda} c$, una *modificación*

$$\lambda \xrightarrow{\psi} h \text{ esta dada por una familia de 2-flechas } (Fa \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_a} \\ \Downarrow \psi_a \\ \xrightarrow{h_a} \end{array} c)_{a \in \mathcal{A}}$$

tales que para toda $a \xrightarrow{f} a'$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
& \lambda_a & \\
& \Downarrow \lambda_f & \\
Fa & \xrightarrow{Ff} & Fa' \\
& \Downarrow \psi_{a'} & \\
& \xrightarrow{h_{a'}} & c
\end{array} & = &
\begin{array}{ccc}
& \lambda_a & \\
& \Downarrow \psi_a & \\
Fa & \xrightarrow{\lambda} & c \\
& \Downarrow h_f & \\
Ff & & Fa' \\
& \nearrow h_{a'} &
\end{array}
\end{array}$$

Dado un objeto $c \in \mathcal{C}$ se tiene una categoría $PsCon[F, c]$ (resp. $2-Con[F, c]$ y $LaxCon[F, c]$). Dado un pseudocono $F \xrightarrow{\lambda} L$ se tiene un functor dado por precomposición

$$[L, c] \xrightarrow{\lambda^*} PsCon[F, c]$$

Decimos que $F \xrightarrow{\lambda} L$ es el *pseudocolimite* si λ^* es un *isomorfismo de categorías* para todo $c \in \mathcal{C}$. Similarmente se obtienen la definición de *2-colimite* (resp. *laxcolimite*), si se toma un 2-cono (resp. un laxcono) y la categoría $2-Con[F, c]$ (resp. $LaxCon[F, c]$). Decimos que $F \xrightarrow{\lambda} L$ es el *bicolimite* si λ^* es una *equivalencia de categorías*.

4 Categorías fibradas

4.1 Categorías fibradas, definiciones y yoga básico

Remark 4.1. Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ un funtor, y sea $b \xrightarrow{f} a$ una flecha de \mathcal{C} , decimos que $y \xrightarrow{\alpha} x$ *esta arriba de f* si $p\alpha = f$. Dado que usualmente escribiremos diagramas conmutativos en las dos categorías involucradas a la vez, escribimos uno arriba del otro, por ejemplo el diagrama

$$y \xrightarrow{h} x$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

nos dice que α esta arriba de f . Notamos \mathcal{F}_a a la fibra sobre a , es decir $\mathcal{F}_a = p^{-1}(a)$, es una categoría cuyos objetos son los $x \in \mathcal{F}$ tales que $px = a$, y cuyas flechas son las *flechas verticales*, las flechas $x \xrightarrow{\alpha} y$ tal que $p\alpha = 1_a$. Un diagrama muy usual sera de la forma

$$\begin{array}{ccc} z & & \\ \downarrow \exists! \bar{\varphi} & \searrow \varphi & \\ y & \xrightarrow{\alpha} & x \end{array}$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

que significa que $p\alpha = f = p\varphi$ y $\bar{\varphi}$ es *vertical*, es decir $p\bar{\varphi} = 1_b$.

Definition 4.2. Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ un funtor, y sea $b \xrightarrow{f} a$ una flecha de \mathcal{C} , dada $y \xrightarrow{\alpha} x$ arriba de f , decimos que

(1) α es *precartesiana* si para toda $z \xrightarrow{\varphi} y$ arriba de f se tiene

$$\begin{array}{ccc} z & & \\ \downarrow \exists! \bar{\varphi} & \searrow \varphi & \\ y & \xrightarrow{\alpha} & x \end{array}$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

es decir, existe una unica $\bar{\varphi}$ tal que $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$ y tal que $p\bar{\varphi} = 1_b$.

(2) α es cartesiana si para toda $c \xrightarrow{g} b$ y toda $z \xrightarrow{\varphi} y$ arriba de fg se tiene

$$\begin{array}{ccc} z & & \\ & \searrow \varphi & \\ & \exists! \bar{\varphi} \dashrightarrow & y \xrightarrow{\alpha} x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} c & & \\ & \searrow fg & \\ & g \searrow & b \xrightarrow{f} a \end{array}$$

es decir, existe una unica $\bar{\varphi}$ tal que $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$ y tal que $p\bar{\varphi} = g$.

Proposition 4.3. α es cartesiana si y solo si para todo $z \in \mathcal{F}$ el siguiente diagrama es un pullback (en $\mathcal{E}ns$)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}[z, y] & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{F}[z, x] \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{C}[c, b] & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{C}[c, a] \end{array}$$

En efecto, por el yoga basico de las categorias basta ver la propiedad universal para el singleton, y en este caso esta

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \xrightarrow{\varphi} & & \\ & \searrow \exists! \bar{\varphi} & & & \\ & & \mathcal{F}[z, y] & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{F}[z, x] \\ & & p \downarrow & & \downarrow p \\ & & \mathcal{C}[c, b] & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{C}[c, a] \\ & \searrow g & & & \end{array}$$

nos dice exactamente la definicion de flecha cartesiana.

Proposition 4.4. Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ un funtor, entonces

(1) Las flechas cartesianas son cerradas por composicion.
Es decir, si tengo

$$z \xrightarrow{\beta} y \xrightarrow{\alpha} x$$

$$c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$$

con α y β cartesianas, entonces $\alpha\beta$ es cartesiana.

(2) Si $\alpha\beta$ es cartesiana y α es cartesiana, entonces β es cartesiana.

(3) Una flecha cartesiana es unica salvo isomorfismo.

Mas especificamente, si α y α' son cartesianas sobre f , entonces existe un unico isomorfismo $z \xrightarrow{h} y$ tal que

$$\begin{array}{ccc} z & & \\ \downarrow \text{\scriptsize } \exists! h & \searrow \alpha' & \\ y & \xrightarrow{\alpha} & x \end{array}$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

En efecto, (1) se sigue de que para todo $w \in \mathcal{F}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}[w, z] & \xrightarrow{\beta_*} & \mathcal{F}[w, y] & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{F}[w, x] \\ p \downarrow & & p \downarrow & & p \downarrow \\ \mathcal{C}[d, c] & \xrightarrow{g_*} & \mathcal{C}[d, b] & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{C}[d, a] \end{array}$$

el siguiente diagrama es un pullback por el Pullback Lemma (*PBL*). El (*PBL*) nos dice tambien que si el cuadrado exterior y el de la derecha son pullbacks, entonces el de la izquierda lo es, y por lo tanto se sigue (2). Es claro que (3) es trivial.

Definition 4.5. Decimos que $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ es una *fibracion (de Grothendieck)* si para toda $b \xrightarrow{f} a$ y todo $x \in \mathcal{F}$ tal que $px = a$, existe $y \xrightarrow{\alpha} x$ cartesiana sobre f . Decimos tambien en este caso que \mathcal{F} es una *categoría fibrada sobre \mathcal{C}* .

Proposition 4.6. Si $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ es una fibracion, y sea $y \xrightarrow{\alpha} x$ sobre $b \xrightarrow{f} a$, entonces son equivalentes

- (1) α es cartesiana.
- (2) α es precartesiana.

En efecto, es claro que siempre (1) \Rightarrow (2), y si α es precartesiana, dada α' cartesiana sobre f , se tiene que $\alpha = \alpha' h$ con $z \xrightarrow{h} y$ un isomorfismo. Es claro entonces que α resulta cartesiana pues α' lo es y el diagrama es un pullback

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \alpha_* & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \mathcal{F}[w, z] & \xrightarrow{h^*} & \mathcal{F}[w, y] & \xrightarrow{\alpha'^*} & \mathcal{F}[w, x] \\
 \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\
 \mathcal{C}[d, b] & \xrightarrow{1_{b^*}} & \mathcal{C}[d, b] & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{C}[d, a] \\
 & & \curvearrowleft & & \\
 & & f_* & &
 \end{array}$$

por el (PBL).

Proposition 4.7. $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ es una fibration si y solo si

- (1) si para toda $b \xrightarrow{f} a$ y todo $x \in \mathcal{F}$ tal que $px = a$, existe $y \xrightarrow{\alpha} x$ precartesiana sobre f .
- (2) composicion de flechas precartesianas es precartesiana.

En efecto, ya vimos que si p es una fibration satisface (1) y (2). Si se satisfacen (1) y (2), dada $y \xrightarrow{\alpha} x$ precartesiana sobre f , veremos que es cartesiana. Dada $c \xrightarrow{g} b$ tomamos β precartesiana sobre g ,

$$\begin{array}{ccc}
 z & & x \\
 \searrow \alpha\beta & & \nearrow \\
 & y \xrightarrow{\alpha} & x \\
 \swarrow \beta & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 c & & a \\
 \searrow fg & & \nearrow \\
 & b \xrightarrow{f} & a \\
 \swarrow g & &
 \end{array}$$

y por (2) $\alpha\beta$ es precartesiana. Luego, para toda $w \xrightarrow{\varphi} x$ se tiene

$$\begin{array}{ccc}
 w & & x \\
 \downarrow \varphi' & \searrow \varphi & \\
 z & \xrightarrow{\alpha\beta} & x \\
 \downarrow & & \\
 c & \xrightarrow{fg} & a
 \end{array}$$

y esto muestra que se tiene un unico $\bar{\varphi} = \beta\varphi'$, tal que

$$\begin{array}{ccc} w & & \\ \swarrow \varphi & & \\ & \searrow & \\ \exists! \bar{\varphi} & \searrow & y \xrightarrow{\alpha} x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} c & & \\ \swarrow fg & & \\ & \searrow & \\ g & \searrow & b \xrightarrow{f} a \end{array}$$

Proposition 4.8. Sean $\mathcal{G} \xrightarrow{q} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ funtores, sea $b \xrightarrow{f} a$ en \mathcal{C} , y se tienen

$$y' \xrightarrow{\alpha'} x'$$

$$y \xrightarrow{\alpha} x$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

Si α es cartesiana sobre f entonces α' es cartesiana sobre α si y solo si α' es cartesiana sobre f .

En efecto, para todo $z' \in \mathcal{G}$ el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}[z', y] & \xrightarrow{\alpha'_*} & \mathcal{F}[z', x] \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ \mathcal{F}[z, y] & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{F}[z, x] \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{C}[c, b] & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{C}[c, a] \end{array}$$

si y solo si el cuadrado de arriba es un pullback, por el (PBL).

Corollary 4.9. Sean $\mathcal{G} \xrightarrow{q} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ fibraciones, entonces pq es una fibration.

Proposition 4.10. Una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} es un isomorfismo si y solo si es cartesiana para $\mathcal{F} \longrightarrow 1$ si y solo si es cartesiana para toda fibration $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$.

En efecto, si $y \xrightarrow{f} x$ es un iso entonces es cartesiana para $\mathcal{F} \longrightarrow 1$ ya que

$$\begin{array}{ccc} z & & \\ \downarrow & \searrow g & \\ \exists! f^{-1}g & & \\ \downarrow & & \\ y & \xrightarrow{f} & x \\ & & * \longrightarrow * \end{array}$$

Por otro lado, si $y \xrightarrow{f} x$ es cartesiana para $\mathcal{F} \longrightarrow 1$ entonces considerando

$$\begin{array}{ccc} x & & \\ \downarrow & \searrow 1_x & \\ \exists! h & & \\ \downarrow & & \\ y & \xrightarrow{f} & x \\ & & * \longrightarrow * \end{array}$$

Falta ver que $hf = 1_y$, pero $fhf = 1_x f = f$, por unicidad del levantado $hf = 1_y$. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & 1 \\ p \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C} & & \end{array}$$

donde p es cualquier fibration. Si $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} es cartesiana para $\mathcal{F} \longrightarrow 1$, entonces automaticamente $py \xrightarrow{pf} px$ es cartesiana para $\mathcal{C} \longrightarrow 1$, por el corolario 4.9 entonces $y \xrightarrow{f} x$ es cartesiana para $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$.

Definition 4.11. Dadas fibraciones $(\mathcal{F}, p), (\mathcal{G}, q)$ sobre \mathcal{C} , un *functor cartesiano* es un funtor $\mathcal{F} \xrightarrow{F} \mathcal{G}$ tal que

- (1) $p = qF$, es decir conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{F} & \mathcal{G} \\
 & \searrow p & \downarrow q \\
 & & \mathcal{C}
 \end{array}$$

(2) F preserva flechas cartesianas.

Mas precisamente, si $y \xrightarrow{\alpha} x$ en \mathcal{F} es cartesiana sobre $b \xrightarrow{f} a$, entonces $Fy \xrightarrow{F\alpha} Fx$ en \mathcal{G} es cartesiana sobre f .

Definition 4.12. Dada una categoria \mathcal{C} , definimos la 2-categoria $Fib(\mathcal{C})$ que es una subcategoria de Cat/\mathcal{C} , cuyos objetos son las fibriciones sobre \mathcal{C} , las flechas son los funtores cartesianos, y las 2-flechas son las transformaciones naturales entre ellos como flechas de Cat/\mathcal{C} , es decir, son las transformaciones naturales

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G} \\
 & \Downarrow \eta & \\
 & G &
 \end{array}$$

tales que

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{F} & \mathcal{G} \\
 & \Downarrow \eta & \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{G} & \mathcal{G}
 \end{array}
 \xrightarrow{q} \mathcal{C} = \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$$

4.2 Fibraciones discretas

Sea $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{E}ns$ un prehaz (i.e. un funtor), entonces se tiene la categoria $\int F$ cuyos elementos son los pares (x, a) con $x \in Fa$, y cuyas flechas estan dadas por

$$\frac{(x, a) \xrightarrow{f} (y, b)}{a \xrightarrow{f} b \text{ tal que } Ff(y) = x}$$

Por el Lema de Yoneda esta categoria es equivalente a \mathcal{C}/F donde identificamos a \mathcal{C} con los funtores representables via el Funtor de Yoneda $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$. Se tiene un funtor dominio

$$\int F \xrightarrow{\diamond} \mathcal{C}$$

$$(x, a) \longrightarrow a$$

y este funtor es una fibration. En efecto, dada una flecha $b \xrightarrow{f} a$, y un par $(x, a) \in \int F$ la unica flecha arriba de f es

$$(Ff(x), b) \xrightarrow{f} (x, a)$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

De esto se deduce automaticamente que es precartesiana, y que estas flechas son cerradas por composicion, y por lo tanto resulta una fibration.

Definition 4.13. Un funtor $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ es una *fibracion discreta* si dada una flecha $b \xrightarrow{f} a$ y $x \in \mathcal{F}_a$, entonces existe una unica flecha $y \xrightarrow{\alpha} x$ arriba de f .

Del argumento anterior se deduce que *una fibration discreta es de hecho una fibration*. Mas aun, veamos que todas son de este tipo. Dada una fibration discreta $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{op} &\xrightarrow{F_p} \mathcal{E}ns \\ a &\longrightarrow \mathcal{F}_a = p^{-1}(a) \end{aligned}$$

y en las flechas, dada $b \xrightarrow{f} a$ y dado $x \in \mathcal{F}_a$ existe una unica flecha cartesiana

$$y \xrightarrow{\alpha} x$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

definimos entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_a &\xrightarrow{f^*} \mathcal{F}_b \\ x &\longrightarrow f^*(x) = y \end{aligned}$$

Por la unicidad de las flechas cartesianas se sigue que dadas flechas

$$c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$$

se tiene que $g^*f^* = (fg)^*$ y por lo tanto F resulta funtorial. Mas aun, si llamamos $DFib(\mathcal{C})$ a la *categoría de fibraciones discretas*, tenemos entonces el siguiente hecho.

Theorem 4.14. Se tiene un isomorfismo de categorías

$$\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} \xrightarrow{f} DFib(\mathcal{C})$$

Para ver que f es funtorial, falta definirlo en las flechas, dada una transformación natural

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{C}^{op} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow h \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{E}ns \\ & G & \end{array}$$

es facil ver que se obtiene un funtor cartesiano

$$f F \xrightarrow{h} f G$$

$$(x, a) \longrightarrow (h_a(x), a)$$

Por otro lado, dado un funtor cartesiano entre dos fibraciones discretas $(\mathcal{F}, p) \xrightarrow{h} (\mathcal{G}, q)$, dado que $qh = p$ se tiene que si $x \in \mathcal{F}_a$ entonces $hx \in \mathcal{G}_a$, por lo tanto podemos definir una familia de funciones

$$\mathcal{F}_a \xrightarrow{h_a} \mathcal{G}_a$$

$$x \longrightarrow hx$$

y resultan en una transformación natural. Es claro que es la unica transformación natural que aplicando f me da h , y por lo tanto se tiene que f es un isomorfismo de categorías.

4.3 Construcción de Grothendieck

Grothendieck se dio cuenta que este hecho se puede generalizar a una equivalencia de 2-categorías

$$[\mathcal{C}^{op}, Cat] \xrightarrow{f} Fib(\mathcal{C})$$

mediante la llamada *Construcción de Grothendieck*, donde $[\mathcal{C}^{op}, Cat]$ es la 2-categoría de pseudofuntores de \mathcal{C} a Cat , transformaciones pseudonaturales, y modificaciones.

Veamos como es esta equivalencia, dada una fibration $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ se tiene para cada $a \in \mathcal{C}$ una categoría \mathcal{F}_a , que es la fibra de a , cuyos objetos son los $x \in \mathcal{F}$ tal que $px = a$ y cuyas flechas son las *flechas verticales*, es decir las flechas $y \xrightarrow{\alpha} x$ tales que $p\alpha = 1_a$. Dada $b \xrightarrow{f} a$ en \mathcal{C} , se tiene para cada $x \in \mathcal{F}_x$ una flecha cartesiana f_x sobre f

$$f^*(x) \xrightarrow{f_x} x$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

y por lo tanto se obtiene un funtor

$$\mathcal{F}_a \xrightarrow{f^*} \mathcal{F}_b$$

$$x \longrightarrow f^*(x)$$

y dada una flecha vertical $y \xrightarrow{\alpha} x$ se define $f^*\alpha$ por

$$\begin{array}{ccc} f^*(y) & \xrightarrow{f_y} & y \\ \downarrow \exists! f^*\alpha & & \downarrow \alpha \\ f^*(x) & \xrightarrow{f_x} & x \end{array}$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

Por la unicidad del levantamiento se sigue la functorialidad de f^* , es decir $f^*(\alpha\beta) = f^*(\alpha) f^*(\beta)$. Observar que tal funtor *depende de la eleccion* de las flechas cartesianas f_x para cada $x \in \mathcal{F}_a$.

Definition 4.15. Dada una fibration $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$, un *clivaje* es una *eleccion* para cada $b \xrightarrow{f} a$ en \mathcal{C} y cada $x \in \mathcal{F}_a$, de una flecha cartesiana f_x arriba de f .

Por el axioma de eleccion, toda fibration admite un clivaje. Dada una fibration $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ con un clivaje, entonces se tienen funtores $\mathcal{F}_a \xrightarrow{f^*} \mathcal{F}_b$ para

cada $b \xrightarrow{f} a$, pero dadas $c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$, no es cierto que $g^* f^* = (fg)^*$, ya que no hay unicidad de levantamiento a flechas cartesianas. Sin embargo, se tiene existe un isomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_a & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{F}_b \\ & \searrow (fg)^* & \downarrow F_{g,f} \\ & & \mathcal{F}_c \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ g^* \end{array}$$

pues dado que la composicion

$$g^* f^*(x) \xrightarrow{g_{f^*(x)}} f^*(x) \xrightarrow{f_x} x$$

$$c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$$

resulta cartesiana sobre fg , se tiene que existe un unico isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} g^* f^*(x) & & \\ \exists! (F_{g,f})_x \downarrow & \searrow f_x g_{f^*(x)} & \\ (fg)^*(x) & \xrightarrow{(fg)_x} & x \end{array}$$

$$c \xrightarrow{fg} a$$

La unicidad muestra que en efecto este isomorfismo resulta natural y satisface los axiomas de coherencia de pseudofuntores. Luego dada una fibration se obtiene un pseudofunctor $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F_p} \mathcal{C}at$.

Definition 4.16. Un *clivaje se parte* si satisface que dadas $c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$ y $x \in \mathcal{F}_a$, el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} (fg)^*(x) & \xrightarrow{(fg)_x} & x \\ \parallel & & \\ g^* f^*(x) & \xrightarrow{g_{f^*(x)}} f^*(x) \xrightarrow{f_x} & x \end{array}$$

$$c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$$

es decir que $(fg)^* = f^*g^*$, y tambien $(1_a)_x = 1_x$. No toda fibration admite un clivaje que se parte, sin embargo toda fibration es *equivalente* a una que lo admite.

Es claro que dada una fibration $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ con un clivaje elegido, entonces este *se parte* si y solo si $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F_p} \mathcal{C}at$ es un *funtor*.

