UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Multiplicidades y variedades discriminantales

María Angélica Cueto
macueto@gmail.com

Directora: Dra. Alicia M. Dickenstein

Agosto de 2006

A modo de agradecimiento . . .

A mi familia, por quererme, y haberme mostrado que, con esfuerzo, todo se puede. Por su afecto, contensión, y amor incondicional. Por sentirme respaldada, y protegida, pese a mis enojos.

A Jonathan, Martín y Miguel, por tantas hojitas de lemas, teos y props. Por tantas charlas de intervalo, por tantos llamados de último momento, y por tantas sonrisas compartidas. Y por dejarme crecer junto a ustedes.

A Vale, Gaby y Carito, por recibirme tantas veces en sus casas, por largas charlas nocturnas y por comprender todas mis manías. ¡Ésas son amigas!

A Enrique, la persona más transparente y sincera que conozco. Por tanto apoyo en momentos difíciles, por tanto amor desinteresado. Por quererme como soy. Por dejarme caminar a su lado, y compartir su vida, y su dulce y paciente compañía.

A Alicia, quien me inició en esta fascinante aventura que es la investigación científica. Por respetarme, por guiarme, por su paciencia infinita, su gran capacidad de trabajo, y la calidez humana que la caracteriza. Un modelo a seguir.

A Pablo Solernó, Gabriel Minian y Juan Sabia, por sus maravillosas clases, sus charlas y sus consejos desinteresados. Por enseñar con tanto entusiasmo y simpleza las cosas. Por su exigencia, que siempre ayuda a entender mejor todo. Y por la generosidad con que comparten su conocimiento.

A Laurent Busé, Bernard Mourrain, y todo el equipo Galaad, por facilitar mi trabajo en todo cuanto pudieron, y por tantas discusiones enriquecedoras durante mi visita.

A Bernard Teissier y Lê Dũng Tráng, que con dos preguntas destrabaron gran parte de este trabajo. Por compartir desinteresadamente su conocimiento y por su amabilidad infinita.

A Gabriela Jerónimo, por sus eternos ¿por qué? en los márgenes, por su dedicación constante y el entusiasmo con que vive a diario. ¡Gracias por tanta paciencia!

A Fernando Cukierman y Gonzalo Comas, por confiar en mí, por escucharme, por ser grandes jefes. Y por tantas charlas después de clase. ¡Ojalá se repitan!

A Agustín Bompadre, mi primer maestro: aquel joven que, entre problemas de triángulos, bolitas, y congruencias, no se cansó al enseñarme las primeras armas. Por aguantar mis preguntas, mi voz aniñada y agudísima. Y por confiar en mí.

A Carlos Valencia, Alejandra López Suárez, Arturo Giles Flores, Ezra Miller y David Benson, por haberme aconsejado desinteresadamente, y por tantas caminatas juntos a Trieste.

A la nueva generación "triestina": Haydée, Rocío, Lily, Evelia, Manuel, Luca y Patrick. Por tantas sobremesas, consejos, sonrisas y discusiones sobre manteles. Gracias por brindarme vuestra amistad y cariño. Después de todo, qué es nuestra vida sino "pura contemplación"...

A todo Euclides: a Malena, Agustín, Gaby, Pablo H., Eduardo, Santiago, Daniel, Florencia, Flavia, Matilde, Pablo B., GuMu, Dora, Gustavo, Romina, Juan Pablo, Julián, Silvia, Fernando y Mónica. Por tantas meriendas, tantas discusiones, y lo más importante: su amistad.

A Maxi, Seba, Gille, Andrés, Leo G., Leo I. y Ramiro, mis amigos de "El Colegio", quienes, pese al paso del tiempo y a nuestros distintos intereses, siguen con ganas de aprender y paciencia para escucharme.

A todo el Labo Delta: Patricia, el Colo, Fernando, Damián, Ezequiel, Gustavo y Santiago, por sus consejos, sus anécdotas, su risa, y por compartir tantas tardes de trabajo. A Silvia, por escucharme desde el exilio. Y a Laura P., por ayudarme desde estas latitudes.

A la música, mi otra gran pasión. Y a todos los que me ayudan a disfrutarla: por

tantos escenarios compartidos, y tanto alegrar las tardes de sábado con cada ensayo. A los jóvenes "de las Luces" y al Maestro:

"Sù cantiamo,
Sù godiamo
Né bei dì di gioventù..."

Y a tantos otros que me ayudaron a ser lo que soy. ¡Muchas gracias!

Resumen

En el presente trabajo estudiamos el cálculo de discriminantes inhomogéneos asociados a matrices enteras B, como un problema de implicitación con puntos base, a partir de la parametrización racional ψ_B de Horn-Kapranov. Demostramos que ψ_B es propia y reducimos el análisis al caso en que el máximo común divisor de los menores maximales de B es 1. Asimismo, caracterizamos los puntos base en términos de los coeficientes de B y presentamos numerosos ejemplos que evidencian la dificultad de calcular las multiplicidades de estos puntos.

Abstract

In the present thesis, we study the computation of inhomogeneous discriminants related to integer matrices B as an implicitization problem with base points, arising from a Horn-Kapranov type rational parametrization ψ_B. We prove that ψ_B is proper and therefore we reduce our analysis to the case in which the greatest common divisor of the maximal minors of B is equal to 1. We also characterize base points in terms of the matrix B and we present several examples that show numerous difficulties for computing the multiplicities of these points.

Índice general

1 Introducción **4**

2 Definiciones y conceptos básicos **7**
2.1 Parametrizaciones asociadas a B-matrices 7
2.1.1 El contexto y la formulación del problema 7
2.1.2 Cálculo de D 10
2.1.3 Descripción y finitud de los puntos base 10
2.2 A-discriminantes 15
2.2.1 Definición de los A-discriminantes 15
2.2.2 Deshomogeneización de variedades A-discriminantales y parametrizaciones asociadas a matrices B 16

3 Multiplicidades **19**
3.1 Definición y propiedades básicas 19
3.2 Reducción al caso de intersección completa local 28
3.3 Reducción al caso de ideales monomiales 36

4 Birracionalidad de ψ_C **52**
4.1 Consideraciones generales 52
4.2 Un ejemplo motivador 53
4.3 Teorema de Kapranov precisado 56
4.4 Relación entre ψ_C y ψ_B 68

5 Trabajo Futuro **83**
5.1 Naturaleza de los puntos base 83
5.2 Formulación del contexto algebraico para la definición de Hilbert-Samuel . . 83
5.3 Cálculo de multiplicidades y cotas 84
5.4 Cálculo de inversas para las parametrizaciones ψ_B 84
5.5 Polítopo de Newton de Δ_B 85
5.6 Puntos singulares de las parametrizaciones ψ_B 85

Índice de figuras

3.1 Región delimitada por el ideal I_1 37
3.2 Región delimitada por el ideal I_2 37

4.1 En la región sombreada existe una subsucesión (infinita) de $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que tendrá una sub-subsucesión convergente. 77

Lista de Algoritmos

1 Cálculo de la mult. de Hilbert-Samuel para el caso I_P monomial y $m = 3$. . 38
2 Cálculo de Δ_C a partir de Δ_B 82

Capítulo 1

Introducción

Una superficie S en el espacio tridimensional está parametrizada racionalmente si está definida por la clausura de la imagen de una parametrización $\psi = (a/d, b/d, c/d)$, con a, b, c, d polinomios bivariados. La mayoría de los modelos geométricos en diseño asistido por computadora (CAD), incluyendo autos, aviones y dibujos animados, usa estas superficies paramétricas. El problema de implicitación consiste en encontrar, a partir de ψ, la ecuación f que define a S, es decir un polinomio f tal que $S = (f = 0)$. Este problema surge naturalmente en varios contextos, por ejemplo para encontrar los puntos de intersección de dos superficies paramétricas o para crear nuevos modelos geométricos "recortando" modelos existentes ([23]). En general, los métodos para encontrar tales ecuaciones implícitas usando resultantes se complican enormemente en presencia de puntos base, es decir puntos del plano en los que los 4 polinomios a, b, c y d se anulan ([2],[3], [5]).

Dada una configuración A de n puntos con coordenadas enteras en $d-1$ variables, denotemos por F_A al polinomio genérico en $d-1$ variables con exponentes en A. Bajo ciertas condiciones, Gelfand, Kapranov y Zelevinsky [20] mostraron que existe un polinomio irreducible Δ_A en los coeficientes de F_A, llamado el A-discriminante, que se anula para cada elección de coeficientes para los cuales la hipersuperficie $(F_A = 0)$ del toro $(\mathbb{C}^*)^{d-1}$ es singular. La teoría de discriminantes está íntimamente relacionada con nuestros esquemas de visión, ya que lo que vemos de un objeto es su borde, es decir, los puntos para los cuales el rayo de luz desde nuestro ojo es tangente al objeto ([6]).

Dada una configuración genérica de $n+1$ puntos en $\mathbb{Z}^n$, los mismos resultan afinmente independientes. De este modo, si tomamos dichos puntos $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ y armamos la matriz

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times(n+1)} ,$$

la misma tendrá genéricamente determinante no nulo. De esta forma, $\ker(A')$ tendrá dimensión 0. Es decir, en este caso, la configuración A tendrá codimensión 0. En general, si tenemos A genérica de cardinal n en $\mathbb{Z}^{d-1}$, la codimensión será $n-d$.

En [16] se estudian discriminantes en codimensión 2, es decir el caso $n = d-1+3 = d+2$, y se desarrollan distintas técnicas para calcular el grado de la hipersuperficie discriminantal $(\Delta_A = 0)$.

Por un resultado de Kapranov ([24]), que se remonta a un trabajo de Horn de 1886, es posible explicitar una parametrización racional de apropiadas deshomogeneizaciones de $(\Delta_A = 0)$ de la forma:

$$y_j = \prod_i (t * b_{i1} + s * b_{i2} + b_{i3})^{b_{ij}} \quad j = 1, 2, 3 ,$$

con $b_{ij} \in \mathbb{Z}$, es decir que el cálculo de Δ_A puede reducirse a un problema de implicitación con puntos base (se deben eliminar las variables s, t). En el caso de codimensión 2, los

puntos base son de codimensión 1 y por lo tanto, son sencillos de eliminar, pero en el caso de codimensión 3, es decir $n = d + 3$, se han desarrollado ejemplos en [4] donde se demuestra que naturalmente aparecen puntos base de codimensión 2 que no son localmente intersecciones completas. Todos los resultados conocidos hasta el presente no permiten predecir el grado de la ecuación implícita en estos casos ni proveen técnicas directas para encontrarla como una resultante residual.

En particular, un punto importante a determinar es la multiplicidad de estos puntos base ya que no coincide con el grado local. Este grado se lee en el coeficiente de mayor grado del polinomio de Hilbert del ideal local. Ya por 1940 los geómetras algebraicos comprendieron que esta noción de grado no permitía definir una buena teoría de la intersección. Fue Jean Pierre Serre ([32]) quien resolvió el problema desde un punto de vista teórico: la multiplicidad buscada se lee en el término de mayor grado del polinomio de Hilbert-Samuel y es en cierto modo la multiplicidad anterior calculada sobre el blow-up a lo largo del ideal de definición, pero es mucho mas difícil de obtener en términos computacionales ([8]).

En el presente trabajo, se intenta dar respuesta a algunas de estas cuestiones. En efecto, dada una matriz entera B, de tamaño $n \times m$, $n \geq m$ con suma de columnas igual a cero, si consideramos las formas lineales generadas a partir de las filas de dicha matriz y la parametrización correspondiente ψ_B (ver Sección §2.1.1), el Teorema 2.1.2 nos provee de una fórmula para el cálculo exacto del grado del polinomio que define la hipersuperficie $S = \overline{Im(\psi_B)}$. Gracias a una extensión de un Teorema de Kapranov (Teoremas 1.3 y 2.1 de [24]), hemos probado que el grado de ψ_B es 1. Además, hemos caracterizado la magnitud D en términos de los coeficientes de la matriz B. De ahí nuestro interés en estudiar las multiplicidades de los puntos base.

En la primera parte del Capítulo 2, se caracterizan los puntos base de la parametrización en términos de combinatoria entre 3-uplas de filas. Más aún, este cálculo se generaliza a m-uplas, para cualquier $m \geq 3$. Asimismo, un punto particular a desarrollar fue el cardinal del conjunto de puntos bases, dividido en 2 tipos según su origen. En el caso de codimensión 3, el número de puntos base de tipo 2 es finito, pero en el caso general esto no es cierto. En la segunda parte del mismo capítulo, se describen generalidades sobre la teoría de A-discriminantes, para resaltar la importancia del problema a estudiar, y su concepción más algebraica.

En el Capítulo 3 se estudian las generalidades sobre multiplicidades algebraicas. Se detallan estas magnitudes en el contexto particular de las parametrizaciones ψ_B. Se han encontrado ciertas dificultades inherentes al problema que, como es sabido, resulta muy complejo. Debido a la naturaleza geométrica y algebraica de esas magnitudes, se han estudiado diversos textos ([1], [26]) donde se desarrollan métodos de cálculo. En relación con esto, presentamos algoritmos para dos casos particulares: el de intersección completa local (Sección §3.2) y el de ideales monomiales (Sección §3.3). Se han calculado numerosos ejemplos, donde se ven claramente los inconvenientes existentes para aplicar los diferentes algoritmos. Más aún se detallan algunos, donde se muestra el fracaso de los mismos para el caso no monomial (Ejemplo 3.3.16). En particular, se presenta un ejemplo que evidencia que no alcanza con resolver el caso monomial ([14]), ya que no existen cambios de coordenadas que reduzcan el cálculo a este caso. Todo esto vuelve interesante un estudio general. Esperamos poder avanzar con esta línea de trabajo.

Por último, se describen algunas cotas que relacionan la multiplicidad de un ideal con la de su inicial, respecto de un orden monomial. En relación con esto, hemos encontrado un ejemplo no monomial para $\mathcal{B}$ (el álgebra inicial $in_{\prec}(R[It])$ del Álgebra de Rees $R[It]$ con respecto al orden entre monomios extendido en $R[t]$) donde $\mathcal{B}$ es noetheriana, una propiedad muy poco frecuente (Observación 3.3.25).

En el Capítulo 4, se analiza en profundidad el artículo [24], donde se precisa el enunciado del teorema central del mismo. El resultado, sin hipótesis sobre el máximo común

divisor de los menores maximales de la matriz B también es válido (Teorema 4.3.4). Como consecuencia de ello, observamos que $\deg \psi_B = 1$ (Teorema 4.3.11), lo que elimina una de las indeterminadas de la Fórmula de Grado dada en el Teorema 2.1.2.

A partir de la obtención de una inversa para ψ_B en términos de la ecuación Δ_B y que nos da un punto particular en $\mathbb{C}^m$ y no sólo en su proyección a $\mathbb{P}^{m-1}$ (Observación 4.3.6), surge un método para estudiar Δ_B en términos de una inversa para ψ_B dada de antemano, sin emplear la función logarítmica de Gauss. Se construye un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y se analizan algunos ejemplos.

Como última aplicación, en la Sección §4.4 se detalla la relación existente entre dos parametrizaciones ψ_C y ψ_B, en el caso $C = B \bullet \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ inversible sobre $\mathbb{Q}$. En particular, existe un morfismo monomial p y un isomorfismo lineal Λ tal que $\psi_C = p \circ \psi_B \circ \Lambda$ en un abierto denso de $\mathbb{P}^{m-1}$. Dadas las ecuaciones Δ_C y Δ_B, irreducibles, $\Delta_C \circ p$ se factoriza como polinomio de Laurent, en términos de un monomio y un producto de $\Delta_B(\varepsilon \cdot y)$, donde ε recorre la preimagen por p del punto $(1, \ldots, 1) \in (\mathbb{C}^*)^m$ y $\cdot$ denota la acción del toro (Teorema 4.4.14). Estos resultados permiten calcular Δ_C en términos de Δ_B, que es más sencillo de obtener en la práctica. Además muestran que, salvo una transformación afín, el polítopo de Newton de ambos discriminantes es el mismo. Presentamos diversos ejemplos para ilustrar los enunciados.

Por último, se incluye un capítulo de trabajo futuro donde se desarrollan algunos caminos posibles para continuar con el estudio de estas parametrizaciones y las multiplicidades de los puntos base. Esperamos avanzar en el cálculo exacto de estas magnitudes. Esto permitiría ulteriormente calcular el grado de estas hipersuperficies y sus ecuaciones implícitas, los discriminantes ralos.

Capítulo 2

Definiciones y conceptos básicos

En el presente capítulo, presentamos el problema estudiado. En la primera parte, describimos las magnitudes a calcular y en la segunda, damos un contexto más abstracto para el mismo. Explicamos el origen del problema y su relación con A-discriminantes ralos y A-resultantes en §2.2.

2.1 Parametrizaciones asociadas a B-matrices

Comenzamos con la definición de parametrizaciones racionales asociadas a B-matrices.

2.1.1 El contexto y la formulación del problema

Dada una matriz $B \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ $(n \geq m)$, cuyas columnas suman cero y sin filas nulas, consideremos las siguientes formas lineales asociadas a cada una de las filas de B:

$$l_k(u_1,\ldots,u_m) := < B_k\,;\,(u_1,\ldots,u_m) > \qquad \text{con } k=1,\ldots,n\,,$$

donde $B_k = (b_{k1},\ldots,b_{km})$ indica la k-ésima fila de B. Las columnas de B se notarán $v^{(1)},\ldots,v^{(m)}$.

Podemos asociar a esta matriz B una variedad algebraica S en $\mathbb{C}^n$ definida, como la clausura de la imagen de la parametrización racional de tipo Horn

$$\psi'_B : \mathbb{C}^m \smallsetminus \mathcal{Z}' \to \mathbb{C}^m \qquad (u_1,\ldots,u_m) \mapsto (y_1,\ldots,y_m)\,,$$

donde

$$y_k = \prod_{i=1}^{n} l_i(u_1,\ldots,u_m)^{b_{i,k}} = \frac{g_{k,1}}{g_{k,0}} \qquad \forall\, k=1,\ldots,m. \tag{2.1}$$

Concretamente, $g_{k,0}$ contiene las formas lineales con exponentes negativos (i.e. $b_{i,k}<0$) y $g_{k,1}$ las que tienen exponentes positivos (i.e. $b_{i,k}>0$). En concreto:

$$\begin{aligned} g_{k,1} &= \prod_{i=1}^{n} l_i(u_1,\ldots,u_m)^{max\{0,b_{i,k}\}}\,; \\ g_{k,0} &= \prod_{i=1}^{n} l_i(u_1,\ldots,u_m)^{-min\{0,b_{i,k}\}}. \end{aligned}$$

Con esta notación, $\mathcal{Z}' = \cup_{k=1}^{m}\,(g_{k,0}=0)$ es el conjunto de ceros de los denominadores. Cabe señalar que las coordenadas de la parametrización están dadas como el producto de formas lineales, cuyos exponentes suman cero (ya que $\sum_{i=1}^{n} b_{i,k}=0$, para todo i), esto es: $\deg(g_{k,1}) = \deg(g_{k,0})$ para todo k. En consecuencia, podemos pensar a la función ψ'_B con

dominio en un subconjunto del espacio $(m-1)$-proyectivo: $\left(\mathbb{C}^m \setminus \mathcal{Z}'\right)/\sim \subseteq \mathbb{P}^{m-1}$. Aquí $\sim$ denota la relación de equivalencia que define a dicho plano[1]. Para facilitar el trabajo, en vez de tener m denominadores distintos, vamos a tomar el mínimo común múltiplo de los denominadores de los y_k, y lo llamaremos f_0. En este caso, cada coordenada resultará de la forma

$$y_k = \frac{f_k}{f_0}, \quad k = 1, \dots m, \tag{2.2}$$

donde

$$f_0 = \prod_{i=1}^{n} l_i^{-min\{0,\, b_{i,j} \,:\, j=1,\dots,m\}} \quad , \tag{2.3}$$

$$f_k = g_{k,1} \cdot \frac{f_0}{g_{k,0}} \qquad \forall\, k = 1, \dots, m\ . \tag{2.4}$$

Notar que $g_{k,0}$ divide a f_0 por construcción.

Nuestro objetivo es definir S implícitamente, es decir, encontrar $f \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$ tal que $S = (f = 0)$. La "maquinaria teórica" general para hacer esto está dada por las bases de Gröbner. Consideremos los polinomios

$$F_k := y_k \cdot g_{k,0}{}_{(u_1,\dots,u_m)} - g_{k,1}{}_{(u_1,\dots,u_m)} = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, m.$$

Para calcular las ecuaciones implícitas de S, el camino naïf consiste en obtener una base de Gröbner del ideal $J := \langle F_1, \dots, F_m \rangle$ con respecto a algún orden monomial $\prec$ que elimine las variables u_1 a u_m. Pero esto no es suficiente. Resulta vital evitar el conjunto de ceros de cada $g_{k,0}$. En consecuencia, es forzoso introducir nuevas ecuaciones que indiquen la propiedad "inversible" de los $g_{k,0}$: $Q_k := w_k \cdot g_{k,0} - 1 = 0$. Por ende, las ecuaciones implícitas para S están dadas por los polinomios que sólo dependen de las variables y_1 a y_m pertenecientes a:

$$gbasis([F_1, \dots, F_m, Q_1, \dots, Q_m], plex(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_m, y_1, \dots, y_m))\ .$$

Si utilizáramos SINGULAR ([22]) para efectuar nuestro cálculos, las instrucciones a ejecutar serían:

```
>ring r = 0,(u₁,...,uₘ,w₁,...,wₘ,y₁,...,yₘ), dp;
>ideal I = F₁,...,Fₘ,Q₁,...,Qₘ;
>ideal f = eliminate(I, u₁*...*uₘ*w₁*...*wₘ);
>f;
```

A su vez, podríamos agregar una única variable w y un solo polinomio $Q := w \cdot G - 1$, donde $G := red(g_{1,0} \dots g_{m,0})$ es el reducido del producto de dichos polinomios, y mirar a los polinomios en las variables $y_1, \dots, y_m$ pertenecientes a:

$$gbasis([F_1, \dots, F_m, Q], plex(u_1, \dots, u_m, w, y_1, \dots, y_m))\ .$$

O, con SINGULAR,

```
>ring r = 0,(u₁,...,uₘ,w,y₁,...,yₘ), dp;
>ideal I = F₁,...,Fₘ,Q;
>ideal f = eliminate(I, u₁*...*uₘ*w);
>f;
```

Sin embargo, por su alta complejidad, este camino no es demasiado práctico desde el punto de vista computacional.

En este contexto, recordemos la definición de puntos base.

[1] i.e. $x \sim \lambda \cdot x$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$

Definición 2.1.1 *$P \in \mathbb{P}^{m-1}$ es un* punto base *de la parametrización (2.2) si es un cero común de todos los f_k. Notaremos al conjunto de los puntos base como $\mathcal{Z}$. Se considerará inmerso en el espacio proyectivo.*

Podemos distinguir dos tipos de puntos base. Los puntos base de tipo 1 *son aquellos que pueden eliminarse fácilmente: son los ceros del m.c.d. de los f_k. Los del* tipo 2*, en cambio, son aquellos que permanecen luego de eliminar los factores comunes de todos los f_j.*

En consecuencia, tenemos $\mathcal{Z} = (f_0 = \ldots = f_m = 0) \subset (f_0 = 0)$, lo que nos permite definir

$$\psi_B : \mathbb{P}^{m-1} \setminus (f_0 = 0) \to \mathbb{C}^m \qquad (u_1 : \ldots : u_m) \mapsto (\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_m}{f_0}) \; .$$

Si restringimos aún más el dominio,

$$\psi_B : \mathbb{P}^{m-1} \setminus \bigcup_{i=0}^{m} (f_i = 0) \to (\mathbb{C}^*)^m \qquad (u_1 : \ldots : u_m) \mapsto (\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_m}{f_0}) \; .$$

De hecho, como todos los f_k tienen el mismo grado D, podemos componer con el monomorfismo $(y_1, \ldots, y_m) \to (1 : y_1 : \cdots : y_m)$ de $\mathbb{C}^m$ a $\mathbb{P}^m$ y pensar a ψ_B como un morfismo racional de $\mathbb{P}^{m-1}$ a $\mathbb{P}^m$, definido salvo una unión finita de hiperplanos. En efecto, $\psi_B(u_1 : \ldots : u_m) = (f_0(u), \ldots, f_m(u)) \in (\mathbb{C}^*)^{m+1}$.

En general, pensando en esta proyección, la parametrización estará definida fuera del "base point locus":

$$\psi_B : \mathbb{P}^{m-1} \setminus \mathcal{Z} \longrightarrow (y_0 \neq 0) \subset \mathbb{P}^m \qquad (u_1 : \ldots : u_m) \mapsto (f_0 : f_1 : \ldots : f_m) \; , \tag{2.5}$$

ya que coincide con la formulación original en el abierto $(f_0 \neq 0)$ del dominio y $\mathbb{C}^m \simeq (y_0 \neq 0) \subset \mathbb{P}^m$.

Esto nos induce a introducir la notación sencilla

$$\psi_B : \mathbb{P}^{m-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^m$$

para indicar una función racional entre planos proyectivos definida en un abierto denso del dominio.

Para facilitar los cálculos, concentraremos nuestra atención en el caso $m = 3$, i.e. cuando la clausura de la imagen de ψ_B es genéricamente una superficie en el espacio tridimensional. En este caso, notaremos en forma más breve a nuestros polinomios f_i:

$$a := f_1 \quad ; \quad b := f_2 \quad ; \quad c := f_3 \quad ; \quad d := f_0 \; ,$$

y nuestras variables serán u, s y t en lugar de u_1, u_2 y u_3. Cada proposición serán enunciada lo más general posible, pero tendremos en mente siempre el caso $m = 3$. En este caso, podemos asumir siempre que hay un número finito de puntos base, ya que podemos eliminar cualquier factor común a $f_0, \ldots, f_m$ y asumir la ausencia de puntos base de tipo 1. El número de puntos base de tipo 2 en $\mathbb{P}^2$ es siempre finito (ver Proposición 2.1.12).

Denotemos también con $S = \overline{Im(\psi_B)} \subset \mathbb{P}^3$ y asumamos $\dim S = 2$. Bajo estas condiciones, tenemos la siguiente Fórmula de Grados (cfr. [8] o [7, Appendix]):

Teorema 2.1.2 *Sean $\psi_B : \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{Z} \to \mathbb{P}^3$ la parametrización descrita en (2.5), y D el grado de los f_k. Entonces,*

$$D^2 = \deg(S) \, \deg(\psi_B) + \sum_{P \in \mathcal{Z}} e_P \; ;$$

donde e_P es la multiplicidad de Hilbert-Samuel de P.

En las próximas secciones mostraremos el estado actual de conocimiento sobre $\mathcal{Z}$, D, $\dim(S)$ y, en los próximos capítulos, sobre las multiplicidades e_P y el grado $\deg(\psi_B)$.

Observación 2.1.3 *Para valores de m mayores que 3, y en caso que todos los puntos base sean aislados (en particular, si son finitos) vale una fórmula similar a la mencionada en el Teorema 2.1.2: sólo hay que sustituir D^2 por D^{m-1} (ver [19]).*

Problema 2.1.4 *Nuestro principal interés consiste en calcular (o al menos acotar)* $\deg(S)$*, y la ecuación que describe la variedad.*

A partir del Teorema 2.1.2 tenemos un modo de calcular el grado de una ecuación implícita de S. En el Capítulo 4 se probará que la parametrización es genéricamente 1-1 (para cualquier g), y sabremos por la Sección §2.1.2 cómo calcular D. Por lo tanto, si tuviéramos una forma sencilla de obtener las multiplicidades, el problema quedaría resuelto. De ahí nuestro interés en estudiar estos objetos.

2.1.2 Cálculo de D

En esta sección calcularemos D, que representa el grado de los polinomios $f_0, \ldots, f_m$. Para ello, miraremos a D como el grado de f_0. Expresaremos dicha magnitud en función de los coeficientes de la matriz B.

Supongamos que la matriz B no admite pares $\{B_i; B_j\}$ de filas l.d. donde $B_j = \lambda B_i$, con $\lambda < 0$ y $b_{j,k}\, b_{i,k} \neq 0$ para todo $k = 1, \ldots, m$. En tal caso, no existen puntos base de tipo 1. A partir de la fórmula (2.3) es fácil ver que el exponente en f_0 de cada forma lineal l_i es $-\min\{0, b_{i,j} \,:\, j = 1, \ldots, m\}$. Esto implica:

$$D = \sum_{i=1}^{n} -\min\{0, b_{i,j} \,:\, j = 1, \ldots, m\} = -\sum_{i=1}^{n} \min\{0, b_{i,j} \,:\, j = 1, \ldots, m\} \,. \tag{2.6}$$

Si tenemos puntos base de tipo 1, en primer lugar, procedemos a cambiar la matriz B, reemplazando cada par $\{B_j, B_k\}$ $(j < k)$ de filas l.d. por una única j-ésima fila con valor $B_j{}' := B_j + B_k$, si éste es no nulo. En caso contrario, extraemos ambas filas de la matriz. Esto eliminará las formas lineales comunes entre cada par $\{g_{k,1}\,;\, g_{k,0}\}$, y, por ende, los puntos base de tipo 1. A continuación, reconstruimos las f_j y calculamos D como se expresa en (2.6).

2.1.3 Descripción y finitud de los puntos base

En los siguientes enunciados caracterizaremos los puntos base $\mathcal{Z}$ de ψ_B. Supondremos un número finito de los de tipo 2, salvo que se indique lo contrario.

Resulta trivial ver que $\mathcal{Z}$ es la unión de los ceros comunes a subconjuntos de formas lineales asociadas a ciertas filas de la matriz B: aquellas que anulan a todos los f_k. Notemos, además, que una forma lineal l_j se anula en *todo* cero común de otras formas lineales $l_{i_1}, \ldots, l_{i_s}$ *si y sólo si* $l_j \in \langle l_{i_1}, \ldots, l_{i_s} \rangle$.

Sea

$$\begin{aligned} \Gamma := \{\gamma = \{i_1, \ldots, i_{m-1}\} \text{ con } 1 \leq i_1 < \ldots < i_{m-1} \leq n \text{ tal que} \\ l_{i_1} = \ldots = l_{i_{m-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_k = 0 \quad \forall\, k = 0, \ldots, m \\ \text{y } \{l_{i_1}, \ldots, l_{i_{m-1}}\} \text{ provienen de filas l.i. de } B\} \,, \end{aligned}$$

y, para cada $\gamma \in \Gamma$,

$$P_\gamma := \{P \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})^{m-1} : l_j(P) = 0 \text{ para todo } j \in \gamma\} \,,$$

i.e. los ceros comunes de todos los l_j, con $j \in \gamma$.

Observación 2.1.5 *Notemos que en caso de tener finitos puntos base de tipo 2, cada punto $P = (p_1 : \ldots : p_m)$ puede escribirse con $p_i \in \mathbb{Q}$ para todo i, ya que son solución de un sistema lineal homogéneo de $m-1$ ecuaciones con coeficientes enteros. En consecuencia, puede calcularse el valor exacto de cada uno.*

Proposición 2.1.6 *Si los puntos base en $\mathbb{P}^{m-1}$ (de tipo 2) son finitos, entonces*

$$\mathcal{Z} = \{P_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\} \ .$$

Demostración. Lo haremos por doble inclusión. Es elemental comprobar que cada $P_\gamma \in \mathcal{Z}$, por definición de punto base. Para comprobar la otra inclusión, el único detalle a tener en cuenta es el siguiente. Todo punto base es cero de algunas formas lineales, que anulan a todos los f_k. Ahora bien, sólo hay que justificar que debe ser cero común de exactamente $m-1$ formas lineales l.i.. En efecto, si $V(l_{i_1}, \ldots, l_{i_s}) \subset V(f_0, \ldots, f_k) = \mathcal{Z}$, y $s < m-1$, entonces, por argumentos de dimensión, $\mathcal{Z}$ contendrá un subespacio de dimensión $(m-s) \geq 2$ en $\mathbb{C}^m$, cuya imagen en $\mathbb{P}^{m-1}$ tendrá dimensión mayor o igual a 1. En consecuencia, contendrá infinitos puntos base proyectivos, lo cual contradice nuestra suposición original de finitud. □

Observación 2.1.7 *Es elemental ver que en caso de admitir infinitos puntos base, podemos describir a $\mathcal{Z}$ como el conjunto formado por los P_γ, con $\gamma \in \Gamma$, pero donde Γ admite familias de índices de cualquier longitud, no sólo $m-1$. Es decir:*

$$\begin{aligned}\Gamma' = \{\gamma \in \mathcal{P}(\{1, \ldots, m\}) \ : \ &\gamma \text{ indexa filas l.i. de } B \wedge \\ &\wedge \left[l_i(p) = 0 \ \forall\, i \in \gamma \ \Rightarrow f_k(p) = 0 \ \forall\, k = 0, \ldots, n\right]\}\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma' \\ \gamma \text{ minimal}}} \{\bigcap_{j \in \gamma} (l_j = 0)\} \ .$$

*Más aún, en este caso, por los argumentos esbozados en la demostración de la Proposición 2.1.6, el conjunto de puntos base es finito **sii** todos los $\gamma \in \Gamma'$ tienen cardinal $m-1$ o m (que aporta sólo el punto $0 \in \mathbb{C}^m$, que no interesa) **sii** todos los $\gamma \in \Gamma'$* minimales *tienen cardinal $m-1$.*

Observación 2.1.8 *La notación elegida para la Proposición 2.1.6 arrastra un inconveniente: asigna diferentes nombres a un mismo punto. Por ejemplo, si tenemos m filas l.d. $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_m}\}$ tales que cualquier subconjunto de $m-1$ filas es l.i., resulta*

$$P_{i_2,\ldots,i_m} = P_{i_1,i_3,\ldots,i_m} = \ldots = P_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_m} = \ldots = P_{i_1,\ldots,i_{m-1}} \ .$$

El principal problema con esta elección es que puede haber un número exponencial (en n) de subespacios, y, por ende, de posibles puntos base. La mayoría de estos subespacios no van a generar puntos base. Una notación más apropiada podría ser indexar los puntos base en términos de subespacios de formas lineales, $(m-1)$-dimensionales, generados por subconjunto de (al menos) $(m-1)$ formas l_j, y, en general, la de la combinatoria de arreglos de hiperplanos (ver [13]).

A continuación, describiremos las formas lineales que generan puntos base en términos de los coeficientes de la matriz B.

Proposición 2.1.9 *Sea $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}\}$ un conjunto maximal de filas de B que genera un único cero proyectivo P. Esto significa que cualquier otra fila de B no se anula en P. Entonces:*
P no *es un punto base $\iff$ [$\exists\ k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que para todo j, $b_{i_j,k} < 0$ y además es el menor elemento de la i_j-ésima fila de B] o [todas las i_j-ésimas filas ($1 \leq j \leq s$) tienen sólo entradas positivas o nulas].*

Notemos que la primer condición significa que para algún $k > 0$ ningún l_{i_j} divide a f_k (i.e. está presente en el denominador de y_k, luego de sacar denominador común en la parametrización), ya que $b_{i_j,k}$ es el exponente de l_{i_j} en f_0, y la segunda condición es equivalente a : "ningún l_{i_j} es un factor de f_0" (i.e. l_{i_j} sólo aparece en el numerador de todos los y_k, después de tomar denominador común). Debemos remarcar el hecho de considerar un único denominador, ya que el conjunto de puntos base aumenta considerablemente con esta técnica.

Demostración.

($\Leftarrow$) Si las filas tienen entradas no negativas, entonces cualquier forma lineal que se anula en P no será factor de ningún denominador ($g_{k,0}$), ergo, tampoco de f_0. Luego, $f_0(P) \neq 0$.
Si, en cambio, $b_{i_j,k} < 0$ es el menor elemento de B_{i_j}, el exponente de l_{i_j} en f_0 será $-b_{i_j,k}$, por construcción. Esto significa, simplemente, que l_{i_j} no dividirá a f_k. Como este hecho es cierto para cada forma lineal que se anula en P, resulta $f_k(P) \neq 0$.
En consecuencia, en cualquier caso, P no es un punto base, por definición.