Por otro lado, dado un pseudofuntor $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ construimos una fibration asociada $\int F \xrightarrow{\diamond} \mathcal{C}$. Los objetos de $\int F$ son pares (x, a) con $x \in Fa$, y las flechas estan dadas por

$$\frac{(x, a) \xrightarrow{(f, \varepsilon)} (y, b)}{a \xrightarrow{f} b \text{ y una flecha } x \xrightarrow{\varepsilon} Ff(y) \text{ en } Fa}$$

Explicitamos la composicion en $\int F$, dadas $(x, a) \xrightarrow{(f, \varepsilon)} (y, b) \xrightarrow{(g, \varphi)} (z, c)$ la composicion esta dada por las flechas

$$a \xrightarrow{gf} c \text{ y } x \xrightarrow{\varepsilon} Ff(y) \xrightarrow{Ff\varphi} FfFg(z) \xrightarrow{(Fg, f)_z} Fgf(z)$$

La identidad $(x, a) \xrightarrow{1_{(x, a)}} (x, a)$ esta dada dada por las flechas

$$a \xrightarrow{1_a} a \text{ y } x \xrightarrow{(F_a^{-1})_x} F1_a(x)$$

En el caso en que F sea un *funtor* la composicion es mas simple ya que no hace falta considerar los isomorfismos naturales de composicion y unidad. Dado que F es un pseudofuntor $\int F$ resulta ser una categoria. Si $(y, b) \xrightarrow{(f, \varepsilon)} (x, a)$ es precartesiana, la propiedad universal

$$\begin{array}{ccc} (z, b) & & \\ \downarrow \exists! (1_b, \bar{\varphi}) & \searrow (f, \varphi) & \\ (y, b) & \xrightarrow{(f, \varepsilon)} & (x, a) \end{array}$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

nos dice que para todo $z \in Fb$

$$\begin{array}{ccc}
z & & \\
\downarrow & \searrow \forall \varphi & \\
\exists! \bar{\varphi} & & Ff x \\
\downarrow & & \\
y & \xrightarrow{\varepsilon} & Ff x
\end{array}$$

es decir que $[z, y] \xrightarrow{\varepsilon_*} [z, Ff x]$ es una biyeccion natural en z , por Yoneda esto nos dice exactamente que ε es un isomorfismo. Es claro luego que las flechas precartesianas son cerradas por composicion. Por otro lado, dado (x, a) sobre a , y una $b \xrightarrow{f} a$ siempre se puede tomar la flecha cartesiana

$$(Ff(x), b) \xrightarrow{(f, 1_{Ff(x)})} (x, a)$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

y por lo tanto $\int F \xrightarrow{\diamond} \mathcal{C}$ es una fibricion. Esto nos da ademas siempre un *clivaje canonico*.

Theorem 4.17. (*Construccion de Grothendieck*) Se tiene una equivalencia de 2-categorias

$$[\mathcal{C}^{op}, Cat] \xrightarrow{f} Fib(\mathcal{C})$$

No damos aqui la demostracion completa de este teorema, lo que resta es simplemente una larga verificacion de rutina, el lector interesado puede ver [HCA2].

4.4 Construccion de laxcolimites de categorias indexados por una categoria

Hay una construccion dual para co-fibraciones y funtores $\mathcal{C} \xrightarrow{F} Cat$, esta nos interesa ya que nos permite calcular el *laxcolimite* y el *pseudocolimite* de F .

La categoria $\int F$ tiene como objetos los pares (x, a) con $x \in Fa$, las flechas estan dadas por

$$(x, a) \xrightarrow{(f, \varepsilon)} (y, b)$$

$$a \xrightarrow{f} b \text{ y una flecha } Ff(x) \xrightarrow{\varepsilon} y \text{ en } Fb$$

Para cada $a \in \mathcal{C}$ se tiene un funtor

$$Fa \xrightarrow{\lambda_a} \int F$$

$$x \longrightarrow (x, a)$$

y se tienen transformaciones naturales

$$\begin{array}{ccc} Fa & \xrightarrow{\lambda_a} & \int F \\ Ff \downarrow & \Downarrow \lambda_f & \nearrow \\ Fb & & \lambda_b \end{array}$$

dadas por

$$\frac{(x, a) \xrightarrow{(\lambda_f)_x} (Ff(x), b)}{a \xrightarrow{f} b \text{ y } Ff(x) \xrightarrow{1_{Ff(x)}} Ff(x)}$$

Es claro que definen así un *laxcono*, y más aun es universal.

Theorem 4.18. Se tiene un isomorfismo de categorías para toda categoría $c \in \mathcal{Cat}$,

$$[\int F, c] \xrightarrow{\lambda^*} \text{LaxCon}[F, c]$$

es decir $\int F$ es el *laxcolimite* de F .

En efecto, dado un *laxcono* $F \xrightarrow{h} c$ se define un funtor

$$\int F \xrightarrow{h} c$$

$$(x, a) \longrightarrow h_a(x)$$

y a una flecha $(x, a) \xrightarrow{(f, \varepsilon)} (y, b)$ le asigna $h_a(x) \xrightarrow{(h_f)_x} h_b Ff(x) \xrightarrow{h_b(\varepsilon)} h_b(y)$.

Es claro que es el único funtor tal que

$$\begin{array}{ccc} Fa & \xrightarrow{\lambda_a} & \int F \\ & \searrow h_a & \downarrow \exists! h \\ & & c \end{array}$$

y resulta funtorial ya que $F \xrightarrow{h} c$ era un *laxcono*. También es tautológico verificar que se tiene una biyección entre las transformaciones naturales y las modificaciones entre los *laxconos*, por lo tanto λ^* es un isomorfismo.

4.5 Construcción de pseudocolimites de categorías indexados por una categoría

Por definición, un laxcono $F \xrightarrow{h} c$ es un *pseudocono* si y solo si h_f es un iso para toda f . Dado que $\int F$ es el laxcono universal se sigue que $h_f = h\lambda_f$, osea que h_f es un iso si y solo si $h\lambda_f$ lo es. Por definición de h , la transformación natural $h\lambda_f$ esta dada en $x \in Fa$ por aplicar h a cada $(x, a) \xrightarrow{(\lambda_f)_x} (Ff(x), b)$, pues esto nos da $h_a(x) \xrightarrow{(h_f)_x} h_b Ff(x)$. Es decir que es un pseudocono si y solo si $\int F \xrightarrow{h} c$ hace isos a las flechas

$$\frac{(x, a) \xrightarrow{(\lambda_f)_x} (Ff(x), b)}{a \xrightarrow{f} b \text{ y } Ff(x) \xrightarrow{1_{Ff(x)}} Ff(x)}$$

Estas flechas son el clivaje canonico de la co-fibración $\int F \xrightarrow{\diamond} \mathcal{C}$ por lo visto anteriormente. Luego, como dadas dos flechas co-cartesianas se tiene un isomorfismo entre sus dominios, se obtiene que $F \xrightarrow{h} c$ es un pseudocono si y solo si $\int F \xrightarrow{h} c$ hace isos a las flechas co-cartesianas. Llamamos Σ a la colección de flechas co-cartesianas en $\int F$, luego tenemos un isomorfismo de categorías

$$[\int F, c]_{\Sigma^{-1}} \xrightarrow{\lambda^*} PsCon[F, c]$$

y se tiene un isomorfismo de categorías

$$[\int F[\Sigma^{-1}], c] \xrightarrow{h^*} [\int F, c]_{\Sigma^{-1}}$$

por lo tanto se obtiene el siguiente resultado.

Theorem 4.19. Se tiene un isomorfismo de categorías para toda categoría $c \in Cat$,

$$[\int F[\Sigma^{-1}], c] \xrightarrow{(h\lambda)^*} PsCon[F, c]$$

es decir $\int F[\Sigma^{-1}]$ es el *pseudocolimite de F* , donde Σ son las flechas co-cartesianas o bien las flechas del clivaje canonico.

Si bien esta construcción es el pseudo colimite, al aplicar la categoría de fracciones en el caso general, esta construcción resulta inmanejable en terminos

practicos. Sin embargo Grothendieck observo que si la categoria \mathcal{C} es pseudo-filtrada entonces las flechas co-cartesianas satisfacen el *calculo de fracciones* y podemos dar una construccion simple del pseudocolimite.

4.6 Construccion de pseudocolimites filtrantes de categorias

Lemma 4.20. Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ una cofibracion y supongamos que \mathcal{C} es pseudo-filtrada, entonces las flechas co-cartesianas satisfacen el calculo de fracciones.

Es claro que satisface (CF1) ya que la identidad

$$x \xrightarrow{1_x} x$$

$$a \xrightarrow{1_a} a$$

es co-cartesiana y satisfacen (CF2) pues ya vimos que las flechas co-cartesianas son cerradas por composicion. Se satisface (CF3) pues dado un diagrama

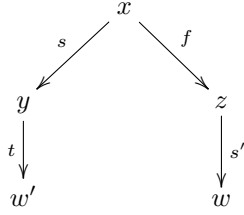
$$\begin{array}{ccc} & x & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ y & & z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ ps \swarrow & & \searrow pf \\ b & & c \end{array}$$

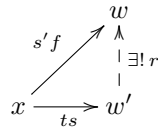
con $s \in \Sigma$, es decir co-cartesiana. Como \mathcal{C} es pseudofiltrada podemos conseguir un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & ps \swarrow & & \searrow pf & \\ & b & & c & \\ & u \swarrow & & \searrow v & \\ & & d & & \end{array}$$

y como p es una fibration podemos levantar con flechas co-cartesianas y obtener un diagrama

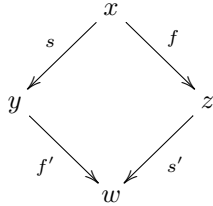


pero ambas son flechas arriba de $up(s) = vp(f)$ y como ts es co-cartesiana existe una flecha



$$a \xrightarrow{up(s)} d$$

Se toma $f' = rt$ y luego tenemos el diagrama conmutativo deseado



Para ver (CF_4) si se tienen $x \xrightarrow{s} y \xrightarrow[f]{g} z$ con s co-cartesiana, por ser \mathcal{C} pseudofiltrada se tiene una flecha h tal que $hp(f) = hp(g)$

$$x \xrightarrow{s} y \xrightarrow[f]{g} z \xrightarrow{s'} w$$

$$a \xrightarrow{ps} b \xrightarrow[pf]{pg} c \xrightarrow{\exists h} d$$

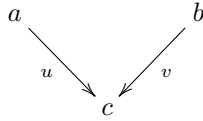
y se tiene una flecha co-cartesiana s' arriba de h . Luego $s'fs = s'gs$ y como s es co-cartesiana se sigue que $s'f = s'g$.

Mas aun, se deduce de la misma forma el siguiente resultado.

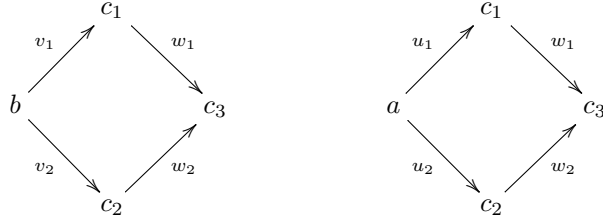
Corollary 4.21. Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ una fibration con un clivaje que se parte y supongamos que \mathcal{C} es pseudofiltrante, entonces las flechas del clivaje satisfacen el calculo de fracciones.

Con este lema entonces podemos dar la descripción de $\int F[\Sigma^{-1}]$ usando el cálculo de fracciones de Gabriel-Zisman para Σ las flechas del clivaje canónico.

Theorem 4.22. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un funtor, supongamos que \mathcal{C} es pseudofil-trante, entonces el pseudocolímite de F está dado por la categoría $\int F[\Sigma^{-1}]$ que describimos a continuación. Los objetos de $\int F[\Sigma^{-1}]$ son pares (x, a) con $x \in Fa$, y una flecha $(x, a) \xrightarrow{(u, \varepsilon, v)} (y, b)$ está dada por flechas



y una flecha $Fu(x) \xrightarrow{\varepsilon} Fv(y)$ en Fc , donde identificamos $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \sim (u_2, \varepsilon_2, v_2)$ si existen w_1, w_2 tales que conmutan



y tal que $Fw_1(\varepsilon_1) = Fw_2(\varepsilon_2)$.

4.7 Construcción de colímites de conjuntos con la construcción de Grothendieck

Aquí observamos que podemos utilizar la construcción de Grothendieck para construir el colímite de un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}ns$. Este resultado es importante ya que en la construcción que hacemos del pseudocolímite de un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ donde ahora \mathcal{C} es una 2-categoría, hacemos una generalización 2-categorica de esta técnica.

Primero observamos que se tiene un par de funtores adjuntos

$$\mathcal{C}at \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_0} \\ \xleftarrow{d} \end{array} \mathcal{E}ns$$

donde d le asigna a cada conjunto una categoría discreta, es decir cuyas únicas flechas son las identidades, y cuyos objetos son los elementos del conjunto.

Por otro lado, dada una categoría \mathcal{C} , como su nombre lo indica $\pi_0(\mathcal{C})$ es el conjunto de componentes conexas de la misma, es decir se identifican objetos si existe una cadena de flechas que los une. Tautológicamente se ve que $\pi_0 \dashv d$.

Dado $c \in \mathcal{E}ns$, se tiene un isomorfismo

$$[\int F, d(c)] \xrightarrow{\lambda^*} LaxCon[F, d(c)]$$

Por otro lado, como $d(c)$ es una categoría discreta, se tiene que

$$LaxCon[F, d(c)] = Con[F, c]$$

Luego utilizando la adjunción anterior, se obtiene una biyección natural

$$[\pi_0(\int F), c] \longrightarrow Con[F, c]$$

Por lo tanto $\pi_0(\int F)$ es el colimite de F . De esta construcción se obtiene que el colimite de F está dado por pares (x, a) con $x \in Fa$ donde identificamos $(x, a) \sim (y, b)$ si existe una cadena de flechas en $\int F$ que los une. Más precisamente, es la relación de equivalencia generada por $(x, a) \sim (y, b)$ si existe $a \xrightarrow{f} b$ tal que $Ff(x) = y$. Es fácil ver que esta construcción no es otra que la construcción canónica de colimites de conjuntos, es decir, se toma la unión disjunta y luego se cocienta por una relación de equivalencia canónica.

Si la categoría \mathcal{C} es pseudofiltrada, entonces es fácil ver que la relación de equivalencia anterior se simplifica ya que las cadenas se pueden reducir a un caso más simple y se obtiene que $(x, a) \sim (y, b)$ si y solo si existen



tales que $Ff(x) = Fg(y)$. Es decir que se obtiene la construcción de germen usual.

5 Nociones de 2-filtrabilidad

5.1 2-filtrabilidad

Definition 5.1. Decimos que una 2-categoría es *finita*, si tiene finitas 2-flechas, y por lo tanto finitas flechas y finitos objetos.

Definition 5.2. Dada una categoría \mathcal{C} , un 2-diagrama finito en \mathcal{C} está dado por un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ donde \mathcal{A} es una 2-categoría finita.

Definition 5.3. Decimos que una 2-categoría \mathcal{C} es

- (1) *2-filtrante* si todo 2-diagrama finito tiene un *pseudocono*.
- (2) *strict-2-filtrante* si todo 2-diagrama finito tiene un *2-cono*.
- (3) *lax-filtrante* si todo 2-diagrama finito tiene un *laxcono*.

5.2 Definiciones equivalentes de 2-filtrabilidad

La siguiente proposición nos da condiciones verificables para ver cuando una categoría es 2-filtrada o strict-2-filtrada. La parte (1) de esta proposición muestra que nuestra definición de 2-filtrante es equivalente a la definición de J. Kennison en [Ken92] que él llama *bifiltrante*.

Proposition 5.4. Una 2-categoría \mathcal{C} es

- (1) *2-filtrante* si y solo si satisface (F1) y las condiciones

(PSF2) Dadas flechas $a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$ existe $b \xrightarrow{h} x$ y un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc}
 & hf & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & x \\
 & hg &
 \end{array}$$

$$(F3) \text{ Dadas 2-flechas } a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \quad \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{g} \end{array} b \text{ existe } b \xrightarrow{h} c \text{ tal}$$

que $h\alpha = h\beta$.

(2) Una 2-categoría es *strict-2-filtrante* si y solo si satisface (F1), (F2) y (F3).

Veamos (1), ya que (2) es igual pero aun mas facil ya que todo conmuta estrictamente. Es claro que si \mathcal{C} es 2-filtrante entonces se satisface (F1) pues basta considerar un pseudocono del diagrama dado por elegir dos objetos. Para ver (PSF2) se considera un pseudocono del diagrama

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$$

Luego se tienen isos

$$\begin{array}{ccc} & \lambda_a & \\ & \Downarrow \lambda_f & \\ a & \xrightarrow{f} & b \xrightarrow{\lambda_b} c \\ & \Uparrow \lambda_g & \\ & \lambda_a & \end{array}$$

y se toma $h = \lambda_b$, $\alpha = \lambda_g \circ \lambda_f^{-1}$. Para ver (F3), se considera un pseudocono del diagrama

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \quad \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$$

Se tiene entonces que

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & \lambda_a & \\ & \Downarrow \lambda_f & \\ a & \xrightarrow{f} & b \xrightarrow{\lambda_b} c \\ & \Downarrow \alpha & \\ & g & \end{array} & = & \begin{array}{ccc} & \lambda_a & \\ & \Downarrow \lambda_g & \\ a & \xrightarrow{g} & b \xrightarrow{\lambda_b} c \end{array} = \begin{array}{ccc} & \lambda_a & \\ & \Downarrow \lambda_f & \\ a & \xrightarrow{f} & b \xrightarrow{\lambda_b} c \\ & \Downarrow \beta & \\ & g & \end{array} \end{array}$$

Como $(\lambda_b\alpha) \circ \lambda_f = (\lambda_b\beta) \circ \lambda_f$ y λ_f es un iso, en particular es epi, entonces $\lambda_b\alpha = \lambda_b\beta$. Luego tomando $h = \lambda_b$ se tiene (F3).

Ahora supongamos que \mathcal{C} satisface (F1), (PSF2) y (F3). Dado un diagrama finito $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$, por (F1) dado que se tienen finitos objetos, podemos conseguir $Fa \xrightarrow{\lambda_a} c$. Ahora, queremos conseguir isomorfismos

$$\begin{array}{ccc}
 Fa & \xrightarrow{\lambda_a} & c \\
 Ff \downarrow & \Downarrow \lambda_f & \nearrow \lambda_b \\
 Fb & &
 \end{array}$$

para cada $a \xrightarrow{f} b$ en \mathcal{A} . Dado que son finitas flechas, yendo mas lejos por *(PSF2)* podemos conseguir estos isomorfismos. Ahora necesitamos que estos isomorfismos cumplan las condiciones *(PSC1)*, *(PSC2)* y *(PSC3)*. Dado que se tienen finitas 2-flechas involucradas, estas condiciones me determinan finitas ecuaciones, nuevamente yendo mas lejos, ahora usando *(F3)*, podemos conseguir que estas condiciones se cumplan.

Mencionamos aqui una propiedad importante de las 2-categorias 2-filtradas que utilizaremos mas adelante.

Lemma 5.5. Si una 2-categoria es 2-filtrante, entonces para toda 2-flecha

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 a & \curvearrowright & b \\
 & \Downarrow \alpha & \\
 & g &
 \end{array}$$

existe $b \xrightarrow{h} c$ tal que $h\alpha$ es un isomorfismo.

En efecto, esto se deduce automaticamente de *(PSF2)* y *(F3)*.

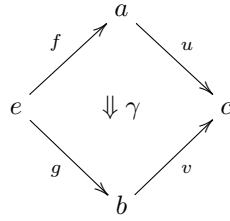
En [DS06] Dubuc y Street definen otra nocion de 2-filtrabilidad, tambien llamada 2-filtrante, que les permite hacer las cuentas para construir el pseudo-colimite de un 2-functor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ donde \mathcal{C} es una 2-categoria 2-filtrante. Mostramos la equivalencia de estas definiciones.