($\Rightarrow$) Supongamos que P no es punto base. Entonces, debe existir $k \in \{0, \ldots, m\}$ tal que $f_k(P) \neq 0$. Luego, para este k: l_{i_j} no divide a f_k para ningún i_j. ¿Cómo puede suceder esto?
Si $k = 0$, el exponente de l_{i_j} en cada y_t debe ser no negativo. Con esto, $b_{i_j,t} \geq 0$ para todo $t = 1, \ldots, m$, que nos da la segunda condición del enunciado.
Si $k \neq 0$, cada uno de los B_{i_j} tiene un coeficiente negativo. Miremos más de cerca a la columna k-ésima: para todo j, l_{i_j} no divide a f_k. Ergo, $b_{i_j,k} < 0$ y este número, cambiado de signo, debe ser el exponente de l_{i_j} en f_0. Por lo tanto, para todo j, $b_{i_j,k} < 0$ y debe ser el menor elemento de la fila i_j-ésima de B.

□

Refinemos un poco la Proposición anterior, después de señalar que en ambas condiciones todos los $b_{i_j,k}$ tienen igual signo. Más aún, afirmar que cada fila tiene entradas no negativas es equivalente a decir que $\min\{b_{i_j,k}, 0\} = 0$ para todo k y j. Luego:

Corolario 2.1.10 *Con las mismas hipótesis de la Proposición 2.1.9, tenemos:*
P no es un punto base $\iff \exists\ k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que para todo j, $\min\{b_{i_j,k}, 0\} \leq b_{i_j,l}$ para todo $l = 1, \ldots, m$.

O, mejor aún:

Corolario 2.1.11 *Con las mismas hipótesis de la Proposición 2.1.9, resulta:*
P es un punto base de $B \iff$ para todo $k = 1, \ldots, m$ existe $j = j_{(k)} \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\min\{b_{i_j,k}, 0\}$ no es *el menor elemento de la fila i_j-ésima de B.*

Analicemos a continuación, la hipótesis de finitud de puntos base.

Proposición 2.1.12 *La cantidad de puntos base de tipo 2 es finita para $m = 3$.*

Demostración. Es claro, ya que decir que con menos de $m-1=2$ formas lineales alcanza para generar un punto base, es decir que con 1 alcanza, esto es,

$$\exists\, i \quad / \quad l_i = 0 \;\Rightarrow\; f_k = 0 \quad \forall\, k\ .$$

Esto significa que $l_i \mid f_k \;\forall\, k$, por la factorización de los f_k como producto de formas lineales. Ahora bien, ninguna fila de B es nula. En consecuencia, habrá finitos puntos base de tipo 2, y el resto de los puntos (infinitos) serán de tipo 1, que son los que se descartan desde un comienzo.

Esto significa que $l_i \mid f_k \;\forall\, k$, por la factorización de los f_k como producto de formas lineales. Ahora bien, ninguna fila de B es nula. En consecuencia, habrá finitos puntos base de tipo 2, y el resto de los puntos (infinitos) será del tipo 1, que son los que se descartan desde un comienzo. □

Por último, veamos algunos ejemplos donde el número de puntos base de tipo 2 no es finito. En primer lugar, veamos un ejemplo sencillo con $n = m = 4$, donde tenemos infinitos puntos base de tipo 2 en $\mathbb{P}^{m-1}$.

Ejemplo 2.1.13 En este caso vamos a construir la matriz B, a partir de una parametrización que no cumpla $\#\gamma \geq m-1$ para algún $\gamma \in \Gamma'$ minimal :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{l_1 * l_2 * l_4}{l_3^3} = \frac{l_1 * l_2 * l_4}{l_3^3}\ ; \\ y_2 &= \frac{l_2}{l_3} = \frac{l_2 * l_3^2}{l_3^3}\ ; \\ y_3 &= \frac{l_1}{l_3} = \frac{l_1 * l_3^2}{l_3^3}\ ; \\ y_4 &= \frac{l_4}{l_3} = \frac{l_4 * l_3^2}{l_3^3}\ . \end{aligned}$$

Esta parametrización, nos da la siguiente matriz

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Vemos que en este caso:

$$Z = \{l_1 = l_3 = 0\} \cup \{l_2 = l_3 = 0\} \cup \{l_3 = l_4 = 0\}\ .$$

Cada uno de los conjunto está formado por ceros de 2 formas lineales en $\mathbb{C}^4$, con lo cual tenemos dimensión 2, y no 1 como queremos para tener finitos puntos base de tipo 2. Y se ve claramente que no hay un factor común entre numerador y denominador de todas las ecuaciones, pues ningun par de filas es l.d.. Por lo tanto, tenemos infinitos puntos base, y todos del tipo 2. En este caso, nuestra matriz tiene rango $m-1=3$. ■

Observación 2.1.14 *El ejemplo anterior nos permite construir una familia de ejemplos*

para cualquier par (n, m), con $n \geq m$. La parametrización resulta:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{l_2 * \ldots * l_m}{l_1^{m-1}} = \frac{l_2 * \ldots * l_m}{l_1^{m-1}} \ ; \\ y_2 &= \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_2 * l_1^{m-2}}{l_1^{m-1}} \ ; \\ &\vdots \\ y_m &= \frac{l_n}{l_1} = \frac{l_n * l_1^{m-2}}{l_1^{m-1}} \ , \end{aligned}$$

y corresponde a la matriz

$$B := \left(\begin{array}{c|ccc} -(m-1) & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{Z}^{n \times m} \ .$$

Claramente, esta matriz aporta infinitos puntos base de tipo 2, en forma análoga a lo visto en el Ejemplo 2.1.13. En efecto, el conjunto de puntos base de tipo 2 es:

$$Z = \bigcup_{i=2}^{n} \{l_1 = l_i = 0\} \ . \tag{2.7}$$

Veamos ahora si existe algún par (n, m) para el cual tengamos rango máximo: vamos a encontrar condiciones necesarias y suficientes para el mismo. Dicha condición de rango máximo será importante en el Capítulo 4. Nos permitirá considerar este ejemplo dentro de una familia importante para nosotros: las matrices B de tipo Horn-Kapranov.

- *Supongamos primero $n > m$. Si miramos la submatriz correspondiente a las filas $2, \ldots, m+1$, resulta:*

$$M_{2,\ldots,m+1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \vdots & & I_{m-1} & \\ 1 & & & \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \ ,$$

  que claramente tiene determinante ± 1, y por tanto no nulo.
  En consecuencia, si $n > m$ tenemos rango$(B) = m$, máximo.

- *En el caso $m = n$, B es de la forma:*

$$B := \left(\begin{array}{c|ccc} -(n-1) & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right) \ .$$

  En este caso, la matriz resulta singular. Esto es claro pues todas las columnas suman cero; luego las columnas viven en el mismo hiperplano $z_1 + \ldots + z_n = 0$ en $\mathbb{C}^n$, y no pueden ser l.i..

Por lo tanto, en la familia de ejemplos anteriores, el rango de B es máximo sii $m > n$.

2.2 A-discriminantes

En esta sección, enunciamos resultados conocidos referidos a los A-discriminantes. Esto ilustrará el origen y la importancia del problema analizado en la Sección §2.1.

2.2.1 Definición de los A-discriminantes

Dada una configuración (reticulado) A de n puntos en $\mathbb{Z}^{d-1}$, designemos con $F_A = \sum_{a \in A} c_a x^a$ al polinomio de Laurent genérico (complejo) en $(d-1)$ variables con exponentes en A: una suma genérica de n monomios de Laurent fijos. Bajo ciertas hipótesis, Gelfand, Kapranov y Zelevinsky (cfr. [20]) mostraron que existe un polinomio $\Delta_A = \Delta_A(c)$ irreducible sobre $\mathbb{C}$ con coeficientes enteros, llamado el A-discriminante, que se anula en cada elección de coeficientes (c_a) para los cuales F_A y todas sus derivadas parciales de orden uno tienen un cero común en el toro algebraico $(\mathbb{C}^*)^{d-1}$. El A-discriminante resulta un invariante afín: cada configuración de puntos isomorfa afinmente a A posee el mismo discriminante.

Puede probarse que este discriminante es un factor del A-resultante "no mezclado" ("unmixed")

$$\mathrm{Res}_A(F_A, x_1 \frac{\partial F_A}{\partial x_1}, \ldots, x_{d-1} \frac{\partial F_A}{\partial x_{d-1}}).$$

Los demás factores de la resultante son potencias de discriminantes de caras, i.e. discriminantes ralos asociados a subreticulados de A conformados por todos los puntos pertenecientes a cada cara de la cápsula convexa de A. Es sencillo verificar, por ejemplo, que en el caso $d-1=1$, la resultante de Sylvester de $F_A = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ y $x\,F'_A$ es $c_0 \cdot c_{n-1} \cdot \Delta_A(F_A)$. Los dos monomios corresponden a coeficientes en las dos caras del segmento $[0, n-1]$ y Δ_A es el discriminante clásico.

El cálculo de discriminantes Δ_A es un problema de gran interés y de gran dificultad combinatoria. Existen fórmulas no elementales para el cálculo general que describen el discriminante como el determinante del complejo de Cayley-Koszul, y en el caso en que la variedad tórica asociada a A es regular, es posible describir el grado de Δ_A en términos de ciertas clases de Chern (cfr. [20]).

Dado A, construimos la matriz entera de tamaño $d \times n$ (llamada también A) cuya primer fila está formada por unos y cuyas columnas están dadas por todos los puntos de la forma $(1, a)$ con $a \in A$. Es decir,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \end{array}\right) \in \mathbb{Z}^{d \times n}\ .$$

En consecuencia, el núcleo de esta matriz representa las dependencias afines entre los puntos de la configuración dada.

[16] estudiaron discriminantes en codimensión 2, i.e. con soporte en $d+2$ puntos en $\mathbb{Z}^{d-1}$ y, por ende, definido por una matriz A de tamaño $d \times (d+2)$. En este caso, sólo aparecen puntos base de tipo 1 (cfr. Definición 2.1.1).

Nos concentraremos en el caso de codimensión 3, i.e. configuraciones de $d+3$ puntos en $\mathbb{Z}^{d-1}$, cuya cápsula convexa es de dimensión máxima.

2.2.2 Deshomogeneización de variedades A-discriminantales y parametrizaciones asociadas a matrices B

A efectos de estudiar discriminantes, podemos partir de una matriz $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{Z}^{n\times(n-d)}$ cuyas columnas forman una $\mathbb{Z}$-base del núcleo de la matriz A; es decir, una matriz B como las dadas en la Sección §2.1.1. Dado que la primer fila de A está formada por unos, las filas de B suman cero. Como consecuencia de la Proposición 4.4.1, B será de rango máximo y sus menores maximales tendrán máximo común divisor igual a 1. (i.e. las filas generarán $\mathbb{Z}^3$).

Sabemos que el A-discriminante Δ_A es un polinomio A-homogéneo (esto es, existe $v \in \mathbb{Z}^d$ tal que cada exponente de un monomio c^ν en Δ_A verifica $A\cdot\nu = v$) en las variables c_a, con coeficientes enteros.[2] Notemos $m = n - d$. "Eliminando estas homogeneidades" obtenemos un polinomio Δ_B en m variables $y_1, \ldots, y_m$, que resulta la ecuación implícita de la hipersuperficie paramétrica S a la cual nos hemos referido ya en la Sección §2.1 (cfr. [20] y [24]). Esto se remonta a un antiguo trabajo hecho por Horn en el siglo XIX.

Expliquemos mejor qué significa extraer las homogeneidades. Como mencionamos ya, existe $v \in \mathbb{Z}^d$ tal que todos los monomios c^ν presentes en $\Delta_A = \sum_\nu m_\nu\, c^\nu$ verifican $A\cdot\nu = v$ (por def. de A-homogeneidad). En consecuencia, para cada ν_0 que cumple $A\cdot\nu_0 = v$:

$$\Delta_A(c) = c^{\nu_0} \sum_\nu m_\nu\, c^{\nu-\nu_0},$$

donde $m_\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $\nu - \nu_0 \in \ker_{\mathbb{Z}}(A)$.

Escribamos cada diferencia $\nu - \nu_0$ en la forma $\nu - \nu_0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{\nu k} v^{(k)}$, donde, como antes, $v^{(k)}$ denota la k-ésima columna de B (cfr. Sección §2.1.1). Con eso, existe un polinomio de Laurent en m variables $\Delta_B(y)$ tal que, salvo multiplicación por un monomio, $\Delta_B(c^{v^{(1)}}, \ldots, c^{v^{(m)}})$ es igual a $\Delta_A(c)$. En particular, Δ_B tiene el mismo número de monomios y los mismos coeficientes que Δ_A.

Tomemos $m = 3$. El cálculo del discriminante ralo Δ_A es equivalente, por tanto, al problema de implicitación (en general, con presencia de puntos base) de la variedad paramétrica dada por

$$y_j = \prod_i (b_{i1}u + b_{i2}s + b_{i3}t)^{b_{ij}}, \quad j = 1, 2, 3,$$

que ya hemos comentado.

A modo de ilustración, veamos un ejemplo en codimensión $m = 2$ y uno en codimensión $m = 3$. En este último mostramos cómo calcular Δ_B a partir de una deshomogeneización del discriminante Δ_A.

Ejemplo 2.2.1 [El discriminante de un polinomio cúbico univariado genérico]

El A-discriminante asociado a la matriz de tamaño 2×4 con filas $(1, 1, 1, 1)$ y $(0, 1, 2, 3)$, i.e. el discriminante $\Delta_A(x_0, x_1, x_2, x_3)$ del polinomio genérico $f_A(x; t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3$, es:

$$\Delta_A(x) = -27 * x_3^2 * x_0^2 + 18 * x_3 * x_0 * x_2 * x_1 + x_2^2 * x_1^2 - 4 * x_2^3 * x_0 - 4 * x_3 * x_1^3 \,.$$

Notemos que hemos modificado ligeramente la notación: en este caso, llamamos con t a las variables x_i del polinomio, mientras que x_i son los coeficientes c_i, i.e. las indeterminadas para el A-discriminante.

[2] Si $v = 0$ decimos que tiene A-homogeneidad 0.

A continuación, elijamos una matriz B particular de tamaño 4×2 y con filas $b_0 = (1,2)$; $b_1 = (-2,-3)$; $b_2 = (1,0)$; $b_3 = (0,1)$. Notemos que $g = 1$ y las columnas de B son una $\mathbb{Z}$-base del núcleo "entero" de A. Miremos las formas lineales provenientes de cada fila de B:

$$l_1 := u + 2 * v \quad ; \quad l_2 := -2 * u - 3 * v \quad ; \quad l_3 := u \quad ; \quad l_4 := v \ .$$

La parametrización ψ_B resulta:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & := & l_1 * l_3/(l_2)^2 \ ; \\ y_2 & := & l_1^2 * l_4/(l_2)^3 \ . \end{array} \right.$$

La clausura de su imagen es la hipersuperficie ($\Delta_B = 0$), siendo

$$\Delta_B(y_1, y_2) = -4 * y_2 - 27 * y_2^2 + y_1^2 + 18 * y_2 * y_1 - 4 * y_1^3 \ ,$$

que puede calcularse con MAPLE vía

```
> -normal(resultant( l_2^2*y_1-l_1*l_3 , l_2^3*y_2-l_1^2*l_4 , u) / v^6);
```

Cabe aclarar que el factor v^6 se introduce artificialmente porque MAPLE calcula resultantes afines en lugar de uno homogéneo respecto a las variables $(u : v)$. Asimismo, el discriminante puede calcularse como la deshomogeneización de Δ_A:

$$\Delta_B(y_1, y_2) = \Delta_A(1, 1, y_1, y_2) \ .$$

Recíprocamente, salvo multiplicación por un monomio, Δ_A resulta igual a $\Delta_B(x_0x_2/x_1^2, x_0^2x_3/x_1^3)$. ■

Ejemplo 2.2.2 Tomemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y una posible elección de B cuyas columnas son una $\mathbb{Z}$-base de $\ker(A)$:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 3} \ .$$

Llamemos a las columnas de B con $v^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, como lo hicimos en la Sección §2.1.1.

En este caso, el discriminante Δ_A es muy sencillo: $\Delta_A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. El mismo proviene de $F_A := x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 1 = \sum_{i=1}^4 x_1 \cdot 1$. Observemos entonces que Δ_A tiene A-homogeneidad 1. Tomemos una deshomogeneización, por ejemplo, respecto de la variable x_1:

$$\Delta_A = x_1(1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_1}) \ .$$

Tenemos entonces los vectores $\nu_0 = (0,0,0,0)$; $\nu_1 = (-1,1,0,0)$; $\nu_2 = (-1,0,1,0)$; $\nu_3 = (-1,0,0,1)$. Como $\Delta_A = x_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{3} x^{\nu_i}}_{:=H}$ genera H de A-homogeneidad 0, escribamos cada ν_i como combinación lineal de las columnas de B:

$$\nu_1 = -v^{(3)} \quad ; \quad \nu_2 = v^{(1)} - v^{(2)} - v^{(3)} \quad ; \quad \nu_3 = v^{(3)} - v^{(1)} \ .$$

Tomamos entonces $y_i = x^{v^{(i)}}$ como nuevas variables. En tal caso:

$$x^{\nu_1} = \frac{1}{y_3} \quad ; \quad x^{\nu_2} = \frac{y_1}{y_2 * y_3} \quad ; \quad x^{\nu_3} = \frac{y_3}{y_1} \ .$$

Reemplazando esto en la ecuación Δ_A obtenemos

$$\Delta_A = x_1(1 + \frac{1}{y_3} + \frac{y_1}{y_2 * y_3} + \frac{y_3}{y_1}) = \frac{x_1}{y_1 * y_2 * y_3}(y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_2 + y_1^2 + y_2 * y_3^2) \ .$$

En consecuencia: $\Delta_B = (y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_2 + y_1^2 + y_2 * y_3^2)$. Volveremos a esto en el Ejemplo 3.2.2. ■

Capítulo 3

Multiplicidades

En este capítulo intentaremos responder a la pregunta qué significa la multiplicididad e_P introducida en el capítulo anterior y cómo calcular esta magnitud en general. Históricamente (cfr. [28]), la teoría moderna de multiplicidades comenzó con el estudio del comportamiento asintótico de las potencias de ideales: se presentaban las multiplicidades como límites. Existen dos formulaciones diferentes: una por P. Samuel y otra por C. Lech. Seguiremos el primer enfoque.

3.1 Definición y propiedades básicas

Existen diversas maneras de definir la multiplicidad algebraica de un punto base. En [8] hay un informe detallado de todas ellas: tanto la de Serre como la de Hilbert-Samuel. La herramienta básica elegida para entender estos conceptos es la multiplicidad de Hilbert-Samuel de un ideal. Recordemos esta definición y el contexto algebraico en el que se enmarca. Seguiremos el desarrollo de [26]. Aunque el conexto general a describir admite un anillo semilocal, nuestro interés durante este capítulo recaerá en el caso local. No obstante, trataremos de dar una formulación general para cada resultado cuando la misma sea posible.

Definición 3.1.1 *Sea R un anillo conmutativo, semilocal y noetheriano (esto es, con un número finito de ideales maximales), y sea $\mathfrak{J}$ el ideal de Jacobson (i.e. la intersección de todos los ideales maximales de R). Sea I un* ideal de definición *de R, esto es, un ideal $I \subset \mathfrak{J}$ tal que $\sqrt{I} = \mathfrak{J}$. En tal caso, R/I tiene longitud finita y, en general, R/I^n tiene longitud finita para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, ambas condiciones son equivalentes. En particular, si $(R, \mathfrak{M})$ es un anillo local, un ideal de definición no es otra cosa que un ideal $\mathfrak{M}$-primario.*

Sea M un R-módulo finitamente generado. En tal caso, se define el módulo graduado sobre I y el anillo graduado de R asociado a I:

$$gr_I(M) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n M/I^{n+1}M \quad ; \quad gr_I(R) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1} \ .$$

Notemos que la segunda construcción resulta un caso particular de la primera, si consideramos al anillo R como un R-módulo a izquierda.

Definimos la función de Samuel *de M con respecto a I como:*

$$\chi_M^I(n) = l(M/I^{n+1}M) \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \ ,$$

donde $l(_)$ es la función de longitud de un R-módulo, i.e. la longitud de cualquier serie de composición del módulo.

Si miramos la construcción del anillo graduado, dada la cadena de ideales

$$I^{n+1} \subset I^n \subset \ldots \subset I \subset R$$

sabemos que extendiendo cada subcadena $I^{j+1} \subset I^j$, $j = 0, \ldots, n$, obtendremos una serie de composición para el cociente R/I^{n+1}, de acuerdo con el Teorema de Jordan-Hölder. Notemos que cada extensión de dicha subcadena da una serie de composición para el cociente I^j/I^{j+1}. Por lo tanto, obtenemos la siguiente igualdad entre longitudes:

$$l(R/I^{n+1}) = l(R/I) + \ldots + l(I^n/I^{n+1}) \; . \tag{3.1}$$

En el caso particular de tener $I = \mathfrak{M}$ un ideal maximal del anillo de polinomios $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ con k algebraicamente cerrado, cada uno de los cocientes involucrados en la expresión (3.1) adquiere una estructura de $k = R/\mathfrak{M}$-espacio vectorial. Resulta además

$$R/\mathfrak{M}^{n+1} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathfrak{M}^j/\mathfrak{M}^{j+1} \; , \tag{3.2}$$

ya que cada cociente $\mathfrak{M}^j/\mathfrak{M}^{j+1}$ tiene como k-base los monomios de grado exactamente j, mientras que $R/\mathfrak{M}^{n+1}$ puede representarse como combinaciones lineales de monomios de grado a lo sumo n. En particular, la dimensión sobre k de cada uno de los cocientes involucrados es finita, y, más aún, la dimensión sobre k del cociente $R/\mathfrak{M}^{m+1}$ coincidirá con la suma de las dimensiones de los cocientes $\mathfrak{M}^j/\mathfrak{M}^{j+1}$.

En el caso de un anillo arbitrario R y de un ideal I cualquiera, esta estructura de k-e.v. para cada R/I^j no es para nada natural. Sin embargo, cuando R es un anillo de polinomios (o en general, una k-álgebra), tenemos una multiplicación por elementos de k. Sumando esto a la igualdad (3.2), nos induce a pensar si la longitud de cada cociente dado un ideal I cualquiera coincidirá con la dimensión sobre k del mismo. Bajo ciertas condiciones, esta igualdad será cierta. Daremos un tratamiento completo a esto.

De la definición anterior de función de Samuel, se desprende lo siguiente. Aún en el caso de partir de un anillo conmutativo y noetheriano pero no necesariamente semilocal, es posible definir la función de Samuel, con valores en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Para cierto tipo de ideales I, dicha función tomará sólo valores finitos. A modo de ejemplo, si R es un anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo alg. cerrado e I es un ideal 0-dimensional, (i.e. con finitos ceros), entonces la función de Samuel resultará finita (ver Lema 3.1.18).

Dado el anillo semilocal R y el ideal de definición I, tenemos entonces definida la función de Samuel

$$\chi_M^I : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \qquad n \longmapsto l(M/I^{n+1}M) \; .$$

Una de las propiedades que se puede analizar de la misma es su comportamiento asintótico con respecto a n. Es un hecho conocido que para valores grandes de n, esta función es un polinomio racional, que manda $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ por construcción. Estas dos condiciones equivalen a afirmar que el mismo polinomio debe escribirse con coeficientes enteros en la base de binomios $\binom{n}{i}$, $i \leq d$. Por lo tanto, existe un polinomio $PS_M^I(X)$ en $\mathbb{Q}[X]$ tal que $PS_M^I(n) = \chi_M^I(n)$ para $n >> 0$. Más aún, el grado de este polinomio es $\dim(M) \underset{\text{def}}{:=} \dim(R/Ann(M)) \leq \dim(R) := d$, y el mismo admite una escritura

$$PS_M^I(n) = \sum_{i=0}^{d} e_i \binom{n}{i} \qquad e_i \in \mathbb{Z} \; .$$

Su "coeficiente principal" en la base usual de monomios n^j $(j = 0, \ldots, d)$ es de la forma $e/d!$ con $e = e_d \in \mathbb{N}_0$.

Definición 3.1.2 *Se define* $e(I,M) := e = d!\, LCoeff(PS_M^I)$ *como la* multiplicidad de Hilbert-Samuel *de* M *con respecto a* I*. Cuando el módulo* M *se sobreentienda por contexto, notaremos simplemente dicha multiplicidad con* $e(I)$*. En especial, consideraremos el caso* $M = R$*.*

Asimismo, cuando el anillo sea local y $M = R$*, omitiremos la notación del maximal* $\mathfrak{M}$*, definiendo* $e(R) := e(\mathfrak{M}, R)$*.*

Observación 3.1.3 *Un hecho clarificador a remarcar es el siguiente. En caso de tener* $M = R$*, el grado de* $PS_M\ I(n)$ *es efectivamente* d *y por lo tanto el coeficiente* $e/d!$ *es no nulo. Sin embargo, para módulos generales, el polinomio puede tener grado menor a* d*. De ahí el uso de las comillas en la expresión "coeficiente principal".*

Más aún, se verifica:

$$e(I,M) > 0 \quad si\ \dim(M) = d \qquad y \qquad e(I,M) = 0 \quad si\ \dim(M) < d\,.$$

Ejemplo 3.1.4 Tomemos un anillo local noetheriano $(R, \mathfrak{M})$ de dimensión d. Por definición, $e(R) = e(\mathfrak{M}, R)$ es, salvo factor $1/d!$, el coeficiente principal de $l(R/\mathfrak{M}^{n+1})$.

Afirmación. En el caso $M = R = k[x_1, \ldots, x_d]_0$, resulta $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 R$ y la longitud $l(R/\mathfrak{M}^{n+1}R) = \binom{n+d}{d}$.

Demostración. En primer lugar, notemos que el cociente $R/\mathfrak{M}^{n+1}R$ es isomorfo canónicamente a $\big(k[x_1, \ldots, x_d]/(x_1, \ldots, x_d)^{n+1}\big)_{\overline{\mathfrak{M}_0}}$, ya que el cociente sobre el anillo localizado es isomorfo a tomar cociente y luego localizar sobre la clase del maximal. Ahora bien, $\overline{k[x_1, \ldots, x_d]/(x_1, \ldots, x_d)^{n+1}}$ ya es un anillo local, pues el único maximal de este anillo es $\overline{\mathfrak{M}_0}$ (un maximal del cociente se corresponde con un ideal maximal del anillo de polinomios que contiene a $\mathfrak{M}_0^{n+1}$, y la única posibilidad para esto es tomar el mismo maximal $\mathfrak{M}_0$). Por lo tanto, la localización no altera la estructura del anillo cociente. En consecuencia, $l(R/\mathfrak{M}_0^{n+1}R) = l(k[x_1, \ldots, x_d]/(x_1, \ldots, x_d)^{n+1})$.

Calculemos la longitud del último cociente. Es natural pensar al mismo como el conjunto de polinomios en $k[x_1, \ldots, x_d]/\langle x_1, \ldots, x_d\rangle^{n+1}$ de grado menor que $n+1$. Para presentar una cadena, vía la correspondencia entre ideales del cociente e ideales de $k[x_1, \ldots, x_d]$ que contengan a $\mathfrak{M}_0^{n+1}$, vamos a extender una cadena de $n+1$ eslabones en el anillo de polinomios, cuyos extremos son el ideal $(\mathfrak{M}_0)^{n+1}$ y la cadena $\mathfrak{M}_0 \subseteq (1)$. Dicha extensión, por el Teorema de Jordan-Hölder tendrá la longitud deseada. Tomemos la cadena

$$(\mathfrak{M}_0)^{n+1} \subset J_1 \subset \ldots \subset J_i \subset \ldots \subset J_n = \mathfrak{M}_0 \subset J_{n+1} = k[x_1, \ldots, x_d]\,,$$

donde $J_i := \langle \text{monomios de grado} \geq (n+1) - i \rangle$. Sabemos que cada subcadena $J_i \subset J_{i+1}$ se puede extender, en forma ascendente, agregando de a una vez un monomio adicional de entre todos los monomios de grado $n-i$. Por construcción, esta subcadena será maximal. En consecuencia, cada extensión entre los ideales J_i y J_{i+1} estará formada por tantos ideales como monomios de grado $n-i$ existan. Por lo tanto, la cadena extendida tendrá una extensión maximal de $\#\{\text{monomios en } d \text{ variables de grado} \leq n\} = \binom{n+d}{d}$. □

De este modo, la multiplicidad del maximal en este ejemplo es $e(R) = 1$. En forma semejante, también se verifica el mismo resultado para un anillo R regular. ■

La argumentación utilizada para el ejemplo precedente se relaciona con un hecho más fuerte, que vincula la longitud del cociente con su dimensión sobre el cuerpo k, cuando el mismo es alg. cerrado, o cuando el ideal I es monomial. Veremos esto en detalle.

Observación 3.1.5 *Notemos que se sigue de la definición de multiplicidad que*

$$e(I,M) = \lim_{n\to\infty} \frac{l(M/I^{n+1}M)\, d!}{n^d}\,,$$

cuando la longitud es finita.

Supongamos que $(R, \mathfrak{M})$ es un anillo local noetheriano con ideal maximal $\mathfrak{M}$. En este caso, existen algunas fórmulas de suma utilidad para el cálculo de multiplicidades de un ideal $\mathfrak{M}$-primario $\mathcal{Q}$. En todo lo que sigue asumiremos que M es un R-módulo finitamente generado (f.g.) y $(R, \mathfrak{M})$ es anillo local, noetheriano. Citamos a continuación, aunque sin demostración, algunos de los resultados estructurales más relevantes sobre la teoría general de multiplicidades.

Teorema 3.1.6 (Theorem 14.6, [26]) *(Multiplicidades y sucesiones exactas)*
Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *una sucesión exacta de* R*-módulos f.g.. Entonces,*

$$e(\mathcal{Q}, M) = e(\mathcal{Q}, M') + e(\mathcal{Q}, M'') \ .$$

Teorema 3.1.7 (Theorem 14.7, [26]) *(Formula de Factorización)*
Denotemos con $\{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_t\}$ *al conjunto de ideales primos minimales de* R*, tales que* $\dim(R/\mathfrak{P}_i) = d$*, y sea* $\mathcal{Q}$ *un ideal del anillo* R*. Entonces,*

$$e(\mathcal{Q}, M) = \sum_{i=1}^{t} e(\bar{\mathcal{Q}}_i, R/\mathfrak{P}_i)\, l(M_{\mathfrak{P}_i}) \ ,$$

donde $\bar{\mathcal{Q}}_i$ *indica la imagen de* $\mathcal{Q}$ *en* $R/\mathfrak{P}_i$ *y* $l(M_{\mathfrak{P}_i})$ *es la longitud de* $M_{\mathfrak{P}_i}$ *visto como* $R_{\mathfrak{P}_i}$*-módulo.*

Teorema 3.1.8 (Theorem 14.6, [26])
Sea $(R, \mathfrak{M})$ *un dominio íntegro noetheriano y local,* $\mathcal{Q}$ *un ideal de definición de* R *(es decir,* $\mathfrak{M}$*-primario) y* M *un* R*-módulo f.g.. Entonces:*

$$e(\mathcal{Q}, M) = e(\mathcal{Q}, R)\, s, \qquad \textit{donde} \qquad s = \textit{rango}(M) \ .$$

Teorema 3.1.9 (Theorem 14.12, [26]) *(Lema de Lech)*
Sea $(R, \mathfrak{M})$ *un anillo local Noetheriano de dimensión* d*, y* $x_1, \ldots, x_d$ *un sistema de parámetros de* R *(es decir, un conjunto de* d *elementos* $x_1, \ldots, x_d$ *tal que* $R/(x_1, \ldots, x_d)$ *tiene longitud finita como* R*-módulo; equivalemente, si* $R/(x_1, \ldots, x_d)$ *tiene dimensión cero) . Sea* $\mathcal{Q} = (x_1, \ldots, x_d)$ *y supongamos que* M *es un* R*-módulo finitamente generado. En tal caso:*

$$e(\mathcal{Q}, M) = \lim_{\text{mín}(\nu_i) \to \infty} \frac{l(M/\langle x_1^{\nu_1}, \ldots, x_d^{\nu_d} \rangle M)}{\nu_1 \cdots \nu_d} \ .$$

Observemos que el cardinal del sistema de parámetros coincide *con la dimensión del anillo local.*

El anterior resultado es relevante en el siguiente sentido. Sabemos que para calcular la multiplicidad del ideal $\mathcal{Q} = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$, debemos considerar la longitud $l(M/\mathcal{Q}^n M)$. Pero la descripción de los generadores de $\mathcal{Q}^n$ no suele ser agradable. Sin embargo, es posible considerar en lugar de éste al ideal $\tilde{\mathcal{Q}}$ definido por potencias de los generadores, i.e. $\tilde{\mathcal{Q}} = \langle x_1^{\nu_1}, \ldots, x_d^{\nu_d} \rangle$, modificando el valor por el cociente por $\nu_1 \cdots \nu_d$. En particular si tomamos todos los ν_i iguales resulta:

Corolario 3.1.10 *Sea* $(R, \mathfrak{M})$ *un anillo local Noetheriano de dimensión* d*. Sea* $\mathcal{Q}$ *ideal generado por un sistema de parámetros* $\{x_1, \ldots, x_d\}$ *y* M *un* R*-módulo f.g.. Entonces,*

$$e(\mathcal{Q}, M) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{l(M/\langle x_1^{\nu}, \ldots, x_d^{\nu} \rangle M)}{\nu^d} \ .$$

Teorema 3.1.11 (Theorem 3, pág 74 [25]) *Sean $(R, \mathfrak{M})$ un anillo local y $\mathcal{Q}$ un ideal $\mathfrak{M}$-primario de R. En tal caso resulta,*

$$e(\mathcal{Q}, R) \ \leq \ \dim R! \ e(\mathfrak{M}, R)\, l(R/\mathcal{Q}) \tag{3.3}$$

En particular, si $R = k[x_1, \ldots, x_d]_P$ es un anillo de polinomios localizado en el maximal asociado al punto P, R resulta un anillo local y regular, de dimensión d. Si Q tiene como único cero al punto P, resulta

$$e(\mathcal{Q}, R) \ \leq \ d! \ e(\mathfrak{M}_P, R)\, l(R/\mathcal{Q}) \ .$$

Ejemplo 3.1.12 Veamos, a modo ilustrativo, el caso de un ideal $\mathfrak{M}$-primario $\mathcal{Q}$ que sea una intersección completa (para su definición, referimos a la Sección § 3.2). Si R es regular, $e(\mathfrak{M}, R) = 1$ (Ejemplo 3.1.4) y, como veremos en la siguiente sección, $e(\mathcal{Q}, R) = l(R/\mathcal{Q})$. Por lo tanto, se verifica el Teorema, ya que:

$$l(R/\mathcal{Q}) = e(R, \mathcal{Q}) \leq c! * 1 * l(R/\mathcal{Q}) = c! \ e(\mathfrak{M}, R)\, l(R/\mathcal{Q}) \ .$$

■

En los enunciados anteriores se describieron las generalidades sobre multiplicidades. En nuestro caso, tenemos como anillo natural al anillo de polinomios $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$. Como hemos mencionado ya, necesitamos un anillo *local* (o al menos semilocal, ver Capítulo 5) y noetheriano. Por lo tanto, debemos localizar R en cada punto base $P \in Z = V(I)$, $I = \langle f_0, \ldots, f_m \rangle$: es decir, localizar R en el maximal asociado a cada punto P. En consecuencia, tomaremos $\mathcal{R} := R_P$, lo que da $\dim(\mathcal{R}) = m$. Consideraremos como módulo f.g. $M = \mathcal{R}$. Como el anillo es local, $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}_P$, que denota el único ideal maximal de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$ que se anula en P. El candidato a ideal de definición será I_P. Para ello, necesitamos probar que $\sqrt{I_P} = \mathfrak{J} = \mathfrak{M}_P$. Pero esto es consecuencia directa del Nullstellensatz. En efecto, como $I = \langle f_0, \ldots, f_m \rangle$, al eliminar los factores que no se anulan en P, resulta $I_P = \langle \tilde{f_0}, \ldots, \tilde{f_m} \rangle$ (donde los $\tilde{f_j} \in \mathcal{R}$) y $V(\tilde{f_0}, \ldots, \tilde{f_m}) = \{P\}$ o equivalentemente, $Rad_{\mathcal{R}}(\langle \tilde{f_0}, \ldots, \tilde{f_m} \rangle) = \mathfrak{M}_P$ en $\mathcal{R}$. Por lo tanto, al localizar en P se verifica la igualdad deseada.

Teniendo todos los elementos necesarios, definimos en este caso:

$$e_P = e(I_P, R_P) \ .$$

Cabe aclarar que en nuestro caso, combinando técnicas de cambio de base y afinización, podremos trabajar con una variable menos y un único punto: el origen.