Definition 5.6. (*Dubuc-Street*) Una 2-categoria \mathcal{C} se dice *pre-2-filtrante* si satisface

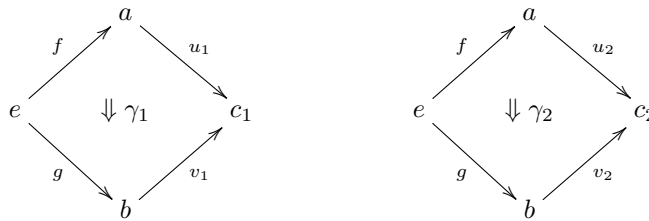
(PRF1) Todo diagrama del tipo

$$\begin{array}{ccc}
 & & a \\
 & f \nearrow & \\
 e & & \\
 & g \searrow & \\
 & & b
 \end{array}$$

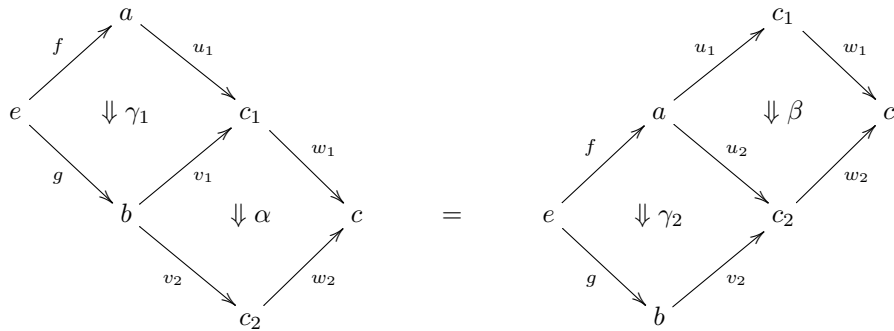
se puede completar a un diagrama con un iso γ



(PRF2) Dadas 2-flechas cualesquiera

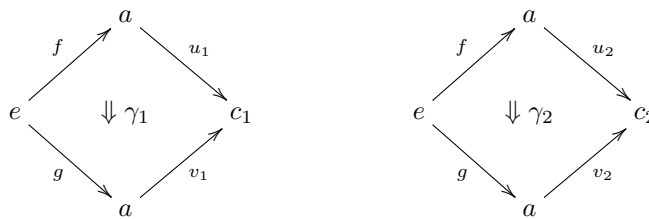


Existen w_1, w_2 , y isos α, β tales que

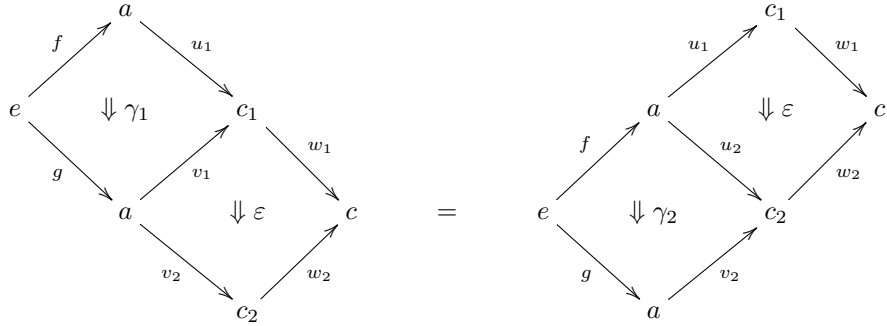


Dados pares $(\gamma_1, \alpha), (\gamma_2, \beta)$ como arriba, decimos que satisfacen la ecuacion LL.

Lemma 5.7. Sea \mathcal{C} una 2-categoria pre-2-filtrante, si se tienen 2-flechas

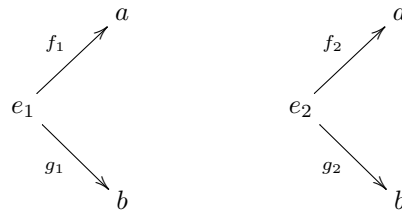


con $u_1 = v_1, u_2 = v_2$, entonces existen w_1, w_2 , y un iso ε tal que satisface la ecuacion LL

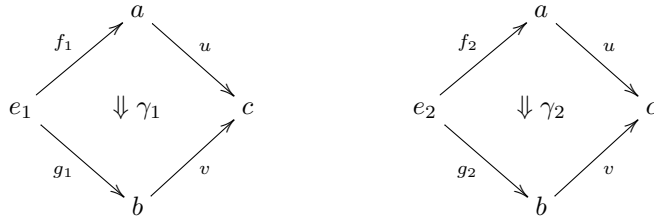


Definition 5.8. Una 2-categoria \mathcal{C} se dice *pseudo-2-filtrante* si satisface (PRF2) y el siguiente axioma

(FF1) Dados



entonces existen u, v y isos γ_1, γ_2

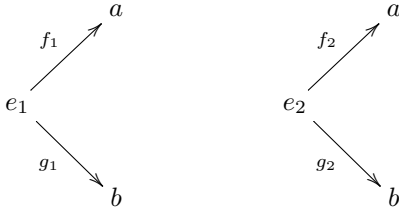


Definition 5.9. Una 2-categoria \mathcal{C} se dice *2-filtrante* si es pseudo-2-filtrante y satisface (F1).

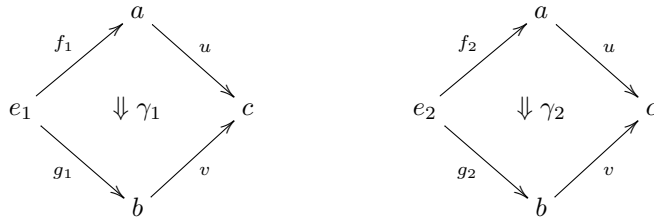
Theorem 5.10. Las definiciones de 2-categoria 2-filtrante son equivalentes. Es decir, si \mathcal{C} satisface (F1) entonces son equivalentes

- (1) \mathcal{C} satisface (FF1) y (PRF2)
- (2) \mathcal{C} satisface (PSF2) y (F3)

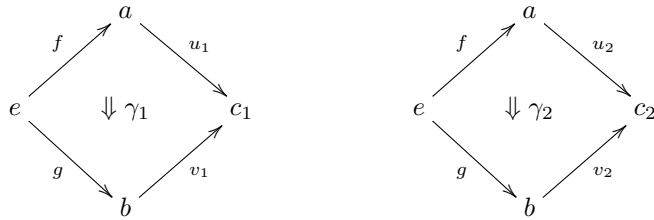
En efecto, si vale (2) entonces todo diagrama finito tiene un pseudocono. Para ver (FF1) consideramos el diagrama



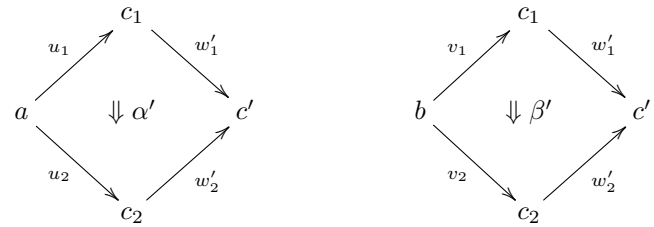
Entonces, un pseudocono de este diagrama nos da



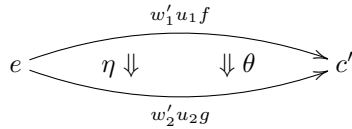
donde $u = \lambda_a$, $v = \lambda_b$ y $\gamma_1 = \lambda_{g_1} \circ \lambda_{f_1}^{-1}$, $\gamma_2 = \lambda_{g_2} \circ \lambda_{f_2}^{-1}$. Para ver (PRF2), consideramos el diagrama



Entonces por (FF1) podemos conseguir w'_1, w'_2 , y isos α', β'

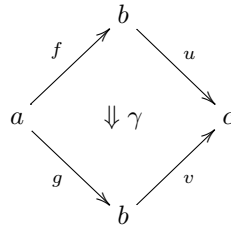


Luego se tienen dos 2-flechas $\eta = (\alpha'g) \circ (w'_1\gamma_1)$, $\theta = (w'_2\gamma_2) \circ (\beta'f)$

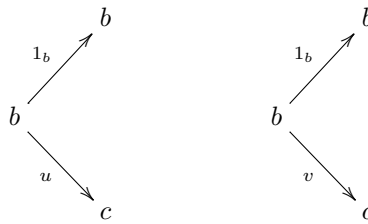


Por (F3) existe $c' \xrightarrow{h} c$ tal que $h\eta = h\theta$. Luego, se toma $w_1 = hw'_1, w_2 = hw'_2, \alpha = h\alpha', \beta = h\beta'$, y se tiene que estos satisfacen la ecuacion LL, es decir que probamos (PRF2).

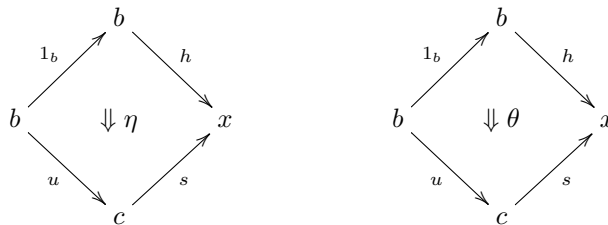
Ahora veamos que (1) implica (2). Para ver (PSF2), dadas $a \xrightleftharpoons[g]{f} b$ se toman primero u, v y un iso γ



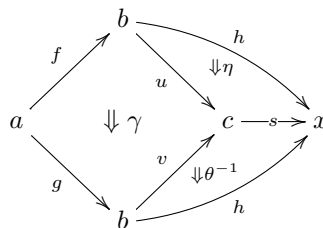
Luego, por (FF1) aplicados a



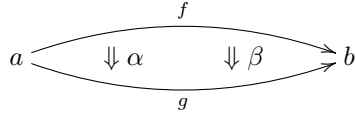
podemos conseguir h, s con isos



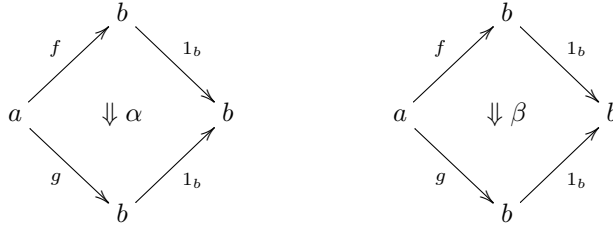
y luego se tiene un diagrama



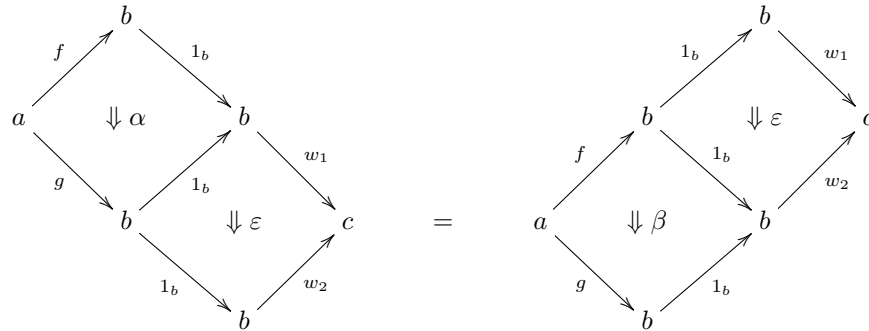
Luego se define $\alpha = (\theta^{-1}g) \circ (s\gamma) \circ (\eta f)$, y resulta ser el iso que buscamos. Para ver (F3), si tenemos 2-flechas



Considero los diagramas



En virtud (*PRF2*) y del lema 5.7, podemos encontrar w_1, w_2 , y un iso ε tal que



Es decir que

$$\begin{array}{c} a \xrightarrow{f} b \\ \Downarrow \alpha \\ a \xrightarrow{g} b \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{w_1} c \\ \Downarrow \varepsilon \\ \xrightarrow{w_2} c \end{array} = \begin{array}{c} a \xrightarrow{f} b \\ \Downarrow \beta \\ a \xrightarrow{g} b \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{w_1} c \\ \Downarrow \varepsilon \\ \xrightarrow{w_2} c \end{array}$$

Pero luego, por la ley de intercambio

$$w_2\alpha = (\varepsilon^{-1} \circ \varepsilon)(1_g \circ \alpha) = (\varepsilon^{-1}1_g) \circ (\varepsilon\alpha) = (*)$$

$$(*) = (\varepsilon^{-1}1_g) \circ (\varepsilon\beta) = (\varepsilon^{-1} \circ \varepsilon)(1_g \circ \beta) = w_2\beta$$

Tomando $h = w_2$, se obtiene (*F3*). Esto prueba que ambas definiciones son equivalentes.

5.3 Propiedad fundamental de las 2-categorías strict-2-filtrantes

De las propiedades (F2) y (F3) se deduce fácilmente el siguiente hecho.

Lemma 5.11. Si una 2-categoría es strict-2-filtrante, entonces para toda 2-flecha

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & b \\
 & g &
 \end{array}$$

existe $b \xrightarrow{h} c$ tal que $hf = hg$ y $h\alpha = 1_{hf}$.

Corollary 5.12. Dado un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$, con \mathcal{A} strict-2-filtrante, y dada una familia de flechas $(Fa \xrightarrow{\lambda_a} c)_{a \in \mathcal{A}}$ con una familia de isos

$$\begin{array}{ccc}
 Fa & \xrightarrow{\lambda_a} & c \\
 Ff \downarrow & \Downarrow \lambda_f & \nearrow \lambda_{a'} \\
 Fa' & &
 \end{array}$$

que satisfacen (PSC1), (PSC2), entonces satisfacen (PSC3), es decir es un pseudocono.

En efecto basta verificar (PSC3), dada una 2-flecha $a \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} a'$

queremos ver que $(\lambda_{a'} F\alpha) \circ \lambda_f = \lambda_g$. Pero por el lema 5.11 existe $a' \xrightarrow{h} a''$ tal que $hf = hg$ y $h\alpha = 1_{hf}$. Luego, $Fhf = Fhg$ y $Fh\alpha = FhF\alpha = 1_{Fhf}$, por lo tanto

$$(\lambda_{a''} FhF\alpha) \circ \lambda_{hf} = \lambda_{hf} = \lambda_{hg} = (\lambda_h Fg) \circ \lambda_g$$

Por otro lado

$$(\lambda_{a''} FhF\alpha) \circ \lambda_{hf} = (\lambda_h Fg) \circ (\lambda_{a'} F\alpha) \circ \lambda_f$$

y luego se obtiene que

$$(\lambda_h Fg) \circ (\lambda_{a'} F\alpha) \circ \lambda_f = (\lambda_h Fg) \circ \lambda_g$$

Como λ_h es un iso, $\lambda_h Fg$ es un iso, y por lo tanto se puede cancelar a izquierda pues es mono, luego

$$(\lambda_{a'} F\alpha) \circ \lambda_f = \lambda_g$$

que es lo que queriamos mostrar.

Remark 5.13. Se tiene una proposicion similar para 2-conos, es decir, si se tiene un cono, entonces la condicion (PSC3) se satisface automaticamente y es un 2-cono.

Remark 5.14. Dada una 2-categoria \mathcal{C} , llamamos \mathcal{C}_o a la categoria subyacente, es decir, me olvido de las 2-flechas.

El siguiente resultado es muy importante, aunque no tiene analogos para las nociones mas debiles de 2-filtrabilidad, y nos dice que esta condicion es muy fuerte.

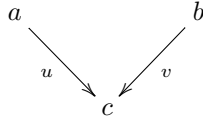
Theorem 5.15. Sea \mathcal{A} una 2-categoria strict-2-filtrante y sea $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ un 2-functor, entonces el pseudocolimite (resp. 2-colimite) de F es igual al pseudocolimite (resp. 2-colimite) de $\mathcal{A}_o \xrightarrow{F} \mathcal{C}$.

Es decir, puedo olvidarme las 2-flechas de \mathcal{A} y calcular el pseudocolimite (resp. 2-colimite) ya que estas no me imponen ninguna condicion. Este teorema nos permite probar automaticamente que la construccion usual de colimites filtrantes de categorias funciona en el caso en el que el diagrama esta indexado por una 2-categoria strict-2-filtrante, y que la construccion de Grothendieck de pseudocolimites filtrantes de categorias nos da el pseudocolimite en el caso strict-2-filtrante.

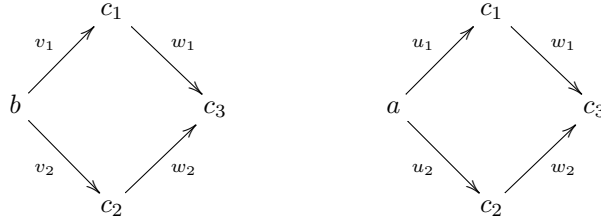
5.4 Construccion de pseudocolimites strict-2-filtrantes de categorias

Theorem 5.16. Dado un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ con \mathcal{A} strict-2-filtrante, entonces el pseudocolimite de F esta dado por la Construccion de Grothendieck $\int F[\Sigma^{-1}]$.

Explicitamente, los objetos de $\int F[\Sigma^{-1}]$ son pares (x, a) con $x \in Fa$, una flecha $(x, a) \xrightarrow{(u, \varepsilon, v)} (y, b)$ esta dada por flechas



y una flecha $Fu(x) \xrightarrow{\varepsilon} Fv(y)$, donde identificamos $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \sim (u_2, \varepsilon_2, v_2)$ si existen w_1, w_2 tales conmutan



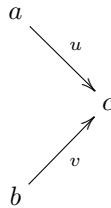
y tal que $Fw_1(\varepsilon_1) = Fw_2(\varepsilon_2)$.

5.5 Construcción de 2-colimites strict-2-filtrantes de categorías

Theorem 5.17. Dado un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ con \mathcal{A} strict-2-filtrante, entonces el 2-colimite de F existe y esta dado por la siguiente categoría $\mathcal{L}(F)$.

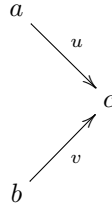
Los objetos de $\mathcal{L}(F)$ son el colimite de los objetos, observando que como en particular \mathcal{A} es filtrada, este es un colimite filtrante de conjuntos.

Es decir, $Ob(\mathcal{L}(F)) = colim_{a \in \mathcal{A}} ob(Fa)$, y de la construcción de Godement de colimites conjuntistas, un objeto de $\mathcal{L}(F)$ es un germen de objetos. Mas explicitamente, los objetos de $\mathcal{L}(F)$ son pares (x, a) con $x \in Fa$, donde identificamos (x, a) con (y, b) si y solo si existen flechas

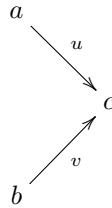


tales que $Fu(x) = Fv(y)$. Es decir, dos objetos son iguales si son iguales mas lejos. A los objetos de $\mathcal{L}(F)$ los notamos $[x, a]$.

Similarmente $Fl(\mathcal{L}(F)) = \text{colim}_{a \in \mathcal{A}} Fl(Fa)$, es decir una flecha es un par (f, a) con $x \xrightarrow{f} y$ una flecha en Fa , donde identificamos (f, a) con (g, b) si y solo si existen flechas

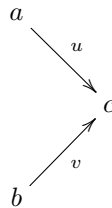


tales que $Fu(f) = Fv(g)$. En otras palabras, dos flechas son iguales si son iguales mas lejos. Notamos a las flechas $[f, a]$ o mas especificamente $[x \xrightarrow{f} y, a]$. Luego, dados objetos $[x, a]$, $[y, b]$, existira una flecha entre ellos, si y solo si existen flechas



y una flecha $Fu(x) \xrightarrow{f} Fv(y)$ en la categoria Fc .

La composicion en $\mathcal{L}(F)$ esta dada mas lejos, es decir, si tenemos una flecha $[x \xrightarrow{f} y, a]$ y una flecha $[y' \xrightarrow{g} z, b]$, podemos componerlas si y solo si existen



tales que $Fu(y) = Fv(y')$, y en tal caso la composicion esta dada por $[Fv(g)Fu(f), c]$. Es conocido que este es el colimite de categorias (ver por ejemplo [GZ67]) y por el teorema 5.15 este es 2-colimite.

5.6 Propiedades de exactitud

Corollary 5.18. Sea \mathcal{A} una 2-categoría strict-2-filtrante, entonces dado $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ se tiene que el funtor canonico $\text{colim}_{a \in \mathcal{A}} Fa \longrightarrow \text{2-colim}_{a \in \mathcal{A}} Fa$ es un isomorfismo.

Se sabe que los colimites filtrantes de categorías conmutan con los límites finitos (ver el capítulo 5 de [HCA2]), luego se obtiene el siguiente resultado.

Corollary 5.19. Sea \mathcal{A} una 2-categoría strict-2-filtrante, \mathcal{P} una categoría finita, entonces dado un 2-functor $\mathcal{A} \times \mathcal{P} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ se tiene que el funtor canonico

$$\text{2-colim}_{a \in \mathcal{A}} (\lim_{i \in \mathcal{P}} F(a, i)) \longrightarrow \lim_{i \in \mathcal{P}} (\text{2-colim}_{a \in \mathcal{A}} F(a, i))$$

es un isomorfismo.