En la mayor parte de las referencias bibliográficas, la construcción de la multiplicidad se hace siguiendo la idea de Samuel, como hemos elegido también nosotros, definiendo la multiplicidad a partir de la longitud de un módulo. Como hemos visto ya, cuando el módulo M es una k-álgebra afín (i.e. cociente del anillo de polinomios), con k algebraicamente cerrado, y bajo ciertas condiciones sobre I, es posible caracterizar dicha longitud en términos de la dimensión como k espacio vectorial del cociente. La importancia de partir de una k-álgebra radica en que ya tenemos de antemano la estructura de multiplicación por elementos de k. Este hecho será clave.

Presentamos entonces dicha caracterización.

Lema 3.1.13 *Sea I un ideal $\mathfrak{M}$-primario del anillo del polinomios $R = k[x_1, \ldots, x_d]$, con k algebraicamente cerrado. En tal caso, la longitud de R/I es finita y además*

$$l(R/I) = \dim_k(R/I) \ .$$

Demostración. En primer lugar, notemos que por el Nullstellensatz, todo ideal maximal es de la forma $\mathfrak{M}_P = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_d - p_d \rangle$ (maximal asociado al punto $P = (p_1, \ldots, p_d) \in k^d$). Además, todo cociente de R por un maximal $\mathfrak{M}$ es isomorfo a k.

Dado que I es un ideal $\mathfrak{M}$-primario, $l(R/I^{n+1})$ resulta finita para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto se desprende de $\mathfrak{M}^s \subset I$ para algún $s \in \mathbb{N}$, lo que dice $l(R/\mathfrak{M}^s) \geq l(R/I)$. Como, de acuerdo con el Ejemplo 3.1.4, la primer longitud es finita, el resultado sigue trivialmente.

Ahora bien, sea $l(R/I) = r =$ longitud de una serie de composición de $R =$ longitud de una cadena maximal de R-submódulos (es decir de ideales) de R que contienen a I. Tomemos una serie de composición

$$I_0 = I \subset I_1 \subset \ldots \subset I_r = R \, .$$

Afirmación. Cada cociente I_{i+1}/I_i es isomorfo a $R/\mathfrak{M} \simeq k$.

Demostración. Sea $f_i \in I_{i+1} \setminus I_i$. Sabemos que $I_{i+1} = I_i + R\langle f \rangle$, por ser simple el cociente. Consideremos el morfismo:

$$\varphi \, : \, R \to I_{i+1}/I_i \quad \varphi(g) = \overline{g\, f} = \bar{g}\, \bar{f} \, .$$

Por ser φ no nulo ($\bar{f} \neq \bar{0}$), φ resulta un epimorfismo. Además, $J = \ker(\varphi)$ verifica $R/J \simeq I_{i+1}/I_i$, por lo cual, J es un ideal maximal de R. En consecuencia, $I_{i+1}/I_i \simeq k$, como queríamos.

En conclusión: $I_{i+1} = I_i + k\langle f_i \rangle$. □

De acuerdo con la afirmación anterior, el largo de una cadena maximal coincide con la dimensión de R/I sobre k. En efecto, el hecho de que el cociente sea k quiere decir que para cada i existe un elemento f_i tal que $I_i + kf_i = I_{i+1}$, o sea: todo elemento de I_{i+1} se escribe como uno de I_i más un elemento de k por f_i. Como cada ideal I_i contiene a I, el conjunto de las clases módulo I de los elementos f_i, $i = 0, \ldots, r-1$, forma una base de R/I sobre k y por lo tanto, $\dim_k(R/I) = r = l(R/I)$. [1] □

Observación 3.1.14 *Veamos que si el cuerpo no es algebraicamente cerrado, el enunciado anterior no es necesariamente cierto. Por ejemplo, tomemos $k = \mathbb{R}$, $R = \mathbb{R}[x]$ e $I = \langle x^2 + 1 \rangle$. Afirmamos:*

1. *El ideal $I = \langle x^2 + 1 \rangle$ es maximal en $\mathbb{R}[x]$, luego primo.*
2. *Sea A el anillo local $\mathbb{R}[x]_I$ (i.e. localizado en I) y $\mathfrak{M} = I\,\mathbb{R}[x]_I$ su ideal maximal. Entonces el cuerpo residual $k = A/\mathfrak{M}$ es isomorfo a $\mathbb{C}$ y, por tanto, tiene dimensión real $= 2$.*
3. *La longitud de $A/\mathfrak{M}$ es igual a 1, lo que coincide con la dimensión de $A/\mathfrak{M}$ sobre $\mathbb{C}$ pero* no *con su dimensión sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración.

1. *La primera afirmación es clara. El polinomio $f = x^2 + 1$ es irreducible, con dos ceros complejos conjugados. Cualquier polinomio con coeficientes reales será múltiplo de f, o coprimo con él. De este modo, el ideal que genera f será maximal. Notemos además, que visto en $\mathbb{C}[x]$, f es reducible y por tanto, I no es maximal.*

[1] Otra posible demostración es por longitud en el largo de una serie de composición, considerando el caso $I_1 \supset I$ y la serie de conposición entre I_1 y R como una serie de composición de R/I_1, que tiene longitud uno menos. En este caso, verificar la propiedad l.i. sobre los f_i es trivial.

2. *Sabemos que* $\mathbb{R}[x]/I$ *es isomorfo a* $\mathbb{C}$ *como anillos, vía el morfismo que manda* $\bar{1} \mapsto 1$ *y* $\bar{x} \mapsto i$ *(dicho morfismo también es de* $\mathbb{R}$*-e.v.). Ahora bien, sabemos que* R/I *tiene como único maximal al ideal* $(\bar{0})$*. Por lo tanto el cociente ya es un anillo local. Por lo tanto, el proceso de localización no altera al mismo. Como localizar el cociente es isomorfo a tomar el cociente por el ideal localizado, entonces* $A/\mathfrak{M}$ *es también isomorfo a* $\mathbb{C}$*. Cómo son también isomorfos como* $\mathbb{R}$*-e.v.,* $\dim_{\mathbb{R}}(A/\mathfrak{M}) = 2$*.*

3. *Por último, veamos que la longitud es 1: si* J *es un ideal* $\mathbb{R}[x]$ *que contiene a* $I = \langle x^2 + 1 \rangle$ *, entonces es todo* $\mathbb{R}[x]$*, por maximalidad. Luego la cadena en el cociente es* $(\bar{0}) \subset \mathbb{R}[x]/I$*. Localizando la cadena en* I *se obtiene una cadena maximal de 2 eslabones para* $A/\mathfrak{M}$*. Por lo tanto, la longitud es 1.*

□

Por lo tanto, si el cuerpo es cualquiera, en general la longitud no coincide con la dimensión sobre k*.*

Si tomáramos en el ejemplo anterior el cociente R/I*, entonces* $l(R/I) = 1$ *y sin embargo* $\dim_{\mathbb{R}}(R/I) = 2$*. Por lo tanto, el enunciado del lema anterior falla tanto en el caso global como en el local.*

En forma similar a lo hecho para ideales $\mathfrak{M}$-primarios, si el ideal es 0-dimensional, también vale el resultado. Es decir:

Proposición 3.1.15 *Sea* I *un ideal* 0*-dimensional del anillo del polinomios* $R = k[x_1, \ldots, x_d]$*, con* k *algebraicamente cerrado. En tal caso, la longitud de* R/I *es finita y además*

$$l(R/I) = \dim_k(R/I) \ .$$

Demostración. La finitud de la longitud se sigue de R/I anillo semilocal (tiene tantos maximales como elementos hay en $V(I)$). Ahora bien, una cadena maximal en R/I se corresponde con una cadena maximal $I_0 = I \subset I_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{M} \subset R$. Al igual que en el Lema 3.1.13 (vía el mismo morfismo φ), I_{i+1}/I_i será isomorfo a $R/\mathfrak{M}_P$ para algún $P \in k^d$. Por ser k alg. cerrado, $R/\mathfrak{M}_P \simeq k$, con lo cual se obtiene el resultado. □

Veamos ahora que en el caso de ideales monomiales, el cuerpo k puede ser arbitrario. Para esto, necesitamos otra caracterización de la dimensión sobre k de R/I, donde R es un anillo de polinomios e I es un ideal 0-dimensional.

Lema 3.1.16 *Dado* $\prec$ *orden monomial en* R*, se verifica:*

$$\dim_k(R/I) = \#\{\textit{monomios } x^\alpha \notin in_\prec(I)\} \ .$$

Más aún, podemos interpretar canónicamente a dicho conjunto como incluido en el primer octante y determinado por la "escalerita" debajo de los exponentes de los monomios pertenecientes al ideal inicial $in_\prec(I)$*.*

Con esto, tenemos una caracterización directa de la longitud en términos de la dimensión de R/I sobre el cuerpo cociente k.

Proposición 3.1.17 *Sea* k *un cuerpo arbitrario,* $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ *e* I *un ideal* monomial *propio que es además* 0*-dimensional. En tal caso,* $l(R/I) = \dim_k(R/I)$*.*

Demostración. Si el ideal es monomial, y 0-dimensional, sabemos que contiene un polinomio f_i no nulo en cada variable x_i. Por otro lado, como es propio, dicho polinomio es de grado al menos 1. Por ser monomial, el monomio de cabeza de f_i estará en el ideal I. De este modo, el único cero de I será el origen. Por lo tanto, I será $\mathfrak{M}_0$-primario. En

consecuencia, una cadena maximal provendrá de completar la cadena $I \subset \mathfrak{M}_0$ a una maximal (de acuerdo con Jordan-Hölder) ya que la longitud de R/I es finita (I es un ideal $\mathfrak{M}_0$-primario y por tanto, $R/I = (R/I)_{\mathfrak{M}_0} = R_{\mathfrak{M}_0}/I_{\mathfrak{M}_0}$, que tiene longitud finita).

Ahora bien, tomando el ideal inicial de I respecto a cualquier orden monomial *fijo* $\succ$, la dimensión del cociente es la cantidad de monomios debajo de la "escalerita". Vamos a proceder en forma similar a lo hecho en el Ejemplo 3.1.4. Si podemos agregar un monomio por cada elemento de la cadena, estamos hechos. En efecto, ordenemos los monomios debajo de la escalerita siguiendo el orden monomial fijado, digamos $x^{\alpha_1} \succ x^{\alpha_2} \succ \ldots \succ x^{\alpha_r} = 1$. El ideal $I_1 = I + \langle x^{\alpha_1} \rangle$ contiene estrictamente a I porque x^{α_1} no pertenece a I. En este caso, I_1 también es monomial. Ahora, la escalerita dada por I_1 se debería obtener agregando el monomio x^{α_1} a la escalera original. Como dicho monomio es el máximo de entre los monomios fuera de I, entonces, al tomar la nueva escalera, no se tacha ningún monomio fuera de $in_{\succ}(I)$ a priori, aparte de x^{α_1} (pues $x^{\alpha_1} \mid x^{\alpha}$ implica $x^{\alpha} \succ x^{\alpha_1}$). Notemos que se usa fuertemente la condición monomial para I. En consecuencia, tenemos el cociente R/I_1 con dimensión uno menos y un monomio menos en la escalera. Por inducción (I_1 es monomial y 0-dimensional) y usando el Lema 3.1.16 resulta $l(R/I_1) = \dim_k(R/I_1) = \dim_k(R/I) - 1$. Si probamos que $l(R/I_1) = l(R/I) - 1$, estamos hechos.

Veamos entonces esto último. Sea J un ideal tal que $I \subset J \subset I_1$. Como I, I_1 son monomiales, todo polinomio $f \in J$ tiene sus monomios en I_1. Por lo tanto, los monomios de f no pueden ser x^{α_k} con $k > 1$: viven en I o en $\langle x^{\alpha_1} \rangle$. Si para todo $f \in J$ los monomios viven en I, entonces $J = I$. En caso contrario, existe un polinomio $f \in J$ con un monomio igual a $a\, x^{\alpha_1}$ ($a \neq 0$), es decir $(f - a\, x^{\alpha_1}) \in I \subset J$. Por lo tanto, como $a \neq 0$, resulta $x^{\alpha_1} \in J$ y $J = I_1$. Ahora bien, como toda cadena en R/I se extiende a una maximal (vía el Teorema de Jordan-Hölder), resulta que $I \subset I_1$ se extiende pero dejando intacta la subcadena $I \subset I_1$. Luego, $l(R/I) = l(R/I_1) + 1$, como queríamos probar.

En resumen: la cadena maximal de ideales se obtiene agregando un monomio debajo de la escalerita de cada ideal precedente, en forma decreciente con el orden. Por ejemplo $I_2 = I_1 + \langle x^{\alpha_2} \rangle = I + \langle x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2} \rangle$. En general, para $j = 1, \ldots, r$, los ideales a considerar serán $I_j = I + \langle x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_j} \rangle$. □

Como hemos visto, para el caso de un ideal 0-dimensional en el anillo de polinomios con $k = \bar{k}$, la longitud puede calcularse en términos de una dimensión sobre el cuerpo k. De acuerdo con la definición de multiplicidad para un punto base P, trabajaremos a menudo con el anillo de polinomios localizado en el maximal $\mathfrak{M}_P$. Es por esto que necesitamos una caracterización similar a la del Lema 3.1.13, pero para el anillo localizado. Supondremos sin pérdida de generalidad (s.p.g.) que el punto P es el origen.

Lema 3.1.18 *Sea I ideal $\mathfrak{M}_0$-primario del anillo del polinomios, con k algebraicamente cerrado.Consideremos dicho ideal en el anillo de polinomios localizado en el origen $R = k[x_1, \ldots, x_d]_{\mathfrak{M}_0}$, digamos $J = I_{\mathfrak{M}_0} := I\,R$. En tal caso, la longitud de R/J es finita y además*

$$l(R/J) = \dim_k(R/J) = \dim_k(k[x_1, \ldots, x_d]/I)\ .$$

Demostración. Por ser $\mathfrak{M}_0$-primario, I está contenido sólo en el maximal $\mathfrak{M}_0$. De esta manera, $k[x_1, \ldots, x_d]/I$ ya es un anillo local. Por lo tanto, $R/J \simeq k[x_1, \ldots, x_d]/I$ y sus longitudes como módulos sobre el anillo de polinomios coinciden.

Ahora bien, R/J adquiere naturalmente una estructura de R-módulo vía $(f/t)\cdot(\overline{h/g}) = \overline{(fh)/(tg)}$, con $f, t \in k[x_1, \ldots, x_d]$, $(gt)(\bar{0}) \neq 0$ que coincide con la estructura heredada de R. En particular, la longitudes de R/J como R-módulo y como $k[x_1, \ldots, x_d]$-módulo coinciden. En particular, esto permitirá probar que $l(R/J)$ es finita.

Por el resultado del Lema 3.1.13, $l(R/J) = l(k[x_1, \ldots, x_d]/I) = \dim_k(k[x_1, \ldots, x_d]/I)$, lo cual termina de probar el enunciado. □

En el caso de un ideal 0-dimensional del anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_d]$, con k alg. cerrado, tenemos la descomposición primaria:

$$I = \bigcap_{P \in V(I)} Q_P \qquad Q_P \text{ ideal } \mathfrak{M}_P\text{-primario} .$$

De esta manera, el cociente R/I es de longitud finita (por Proposición 3.1.15) y

$$l(R/I) = \dim_k(R/I) = \sum_{P \in V(I)} \dim_k(R/Q_P) ,$$

donde la última igualdad es un resultado básico de la teoría de ideales 0-dimensionales (Corollary 2.5, pág. 142, [9]).

Corolario 3.1.19 *Sea I ideal del anillo del polinomios con k algebraicamente cerrado, tal que $0 \in V(I)$. Consideremos dicho ideal en el anillo de polinomios localizado en el origen $R = k[x_1, \ldots, x_d]_{\mathfrak{M}_0}$, digamos $J = I\,R$. En tal caso, la longitud de R/J es finita y además*

$$l(R/J) = \dim_k(R/J) \leq \dim_k(k[x_1, \ldots, x_d]/I) .$$

Demostración. Si I no es 0-dimensional, el resultado es claro. Si lo es, entonces $\tilde{I} = J \cap k[x_1, \ldots, x_d] \supset I$ es $\mathfrak{M}_0$-primario y vale

$$l(R/\tilde{I}R) = l(R/J) = \dim_k(R/J) = \dim_k(R/\tilde{I}R) \leq \dim_k(k[x_1, \ldots, x_d]/\tilde{I}) .$$

□

Al analizar la longitud de un cociente del anillo de polinomios localizado en el origen, tenemos una herramienta muy fuerte para realizar nuestros cálculos: las bases standard (cfr. [21]).

Proposición 3.1.20 (Corollary 4.5, pág. 169, [9]) *Sea I un ideal en el anillo local $R = k[x_1, \ldots, x_d]_{\mathfrak{M}_0}$, $\prec$ un orden local y supongamos que $\dim(R/in_\prec(I))$ es finito. Entonces*

$$\dim(R/I) = \dim(R/in_\prec(I)) .$$

A partir de esto, obtenemos una igualdad entre las longitudes de dichos cocientes que será sumamente útil. Se usará con frecuencia hacia el final del presente capítulo.

Corolario 3.1.21 *Dados $J \subset R = k[x_1, \ldots, x_d]_0$ ideal $\mathfrak{M}_0$-primario, con k alg. cerrado y un orden local $\prec$, se tiene*

$$l(R/J) = l(R/in_\prec(J)) ,$$

considerando la longitud de cada cociente como R-módulo.

Demostración. Sabemos que J es 0-dimensional, por ser $\mathfrak{M}_0$-primario. En particular, J contiene un monomio en cada variable, digamos $x_i^{a_i}$, con $a_i > 0$ (ya que el origen es el único cero de J). En particular, esto dice que su inicial también contiene a la misma potencia $x_i^{a_i}$. Por lo tanto, el inicial también resulta $\mathfrak{M}_0$-primario y 0-dimensional (la región debajo de la "escalera" contiene finitos monomios, que serán un sistema de generadores sobre k del cociente). En consecuencia, por el Lema 3.1.18 aplicado a los ideales J e $in_\prec(J)$:

$$l(R/in_\prec(J)) = \dim_k(R/in_\prec(J)) = \dim_k(R/I) = l(R/I) ,$$

donde la segunda igualdad es válida por la Proposición 3.1.20, producto de la construcción de bases standard. □

En particular, resulta $l(R/J^n) = l(R/in_\prec(J^n)) \leq l(R/in_\prec(J)^n)$, donde además se verifica una desigualdad estricta en general. En consecuencia, las multiplicidades del ideal J y de su inicial $in_\prec(J)$ no tiene por qué coincidir. Hacia el final del presente capítulo, relacionamos ambas magnitudes.

3.2 Reducción al caso de intersección completa local

En la presente sección analizaremos el caso de intersección completa local. Antes de proceder, explicamos el contexto geométrico en el cual se enmarca el mismo.

Definición 3.2.1 *Un anillo R es una* intersección completa *si existe un anillo regular S y una sucesión regular $x_1, \ldots, x_t \in S$ tal que $R \simeq S/\langle x_1, \ldots, x_t\rangle$. Notar que no necesariamente $t = \dim(S)$, aunque siempre se tiene $t \leq \dim(S)$.*

Esta es una definición abstracta de intersección completa. Sabemos que un anillo de polinomios $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ es regular. Por lo tanto, un cociente de dicho anillo por un ideal generado por una sucesión regular es una intersección completa. Esta es la situación que queremos explotar.

Más en general, sea $C = V(I) \subset k^n$ (k alg. cerrado) una variedad algebraica afín. Es un hecho conocido que la cantidad de generadores de I verifica:

$$\#\text{gen}(C) \geq \text{codim}(C) = \text{altura}(I) \ .$$

Sea $\text{codim}(C) = c$. En caso de estar I generado por una sucesión regular, C será intersección de c hipersuperficies ($I = \langle g_1, \ldots, g_c\rangle$).

Tomemos k alg. cerrado y una sucesión regular $h_1, \ldots, h_c$ en $R = k[x_1, \ldots, x_d]$. Si el ideal que generan es 0-dimensional, entonces necesariamente $c = d$ (por Teorema de Ideales Principales de Krull). Veremos en el Corolario 3.2.9 que, bajo tales condiciones, se verifica

$$e(I, k[x_1, \ldots, x_d]) = \dim_k(k[x_1, \ldots, x_d]/I) \ .$$

En nuestro caso, tenemos un ideal homogéneo en m variables generado por $m+1$ polinomios f_j, que da lugar a una variedad proyectiva en $\mathbb{P}^m$. Si tenemos un punto $P \in V(I)$, podemos considerar un abierto alrededor de P isomorfo a $\mathbb{C}^m$, vía afinización con respecto a una coordenada. En tal caso, el ideal afinizado $\tilde{I}$ está dado por $m+1$ polinomios en $m-1$ variables. Si podemos dar al mismo a través de $m-1$ generadores que conforman una sucesión regular, tendremos una intersección completa local y podremos calcular la multiplicidad a través de la dimensión del cociente por el ideal $\tilde{I}$.

A modo de ejemplo, miremos el anillo $\mathbb{C}[u, s, t]$. Cuando los puntos base P conforman una intersección completa local, el ideal $I = \langle a, b, c, d\rangle$ admite dos generadores en el anillo localizado en P y afinizado, y e_P resulta simplemente la dimensión del cociente localizado, como demostraremos en el Corolario 3.2.9. De acuerdo con la Proposición 3.1.20, esta dimensión se calcula a partir de una base standard con respecto a un orden local. Tenemos, entonces, un cálculo algorítmico: dado un orden local $\prec$, basta con contar el número de monomios fuera de $in_{\prec}(I)$; ésa será la dimensión (ver Lema 3.1.16). A continuación, veamos cómo funciona esto en un caso particular, que será analizado más tarde con otras técnicas. El problema fundamental consiste en saber si tenemos o no una sucesión regular generadora del ideal afinizado.

En nuestro caso particular, el cálculo de las multiplicidades es más directo y no es necesario calcular una base standard. De acuerdo con [18], Capítulo 3, uno de los axiomas que debe cumplir la multiplicidad definida, que coincide con la definición que damos en este trabajo, es el siguiente: si $\{f, g\}$ es una sucesión regular en el anillo de polinomios en dos variables, $\{f^a, g^b\}$ también es una sucesión regular y se verifica

$$e(\langle f^a, g^b\rangle) = \dim_k(k[x,y]/\langle f^a, g^b\rangle) = ab\ \dim_k(k[x,y]/\langle f, g\rangle) = ab\ e(\langle f, g\rangle) \ .$$

En nuestra situación, f, g son producto de formas lineales en 2 variables (ya que hemos afinizado respecto de una variable). Más aún, f y g no pueden compartir ninguna de dichas formas si conforman una sucesión regular: cada par debe tener como cero común sólo al

origen. Concretamente, si $f = l_1 \cdots l_r$ y $g = L_1 \cdots L_t$ (las formas lineales se repiten de acuerdo a su multiplicidad) que verifican que $(l_i = L_j = 0) = \{(0,0)\}$ para todo par (i,j) entonces:

$$e_0(\langle f, g\rangle) = \sum_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le t}} \underbrace{e_0(\langle l_i, L_j\rangle)}_{=1} = r\,t\ .$$

Por lo tanto, la multiplicidad de cada punto base es simplemente el producto de la cantidad de formas lineales que aparecen en cada polinomio, contadas con multiplicidad.

Ejemplo 3.2.2 [Ejemplo 2.2.2 revisitado] Consideremos la matriz:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Por cuestiones que se desarrollarán en el Capítulo 4, sabemos que la parametrización es genéricamente 1-1, i.e. $\deg(\psi_B) = 1$.

Esta matriz B nos genera los siguientes polinomios:

$$a := l_1^2 * l_3 \quad ; \quad b := l_1^2 * l_2 \quad ; \quad c := l_1 * l_3 * l_4 \quad ; \quad d := l_2 * l_3 * l_4\ .$$

En este caso, $D = 3$ y tenemos los puntos base $P_{2,1} := (-2 : 1 : 2)$; $P_{2,3} := (1 : 0 : -1)$; $P_{3,1} := (1 : 0 : -2)$ y $P_{4,1} := (-1 : 1 : 0)$. Localizando el ideal $I = \langle a, b, c, d\rangle$ en cada $P_{i,j}$ nos da como resultado:

$$I_{P_{2,1}} := \langle l_1, l_2\rangle\ ;\ I_{P_{2,3}} := \langle l_2, l_3\rangle\ ;\ I_{P_{3,1}} := \langle l_1^2, l_3\rangle\ ;\ I_{P_{4,1}} := \langle l_1^2, l_4\rangle.$$

Es claro que cada ideal localizado es una intersección completa, ya que basta considerar a cada par de formas involucradas en cada localización como las variables del anillo de polinomios. De acuerdo con lo visto previo al ejemplo, afinizando con respecto a una variable conveniente en cada ideal, tenemos $e_{(P_{2,1})} = 1$; $e_{(P_{2,3})} = 1$; $e_{(P_{3,1})} = 2$ y $e_{(P_{4,1})} = 2$.

Si aplicamos el Teorema 2.1.2, obtenemos:

$$D^2 = 9 = \deg S * 1 + (1 + 2 + 1 + 2) = \deg S\ \deg \psi_B + \sum_{P \in \mathcal{Z}} e_P\ ,$$

con lo cual, $\deg S = 3$.

Ahora, tratemos de calcular alguna ecuación implícita para S, y notemos a la misma con f. De acuerdo con la fórmula del Teorema 2.1.2, deberíamos obtener $\deg f = \deg S = 3$. Sabemos que usando técnicas provenientes de las bases de Gröbner, indicadas en la Sección §2.1.1, podemos calcular f. Mediante el programa SINGULAR obtenemos:

$$f := y_1^2 + y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_2 + y_2 * y_3^2\ ,$$

que verifica nuestra predicción para $\deg S$, corroborando en consecuencia la Fórmula de Grado.

$$D^2 = 9 = 3 * 1 + (1 + 2 + 1 + 2) = \deg S\ \deg \psi_B + \sum_{P \in \mathcal{Z}} e_P\ .$$

Observemos que la ecuación f para la hipersuperficie S ya fue calculada en el Ejemplo 2.2.2, Sección §2.2.2 a partir de una deshomogeneización del discriminante Δ_A. ■

Nuestro próximo objetivo consiste en aprovechar la simpleza del cálculo de la multiplicidad en el caso de intersección completa, y describir un modo de reducción del caso general a esta situación más sencilla. Recordemos que vamos a trabajar con ideales

0-dimensionales, ya que en este caso la multiplicidad es finita. La herramienta crucial estará dada por los llamados ideales de reducción, de los cuales resumimos algunas propiedades. Si dado $I \subset k[x_1, \ldots, x_d]$ (k alg. cerrado) de dimensión cero, encontramos un ideal $J \subseteq I$ 0-dimensional, que sea una intersección completa, entonces tendremos una forma de calcular $e(I)$, ya que resultará $e(I) = \dim_k (R/J)$ (ver Corolario 3.2.9).

La pregunta que surge entonces es cómo construir un tal ideal J. Afortunadamente, tenemos un modo genérico de hacerlo. Si $I \subset R = k[x_1, \ldots, x_{d-1}]$ es un ideal de dimensión cero, para constantes genéricas, $d-1$ combinaciones lineales de un sistema finito de generadores del ideal I generan un ideal J que es una intersección completa 0-dimensional. En efecto, dichas combinaciones lineales genéricas conformarán una sucesión regular de tamaño $d-1 = \dim(R)$ (cfr. Teorema 3.2.7).

En lo que sigue, daremos una justificación para ambos resultados. Introducimos a continuación dos nociones para ideales, la primera de las cuales hemos dado ya, pero en el contexto de anillos (cfr. Definición 3.1.1). Las mismas nos ayudarán a resolver nuestro problema de reducción al caso de intersección completa. Por otro lado, ambas estarán muy vinculadas entre sí, como veremos en el Lema 3.2.6.

Definición 3.2.3 *Sea $(R, \mathfrak{M})$ un anillo local noetheriano y $M \neq 0$ un R-módulo f.g.. Un* ideal de definición de M *es un ideal $I \subset \mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M}^n M \subset IM$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En caso de sobreentenderse el módulo M, lo omitiremos.*

De acuerdo con [28], la denominación "ideal de definición" tiene un origen topológico. En ciertas ocasiones, es conveniente mirar al anillo R como un espacio topológico, cuya base de entornos del cero está dada por las potencias del maximal $\mathfrak{M}$ (en el caso de un anillo semilocal, por las potencias del radical de Jacobson). Esta topología suele llamarse "natural". Si, por otro lado, tomamos cualquier ideal B podemos considerar la topología generada en el cero por potencias de dicho ideal. Esta topología originada a partir de B será la misma que la topología natural si y sólo si B es un ideal de definición. Es decir, B es un ideal que *define la topología natural* de R.

Definición 3.2.4 (Definition 4.6.4, [1]) *Sea R un anillo local noetheriano, I un ideal propio y M un R-módulo f.g.. Un ideal $J \subset I$ se dice un* ideal de reducción de I con respecto al módulo M *si $JI^n M = I^{n+1} M$ para algún $n >> 0$.*

Observación 3.2.5 *Notemos que, dada la conmutatividad del anillo R, esta definición de ideal de reducción equivale a pedir que exista un $n_0 = n_{0(J)}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumpla $JI^n M = I^{n+1} M$.*

El caso interesante a estudiar es el de existencia de un ideal de reducción de I que sea propio (i.e. $J \subsetneq I$), ya que I resulta siempre un ideal de reducción de sí mismo. Bajo hipótesis generales, es posible probar la existencia de reducciones propias. Este hecho es el que deseamos explotar.

Como corolario inmediato de las definiciones dadas, se tiene:

Lema 3.2.6 (Lemma 4.6.5, [1]) *Sea $(R, \mathfrak{M})$ un anillo local noetheriano, M un R-módulo f.g., I un ideal de definición de M y J un ideal de reducción de I con respecto a M. Entonces, J es un ideal de definición de M y $e(J, M) = e(I, M)$.*

Demostración. Vemos primero que J es un ideal de definición de M. Por definición de ideal de reducción, sabemos que existe $n >> 0$ tal que $I^{n+1} M = JI^n M \subset JM$. Además, existe $r >> 0$ tal que $\mathfrak{M}^r M \subset IM$. Si tomamos s suficientemente grande (digamos $s = r * (n+1)$) y aplicamos la inclusión anterior $(n+1)$ veces, resulta de la conmutatividad de R,

$$\mathfrak{M}^s M = (\mathfrak{M}^r)^{n+1} M \subset I^{n+1} M \subset JM \ .$$

Esto prueba que J es un ideal de definición de M.

Ahora, explotemos la inclusión $J \subset I$ y la definición de ideal de reducción aplicada a J. Consideremos $r >> 0$ y $n \geq n_0 = n_{0(J)}$. Por ser J ideal de reducción de I con respecto a M, tenemos aplicando sucesivamente la definición (alternativamente, vía un argumento inductivo),

$$I^{(r+n)+1}M = JI^{(r+n)}M = J(I^{(r-1+n)+1}M) = J(JI^{(r-1+n)}M) = J^2I^{(r-1+n)}M = \ldots = \\ = J^{r-1}(I^{n+1}M) = J^rI^nM \subset J^rM \ .$$

En consecuencia, resulta $I^{r+n+1}M \subset J^rM \subset I^rM$. Con esto,

$$l(M/I^{r+n+1}M) \geq l(M/J^rM) \geq l(M/I^rM) \ , \tag{3.4}$$

para todo $r >> 0$ y $n \geq n_0$ fijo. Ahora bien, sabemos que las tres expresiones son polinomios en $r+n$, $r-1$ y $r-1$, respectivamente. Vistos como polinomios en r, los "coeficientes principales" no se modifican y toman valores, módulo cociente por un factorial adecuado ($\dim(R)!$), $e(I,M)$, $e(J,M)$ y $e(I,M)$, respectivamente. Dado que los tres polinomios son de igual grado $d = \dim(M)$, la relación de orden entre ellos dada por la inecuación (3.4) se traslada a los coeficientes. Por lo tanto,

$$e(I,M) \geq e(J,M) \geq e(I,M) \ ,$$

lo que da la igualdad entre las multiplicidades de J y de I. □

A partir de la definición, la existencia de ideales de reducción no es, en principio, evidente. Un caso particular de dicha existencia consiste en encontrar J un ideal de reducción minimal, es decir, un ideal de reducción de I que no admita ninguna reducción propia. Northcott y Rees ([29]) probaron la existencia de reducciones minimales para ideales propios de R. Más aún, en caso de ser $k = R/\mathfrak{M}$ un cuerpo infinito, se tiene una caracterización completa de un ideal de reducción minimal en términos del ideal I: si $\dim(I) = 0$, existe un ideal de reducción generado por un sistema de parámetros (cfr. Remark 4.6.9, [1]).

Pese a tener suma importancia los resultados mencionados hasta el momento, los mismos carecen de algo fundamental: naturaleza algorítmica. No obstante, existe un teorema muy fuerte, que enunciamos a continuación aunque sin demostración, que da un gran paso en este sentido: provee de un algoritmo probabilístico para calcular un ideal de reducción a partir de generadores de un ideal I de dimensión cero. En efecto, bastará tomar $d = \dim(R)$ combinaciones lineales *genéricas* de un sistema finito de generadores del ideal I, para obtener un ideal de reducción de I generado por una sucesión regular de longitud d. De esta manera, conseguimos una intersección completa incluida en I y de igual multiplicidad (por el Lema 3.2.6).

Teorema 3.2.7 (Theorem 14.14, [26]) *Sea $(R,\mathfrak{M})$ un anillo local noetheriano de dimensión d, con cuerpo cociente $k = R/\mathfrak{M}$ infinito. Sea $I = (x_1,\ldots,x_s)$ un ideal $\mathfrak{M}$-primario de R. Entonces, si $y_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}x_j$ son d combinaciones lineales suficientemente genéricas de $x_1,\ldots,x_s$, el ideal $J = \langle y_1,\ldots,y_d\rangle$ es un ideal de reducción de I y, además, $y_1,\ldots,y_d$ resulta un sistema de parámetros de R.*

Demostración. Ver Theorem 14.14, pág. 112 [26]. □

A continuación, enunciamos el principal resultado para ideales que conforman una intersección completa.

Teorema 3.2.8 (Theorem 14.11, pág. 109, [26]) *Sea $(R, \mathfrak{M})$ un anillo local noetheriano de dimensión d. Sea M un R-módulo f.g. y sea $\mathcal{Q} = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$ generado por un sistema de parámetros. Tomemos los cocientes $R' = R/\langle x_1 \rangle$, $M' = M/\langle x_1 \rangle M$ y $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}/\langle x_1 \rangle R = \sum_{i=2}^{d} x_i R'$. Si x_1 no es un divisor de cero en M, resulta*

$$e(\mathcal{Q}, M) = e(\mathcal{Q}', M') \ .$$

Demostración. Seguiremos de cerca la argumentación de [26]. En primer lugar, observemos que por los Teoremas de Isomorfismos, se verifica

$$M'/\mathcal{Q}'^{n+1}M' \simeq M/(\langle x_1 \rangle + \mathcal{Q}^{n+1})M \simeq \frac{M/\mathcal{Q}^{n+1}M}{(\langle x_1 \rangle + \mathcal{Q}^{n+1})M/\mathcal{Q}^{n+1}M}$$

y

$$(\langle x_1 \rangle + \mathcal{Q}^{n+1})M/\mathcal{Q}^{n+1}M \simeq \langle x_1 \rangle M/(\langle x_1 \rangle M \cap \mathcal{Q}^{n+1}M) \ .$$

Además, por definición del transportador, y por la inclusión $\mathcal{Q}^n M \subset (\mathcal{Q}^{n+1}M : x_1)$, tenemos:

$$\langle x_1 \rangle M/(\langle x_1 \rangle M \cap \mathcal{Q}^{n+1}M) \simeq M/(\mathcal{Q}^{n+1}M : x_1) \simeq \frac{M/\mathcal{Q}^n M}{(\mathcal{Q}^{n+1}M : x_1)/\mathcal{Q}^n M} \ .$$

Usando la exactitud de la función longitud, resulta:

$$\begin{aligned} l(M/\mathcal{Q}^{n+1}M) - l(M'/\mathcal{Q}'^{n+1}M') &= l((\langle x_1 \rangle + \mathcal{Q}^{n+1})M/\mathcal{Q}^{n+1}M) = \\ &= l(\langle x_1 \rangle M/\langle x_1 \rangle M \cap \mathcal{Q}^{n+1}M) = l(M/(\mathcal{Q}^{n+1}M : x_1)) = l(M/\mathcal{Q}^n M) - \\ &\quad - l((\mathcal{Q}^{n+1}M : x_1)/\mathcal{Q}^n M) \ , \quad (3.5) \end{aligned}$$

con lo cual,

$$l(M'/\mathcal{Q}'^{n+1}M') = l((\mathcal{Q}^{n+1}M : x_1)/\mathcal{Q}^{n+1}M) + \{l(M/\mathcal{Q}^{n+1}M) - l(M/\mathcal{Q}^n M)\} \ . \quad (3.6)$$

Observemos que para valores $n >> 0$, $l(M/\mathcal{Q}^{n+1}M) - l(M/\mathcal{Q}^n M)$ es un polinomio de grado a lo sumo $d - 1 = \dim(R) - 1 = \dim(R')$, por ser $\langle x_1, \ldots, x_d \rangle$ un sistema de parámetros de R (ver Theorem 14.1, pág 105, [26]).

Tomemos el ideal $I = \langle x_2, \ldots, x_d \rangle \subset R$. Por construcción $\mathcal{Q} = \langle x_1 \rangle R + I$ y, por ende, $\mathcal{Q}^{n+1} = \langle x_1 \rangle \mathcal{Q}^n + I^{n+1}$. De esta manera, el transportador verifica

$$(\mathcal{Q}^{n+1}M : x_1) = ((\langle x_1 \rangle \mathcal{Q}^n + I^{n+1})M : x_1) = \mathcal{Q}^n M + (I^{n+1}M : x_1) \ . \quad (3.7)$$

Ahora bien, de acuerdo con el Teorema de Artin-Rees, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n > c$ se verifica $I^{n+1}M \cap \langle x_1 \rangle M = I^{n-c}(I^{c+1}M \cap \langle x_1 \rangle M)$.

Afirmación. Como x_1 no es divisor de cero en M, resulta $(I^{n+1}M : x_1) \subset I^{n-c}M$.

Demostración. Tomemos $m \in (I^{n+1}M : x_1)$. Por definición, $x_1 m \in I^{n+1}M \cap \langle x_1 \rangle M = I^{n-c}(I^{c+1}M \cap \langle x_1 \rangle M) \subset I^{n-c}\langle x_1 \rangle M$. Luego, existe $m' \in I^{n-c}M$ tal que $x_1 m = x_1 m'$. Como x_1 no es divisor de cero en M, se sigue $m = m' \in I^{n-c}M$. □

De este modo, usando (3.7) y la reciente afirmación, se cumple

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}^{n+1}M : x_1)/\mathcal{Q}^n M = \big(\mathcal{Q}^n M + (I^{n+1}M : x_1)\big)/\mathcal{Q}^n M \subset \big(\mathcal{Q}^n M + I^{n-c}M\big)/\mathcal{Q}^n M \simeq \\ \simeq I^{n-c}M/(I^{n-c}M \cap \mathcal{Q}^n M) \ . \end{aligned}$$

Sumando esto a la ecuación (3.6), se cumple:

$$l(M'/\mathcal{Q}'^{n+1}M') \leq l(I^{n-c}M/(I^{n-c}M \cap \mathcal{Q}^n M)) \ . \quad (3.8)$$

Miremos más de cerca el cociente $I^{n-c}M/(I^{n-c}M \cap \mathcal{Q}^n M)$. Dado que $I^{n-c} \subset \mathcal{Q}^{n-c}$, el mismo tiene una estructura de módulo sobre el anillo $R/\mathcal{Q}^c$. Como I está generado por $d-1$ elementos, cada uno de los ideales I^{n-c} está generado por $\binom{n-c+d-2}{d-2}$ elementos (todos los posibles productos de $n-c$ elementos elegidos entre los $d-1$ generadores de I).

Afirmación. Si $n > c$ y s es el número de generadores de M (M es f.g. por hipótesis) tenemos

$$l(I^{n-c}M/(I^{n-c}M \cap \mathcal{Q}^n M)) \leq \binom{n-c+d-2}{d-2} l(R/\mathcal{Q}^c)\, s\ , \tag{3.9}$$

donde la longitud de la izquierda puede interpretarse tanto como $R/\mathcal{Q}^c$ ó R-módulo.

Demostración. Para probar la desigualdad, construiremos una cadena maximal para $I^{n-c}M/I^{n-c}\mathcal{Q}^c M$ (con posible igualdad entre alguno de sus eslabones) de cardinal igual a $\binom{n-c+d-2}{d-2} l(R/\mathcal{Q}^c)\, s$. De esta manera, merced a posibles cancelaciones y mediante el Teorema de Jordan-Hölder, la longitud del cociente será menor o igual a dicho cardinal. Para concluir con la desigualdad de la Afirmación bastará observar, simplemente, que $I^{n-c}\mathcal{Q}^c M \subset I^{n-c}M \cap \mathcal{Q}^n M$ (ya que $I^{n-c} \subset \mathcal{Q}^{n-c}$), con lo cual

$$l(I^{n-c}M/(I^{n-c}M \cap \mathcal{Q}^n M)) \leq l(I^{n-c}M/(I^{n-c}\mathcal{Q}^c M)) \leq \binom{n-c+d-2}{d-2} l(R/\mathcal{Q}^c)\, s\ .$$

Armemos entonces la cadena maximal para $I^{n-c}M/I^{n-c}\mathcal{Q}^c M$. Sean $\{m_1, \ldots, m_s\}$ un conjunto de generadores de M. A partir de los mismos, construiremos, en forma similar, s subcadenas: una por cada elemento m_i.

Sea $r = l(R/\mathcal{Q}^c)$ y tomemos una serie de composión para $R/\mathcal{Q}^c$:

$$J_0 = \mathcal{Q}^c \subset J_1 \subset \ldots \subset J_r = R\ . \tag{3.10}$$

Notemos $\tilde{x} = (x_2, \ldots, x_n)$ y sea $\{\tilde{x}^{\alpha_1}, \ldots, \tilde{x}^{\alpha_t}\}$ con $t = \binom{n-c+d-2}{d-2}$ un sistema de generadores para I^{n-c} dado por "monomios" de grado $n-c$ en los elementos de $\tilde{x}$.

Sabemos que $I^{n-c}\mathcal{Q}^c M = I^{n-c}\mathcal{Q}^c\langle m_1, \ldots, m_s\rangle = \sum_{j=1}^{s} I^{n-c}\mathcal{Q}^c\langle m_j\rangle$. Notemos entonces a cada sumando con $M_j := I^{n-c}\mathcal{Q}^c\langle m_j\rangle$, $j = 1, \ldots, s$. La cadena maximal para el cociente $I^{n-c}M/I^{n-c}\mathcal{Q}^c M$ se obtendrá en s etapas. Cada una de ellas armará una cadena maximal para $M_j \subset \langle m_j\rangle$. Encadenando estas s cadenas maximales vía sumas (una a continuación de la otra, siguiendo el orden $m_1, \ldots, m_s$), obtendremos el resultado buscado.

Armemos entonces una cadena maximal para $M_j \subset \langle m_j\rangle$. Vía el morfismo suryectivo canónico

$$\Phi\ :\ I^{n-c}\mathcal{Q}^c \longrightarrow I^{n-c}\mathcal{Q}^c\langle m_j\rangle \qquad a \longmapsto a\, m_j$$

podemos suponer $M = R$ (y $m_j = 1$), ya que $l(I^{n-c}\mathcal{Q}^c\langle m_j\rangle) \leq l(I^{n-c}\mathcal{Q}^c)$ como R-módulos.

De acuerdo con la notación elegida, $I^{n-c}\mathcal{Q}^c = \langle \tilde{x}^{\alpha_1}, \ldots, \tilde{x}^{\alpha_t}\rangle\mathcal{Q}^c = \sum_{k=1}^{t} \langle \tilde{x}^{\alpha_k}\rangle\mathcal{Q}^c$. Llamemos $I_k := \langle \tilde{x}^{\alpha_k}\rangle\mathcal{Q}^c$, $k = 1, \ldots, t$. Para cada k, vía la serie de composición para $R/\mathcal{Q}^c$ dada en la expresión (3.10) tenemos la cadena

$$\mathcal{C}_k\ :\ I_k = \langle \tilde{x}^{\alpha_k}\rangle J_0 \subset \langle \tilde{x}^{\alpha_k}\rangle J_1 \subset \ldots \subset \langle \tilde{x}^{\alpha_k}\rangle J_r = \langle \tilde{x}^{\alpha_k}\rangle\ . \tag{3.11}$$

Los cocientes sucesivos serán simples o nulos. Esto se deberá a que el epimorfismo

$$\varphi\ :\ J_i/J_{i-1} \longrightarrow \langle \tilde{x}^{\alpha_k}\langle J_i\,/\,\langle \tilde{x}^{\alpha_k}\rangle J_{i-1} \qquad \overline{a} \longmapsto \overline{a\tilde{x}^{\alpha_k}}$$

es nulo o biyectivo.

Finalmente, adjuntando las cadenas $\mathcal{C}_k$ $(k = 1, \ldots, t)$ dadas en (3.11) una a continuación de la otra:

$$\begin{array}{l} I_1 = \langle \tilde{x}^{\alpha_1} \rangle J_0 \subset \langle \tilde{x}^{\alpha_1} \rangle J_1 \subset \ldots \subset \langle \tilde{x}^{\alpha_1} \rangle J_r = \langle \tilde{x}^{\alpha_1} \rangle \subset \\ \langle \tilde{x}^{\alpha_1} \rangle + I_2 \subset \langle \tilde{x}^{\alpha_1} \rangle + \langle \tilde{x}^{\alpha_2} \rangle J_1 \subset \ldots \subset \langle \tilde{x}^{\alpha_1} \rangle + \langle \tilde{x}^{\alpha_2} \rangle \subset \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \langle \tilde{x}^{\alpha_1}, \ldots, \tilde{x}^{\alpha_{t-1}} \rangle + I_t \subset \langle \tilde{x}^{\alpha_1}, \ldots, \tilde{x}^{\alpha_{t-1}} \rangle + \langle \tilde{x}^{\alpha_t} \rangle J_1 \subset \ldots \subset \langle \tilde{x}^{\alpha_1}, \ldots, \tilde{x}^{\alpha_{t-1}} \rangle + \langle \tilde{x}^{\alpha_t} \rangle = I^{n-c} \end{array}$$

obtenemos la cadena deseada para $M_j \subset \langle m_j \rangle$. □

Ahora bien, el lado derecho de la desigualdad es un polinomio de grado $d-2$ en n. Juntando las expresiones (3.8) y (3.9) resulta que el coeficiente de grado $d-1$ en la longitud $l(M'/\mathcal{Q}'^{n+1}M')$ está dado por el término correspondiente a la diferencia $l(M/\mathcal{Q}^{n+1}M) - l(M/(\mathcal{Q}^n M))$. De esta manera, de acuerdo con la Observación 3.1.5 y teniendo en cuenta que $\dim(R') = d-1$, resulta

$$\begin{aligned} e(\mathcal{Q}', M') &= \lim_{n\to\infty} \frac{l(M'/\mathcal{Q}'^{n+1}M')\,(d-1)!}{n^{d-1}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\{l(M/\mathcal{Q}^{n+1}M) - l(M/\mathcal{Q}^n M)\}\,(d-1)!}{n^{d-1}} = e(\mathcal{Q}, M)\ , \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene por simple manipulación de coeficientes. En efecto, para $n >> 0$, el término de grado $d-1$ de la diferencia de longitudes es $d\,a_d$ siendo $a_d = e(\mathcal{Q}, M)/d!$ el coeficiente de grado $d-1$ del polinomio $l(M/\mathcal{Q}^{n+1}M)$. □

Corolario 3.2.9 *Sea $I \subset k[x_1, \ldots, x_d]$ (k alg. cerrado) ideal 0-dimensional generado por la sucesión regular $\langle h_1, \ldots, h_d \rangle$. En tal caso,*

$$e(I) = \dim_k(R/I)\ .$$

Demostración. De acuerdo con el Teorema 3.2.8, como $\langle h_1, \ldots, h_d \rangle$ es una sucesión regular y el cociente R/I es local, tenemos

$$e(I, R) = e(I/\langle h_1, \ldots, h_d \rangle, R/\langle h_1, \ldots, h_d \rangle) = e(0, R/I)\ .$$

Por último, por ser R/I artiniano, dicha multiplicidad está bien definida (por ser la longitud de R/I finita). Más aún, dicha condición de artinianidad indica que la función de Hilbert-Samuel es constante para cualquier ideal del cociente R/I. En particular, en el caso del ideal 0, esta función es siempre constante. Vale entonces $e(0, R/I) = l(R/I) = \dim_k(R/I) < \infty$, como queríamos. □

Recordemos que para el cálculo del grado de la hipersuperficie S definida por la parametrización ψ_B era necesario tener, al menos, cotas inferiores para las multiplicidades, ya que por la Fórmula de Grado (Teorema 2.1.2)

$$\deg(S) = D^2 - \sum_{P \in \mathcal{Z}} e_P\ .$$

El siguiente resultado da una respuesta a esta cuestión.

Proposición 3.2.10 *Sea $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ (k alg. cerrado) y sea $I \subset R$ un ideal de definición 0-dimensional. En tal caso, $e(I) \geq l(R/I)$.*

Demostración. Consideremos $J \subset I$ un ideal de reducción de I que sea intersección completa. De acuerdo con el Lema 3.2.6, sabemos que $e(I, R) = e(J, R)$. Por último, usando el Corolario 3.2.9 (después de localizar convenientemente) tenemos $e(I, R) = e(J, R) = l(R/J) \geq l(R/I)$. □

En conclusión: aún si no estuvieramos en el caso de una intersección completa, siempre podemos emplear el siguiente algoritmo probabilístico para el cálculo de la multiplicidad local:

Corolario 3.2.11 ***Método Probabilístico:*** *Reducción vía una intersección completa genérica.*

Tomemos el ideal I, el punto base P y afinicemos el mismo con respecto a una variable conveniente. Supongamos s.p.g. que la misma es u_m. Notemos a los polinomios afinizados también con f_j. Si $I := \langle f_0, \ldots, f_m \rangle \subset k[u_1, \ldots, u_{m-1}]$, consideremos $m-1$ combinaciones lineales genéricas de estos $m+1$ generadores:

$$J := \langle v_0^{(0)} f_0 + v_1^{(0)} f_1 + \ldots + v_m^{(0)} f_m \ \ldots ; \ v_0^{(m-1)} f_0 + v_1^{(m-1)} f_1 + \ldots + v_m^{(m-1)} f_m \rangle$$

para constantes genéricas v_i^j (Teorema 3.2.7). Sabemos que J_P es genéricamente una reducción de I_P, que además es una intersección completa contenida en I_P. En consecuencia, si calculamos $s := \dim_k (k[u_1, \ldots, u_{m-1}]_P / J_P)$, con probabilidad 1, tenemos $e_P = s$.

Observación 3.2.12 *Notemos que, en nuestro caso, el ideal I (afinizado, por ejemplo, respecto de la variable u_m) está generado por $m+1$ polinomios que son producto de formas linales afinizadas provenientes de la matriz B. En general, no todas ellas se anulan en un punto base dado P. Gracias a esto, es posible (en la mayor parte de los casos) reducir el número de generadores de I_P, siempre y cuando la combinatoria de las formas lineales que se anulan en P sea buena. Dado que I_P es un ideal 0-dimensional en $k[x_1, \ldots, u_{m-1}]$, a lo sumo, podremos reducir en dos el número de generadores, de acuerdo con el Teorema de Ideales Principales de Krull, ya que, de otro modo, jamás tendremos un ideal 0-dimensional.*

En caso de obtener $m-1$ polinomios que se corten bien, estaremos en el caso de una intersección completa, sin necesidad de efectuar un cálculo probabilístico. Un caso muy particular donde esto se verifica es cuando sólo $m-1$ formas lineales (l.i.) se anulan en un punto base P, como vimos en el Ejemplo 3.2.2. Si al localizar obtenemos $m-1$ polinomios que conforman una sucesión regular, cada uno será potencia de una estas formas lineales. En tal caso, la multiplicidad será simplemente el producto de dichos exponentes.

Lamentablemente, no es sencillo encontrar una caracterización, en términos de los coeficientes de la matriz B, que garantice una intersección completa en cada punto base. En efecto, presentamos un ejemplo muy sencillo de una matriz de tamaño 4×3 donde no se da intersección completa para uno de sus puntos base. Observemos que esta matriz provendrá de una matriz A muy particular: la formada por una fila de unos en $\mathbb{Z}^{1\times 4}$. Esto se deberá a que todos los menores maximales de B serán no nulos. En consecuencia, la condición de menores maximales no nulos no garantizará la propiedad de intersección completa. Más aún, esta condición sobre los menores maximales nos pondrá en el contexto de ideales monomiales (ver Corolario 3.3.8).

Ejemplo 3.2.13 Para la contrucción de la matriz B, procedemos del siguiente modo. Queremos tomar un punto base P que sea cero de sólo dos formas lineales. Partimos de un ideal generado por 4 monomios *coprimos* en dos formas lineales genéricas l_1 y l_2 que no sea una intersección completa: esto se logrará, evitando cancelaciones que den lugar a una sucesión regular. Estos 4 monomios provendrán de tomar los polinomios f_0, f_1, f_2 y f_3 y eliminar las formas l_3 y l_4 que aparezcan en los mismos, ya que éstas no se anularán en el punto P. Por ejemplo:

$$\tilde{f}_1 = l_1^2 \quad ; \quad \tilde{f}_2 = l_1 * l_2 \quad ; \quad \tilde{f}_3 = l_1^3 \quad ; \quad \tilde{f}_4 = l_2^2 \, .$$

A partir de esto, tratemos de deducir la forma original de la parametrización ψ_B. Por tener 4 monomios coprimos, esto garantizará que al construir los polinomios f_i y localizar en el punto P recuperaremos los polinomios $\tilde{f}_i$. Los exponentes $b_{i,j}$ de cada forma lineal se obtendrán a partir de cancelaciones en los cocientes f_i/f_0 $(i = 1, 2, 3)$. En particular, para

descubrir los exponentes de las formas l_1 y l_2 (que caracterizan a las mismas) bastará con trabajan los cocientes localizados, es decir $\tilde{f}_i/\tilde{f}_0$ $(i = 1, 2, 3)$. En consecuencia:

$$\tilde{y_1} = l_1^2/l_2^2 \quad ; \quad \tilde{y_2} = l_1 l_2/l_2^2 = l_1/l_2 \quad ; \quad \tilde{y_3} = l_1^3/l_2^2 \, .$$

Esto nos permite recuperar las dos primeras filas de la matriz B. Serán

$$B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Para finalizar, completemos la matriz B con dos filas adicionales de tal modo que ninguna sea l.d. con las dos primeras (para garantizar que al localizar en P eliminemos dichas formas lineales) y tal que la suma total cada una de las columnas sea cero. Por ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

En efecto, la parametrización da los polinomios

$$f_1 = l_1^2 * l_3 \quad ; \quad f_2 = l_1 * l_2 * l_3 \quad ; \quad f_3 = l_1^3 \quad ; \quad f_0 = l_2^2 * l_4 \, .$$

Los puntos base son $P_{1,4} = (-2 : 1 : 1)$ y $P = P_{1,2} = (1 : -2 : 0)$. Los ideales localizados resultan $I_{P_{1,4}} = \langle l_1^2; l_1; l_1^3; l_4 \rangle = \langle l_1; l_4 \rangle$ e $I_{P_{1,2}} = \langle l_1^2; l_1 * l_2; l_1^3; l_2^2 \rangle = \langle l_1^2; l_1 * l_2; l_2^2 \rangle$. Aunque el primer ideal localizado es claramente una intersección completa, el segundo no lo es y coincide con el ideal original del cual provino toda la construcción. ■

Corolario 3.2.14 *Con la notación anterior, combinando el Corolario 3.1.19 con la Proposición 3.2.10, tenemos*

$$e_P \geq \dim_k \left(k[u_1, \ldots, u_{m-1}]_P / I_P \right) .$$

Combinando este resultado con el Teorema 2.1.2 tenemos una cota superior para el grado de la hipersuperficie, que es menor a D^2.

Corolario 3.2.15 *Dada la matriz B y la hipersuperficie S como en la Sección §2.1.1, por ser* $\deg(\psi_B) = 1$ *(ver Capítulo 4) resulta*

$$\deg(S) \leq D^2 - \sum_{P \in \mathcal{Z}} \dim_k \left(k[u_1, \ldots, u_{m-1}]_P / I_P \right) .$$

3.3 Reducción al caso de ideales monomiales

Pese a que el caso general de multiplicidades es muy complejo, cuando I es un ideal monomial, existe una forma "combinatoria" de calcular esta multiplicidad, como se indica en [14]. En dicho trabajo, el interés recae en el cálculo de multiplicidades para ideales $\mathfrak{M}$-primarios o 0-dimensionales en el anillo de polinomios. En cambio, nuestro interés son ideales en un anillo de polinomios localizado. A partir de los resultados presentados en dicho trabajo, pudimos obtener versiones "locales" de los mismos.

A continuación, reproducimos el enunciado principal de dicho artículo adaptado al caso local y damos un ejemplo. Más aún, el algoritmo calculará la multiplicidad del ideal inicial $in_{\prec}(I)$, con respecto a cualquier orden local. Nos concentraremos principalmente en el caso $m = 3$.

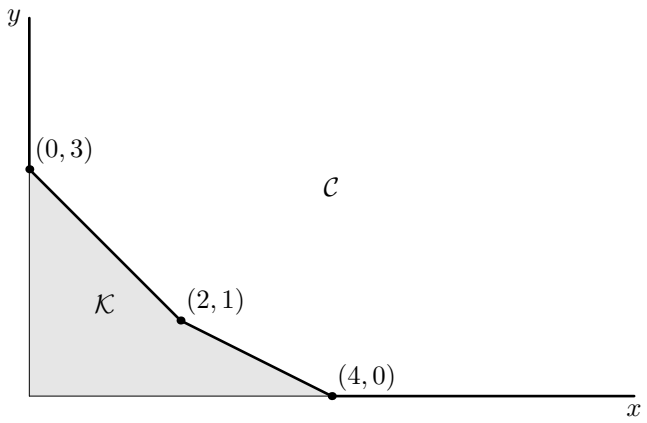

Figura 3.1: Región delimitada por el ideal I_1

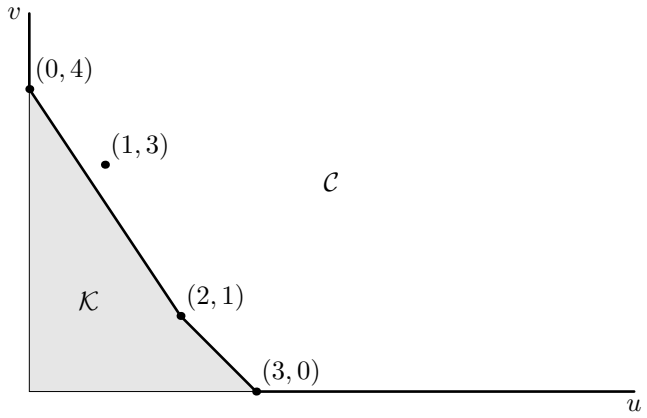

Figura 3.2: Región delimitada por el ideal I_2

Definición 3.3.1 *Dado un ideal I monomial en $R = k[x_1, \ldots, x_d]$, llamemos la región de $\mathbb{N}_0^d$ definida por I, que notaremos con $\mathcal{K}_I$ o simplemente $\mathcal{K}$, al complemento en el primer cuadrante de la cápsula convexa generada por los monomios pertenecientes a I. Más aún, es suficiente tomar la capsula convexa de cualquier conjunto de monomios que genere el ideal.*

Teorema 3.3.2 (Proposition 1.5, pág, [14]) *Sea I un ideal monomial en $R = k[x_1, \ldots, x_d]$, generado por monomios $x^{v_1}, \ldots, x^{v_s}$. Supongamos que $l(R/I) < \infty$. Si $\mathcal{K}$ es la región de $\mathbb{N}_0^d$ definida por I, entonces*

$$e(I) = d!\ Vol(\mathcal{K})\ ,$$

i.e. el volumen normalizado de dicha región.

A continuación, ilustramos la Proposición con dos ejemplos, que veremos más adelante en detalle (Ejemplo 3.3.16).

Ejemplo 3.3.3 Tomemos como ideales $I_1 = \langle u^4, s^3, u^2 s\rangle$ e $I_2 = \langle u^3, 2u^2 s, 3us^3, s^4\rangle$. Si calculamos los volúmenes normalizados correspondientes, obtenemos $e(I_1) = 10$ y $e(I_2) = 11$. Ver Figuras 3.1 y 3.2. ■

Antes de proceder con el cálculo efectivo de multiplicidades para el caso monomial, relacionemos el cálculo para el caso de ideales monomiales con el algoritmo probabilístico presentado en el Corolario 3.2.11.

Corolario 3.3.4 *Sea $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subseteq \mathbb{N}_0^d$, con $r \geq d$. Supongamos además que $\alpha_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \ldots, d$ con $\lambda_i \in k^*$ y k un cuerpo algebraicamente cerrado. Sean*

$$F_i(x) = \sum_{j=1}^{r} c_j^i \, x^{\alpha_j} \ , \qquad i = 1, \ldots, d \quad ; \quad x = (x_1, \ldots, x_d)$$

con $(c_j^1)_j, \ldots, (c_j^d)_j \in k^r$ vectores genéricos. Es decir, los $F_i(x)$ resultan d polinomios genéricos con soporte dado por el conjunto A en d variables con coeficientes en un cuerpo arbitrario k.

En tal caso, $\dim_k \left(\frac{k[x_1,\ldots,x_d]}{\langle F_1,\ldots,F_d\rangle}\right)_0$ *coincide con el volumen normalizado del complemento en $\mathbb{R}_{\geq 0}^d$ de la cápsula convexa $\mathcal{C}$ de $(\alpha_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}^d, \ldots, \alpha_r + \mathbb{R}_{\geq 0}^d)$, es decir, el volumen normalizado de la región $\mathcal{K}$.*

Demostración. Notemos con $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ al anillo de polinomios. En primer lugar, observemos que A contiene un múltiplo de cada vector canónico. En consecuencia el ideal $I = \langle x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_r} \rangle$ contiene una potencia de cada variable, lo que dice $V(I) = \{(0, \ldots, 0)\} \subset k^d$.

De acuerdo con el Corolario 3.2.11, sabemos que $e(I, R) = e(I_0, R_0)$ coincide con $\dim_k \left(\frac{k[x_1,\ldots,x_d]}{\langle F_1,\ldots,F_d\rangle}\right)_0$ genéricamente. A partir del Teorema 3.3.2, podemos calcular $e(I, R)$ como el volumen normalizado del complemento de $\mathcal{C}$ en el ortante positivo.

En consecuencia,

$$\dim_k \left(\frac{k[x_1, \ldots, x_d]}{\langle F_1, \ldots, F_d\rangle}\right)_0 = e(\langle F_1, \ldots, F_d\rangle_0, k[x_1, \ldots, x_d]_0) = e(I, R)$$

y esta multiplicidad coincide con el volumen normalizado de $\mathbb{R}_{\geq 0}^d \setminus \mathcal{C} = \mathcal{K}$. □

Supongamos que $P = (0 : 0 : 1)$ es un punto base (podremos asumir que éste es el caso, luego de aplicar un isomorfimo lineal, gracias al Lema 3.3.5), $I := \langle a, b, c, d\rangle$ es el ideal e I_P (el ideal localizado en el punto P), luego de afinizar con respecto a una variable, es un ideal monomial. Equivalentemente, podemos primero afinizar con respecto a la variable u_3 (si $P = (p_1 : p_2 : 1)$) y luego trasladar el origen al punto correspondiente (p_1, p_2), de acuerdo con el Lema 3.3.5.

En tales circunstancias, tenemos el siguiente algoritmo para calcular la multiplicidad del punto P en la parametrización ψ_B.

Algoritmo 1 Cálculo de la mult. de Hilbert-Samuel para el caso I_P monomial y $m = 3$.
Entradas: Un sistema finito y *monomial* de generadores $I_P \subset k[u_1, u_2]$ (i.e. $u_3 = 1$).
Salida: Multiplicidad e_P.
1: A partir del conjunto de generadores de la entrada, calcule su cápsula convexa $\mathcal{C}$.
2: Calcule $\mathcal{K} \leftarrow \mathbb{N}_0^2 \setminus \mathcal{C}$, i.e. su complemento en el cuadrante positivo.
3: $e_P \leftarrow 2!\ Vol(\mathcal{K})$.

La dificultad principal en el caso general radica en calcular el volumen de la cápsula convexa para dimensiones $m - 1$ mayores a 2. En efecto, si $P = (0 : \ldots : 0 : 1) \in \mathbb{P}^{m-1}$ es punto base, el algoritmo reemplazando 2 por $m-1$ devuelve la multiplicidad e_P. La técnica a utilizar consistirá en aplicar un isomorfismo lineal para llevar el punto P a $(0 : \ldots : 0 : 1)$, y calcular su multiplicidad mediante el algoritmo antes descrito. Equivalentemente, afinizar con respecto a u_m (si $P = (p_1 : \ldots : p_{m-1} : 1) = (P' : 1)$) y trasladar el origen de $\mathbb{C}^{m-1}$ al punto correspondiente $P' \in \mathbb{C}^{m-1}$. De esta manera, estaremos ubicando en el origen de coordenadas de $\mathbb{C}^{m-1}$.

Un método que emplearemos con frecuencia luego de afinizar con respecto a una variable conveniente, y siendo P la imagen proyectiva de un vector canónico, consistirá en encontrar un cambio de coordenadas lineal que convierta nuestro ideal en uno monomial, sin alterar la multiplicidad. En tal caso, diremos que el cambio de coordenadas es **"bueno"**.

Lema 3.3.5 *La multiplicidad de un punto base resulta invariante por cambios de coordenadas, lo cual es coherente con cualquier noción de multiplicidad algebraica.*

Demostración. De acuerdo con las definiciones vistas, siendo $R = k[x_1, \ldots, x_m]$, con $\dim(R) = m$, necesitamos probar que $e_P = e(I_P, R_P)$ es invariante por cambios de coordenadas. Sea entonces $\varphi : \ k^m \to k^m$ un isomorfismo k-lineal. El mismo induce $\overline{\varphi} : k[x_1, \ldots, x_m] \to k[x_1, \ldots, x_m]$, vía su aplicación a la m-upla $(x_1, \ldots, x_m)$. Sea $Q = \varphi(P) \in k^m$. Tomando ambos puntos vemos que $\overline{\varphi}$ se extiende canónicamente a un morfismo entre los correspondientes anillos locales

$$\overline{\varphi} : R_Q \longrightarrow R_P \qquad \frac{f}{g} \longmapsto \frac{f \circ \varphi}{g \circ \varphi} ,$$

que está bien definido ya que $g(Q) \neq 0 \Rightarrow (g \circ \varphi)(P) = g(Q) \neq 0$. Para facilitar la notación, indicaremos a este morfismo también con $\overline{\varphi}$. Análogamente, definimos $\overline{\varphi^{-1}} = \overline{\varphi}^{-1}$.

Observemos que $\overline{\varphi}^{-1}(R_P) = R_Q$. Sea $\widetilde{I}_Q = \overline{\varphi}^{-1}(I_P)$. Sabemos que $\overline{\varphi}$ y $\overline{\varphi}^{-1}$ inducen correspondencias entre ideales de R_Q y R_P. Nuestro objetivo es verificar que la longitud de $R_P/(I_P)^{n+1}$ (como R_P-módulo) coincide con la longitud de $R_Q/(\overline{\varphi}(I_P))^{n+1} = R_Q/(\widetilde{I}_Q)^{n+1}$ (como R_Q-módulo). Nos valdremos para ello de los morfismos $\overline{\varphi}$ y $\overline{\varphi}^{-1}$. Estableceremos correspondencias entre cadenas maximales de ideales.

Tomemos un R_P-submódulo *propio* del cociente $R_P/(I_P)^{n+1}$. Sabemos que se corresponde con un ideal propio $J \subset R_P$ tal que $(I_P)^{n+1} \subset J \subset \mathfrak{M}_P R_P$. Aplicando el morfismo $\overline{\varphi}^{-1}$ a dicho ideal J, $\overline{\varphi}^{-1}(J)$ resulta un ideal de R_Q tal que $(\widetilde{I}_Q)^{n+1} \subset \overline{\varphi}^{-1}(J) \subset \mathfrak{M}_Q R_Q$, que se identifica con un R_Q-submódulo propio del cociente $R_Q/(\widetilde{I}_Q)^{n+1}$. Por lo tanto, $\overline{\varphi}$ induce una correspondencia biyectiva:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Cadena de ideales } J \subset R_P \text{ con} \\ (I_P)^{n+1} \subset J \subset \mathfrak{M}_P R_P \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\overline{\varphi}^{-1}} \\ \xleftarrow[\overline{\varphi}]{} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{Cadena de ideales } J \subset R_Q \text{ con} \\ (\widetilde{I}_Q)^{n+1} \subset J \subset \mathfrak{M}_Q R_Q \end{array} \right\}$$

y la consecuente biyección entre cadenas maximales de submódulos de cada cociente.

Sumando esto a la Observación 3.1.5, tenemos

$$e(I_P, R_P) = \lim_{n\to\infty} \frac{l(R_P/(I_P)^{n+1}R_P)\ m!}{n^m} = \lim_{n\to\infty} \frac{l(R_Q/(\widetilde{I}_Q)^{n+1}R_Q)\ m!}{n^m} = e(\widetilde{I}_Q, R_Q) ,$$

como queríamos mostrar. □

Definición 3.3.6 *Decimos que el punto base P es* "bueno" *si el ideal localizado I_P admite un cambio de coordenadas "bueno", i.e. un isomorfismo lineal φ que convierta a nuestro ideal localizado en P en un ideal monomial, luego de localizar en el punto $\varphi(P) = (0 : \ldots : 0 : 1)$ (o cualquier vector coordenado) y afinizar con respecto a la variable u_m. Asimismo, podemos primero afinizar y luego componer con un isomorfismo lineal.*

Lema 3.3.7 *Supongamos que el número de puntos base es finito. Si existe un conjunto de* sólo $m-1$ *filas que se anulan en el punto base P, entonces P resulta "bueno".*

Demostración. Sin pérdida de generalidad (s.p.g.), supongamos que sólo las primeras $m-1$ filas son las que se anulan en P. Sea $j = 1, \ldots, m$ tal que la j-ésima coordenada de P es no nula (más aún, supongamos que vale 1), y afinicemos con respecto a esta variable. Para facilitar la notación, asumiremos $j = m$. Dada la finitud de puntos base, cada uno de estos conjuntos de filas genera en $\mathbb{C}^m$ el conjunto de ceros de un espacio vectorial de dimensión $m-1$, i.e. el núcleo de una matriz de rango $m-1$. En particular, tomando P, las $m-1$ filas que se anulan en el mismo deben ser l.i. (ver Proposición 2.1.6). Luego de afinizar (deshomogeneizar) con respecto a u_m, podemos elegir como cambio de coordenadas en $\mathbb{C}^m$: $x_i = l_{i(u_1,\ldots,u_{m-1},u_m=1)}$ para todo $i = 1, \ldots, m-1$, y afinizar respecto de la última variable $x_m = 1$. Es decir, el cambio de coordenadas estará dado por φ de la forma

$$\underbrace{\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{m-1} \\ v \end{pmatrix}}_{:=M} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

siendo v cualquier vector tal que $v \cdot P^t = 1$. Claramente, $\varphi(P) = M \cdot P^t = (0 : \ldots : 0 : 1)$. Dado que los ideales son invariantes por múltiplos escalares, el proceso de afinizar y calcular el isomorfismo lineal es equivalente a calcular primero el isomorfismo y luego afinizar.