Theorem 5.20. Sea \mathcal{A} una 2-categoría strict-2-filtrante, sea \mathcal{P} una categoría finita, y sea $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un 2-functor. Consideramos el 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F^{\mathcal{P}}} \mathcal{C}at$ dado por $F^{\mathcal{P}}(a) = F(a)^{\mathcal{P}}$, entonces el funtor canonico

$$\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\diamond} \mathcal{L}(F)^{\mathcal{P}}$$

es un isomorfismo de categorías.

De la construcción se tiene que un objeto de $\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}})$ es un par (x, a) con $x \in F(a)^{\mathcal{P}}$, es decir un diagrama $\mathcal{P} \xrightarrow{x} Fa$, donde dos diagramas son equivalentes si y solo si existen u, v tales que conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{x} & Fa \\ y \downarrow & & \downarrow Fu \\ Fb & \xrightarrow{Fv} & Fc \end{array}$$

Una flecha de $\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}})$ es un par $(x \xrightarrow{\eta} y, a)$ con η una transformación natural

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ & \searrow & \nearrow \\ \mathcal{P} & \Downarrow \eta & Fa \\ & \swarrow & \searrow \\ & y & \end{array}$$

donde (η, a) es igual a (θ, b) si y solo si existen u, v tales que $Fu(\eta) = Fv(\theta)$.

Por otro lado, un objeto de $\mathcal{L}(F)^{\mathcal{P}}$ es un diagrama $\mathcal{P} \xrightarrow{x} \mathcal{L}(F)$, y las flechas son las transformaciones naturales. Para ver que \diamond es un isomorfismo de categorías, veremos que dado $\mathcal{P} \xrightarrow{x} \mathcal{L}(F)$ existe una factorización

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{x} & \mathcal{L}(F) \\ & \searrow x^a & \uparrow \lambda_a \\ & & Fa \end{array}$$

y dada otra factorización $x = \lambda_b x^b$, se tiene que x^a es igual a x^b como objetos de $\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}})$. En efecto, dado un diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{x} & \mathcal{L}(F) \\ & & \\ i & \longrightarrow & x_i \end{array}$$

cada $x_i \in \mathcal{L}(F)$ es una clase $[x_i, a_i]$ con $x_i \in Fa_i$. Dada $i \xrightarrow{\alpha} j$ se tiene que $[x_i, a_i] \xrightarrow{[\alpha]} [x_j, a_j]$ esta dada por un par de flechas u_α, v_α y una flecha $Fu_\alpha(x_i) \xrightarrow{[\alpha]} Fv_\alpha(x_j)$ en Fa_α . Dado que \mathcal{P} es finita, y \mathcal{A} es filtrante entonces existe un cono del diagrama dado por

$$\begin{array}{ccc} a_i & & \\ & \searrow u_\alpha & \\ & & a_\alpha \\ & \nearrow v_\alpha & \\ a_j & & \end{array}$$

para todo $i \in \mathcal{P}$ y toda flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$. Un cono es un $a \in \mathcal{A}$ con flechas h_i tal que conmuta

$$\begin{array}{ccc} a_i & & \\ & \searrow u_\alpha & \\ & & a_\alpha \\ & \nearrow v_\alpha & \\ a_j & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{h_i} & \\ & & \\ & \xrightarrow{h_\alpha} & \\ & & \\ & \xrightarrow{h_j} & \\ & & \end{array} \quad a$$

Tenemos entonces una factorización

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P} & \xrightarrow{x} & \mathcal{L}(F) \\
 & \searrow x^a & \uparrow \lambda_a \\
 & & Fa
 \end{array}$$

dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &\xrightarrow{x} Fa \\
 i &\longrightarrow x_i^a = h_i(x_i)
 \end{aligned}$$

y a cada flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ le asigna $x_i^a \xrightarrow{h_\alpha[\alpha]=\alpha^a} x_j^a$. Si se tiene otra factorizacion $x = \lambda_b x^b$ entonces, como cada $\lambda_a(x_i^a) = [x_i^a, a] \sim [x_i^b, b] = \lambda_b(x_i^b)$, por ser \mathcal{A} filtrante y \mathcal{P} finita existen

$$\begin{array}{ccc}
 a & & \\
 & \searrow u & \\
 & & c \\
 & \nearrow v & \\
 b & &
 \end{array}$$

tales que $Fu(x_i^a) = Fv(x_i^b)$ y $Fu(\alpha^a) = Fv(\alpha^b)$ para toda $i \xrightarrow{\alpha} j$. Es decir que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P} & \xrightarrow{x} & Fa \\
 y \downarrow & & \downarrow Fu \\
 Fb & \xrightarrow{Fv} & Fc
 \end{array}$$

Por lo tanto \diamond es biyectivo en los objetos. Similarmente, dada una transformacion natural $\mathcal{P} \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{y} \end{array} \mathcal{L}(F)$ podemos encontrar una factorizacion

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P} & \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{y} \end{array} & \mathcal{L}(F) \\
 & \searrow x^a & \uparrow \lambda_a \\
 & & Fa \\
 & \searrow y^a & \\
 & &
 \end{array}$$

pues η esta dada por una familia finita de flechas $x_i \xrightarrow{\eta_i} y_i$. Tambien, se ve similarmente que dos factorizaciones η^a, η^b son iguales como objetos de $\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}})$. Esto prueba que \diamond es plenamente fiel, y es por lo tanto un isomorfismo de categorias.

Sea $Cat_{f\ell}$ la 2-categoria de las categorias pequeñas con limites finitos, y funtores exactos a izquierda. Se obtiene como corolario el siguiente resultado:

Theorem 5.21. Sea \mathcal{A} una 2-categoria strict-2-filtrante, y $\mathcal{A} \xrightarrow{F} Cat_{f\ell}$ un 2-functor. Entonces $\mathcal{L}(F)$ tiene limites finitos, los funtores $Fa \xrightarrow{\lambda_a} \mathcal{L}(F)$ son exactos a izquierda. y $\mathcal{L}(F)$ es el 2-colimite.

6 2-Categoría de fracciones

6.1 Distintas generalizaciones 2-categoricas de la categoría de fracciones

Nos interesa primeramente, generalizar la construcción del cálculo de fracciones de Gabriel-Zisman a un contexto 2-categorico. Como vimos, esta construcción es la solución universal del problema: dada $\Sigma \subset Fl(\mathcal{C})$ se busca una categoría $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ con un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ tal que $h(s)$ es un isomorfismo $\forall s \in \Sigma$ y es universal con respecto a esta propiedad en el siguiente sentido. Dada otra categoría \mathcal{D} , sea $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$ la categoría de funtores de \mathcal{C} en \mathcal{D} que hacen a las flechas de Σ isomorfismos, entonces h nos da un *isomorfismo de categorías*

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

Ahora bien, en una 2-categoría no solo tenemos *isomorfismos*, tenemos *equivalencias* y tenemos *adjunciones*. Mas aun, en algunos casos la propiedad universal podría estar dada por una equivalencia de 2-categorías, o por una *biequivalencia*. Esto nos otorga varias generalizaciones totalmente distintas del problema anterior en el caso 2-categorico. Dada una 2-categoría \mathcal{C} y una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathcal{C})$, se obtienen así los siguientes problemas

(1) se busca una 2-categoría $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ con un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ tal que $h(s)$ es un isomorfismo $\forall s \in \Sigma$ universal en el sentido de que

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

(1.1) es un isomorfismo de 2-categorías.

(1.2) es una equivalencia de 2-categorías.

(1.3) es una biequivalencia de 2-categorías.

(2) se busca una 2-categoría $\mathcal{C}[\Sigma^{eq}]$ con un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}[\Sigma^{eq}]$ tal que $h(s)$ es una equivalencia $\forall s \in \Sigma$ universal en el sentido de que

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{eq}], \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{eq}}$$

(2.1), (2.2), (2.3) como antes.

(3) se busca una 2-categoría $\mathcal{C}[\Sigma^{adj}]$ con un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}[\Sigma^{adj}]$ tal que $h(s)$ es un adjunto a izquierda $\forall s \in \Sigma$ universal en el sentido de que

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{adj}], \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{adj}}$$

(3.1), (3.2), (3.3) como antes.

Mas aun, existen aun mas variantes si se consideran los tres distintos tipos de funtores y transformaciones naturales en el caso 2-categorico.

En esta tesis mostramos que (1) tiene solucion en el sentido mas fuerte, es decir es una solucion de (1.1), y mas aun damos un 2-calculo de fracciones que nos da una construccion simple de $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ como en Gabriel-Zisman. El caso (1) fue estudiado anteriormente en un contexto mas general, el de las categorias enriquecidas, por H. Wolff en [Wol70] y resuelto (en un sentido mas debil al de las 3 variantes anteriores), aunque las condiciones para que se tenga un calculo de fracciones en ese trabajo $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ son distintas a las que damos nosotros, que son mas simples, intrinsecas de la familia de flechas, y generalizan a las de Gabriel-Zisman. El caso (2) fue resuelto por D. Pronk en [Pro96] en el sentido intermedio, es decir hay una solucion de (2.2), donde se da un bicalculo de fracciones. Esta construccion es tratada en el capitulo 8 de este trabajo. El caso (3) fue estudiado por R. Dawson, R. Paré y D. Pronk, y se construye una solucion de (3.2), aunque sin presentarse un calculo de fracciones.

Citamos aqui un resultado general de la existencia de una 2-categoria aun cuando no se satisface un 2-calculo de fracciones, aunque la propiedad universal es mas restrictiva. Este resultado puede usarse luego para construir pseudocolimites en general, pero con una construccion inmanejable.

Theorem 6.1. (Wolff) Dada una 2-categoria \mathcal{C} y una familia de flechas Σ , existe una categoria $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$, con un 2-functor $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ tal que $h(s)$ es un isomorfismo $\forall s \in \Sigma$, y tal que

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

es un isomorfismo de categorias, donde aqui la categoria $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ es la categoria de 2-funtores y transformaciones 2-naturales.

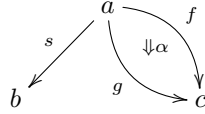
Este es un caso particular de *Theorem 1.1.9*, de [Wol70], cuando se toma $\mathcal{V} = \text{Cat}$.

6.2 2-Calculo de fracciones

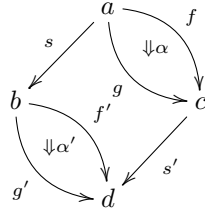
En esta seccion resolvemos el problema de (1.1) con un 2-calculo de fracciones que definimos a continuacion.

Definition 6.2. Dada una 2-categoria \mathcal{C} y una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathcal{C})$, decimos que Σ *satisface un 2-calculo de fracciones* si satisface el calculo de fracciones, es decir satisface (CF1), (CF2), (CF3), (CF4), y ademas *satisface*

(CF5) Dado un diagrama



con $s \in \Sigma$, entonces se puede completar a un diagrama



con $s \in \Sigma$, tal que

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} c \xrightarrow{s'} d = a \xrightarrow{s} b \begin{array}{c} \xrightarrow{f'} \\ \Downarrow \alpha' \\ \xrightarrow{g'} \end{array} d$$

es decir, tal que $s'f = f's$, $s'g = g's$ y $s'\alpha = \alpha's$.

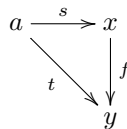
(CF6) Dadas 2-flechas $a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \quad \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$, si existe $x \xrightarrow{s} a$

en Σ tal que $\alpha s = \beta s$ entonces existe $b \xrightarrow{s'} y$ tal que $s'\alpha = s'\beta$.

Observacion: Es claro que (CF5) implica (CF3), aunque dejamos este axioma para explicitar cuando lo usamos.

Lemma 6.3. Si Σ satisface el 2-cálculo de fracciones, entonces para todo $a \in \mathcal{C}$ la 2-categoría a/Σ es strict-2-filtrada.

La 2-categoría a/Σ tiene como objetos a las flechas $a \xrightarrow{s} x$ con $s \in \Sigma$, una flecha $(s, x) \xrightarrow{f} (t, y)$ es una $x \xrightarrow{f} y$ en \mathcal{C} tal que conmuta



y una 2-flecha $(s, x) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} (t, y)$ es una 2-flecha

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} y$$

en \mathcal{C} tal que $\alpha s = t$.

En efecto, ya vimos que es filtrada, solo basta ver que satisface (F3). Si tenemos 2-flechas

$$(s, x) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \quad \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{g} \end{array} (t, y) \text{ entonces } \alpha s = t = \beta s \text{ con } s \in \Sigma,$$

por (CF6) existe $y \xrightarrow{s'} z$ tal que $s'\alpha = s'\beta$, se tiene $(t, y) \xrightarrow{s'} (s't, z)$ que muestra (F3).

Proposition 6.4. Si una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathcal{C})$ satisface (CF1) a (CF4), (CF6) y ademias

(CF5') Si dadas flechas $a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$ tales que existe $x \xrightarrow{s} a$ en Σ y una 2-flecha

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{fs} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{gs} \end{array} b$$

entonces existe $b \xrightarrow{s'} y$ en Σ y una 2-flecha

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{s'f} \\ \Downarrow \alpha' \\ \xrightarrow{s'g} \end{array} y$$

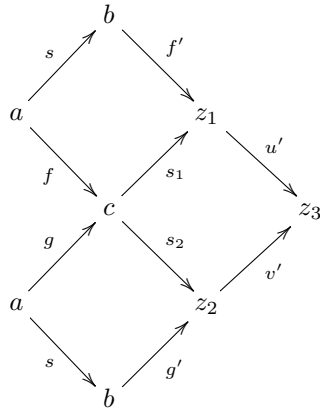
tal que $\alpha's = s'\alpha$.

Entonces, Σ satisface el 2-cálculo de fracciones.

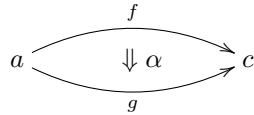
En efecto, basta ver que vale (CF5). Si tenemos dada

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ s \swarrow & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} & c \\ b & & \end{array}$$

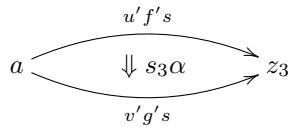
por (CF3) se tienen f', s_1, g', s_2 tal que $s_1 f = f' s$ y $s_2 g = g' s$. Utilizando (CF3) se pueden obtener u', v'



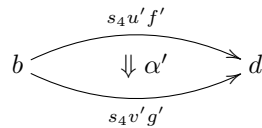
tales que $u' s_1 = v' s_2 = s_3 \in \Sigma$. De la 2-flecha



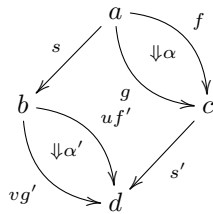
se obtiene por composicion una 2-flecha



Por (CF5') existe una flecha $z_3 \xrightarrow{s_4} d$ y una 2-flecha



tal que $\alpha' s = s_4 s_3 \alpha$. Llamando $u = s_4 u'$, $v = s_4 v'$ y $s' = s_4 s_3$, entonces se tiene un diagrama



tal que

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} c \xrightarrow{s'} d = a \xrightarrow{s} b \begin{array}{c} \xrightarrow{uf'} \\ \Downarrow \alpha' \\ \xrightarrow{vg'} \end{array} d$$

y esto concluye la demostracion.

Definition 6.5. Dada una 2-categoria \mathcal{C} y una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathcal{C})$ que satisface el 2-calculo de fracciones, definimos $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, b] = 2\text{-colim}_{(s,x) \in b/\Sigma} [a, x]$.

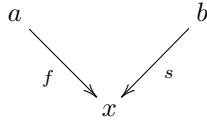
Mas especificamente, se tienen 2-funtores

$$b/\Sigma \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{[a, -]} \mathcal{C}at$$

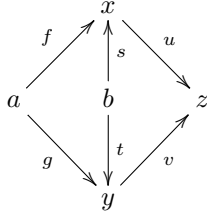
$$(s, x) \longrightarrow x \longrightarrow [a, x]$$

y se le toma el 2-colimite a la composicion.

De la construccion de 2-colimites strict-2-filtrantes se tiene que los objetos de $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, b]$ son pares (f, s) con $s \in \Sigma$

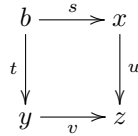


donde identificamos (f, s) y (g, t) si existen u, v tales que

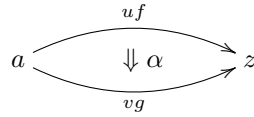


$us = vt = s' \in \Sigma$ y $uf = vg$.

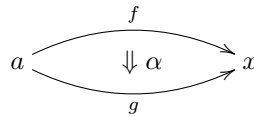
Es decir, son las fracciones del calculo de fracciones usual de Gabriel-Zisman. Si tenemos dos fracciones $\frac{f}{s}, \frac{g}{t}$, entonces una flecha entre ellas esta dada por flechas u, v



y tal que $us = vt = s' \in \Sigma$, con una 2-flecha



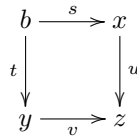
Dado que la categoría b/Σ es 2-filtrada entonces siempre podemos representar dos fracciones en $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, b]$ como $\frac{f}{s}, \frac{g}{s}$, y una flecha entre ellas es simplemente una 2-flecha



A esta flecha entre fracciones la notamos $\frac{\alpha}{s}$. De la construcción se tiene que dos flechas entre fracciones



son equivalentes si y solo si existen

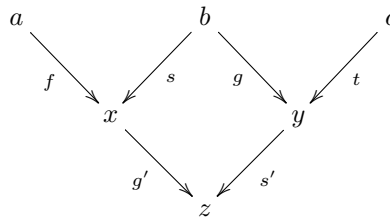


tales que $us = vt = s' \in \Sigma$ y tales que $u\alpha = v\beta$.

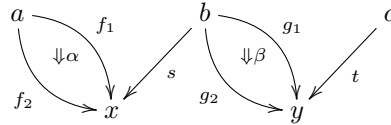
Para que $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ resulte una 2-categoría debemos definir functor de composición

$$\mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, b] \times \mathcal{C}[\Sigma^{-1}][b, c] \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}][a, c]$$

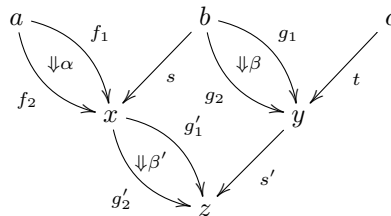
En los objetos, lo definimos como antes, es decir la composición de $\frac{f}{s}$ y $\frac{g}{t}$ es la fracción $\frac{g'f}{s't}$ dada por (CF3)



Falta definir al funtor en las flechas, si tenemos flechas entre fracciones

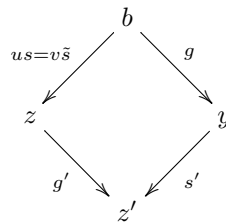


Por (CF5) podemos conseguir un diagrama

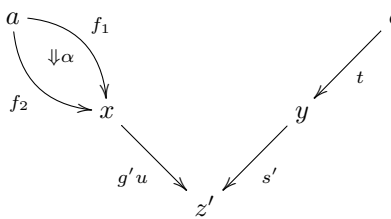


donde β' es una flecha que satisface $\beta' s = s' \beta$, y definimos la composicion como $\beta' \alpha$.

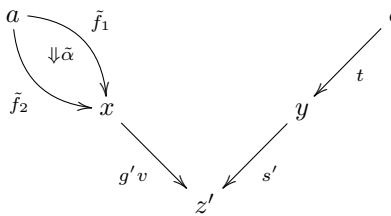
Ahora veamos que la composicion esta bien definida, sabemos que esta bien definida en las fracciones, falta ver la buena definicion de la composicion de las 2-flechas. Supongamos que $\frac{\alpha}{s} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{s}}$ entonces existen u, v tales que $us = v\tilde{s}$ y $u\alpha = v\tilde{\alpha}$. Por (CF3) existen g', s' tales que



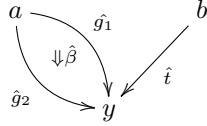
luego la composicion es la flecha dada por el diagrama



que es el mismo diagrama

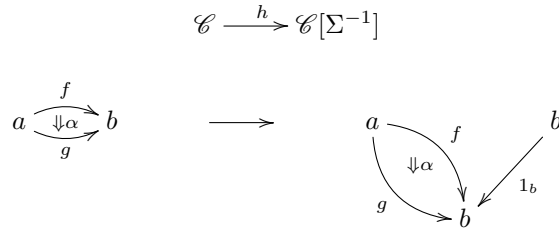


que podemos tomar para la otra composicion. Por otro lado, si $\frac{\beta}{t} = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{t}}$ entonces se tienen u, v tales que $ut = v\tilde{t}$ y $u\beta = v\tilde{\beta}$. Esto nos da una nueva flecha que llamamos



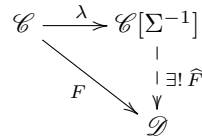
Ahora nos olvidamos de los sombreros, pues solo falta ver que la composicion es independiente de la eleccion de β' . Si tomabamos otra flecha β'' tal que $\beta''s = s'\beta$ entonces $\beta's = \beta''s$ y por (CF6) existe una $z \xrightarrow{s''} z'$ tal que $s''\beta' = s''\beta''$. Esto muestra que la composicion esta bien definida.

Corollary 6.6. $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ es una 2-categoria, y se tiene un 2-functor



tal que $\lambda(s)$ es un iso $\forall s \in \Sigma$

Theorem 6.7. $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ tiene la propiedad universal de la 2-categoria de fracciones, mas especificamente para todo 2-functor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ tal que $F(s)$ es un iso $\forall s \in \Sigma$ se tiene



Mas aun, sea $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$ la subcategoria de 2-funtores que hacen isos a las flechas de Σ , entonces se tiene que

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

es un isomorfismo de 2-categorias. Aqui la 2-categoria $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ es la 2-categoria de 2-funtores, transformaciones pseudonaturales, y modificaciones. Observamos tambien que la biyeccion se restringe a transformaciones 2-naturales.

Remark 6.8. Este teorema no es cierto si en lugar de 2-funtores se toman pseudofuntores. La razon es muy simple, *un pseudofunctor no preserva isomorfismos*, pero un pseudofunctor preserva equivalencias, luego si $s \in \Sigma$, como flecha en $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ es un isomorfismo, y un pseudofunctor $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ cualquiera solo hara que $F(s)$ sea una equivalencia.

En efecto, basta definir $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \xrightarrow{\widehat{F}} \mathcal{D}$ en los objetos como F , en las flechas por $\widehat{F}(\frac{f}{s}) = F(s)^{-1}F(f)$ y por ultimo en las 2-flechas

$$\widehat{F}\left(\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ & \Downarrow \alpha & \\ & \searrow g & \downarrow & \swarrow s \\ & & x & \end{array} \right) = F(s)^{-1}F(\alpha)$$

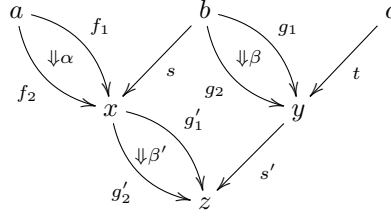
Por lo visto en el caso de categorias, ya sabemos que \widehat{F} esta bien definido en los objetos, y flechas, y resulta funtorial respecto a la composicion de flechas. Es claro tambien que esta es la unica definicion posible tal que $\widehat{F}\lambda = F$. Esta bien definido en las 2-flechas, ya que si $(\alpha, s) \sim (\alpha', s')$ existen u, v tales que $us = vs'$ y $u\alpha = v\alpha'$, luego

$$\begin{aligned} \widehat{F}\left(\frac{\alpha}{s}\right) &= F(s)^{-1}F(\alpha) = F(s)^{-1}F(u)^{-1}F(u)F(\alpha) = F(us)^{-1}F(u\alpha) = \\ &= F(vs')^{-1}F(v\alpha') = F(s')^{-1}F(v)^{-1}F(v)F(\alpha') = F(s')^{-1}F(\alpha') = \widehat{F}\left(\frac{\alpha'}{s'}\right) \end{aligned}$$

Tambien \widehat{F} preserva la composicion vertical pues

$$\begin{aligned} \widehat{F}\left(\frac{\beta}{s} \circ \frac{\alpha}{s}\right) &= \widehat{F}\left(\frac{\beta \circ \alpha}{s}\right) = \widehat{F}\left(\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ & \Downarrow \alpha & \\ & \searrow g & \downarrow & \swarrow s \\ & & x & \end{array} \right) = \\ &= \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{Ff} & \\ Fa & \Downarrow F(\beta \circ \alpha) & Fx \xrightarrow{F(s)^{-1}} Fb \\ & \xrightarrow{Fh} & \end{array} = \\ &= \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{Ff} & \\ Fa & \Downarrow F\alpha \\ & \Downarrow F\beta & \\ & \xrightarrow{Fh} & \end{array} Fx \xrightarrow{F(s)^{-1}} Fb = \widehat{F}\left(\frac{\beta}{s}\right) \circ \widehat{F}\left(\frac{\alpha}{s}\right) \end{aligned}$$

Por ultimo, \widehat{F} preserva la composicion horizontal de 2-flechas pues para definir la composicion se considera un diagrama



donde $\beta' s = s' \beta$, entonces

$$\begin{aligned} \widehat{F}\left(\frac{\beta}{t} \frac{\alpha}{s}\right) &= \widehat{F}\left(\frac{\beta' \alpha}{s' t}\right) = Fa \begin{array}{c} \xrightarrow{Fg'_1 f_1} \\ \Downarrow F(\beta' \alpha) \\ \xrightarrow{Fg'_2 f_2} \end{array} Fz \xrightarrow{F(s't)^{-1}} Fc = \\ &= Fa \begin{array}{c} \xrightarrow{Ff_1} \\ \Downarrow F\alpha \\ \xrightarrow{Ff_2} \end{array} Fx \begin{array}{c} \xrightarrow{Fg'_1} \\ \Downarrow F\beta' \\ \xrightarrow{Fg'_2} \end{array} Fz \xrightarrow{F(s')^{-1}} Fy \xrightarrow{F(t)^{-1}} Fc = (*) \end{aligned}$$

Como $\beta' s = s' \beta$ entonces $F(s')^{-1} F(\beta') = F(\beta) F(s)^{-1}$, luego

$$(*) = Fa \begin{array}{c} \xrightarrow{Ff_1} \\ \Downarrow F\alpha \\ \xrightarrow{Ff_2} \end{array} Fx \xrightarrow{F(s)^{-1}} Fb \begin{array}{c} \xrightarrow{Fg_1} \\ \Downarrow F\beta \\ \xrightarrow{Fg_2} \end{array} Fy \xrightarrow{F(t)^{-1}} Fc = \widehat{F}\left(\frac{\beta}{t}\right) \widehat{F}\left(\frac{\alpha}{s}\right)$$

y esto prueba que \widehat{F} es un 2-functor. Tenemos entonces que

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

es biyectiva, para ver que es un isomorfismo de 2-categorías, basta ver que para cada par de funtores $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ se tiene que $[F, G] \xrightarrow{h^*} [Fh, Gh]$ es un isomorfismo de categorías, y para ver esto, basta ver que es biyectivo en las transformaciones pseudonaturales, y en las modificaciones entre estas.

Dada una transformación pseudonatural

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

entre funtores que de $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{-1}}$, definimos entonces una transformación pseudonatural

$$\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \begin{array}{c} \xrightarrow{\widehat{F}} \\ \Downarrow \widehat{\eta} \\ \xrightarrow{\widehat{G}} \end{array} \mathcal{D}$$

dada por la familia $(Fa \xrightarrow{\eta_a} Ga)_{a \in \mathcal{A}}$ y para cada fraccion $\frac{f}{s}$ el isomorfismo $\eta_{\frac{f}{s}}$

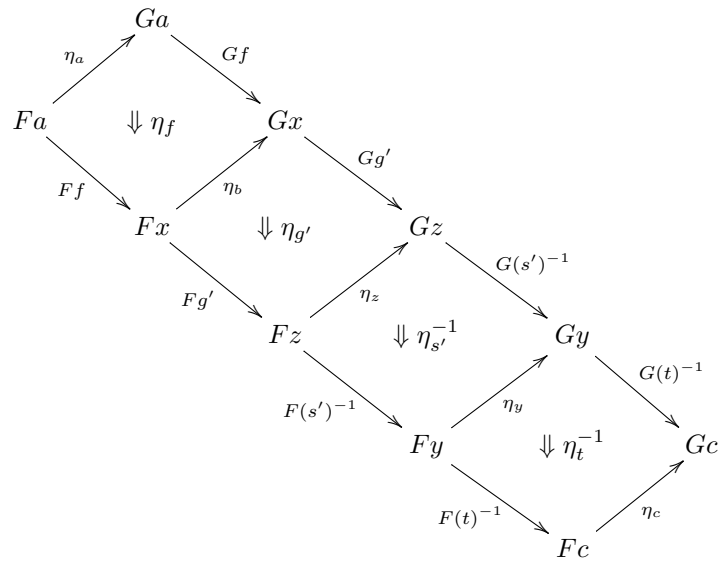
$$\begin{array}{ccc}
 & \widehat{G}a & \\
 \widehat{\eta}_a \nearrow & & \searrow \widehat{G}(\frac{f}{s}) \\
 \widehat{F}a & \Downarrow \widehat{\eta}_{\frac{f}{s}} & \widehat{G}b \\
 \widehat{F}(\frac{f}{s}) \searrow & & \nearrow \widehat{\eta}_b \\
 & \widehat{F}b &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & Ga & \\
 \eta_a \nearrow & & \searrow Gf \\
 Fa & \Downarrow \eta_f & Gx \\
 Ff \searrow & & \nearrow \eta_x \\
 & Fx & \\
 & \Downarrow \eta_s^{-1} & \\
 & F(s)^{-1} & \\
 & Fb & \\
 & \nearrow \eta_c & \\
 & Gb & \\
 & \searrow G(s)^{-1} & \\
 & &
 \end{array}$$

Es claro que esta es la unica definicion posible tal que $\widehat{\eta}h = \eta$.

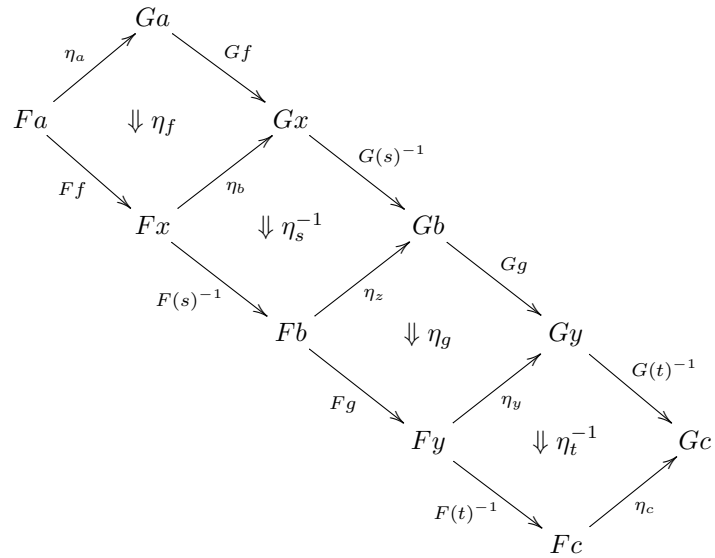
Chequeamos que $\widehat{\eta}$ es pseudonatural. (PNT1) es tautologicamente cierta. Veamos (PNT2), sean $\frac{q}{t}, \frac{f}{s}$ fracciones, su composicion es $\frac{q'f}{s't}$ luego,

$$\begin{array}{ccc}
 & \widehat{G}a & \\
 \widehat{\eta}_a \nearrow & & \searrow \widehat{G}(\frac{q'f}{s't}) \\
 \widehat{F}a & \Downarrow \widehat{\eta}_{\frac{q'f}{s't}} & \widehat{G}c \\
 \widehat{F}(\frac{q'f}{s't}) \searrow & & \nearrow \widehat{\eta}_c \\
 & \widehat{F}c &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & Ga & \\
 \eta_a \nearrow & & \searrow Gg'f \\
 Fa & \Downarrow \eta_{g'f} & Gz \\
 Fg'f \searrow & & \nearrow \eta_z \\
 & Fz & \\
 & \Downarrow \eta_{s't}^{-1} & \\
 & F(s't)^{-1} & \\
 & Fc & \\
 & \nearrow \eta_c & \\
 & Gc & \\
 & \searrow G(s't)^{-1} & \\
 & &
 \end{array}$$

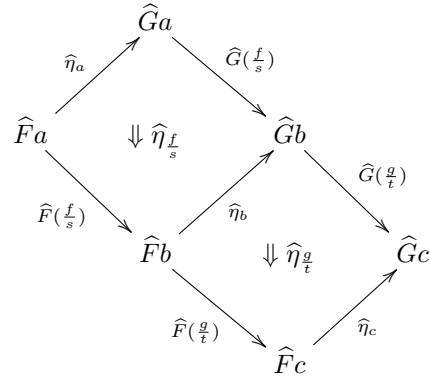
Ahora, dado que η satisface (PNT2) podemos descomponer el diagrama en



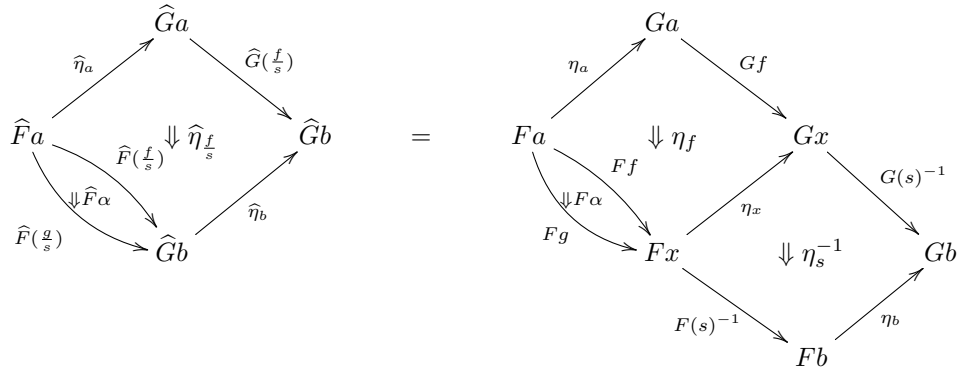
que dado que $g's = s'g$, es igual a



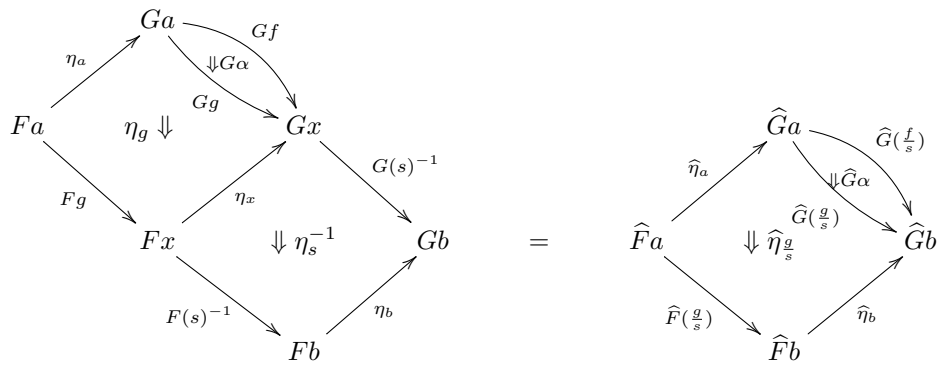
que es por definicion



Veamos que vale (PNT3). En efecto,



y como η satisface (PNT3) es igual a



Por lo tanto, $\widehat{\eta}$ resulta pseudonatural, es claro tambien que si η es 2-natural entonces $\widehat{\eta}$ tambien lo es, por lo tanto la biyeccion se restringe bien a transformaciones 2-naturales. Por ultimo, dada una modificacion

$$(Fa \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta_a} \\ \Downarrow \psi_a \\ \xrightarrow{\theta_a} \end{array} Ga)_{a \in \mathcal{C}}$$

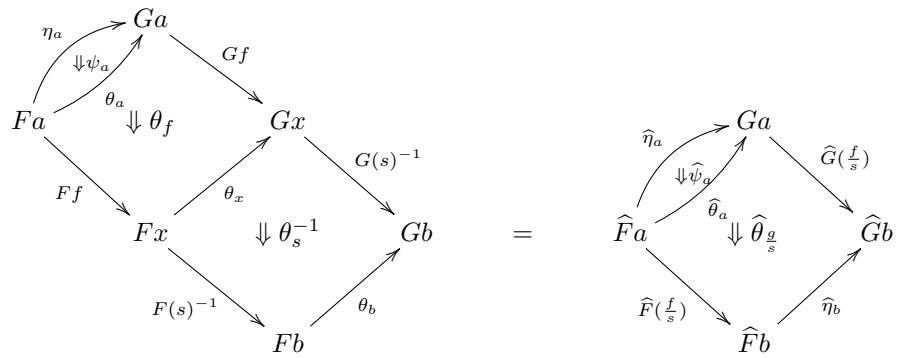
se define la modificación $\hat{\psi}$ por la misma familia de 2-flechas ψ_a para cada $a \in \mathcal{C}$. Es claro que es la única definición posible tal que $\hat{\psi}\lambda = \psi$, vemos que en efecto es una modificación,

The diagram shows two 2-cells from Fa to Gb being equal. The left 2-cell has 1-cells $\hat{F}a \xrightarrow{\hat{\eta}_a} \hat{G}a \xrightarrow{\hat{G}(\frac{f}{s})} \hat{G}b$ and $\hat{F}a \xrightarrow{\hat{F}(\frac{f}{s})} \hat{F}b \xrightarrow{\hat{\theta}_b} \hat{G}b$, with 2-flechas $\hat{\psi}_a$ and $\hat{\psi}_b$. The right 2-cell has 1-cells $Fa \xrightarrow{\eta_a} Ga \xrightarrow{Gf} Gx \xrightarrow{G(s)^{-1}} Gb$ and $Fa \xrightarrow{Ff} Fx \xrightarrow{F(s)^{-1}} Fb \xrightarrow{\theta_b} Gb$, with 2-flechas η_f and η_b . The equality is indicated by an equals sign.

Como ψ es una modificación entonces por (M) esta 2-flecha es igual a

The diagram shows a 2-cell from Fa to Gb with 1-cells $Fa \xrightarrow{\eta_a} Ga \xrightarrow{Gf} Gx \xrightarrow{G(s)^{-1}} Gb$ and $Fa \xrightarrow{Ff} Fx \xrightarrow{F(s)^{-1}} Fb \xrightarrow{\theta_b} Gb$. The 2-flechas are η_f and η_b . The equality is indicated by an equals sign.

que nuevamente por (M) es igual a



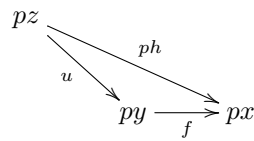
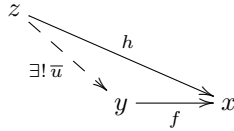
y esto prueba que $\widehat{\psi}$ es una modificación. Esto prueba el teorema.

7 2-Categorías fibradas

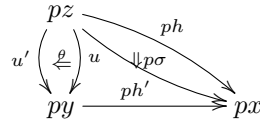
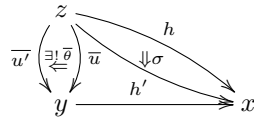
7.1 2-Categorías fibradas, definiciones y yoga básico

Definition 7.1. (Buckley) Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ un 2-functor, una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} se dice 2-cartesiana si satisface

(CR1) para toda $z \xrightarrow{h} x$ y $pz \xrightarrow{u} py$ tal que $ph = p(f)u$ se tiene



(CR2) Para toda 2-flecha $z \begin{matrix} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \sigma \\ \xrightarrow{h'} \end{matrix} x$ y $pz \begin{matrix} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{u'} \end{matrix} py$ tal que $p\sigma = p(f)\theta$



es decir, existe una única $\bar{\theta}$ tal que $p(\bar{\theta}) = \theta$ y $\sigma = f\bar{\theta}$.

Proposition 7.2. (Buckley) Una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} es 2-cartesiana si y solo si

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}[z, y] & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{F}[z, x] \\
p_{z,y} \downarrow & & \downarrow p_{z,x} \\
\mathcal{C}[pz, py] & \xrightarrow{pf^*} & \mathcal{C}[pz, px]
\end{array}$$

es un pullback en Cat para todo $z \in \mathcal{F}$.

Para ver esto considerar la categoria $1 = *$ que me da la propiedad (CR1), y la categoria $2 = *_1 \longrightarrow *_2$ que me da la propiedad (CR2). Como estas categorias son generadores de Cat , esto muestra la proposicion.

Definition 7.3. Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ un 2-functor, sea $y \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{f} \end{array} x$ una 2-flecha de \mathcal{F} , decimos que α es *cartesiana* si lo es para el functor $\mathcal{F}[y, x] \xrightarrow{p_{y,x}} \mathcal{C}[py, px]$. Esto nos dice explicitamente, que para toda $h \xrightarrow{\beta} f$ tal que $p\beta = p(\alpha)\theta$,

$$\begin{array}{ccc}
h & \xrightarrow{\beta} & f \\
\Downarrow \theta & & \downarrow g \\
g & \xrightarrow{\alpha} & f
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
h & \xrightarrow{p(\alpha)\theta} & f \\
\theta \searrow & & \downarrow g \\
g & \xrightarrow{p\alpha} & f
\end{array}$$

Definition 7.4. (Buckley) Decimos que un 2-functor $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ es una 2-fibracion si satisface

(TF1) Dado $x \in \mathcal{F}$ y dada $b \xrightarrow{f} px$, existe $f^*(x) \xrightarrow{f_x} x$ 2-cartesiana arriba de f .