En consecuencia, el ideal transformado por este cambio lineal y afinizado con respecto a x_m será de tipo monomial (en las variables $x_1, \ldots, x_{m-1}$) pues todas las demás formas lineales l_j con $j \geq m$ serán inversibles al localizar en P (ya que no se anulan en P). □

Corolario 3.3.8 *Supongamos que la matriz B tiene todos sus menores maximales no nulos. En tal caso, cada ideal I_P es monomial y la multiplicidad de cada punto base P se calcula mediante el Algoritmo 1.*

Ejemplo 3.3.9 [Ejemplo 3.2.2 revisitado] Consideremos nuevamente la matriz:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, teníamos como puntos base $P_{2,1} := (-2 : 1 : 2)$; $P_{2,3} := (1 : 0 : -1)$; $P_{3,1} := (1 : 0 : -2)$ y $P_{4,1} := (-1 : 1 : 0)$. Al localizar el ideal I, obteníamos

$$I_{P_{2,1}} := \langle l_1, l_2 \rangle \ ; \ I_{P_{2,3}} := \langle l_2, l_3 \rangle \ ; \ I_{P_{3,1}} := \langle l_1^2, l_3 \rangle \ ; \ I_{P_{4,1}} := \langle l_1^2, l_4 \rangle.$$

Es claro que cada ideal localizado tiene el aspecto de un ideal monomial. En efecto, podemos aplicar un cambio conveniente de coordenadas: cada forma lineal presente en cada ideal se toma como una de las nuevas variables, de acuerdo con el Lema 3.3.7. Si efectuamos una transformación lineal de las variables que lleve cada punto base al $(0 : 0 : 1)$, y aplicamos el Algoritmo 1, resulta $e_{(P_{2,1})} = 1$; $e_{(P_{2,3})} = 1$; $e_{(P_{3,1})} = 2$ y $e_{(P_{4,1})} = 2$. Estos valores coinciden con los calculados anteriormente. ■

En conclusión, la técnica usual a emplear será el cambio de coordenadas para convertir cada I_P en un ideal monomial (un cambio por cada ideal), pues en este caso se tiene un algoritmo para calcular multiplicidades: el Algoritmo 1.

En el siguiente ejemplo (Ejemplo 3.3.13) mostraremos que aunque se dé el caso que a, b, c, d no se transformen en monomios, podemos encontrar un isomorfismo lineal particular que sí permita transformar al ideal I_P en uno monomial, aunque se deberán cambiar

los generadores originales por otros. Desafortunadamente, esta idea no se podrá aplicar para matrices B arbitrarias (ver Ejemplo 3.3.14 a continuación). Para desarrollar ambos ejemplos, necesitaremos la ayuda del siguiente lema técnico.

Lema 3.3.10 *Sea $J := \langle h_0, \ldots, h_m \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_{m-1}]_{\{0\}}$ un ideal monomial, con $h_i \in k[x_1, \ldots, x_{m-1}]$ para todo i. Entonces, todo monomio $x^\alpha \in J$ es una combinación polinomial y homogénea de los generadores del ideal.*

Demostración. Supongamos que x^α es un monomio de J. Por definición de J,

$$x^\alpha = \frac{G_0}{R_0} h_0 + \ldots + \frac{G_m}{R_m} h_m \ ,$$

donde $\mathrm{mcd}(G_i; R_i) = 1$ y $R_i(0) = 1$ para todo i.
Sea $S := R_0 \cdots R_m$. Entonces:

$$S\, x^\alpha = G_0 \frac{S}{R_0} h_0 + \ldots + G_m \frac{S}{R_m} h_m \ .$$

Consideremos en la expresión anterior la componente homogénea de cada miembro de grado $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}$. Como $S(0) = 1$ y h_j es un polinomio homogéneo de grado d_i, obtenemos

$$1\, x^\alpha = \big(G_0 \frac{S}{R_0}\big)_{(|\alpha| - d_0)} h_0 + \ldots + \big(G_m \frac{S}{R_m}\big)_{(|\alpha| - d_m)} h_m \ .$$

Por lo tanto, tenemos una combinación polinomial y *homogénea* de los h_j que devuelve el monomio x^α. □

Observación 3.3.11 *Una cuenta similar probará el mismo resultado para el caso de tener J un ideal homogéneo: basta cambiar x^α por cualquier forma en J.*

Observación 3.3.12 *Para aplicar el Lema 3.3.10, consideraremos $J = \widetilde{I} := I \circ \varphi^{-1} \subset k[x_1, \ldots, x_{m-1}]_{\{0\}}$ para un cambio de coordenadas conveniente*

$$\varphi : \mathbb{C}^{m-1} \longrightarrow \mathbb{C}^{m-1} \quad (x_1, \ldots, x_{m-1}) \mapsto (u_1, \ldots, u_m),$$

extendido a los correspondientes anillos de polinomios (como hicimos en el Lema 3.3.5).

Ejemplo 3.3.13 Un ejemplo interesante.
Sea B la matriz

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} .$$

Tenemos entonces la parametrización:

$$y_1 := \frac{l_1}{l_2} \quad ; \quad y_2 := \frac{l_1 * l_3}{l_4 * l_5} \quad ; \quad y_3 := \frac{l_1^2 * l_2 * l_3^3}{l_4^2 * l_5^4}.$$

Luego: $a := l_1 * l_4^2 * l_5^4 \quad ; \quad b := l_1 * l_2 * l_3 * l_4 * l_5^3 \quad ; \quad c := l_1^2 * l_2^2 * l_3^3 \quad ; \quad d := l_2 * l_4^2 * l_5^4$.
Los puntos base son: $P_{2,1} = (1 : -3 : 1)$; $P_{2,4} = (1 : -2 : 1)$; $P_{2,5} = (1 : -4 : 1)$; $P_{4,1} = (0 : -2 : 1)$; $P_{4,3} = P_{5,3} = (1 : 0 : 0)$ y $P_{5,1} = (2 : -4 : 1)$.

Veremos que $I_{P_{4,3}}$ admite un cambio de coordenadas especial ("tricky"), después de afinizar con respecto a x_0, que transforma este ideal en uno de tipo monomial.

$$I_{P_{4,3}} := \langle l_4^2 * l_5^4 \,;\, l_3 * l_4 * l_5^3 \,;\, l_3^3 \,;\, l_4^2 * l_5^4 \rangle = \langle l_3 * l_4 * l_5^3 \,;\, l_3^3 \,;\, l_4^2 * l_5^4 \rangle \ .$$

Notar que $2 * l_3 + l_4 + l_5 = 0$.

Multipliquemos los primeros dos generadores por dos, ya que el ideal no se modifica. En consecuencia, reemplazando $2 * l_3 = -(l_4 + l_5)$ y limpiando escalares, resulta:

$$I_{P_{4,3}} = \langle (l_4 + l_5) * l_4 * l_5^3 \,;\, (l_4 + l_5)^3 \,;\, l_4^2 * l_5^4 \rangle \ .$$

Afinicemos respecto a x_0 y consideremos un cambio de coordenadas $\varphi(u, v) := (x_1(u, v), x_2(u, v))$ (que corresponde a la inversa del isomorfismo en la Observación 3.3.12) tal que $l_4 \circ \varphi = a * u + b * v$ y $l_5 \circ \varphi := c * u + d * v$, con $ad - bc \neq 0$. De este modo, $l_{4(1:x_1:x_2)} = a * u + b * v$ y $l_{5(1:x_1:x_2)} = c * u + d * v$.

Luego $J := \langle ((l_4 + l_5) * l_4 * l_5^3) \circ \varphi \,;\, ((l_4 + l_5)^3) \circ \varphi \,;\, (l_4^2 * l_5^4) \circ \varphi \rangle_{\{0\}} = \langle g_1; g_2; g_3 \rangle$, donde

$$\begin{cases} g_{1(u,v)} & := & \big((a + c) * u + (b + d) * v\big) * (a * u + b * v) * (c * u + d * v)^3 \ ; \\ g_{2(u,v)} & := & ((a + c) * u + (b + d) * v)^3 \ ; \\ g_{3(u,v)} & := & (a * u + b * v)^2 * (c * u + d * v)^4 \ . \end{cases}$$

Se presentan dos casos posibles, dependiendo de los valores de $\{a+c, b+d\}$. Dado que $ac - bd \neq 0$, los mismos no pueden ser ambos nulos.

Caso I: $a + c \neq 0$ y $b + d \neq 0$.
Como u^3 es un monomio presente en g_2, y J es un ideal monomial, entonces $u^3 \in J$. Por ende, siguiendo el Lema 3.3.10:

$$u^3 = A * g_1 + B * g_2 + C * g_3 \ . \tag{3.12}$$

Como $\deg(g_1) = 5$, $\deg(g_3) = 6$, y son polinomios homogéneos, el monomio u^3 deberá aparecer en $B * g_2$, lo que da $B(0, 0) \neq 0$, y $A = C = 0$. Pero, en tal caso, v^3 también estará presente en el miembro derecho de (3.12) pues $(b + d) \neq 0$. Contradicción.

Caso II: $a+c = 0$ ó $b+d = 0$. Dado que $ad-bc \neq 0$ y nuestros polinomios son simétricos, s.p.g. podemos asumir $a+c = 0$ y $b+d \neq 0$. Notar que $a \neq 0$ por ser $ad-bc = a(b+d) \neq 0$. En tal situación, limpiando de nuevo escalares:

$$\begin{aligned} J &= \langle v(a * u + b * v)(-a * u + d * v)^3 \,;\, v^3 \,;\, (a * u + b * v)^2(-a * u + d * v)^4 \rangle = \\ &= \langle v(a * u + b * v)(-a * u + d * v)^3 \,;\, v^3 \,;\, (a * u + b * v)(-a * u + d * v)^4 u \rangle \ , \end{aligned}$$

donde el último polinomio es igual a $\frac{1}{a}(g_3 - b * (-a * u + d * v) * g_1)$. Para facilitar la notación, llamemos también a estos nuevos polinomios con g_i. Podemos suponer $a = 1$, ya que $a \neq 0$ y podemos multiplicar cada polinomio por constantes no nulas sin alterar el ideal.
Sabemos que vu^4 es un monomio de g_1. Por lo tanto, al igual que en el *Caso I*, tenemos:

$$-vu^4 = A * g_1 + B * g_2 + C * g_3 \ . \tag{3.13}$$

Como $\deg(uv^4) = 5$, $\deg(g_1) = 5$, $\deg(g_2) = 3$ y $\deg(g_3) = 6$, entonces $\deg(A) = 0$, $\deg(B) = 2$ y $C = 0$. En este caso, por la forma particular de los g_i, es fácil ver que $A_{(0,0)} = 1$. Luego:

$$\begin{aligned} -vu^4 = v(u + b * v)(-u + d * v)^3 + B * v^3 = -vu^4 + (-b + 3d)v^2u^3 + \\ + v^3 * \{(3bd - 3d^2)u^2 + (-3bd^2 + d^3)vu + bd^3 * v^2 + B\} \ . \end{aligned}$$

En consecuencia, $-b + 3d = 0$.

Más aún, esta condición genera un cambio de coordenadas "bueno": $a = 1$, $c = -1$ y $b = 3d$, para *cualquier* $d \neq 0$. Efectuando las sustituciones correspondientes con MAPLE, expandiendo cada polinomio, y eliminando los monomios divisibles por v^3 en g_1 y g_3, y por vu^4 en g_3 obtenemos

$$J := \langle -vu^4, v^3, u^6 \rangle \ .$$

En efecto, los polinomios resultan:

```
> g1:=v*(a*u+b*v)*(-a*u+d*v)^3; g2:=v^3; g3:=(a*u+b*v)*(-a*u+d*v)^4*u;

                                                3
                  g1 := v (a u + b v) (-a u + d v)
                                     3
                              g2 := v
                                                   4
                  g3 := (a u + b v) (-a u + d v)  u

> a:=1; c:=-1; b:=3*d;
                                 a := 1
                                 c := -1
                                 b := 3 d

> expand(g1); expand(g2); expand(g3);

                     4      2  2  3        3  4      4  5
                  -v u  + 6 u  d  v  - 8 u d  v  + 3 d  v
                                   3
                                  v
    6    5          4  2  2       3  3  3       2  4  4        5  5
   u  - u  d v - 6 u  d  v  + 14 u  d  v  - 11 u  d  v  + 3 u d  v

> collect(g1,v);

                     4      2  2  3        3  4      4  5
                  -v u  + 6 u  d  v  - 8 u d  v  + 3 d  v

> collect(g3,v);

    6    5          4  2  2       3  3  3       2  4  4        5  5
   u  - u  d v - 6 u  d  v  + 14 u  d  v  - 11 u  d  v  + 3 u d  v
```

En cosecuencia, mediante el Algoritmo 1, obtenemos $e_{(P_{4,3})} = 18$.

Las restantes multiplicidades pueden obtenerse por cálculo directo, ya que cada polinomio es producto de dos formas lineales fijas, precisamente aquellas que describen cada punto base:

$$e_{(P_{2,1})} = 1 \quad ; \quad e_{(P_{2,4})} = 4 \quad ; \quad e_{(P_{2,5})} = 8 \quad ; \quad e_{(P_{4,1})} = 4 \quad ; \quad e_{(P_{5,1})} = 8 \ .$$

Mediante un cálculo con bases de Gröbner, obtenemos la ecuación implícita de la superficie:

$$y_1^2 * y_3^2 - 4 * y_1 * y_2^4 * y_3 + 2 * y_1 * y_2^3 * y_3 + y_2^6 - 4 * y_2^4 * y_3 \ ,$$

que tiene grado 6. Sabemos que la parametrización es 1–1 y $D = 7$. Por lo tanto, la Fórmula de Grado también se verifica en este ejemplo:

$$7^2 = 6 * 1 + (18 + 1 + 4 + 8 + 4 + 8) .$$

■

Ejemplo 3.3.14 Sea B la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

que genera la parametrización:

$$y_1 := \frac{l_1 * l_2}{l_4^2} \quad ; \quad y_2 := \frac{l_1 * l_3}{l_4^2} \quad ; \quad y_3 := \frac{l_1^3 * l_2^2 * l_3}{l_5^6}.$$

Entonces $a := l_1 * l_2 * l_5^6 \quad ; \quad b := l_1 * l_3 * l_5^6 \quad ; \quad c := l_1^3 * l_2^2 * l_3 * l_4^2 \quad ; \quad d := l_4^2 * l_5^6$.

Los puntos base son: $P_{4,1} = P_{5,1} = P_{4,5} = (-1 : 1 : 0)$; $P_{5,2} = (0 : 1 : 0)$ y $P_{5,3} = (1 : 0 : 0)$.

Veremos en este ejemplo que el ideal $I_{P_{4,1}}$, después de tomar $x_2 = 1$, no admite un cambio de coordenadas que convierta al mismo en un ideal monomial. Notemos que las únicas formas lineales que se anulan en este punto son l_1, l_4 y l_5. Más aún, $2*l_1+l_4+l_5 = 0$.

$$I_{P_{4,1}} := \langle l_1 * l_5^6 \, ; \, l_1 * l_5^6 \, ; \, l_1^3 * l_4^2 \, ; \, l_4^2 * l_5^6 \rangle = \langle l_1 * l_5^6 \, ; \, l_1^3 * l_4^2 \, ; \, l_4^2 * l_5^6 \rangle \, .$$

Llamemos a las variables con u, s, t. Después de tomar $s = 1$ y trasladando el origen al punto $P = (-1, 0)$, tenemos $\tilde{l}_1 = u + 3 * t$; $\tilde{l}_4 = -2 * u$; $\tilde{l}_5 = -6 * t$.

$$\tilde{I}_{\{0\}} = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \, .$$

Procederemos por el absurdo. Tomemos un cambio de coordenadas: $u := a * x + b * y$; $t := c * x + d * y$ con $ad - bc \neq 0$ (i.e. $\varphi(x, y) = (u, t)$). Ignorando las constantes obtenemos $J := \langle g_1 \circ \varphi; g_2 \circ \varphi; g_3 \circ \varphi \rangle_{\{0\}} := \langle h_1; h_2; h_3 \rangle_{\{0\}}$, donde

$$\begin{cases} h_{1(x,y)} := ((a + 3c) * x + (b + 3d) * y) * (c * x + d * y)^6 \, ; \\ h_{2(x,y)} := ((a + 3c) * x + (b + 3d) * y)^3 * (a * x + b * y)^2 \, ; \\ h_{3(x,y)} := (a * x + b * y)^2 * (c * x + d * y)^6 \, ; \end{cases}$$

En esta situación, los h_j son homogéneos de grados $\deg(h_1) = 7$, $\deg(h_2) = 5$ y $\deg(h_3) = 8$.

Miremos más de cerca la forma h_2. Supongamos $\{(a + 3c)a\}\{(b + 3d)b\} \neq 0$. Luego en h_2 están presentes los monomios x^5 e y^5. Como J es monomial, de acuerdo con el Lema 3.3.10, tenemos:

$$x^5 = R_1 * h_1 + R_2 * h_2 + R_3 * h_3 \, .$$

Dado que el valor de los grados de los h_j, sabemos además que $R_1 = R_3 = 0$ y $R_2 = 1/\{(a+3c)^3 a^2\}$. Pero entonces no hay modo de cancelar el monomio y^5 que aparece en $R_2 * h_2$.Luego $(a + 3c)a = 0$ o $(b + 3d)b = 0$. Usando la simetría de los h_j y de la invariancia de la condición "monomial" de un ideal con respecto a cualquier permutación de variables, podemos suponer $(a + 3c)a = 0$.

- Supongamos $a = 0$. Entonces $bc \neq 0$ y $h_2 = b^2 * (3c * x + (b + 3d) * y)^3 * y^2$. Si el coeficiente que acompaña a xy^4 en h_2 (que es $9b^2c(b+3d)^2$) es no nulo, como hicimos antes:

$$xy^4 = R_1 * h_1 + R_2 * h_2 + R_3 * h_3 \ ,$$

con $R_1 = R_3 = 0$ y $R_2 = 1/(9b^2c(b + 3d)^2)$. Pero en tal caso no podremos cancelar el monomio $R_2 * b^2 * (b + 3d)^3 * y^5$ presente en $R_2 * h_2$, a menos que $b + 3d = 0$.
Como $ad - cb = 3cd \neq 0$, entonces $cd \neq 0$. Reemplazando $b = -3d$ en cada h_j y limpiando las constantes, obtenemos

$$\begin{cases} \tilde{h_1} := x * (c * x + d * y)^6 \ ; \\ \tilde{h_2} := x^3 * y^2 \ ; \\ \tilde{h_3} := y^2 * (c * x + d * y)^6 \ . \end{cases}$$

Esto dice que x^7 y xy^6 son monomios de $\tilde{h_1}$. Luego:

$$x^7 = R_1 * (x(c * x + d * y)^6) + R_2 * (x^3y^2) + R_3 * (y^2(c * x + d * y)^6) \ ,$$

Y por argumentos de grado, $R_3 = 0$.
En consecuencia, $(c * x + d * y)^6 \mid \{x^7 - R_2 * x^3y^2\} = \{x^3(x^4 - R_2 * y^2)\}$. Dado que $d \neq 0$, se tiene $\text{mcd}(c*x+d*y, x^3) = 1$, lo que implica $(c*x+d*y)^6 \mid \{x^4-R_2*y^2\}$. Finalmente, evaluando en $y = 0$, obtenemos $x^6|x^4$. Contradicción.
Luego $a \neq 0$ y simétricamente $b \neq 0$.

- Supongamos $(a+3c) = 0$. Entonces $ad-cb = -c(3d+b) \neq 0$. Reemplazando $a = -3c$ en cada h_i, y eliminando las constantes de cada polinomio, obtenemos

$$\begin{cases} \tilde{h_1} := y * (c * x + d * y)^6 \ ; \\ \tilde{h_2} := y^3 * (-3c * x + b * y)^2 \ ; \\ \tilde{h_3} := (-3c * x + b * y)^2 * (c * x + d * y)^6 \ . \end{cases}$$

Por ende x^2y^3 es un monomio de $\tilde{h_2}$, ya que $c \neq 0$, y vale

$$\begin{aligned} x^2y^3 = R_1 * (y(c * x + d * y)^6) + R_2 * (y^3(-3c * x + b * y)^2) + \\ + R_3 * ((-3c * x + b * y)^2(c * x + d * y)^6) \ . \end{aligned}$$

Repitiendo los argumentos de grado ya utilizados, tenemos $R_1 = R_3 = 0$ y $R_2 = 1/(-3c)^2$. Pero en tal caso, no existe modo alguno de cancelar $R_2 * b^2 * y^5$, a menos que $b = 0$.Pero esto contradice el hecho ya conocido: $ab \neq 0$.

Notemos que si comenzamos tomando $P_{1,4} = (1 : -1 : 0)$ y $u = 1$, después de trasladar el origen al punto $(-1, 0)$, obtenemos $\tilde{l_1} = s + 3 * t$, $\tilde{l_4} = -2 * s$ y $\tilde{l_5} = -6 * t$. Pero si tomamos $s = u$, obtenemos los mismos $\tilde{l_k}$ al igual que al afinizar respecto de la variable s. En consecuencia, resulta irrelevante qué variable elegimos para afinizar, *jamás* tendremos un buen cambio de coordenadas que nos devuelva un ideal monomial.

Calcular las restantes multiplicidades resulta muy sencillo pues en cada ideal localizado aparecen sólo dos formas lineales (cfr. Lema 3.3.7):

$$e_{(P_{5,2})} = 12 \quad ; \quad e_{(P_{5,3})} = 6 \ .$$

Con un cálculo de bases de Gröbner utilizando SINGULAR podemos obtener la ecuación

implícita:

$$4096*y_1^6*y_3^2+24576*y_1^5*y_2*y_3^2-128*y_1^5*y_2*y_3-6144*y_1^5*y_3^2+61440*y_1^4*$$
$$*y_2^2*y_3^2-384*y_1^4*y_2^2*y_3+y_1^4*y_2^2-30720*y_1^4*y_2*y_3^2-480*y_1^4*y_2*y_3+3840*$$
$$*y_1^4*y_3^2+81920*y_1^3*y_2^3*y_3^2-384*y_1^3*y_2^3*y_3-61440*y_1^3*y_2^2*y_3^2-960*y_1^3*y_2^2*$$
$$*y_3+15360*y_1^3*y_2*y_3^2-120*y_1^3*y_2*y_3-1280*y_1^3*y_3^2+61440*y_1^2*y_2^4*y_3^2-$$
$$-128*y_1^2*y_2^4*y_3-61440*y_1^2*y_2^3*y_3^2-480*y_1^2*y_2^3*y_3+23040*y_1^2*y_2^2*y_3^2-$$
$$-120*y_1^2*y_2^2*y_3-3840*y_1^2*y_2*y_3^2-2*y_1^2*y_2*y_3+240*y_1^2*y_3^2+24576*y_1*$$
$$*y_2^5*y_3^2-30720*y_1*y_2^4*y_3^2+15360*y_1*y_2^3*y_3^2-3840*y_1*y_2^2*y_3^2+480*y_1*y_2*$$
$$*y_3^2-24*y_1*y_3^2+4096*y_2^6*y_3^2-6144*y_2^5*y_3^2+3840*y_2^4*y_3^2-1280*y_2^3*y_3^2+$$
$$+240*y_2^2*y_3^2-24*y_2*y_3^2+y_3^2\ ,$$

que tiene grado 8. En este caso $D = 8$, que es un número bastante grande. Además, la parametrización es 1–1. Por lo tanto, $e_{(P_{4,1})} = 64 - 8 * 1 - (12 + 6) = 38$, que es considerablemente alta. ■

Lamentablemente, el "Algoritmo de Volumen" (Algoritmo 1) no funciona para ideales arbitrarios. Aunque parece razonable esperar la misma multiplicidad algebraica para I y para $in_\prec(I)$, producto de la igualdad entre las dimensiones de los cocientes R/I y $R/in_\prec(I)$, dicha igualdad entre multiplicidades no siempre se verifica.

Ejemplo 3.3.15 [Ejemplo 3.3.14, continuación]
Si usamos, en el Ejemplo 3.3.14, el Algoritmo 1 para el cálculo de $e_{P_{4,1}}$, obtenemos $e(in_\prec(I), P_{4,1}) = 40$, que es mayor a la multiplicidad del ideal calculada anteriormente. Esto dice, en particular, que el algoritmo no arroja un resultado correcto en este caso, debido a que no se verifica la condición de "monomialidad". Cabe señalar que esta diferencia no es casual, como veremos en la Proposición 3.3.17. ■

En resumen, dado que el algoritmo calcula la multiplicidad del *ideal inicial*, podemos obtener una respuesta errónea. Para asegurar que nuestro resultado sea efectivamente la multiplicidad algebraica que deseamos calcular, debemos tener como entrada un ideal monomial, como muestran los Ejemplos 3.3.15 y 3.3.16. En efecto, en los mismos encontramos un punto base P para el cual las multiplicidades de I_P y del ideal inicial (local) correspondiente son diferentes. Retomaremos esta situación en el Capítulo 5.

Ejemplo 3.3.16 Consideremos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observar que la primer y tercer fila son idénticas. Además: $a := l_1^4 * l_2^2 * l_5$; $b := l_4^3 * l_5^3 * l_6$; $c := l_1^2 * l_2^2 * l_4 * l_6^2$; $d := l_1^2 * l_2 * l_4 * l_5^2 * l_6$. El ideal generado a partir de esta parametrización es

$$I := \langle (u-s)^4 * (u-s+t)^2 * (-u+s-2t); (-u+2s)^3 * (-u+s-2t)^3 * (-u+t);$$
$$(u-s)^2 * (u-s+t)^2 * (-u+2s) * (-u+t)^2; (u-s)^2 * (u-s+t) * (-u+2s) *$$
$$*(-u+s-2t)^2 * (-u+t)\rangle\ .$$

Los puntos base son $P_{1,4} = P_{3,4} := (0:0:1)$; $P_{1,5} = P_{2,5} = P_{3,5} := (1:1:0)$; $P_{1,6} := (1:1:1)$; $P_{2,4} := (-2:-1:1)$; $P_{2,6} := (1:2:1)$; $P_{4,5} := (-4:-2:1)$ y $P_{5,6} := (1:3:1)$.

Al querer calcular la multiplicidad de $P_{1,4}$ localizamos el ideal I en este punto, tomando $t = 1$, y obtenemos

$$I_{P_{1,4}} := \langle l_1^4 \, ; \, l_4^3 \, ; \, l_1^2 * l_4 \rangle = \langle (u-s)^4; (-u+2*s)^3; (u-s)^2 * (-u+2*s) \rangle \ .$$

Corramos el Algoritmo de Volumen para este ideal en SINGULAR, tomando un orden local. En primer lugar calculamos una base standard para $\prec = \mathrm{ds}(u,s)$,[2] que es un orden local:

$$J = \{u^3 - 4u^2 * s + 5u * s^2 - 2s^3; 2u^2 * s - 7u * s^2 + 6s^3; 3u * s^3 - 4s^4; s^4\}$$

y por ende $in_{\prec}(I_{P_{1,4}}) = \langle u^3; 2 * u^2 * s; 3 * u * s^3; s^4 \rangle$. Si usamos la Fórmula de Volumen, obtenemos $e_{(P_{1,4})} = 11$.

Ahora bien, si efectuamos un cambio de coordenadas $x := u - s$; $y = u - 2 * s$, la multiplicidad del punto base debe ser la misma, como vimos en el Lema 3.3.5. Esta es una condición básica para cualquier definición de multiplicidad que se considere. En este caso, el ideal localizado es:

$$\tilde{I}_{P_{1,4}} = \langle x^4; y^3; x^2 * y \rangle \ .$$

Más aún, es un ideal monomial. Por ende, aplicando el Algoritmo de Volumen, tenemos $\tilde{e}_{(P_{1,4})} = 10$, en lugar del valor 11 esperado.

Podemos señalar, además, que en este ejemplo la dimensión del anillo cociente es $\dim(R/I) = 8 < 10 = e(P_{1,4})$.

Las multiplicidades de los restantes puntos base, con excepción de $P_{1,2} = P_{1,5} = P_{5,2} = (1:1:0)$, se calculan trivialmente. En efecto, los restantes ideales están generados por polinomios en las formas lineales que definen el correspondiente punto base. Usando el Lema 3.3.7, tenemos:

$$e_{(P_{1,4})} = 10 \ ; \ e_{(P_{2,4})} = 5 \ ; \ e_{(P_{4,5})} = 1 \ ; \ e_{(P_{5,6})} = 2 \ ; \ e_{(P_{6,1})} = 4 \ ; \ e_{(P_{6,2})} = 2 \ .$$

En consecuencia, sólo resta calcular $e_{(P_{1,2})}$. Sabemos que la parametrización es 1–1 y que $D = 7$. Mediante la Fórmula de Grado dada en el Teorema 2.1.2, obtenemos:

$$D^2 = 49 = \deg(S) * 1 + 24 + e_{(P_{1,2})} \ .$$

En consecuencia $\deg(S) + e_{(P_{1,2})} = 25$.

En este ejemplo, se puede calcular "a mano" la ecuación. Resulta (salvo signo):

$$\begin{aligned} &-8 * y_1^4 * y_2^4 * y_3^2 + 3 * y_1^2 * y_2^2 * y_3 + 16 * y_3^3 + 1000 * y_1^3 * y_2^2 * y_3^2 + 3 * y_1 * y_2 * y_3 + y_1^3 * \\ &* y_2^3 * y_3 + y_3 + 3125 * y_1^4 * y_2^2 * y_3^2 + 27 * y_1^2 * y_2 + 16 * y_1^5 * y_2^5 * y_3^3 - 225 * y_1^2 * y_2 * y_3 - \\ &-225 * y_1^3 * y_2^2 * y_3 + 500 * y_1^2 * y_3^2 * y_2 + 500 * y_1^4 * y_2^3 * y_3^2 + 160 * y_1^2 * y_2^2 * y_3^3 + 80 * \\ &* y_1^4 * y_2^4 * y_3^3 - 48 * y_1^2 * y_2^2 * y_3^2 - 32 * y_1^3 * y_2^3 * y_3^2 + 160 * y_1^3 * y_2^3 * y_3^3 - 32 * y_1 * y_2 * \\ &* y_3^2 - 8 * y_3^2 + 80 * y_3^3 * y_1 * y_2 \ . \end{aligned}$$

Como su grado es 13, entonces $e_{(P_{1,2})} = 12$.

Por otro lado, si utilizamos el Algoritmo 1 para el ideal localizado en $P_{1,2}$, tenemos también como resultado 12. Por ende, en este caso, la multiplicidades del ideal y del inicial coinciden (ver Teorema 3.3.21, a continuación). ■

[2] En SINGULAR, ds es el orden de grado negativo y lexicográfico. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ entonces $\deg(x^\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y se tiene $x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow \deg(x^\alpha) > \deg(x^\beta)$ ó $\deg(x^\alpha) > \deg(x^\beta)$ y $\exists \ 1 \leq i \leq n$: $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i$.

Aún en la situación $e(I) \neq e(in_\prec(I))$ existen a priori algunas cotas para la multiplicidad. En el caso en que $P = (0 : \ldots : 0 : 1)$ es un punto base, tomamos $x_m = 1$ y trabajamos en el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_{m-1}]$, localizado en $(0, \ldots, 0)$. Si esto ocurre, $I := I_0$ es un ideal $\langle x_1, \ldots, x_{m-1}\rangle$-primario (pues el único cero de I es el origen) y se tiene:

Proposición 3.3.17 *[Proposition 4.2 adaptada, [14]]*
Sea $I := I_0$ es un ideal $\langle x_1, \ldots, x_{m-1}\rangle$-primario en $R = k[x_1, \ldots, x_{m-1}]_0$. Para cualquier orden local $\prec$ de R y $e(I) := e(I, R)$,

$$e(I) \leq e(in_\prec(I)) \leq (m-1)!\, e(I) \ .$$

Ejemplo 3.3.18 Mirando el ejemplo anterior, después de trasladar el punto $(0 : 1 : 0)$ a $P_{1,4}$ y afinizar, se tiene:

$$e(I_{P_{1,4}}) = 10 < \underbrace{e(in_\prec(I)_{P_{1,4}})}_{=11} < 2!\, e(I_{P1,4}) = 20 \ ,$$

verificando las desigualdades de la Proposición. ■

Demostración. [Proposición 3.3.17]
Notemos con $L = in_\prec(I)$ y, más en general, con $L_n = in_\prec(I^n)$. Si $n >> 0$, por definición de multiplicidad, los coeficientes principales de cada polinomio $l(R/I^n)$ y $l(R/L^n)$, son $e(I)/(m-1)!$ y $e(L)/(m-1)!$, respectivamente. Ahora bien, sabemos gracias al Corolario 3.1.21 que $l(R/I^n) = l(R/L_n)$. Como consecuencia de ello, dado que $L^n = in_\prec(I)^n \subseteq in_\prec(I^n) = L_n$, resulta entonces:

$$l(R/I^n) = l(R/L_n) \leq l(R/L^n) \ .$$

En consecuencia, por ser ambos polinomios del mismo grado, la relación de orden entre los polinomios debe ser la misma que entre los respectivos coeficientes principales. En consecuencia

$$e(I) \leq e(L) = e(in_\prec(I)) \ .$$

La otra desigualdad enunciada se obtiene mediante el Teorema 3.1.11. En efecto, tomemos como ideal $\mathcal{Q}$ a L. Resulta $\mathfrak{M}_0$-primario. Además, en este caso, $m-1 = \dim(R)$. Dado que $e(R) = 1$ (ver Ejemplo 3.1.4) y $l(R/L) = l(R/I) \leq e(I)$ por la Proposición 3.2.10, resulta aplicando el Teorema 3.1.11:

$$e(L) \ \leq \ (m-1)!\ l(R/L)\ e(R) \ \leq \ (m-1)!\ e(I) \ .$$

□

Esto nos permitirá calcular la multiplicidad del ideal inicial, que es de tipo *monomial*, y por ende, aproximar la multiplicidad de I. El principal inconveniente que surge es que estas cotas no son muy finas, y por ende, no nos proveen de información sustancial. Para más información, ver Capítulo 5.

En [14] hay otra Proposición (Theorem 4.3) que explica cuándo hay igualdad entre las multiplicidades $e(I)$ y $e(in_\prec(I))$. La misma trabaja sobre el anillo de polinomios y un ideal $\mathfrak{M}$-primario. Adaptamos el resultado al caso local. Dicha proposición involucra Algebras de Rees. Recopilamos a continuación algunas definiciones y hechos enunciados en el mismo trabajo.

Definición 3.3.19 *Sean $L = in_\prec(I)$ y $L_n = in_\prec(I^n)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$ como en la demostración precedente. Sea $\mathcal{B} = \sum_{n\geq 0} L_n t^n$ el Algebra de Rees de la filtración definida*

por $\{L_n\}_{n\geq 0}$. *De hecho,* $\mathcal{B}$ *es el álgebra inicial* $in_\prec(R[It])$ *del Algebra de Rees* $R[It]$ *con respecto al orden entre monomios extendido en* $R[t]$*:*

$$f\,t^r \prec g\,t^s \quad \Leftrightarrow \quad r < s \quad o \quad \text{“ } r = s \;\; y \;\; f \prec g \text{ ”} .$$

Observación 3.3.20 *En general,* $\mathcal{B}$ *no es noetheriana.*

Teorema 3.3.21 (Theorem 4.3 [14] adaptado) *Sea* I *un ideal* $\langle x_1, \ldots, x_{m-1}\rangle$*-primario del anillo de polinomios localizado* $R := k[x_1, \ldots, x_{m-1}]_{0}$*, y sea* $\prec$ *un orden local. Supongamos que* $e(I) = e(in_\prec(I))$*. En tal caso, el álgebra inicial* $\mathcal{B}$ *es íntegra sobre* $R[in_\prec(I)t]$*. En particular* $\mathcal{B}$ *es noetheriana.*

Observemos que si k es alg. cerrado, la condición de $\langle x_1, \ldots, x_{m-1}\rangle$-primario se verifica para cualquier ideal $(0) \subsetneq I \subsetneq R$, gracias al Nullstellensatz.

Veamos, previo a la demostración, una proposición técnica de suma utilidad, y un Teorema de Rees, que será el pilar fundamental de toda la argumentación.

Proposición 3.3.22 *Dado un ideal* $I \subset R = k[x_1, \ldots, x_d]_{0}$*, resulta*

$$e(I^s) = e(I)\; s^d ,$$

Demostración. De acuerdo con la Observación 3.1.5, y por ser $d = \dim(R)$, se verifica:

$$\begin{aligned} e(I^s, R) &= \lim_{n\to\infty} \frac{l(R/(I^s)^{n+1}R)\; d!}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{l(R/(I^{(s(n+1)-1)+1}R)\; d!}{n^d} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{l(R/(I^{(s(n+1)-1)+1}R)\; d!}{(s(n+1)-1)^d}\; \frac{(s(n+1)-1)^d}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{l(R/(I^{(s(n+1)-1)+1}R)\; d!}{(s(n+1)-1)^d} \cdot \\ &\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(s(n+1)-1)^d}{n^d} = e(I)\; s^d , \end{aligned}$$

como queríamos. □

El siguiente resultado se relaciona fuertemente con un concepto ya presentado en la sección anterior (cfr. Sección §3.2): el de ideales de reducción. En efecto, para tales ideales vimos que la multiplicidad de un ideal coincide con la de su ideal de reducción.

Teorema 3.3.23 *[Rees, cfr. [31]] Sea* $(R, \mathfrak{M})$ *un anillo local noetheriano, de dimensión finita. Dados* $I, J \in R$ *ideales, con* $J \subseteq I$ *se verifica:*

$$e(J) = e(I) \quad \Longleftrightarrow \quad I \subset \overline{J} .$$

i.e. las multiplicidades coinciden sii I *es integralmente cerrado sobre* J*. Equivalentemente, sii se verifica* $\overline{I} = \overline{J}$*.*

Es decir, dado $J \subset I$ un ideal de reducción de I (que tiene, por ende, igual multiplicidad que I) se verifica una condición muy particular: ambos tiene igual clausura entera. Más concretamente, J es un ideal que cumple

$$J \subset I \subset \overline{J} .$$

Aplicaremos el resultado anterior para $R = k[x_1, \ldots, x_{m-1}]_{0}$.

Demostración.[Teorema 3.3.21]

Con la notación de la Definición 3.3.19, bastará ver que para cada $s \in \mathbb{N}$ el álgebra $R[L_s t]$ es íntegra sobre $R[L^s t]$, por argumentos de grado en la variable t.

Sabemos que $l(R/L^n)$ y $l(R/I^n) = l(R/L_n)$ (longitud como R-módulos) son polinomios de grado $m-1$ para valores $n >> 0$. Dado que las multiplicidades de I y L coinciden por

hipótesis, por definición todos estos polinomios tienen igual coeficiente principal. Dado que $L^s \subseteq L_s$ y $L^{sn} \subseteq (L_s)^n \subseteq L_{sn}$, usando el Lema 3.1.18 resulta

$$l(R/(L^s)^n) \geq l(R/(L_s)^n) \geq l(R/L_{sn}) = l(R/I^{sn}) = l(R/(I^s)^n) \ .$$

Multiplicando cada miembro por $\frac{(m-1)!}{(n-1)^{m-1}}$ y tomando límite en n resulta $e(L^s) \geq e(L_s) \geq e(I^s)$, por la Observación 3.1.5. Por otra parte, de acuerdo con la Proposición 3.3.22, sabemos

$$e(L^s) = s^{m-1}e(L) = s^{m-1}e(I) = e(I^s) \ .$$

En consecuencia, $e(L^s) = e(L_s) = e(I^s)$. Sumando esto a la inclusión $L^s \subseteq L_s$, gracias al Teorema 3.3.23, L_s es íntegro sobre L^s. Trabajando grado a grado en t, tenemos que $\mathcal{B}$ es íntegra sobre $R[in_\prec(I)t]$, como queríamos probar. □

Lema 3.3.24 *Si I es un ideal monomial, $\mathcal{B}$ es noetheriano (como $R[It]$-módulo).*

Demostración. Dado que I es monomial, resulta $I = in_\prec(I)$ para cualquier elección de orden $\prec$. En particular, B coincide con todo $R[It]$. Veamos entonces que $R[It]$ es un anillo noetheriano. Dado $I \subset R$ ideal, sabemos, por el Teorema de la base de Hilbert extendido a cualquier localización del anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_{m-1}]$, que I es f.g. sobre R, digamos $I = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$. Con esto $R[It] = R[g_1t, \ldots, g_st]$. Llamemos $z_i = g_it$ y sean Z_i nuevas variables, alg. independientes sobre R.

Tomemos un ideal J de $R[It]$ y veamos que es f.g.. Sea $f \in J$. Por construcción, existe $F \in R[Z_1, \ldots, Z_r]$ tal que $F(z_1, \ldots, z_r) = f$. Por lo tanto, si $J = \langle f \ : \ f \in J \rangle \subseteq R[It]$ es ideal, entonces $\tilde{J} = \langle F \ : \ F(z) \in J \rangle \subseteq R[Z_1, \ldots, Z_r]$ es ideal, y por el mismo teorema de Hilbert, resulta f.g.. Si $\tilde{J} = \langle F_{i_1}, \ldots, F_{i_l} \rangle$, resulta $J = \langle f_{i_1}, \ldots, f_{i_l} \rangle$ como ideal de $R[It]$. □

Observación 3.3.25 *Como acabamos de probar, es fácil ver que la condición $\mathcal{B}$ noetheriana es cierta para un ideal monomial I. Sin embargo, como hemos señalado anteriormente en la Observación 3.3.20, esta propiedad de noetherianidad es muy poco frecuente. Como vimos en el Ejemplo 3.3.16, se cumple para $P_{1,2}$:*

$$e(I_{P_{1,2}}) = 12 = e(in_\prec(I_{P_{1,2}})) < 2!\, e(I_{P1,2}) = 24 \ .$$

Ahora bien, si $I_{P_{1,2}}$ es no monomial tendremos, gracias al Teorema 3.3.21, un ejemplo no monomial de $\mathcal{B}$ noetheriana.

Demostración. Veamos entonces que $I_{P_{1,2}}$ es no monomial. Sabemos que las únicas formas lineales que se anulan en dicho punto base son $l_1 = l_3$, l_2 y l_5. Además, la relación entre dichas formas es $-l_1 + 2 * l_2 + l_5 = 0$. Siendo $a := l_1^4 * l_2^2 * l_5$; $b := l_4^3 * l_5^3 * l_6$; $c := l_1^2 * l_2^2 * l_4 * l_6^2$; $d := l_1^2 * l_2 * l_4 * l_5^2 * l_6$, tenemos:

$$I_{P_{1,2}} := \langle l_1^4 * l_2^2 * l_5; l_5^3; l_1^2 * l_2^2; l_1^2 * l_2 * l_5^2 \rangle = \langle l_5^3; l_1^2 * l_2^2; l_1^2 * l_2 * l_5^2 \rangle \ .$$

Usando la relación lineal entre las 3 formas lineales involucradas y desarrollando cada producto:

$$I_{P_{1,2}} := \langle l_1^3 - 6 * l_1^2 * l_2 + 12 * l_1 * l_2^2 - 8 * l_2^3; l_1^2 * l_2^2; l_1^4 * l_2 - 4 * l_1^3 * l_2^2 + 4 * l_1^2 * l_2^3 \rangle \ .$$

Reemplazando finalmente $l_1 := u-s$, $l_2 := u-s+t$, tendremos un ideal $I_{P_{1,2}}$ en $\mathbb{C}[u, s, t]_{P_{1,2}}$.

Vía un isomorfismo lineal φ, transformemos el punto $P_{1,2} = (1 : 1 : 0)$ en $(1 : 0 : 0)$. Tomemos, por ejemplo, la matriz de φ en bases canónicas:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Por lo tanto, el ideal transformado (de acuerdo con el Lema 3.3.5) es $\widetilde{I} = I \circ \varphi^{-1}$, siendo el punto en cuestión $(1 : 0 : 0)$. Por último, afinicemos con respecto a la variable u, y localicemos el ideal transformado en el origen de $\mathbb{C}^2$. Queremos ver que este ideal no es monomial.

Si dicho ideal resultara monomial, entonces una base standard con respecto a cualquier orden local $\prec$, por ejemplo $ls(s,t)$ [3], debería ser monomial. No obstante, si calculamos con SINGULAR obtenemos

```
 >  ring r = 0, (u,s,t), ls;
// agregamos la variable u para luego especializarla en 1
 >  ideal I=(s^7+24*u^5*s*t-50*u^3*s^2*t^2+50*u^2*s^3*t^2+8*u^3*s*t^3-60*
u^4*s^2*t+25*u^4*s*t^2+80*u^3*s^3*t-12*u^2*s^2*t^3-25*u*s^4*t^2+24*u*s^5*
t+8*u*s^3*t^3-60*u^2*s^4*t-u^7+7*u^6*s-4*u^6*t-7*s^6*u-4*s^6*t-5*u^5*t^2-
21*u^5*s^2+35*u^4*s^3-2*u^4*t^3-35*u^3*s^4+21*u^2*s^5+5*s^5*t^2-2*s^4*t^3,
-u^3+3*u^2*s-6*u^2*t-3*u*s^2+12*u*s*t-12*u*t^2+s^3-6*s^2*t+12*s*t^2-8*t^3,
u^4-4*u^3*s+2*u^3*t+6*u^2*s^2-6*u^2*s*t+u^2*t^2-4*u*s^3+6*u*s^2*t-2*u*s*
t^2+s^4-2*s^3*t+s^2*t^2,-20*u^3*s*t+24*u*s^2*t^2-20*u*s^3*t-24*u^2*s*t^2+
30*u^2*s^2*t-8*u*s*t^3+5*u^4*t+10*u^3*s^2+8*u^3*t^2-10*u^2*s^3-s^5+u^5-5*
u^4*s+4*u^2*t^3+5*u*s^4+5*s^4*t-8*s^3*t^2+4*s^2*t^3); // ideal en las
variables (u,s,t)
// hacemos el cambio u = 1, s= s+1 , t = t
> ideal I =
((1+s)^7+24*1^5*(1+s)*t-50*1^3*(1+s)^2*t^2+50*1^2*(1+s)^3*t^2+
8*1^3*(1+s)*t^3-60*1^4*(1+s)^2*t+25*1^4*(1+s)*t^2+80*1^3*(1+s)^3*t-12*1^2*
(1+s)^2*t^3-25*1*(1+s)^4*t^2+24*1*(1+s)^5*t+8*1*(1+s)^3*t^3-60*1^2*(1+s)^4*
t-1^7+7*1^6*(1+s)-4*1^6*t-7*(1+s)^6*1-4*(1+s)^6*t-5*1^5*t^2-21*1^5*(1+s)^2+
35*1^4*(1+s)^3-2*1^4*t^3-35*1^3*(1+s)^4+21*1^2*(1+s)^5+5*(1+s)^5*t^2-2*(1+
s)^4*t^3,-1^3+3*1^2*(1+s)-6*1^2*t-3*1*(1+s)^2+12*1*(1+s)*t-12*1*t^2+(1+s)^3
-6*(1+s)^2*t+12*(1+s)*t^2-8*t^3,1^4-4*1^3*(1+s)+2*1^3*t+6*1^2*(1+s)^2-6*1^2
*(1+s)*t+1^2*t^2-4*1*(1+s)^3+6*1*(1+s)^2*t-2*1*(1+s)*t^2+(1+s)^4-2*(1+s)^3*
t+(1+s)^2*t^2,-20*1^3*(1+s)*t+24*1*(1+s)^2*t^2-20*1*(1+s)^3*t-24*1^2*(1+s)*
t^2+30*1^2*(1+s)^2*t-8*1*(1+s)*t^3+5*1^4*t+10*1^3*(1+s)^2+8*1^3*t^2-10*1^2*
(1+s)^3-(1+s)^5+1^5-5*1^4*(1+s)+4*1^2*t^3+5*1*(1+s)^4+5*(1+s)^4*t-8*(1+s)^3
*t^2+4*(1+s)^2*t^3);
> ideal J = std(I);
> J;
J[1]=8t3-12st2+6s2t-s3
J[2]=s2t2-2s3t+s4
J[3]=4s4t-3s5
J[4]=s5
```

que no es monomial.

Por lo tanto, $I_{P_{1,2}} \subset \mathbb{C}[u,s,t]_{P_{1,2}}$ es no monomial, como queríamos mostrar. □

Recopilando los ejemplos vistos y las herramientas teóricas analizadas, vemos que el cálculo de multiplicidades, lejos de ser fácil de efectuar, presenta un sinnúmero de complejidades. Pese a haber algunos casos particulares donde existen algoritmos para hacerlo, el caso general todavía es una incógnita. Algunas de las técnicas mencionadas pueden ayudar a resolver este problema, pero el cálculo todavía no está cerrado.

[3] En SINGULAR, ls es el orden lexicográfico negativo. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ entonces $x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow \exists\ 1 \leq i \leq n : \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i$.

Capítulo 4

Birracionalidad de ψ_C

4.1 Consideraciones generales

En el presente capítulo, analizaremos en profundidad la inyectividad de nuestras parametrizaciones. Existe una magnitud importante a definir, que jugará un papel esencial en todo nuestro desarrollo.

Definición 4.1.1 *Dada una matriz $B \in \mathbb{Z}^{n\times m}$, con suma de columnas igual a cero (cfr. Sección §2.1.1), definimos*

$$g := mcd(\textit{menores maximales de } B) \ .$$

Observación 4.1.2 *Notemos que B tiene rango máximo (en $\mathbb{Q}^{n\times m}$) sii $g \neq 0$.*

Definición 4.1.3 *La parametrización ψ_B es* propia *si es genéricamente 1–1, esto es* $\deg \psi_B = 1$.

Queremos encontrar condiciones que garanticen la inyectividad de nuestra parametrización. En primer lugar, veremos que la matriz B debe tener rango máximo, es decir, necesariamente $g \neq 0$.

Proposición 4.1.4 *Supongamos que B tiene rango $r < m$ (suponiendo $n \geq m$, rango menor a m equivale a $g = 0$). Entonces, la parametrización ψ_B no es 1–1. Más aún, la dimensión de la imagen es menor o igual a $r - 1$.*

Una pregunta natural que surge es si la dimensión es igual a $r-1$ o no. Aún en caso de rango máximo m, la dimensión puede ser menor, como se ilustra en el siguiente ejemplo sencillo:

Ejemplo 4.1.5

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 \\ b_2 \\ -b_2 \\ b_3 \\ -b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{6\times 2} \ ;$$

donde $\{b_1, b_2\}$ es l.i. En este caso, es fácil ver que las coordenadas de la parametrización son $y_1 = y_2 = \pm 1$,[1] lo que dice $\dim S = 0$, a pesar de ser rango$(B) = 2$. ■

[1] El signo depende de la paridad de los exponentes de cada forma lineal.

No obstante, si $g \neq 0$, la dimensión esperada de S es $m-1$, con excepción de "casos degenerados" como el presentado en el ejemplo anterior. Esto significa, simplemente, que la clausura de la imagen de ψ_B (i.e. S) es una hipersuperficie para matrices generales B. Aunque la clasificación de matrices excepcionales es muy sutil, la condición $\dim S = m-1$ puede comprobarse algorítmicamente (cfr. [15] y [11]). Más aún, es suficiente encontrar un punto w para el cual el rango de la matriz jacobiana de ψ_B es $m-1$ (ver [34]).

Para ilustrar la demostración de la Proposición 4.1.4, presentamos un ejemplo donde $r < m$ y la dimensión de la imagen es $r-1$.

Ejemplo 4.1.6 Supongamos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, el rango de B es 2. Como $v^{(2)} = -v^{(1)}$, tenemos $y_2 = 1/y_1$. Además, $l_3 = l_1 - l_2$ y $l_4 = -2 * l_1$. La parametrización resultante es:

$$y_1 = \frac{l_1 * (l_1 - l_2)^2}{l_2 * (-2 * l_1)^2} \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{y_1} \quad ; \quad y_3 := \frac{l_2}{l_1 - l_2}\,.$$

Tomando $w = l_1/l_2$, vemos que

$$y_1 = \frac{(w-1)^2}{4 * w} \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{y_1} \quad ; \quad y_3 := \frac{1}{w-1}\,.$$

Luego, en este caso, tenemos $\dim(S) = 1 = 2 - 1$. ■

Demostración. [Proposición 4.1.4]

Para facilitar la notación, supongamos que

$$B = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_r \\ \\ \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i^{(r)} \cdot l_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i^{(n-1)} \cdot l_i) \end{pmatrix},$$

donde $\alpha_i^{(j)} \in \mathbb{Q}$ para todo i, j, y las primeras r filas de la matriz son l.i. sobre $\mathbb{Q}$. Cuando escribimos la parametrización, encontramos que nuestros y_i son funciones racionales de homogeneidad 0 en las r nuevas variables $l_1, \ldots, l_r$. Esto implica que cada y_i es una función racional en las $r-1$ variables $\tilde{l}_i := l_i/l_r$ con $i = 1, \ldots, r-1$. En particular, si $r < m$ tendremos $\dim(S) \leq r - 1 < m - 1 = \dim(\mathbb{P}^{m-1})$. Con esto, ψ_B jamás podrá ser 1–1. □

4.2 Un ejemplo motivador

En [24] se presenta una herramienta fundamental para el análisis de nuestras parametrizaciones. En efecto, el teorema principal de dicho artículo afirma que la parametrización ψ_B

es genéricamente 1–1 sii $g = 1$. En un comienzo, no resultaba clara la argumentación usada. Es así como se empezaron a mirar ejemplos particulares. Presentamos a continuación uno, que abrió las puertas de todo el trabajo a desarrollar en la siguiente sección.

Ejemplo 4.2.1 Con la notación de la Sección §2.1.1, sea B la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

donde $g = 6$. Veremos que ψ_B es propia, calculando el cardinal de la preimagen de un punto genérico en la hipersuperficie S. Más aún, como resultado de esto tendremos que la parametrización no sólo es 1–1 genéricamente, sino que además es birracional, i.e. existe una inversa genérica también racional.

La parametrización asociada a la matriz B es:

$$y_1 := \frac{l_1 * l_2}{l_4^2} \quad ; \quad y_2 := \frac{l_1 * l_3}{l_4^2} \quad ; \quad y_3 := \frac{l_1^3 * l_2^2 * l_3}{l_5^6} \, .$$

Fijemos $(y_1, y_2, y_3) \in S$ y sea $(u, s, t) \in \big(\mathbb{C}^3 \setminus (l_4 = l_5 = 0)\big)/\sim \subset \mathbb{P}^2$ tal que $\psi_B(u, s, t) = (y_1, y_2, y_3)$. Queremos calcular el número de $(u : s : t) \in \mathbb{P}^2$ con esta propiedad. Recordemos que en este caso:

$$\begin{cases} l_1 := u + s + 3 * t \, ; \\ l_2 := u + 2 * t \, ; \\ l_3 := s + t \, ; \\ l_4 := -2 * (u + s) \, ; \\ l_5 := -6 * t \, . \end{cases}$$

Dado que $l_5(u, s, t) = -6t \neq 0$, podemos suponer $t = 1$, ya que estamos trabajando en el espacio proyectivo. Luego, la nueva parametrización afinizada es:

$$\begin{cases} \tilde{l_1} := u + s + 3 \, ; \\ \tilde{l_2} := u + 2 \, ; \\ \tilde{l_3} := s + 1 \, ; \\ \tilde{l_4} := -2 * (u + s) \, ; \\ \tilde{l_5} := -6 \, ; \end{cases}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} y_1 & := & \frac{(u+s+3)(u+2)}{4*(u+s)^2} \, ; \\ y_2 & := & \frac{(u+s+3)(s+1)}{4*(u+s)^2} \, ; \\ y_3 & := & \frac{(u+s+3)^3(u+2)^2(s+1)}{6^6} \, . \end{array}$$

Notemos que

$$y_3 * 3^6 = y_1^2 * y_2 * (u + s)^6 \, . \tag{4.1}$$

Supongamos que $y_1 \, , \, y_2 \neq 0$ y que $(u, s, 1) \in \psi_B^{-1}(y_1, y_2, y_3)$. Resulta

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{u + 2}{s + 1} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda(1 + s) = u + 2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{u + 2 - \lambda}{\lambda} \, . \tag{4.2}$$

Por lo tanto, en este caso, tenemos un único valor para el parámetro s, una vez que fijamos el valor de u. Por otra parte, y_1 está unívocamente determinado por λ e y_2. Luego, sólo necesitamos verificar que $y_1(u, s) = y_1$ y que $y_3 * 3^6 = y_1^2 * y_2 * (u + s)^6$.

¿Qué ocurre con u? Dado que $y_3 * 3^6 = y_1^2 * y_2 * (u+s)^6$ e $y_1 * y_2 \neq 0$, la primer respuesta ("naïf guess") será que tenemos 6 valores para u. Pero este *no* será el caso. En efecto, u debe cumplir:

$$F := (u+s)^2 * 4 * y_1 - (u+s+3) * (u+2) = 4 * y_1 * (u+s)^2 - (u+2) * (u+s) - \\ -3 * (u+2) = 0 \, .$$

Como $s = \frac{u+2-\lambda}{\lambda}$, tenemos una nueva ecuación cuadrática que deberá verificar u:

$$\tilde{F} := \frac{(y_1+y_2) * (4y_1+4y_2-1)}{y_1} * u^2 - \frac{4(y_1+y_2)(2y_1-4y_2+1)}{y_1} * u + \\ + \frac{4 * (-y_2-y_1+4y_2^2-4y_2y_1+y_1^2)}{y_1} = 0 \, . \tag{4.3}$$

De la fórmula clásica se desprende:

$$u = \frac{\frac{4*(y_1+y_2)*(2y_1-4y_2+1)}{y_1} \pm \sqrt{144y_1+144y_2}}{2 * \frac{2(y_1+y_2)*(4y_1+4y_2-1)}{y_1}} = \\ = \frac{\frac{(y_1+y_2)*(2y_1-4y_2+1)}{y_1} \pm 3 * \sqrt{y_1+y_2}}{\frac{(y_1+y_2)*(4y_1+4y_2-1)}{y_1}} \, .$$

Combinemos a continuación las ecuaciones (4.1) y (4.3) para obtener un único valor de u. En efecto, las ecuaciones (4.1) y $u+s = u * \frac{y_1+y_2}{y_1} + \frac{2*y_2-y_1}{y_1}$ en conjunto devuelven:

$$G := (u+s)^6 = (u * \frac{y_1+y_2}{y_1} + \frac{2*y_2-y_1}{y_1})^6 \, .$$

Dividamos formalmente (reemplazando u por una variable U en G y $\tilde{F}$) el polinomio G por el polinomio $\tilde{F}$ con respecto a la veriable U. Luego de especializar en $U = u$, el resto obtenido será, por argumentos de grado, una expresión lineal en u. Dado que sabemos $\tilde{F}(u) = 0$, esto nos da una expresión más sencilla para G. Por el Algoritmo de División, usando MAPLE:

$$G = Q\,\tilde{F} + a\,U + b \, .$$

Si $y_1 \neq 0$ y $(4 * y_1 - 1 + 4 * y_2) \neq 0$, tenemos:

$$\begin{cases} a := \frac{486*(y_1+y_2)*(12y_1+1+12y_2)*(4y_1+3+4y_2)}{y_1*(4y_1-1+4y_2)^5} \, ; \\ b := \frac{-243*(-12y_2-96y_2*y_1^2-336y_2^2*y_1-192y_2^3-9y_1+48y_1^3-40y_1^2-160y_2^2-200y_2*y_1)}{y_1*(4y_1-1+4y_2)^5} \, . \end{cases}$$

(El cociente Q es una función racional en U, y_1, y_2 e y_3, con denominator igual a $y_1 * (4y_1 - 1 + 4y_2)^5$).

Especializando en $U = u$ resulta:

$$(u+s)^6 = G = a * u + b \, .$$

Combinando esto con la ecuación (4.1) nos devuelve una expresión para u y, por (4.2), para s. En consecuencia, hemos encontrado una inversa genérica de ψ_B, que notaremos

con $\Psi = (\Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3)$:

$\Psi_1 := \{1/2 * (15360 * y_3 * y_2^4 * y_1 - 160 * y_2^3 * y_1 - 200 * y_2^2 * y_1^2 - 12 * y_2^2 * y_1 - 40 * y_2 * y_1^3 - 9 * y_2 * y_1^2 - 3 * y_3 - 192 * y_2^4 * y_1 - 96 * y_2^2 * y_1^3 + 48 * y_2 * y_1^4 - 336 * y_2^3 * y_1^2 - 960 * y_3 * y_2 * y_1 - 15360 * y_3 * y_2^3 * y_1 - 23040 * y_3 * y_2^2 * y_1^2 + 5760 * y_3 * y_2^2 * y_1 - 15360 * y_3 * y_2 * y_1^3 + 5760 * y_3 * y_2 * y_1^2 + 30720 * y_3 * y_2^2 * y_1^3 + 15360 * y_3 * y_2 * y_1^4 + 30720 * y_3 * y_2^3 * y_1^2 - 480 * y_3 * y_1^2 - 480 * y_3 * y_2^2 + 60 * y_3 * y_1 + 60 * y_3 * y_2 - 3840 * y_3 * y_2^4 + 1920 * y_3 * y_2^3 - 3840 * y_3 * y_1^4 + 1920 * y_3 * y_1^3 + 3072 * y_3 * y_1^5 + 3072 * y_3 * y_2^5)\} / \{y_1 * (y_1 + y_2) * (12 * y_1 + 1 + 12 * y_2) * (4 * y_1 + 3 + 4 * y_2) * y_2\}$;

$\Psi_2 := \{1/2 * (15360 * y_3 * y_2^4 * y_1 + 40 * y_2^2 * y_1^2 - 40 * y_2 * y_1^3 - 3 * y_2 * y_1^2 - 80 * y_1^4 - 6 * y_1^3 - 3 * y_3 + 192 * y_2^2 * y_1^3 - 48 * y_2 * y_1^4 - 96 * y_1^5 + 144 * y_2^3 * y_1^2 - 960 * y_3 * y_2 * y_1 - -15360 * y_3 * y_2^3 * y_1 - 23040 * y_3 * y_2^2 * y_1^2 + 5760 * y_3 * y_2^2 * y_1 - 15360 * y_3 * y_2 * y_1^3 + +5760 * y_3 * y_2 * y_1^2 + 30720 * y_3 * y_2^2 * y_1^3 + 15360 * y_3 * y_2 * y_1^4 + 30720 * y_3 * y_2^3 * y_1^2 - -480 * y_3 * y_1^2 - 480 * y_3 * y_2^2 + 60 * y_3 * y_1 + 60 * y_3 * y_2 - 3840 * y_3 * y_2^4 + 1920 * y_3 * y_2^3 - 3840 * y_3 * y_1^4 + 1920 * y_3 * y_1^3 + 3072 * y_3 * y_1^5 + 3072 * y_3 * y_2^5)\} / \{y_1^2 * (y_1 + y_2) * (12 * y_1 + 1 + 12 * y_2) * (4 * y_1 + 3 + 4 * y_2)\}$;

$\Psi_3 := 1$.

Luego, si elegimos (y_1, y_2, y_3) fuera de $(y_1 * y_2 = 0) \cup (4 * y_1 - 1 + 4 * y_2 = 0) \cup ((y_1 + y_2) * (12 * y_1 + 1 + 12 * y_2) * (4 * y_1 + 3 + 4 * y_2) = 0)$, tenemos una parametrización 1–1. Más aún, resulta una función racional.

Luego, en este ejemplo, vemos que genéricamente tenemos un punto en cada preimagen y $g = 6$. Además, la condición "genérica" es necesaria a la hora de considerar la inyectividad. Por lo tanto, $\deg(\psi_B) = 1$. ■

Como hemos mencionado ya, este ejemplo motivó la reformulación del enunciado del Teorema de Kapranov, como veremos a continuación. Para ello, seguiremos de cerca [24] y [20].

4.3 Teorema de Kapranov precisado

En toda esta sección, notaremos con $*$ la multiplicación usual en $\mathbb{C}$ y con $\boldsymbol{.}$ con la multiplicación de matrices, mientras que la acción del toro será indicada con $\cdot$.

Definición 4.3.1 *Sea G un grupo algebraico con Algebra de Lie $\mathcal{G}$ y $S \subset G$ una hipersuperficie algebraica. Para cada $g \in G$ sea $l_g : h \mapsto gh$ la traslación a izquierda por el elemento g. La* función de Gauss a izquierda *(*left Gauss map*) de la hipersuperficie S es la función racional $\gamma_S : S \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{G}^*)$, que manda un punto suave $s \in S$ al hiperplano $d(l_s^{-1})(T_s S) \subset T_e(G) = \mathcal{G}$.*

Ejemplo 4.3.2 El caso que nos interesa puntualmente es $G = (\mathbb{C}^*)^m$. Resulta entonces $\mathcal{G} = \mathbb{C}^m$, y la traslación a izquierda es el morfismo de multiplicación usual. Si S es una hipersuperficie, definida por una ecuación $(\Delta = 0)$, la función de Gauss es, simplemente,

$$\gamma(\bar{y}) = (y_1 * \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}(\bar{y}) : \ldots : y_m * \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}(\bar{y})) \ , \tag{4.4}$$

que transforma un punto suave $\bar{y} \in S$ en un punto proyectivo de $\mathbb{P}^{m-1}$.

Geométricamente, γ se obtiene (localmente) de la siguiente manera. Debemos considerar la imagen de la función de coordenadas $a_\nu \mapsto \log(a_\nu)$ aplicada a la hipersuperficie $S = (\Delta = 0)$ y luego tomar como $\gamma(a)$ el vector normal (proyectivo) a $\log(S)$ en el punto $\log(\bar{a})$. De ahí el nombre del morfismo γ (cfr. [30]). ■

La función de Gauss estará íntimamente ligada a nuestra parametrización ψ_B.

Definición 4.3.3 *Una matriz $B \in \mathbb{Z}^{n\times m}$, $n \geq m$, cuyas columnas suman cero, es* no defectiva *si su clausura (Zariski) $\overline{Im\ \psi_B} \subseteq \mathbb{C}^m$ tiene dimensión $m-1$.*

Teorema 4.3.4 *Sea $G = (\mathbb{C}^*)^m$ el toro algebraico de dimensión m, $S \subseteq G$ una hipersuperficie algebraica irreducible. La función de Gauss (Gauss map) $\gamma_S : S \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ es birracional si y sólo si existe una matriz entera no defectiva $B \in \mathbb{Z}^{n\times m}$, de rango máximo y suma de columnas igual a cero, y una constante $c \in (\mathbb{C}^*)^m$ tal que $c \cdot \psi_B : \mathbb{P}^{m-1} \dashrightarrow S$ (i.e. una traslación de ψ_B por c en el toro) es birracional. Equivalentemente, $S = c\cdot\overline{Im(\psi_B)}\cap(\mathbb{C}^*)^m$, siendo $\psi_B : \mathbb{P}^{m-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^m$. Más aún, en este caso, la función de Gauss es la inversa de $c \cdot \psi_B$.*

Ejemplo 4.3.5 Verifiquemos nuestro Teorema en el Ejemplo 4.2.1. Recordemos que

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

y la ecuación que define la hipersuperficie, que hemos calculado en el Ejemplo 3.3.13, es:

$4096 * y_1^6 * y_3^2 + 24576 * y_1^5 * y_2 * y_3^2 - 128 * y_1^5 * y_2 * y_3 - 6144 * y_1^5 * y_3^2 + 61440 * y_1^4 *$
$*y_2^2 * y_3^2 - 384 * y_1^4 * y_2^2 * y_3 + y_1^4 * y_2^2 - 30720 * y_1^4 * y_2 * y_3^2 - 480 * y_1^4 * y_2 * y_3 + 3840 *$
$*y_1^4 * y_3^2 + 81920 * y_1^3 * y_2^3 * y_3^2 - 384 * y_1^3 * y_2^3 * y_3 - 61440 * y_1^3 * y_2^2 * y_3^2 - 960 * y_1^3 * y_2^2 *$
$*y_3 + 15360 * y_1^3 * y_2 * y_3^2 - 120 * y_1^3 * y_2 * y_3 - 1280 * y_1^3 * y_3^2 + 61440 * y_1^2 * y_2^4 * y_3^2 -$
$-128 * y_1^2 * y_2^4 * y_3 - 61440 * y_1^2 * y_2^3 * y_3^2 - 480 * y_1^2 * y_2^3 * y_3 + 23040 * y_1^2 * y_2^2 * y_3^2 -$
$-120 * y_1^2 * y_2^2 * y_3 - 3840 * y_1^2 * y_2 * y_3^2 - 2 * y_1^2 * y_2 * y_3 + 240 * y_1^2 * y_3^2 + 24576 * y_1 *$
$*y_2^5 * y_3^2 - 30720 * y_1 * y_2^4 * y_3^2 + 15360 * y_1 * y_2^3 * y_3^2 - 3840 * y_1 * y_2^2 * y_3^2 + 480 * y_1 * y_2 *$
$*y_3^2 - 24 * y_1 * y_3^2 + 4096 * y_2^6 * y_3^2 - 6144 * y_2^5 * y_3^2 + 3840 * y_2^4 * y_3^2 - 1280 * y_2^3 * y_3^2 +$
$+240 * y_2^2 * y_3^2 - 24 * y_2 * y_3^2 + y_3^2$.

En consecuencia, y de acuerdo con la Fórmula de Inversión de Kapranov, tenemos $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde $\gamma_i := y_i * \frac{\partial \Delta_B}{\partial y_i}(\bar{y})$ para $i = 1, 2, 3$. En este caso:

$\gamma_1 := 4 * y_1 * (-30720 * y_1 * y_2^3 * y_3^2 + 120 * y_1 * y_3^2 - 480 * y_1^3 * y_2 * y_3 - 90 * y_1^2 * y_2 *$
$*y_3 - 46080 * y_1^2 * y_2^2 * y_3^2 - 160 * y_1^4 * y_2 * y_3 - 60 * y_1 * y_2^2 * y_3 - 1920 * y_1 * y_2 * y_3^2 +$
$+30720 * y_1 * y_2^4 * y_3^2 - 30720 * y_1^3 * y_2 * y_3^2 - 720 * y_1^2 * y_2^2 * y_3 - 64 * y_1 * y_2^4 * y_3 - 384 *$
$*y_1^3 * y_2^2 * y_3 + 61440 * y_1^2 * y_2^3 * y_3^2 - 288 * y_1^2 * y_2^3 * y_3 + 30720 * y_1^4 * y_2 * y_3^2 - y_1 * y_2 *$
$*y_3 + 11520 * y_1 * y_2^2 * y_3^2 + 61440 * y_1^3 * y_2^2 * y_3^2 - 240 * y_1 * y_2^3 * y_3 + 11520 * y_1^2 * y_2 * y_3^2 +$
$+6144 * y_2^5 * y_3^2 + 3840 * y_2^3 * y_3^2 - 7680 * y_2^4 * y_3^2 - 7680 * y_1^4 * y_3^2 - 960 * y_2^2 * y_3^2 + 120 *$
$*y_2 * y_3^2 - 960 * y_1^2 * y_3^2 + y_1^3 * y_2^2 + 3840 * y_1^3 * y_3^2 + 6144 * y_1^5 * y_3^2 - 6 * y_3^2)$;

$\gamma_2 := 2 * y_2 * (-60 * y_1^3 * y_3 - 61440 * y_1 * y_2^3 * y_3^2 + 240 * y_1 * y_2^2 * y_3 - 960 * y_1^3 * y_2 * y_3 -$
$-120 * y_1^2 * y_2 * y_3 - 92160 * y_1^2 * y_2^2 * y_3^2 - 384 * y_1^4 * y_2 * y_3 - 3840 * y_1 * y_2 * y_3^2 + 61440 *$
$*y_1 * y_2^4 * y_3^2 - 61440 * y_1^3 * y_2 * y_3^2 - 720 * y_1^2 * y_2^2 * y_3 - 240 * y_1^4 * y_3 - y_1^2 * y_3 - 64 * y_1^5 *$
$*y_3 - 576 * y_1^3 * y_2^2 * y_3 + 122880 * y_1^2 * y_2^3 * y_3^2 - 256 * y_1^2 * y_2^3 * y_3 + 61440 * y_1^4 * y_2 * y_3^2 +$
$+23040 * y_1 * y_2^2 * y_3^2 + 122880 * y_1^3 * y_2^2 * y_3^2 + 23040 * y_1^2 * y_2 * y_3^2 + 12288 * y_2^5 * y_3^2 +$
$+7680 * y_2^3 * y_3^2 - 15360 * y_2^4 * y_3^2 - 15360 * y_1^4 * y_3^2 - 1920 * y_2^2 * y_3^2 + 240 * y_2 * y_3^2 -$
$-1920 * y_1^2 * y_3^2 + y_1^4 * y_2 + 7680 * y_1^3 * y_3^2 + 12288 * y_1^5 * y_3^2 - 12 * y_3^2)$;

$$\gamma_3 := 2*y_3*(-1280*y_1^3*y_3 - 60*y_1^2*y_2^2 - 64*y_1^2*y_2^4 + 24576*y_1*y_2^5*y_3 - 240* *y_1^2*y_2^3 + 15360*y_1^3*y_2*y_3 - 3840*y_1^2*y_2*y_3 - 30720*y_1^4*y_2*y_3 - 3840*y_1* *y_2^2*y_3 + 61440*y_1^4*y_2^2*y_3 + 23040*y_1^2*y_2^2*y_3 - 30720*y_1*y_2^4*y_3 - y_1^2*y_2+ +3840*y_1^4*y_3 - 192*y_1^3*y_2^3 + 240*y_1^2*y_3 - 6144*y_1^5*y_3 - 61440*y_1^3*y_2^2*y_3+ +81920*y_1^3*y_2^3*y_3 + 61440*y_1^2*y_2^4*y_3 - 61440*y_1^2*y_2^3*y_3 - 64*y_1^5*y_2 - 60* *y_1^3*y_2 + 480*y_1*y_2*y_3 + 24576*y_1^5*y_2*y_3 - 192*y_1^4*y_2^2 + 15360*y_1*y_2^3*y_3- -24*y_1*y_3 + 3840*y_2^4*y_3 - 1280*y_2^3*y_3 - 6144*y_2^5*y_3 + 4096*y_1^6*y_3 + 4096* *y_2^6*y_3 - 240*y_1^4*y_2 - 480*y_1^3*y_2^2 - 24*y_2*y_3 + 240*y_2^2*y_3 + y_3)\ .$$

Calculemos ahora $(z_{1(u,s,t)}, z_{2(u,s,t)}, z_{3(u,s,t)}) := (\gamma \circ \psi_B)(u,s,t)$. Obtenemos:

$$z_1 := (u+s+3*t)^7*(4*u^2+8*s*u+4*s^2+6*u*t+6*s*t+9*t^2)*(4* *u^2+8*s*u+4*s^2+18*u*t+18*s*t+27*t^2)*u*(u+2*t)^4*(s+t)^2\ / \{746496*t^7*(u+s)^{11}\}\ ;$$
$$z_2 := (u+s+3*t)^7*(4*u^2+8*s*u+4*s^2+18*u*t+18*s*t+27*t^2)* *(4*u^2+8*s*u+4*s^2+6*u*t+6*s*t+9*t^2)*s*(u+2*t)^4*(s+t)^2\ / \{746496*t^7*(u+s)^{11}\}\ ;$$
$$z_3 := (u+s+3*t)^7*(4*u^2+8*s*u+4*s^2+18*u*t+18*s*t+27*t^2)* *(4*u^2+8*s*u+4*s^2+6*u*t+6*s*t+9*t^2)*(u+2*t)^4* *(s+t)^2\ / \{746496*t^6*(u+s)^{11}\}\ .$$

Verificando con MAPLE, tenemos $(z_1 : z_2 : z_3) = (u : s : t)$, como esperábamos. ■

Es menester en este punto hacer una observación importante:

Observación 4.3.6 *Notemos que la aseveración del teorema se refiere a un punto* proyectivo *u. No debemos esperar, bajo ningún punto de vista, que $(\gamma \circ \psi_B)(u_1,\ldots,u_m) = (u_1,\ldots,u_m)$. Presentamos un ejemplo para ilustrar este hecho.*

Ejemplo 4.3.7 [Ejemplo 2.2.1 revisitado]

El presente ejemplo fue dado ya en la Sección §2.2.2, Ejemplo 2.2.1, en el contexto de la Teoría de A–discriminantes: la matriz A se asocia al discriminante de un polinomio univariado cúbico genérico.