(TF2) Para cada $x, y \in \mathcal{F}$, el functor $\mathcal{F}[x, y] \xrightarrow{P_{x,y}} \mathcal{C}[px, py]$ es una fibracion.

(TF3) La composicion horizontal de 2-flechas cartesianas es cartesiana.

Los siguientes resultados se siguen facilmente de la misma forma que en caso de las Fibraciones de Grothendieck usuales.

Proposition 7.5. Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ un 2-functor, entonces

(1) Si se tienen $z \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} y f es 2-cartesiana, entonces g es 2-cartesiana si y solo si fg lo es.

(2) Si tengo $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} , y $\mathcal{C} \xrightarrow{q} \mathcal{E}$ un 2-functor. Supongamos que $py \xrightarrow{pf} px$ es 2-cartesiana para $\mathcal{C} \xrightarrow{q} \mathcal{E}$, entonces f es 2-cartesiana para $\mathcal{F} \xrightarrow{qp} \mathcal{E}$ si y solo si lo es para $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$.

(3) Sea $y \xrightarrow{f} x$ una flecha de \mathcal{F} , entonces es un isomorfismo si y solo si es 2-cartesiana para $\mathcal{F} \longrightarrow 1$ si y solo si es 2-cartesiana para toda fibration $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$.

Hay una noción mas debil de flecha 2-cartesiana que son las mas relevantes cuando uno quiere generalizar esta teoria a bicategorías. Si bien en [Buc14] ambas se llaman cartesianas, aqui las distinguimos ya que en general las nociones no son equivalentes.

Definition 7.6. (Buckley) Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ un 2-functor, una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} se dice bicartesiana si satisface

(BCR1) para toda $z \xrightarrow{h} x$ y $pz \xrightarrow{u} py$, con un iso $pz \xrightarrow[p]{p(f)u} px$, entonces existe \hat{u} , un iso $\hat{\alpha}$

$$\begin{array}{ccc} z & & \\ | & \searrow h & \\ \hat{u} & \uparrow \hat{\alpha} & \\ y & \xrightarrow{f} & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} pz & & \\ u \downarrow & \searrow ph & \\ py & \xrightarrow{pf} & px \end{array}$$

y un iso $pz \xrightarrow[p]{p\hat{u}} py$ tal que

$$\begin{array}{ccc} pz & & \\ u \downarrow \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hat{u} \end{array} \right) & \searrow ph & \\ py & \xrightarrow{pf} & px \end{array} \quad \uparrow p\hat{\alpha} \quad = \quad \begin{array}{ccc} pz & & \\ u \downarrow & \searrow ph & \\ py & \xrightarrow{pf} & px \end{array}$$

Decimos que $(\hat{u}, \hat{\alpha}, \beta)$ levantan a (u, α) .

(BCR2) Si se tienen 2-flechas $z \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \sigma \\ \xrightarrow{h'} \end{array} x$, $pz \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{u'} \end{array} py$, con isomorfismos

$pz \begin{array}{c} \xrightarrow{p(f)u} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{h} \end{array} px$, $pz \begin{array}{c} \xrightarrow{p(f)u'} \\ \Downarrow \alpha' \\ \xrightarrow{h'} \end{array} px$, tales que

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} pz & & \\ \downarrow u & \searrow ph' & \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \alpha' \\ \xrightarrow{h'} \end{array} & & \\ u & \xrightarrow{p(f)} & px \\ \downarrow & \uparrow & \\ py & \xrightarrow{p(f)} & px \end{array} & = & \begin{array}{ccc} pz & & \\ \downarrow u & \searrow ph' & \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \alpha' \\ \xrightarrow{h'} \end{array} & & \\ u & \xrightarrow{p(f)} & px \\ \downarrow & \uparrow & \\ py & \xrightarrow{p(f)} & px \end{array} \end{array}$$

Sean $(\hat{u}, \hat{\alpha}, \beta)$, $(\hat{u}', \hat{\alpha}', \beta')$ sus respectivos levantados, entonces existe una unica 2-flecha $z \begin{array}{c} \xrightarrow{\hat{u}} \\ \Downarrow \hat{\theta} \\ \xrightarrow{\hat{u}'} \end{array} y$ tal que $p\hat{\theta} \circ \beta = \beta' \circ \theta$ y tal que

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} pz & & \\ \downarrow p\hat{u} & \searrow ph' & \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{p\hat{\theta}} \\ \Downarrow p\hat{\alpha}' \\ \xrightarrow{p\hat{u}'} \end{array} & & \\ p\hat{u} & \xrightarrow{p(f)} & px \\ \downarrow & \uparrow & \\ py & \xrightarrow{p(f)} & px \end{array} & = & \begin{array}{ccc} pz & & \\ \downarrow p\hat{u} & \searrow ph' & \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{p\hat{\theta}} \\ \Downarrow p\hat{\alpha}' \\ \xrightarrow{p\hat{u}'} \end{array} & & \\ p\hat{u} & \xrightarrow{p(f)} & px \\ \downarrow & \uparrow & \\ py & \xrightarrow{p(f)} & px \end{array} \end{array}$$

Proposition 7.7. (Buckley) Una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} es bicartesiana si y solo si

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}[z, y] & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{F}[z, x] \\ p_{z,y} \downarrow & & \downarrow p_{z,x} \\ \mathcal{C}[pz, py] & \xrightarrow{pf_*} & \mathcal{C}[pz, px] \end{array}$$

es un bipullback en Cat para todo $z \in \mathcal{F}$. Aqui se utiliza bipullback en el sentido de Joyal y Street en [JS93].

Los siguientes resultados pueden encontrarse en [Buc14].

Proposition 7.8. (Buckley) (1) Si una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} es 2-cartesiana entonces es bicartesiana.

(2) Si se tienen $z \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} , si f, g son bicartesianas entonces fg es bicartesiana.

(3) Si una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} es una equivalencia entonces es bicartesiana para toda 2-fibracion $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$.

(4) Si se tiene un iso $y \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} x$ en \mathcal{F} entonces f es bicartesiana si y solo si g es bicartesiana.

(5) Si $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} es bicartesiana y se tienen 2-flechas $z \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \sigma \\ \xrightarrow{h'} \end{array} x$,

$pz \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{u'} \end{array} py$, con isomorfismos $pz \begin{array}{c} \xrightarrow{p(f)u} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{h} \end{array} px$, $pz \begin{array}{c} \xrightarrow{p(f)u'} \\ \Downarrow \alpha' \\ \xrightarrow{h'} \end{array} px$, tales que

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} pz & & \\ \downarrow \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{u'} \end{array} \right) & \searrow^{ph'} & \\ py & \xrightarrow{pf} & px \end{array} & = & \begin{array}{ccc} pz & & \\ \downarrow u & \nearrow^{ph'} & \\ py & \xrightarrow{pf} & px \end{array} \end{array}$$

Sean $(\hat{u}, \hat{\alpha}, \beta)$, $(\hat{u}', \hat{\alpha}', \beta')$ sus respectivos levantados. Si θ y σ son isomorfismos, entonces el unico $z \begin{array}{c} \xrightarrow{\hat{u}} \\ \Downarrow \hat{\theta} \\ \xrightarrow{\hat{u}'} \end{array} y$ dado por (PCR2) es un isomorfismo.

(6) Si una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} es bicartesiana entonces dadas (u, α) siempre admiten un levantado del tipo $(\hat{u}, \hat{\alpha}, 1_u)$, es decir siempre se puede elegir $\hat{u}, \hat{\alpha}$ tal que $p\hat{u} = u, p\hat{\alpha} = \alpha$.

$$\begin{array}{ccc} z & & \\ \downarrow \hat{u} & \searrow^h & \\ y & \xrightarrow{f} & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} pz & & \\ \downarrow u & \nearrow^{ph} & \\ py & \xrightarrow{pf} & px \end{array}$$

7.2 Construcción de Grothendieck 2-categorica

Definition 7.9. Dada una 2-fibración $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$, un clivaje es una elección de

(1) Para cada $x \in \mathcal{F}$ y cada $b \xrightarrow{f} px$, una flecha 2-cartesiana $f^*(x) \xrightarrow{f_x} x$ arriba de f .

(2) Para cada $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} , y cada 2-flecha $py \xrightarrow[\Downarrow \alpha]{g} px$, una 2-flecha cartesiana $y \xrightarrow[\Downarrow \alpha_f]{g_f} x$ arriba de α .

Definition 7.10. Dada una 2-fibración $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ con un clivaje, decimos que el clivaje se parte si satisface

(SC1) Dado $x \in \mathcal{F}$ y flechas $c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} px$, entonces $(fg)_x = f_x g_{f^*(x)}$ y $(1_{px})_x = 1_x$.

(SC2) Respetar la composición vertical de 2-flechas, es decir $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} , y 2-flechas $py \xrightarrow[\Downarrow \beta]{\Downarrow \alpha} px$, entonces

$$y \xrightarrow[\Downarrow \beta_f]{\Downarrow \alpha_f} x = y \xrightarrow[\Downarrow (\beta \circ \alpha)_f]{h_f} x.$$

(SC3) Respetar la composición horizontal de 2-flechas, es decir dadas $z \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} y 2-flechas $pz \xrightarrow[\Downarrow \beta]{v} py \xrightarrow[\Downarrow \alpha]{u} px$, entonces

$$z \xrightarrow[\Downarrow \beta_g]{v_g} y \xrightarrow[\Downarrow \alpha_f]{u_f} x = z \xrightarrow[\Downarrow \beta \alpha_{gf}]{uv_{gf}} x.$$

(SC4) Respetar identidades, es decir dada $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} entonces

$$y \xrightarrow[\Downarrow (1_f)_f]{f_f} x = y \xrightarrow[\Downarrow 1_f]{f} x$$

Definition 7.11. Una *2-fibracion que se parte* es una *2-fibracion* $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ con un clivaje que se parte.

En esta seccion, $2\mathcal{C}at$ sera la *3-categoria* de *2-categorias* pequeñas, *2-funtores*, *transformaciones 2-naturales* y *modificaciones*.

Definition 7.12. (*Construccion de Grothendieck 2-categorica*) Dado un *2-functor* $\mathcal{C}^{coop} \xrightarrow{F} 2\mathcal{C}at$, sea $\int F$ la *2-categoria* cuyos *objetos* son pares (x, a) con $x \in Fa$, las *flechas* estan dadas por

$$\underline{(x, a) \xrightarrow{(f, \varepsilon)} (y, b)}$$

$$a \xrightarrow{f} b \text{ y una flecha } x \xrightarrow{\varepsilon} Ff(y) \text{ en } Fa$$

y una *2-flecha* esta dada por

$$\underline{\begin{array}{ccc} & (f, \varepsilon) & \\ & \curvearrowright & \\ (x, a) & \Downarrow (\alpha, \vartheta) & (y, b) \\ & \curvearrowleft & \\ & (g, \varphi) & \end{array}}$$

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} b \text{ y una 2-flecha } \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varepsilon} & Ff(y) \\ & \searrow \varphi & \uparrow F\alpha_y \\ & & Fg(y) \end{array} \text{ en } Fa$$

La composicion vertical de *2-flechas* $(x, a) \begin{array}{ccc} \xrightarrow{(f, \varepsilon)} & & \\ \Downarrow (\alpha, \vartheta) & \xrightarrow{(g, \varphi)} & \\ \Downarrow (\beta, \varrho) & & \\ \xrightarrow{(h, \psi)} & & \end{array} (y, b)$ esta dada por

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{h} \end{array} b \text{ y la 2-flecha dada por el diagrama}$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varepsilon} & Ff(y) \\ & \searrow \varphi & \uparrow F\alpha_y \\ & & Fg(y) \\ & \searrow \psi & \uparrow F\beta_y \\ & & Fh(y) \end{array}$$

La composicion horizontal de 2-flechas $(x, a) \xrightarrow[\widehat{(g_1, \varphi_1)}]{\widehat{(f_1, \varepsilon_1)}} (y, b) \xrightarrow[\widehat{(g_2, \varphi_2)}]{\widehat{(f_2, \varepsilon_2)}} (z, c)$ esta

dada por $a \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g_1} \end{array} b \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} c$ y la 2-flecha dada por el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{\varepsilon_1} & Ff_1(y) & \xrightarrow{Ff_1(\varepsilon_2)} & Ff_1f_2(z) \\
 \searrow \varphi_1 & & \uparrow F\alpha_y & \searrow Ff_1(\varphi_2) & \downarrow \varrho \uparrow Ff_1(F\beta_z) \\
 & & Fg_1(y) & & Ff_1g_2(z) \\
 & & & \searrow Fg_1(\varphi_2) & \uparrow F\alpha_{g_2(z)} \\
 & & & & Fg_1g_2(z)
 \end{array}$$

Es claro que proyectando se obtiene un 2-functor $\int F \xrightarrow{\diamond} \mathcal{C}$.

Proposition 7.13. (Buckley) Dado un 2-functor $\mathcal{C}^{coop} \xrightarrow{F} 2Cat$, entonces la 2-fibracion $\int F \xrightarrow{\diamond} \mathcal{C}$ se parte.

Definition 7.14. Dada una 2-categoria \mathcal{C} se define la 3-categoria $2Fib_s(\mathcal{C})$ cuyos objetos son las 2-fibraciones que se parten sobre \mathcal{C} , una flecha entre 2-fibraciones es un 2-functor

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{F} & \mathcal{G} \\
 \searrow p & & \downarrow q \\
 & & \mathcal{C}
 \end{array}$$

es *cartesiano* si $p = qF$, preserva las flechas 2-cartesianas y 2-flechas cartesianas, y tambien preserva los clivajes. Las 2-flechas y 3-flechas son las de $2Cat/\mathcal{C}$, se suelen llamar transformaciones 2-naturales verticales, y modificaciones verticales.

Theorem 7.15. (Buckley) Se tiene una equivalencia de 3-categorias

$$[\mathcal{C}^{coop}, 2Cat] \xrightarrow{\int} 2Fib_s(\mathcal{C})$$

donde $[\mathcal{C}^{coop}, 2Cat]$ es la 3-categoria de 2-funtores, transformaciones 2-naturales, modificaciones y perturbaciones.

7.3 2-Fibraciones 2-discretas

Definition 7.16. Decimos que un 2-functor $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ es una 2-fibracion 2-discreta si satisface

(FD1) Dado $x \in \mathcal{F}$ y dada $b \xrightarrow{f} px$, existe una flecha cartesiana arriba de f (en el sentido clasico de 4.2).

(FD2) Dada una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en \mathcal{F} y una 2-flecha $py \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{pf} \end{array} px$, existe

una unica 2-flecha $y \begin{array}{c} \xrightarrow{\hat{g}} \\ \Downarrow \hat{\alpha} \\ \xrightarrow{f} \end{array} x$ arriba de α .

Remark 7.17. La condicion (FD2) nos dice exactamente que para cada $x, y \in \mathcal{F}$ el functor $\mathcal{F}[x, y] \xrightarrow{P_{x,y}} \mathcal{C}[px, py]$ es una fibracion discreta.

Proposition 7.18. Si $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ es una 2-fibracion 2-discreta entonces es una 2-fibracion.

En efecto, sabemos que una fibracion discreta es una fibracion, por lo tanto vale (TF2). Para ver (TF3), basta observar que la composicion horizontal de 2-flechas cartesianas es cartesiana, esto se sigue tautologicamente de la unicidad de levantamiento de 2-flechas por (FD2). Falta ver (TF1) es decir, tenemos que ver que una flecha cartesiana en el sentido clasico es 2-cartesiana. Dada $y \xrightarrow{f} x$ cartesiana, queremos ver que satisface la condicion de levantamiento

de 2-flechas, pero dadas $z \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \sigma \\ \xrightarrow{g'} \end{array} x$ y $pz \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{h'} \end{array} py$ tales que $p\sigma = p(f)\theta$ por

(FD2) existe una unica 2-flecha $z \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \Downarrow \exists! \hat{\theta} \\ \xrightarrow{\bar{h}'} \end{array} y$ sobre θ . Falta ver que $\hat{\theta}$ satisface

$\sigma = f\hat{\theta}$, y luego $s = \bar{h}$ dado que f es cartesiana. Pero esto sale facil pues $p(f\hat{\theta}) = pf\theta = p\sigma$, por (DF2) $\sigma = f\hat{\theta}$.

Proposition 7.19. Una 2-fibracion 2-discreta $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ se parte si y solo si admite un clivaje que satisface (SC1).

En efecto, es claro que (SC2), (SC3), (SC4) se satisfacen automaticamente por (FD2).

Dada \mathcal{C} una 2-categoría se define la 2-categoría $D2Fib_s(\mathcal{C})$ cuyos objetos son las 2-fibraciones 2-discretas que se parten. Las flechas son los funtores cartesianos, aunque no les pedimos que preserven los clivajes ya que no asumimos que una 2-fibración 2-discreta que se parte tiene un clivaje asociado. Las 2-flechas son las transformaciones 2-naturales verticales.

Theorem 7.20. Se tiene una equivalencia de 2-categorías

$$[\mathcal{C}^{coop}, \mathcal{C}at] \xrightarrow{J} D2Fib_s(\mathcal{C})$$

donde $[\mathcal{C}^{coop}, \mathcal{C}at]$ es la 2-categoría de 2-funtores, transformaciones pseudo-naturales y modificaciones.

En efecto, dado un 2-functor $\mathcal{C}^{coop} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$, la Construcción de Grothendieck nos da una 2-fibración $\int F \xrightarrow{\diamond} \mathcal{C}$, cuyos objetos son pares (x, a) con $x \in Fa$, las flechas están dadas por

$$\frac{(x, a) \xrightarrow{(f, \varepsilon)} (y, b)}{}$$

$$a \xrightarrow{f} b \text{ y una flecha } x \xrightarrow{\varepsilon} Ff(y) \text{ en } Fa$$

y una 2-flecha esta dada por

$$\frac{\begin{array}{ccc} & (f, \varepsilon) & \\ & \curvearrowright & \\ (x, a) & \Downarrow \alpha & (y, b) \\ & \curvearrowleft & \\ & (g, \varphi) & \end{array}}{}$$

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} b \text{ tal que conmuta } \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varepsilon} & Ff(y) \\ & \searrow \varphi & \uparrow F\alpha_y \\ & & Fg(y) \end{array}$$

Por lo tanto, dada una flecha $(x, a) \xrightarrow{(g, \varphi)} (y, b)$ y 2-flecha $a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$, existe

una única 2-flecha arriba de α , y esta es $(x, a) \xrightarrow[(g, \varphi)]{(f, F\alpha_y \varphi)} (y, b)$. Luego $\int F \xrightarrow{\diamond} \mathcal{C}$

es una 2-fibración 2-discreta. Conversamente, dada una 2-fibración 2-discreta $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ le asignamos $\mathcal{C}^{coop} \xrightarrow{F_p} 2\mathcal{C}at$, donde $F_p(a) = \mathcal{F}_a$. \mathcal{F}_a es la

2-categoría de objetos arriba de a , flechas arriba de 1_a , y 2-flechas arriba de 1_{1_a} . Pero dada una flecha $x \xrightarrow{f} y$ arriba de 1_a , entonces $p(1_f) = 1_{1_a}$ por la 2-funtorialidad, luego por unicidad 1_f es la única 2-flecha arriba de 1_{1_a} si levantamos en f . Esto muestra que \mathcal{F}_a es una categoría ya que las 2-flechas son solo las identidades y luego podemos olvidarlas, y por lo tanto F_p en realidad es un 2-functor $\mathcal{C}^{coop} \xrightarrow{F_p} \mathcal{C}at$. El resto de las verificaciones son de rutina.

Corollary 7.21. Dado un 2-functor $\mathcal{C}^{coop} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$, dada una flecha $b \xrightarrow{f} a$ en \mathcal{C} y sea $x \in Fa$, luego $(y, b) \xrightarrow{(f, \varepsilon)} (x, a)$ es 2-cartesiana si y solo si ε es un isomorfismo.

Una propiedad muy importante que tienen las 2-fibraciones 2-discretas es que las flechas cartesianas, 2-cartesianas y bicartesianas coinciden, mientras que en general esto no ocurre.

Proposition 7.22. Si $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ es una 2-fibración 2-discreta entonces una flecha $y \xrightarrow{f} x$ es cartesiana si y solo si es bicartesiana.