Tomemos como matriz $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Elijamos una matriz B entera de rango máximo tal que $A \cdot B = 0$, digamos:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Obtenemos las formas lineales

$$l_1 := u + 2*v \quad ; \quad l_2 := -2*u - 3*v \quad ; \quad l_3 := u \quad ; \quad l_4 := v\ ,$$

y la parametrización ψ_B correspondiente:

$$\begin{cases} y_1 := l_1*l_3/l_2^2\ ; \\ y_2 := l_1^2*l_4/l_2^3\ . \end{cases}$$

Efectuando cálculos de bases de Gröbner, la ecuación que describe la hipersuperficie S es

$$\Delta_B(y_1,y_2) = -4*y_2 - 27*y_2^2 + y_1^2 + 18*y_2*y_1 - 4*y_1^3\ .$$

Con las notaciones anteriores, reproducimos cálculos realizados con MAPLE si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ es la función de Gauss de dicha hipersuperficie:

$$\gamma_1 := (12 * y_1^3 - 2 * y_1^2 - 18 * y_1 * y_2) \quad ; \quad \gamma_2 := (-4 * y_2 - 54 * y_2^2 + 18 * y_1 * y_2).$$

Calculemos $(z_{1(u,v)}, z_{2(u,v)}) := (\gamma \circ \psi_B)(u, v)$. Obtenemos:

$$\begin{aligned} z_1 &:= 4 * (u + 2 * v)^2 * u * (u^3 + 9 * u^2 * v + 27 * u * v^2 + 27 * v^3)/(2 * u + 3 * v)^6 \ ; \\ z_2 &:= 4 * (u + 2 * v)^2 * v * (u^3 + 9 * u^2 * v + 27 * u * v^2 + 27 * v^3)/(2 * u + 3 * v)^6. \end{aligned}$$

Notemos que no recuperamos (u, v) con $(\gamma \circ \psi_B)(u, v) = (z_1, z_2)$ sino que sólo resulta $z_1/z_2 = u/v$, o sea $(z_1 : z_2) = (u : v)$. ■

La demostración que presentamos a continuación sigue de cerca lo hecho por Kapranov en [24]. Se explican con mayor detalle algunas de las afirmaciones y se muestra dónde es plausible precisar más aún el resultado obtenido por éste.

Demostración.[Teorema 4.3.4] **Condición Suficiente.**

Sea $B := (b_{i,j})_{i,j}$, $\psi := \psi_B = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$, donde $\psi_i(\bar{u}) := \prod_{j=1}^{n} l_j(\bar{u})^{b_{j,i}}$, $l_j =< B_j; \bullet >$, y consideremos, salvo constante

$$\log \circ (c \cdot \psi) : U \subset (\mathbb{C}^*)^m \to (\mathbb{C}^*)^m \quad \begin{aligned} \log(\psi) = (\log(\psi_1), \ldots, \log(\psi_m)) + \\ + (\log(c_1), \ldots, \log(c_m)) \ , \end{aligned}$$

donde U es un abierto simplemente conexo que no contiene al origen, para evitar una multivaluación del logaritmo log. En este caso,

$$\log(\psi_j)(\bar{u}) := \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} * \log(l_k(\bar{u}))$$

y $l_k(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{m} b_{k,i} * u_i$, como en la Sección §2.1.1. El punto clave en la demostración es el siguiente:

$$\frac{\partial \log(c_j * \psi_j)}{\partial u_i} = \frac{\partial \log \ \psi_j}{\partial u_i} = \frac{\partial \log \ \psi_i}{\partial u_j} \quad \forall \, i, j = 1, \ldots, m \ , \tag{4.5}$$

que es muy fácil de verificar, ya que

$$\frac{\partial \log \ \psi_j}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{k,j} * b_{k,i}}{l_k}$$

es una expresión simétrica en i, j. Esto significa, simplemente, que la matriz jacobiana $J(\log(c \cdot \psi)) \underset{(4.5)}{=} J(\log \circ \psi) = \left(\frac{\partial \log \psi_i}{\partial u_j}\right)_{i,j}$ es simétrica:

$$J(\log \circ \psi) = \begin{pmatrix} \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}}{\psi_1} & \cdots & \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial u_m}}{\psi_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\frac{\partial \psi_m}{\partial u_1}}{\psi_m} & \cdots & \frac{\frac{\partial \psi_m}{\partial u_m}}{\psi_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m} \ . \tag{4.6}$$

Más aún, de esto último, multiplicando cada fila i por ψ_i (que no cambia genéricamente el rango del Jacobiano) se desprende que $rk(J(\log \circ \psi)) = rk(J\,\psi)$.

Afirmación. Dado que $rk(B) = m$ y B es no defectiva, resulta $rk(J(\log \circ \psi)) = m - 1$ genéricamente. En efecto, tenemos $rk(J\,\psi) = m - 1$ si y sólo si $\dim \overline{Im\,\psi_B} = m - 1$ genéricamente, i.e. B no defectiva.

Demostración. Por ser B no defectiva, y $\psi_B : \mathbb{P}^{m-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^m$, $S = \overline{Im\,\psi_B}$ es una hipersuperficie genéricamente suave y de dimensión $m-1$ como variedad holomorfa ([34]). Sabemos que en un punto suave, el plano tangente a $\psi_B(\bar{u})$ está generado por las columnas de la matriz Jacobiana $J\,\psi$ y tiene dimensión $m-1$. Esto implica que la matriz Jacobiana debe tener, genéricamente, rango $m-1$. □

Usando la expresión (4.6) anterior, tenemos la siguiente propiedad, válida para cualquier $\bar{z} \in \mathbb{C}^m$:

$$(J\,\psi)^t \cdot \bar{z}^t = (J\,\log\,\psi)^t \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 * z_1 \\ \vdots \\ \psi_m * z_m \end{pmatrix} . \tag{4.7}$$

Dado que $J\,\log\,\psi$ es simétrica, si hallamos $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que $(J\,\log\,\psi) \cdot \bar{x}^t = 0$, entonces resultará $(J\,\log\,\psi)^t \cdot \bar{x}^t = 0$.

Relacionemos $J\,\psi$ y $J(c \cdot \psi)$:

$$J(c \cdot \psi) = \begin{pmatrix} c_1 * \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} & \ldots & c_1 * \frac{\partial \psi_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_m * \frac{\partial \psi_m}{\partial u_1} & \ldots & c_m * \frac{\partial \psi_m}{\partial u_m} \end{pmatrix} .$$

Luego, para cualquier $\bar{z} \in \mathbb{C}^m$,

$$(J(c \cdot \psi))^t \cdot \bar{z}^t = (J\,\psi)^t \cdot (c \cdot \bar{z})^t . \tag{4.8}$$

Sabemos que ψ_j y, por tanto, $\log(\psi_j)$ son formas homogéneas de grado 0. Gracias a la Fórmula de Euler, resulta

$$\sum_{i=1}^{m} u_i * \frac{\partial\,\log\,\psi_j}{\partial\,u_i} = 0, \quad \forall\, j = 1, \ldots, m . \tag{4.9}$$

Esto dice que $\bar{u} \in \ker(J(\log\,\psi(\bar{u})))$. Más aún, $\bar{u}$ es un generador del núcleo, que tiene dimensión 1.

Llamemos Δ a la ecuación que define a $\overline{Im(c \cdot \psi_B)} = \overline{c \cdot Im\,\psi_B} = c \cdot \overline{Im\,\psi_B}$, esto es $S := (\Delta(c \cdot y) = 0)$. Por otro lado, como $\Delta(c_1 * \psi_1, \ldots, c_m * \psi_m) \equiv 0$, el diferencial debe ser nulo:

$$\nabla\big(\Delta_{(c\cdot\psi)}\big) \cdot J(c \cdot \psi) \equiv 0 .$$

Si transponemos la expresión anterior,

$$(J(c \cdot \psi))^t \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}(c \cdot \psi) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}(c \cdot \psi) \end{pmatrix} = 0 .$$

O, usando la ecuación (4.8),

$$(J\,\psi)^t \cdot \begin{pmatrix} c_1 * \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}(c \cdot \psi) \\ \vdots \\ c_m * \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}(c \cdot \psi) \end{pmatrix} = 0 .$$

Tomando $\bar{z} = c \cdot (\frac{\partial \Delta}{\partial y_1}(c \cdot \psi), \ldots, \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}(c \cdot \psi))$ y reemplazando en la ecuación (4.7) resulta:

$$(J \log \psi)^t \cdot \begin{pmatrix} \{y_1 * \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}\}(c \cdot \psi) \\ \vdots \\ \{y_m * \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}\}(c \cdot \psi) \end{pmatrix} = 0 \, .$$

Combinando esto con la ecuación (4.9), la simetría de $J \log \psi$ y el hecho de que $\ker(J \log \psi(\bar{u})) = \langle \bar{u} \rangle$, tenemos:

$$\exists \, \lambda = \lambda(\bar{u}) \neq 0 \;\text{ tal que } \{y_i * \frac{\partial \Delta}{\partial y_i}\}(c \cdot \psi(\bar{u})) = \lambda * \bar{u} \, .$$

En consecuencia, $(\{y_1 * \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}\}(c \cdot \psi(\bar{u})) : \ldots : \{y_1 * \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}\}(c \cdot \psi(\bar{u}))) = (u_1 : \ldots : u_m)$ como queríamos mostrar. □

Demostración.[Teorema 4.3.4] **Condición Necesaria.**

Notemos con $\psi : \mathbb{P}^{m-1} \dashrightarrow S$ la inversa genérica de la función de Gauss. Queremos ver que, salvo una traslación en el toro, ψ está definida a partir de una matriz B tal que $\psi = \psi_B$.

Dado que ψ es una función racional con dominio incluido en el plano proyectivo, la misma está definida a partir de m formas racionales de homogeneidad cero: $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$. La herramienta fundamental consistirá en mostrar que la relación (4.5) se verifica para ψ. Nuevamente, trabajaremos con la función log.

Sea $J = J(\bar{u})$ la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial \log \psi_i}{\partial u_j}(\bar{u})\right)_{i,j}$, que depende del punto proyectivo $\bar{u}$, y donde log es la función multivaluada de $(\mathbb{C}^*)^m$ en $\mathbb{C}^m$ que manda $(x_1, \ldots, x_m)$ en el punto $(\log(x_1), \ldots, \log(x_m))$, para alguna elección (local) del logaritmo. El espacio tangente a $\log(S)$ en el punto $\bar{z} = \log \psi(\bar{u})$ es la imagen del espacio fila de $J(\bar{u})^t$ (por ser imagen del espacio columna de $J(\bar{u})$). Por argumentos de 0-homogeneidad de ψ (y por ende de $\log \circ \psi$), sabemos que $\ker(J(\bar{u}))$ contiene al vector $(u_1, \ldots, u_m)$. Ahora bien, como S es una hipersuperficie (por ser ψ genéricamente 1–1), $Im(J(\bar{u})) = \mathrm{E_C}(J(\bar{u}))$ tiene dimensión $m-1$ genéricamente y, por tanto, resulta un hiperplano de ecuación lineal $\mu_1 * \zeta_1 + \ldots + \mu_m * \zeta_m$, que se anula en casi todo punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in Im(J(\bar{u}))$. Por lo tanto, $(\mu_1, \ldots, \mu_m) \cdot J(\bar{u}) \equiv (0, \ldots, 0)$ genéricamente. Esto significa, simplemente, que $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ genera el espacio unidimensional $\ker(J(\bar{u})^t) \subset \mathbb{C}^m$.

Más aún, dada la inversa ψ de la función logarítmica de Gauss, sabemos que para cualquier $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_m)$, el vector $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ resulta proporcional a $\bar{u}$. De hecho, ambas condiciones son equivalentes. Veamos esto último. Sea $(\Delta = 0) = \overline{Im\, \psi}$. Sabemos que, dado $\bar{u}$, existe $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \bar{u} = \gamma \circ \psi(\bar{u}) = (\psi_1 * \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}(\psi(\bar{u})), \ldots, \psi_m * \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}(\psi(\bar{u}))) \in \mathbb{C}^m$. En particular, el último vector es no nulo. Por lo tanto, para mostrar que $\bar{\mu}$ es proporcional a $\bar{u}$ bastará con ver que $(\psi_1 * \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}(\psi(\bar{u})), \ldots, \psi_m * \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}(\psi(\bar{u})))$ vive en $\ker(J(\bar{u})^t) = \langle \bar{\mu} \rangle$. Siguiendo la relación expresada en (4.7):

$$(J \log \psi(\bar{u}))^t \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 * \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}(\psi(\bar{u})) \\ \vdots \\ \psi_m * \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}(\psi(\bar{u}) \end{pmatrix} = (J\, \psi(\bar{u}))^t \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}(\psi(\bar{u})) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}(\psi(\bar{u})) \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto, sólo resta probar $(J\, \psi(\bar{u}))^t \cdot (\frac{\partial \Delta}{\partial y_1}(\psi(\bar{u})), \ldots, \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}(\psi(\bar{u})))^t = 0$. Ahora bien, sabemos que la hipersuperficie tiene ecuación $(\Delta = 0)$. En consecuencia, el vector $(\frac{\partial \Delta}{\partial y_1}(\psi(\bar{u})), \ldots, \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}(\psi(\bar{u})))$ da los coeficientes de la ecuación del plano tangente en el punto $\psi(\bar{u})$. Por lo tanto, dicho vector está en el núcleo de $(J\, \psi(\bar{u}))^t$. La recíproca es análoga.

Como corolario de la proporcionalidad vista entre los vectores $\bar{u}$ y $\bar{\mu}$, tenemos $\ker(J(\bar{u})^t) = \langle \bar{u} \rangle$. Es decir:

$$J(\bar{u})^t \cdot \bar{u}^t = \sum_{i=1}^{m} u_i * \frac{\partial \log \psi_i}{\partial u_k} = 0, \quad \forall\, k\,. \tag{4.10}$$

Por su parte, por homogeneidad de ψ y, por ende, de $\log \circ \psi$, sabemos que

$$J(\bar{u}) \cdot \bar{u}^t = \sum_{k=1}^{m} u_k * \frac{\partial \log \psi_i}{\partial\, u_k} = 0, \quad \forall\, i\,. \tag{4.11}$$

Esto dice que tanto $J(\bar{u})$ como $J(\bar{u})^t$ se anulan en $\bar{u}^t = (u_1, \ldots, u_m)^t$.

Recordemos que queríamos probar la simetría de la matriz $J(\bar{u})$. Para ello será suficiente mostrar:

$$\log(\psi_k) = \frac{\partial}{\partial u_k}\big(\sum_{i=1}^{m} u_i * \log(\psi_i)\big) \tag{4.12}$$

(cfr. Proposición 2.5 en [24]). En efecto, la simetría de J será consecuencia inmediata de la simetría de las derivadas parciales mixtas de orden 2. Analicemos entonces la ecuaión (4.12). La misma se deduce naturalmente del miembro derecho, dividiendo la suma en dos partes, i.e. la suma para $i = k$ y la suma para $i \neq k$, y reordenando. Por medio de la ecuación (4.10) obtenemos $0 + \log(\psi_k)$, como deseábamos.

Finalmente, necesitamos la siguiente Proposición, atribuida a Horn.

Proposición 4.3.8 *Supongamos que existen funciones racionales $\psi_i(\bar{u})$, $i = 1, \ldots, m$, homogéneas de grado 0, y tales que $\frac{\partial \log \psi_i}{\partial\, u_j} = \frac{\partial \log \psi_j}{\partial\, u_i}$ para todo $i, j = 1, \ldots, m$ (i.e. $J(\log \circ \psi)(\bar{u})$ es una matriz simétrica). En tal caso, existen $n \in \mathbb{N}$, una matriz entera B de tamaño $n \times m$ ($B = \big(b_{jk}\big)_{j,k}$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$) y un vector constante $c := (c_1, \ldots, c_m) \in (\mathbb{C}^*)^m$ tal que $c \cdot \psi = \psi_B$.*

Demostración. La estrategia consistirá en mostrar que $c_k * \psi_k$ es una función racional homogénea, donde tanto numerador como denominador son producto de formas lineales, teniendo como exponentes los coeficientes de las formas lineales correspondientes. Esto dará la matriz B deseada.

Sean $f_1, \ldots, f_n$ todos los factores irreducibles de los numeradores y denominadores de los ψ_k. Como cada ψ_k es homogéneo, los f_j resultan también homogéneos. Para cada par (j, k), sea b_{jk} el exponente correspondiente al polinomio f_j en la factorización de ψ_k.

$$\psi_k(u_1, \ldots, u_m) = \varepsilon_k \prod_{j=1}^{n} f_j(\bar{u})^{b_{jk}}, \quad \varepsilon_k \in \mathbb{C}^*\,,\ b_{jk} \in \mathbb{Z}\,.$$

Más aún, si notamos con $d_j = \deg(f_j)$, entonces $\sum_{j=1}^{n} d_j * b_{jk} = 0$ para cada k, por ser la homogeneidad igual a 0.

Componiendo cada ψ_k con log tenemos, por la condición simétrica dada como hipótesis,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{jk} * (\partial f_j / \partial u_r)}{f_j} = \frac{\partial \log \psi_k}{\partial\, u_r} = \frac{\partial \log \psi_r}{\partial\, u_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{jr} * (\partial f_j / \partial u_k)}{f_j}\,. \tag{4.13}$$

Miremos más de cerca la ecuación (4.13). En primer lugar vemos que, en cada sumando, el grado de cada numerador es menor que el grado del correspondiente denominador. Combinando esto con el hecho que los f_j son coprimos dos a dos, resulta

$$b_{jk} * \frac{\partial f_j}{\partial\, u_r} = b_{jr} * \frac{\partial f_j}{\partial\, u_k}, \quad \forall\, k, r = 1, \ldots, m, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n\,. \tag{4.14}$$

En otras palabras, todos los menores maximales de la matriz de tamaño $2 \times m$

$$\begin{pmatrix} b_{j1} & b_{j2} & \dots & b_{jm} \\ \frac{\partial f_j}{\partial u_1} & \frac{\partial f_j}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_j}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

se anulan para cada j. Esto dice que cada matriz tiene rango 1 para cualquier $\bar{u}$. En consecuencia, el vector numérico $(b_{j1}, \dots, b_{jm})$ es proporcional, con razón en $\mathbb{C}(u_1, \dots, u_m)$ (el cuerpo de fracciones de los polinomios), al vector polinomial $(\frac{\partial f_j}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial u_m})$. Resulta entonces

$$\frac{\partial f_j}{\partial u_p} = \delta_j(\bar{u}) * b_{jp} \tag{4.15}$$

para una función racional no nula δ_j (f_j no es constante, y por ende, $\delta_j(\bar{u}) \neq 0$). Por su parte, es fácil ver que $\delta_j(\bar{u})$ es, en efecto, un polinomio. Queremos mostrar algo más fuerte aún: que es constante.

Como f_j es homogéneo, tenemos por la Fórmula de Euler

$$\sum_{p=1}^{m} u_p * \frac{\partial f_j}{\partial u_p} = d_j * f_j \ .$$

Combinando esto con la expresión (4.15) y reagrupando, resulta:

$$\big(\sum_{p=1}^{m} b_{jp} * u_p\big) * \delta_j(\bar{u}) = d_j * f_j \ .$$

Veamos, simultáneamente, que $d_j = 1$ y que $\delta_j(\bar{u})$ es constante para todo j. Si δ_j no es constante, obtenemos una contradicción con la irreducibilidad de cada f_j, pues $\deg \delta_j \leq \deg f_j - 1$. Por tanto, $\deg(\delta_j) = 0$. Calculando el grado de cada miembro en la última ecuación, obtenemos $1 = 1 + \deg(\delta_j) = \deg f_j = d_j$, con lo cual $d_j = 1$.

En conclusión, δ_j es constante para todo j, y los f_j son formas lineales homogéneas, digamos

$$f_j(u_1, \dots, u_m) = \sum_{p=1}^{m} a_{jp} * u_p \ .$$

A partir de la ecuación (4.15) vemos que $a_{jp} = \delta_j * b_{jp}$ donde $\delta_j \in \mathbb{C}^*$. Por lo tanto,

$$\psi_k(\bar{u}) = \underbrace{(\varepsilon_k * \prod_{j=1}^{n} \delta_j^{b_{jk}})}_{:=c_k} * \prod_{j=1}^{n} \big(\sum_{p=1}^{m} b_{jp} * u_p\big)^{b_{jk}}$$

como queríamos probar. □

Munidos de la Proposición 4.3.8, podemos ahora terminar con la demostración del Teorema 4.3.4. Observemos que no hemos obtenido aún la condición $n \geq m$ para la matriz B que devuelve la Proposición 4.3.8. Dado que S es una hipersuperficie y ψ es una biyección genérica, el rango de la matriz $B := \big(b_{jk}\big)_{j,k}$ debe ser m, como ya vimos en la Proposición 4.1.4. Notemos que en la misma no hemos usado que $n \geq m$. En efecto, si el rango fuera menor a m, ψ resultaría no inyectiva. En particular, de aquí se deduce que $n \geq m = \text{rango}(B)$.

Por otro lado, por homogeneidad de cada ψ_k, vemos que $\sum_{j=1}^{n} b_{jk} = 0$ para cada k. Esto dice que B es no defectiva, de rango máximo y que verifica $A \cdot B = 0$, siendo A una matriz entera A, de tamaño $(n-m) \times n$, cuya primer fila resulta $(1, \dots, 1)$. Si tomamos $c = (c_1, \dots, c_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ como la constante provista por la Proposición 4.3.8, entonces $\psi = \gamma^{-1} = c \cdot \psi_B$, i.e. el trasladado en el toro por c, como necesitábamos. □

Observación 4.3.9 *En la última parte de la demostración dada recae la imprecisión de Kapranov. En su trabajo afirma que el retículo (lattice) generado por las columnas de B (llamado L) debería ser primitivo (primitive lattice), es decir $g = 1$. Parafraseando: "In fact, otherwise the map ψ would be a ν-sheeted cover of S, where $\nu = [(L\otimes\mathbb{Q})\cap\mathbb{Z}^n : L]$." En nuestro caso, $g = \nu$. Esta afirmación no es válida. A priori, sería una situación bastante natural. Esto está relacionado en forma estrecha con el Lemma 6.3.1 (ver [10]). Para más detalles, referimos a la Observación 4.4.7, que haremos en la próxima sección.*

Observación 4.3.10 *Un hecho importante, que se desprende de la demostración anterior es el siguiente. Para probar la condición suficiente* no *debemos asumir que $c\cdot\psi_B$ es birracional. Por el contrario, la técnica empleada consiste en mostrar que $\gamma\circ(c\cdot\psi_B) = id_{\mathbb{P}^m}$ genéricamente, es decir, usando simplemente la definición de función inversa a izquierda.*

Sin embargo, para demostrar la condición necesaria resulta fundamental *partir de la existencia de una inversa de la función γ. En efecto, se muestra que la misma tiene la forma deseada: es la traslación en el toro de una ψ_B. En particular, esto dice que no todas las hipersuperficies irreducibles $S\subset(\mathbb{C}^*)^m$ van a admitir una γ_S birracional, sino sólo aquellas que son traslaciones en el toro de $\overline{Im\ \psi_B}\cap(\mathbb{C}^*)^m$ para alguna B no defectiva. Este hecho nos provee de otra motivación para el estudio de las parametrizaciones ψ_B.*

Como consecuencia fundamental de esta observación tenemos:

Teorema 4.3.11 *Supongamos* $\dim S = m-1$ *y $B\in\mathbb{Z}^{n\times m}$ no defectiva, de rango máximo m y con suma de columnas igual a cero. Entonces ψ_B es propia.*

Observación 4.3.12 *Otra consecuencia natural del Teorema 4.3.4 es la siguiente. Supongamos por un instante que podemos calcular la inversa de ψ_B. Llamémosla Ψ. Sabemos además que γ (la función de Gauss) es la inversa de ψ_B, gracias al Teorema 4.3.4. Por unicidad de la inversa, resulta $\Psi\equiv\gamma$. Dado que $\gamma : S\subseteq(\mathbb{C}^*)^m \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$, si consideramos ambas funciones $\Psi,\gamma : S \dashrightarrow \mathbb{C}^m\setminus\{0\}$ fijando un punto en $\mathbb{C}^m\setminus\{0\}$ por cada punto proyectivo en $\mathbb{P}^{m-1}$, existe $F := F(\bar y)\neq 0$ tal que*

$$\Psi_i(\bar y) = F(\bar y) * \gamma_i(\bar y) \quad \textit{para todo } i = 1,\dots,m\ ,\ \bar y\in S\ .$$

O equivalentemente,

$$\Psi_i(\bar y) * \gamma_m(\bar y) - \Psi_m(\bar y) * \gamma_i(\bar y) = 0 \quad \textit{para todo } i = 1,\dots,m\ ,\ \bar y\in S\ , \tag{4.16}$$

ya que F es nunca nula. Como Ψ es una función racional, tomemos $\Psi_i = \Psi_{i,1}/\Psi_{i,0}$, donde $\Psi_{i,1},\Psi_{i,0}$ son polinomios. Usando las ecuaciones (4.4) y (4.16) en simultáneo, obtenemos un sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\Psi_{i,1}(\bar y)*\Psi_{m,0}(\bar y)*y_m*\frac{\partial\,\Delta_B}{\partial\,y_m}(\bar y) - \Psi_{m,1}(\bar y)*\Psi_{i,0}(\bar y)*y_i*\frac{\partial\,\Delta_B}{\partial\,y_i}(\bar y) = 0 \quad i = 1,\dots,m-1\ ,\ \bar y\in S\ . \tag{4.17}$$

Por otra parte, sabemos que $S = (\Delta_B = 0)$, siendo Δ_B irreducible. Por lo tanto, deben existir polinomios H_i, tales que el sistema (4.17) es equivalente a:

$$\Psi_{i,1}(\bar y)*\Psi_{m,0}(\bar y)*y_m*\frac{\partial\,\Delta_B}{\partial\,y_m}(\bar y) - \Psi_{m,1}(\bar y)*\Psi_{i,0}(\bar y)*y_i*\frac{\partial\,\Delta_B}{\partial\,y_i}(\bar y) = H_i*\Delta_B(\bar y)\ \ i = 1,\dots,m-1\ . \tag{4.18}$$

Tenemos entonces la siguiente ecuación de derivadas parciales:

$$\Psi_{i,1}(\bar y)*\Psi_{m,0}(\bar y)*y_m*\frac{\partial\,f}{\partial\,y_m}(\bar y) - \Psi_{m,1}(\bar y)*\Psi_{i,0}(\bar y)*y_i*\frac{\partial\,f}{\partial\,y_i}(\bar y) = h*f(\bar y) \quad i = 1,\dots,m-1\ . \tag{4.19}$$

con incógnitas $(f(\bar{y}), h(\bar{y}))$. *Más aún, ya sabemos que el discriminante* Δ_B *junto con el polinomio* H_i *es una solución polinomial para este sistema, y que* $\deg(\Delta_B)$ *está acotado por* D^2, *en el peor de los casos (ver Teorema 2.1.2 en Sección §2.1.1). Esto implica la acotación en grado del lado izquierdo de cada ecuación del sistema. En consecuencia, podemos estimar el grado de cada polinomio* H_i. *Notemos al mismo con* c_i.

Podemos intentar resolver el sistema en las "variables indeterminadas" H_i *y* Δ_B, *reemplazando las mismas por polinomios con coeficientes indeterminados en* m *variables, de grados totales a lo sumo* c_i *y* D^2, *respectivamente, como una solución a nuestro sistema. De este modo, obtendremos todos los posibles pares* (H_i, Δ_B). *Es relevante mencionar que este método puede aplicarse con la ayuda de un sistema de álgebra computacional eficiente en el manejo de polinomios.*

Otra posible solución para este método, que no involucra el cálculo de los polinomios H_i, *es el siguiente. Sabemos que* $\Delta_B(\bar{y})$ *se anula en* $\bar{y} = \psi_B(\bar{x})$. *Por lo tanto, si evaluamos la ecuación (4.18) en* $\bar{y} = \psi_B(\bar{x})$ *y tenemos una cota para el grado de* Δ_B, *obtendremos un sistema lineal en los coeficientes de este polinomio, a saber*

$$(\Psi_{i,1}\circ\psi_B)(\bar{x})*(\Psi_{m,0}\circ\psi_B)(\bar{x})*(\psi_B(\bar{x}))_m*(\frac{\partial\,\Delta_B}{\partial\,y_m}\circ\psi_B)(\bar{x})-(\Psi_{m,1}\circ\psi_B)(\bar{x})*(\Psi_{i,0}\circ\psi_B)(\bar{x})* \\ *\,(\psi_B(\bar{x}))_i*(\frac{\partial\,\Delta_B}{\partial\,y_i}\circ\psi_B)(\bar{x})=0 \quad i=1,\ldots,m-1\ , \tag{4.20}$$

que tendrá única solución, salvo constante. Más aún, sería deseable conocer el polítopo de Newton de Δ_B *(en vez de su grado), para reducir el número de variables involucradas en dicho sistema.*

Observación 4.3.13 *A partir de cada ecuación del sistema (4.18), podemos obtener una cota superior para cada grado* c_i. *Sean* $d_{i,0} = \deg(\Psi_{i,0})$ *y* $d_{i,1} = \deg(\Psi_{i,1})$ *con* $i = 1, \ldots, m$. *Tenemos entonces*

$$\deg(H_i) = c_i \leq (\text{máx}\{d_{i,1}+d_{m,0}; d_{m,1}+d_{i,0}) + 1\} + (\deg(\Delta_B)-1) - \deg(\Delta_B) = \\ = \text{máx}\{d_{i,1}+d_{m,0}; d_{m,1}+d_{i,0}\}, \tag{4.21}$$

que es ***independiente*** *del grado de* Δ_B.

En los siguientes ejemplos, veremos cómo ilustrar estas ideas y cuál es la relación entre los grados de los diferentes polinomios involucrados. Existen interesantes patrones en común entre los polinomios H_i. Para más información, ver Capítulo 5.