Vimos que cartesiana implica 2-cartesiana, por 7.8.1 entonces es bicartesiana. Falta ver la vuelta, sea $y \xrightarrow{f} x$ bicartesiana, queremos ver que f es cartesiana. Dada $z \xrightarrow{g} x$ tal que $pg = p(f)h$, por 7.8.6 se tiene que existe

$$\begin{array}{ccc} z & & \\ \exists \hat{h} \downarrow & \nearrow g & \\ y & \xrightarrow{f} & x \end{array}$$

$\uparrow \alpha$

$$\begin{array}{ccc} pz & & \\ h \downarrow & \nearrow pg & \\ py & \xrightarrow{pf} & px \end{array}$$

con $p\hat{h} = h$. Por (FD2) se tiene que $\alpha = 1_g$ y luego $f\hat{h} = g$. Falta ver que \hat{h} es única, pero dada \hat{h}' tal que $p\hat{h}' = h$ y $f\hat{h}' = g$, dado que f es bicartesiana

existe $z \begin{array}{c} \xrightarrow{\hat{h}'} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{\hat{h}} \end{array} y$ tal que $p\theta = 1_h$. Nuevamente por (FD2) el único levantado de 1_h en \hat{h} es $1_{\hat{h}}$ y por lo tanto $\hat{h} = \hat{h}'$.

Remark 7.23. Se deduce en particular que las todas las propiedades de estabilidad de las flechas bicartesianas se trasladan a las flechas cartesianas.

7.4 Construcción de laxcolimites de categorías

Definition 7.24. Decimos que una 2-categoría es *2-discreta* si sus únicas 2-flechas son identidades.

Dada una categoría \mathcal{D} le podemos asignar una 2-categoría 2-discreta $d(\mathcal{D})$ que solo tiene como 2-flecha identidades. Por otro lado, dada una bicategoría \mathcal{C} le podemos asignar una categoría $\pi_0(\mathcal{C})$, que es aplicar π_0 en los *hom*, es decir los objetos son los mismos y las flechas de $\pi_0(\mathcal{C})$ son las componentes arcoconexas de flechas de \mathcal{C} , mas precisamente se identifican a las flechas que están conectadas por una cadena de 2-flechas. Estas asignaciones definen 2-funtores, y forman una *2-adjunción*, esto queda explicitado en la siguiente proposición.

Proposition 7.25. Sean \mathcal{C} una bicategoría y \mathcal{D} una categoría. Entonces se tiene un isomorfismo de categorías

$$[\pi_0(\mathcal{C}), \mathcal{D}] \xrightarrow{\eta^*} [\mathcal{C}, d(\mathcal{D})]$$

dado por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\eta} & d\pi_0(\mathcal{C}) & & \pi_0(\mathcal{C}) \\ & \searrow \forall F & \downarrow \tilde{F} & & \downarrow \exists! \tilde{F} \\ & & d(\mathcal{D}) & & \mathcal{D} \end{array}$$

Aquí $[\mathcal{C}, d(\mathcal{D})]$ es la categoría cuyos objetos son los pseudofuntores y cuyas flechas son las transformaciones pseudonaturales, mientras que $[\pi_0(\mathcal{C}), \mathcal{D}]$ es la categoría de funtores y transformaciones naturales. Dado un pseudofuntor

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} d(\mathcal{D})$, si entre dos flechas $a \xrightarrow[f]{g} b$ existe un camino de 2-flechas,

entonces necesariamente $F(f) = F(g)$ pues las 2-flechas tienen que ir a identidades via F ya que no hay otras 2-flechas. Por lo tanto, F pasa al cociente y me define a \tilde{F} . Es trivial ver que es biyectivo en las flechas, por lo tanto es un isomorfismo de categorías.

Dada una 2-categoría \mathcal{C} y dado un 2-funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathit{Cat}$, entonces la *Construcción de Grothendieck para 2-categorías* nos da una 2-categoría $\int F$ cuyos objetos son pares (x, a) con $x \in Fa$, las flechas están dadas por

$$(x, a) \xrightarrow{(f, \varepsilon)} (y, b)$$

$a \xrightarrow{f} b$ y una flecha $Ff(x) \xrightarrow{\varepsilon} y$ en Fb

y una 2-flecha esta dada por

$$(x, a) \begin{array}{c} \xrightarrow{(f, \varepsilon)} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{(g, \varphi)} \end{array} (y, b)$$

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} b \text{ tal que conmuta } \begin{array}{ccc} Ff(x) & \xrightarrow{\varepsilon} & y \\ F\alpha_x \downarrow & \nearrow \varphi & \\ Fg(x) & & \end{array}$$

Se deduce facilmente de lo hecho anteriormente que dada $c \in \mathcal{C}at$, se tiene un isomorfismo de categorias

$$[\int F, d(c)] \xrightarrow{\lambda^*} LaxCon[F, c]$$

En efecto, basta observar que dada una 2-flecha

$$(x, a) \begin{array}{c} \xrightarrow{(f, \varepsilon)} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{(g, \varphi)} \end{array} (y, b)$$

entonces definiendo $\int F \xrightarrow{h} c$ como antes, hay que ver que $h(f, \varepsilon) = h(g, \varphi)$ para que este bien definido y sea por lo tanto un 2-functor. Basta observar que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} h_a(x) & \xrightarrow{(h_f)_x} & h_b Ff(x) & \xrightarrow{h_b(\varepsilon)} & h_b(y) \\ & \searrow (h_g)_x & \downarrow F\alpha_x & \nearrow h_b(\varphi) & \\ & & h_b Fg(x) & & \end{array}$$

pues $F \xrightarrow{h} c$ es un laxcono y por lo tanto estas flechas van a parar a la misma flecha en c , y α es la identidad ya que es la unica 2-flecha posible.

Por el isomorfismo anterior

$$[\pi_0(\int F), c] \xrightarrow{\eta^*} [\int F, d(c)]$$

se obtiene que el siguiente resultado.

Theorem 7.26. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un 2-functor donde \mathcal{C} es una 2-categoría, entonces $\pi_0(\int F)$ es el *laxcolimite* de F .

7.5 Construcción de pseudocolimites de categorías

Para construir el pseudocolimite en el caso general se puede hacer el mismo procedimiento. Sabemos que se tiene un isomorfismo de categorías

$$[\int F, d(c)] \xrightarrow{\lambda^*} LaxCon[F, c]$$

Igual que antes, se observa que este isomorfismo se restringe a los pseudocolimites como

$$[\int F, d(c)]_{\Sigma^{-1}} \xrightarrow{\lambda^*} PsCon[F, c]$$

Utilizando la construcción general de la 2-categoría de fracciones de H. Wolff en [Wol70], se obtiene un isomorfismo de categorías

$$[\int F[\Sigma^{-1}], d(c)] \xrightarrow{h^*} [\int F, d(c)]_{\Sigma^{-1}}$$

y por último se tiene un isomorfismo de categorías

$$[\pi_0(\int F[\Sigma^{-1}]), c] \xrightarrow{\pi^*} [\int F[\Sigma^{-1}], d(c)]$$

Por lo tanto se tiene el siguiente teorema.

Theorem 7.27. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un 2-functor donde \mathcal{C} es una 2-categoría, entonces $\pi_0(\int F[\Sigma^{-1}])$ es el *pseudocolimite* de F .

Se puede ver fácilmente que si \mathcal{C} es strict-2-filtrante, entonces las flechas del clivaje canónico satisfacen el 2-cálculo de fracciones aquí definido, y por lo tanto se tiene una construcción del pseudocolimite con esta técnica. Sin embargo, viendo detenidamente esta construcción se observa que no es otra que la construcción de Grothendieck usual, como explicamos en 5.4.

8 Bicategoría de fracciones

8.1 Bicategoría de fracciones

En este capítulo repasamos la definición de la bicategoría de fracciones de Pronk, donde se obtiene el siguiente resultado.

Theorem 8.1. (*Pronk*) Dada una bicategoría \mathcal{C} y una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathcal{C})$ que satisface el *bicálculo de fracciones*, entonces existe una bicategoría $\mathcal{C}[\Sigma^{eq}]$ con un pseudofunctor $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}[\Sigma^{eq}]$ tal que $h(s)$ es una equivalencia $\forall s \in \Sigma$ y es universal en el sentido de que

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{eq}], \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{eq}}$$

es una equivalencia de bicategorías, donde $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{eq}}$ es la bicategoría de pseudofuntores que hacen equivalencias a las flechas de Σ , transformaciones pseudonaturales y modificaciones.

Aquí daremos la definición solo para el caso en el que \mathcal{C} es una 2-categoría, ya que es el caso que nos interesa y esto reduce un poco las cuentas. Sin embargo aclaramos que aun cuando \mathcal{C} sea una 2-categoría, $\mathcal{C}[\Sigma^{eq}]$ será una bicategoría. Esto puede ser un problema para algunas aplicaciones pero no para nuestros objetivos.

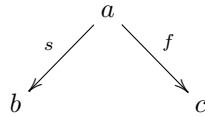
8.2 Bicálculo de fracciones

Definition 8.2. (*Pronk*) Sea \mathcal{C} una 2-categoría y una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathcal{C})$, decimos que Σ satisface el *bicálculo de fracciones (a izquierda)* si satisface

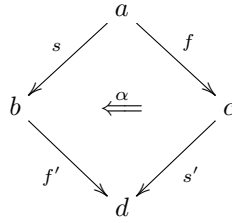
(BF1) *Todas las equivalencias están en Σ*

(BF2) *Si se tienen $a \xrightarrow{s} b \xrightarrow{t} c$, con $s, t \in \Sigma$ entonces $ts \in \Sigma$.*

(BF3) *Dado un diagrama del tipo*

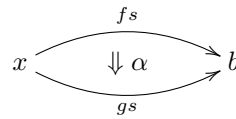


con $s \in \Sigma$, entonces se puede completar a un diagrama con un isomorfismo α

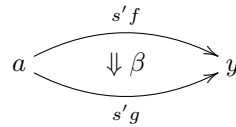


con $s' \in \Sigma$.

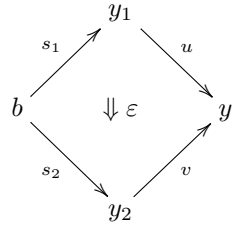
(BF₄) Dadas flechas $a \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} b$, si existe $x \xrightarrow{s} a$ en Σ con una 2-flecha



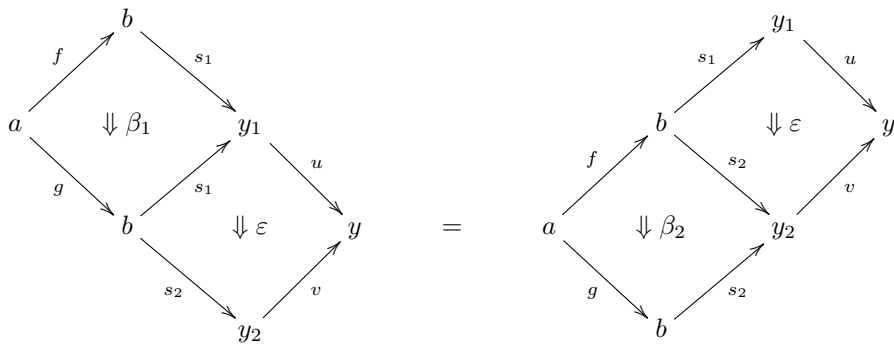
entonces existe $b \xrightarrow{s'} y$ en Σ y una 2-flecha



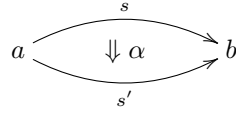
tal que $\beta s = s' \alpha$. Mas aun, si α es un iso, entonces β lo es. Si se tienen dos flechas $s_1, s_2 \in \Sigma$, $b \xrightarrow{s_i} y_i$, cada una con una 2-flecha β_i tal que $\beta_i s = s_i \alpha$, entonces existen u, v tal que $us_1, vs_2 \in \Sigma$ y una 2-flecha iso



y tal que satisfacen la ecuacion LL

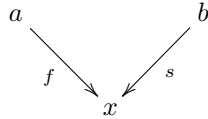


(BF5) Si $a \xrightarrow{s} b$ esta en Σ , y existe un iso α

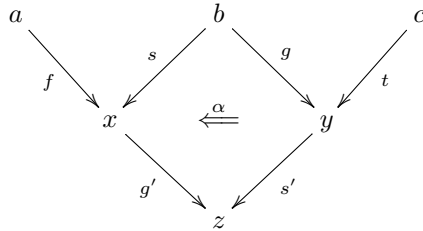


entonces $s' \in \Sigma$.

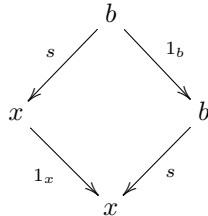
Ahora pasamos a definir $\mathcal{C}[\Sigma^{eq}]$. Los objetos de $\mathcal{C}[\Sigma^{eq}]$ seran los de \mathcal{C} . Una flecha $a \xrightarrow{(f,s)} b$ esta dada por un par de flechas en \mathcal{C}



con $s \in \Sigma$. Para definir la composicion de $a \xrightarrow{(f,s)} b \xrightarrow{(g,t)} c$, se elige un diagrama dado por (BF3),



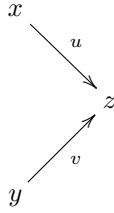
y se define la composicion por $a \xrightarrow{(g'f, s't)} c$. Mas aun, cuando $g = 1_b$ (resp. cuando $s = 1_b$) entonces se toma el diagrama conmutativo



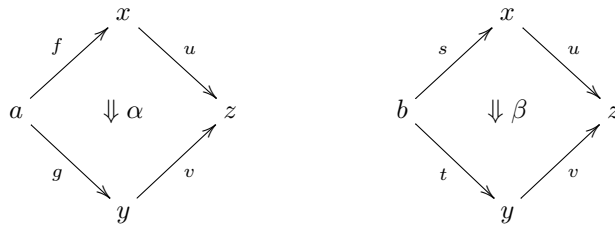
La composicion dependera de estas elecciones, ya que aqui no se identifican fracciones, esta es la razon por la que $\mathcal{C}[\Sigma^{eq}]$ sera una bicategoria.

Una 2-flecha $a \xrightarrow{(f,s)} b$ esta representada por (u, v, α, β) donde u, v son flechas

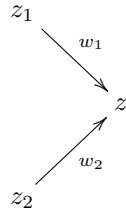




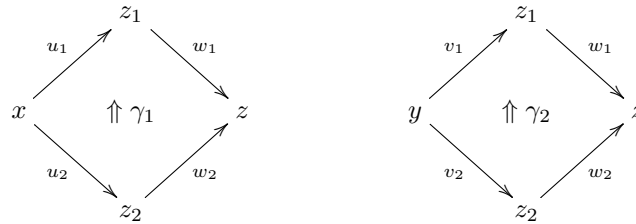
tal que $us, vt \in \Sigma$, α, β son 2-flechas, con β isomorfismo



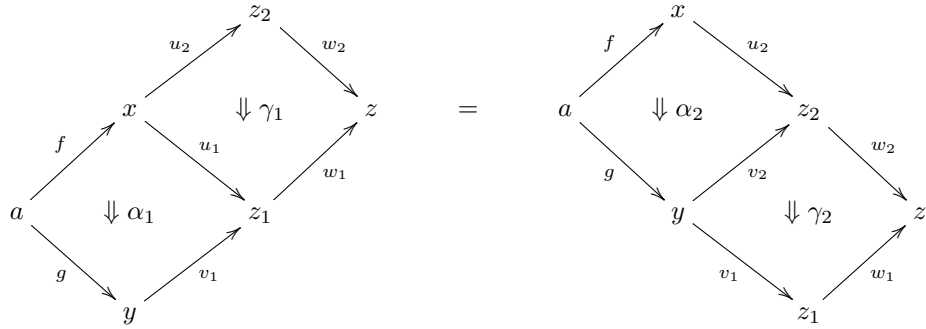
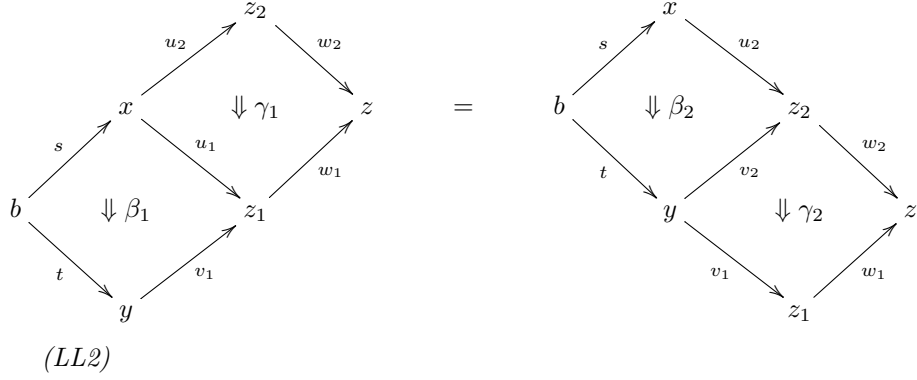
Se identifican $(u_1, v_1, \alpha_1, \beta_1)$ con $(u_2, v_2, \alpha_2, \beta_2)$ si existen flechas



tales que $w_1 u_1 s, w_2 u_2 s \in \Sigma$, y existen isomorfismos



tales que
(LL1)



Luego se deben definir las composiciones verticales y horizontales de 2-flechas, para esto ver [Pro96].

El pseudofunctor $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}[\Sigma^{eq}]$ esta definido en los objetos y flechas como

siempre, y en las 2-flechas, dada $a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$ definimos $h(\alpha) = (1_b, 1_b, \alpha, 1_b)$.

Remark 8.3. Dado un pseudofunctor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ que hace equivalencias a las flechas de Σ , entonces se define $\mathcal{C}[\Sigma^{eq}] \xrightarrow{\widehat{F}} \mathcal{D}$ como F en los objetos, en las flechas dada $a \xrightarrow{(f,s)} b$ se elige una quasi-inversa de Fs en \mathcal{D} , llamemosla u , y se define $\widehat{F}(f, s) = uFf$. Es claro que si \mathcal{D} es una 2-categoría 2-discreta, entonces la definición de \widehat{F} esta univocamente determinada, ya que en este caso si $Fs \in \mathcal{D}$ es una equivalencia, es un isomorfismo ya que no hay 2-flechas salvo las identidades, luego se define $\widehat{F}(f, s) = F(s)^{-1}Ff$. Por lo tanto, se tiene que en este caso h^* es biyectiva y entonces

$$[\mathcal{C}[\Sigma^{eq}], \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\Sigma^{eq}}$$

es un isomorfismo de categorías.

9 Construcción de pseudocolimites 2-filtrantes de categorías

Lemma 9.1. Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ una coop-2-fibración 2-discreta y supongamos que \mathcal{C} es 2-filtrante, entonces las flechas co-cartesianas *satisfacen el bicalculo de fracciones (a izquierda)*.

En efecto, ya sabemos que satisfacen (BF1), (BF2) y (BF5) por las proposiciones 7.22 y 7.8.

Para ver (BF3) si se tiene un diagrama en \mathcal{F}

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ b & & c \end{array}$$

con s co-cartesiana, dado que \mathcal{C} es 2-filtrada entonces podemos conseguir u, v y un isomorfismo β

$$\begin{array}{ccccc} & pa & & & \\ ps \swarrow & & pf \searrow & & \\ pb & & & & pc \\ & u \searrow & & \swarrow v & \\ & & x & & \end{array}$$

β

Podemos levantar u, v con flechas co-cartesianas

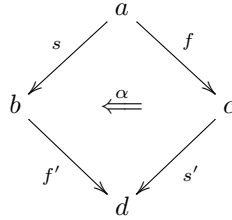
$$\begin{array}{ccc} & a & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ b & & c \\ t \downarrow & & \downarrow s' \\ d' & & d \end{array}$$

y por ser ts co-cartesiana se tiene una flecha $d' \xrightarrow{r} d$, y β se levanta a un isomorfismo α

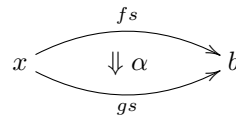
$$\begin{array}{ccc} & x & \\ vp(f) \nearrow & \uparrow 1_x & \\ pa \xrightarrow{up(s)} & x & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & d & \\ s'f \nearrow & \uparrow r & \\ a \xrightarrow{ts} & d' & \end{array}$$

β α

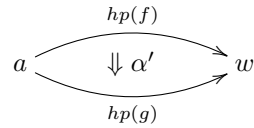
Luego, llamando $f' = rt$ se tiene el diagrama deseado



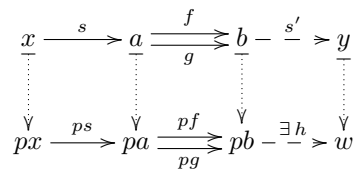
Para ver (BF_4) , si se tienen $x \xrightarrow{s} a \xrightleftharpoons[g]{f} b$ con s co-cartesiana, y una 2-flecha



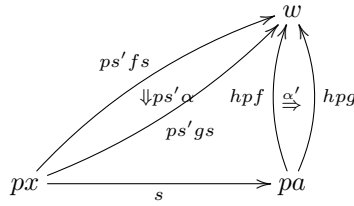
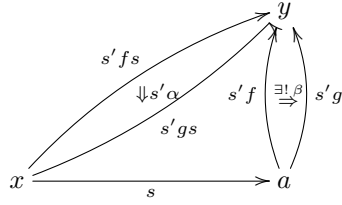
por ser \mathcal{C} 2-filtrada se tiene una flecha $c \xrightarrow{h} w$ con un iso



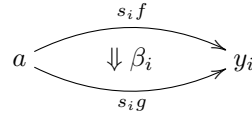
tal que $\alpha'p(s) = hp(\alpha)$. Levantamos h a una flecha co-cartesiana s' ,



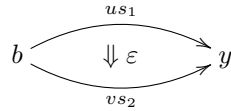
Luego $p(s'\alpha) = hp(\alpha) = \alpha'p(s)$ y entonces podemos levantar α' a una 2-flecha β



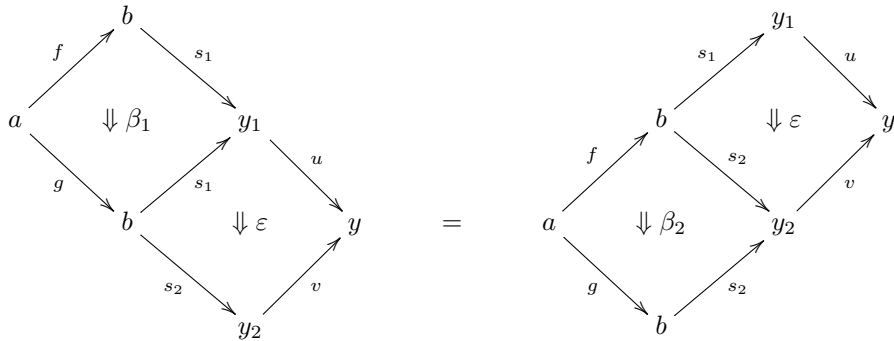
que por lo tanto satisface $\beta s = s' \alpha$. Es claro que si α es un iso, entonces α' lo es pues podemos levantar la inversa de β a una inversa de α' . Por ultimo, debemos ver que si se tienen $s_1, s_2, \beta_1, \beta_2$ con



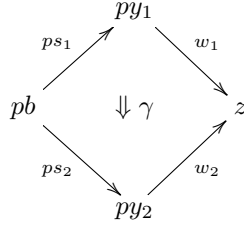
tales que $\beta_i s = s_i \alpha$, entonces existen u, v tal que us_1, vs_2 son co-cartesianas y un isomorfismo ε



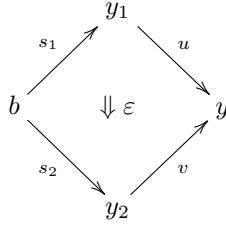
tal que satisface la ecuacion LL



Dado que \mathcal{C} es 2-filtrada, por el lema 5.7 existe una solucion de esta ecuacion en \mathcal{C} , es decir podemos encontrar



que satisface la ecuacion LL en \mathcal{C} . Llamemos σ a la 2-flecha dada por pegar los diagramas, es decir $\sigma = (\gamma pg) \circ (w_1 p \beta_1) = (v p \beta_2) \circ (\gamma p f)$. Aplicando el mismo procedimiento que para probar $(BF3)$, podemos levantar w_1, w_2 a flechas co-cartesianas u, v y levantar γ a un isomorfismo ε ,



Falta ver que este ε satisface la ecuacion LL. En efecto, por la ecuacion LL en \mathcal{C} , se tiene que

$$p((\varepsilon g) \circ (u \beta_1)) = (\gamma p g) \circ (w_1 p \beta_1) = \sigma = (w_2 p \beta_2) \circ (\gamma p f) = p((v \beta_2) \circ (\varepsilon f))$$

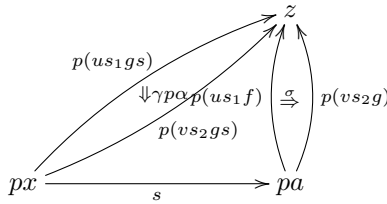
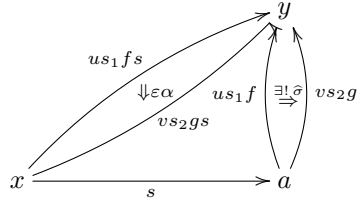
Es decir, estas 2-flechas son levantados de la misma 2-flecha (podriamos terminar la demostracion aqui usando $(FD2)$ pero lo mostramos sin usar esta propiedad). Ademas, observamos que si precomponemos con s la ecuacion LL se satisface, en efecto, hay que ver que

$$(\varepsilon g s) \circ (u \beta_1 s) = (v \beta_2 s) \circ (\varepsilon f s)$$

Pero, $(\varepsilon g s) \circ (u \beta_1 s) = (\varepsilon g s) \circ (u s_1 \alpha)$ y $(v \beta_2 s) \circ (\varepsilon f s) = (v s_2 \alpha) \circ (\varepsilon f s)$, y por la ley de intercambio

$$(\varepsilon g s) \circ (u s_1 \alpha) = \varepsilon \alpha = (v s_2 \alpha) \circ (\varepsilon f s)$$

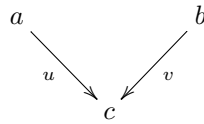
Como s es co-cartesiana, existe un unico levantado de σ ,



por lo tanto son iguales y luego satisfacen la ecuacion LL. Por lo tanto las flechas co-cartesianas satisfacen el bicalculo de fracciones.

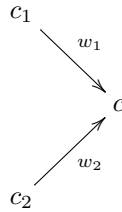
Remark 9.2. Con modificaciones menores se puede ver que dada una coop-2-fibracion $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ con \mathcal{C} 2-filtrante, entonces las flechas co-bicartesianas satisfacen el bicalculo de fracciones (a izquierda).

Theorem 9.3. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un 2-functor, y supongamos que \mathcal{C} es una 2-categoria 2-filtrada, entonces el pseudocolimite de F existe y esta dado por la categoria $\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}])$. Mas aun, describimos esta categoria explicitamente, los *objetos* son pares (x, a) con $x \in Fa$, las *flechas* $(x, a) \xrightarrow{(u, \varepsilon, v)} (y, b)$ estan dada por flechas



y una flecha $Fu(x) \xrightarrow{\varepsilon} Fv(y)$, donde identificamos $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \sim (u_2, \varepsilon_2, v_2)$

si existen $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \xrightarrow{(w_1, w_2, \alpha, \beta)} (u_2, \varepsilon_2, v_2)$ dada por flechas



y 2-flechas isos

$$\begin{array}{ccc}
 & w_1 u_1 & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & c \\
 & w_2 u_2 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & w_1 v_1 & \\
 b & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \beta \\ \curvearrowleft \end{array} & c \\
 & w_2 v_2 &
 \end{array}$$

tal que conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 Fw_1 u_1(x) & \xrightarrow{Fw_1(\varepsilon_1)} & Fw_1 v_1(y) \\
 F\alpha_x \downarrow & & \downarrow F\beta_y \\
 Fw_2 u_2(x) & \xrightarrow{Fw_2(\varepsilon_2)} & Fw_2 v_2(y)
 \end{array}$$

En efecto, ver que $\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}])$ es el pseudocolimite no es difícil, por lo visto anteriormente se tiene un isomorfismo

$$[\int F, d(c)]_{\Sigma^{-1}} \xrightarrow{\lambda^*} PsCon[F, c]$$

Dado que $d(c)$ es una 2-categoría 2-discreta, se tiene que

$$[\int F, d(c)]_{\Sigma^{-1}} = [\int F, d(c)]_{\Sigma^{eq}}$$

Es decir, que un functor invierta las flechas es lo mismo a que las haga equivalencias, ya que en una 2-categoría 2-discreta los conceptos de isomorfismo y equivalencia coinciden. Por el *bicálculo de fracciones* de Pronk tenemos una equivalencia de categorías

$$[\int F[\Sigma^{eq}], d(c)] \xrightarrow{h^*} [\int F, d(c)]_{\Sigma^{eq}}$$

que es un *isomorfismo* por lo observado en 8.3.

Por último, se tiene un isomorfismo por la adjunción

$$[\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}]), c] \xrightarrow{\eta^*} [\int F[\Sigma^{eq}], d(c)]$$

y se obtiene que $\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}])$ es el *pseudocolimite* de F .

Tenemos que ver que la construcción que damos es efectivamente esta. Si tomamos la categoría $\int F$ y le aplicamos el bicálculo de fracciones de Pronk, obtenemos una 2-categoría $\int F[\Sigma^{eq}]$, cuyos *objetos* son pares (x, a) con $x \in Fa$,

una flecha $(x, a) \xrightarrow{(u, \varepsilon, v, \varphi)} (y, b)$ esta dada por flechas

$$\begin{array}{ccc}
 a & & b \\
 \searrow u & & \swarrow v \\
 & c &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Fu(x) & & Fv(y) \\
 \searrow \varepsilon & & \swarrow \varphi \\
 & z &
 \end{array}$$

donde φ es un isomorfismo. Una 2-flecha

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{(f_1, \varepsilon_1, v_1, \varphi_1)} & \\ (x, a) & \Downarrow & (y, b) \\ & \xrightarrow{(f_2, \varepsilon_2, v_2, \varphi_2)} & \end{array}$$

esta representada por flechas

$$\begin{array}{ccc} (c_1, z_1) & & \\ & \searrow^{(w_1, \sigma_1)} & \\ & & (c, z) \\ & \nearrow_{(w_2, \sigma_2)} & \\ (c_2, z_2) & & \end{array}$$

y 2-flechas α, β con β un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} & (c_1, z_1) & \\ (u_1, \varepsilon_1) \nearrow & & \searrow (w_1, \sigma_1) \\ (a, x) & \Downarrow \alpha & (c, z) \\ (u_2, \varepsilon_2) \searrow & & \nearrow (w_2, \sigma_2) \\ & (c_2, z_2) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & (c_1, z_1) & \\ (v_1, \varphi_1) \nearrow & & \searrow (w_1, \sigma_1) \\ (b, y) & \Downarrow \beta & (c, z) \\ (u_2, \varphi_2) \searrow & & \nearrow (w_2, \sigma_2) \\ & (c_2, z_2) & \end{array}$$

cocientadas por la relacion de equivalencia explicitada anteriormente.

Las 2-flechas α, β estan dadas por la descripcion de $\int F$ por 2-flechas en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} & w_1 u_1 & \\ a & \Downarrow \alpha & c \\ & w_2 u_2 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & w_1 v_1 & \\ b & \Downarrow \beta & c \\ & w_2 v_2 & \end{array}$$

con β iso, tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} Fw_1 u_1(x) & \xrightarrow{Fw_1(\varepsilon_1)} & Fw_1(z_1) \xrightarrow{\sigma_1} z \\ F\alpha_x \downarrow & & \nearrow \sigma_2 \\ Fw_2 u_2(x) & \xrightarrow{Fw_2(\varepsilon_2)} & Fw_2(z_2) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Fw_1 v_1(y) & \xrightarrow{Fw_1(\varphi_1)} & Fw_1(z_1) \xrightarrow{\sigma_1} z \\ F\beta_x \downarrow & & \nearrow \sigma_2 \\ Fw_2 v_2(y) & \xrightarrow{Fw_2(\varphi_2)} & Fw_2(z_2) \end{array}$$

y tal que $\sigma_1 Fw_1(\varphi_1)$, $\sigma_2 Fw_2(\varphi_2)$ son isos, ya que tiene que ser una flecha cartesiana.

Observamos primero que podemos asumir que α es un isomorfismo, ya que siendo \mathcal{C} 2-filtrada, por el lema 5.5 existe $c \xrightarrow{h} c'$ tal que $h\alpha$ es un iso, y tenemos que

$$((w_1, \sigma_1), (w_2, \sigma_2), \alpha, \beta) \sim ((hw_1, Fh(\sigma_1)), (hw_2, Fh(\sigma_2)), h\alpha, h\beta)$$

ya que basta tomar las flechas

$$\begin{array}{ccc} (c, z) & & \\ & \searrow^{(h, 1_{Fhz})} & \\ & & (c', Fhz) \\ & \nearrow_{(1_{c'}, 1_{Fhz})} & \\ (c', Fhz) & & \end{array}$$

y como isomorfismos las identidades, ya que los siguientes diagramas conmutan

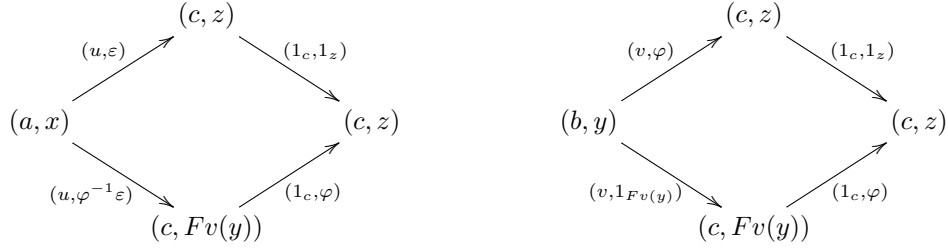
$$\begin{array}{ccc} & (c, z) & \\ (w_1, \sigma_1) \nearrow & & \searrow (h, 1_{Fhz}) \\ (c_1, z_1) & & (c', Fhz) \\ (hw_1, Fh(\sigma_1)) \searrow & & \nearrow (1_{c'}, 1_{Fhz}) \\ & (c', Fhz) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & (c, z) & \\ (w_2, \sigma_2) \nearrow & & \searrow (h, 1_{Fhz}) \\ (c_2, z_2) & & (c', Fhz) \\ (hw_2, Fh(\sigma_2)) \searrow & & \nearrow (1_{c'}, 1_{Fhz}) \\ & (c', Fhz) & \end{array}$$

Es claro que se satisfacen (LL1) y (LL2).

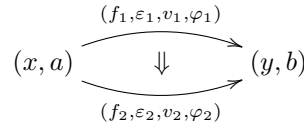
Una vez aplicado π_0 , podemos identificar la flecha $(x, a) \xrightarrow{(u, \varepsilon, v, \varphi)} (y, b)$ con la flecha $(x, a) \xrightarrow{(u, \varphi^{-1}\varepsilon, v)} (y, b)$ dada por las flechas

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & \searrow^u & \swarrow_v \\ & c & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Fu(x) & & Fv(y) \\ & \searrow_{\varphi^{-1}\varepsilon} & \swarrow_{1_{Fv(y)}} \\ & Fv(y) & \end{array}$$

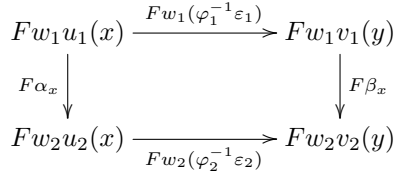
ya que se tienen diagramas conmutativos



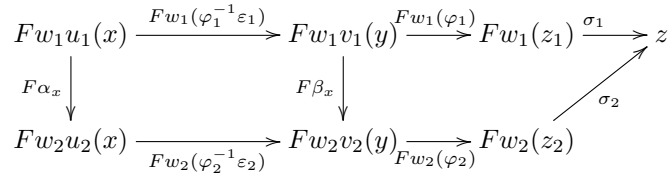
Si tenemos una 2-flecha como arriba



entonces, se tiene un diagrama conmutativo



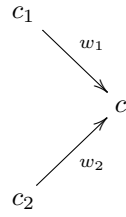
ya que en el diagrama siguiente, el diagrama exterior y el de la izquierda conmutan



Por lo tanto, en $\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}])$ podemos tomar a las flechas dadas por $(x, a) \xrightarrow{(u, \varepsilon, v)} (y, b)$, con



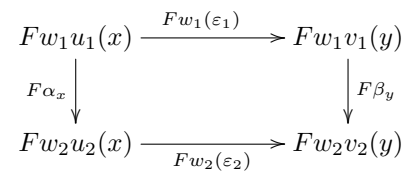
y se identifican $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \sim (u_2, \varepsilon_2, v_2)$ si existen $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \xrightarrow{(w_1, w_2, \alpha, \beta)} (u_2, \varepsilon_2, v_2)$ dada por



y 2-flechas isos



tal que conmuta



como afirmamos anteriormente.

References

- [SGA1] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*. Lecture notes in mathematics, Volume 224, Springer-Verlag, 1971.
- [SGA4-1] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des Schémas, Tome 1 (SGA4)*. Lecture Notes in Mathematics, Volume 269, Springer-Verlag, 1972.
- [SGA4-2] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des Schémas, Tome 2 (SGA4)*. Lecture Notes in Mathematics, Volume 270, Springer-Verlag, 1972.
- [SGA4-3] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des Schémas, Tome 3 (SGA4)*. Lecture Notes in Mathematics, Volume 305, Springer-Verlag, 1972.
- [GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, Band 35, 1967.
- [DS06] E.J. Dubuc, R. Street. *A construction of 2-filtered bicolimits of categories*. Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, Tome 47, Numéro 2, pp. 83–106, 2006.
- [DY11] E.J. Dubuc, S. Yuhjtman. *A construction of 2-cofiltered bilimits of topoi*. Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, Tome 52, Numéro 4, pp. 242–252, 2011.
- [Dub10] E.J. Dubuc. *2-Filteredness and the point of every galois topos*. Applied Categorical Structures, Volume 18, Issue 2, pp. 115-121, 2010.
- [Pro96] D.A. Pronk. *Etendues and stacks as bicategories of fractions*. Compositio Mathematica, Tome 102, Numéro 3, pp. 243-303, 1996.
- [Her99] C. Hermida. *Some properties of Fib as a fibred 2-category*. Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 134, Issue 1, pp. 83-109, 1999.
- [Buc14] M. Buckley. *Fibred 2-categories and bicategories*. Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 218, Issue 6, pp. 1034–1074, 2014.
- [Bak11] I. Bakovic. *Fibrations of bicategories*. Preprint.
- [Bak07] I. Bakovic. *Grothendieck construction for bicategories*. Preprint.
- [Wol70] H.E. Wolff. *V-localizations and V-triples*. Dissertation, University of Illinois, 1970.
- [Wol73] H.E. Wolff. *V-localizations and V-monads*. Journal of Algebra, Volume 24, Issue 3, pp. 405-438, 1973.
- [DPP03] R. Dawson, R. Paré, D. A. Pronk. *Adjoining adjoints*. Advances in Mathematics, Volume 178, Issue 1, pp. 99–140, 2003.

- [Ken92] J.F. Kennison. *The fundamental localic groupoid of a topos*. Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 77, Issue 1, pp. 67-86, 1992.
- [JS93] A. Joyal, R. Street. *Pullbacks equivalent to pseudopullbacks*. Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, Tome 34, Numéro 2, pp. 153–156, 1993.
- [Kel93] G.M. Kelly. *Elementary observations on 2-categorical limits*. Bulletin of the Australian Mathematical Society, Volume 39, pp. 301–317, 1989.
- [KS74] G.M. Kelly, R. Street. *Review of the elements of 2-categories*. Category Seminar: Proceedings Sydney Category Theory Seminar 1972 /1973, Lecture Notes in Mathematics, Volume 420, pp. 75–103, Springer-Verlag, 1974.
- [Gra74] J.W. Gray. *Formal category theory: Adjointness for 2-categories*. Lecture Notes in Mathematics, Volume 391, Springer-Verlag, 1974.
- [Ben67] J. Bénabou. *Introduction to bicategories*. Reports of the Midwest Category Seminar, Springer-Verlag, pp. 1–77, 1967.
- [McL07] C. McLarty. *The rising sea: Grothendieck on simplicity and generality I*. Episodes in the history of recent algebra, American Mathematical Society, pp. 301–326, 2007.
- [Kel82] G.M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*. London Mathematical Society Lecture Note Series 64, Cambridge University Press, 1982.
- [Vis06] A. Vistoli. *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, in B. Fantechi, L. Gottsche, L. Illusie, S. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, *Fundamental Algebraic Geometry: Grothendieck's FGA explained*, Mathematical Surveys and Monographs 123, A.M.S., 2006.
- [CFWM] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1998.
- [HCA1] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra I, Basic category theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 50, Cambridge University Press, 1994.
- [HCA2] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra II, Categories and structure*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 51, Cambridge University Press, 1994.
- [HCA3] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra III, Categories and sheaves*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 52, Cambridge University Press, 1994.