Ejemplo 4.3.14 Veamos qué ocurre en el Ejemplo 4.2.1, ya que sabemos de antemano cuál es una posible inversa Ψ:

$$\begin{cases} \Psi_1(\bar{y}) := \{1/2*(15360*y_3*y_2^4*y_1-160*y_2^3*y_1-200*y_2^2*y_1^2-12*y_2^2*y_1-40* \\ *y_2*y_1^3-9*y_2*y_1^2-3*y_3-192*y_2^4*y_1-96*y_2^2*y_1^3+48*y_2*y_1^4-336*y_2^3* \\ *y_1^2-960*y_3*y_2*y_1-15360*y_3*y_2^3*y_1-23040*y_3*y_2^2*y_1^2+5760*y_3*y_2^2* \\ *y_1-15360*y_3*y_2*y_1^3+5760*y_3*y_2*y_1^2+30720*y_3*y_2^2*y_1^3+15360*y_3*y_2* \\ *y_1^4+30720*y_3*y_2^3*y_1^2-480*y_3*y_1^2-480*y_3*y_2^2+60*y_3*y_1+60*y_3*y_2- \\ -3840*y_3*y_2^4+1920*y_3*y_2^3-3840*y_3*y_1^4+1920*y_3*y_1^3+3072*y_3*y_1^5+ \\ +3072*y_3*y_2^5)\}\ /\ \{y_1*(y_1+y_2)*(12*y_1+1+12*y_2)*(4*y_1+3+4*y_2)*y_2\}\ ; \\ \Psi_2(\bar{y}) := \{1/2*(15360*y_3*y_2^4*y_1+40*y_2^2*y_1^2-40*y_2*y_1^3-3*y_2*y_1^2-80* \\ *y_1^4-6*y_1^3-3*y_3+192*y_2^2*y_1^3-48*y_2*y_1^4-96*y_1^5+144*y_2^3*y_1^2-960*y_3* \\ *y_2*y_1-15360*y_3*y_2^3*y_1-23040*y_3*y_2^2*y_1^2+5760*y_3*y_2^2*y_1-15360*y_3* \\ *y_2*y_1^3+5760*y_3*y_2*y_1^2+30720*y_3*y_2^2*y_1^3+15360*y_3*y_2*y_1^4+30720*y_3* \\ *y_2^3*y_1^2-480*y_3*y_1^2-480*y_3*y_2^2+60*y_3*y_1+60*y_3*y_2-3840*y_3*y_2^4+ \\ +1920*y_3*y_2^3-3840*y_3*y_1^4+1920*y_3*y_1^3+3072*y_3*y_1^5+3072*y_3*y_2^5)\}\ / \\ \{y_1^2*(y_1+y_2)*(12*y_1+1+12*y_2)*(4*y_1+3+4*y_2)\}\ ; \\ \Psi_3(\bar{y}) := 1\ . \end{cases}$$

En este caso, sabemos que el grado del discriminante es a lo sumo $8^2 - (12+6) = 46$. Además hemos calculado previamente Δ_B, con lo cual, podemos resolver H_1 y H_2. Sea $\gamma_i(\bar{y}) = y_i * \frac{\partial \Delta_B}{\partial y_i}(\bar{y})$, como desarrollamos en el Ejemplo 4.3.5. El sistema (4.16) resulta:

$$\Psi_i(\bar{y}) * \gamma_3(\bar{y}) - \Psi_3(\bar{y}) * \gamma_i(\bar{y}) = q_i(\bar{y}) * \Delta_B(\bar{y}) \quad i = 1, 2 \ ,$$

para una cierta función racional q_i. Sabemos que el denominador (llamado r_i) del miembro izquierdo de nuestras ecuaciones es coprimo con Δ_B, por lo que $H_i = q_i * r_i \in \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]$. Calculamos, con la ayuda de MAPLE, el numerador del miembro izquierdo, y lo notamos con h_i. Observemos que $\Psi_3(\bar{y}) * \gamma_i(\bar{y})$ es un polinomio en $\bar{y}$. Verificando que Δ_B divide a h_i, y que $\mathrm{mcd}(\gamma_3, \Psi_{1,0}) = 1$, resulta r_i igual a $\Psi_{i,0}$, y por tanto:

$$\begin{cases} H_1 := -3*y_3 - 15360*y_3*y_2*y_1^3 + 5760*y_3*y_2^2*y_1 - 192*y_2^4*y_1 - 576*y_2^3* \\ *y_1^2 - 192*y_2*y_1^4 - 576*y_2^2*y_1^3 - 160*y_2^3*y_1 - 320*y_2^2*y_1^2 - 160*y_2*y_1^3 - 12* \\ *y_2^2*y_1 - 12*y_2*y_1^2 + 5760*y_3*y_2*y_1^2 - 960*y_3*y_2*y_1 + 15360*y_3*y_2^4*y_1 + \\ +30720*y_3*y_2^3*y_1^2 + 15360*y_3*y_2*y_1^4 + 30720*y_3*y_2^2*y_1^3 - 15360*y_3*y_2^3*y_1 - \\ -23040*y_3*y_2^2*y_1^2 + 60*y_3*y_1 + 60*y_3*y_2 - 480*y_3*y_1^2 - 480*y_3*y_2^2 + 1920* \\ *y_3*y_2^3 + 1920*y_3*y_1^3 + 3072*y_3*y_2^5 + 3072*y_3*y_1^5 - 3840*y_3*y_1^4 - 3840*y_3* \\ *y_2^4 \ ; \\ H_2 := -3*y_3 - 15360*y_3*y_2*y_1^3 - 80*y_1^4 + 5760*y_3*y_2^2*y_1 - 6*y_1^3 - 96*y_1^5 - \\ -96*y_2^3*y_1^2 - 288*y_2*y_1^4 - 288*y_2^2*y_1^3 - 80*y_2^2*y_1^2 - 160*y_2*y_1^3 - 6*y_2*y_1^2 + \\ +5760*y_3*y_2*y_1^2 - 960*y_3*y_2*y_1 + 15360*y_3*y_2^4*y_1 + 30720*y_3*y_2^3*y_1^2 + \\ +15360*y_3*y_2*y_1^4 + 30720*y_3*y_2^2*y_1^3 - 15360*y_3*y_2^3*y_1 - 23040*y_3*y_2^2*y_1^2 + \\ +60*y_3*y_1 + 60*y_3*y_2 - 480*y_3*y_1^2 - 480*y_3*y_2^2 + 1920*y_3*y_2^3 + 1920*y_3* \\ *y_1^3 + 3072*y_3*y_2^5 + 3072*y_3*y_1^5 - 3840*y_3*y_1^4 - 3840*y_3*y_2^4 \ . \end{cases}$$

Luego $q_1 := H_1/\{y_1 * (4*y_1 + 3 + 4*y_2) * (y_1 + y_2) * (12*y_1 + 1 + 12*y_2) * y_2\}$, $q_2 := H_2/\{y_1^2 * (4*y_1 + 3 + 4*y_2) * (y_1 + y_2) * (12*y_1 + 1 + 12*y_2)\}$. De acuerdo con las cotas calculadas, $c_1, c_2 \leq \text{máx}\{6+0, 0+5\} = 6$. En efecto, en este caso, ambos H_i son polinomios de grado 6, mientras que el grado del discriminante es 8. A priori, recordemos que teníamos como cota superior 46. Más aún, H_1 y H_2 presentan muchos monomios en común, incluyendo también los respectivos coeficientes. Además, $\psi_{1,0} = q_1/H_1$ y $\psi_{2,0} = q_2/H_2$ tienen una factorización muy similar: difieren sólo en un monomio. ■

Ejemplo 4.3.15 Recordemos el Ejemplo 3.2.2:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

y $\psi = (y_1, y_2, y_3) = (a/d, b/d, c/d)$, donde:

$$a := l_1^2 * l_3 \quad ; \quad b := l_1^2 * l_2 \quad ; \quad c := l_1 * l_3 * l_4 \quad ; \quad d := l_2 * l_3 * l_4 \ ,$$

$D = 3$ y más aún,

$$\Delta_B := y_1^2 + y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_2 + y_2 * y_3^2 \ .$$

Tratemos de calcular, a mano, la inversa de ψ. Como las tres últimas filas de B generan $\mathbb{Q}^3$, podemos expresar la inversa en términos de l_2, l_3 y l_4. Tenemos, además,

$$l_2 * \frac{y_1}{y_2} = l_3 \quad ; \quad l_4 * \frac{y_1}{y_3^2} = l_2 \ ,$$

con lo cual $(l_2, l_3, l_4) = l_4 \centerdot (\frac{y_1}{y_3^2}, \frac{y_1^2}{y_2 * y_3^2}, 1)$. En consecuencia:

$$(u,s,t)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \centerdot (l_2,l_3,l_4)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \centerdot (l_2,l_3,l_4)^t =$$
$$= l_4 \centerdot (-1 + \frac{y_1^2}{y_3^2 * y_2}, -\frac{y_1^2}{y_3^2 * y_2}, -\frac{y_1}{y_3^2} - \frac{y_1^2}{y_3^2 * y_2} + 1)^t \ .$$

Con esto

$$\Psi(y_1,y_2,y_3) = (\frac{-y_3^2 * y_2 + y_1^2}{y_3^2 * y_2} : -\frac{y_1^2}{y_3^2 * y_2} : \frac{-y_1 * y_2 - y_1^2 + y_3^2 * y_2}{y_3^2 * y_2}) =$$
$$= (\frac{-y_3^2 * y_2 + y_1^2}{1} : -\frac{y_1^2}{1} : \frac{-y_1 * y_2 - y_1^2 + y_3^2 * y_2}{1}) \ ,$$

ya que $y_2 * y_3 \neq 0$ (en caso contrario: $\bar{y} = \bar{0}$).

Miremos a continuación nuestro sistema de EDP, dado por (4.18):

$$\begin{cases} (-y_3^2 * y_2 + y_1^2) * y_3 * \frac{\partial \Delta_B}{\partial y_3}(\bar{y}) - (-y_1 * y_2 - y_1^2 + y_3^2 * y_2) * y_1 * \frac{\partial \Delta_B}{\partial y_1}(\bar{y}) &= H_1 * \Delta_B \ ; \\ (y_1^2) * y_3 * \frac{\partial \Delta_B}{\partial y_3}(\bar{y}) - (-y_1 * y_2 - y_1^2 + y_3^2 * y_2) * y_2 * \frac{\partial \Delta_B}{\partial y_2}(\bar{y}) &= H_2 * \Delta_B \ . \end{cases}$$

En este caso, acotando los grados obtenemos $\deg(H_1) \leq 3$ y $\deg(H_2) \leq 3$.

Efectuando los mísmos tipos de cálculos hechos en el ejemplo anterior (pues *ya conocemos* Δ_B), obtenemos $H_1 := -2 * y_2 * y_3^2 + y_2 * y_1 + 2 * y_1^2$; $H_2 := y_2 * y_1 - y_2 * y_3^2$. Nuevamente, H_1 y H_2 tienen estructura monomial muy semejante, y $\deg(H_1) = 3$, $\deg(H_2) = 3$. ■

Observación 4.3.16 *El ejemplo anterior resulta interesante, además, desde otro punto de vista. En el mismo hemos podido calcular la inversa de la parametrización ψ_B sin necesidad de recurrir al cálculo de Δ_B, sino sólo invirtiendo una submatriz maximal de B: la formada eliminando la primer fila. En efecto, esta situación se dio merced a tener una submatriz $B_{i,j,k}$ de B, inversible en $\mathbb{Q}^{3\times 3}$, formada por las filas i, j, k de B y tal que las correspondientes formas lineales l_i, l_j, l_k resultaron un producto entre formas racionales en las y_s y una función racional en todas las formas lineales $R(\bar{l})$* fija para las tres formas *l_i, l_j, l_k. Concretamente, en el ejemplo, $l_2 := (\frac{y_1^3}{y_1}) * R(\bar{l})$; $l_3 := (\frac{y_3^2}{y_2}) * R(\bar{l})$; $l_4 := R(\bar{l})$, siendo $R(\bar{l}) := l_4$ la función racional en las formas lineales $l_t \, t = 1, \ldots, 4$. Esto puede generalizarse, como mostramos a continuación.*

Proposición 4.3.17 *Sea $B \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ de rango máximo m ($n \geq m$), y suma de columnas igual a cero. Construimos la parametrización ψ_B. Supongamos que existen índices $i_1 < \ldots < i_m$ tales que la submatriz $B_{i_1,\ldots,i_m}$ formada por las filas $i_1, \ldots, i_m$ de B es inversible en $\mathbb{Q}^{m\times m}$ y tal que existen m formas racionales $Q_1(\bar{y}), \ldots, Q_m(\bar{y})$ en las variables y_s y una forma racional $R(\bar{l})$ en las formas lineales l_t, tales que*

$$l_{i_j} := Q_j(\bar{y}) \, R(\bar{l}) \quad \textit{para todo } j = 1, \ldots, m.$$

En tal caso, ψ_B es inversible y su inversa se obtiene como la proyección del punto $(B_{i_1,\ldots,i_m})^{-1} \centerdot (R(\bar{l})(Q_1(\bar{y}), \ldots, Q_m(\bar{y}))^t) = (B_{i_1,\ldots,i_m})^{-1} \centerdot (Q_1(\bar{y}), \ldots, Q_m(\bar{y}))^t$ en $\mathbb{P}^{m-1}$, que resulta una función racional en las variables y_s.

Demostración. Seguiremos el cálculo efectuado en el último ejemplo numérico.

Dado que $(B_{i_1,\ldots,i_m}) \in \mathbb{Q}^{m\times m}$ es inversible y

$$B_{i_1,\ldots,i_m} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{i_1} \\ \vdots \\ l_{i_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{i_1}(\bar{y})\, R(\bar{l}) \\ \vdots \\ Q_{i_m}(\bar{y})\, R(\bar{l}) \end{pmatrix} = R(\bar{l}) \cdot \begin{pmatrix} Q_{i_1}(\bar{y}) \\ \vdots \\ Q_{i_m}(\bar{y}) \end{pmatrix} ,$$

tenemos entonces $(u_1, \ldots, u_m) = R(\bar{l}) \cdot ((B_{i_1,\ldots,i_m})^{-1} \cdot (Q_{i_1}(\bar{y}), \ldots, Q_{i_m}(\bar{y}))^t)^t$, con lo cual

$$\psi_B^{-1}(y_1, \ldots, y_m) = (u_1 : \ldots : u_m) = ((B_{i_1,\ldots,i_m})^{-1} \cdot (Q_{i_1}(\bar{y}), \ldots, Q_{i_m}(\bar{y}))^t)^t \ \in \mathbb{P}^{m-1}$$

es una función racional en las indeterminadas $(y_1, \ldots, y_m) \in S$. □

4.4 Relación entre ψ_C y ψ_B

Antes de proceder con el análisis, necesitamos precisar notación. En efecto, el título de la sección refiere a dos parametrizaciones ψ_C y ψ_B. Se distinguirán por medio de la magnitud g caracterizada en la Definición 4.1.1.

En [10] hay una Proposición que nos resultará sumamente útil. Supongamos que tenemos una matriz $C \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ de rango máximo m ($n \geq m$) y suma de columnas igual a cero, con $g(C) = g$. Construimos una matriz A de rango máximo, con coeficientes $A := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & A' & \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{(n-m)\times n}$, tal que $A \cdot C = 0$ (notar que siempre podemos suponer que la primer fila de A es $(1, \ldots, 1)$ pues la suma de las columnas de C es cero). A continuación, construimos una matriz $B \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ también de rango máximo, tal que sus columnas forman una $\mathbb{Z}$-base de $Ker(A) \cap \mathbb{Z}^n$, y $g(B) = 1$ (en otras palabras, las columnas de B generan el saturado del retículo de las columnas de C). Más aún, se verifica:

Proposición 4.4.1 *Las columnas de B generan el saturado del retículo de las columnas de C si y sólo si $g(B) = 1$.*

Para demostrar esto, necesitamos algunos conceptos teóricos más generales; en especial, el Lema de Fitting.

Proposición 4.4.2 *Sea $A := \begin{pmatrix} a_1 \mid \cdots \mid a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{d\times n}$, con $d \leq n$, de rango máximo d. Sabemos que $L_A = \mathbb{Z}a_1 + \ldots + \mathbb{Z}a_n$ es un retículo de rango d (es libre sobre $\mathbb{Z}$ por ser un $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathbb{Z}^d$, que es un $\mathbb{Z}$-módulo libre, noetheriano y sin torsión, con $\mathbb{Z}$ un dominio de ideales principales). Por ende, este retículo tiene también una $\mathbb{Z}$-base $\{v_1, \ldots, v_d\}$. Resulta entonces:*

$$L_A \text{ es un retículo primitivo} \quad \Longleftrightarrow \quad |\det \begin{pmatrix} v_1 \mid \cdots \mid v_d \end{pmatrix}| = 1 \, .$$

Demostración. Ver Lemma 1.11 (pág. 147), en [17]. □

Lema 4.4.3 (Lema de Fitting) *Sea R un anillo. Consideremos los siguientes morfismos de R-módulos f.g.:*

$$\begin{array}{ccccccc} F & \xrightarrow{\varphi} & G & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ F' & \xrightarrow{\varphi'} & G' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con F, F', G y G' R-módulos libres *y donde los morfismos φ y φ' tienen matrices C y C' respectivamente, previa elección de bases para F, F', G y G' que determinan cada matriz.*

Sean $I_j := \langle$*menores de tamaño* $j \times j$ *de* $C\rangle$, $I'_j := \langle$*menores de tamaño* $j \times j$ *de* $C'\rangle$ *ideales del anillo* R*, con* $r = rg(G)$ *y* $r' = rg(G')$*. Entonces*

$$I_{r-i} = I'_{r'-i} \quad \text{para todo } i \ .$$

En particular, si $i = 0$*, el ideal de* R *generado por los menores maximales de* C *coincide con el ideal generado por los menores maximales de* C'*.*

Lema 4.4.4 *Notemos con* V *a la matriz* $\left(\ v_1 \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ v_d \ \right) \in \mathbb{Z}^{d\times d}$*. Con la notación de la Proposición 4.4.2,*

$$|\det\left(\ v_1 \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ v_d \ \right)| = g = mcd(\text{menores maximales de } A) \ .$$

Demostración. Consideremos los siguientes morfismos:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\ A\ } & \mathbb{Z}^d & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathbb{Z}^d/L_A & \longrightarrow & 0 \\ e_i & \longmapsto & a_i & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}^d & \xrightarrow{\ V\ } & \mathbb{Z}^d & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathbb{Z}^d/L_A & \longrightarrow & 0 \\ e_i & \longmapsto & v_i & & & & \end{array} \ .$$

Por el Lemma de Fitting, de $I_{d-0} = I_d = \langle$menores maximales de $A\rangle = \langle g\rangle \subseteq \mathbb{Z}$ e $I'_{d-0} = I'_d = \langle|\det(V)|\rangle$ resulta el enunciado. □

Demostración.[Proposición 4.4.1]
Se deduce como Corolario de la Proposición 4.4.2 y el Lema 4.4.4. □

De acuerdo con los resultados mencionados en la sección anterior (Teorema 4.3.11), sabemos que ψ_B es propia, al igual que ψ_C. Existe un modo de relacionar ambas parametrizaciones ψ_B y ψ_C, como veremos a continuación.

Sabemos que cada columna de C, que notaremos con $C^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, m)$, vive en $Ker(A) \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\langle v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}\rangle$, lo que implica la existencia de una matriz

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,m} \end{pmatrix} = \left(\ \alpha^{(1)} \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ \alpha^{(m)} \ \right) \in \mathbb{Z}^{m\times m}$$

tal que $C^{(j)} = \sum_{k=1}^m \alpha_{k,j} v^{(k)}$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Esto significa, simplemente, que $C = B \centerdot \alpha$. Notar que $\det(\alpha) = g$ y que α es inversible sobre $\mathbb{Q}$.

Consideremos el isomorfismo lineal

$$\Lambda : \mathbb{P}^{m-1} \to \mathbb{P}^{m-1} \qquad \Lambda(x_1 : \ldots : x_m) = (\sum_{j=1}^m \alpha_{1,j} x_j : \ldots : \sum_{j=1}^m \alpha_{m,j} x_j) = \alpha \centerdot x^t \ ,$$

y sea p el siguiente morfismo monomial:

$$p : (\mathbb{C}^*)^m \to (\mathbb{C}^*)^m \qquad p(x_1, \ldots, x_m) = (\prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_{i,1}}, \ldots, \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_{i,m}}) = (x^{\alpha^{(1)}}, \ldots, x^{\alpha^{(m)}}) \ , \tag{4.22}$$

donde $\alpha^{(j)}$ indica la j-ésima columna de α. Notemos que el morfismo p es *multiplicativo*.

Proposición 4.4.5 (Lemma 6.3.1, [10]) *El siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{m-1} & \xrightarrow{\Lambda} & \mathbb{P}^{m-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_C} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_B} \\ (\mathbb{C}^*)^m & \xleftarrow[p]{} & (\mathbb{C}^*)^m \end{array}$$

conmuta. Tomaremos un abierto denso U en el dominio de ψ_C de forma tal que todos los morfismos del diagrama estén bien definidos.

Demostración. Veamos que $\psi_C = p \circ \psi_B \circ \Lambda$. Sean $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in U$. Entonces $\bar{w} = \Lambda(\bar{u}) = (\alpha \,.\, \bar{u}^t)^t = (\sum_{s=1}^{m} \alpha_{1,s}u_s, \ldots, \sum_{s=1}^{m} \alpha_{m,s}u_s)$. Ahora bien, si $\bar{y} = (\psi_B \circ \Lambda)(\bar{u})$ resulta:

$$(p(\bar{y}))_i = \prod_{k=1}^{m} y_k^{\alpha_{k,i}} = \prod_{k=1}^{m} \Big(\prod_{j=1}^{n} (l_{j(B)}(\bar{w}))^{b_{j,k}} \Big)^{\alpha_{k,i}} = \prod_{k=1}^{m} \Big(\prod_{j=1}^{n} (\sum_{r=1}^{m} b_{j,r}w_r)^{b_{j,k}} \Big)^{\alpha_{k,i}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \Big(\prod_{j=1}^{n} (\sum_{r=1}^{m} \{b_{j,r} \sum_{s=1}^{m} \alpha_{r,s}u_s\})^{b_{j,k}} \Big)^{\alpha_{k,i}} = \prod_{k=1}^{m} \Big(\prod_{j=1}^{n} \underbrace{(\sum_{s=1}^{m} \underbrace{(\sum_{r=1}^{m} b_{j,r}\alpha_{r,s})}_{=c_{j,s}} u_s)}_{=l_{j(C)}(\bar{u})}{}^{b_{j,k}} \Big)^{\alpha_{k,i}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \Big(\prod_{j=1}^{n} l_{j(C)}(\bar{u})^{b_{j,k}\alpha_{k,i}} \Big) = \prod_{j=1}^{n} \Big(l_{j(C)}(\bar{u})^{\sum_{k=1}^{m}(b_{j,k}\alpha_{k,i})} \Big) = \prod_{j=1}^{n} (l_{j(C)}(\bar{u}))^{c_{j,i}} = (\psi_C(\bar{u}))_i \,,$$

como queríamos. □

Observación 4.4.6 *Como consecuencia natural, p es suryectiva sobre $Im(\psi_C|_U)$, que es un conjunto denso en $Im(\psi_C) \cap (\mathbb{C}^*)^m$ en la Topología de Zariski.*

Observación 4.4.7 *Dado que p es una aplicación g–1 (ver Demostración de Teorema 4.4.14, ecuación (4.26), y que $\psi_C = p \circ \psi_B \circ \Lambda$, parecería que ψ_C es también g–1. Sin embargo, esto no sucede, como vimos en el Ejemplo 4.2.1. Más en general, el Teorema de birracionalidad 4.3.11 confirma que ψ_C es genéricamente 1–1.*

En efecto, se da una situación curiosa. A pesar de ser p una función g–1, para $\bar{z} \in Im(\psi_C)$ tenemos que $\#\{p^{-1}(\{z\}) \cap Im(\psi_B \circ \Lambda)\} = 1$, también genéricamente. Más aún, esta afirmación y el enunciado del Teorema 4.3.11 son equivalentes.

Más precisamente:

Proposición 4.4.8 *Con las definiciones y notación de (4.22), la restricción de la aplicación p a los ceros de Δ_B define una aplicación*

$$\tilde{p} = p_{|_{(\Delta_B=0)}} : (\Delta_B = 0) \dashrightarrow (\Delta_C = 0)$$

que es birracional (en particular, genéricamente 1–1).

Demostración. Veamos, en primer lugar, que la imagen de $\tilde{p}$ está contenida en $(\Delta_C = 0)$. Observemos que para todo punto $y \in (\mathbb{C}^*)^m$ de la forma $y = \psi_B(\Lambda(u))$ (que conforman un conjunto denso en $(\Delta_B = 0)$) resulta $p(y) = (p \circ \psi_B \circ \Lambda)(u) = \psi_C(u)$. Por lo tanto, $\Delta_C(p(y)) = 0$. Es decir, p define una aplicación racional $\tilde{p} : (\Delta_B = 0) \dashrightarrow (\Delta_C = 0)$.

Ahora bien, notemos que $\tilde{p}$ tiene fibras finitas, pues $p : (\mathbb{C}^*)^m \to (\mathbb{C}^*)^m$ tiene fibras de cardinal g. Como, por el Teorema 4.3.11, $\psi_C = p \circ \psi_B \circ \Lambda = \tilde{p} \circ \psi_B \circ \Lambda$ es 1–1 y birracional, al igual que ψ_B y Λ, $\tilde{p}$ debe ser también birracional. □

Ejemplo 4.4.9 Revisemos el Ejemplo 4.2.1. Veremos en este caso cuáles son los diferentes morfismos que intervienen. Recordemos que ψ_C es genéricamente 1–1. Partimos de

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} .$$

Construimos las matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Luego de resolver 3 sistemas lineales, encontramos:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Entonces $p(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 * x_3, x_1 * x_2^6 * x_3^3)$.

Calculemos la preimagen de un punto genérico. Si $p(x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2, z_3)$, $z_1 \neq 0$ y $z_2 \neq 0$ determinan unívocamente x_1 y x_3. Obtenemos entonces $x_2^6 = z_3/(z_2 * z_1^2)$, que tiene 6 soluciones, cada una de las cuales difiere en una raíz sexta de la unidad.

Por otro lado $\psi_B(u : s : t) = (\frac{u}{-u+t}, \frac{s-2*t}{-s}, \frac{t*(-u+t)}{(s-2*t)^2})$. Como $\mathrm{Dom}(p) = (\mathbb{C}^*)^m$, podemos suponer $u = 1$. Y resulta $\psi_B(1 : s : t) = (\frac{1}{-1+t}, \frac{s-2*t}{-s}, \frac{t*(-1+t)}{(s-2*t)^2})$. Argumentos análogos a los empleados en el Ejemplo 4.2.1 para probar que ψ_C es 1–1 mostrarán que $\#\{p^{-1}(\{\bar{z}\}) \cap Im(\psi_B)\} = 1$ para un $\bar{z} \in Im\psi_C \cap (\mathbb{C}^*)^m$ genérico. ■

Observación 4.4.10 *Notemos que si $p(x_1, \ldots, x_m) = p(y_1, \ldots, y_m)$, como los x_i e y_i son no nulos, entonces, por definición de p, la igualdad anterior equivale a la condición $p(\frac{x_1}{y_1}, \ldots, \frac{x_m}{y_m}) = (1, \ldots, 1)$. En conclusión, cada preimagen puede describirse como sigue: sólo tenemos que encontrar un punto particular en $p^{-1}(\{\bar{z}\})$ y caracterizar $p^{-1}(\{(1, \ldots, 1)\})$. En efecto:*

$$p^{-1}(\{p_{(\bar{x})}\}) = \bar{x} \cdot p^{-1}(\{p_{(1,\ldots,1)}\}) = \bar{x} \cdot p^{-1}(\{(1, \ldots, 1)\})$$

en el toro $(\mathbb{C}^*)^m$.

Para facilitar la notación, llamaremos

$$G := p^{-1}(\{(1, \ldots, 1)\}) .$$

Observación 4.4.11 *La relación existente entre la ecuación implícita y los discriminantes cuando $g > 1$ deberá describirse en términos de la función p definida en (4.22). Por supuesto, la ecuación $\Delta_C = 0$ que caracteriza la clausura de la imagen de ψ_C es irreducible. No obstante, $\Delta_c \circ p$ se factorizará, siendo uno de sus factores el discriminante no homogéneo Δ_B.*

Antes de enunciar el Teorema de Factorización de $\Delta_C \circ p$, presentamos unos lemas previos, que facilitarán su demostración.

Lema 4.4.12 *Dados $\alpha \in \mathbb{Z}^{r\times s}$ y $\beta \in \mathbb{Z}^{s\times t}$, tenemos:*

$$p_{\alpha.\beta} = p_\beta \circ p_\alpha \ .$$

En particular, si $\alpha \in GL(\mathbb{Z}, m)$, resulta $(p_\alpha)^{-1} = p_{\alpha^{-1}}$.

Demostración. Elemental. □

Lema 4.4.13 *Dados C, B, α , p y el grupo G como antes, tenemos que todos los $\Delta_B(\varepsilon \cdot y)$ son coprimos dos a dos, para todo $\varepsilon \in G$.*

Demostración. Procederemos por el absurdo, usando nuevamente la Proposición 4.4.8. Supongamos que existe ε, ε' (con $\varepsilon' \neq \varepsilon$) tal que $\Delta_B(\varepsilon \cdot y)$ y $\Delta_B(\varepsilon' \cdot y)$ no son coprimos. Como ambos son irreducibles, existe entonces $c \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$\Delta_B(\varepsilon \cdot y) = c\ \Delta_B(\varepsilon' \cdot y) \quad \text{para todo } y \in \mathbb{C}^m \ .$$

Tomando $y = \varepsilon^{-1} \cdot z \in \mathbb{C}^m$ y evaluando, resulta

$$\Delta_B(z) = c\ \Delta_B((\varepsilon' \cdot \varepsilon^{-1}) \cdot z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^m \ .$$

Si notamos $\delta = \varepsilon' \cdot \varepsilon^{-1}$, resulta $\delta \in G$, $\delta \neq \bar{1}$, y $\Delta_B(\delta \cdot y)$ no coprimo con $\Delta_B(y)$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\varepsilon' = \bar{1}$.

Tenemos entonces

$$\Delta_B(y) = c\ \Delta_B(\varepsilon \cdot y) \quad \text{para todo } y \in \mathbb{C}^m \ ,$$

para una constante no nula c. Evaluando la última expresión en un punto y de la forma $y = \psi_B(\Lambda(u))$, que es un conjunto denso en $\overline{Im\ \psi_B} = (\Delta_B = 0)$ resulta:

$$0 = \Delta_B(y) = c\ \Delta_B(\varepsilon \cdot y) \ .$$

Con esto, $\Delta_B(\varepsilon \cdot y) = 0$ para cada $y \in Im(\psi_B \circ \Lambda)$, ya que $c \in \mathbb{C}^*$. Por lo tanto, dicho polinomio también se anulará si tomamos y en la clausura Zariski de $Im(\psi_B \circ \Lambda)$. En consecuencia:

$$y \in (\Delta_B = 0) \Longleftrightarrow (\varepsilon \cdot y) \in (\Delta_B = 0) \ .$$

(Para la recíproca, basta intercambiar los papeles de y y $\varepsilon \cdot y$.)

Si tomamos $y \in (\Delta_B = 0) \cap (\mathbb{C}^*)^m$ resulta que $y, \varepsilon \cdot y \in (\Delta_B = 0) \cap (\mathbb{C}^*)^m$ son dos puntos distintos tales que $\tilde{p}(y) = \tilde{p}(\varepsilon \cdot y)$, contradiciendo la inyectividad genérica de $\tilde{p}$ vista en la Proposición 4.4.8, ya que las fibras tendrían al menos dos elementos. □

Teorema 4.4.14 *[Factorización de $\Delta_C \circ p$] Dados C, B, α , p y el grupo G como antes, existen $a \in \mathbb{C}^*$, y $\beta \in \mathbb{Z}\langle C_1(\alpha), \ldots, C_m(\alpha)\rangle$ (i.e. el grupo aditivo generado por las columnas de la matriz α) tales que*

$$\Delta_C \circ p(y) = a y^\beta \prod_{\varepsilon \in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot y) \ .$$

En particular, $\beta \in \mathbb{Z}^m$ verifica $\varepsilon^\beta = 1$ para todo $\varepsilon \in G = p^{-1}(\{(1, \ldots, 1)\})$.

Antes de pasar a la demostración, ilustremos cómo funciona la factorización en algunos ejemplos.

Ejemplo 4.4.15 Volvamos nuevamente a los Ejemplos 3.3.14 y 4.4.9. Sabemos que:

$$\Delta_C(y) := 4096 * y_1^6 * y_3^2 + 24576 * y_1^5 * y_2 * y_3^2 - 128 * y_1^5 * y_2 * y_3 - 6144 * y_1^5 * y_3^2 + \\ +61440 * y_1^4 * y_2^2 * y_3^2 - 384 * y_1^4 * y_2^2 * y_3 + y_1^4 * y_2^2 - 30720 * y_1^4 * y_2 * y_3^2 - 480 * y_1^4 * y_2 * \\ *y_3 + 3840 * y_1^4 * y_3^2 + 81920 * y_1^3 * y_2^3 * y_3^2 - 384 * y_1^3 * y_2^3 * y_3 - 61440 * y_1^3 * y_2^2 * y_3^2 - \\ -960 * y_1^3 * y_2^2 * y_3 + 15360 * y_1^3 * y_2 * y_3^2 - 120 * y_1^3 * y_2 * y_3 - 1280 * y_1^3 * y_3^2 + 61440 * y_1^2 * \\ *y_2^4 * y_3^2 - 128 * y_1^2 * y_2^4 * y_3 - 61440 * y_1^2 * y_2^3 * y_3^2 - 480 * y_1^2 * y_2^3 * y_3 + 23040 * y_1^2 * y_2^2 * \\ *y_3^2 - 120 * y_1^2 * y_2^2 * y_3 - 3840 * y_1^2 * y_2 * y_3^2 - 2 * y_1^2 * y_2 * y_3 + 240 * y_1^2 * y_3^2 + 24576 * \\ *y_1 * y_2^5 * y_3^2 - 30720 * y_1 * y_2^4 * y_3^2 + 15360 * y_1 * y_2^3 * y_3^2 - 3840 * y_1 * y_2^2 * y_3^2 + 480 * y_1 * \\ *y_2 * y_3^2 - 24 * y_1 * y_3^2 + 4096 * y_2^6 * y_3^2 - 6144 * y_2^5 * y_3^2 + 3840 * y_2^4 * y_3^2 - 1280 * y_2^3 * y_3^2 + \\ +240 * y_2^2 * y_3^2 - 24 * y_2 * y_3^2 + y_3^2 \ .$$

Calculando con MAPLE, tenemos $\Delta_B = 4*y_1*y_3*y_2^2+4*y_3*y_2^2-y_2^2-2*y_2-1$. En este caso, $p(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 * x_3, x_1 * x_2^6 * x_3^3)$, con lo cual $p^{-1}(\{(1,1,1)\}) = \{(1, w, 1) : w^6 = 1\}$.

Nuevamente usando MAPLE factorizamos $\Delta_C \circ p(y)$ en $\mathbb{Q}[\zeta]$ donde ζ es una raíz sexta primitiva de la unidad, y tenemos

$$\Delta_C \circ p(y) := y_1^2 y_3^6 \prod_{w^6=1} \Delta_B((1, w, 1) \cdot y)$$

pues cada uno de los factores en $\mathbb{Q}[\zeta]$ es $\Delta_B((1, w, 1) \cdot y)$ para algún $w \in \mathbb{G}_6$.

Si llamamos con "Delp" a $\Delta_C \circ p$, y elegimos una primitiva particular $w \in \mathbb{G}_6$ resulta:

```
> factor(Delp);
     2    6          2                     2           2
  x_1  x_3  (4 x_3 x_2  x_1 - 1 - 2 x_2 - x_2  + 4 x_3 x_2 )
                 2                     2           2
        (4 x_3 x_2  x_1 - 1 + 2 x_2 - x_2  + 4 x_3 x_2 ) (
             2    4    2                   2        3      4
        16 x_3  x_2  x_1  + 1 + 2 x_2 + 3 x_2  + 2 x_2  + x_2
                   2               2           3               3
         + 4 x_3 x_2  x_1 + 4 x_3 x_2  - 8 x_3 x_2  x_1 - 8 x_3 x_2
                   4               4         2    4
         - 8 x_3 x_2  x_1 - 8 x_3 x_2  + 32 x_3  x_2  x_1
                2    4         2    4    2                    2
         + 16 x_3  x_2 ) (16 x_3  x_2  x_1  + 1 - 2 x_2 + 3 x_2
               3      4           2                2
         - 2 x_2  + x_2  + 4 x_3 x_2  x_1 + 4 x_3 x_2
                   3               3           4               4
         + 8 x_3 x_2  x_1 + 8 x_3 x_2  - 8 x_3 x_2  x_1 - 8 x_3 x_2
                2    4            2    4
         + 32 x_3  x_2  x_1 + 16 x_3  x_2 )

>fac:=16*x_3^2*x_2^4*x_1^2+1+2*x_2+3*x_2^2+2*x_2^3+x_2^4+4*x_3*x_2^2*x_1+
4*x_3*x_2^2-8*x_3*x_2^3*x_1-8*x_3*x_2^3-8*x_3*x_2^4*x_1-8*x_3*x_2^4+
32*x_3^2*x_2^4*x_1+16*x_3^2*x_2^4;
               2    4    2                    2        3      4
  fac := 16 x_3  x_2  x_1  + 1 + 2 x_2 + 3 x_2  + 2 x_2  + x_2
                   2               2           3               3
         + 4 x_3 x_2  x_1 + 4 x_3 x_2  - 8 x_3 x_2  x_1 - 8 x_3 x_2
```

```
                  4                4         2    4
        - 8 x_3 x_2  x_1 - 8 x_3 x_2  + 32 x_3  x_2  x_1
                2    4
        + 16 x_3  x_2
```

```
> alias(w=RootOf(x_2^2-x_2+1));
```

$$w$$

```
> factor(fac,w);
```

```
           2               2      2
  (4 x_3 x_2  x_1 + 4 x_3 x_2  - x_2  - 2 x_2 + 2 w x_2 + w)
                2               2      2
       (4 x_3 x_2  x_1 + 4 x_3 x_2  - x_2  - 2 w x_2 + 1 - w)
```

```
> R:=factor(Delp,w);
```

```
                2               2      2
  R := (4 x_3 x_2  x_1 + 4 x_3 x_2  - x_2  + 2 x_2 - 2 w x_2 + w)
                2               2      2
       (4 x_3 x_2  x_1 + 4 x_3 x_2  - x_2  + 2 w x_2 + 1 - w)
                2               2      2
       (4 x_3 x_2  x_1 + 4 x_3 x_2  - x_2  - 2 x_2 + 2 w x_2 + w)
                2               2      2
       (4 x_3 x_2  x_1 + 4 x_3 x_2  - x_2  - 2 w x_2 + 1 - w)
                2                      2           2
       (4 x_3 x_2  x_1 - 1 - 2 x_2 - x_2  + 4 x_3 x_2 )
                2                      2           2     2    6
       (4 x_3 x_2  x_1 - 1 + 2 x_2 - x_2  + 4 x_3 x_2 ) x_1  x_3
```

```
> g:=4*x_3*x_2^2*x_1-1+2*x_2-x_2^2+4*x_3*x_2^2;
```

```
                     2                      2           2
        g := 4 x_3 x_2  x_1 - 1 + 2 x_2 - x_2  + 4 x_3 x_2
```

```
> G1:=normal(subs({w^2=w-1},subs({x_2=w*x_2},g)));
```

```
                2                 2                       2
  G1 := -4 x_3 x_2  x_1 + 4 w x_3 x_2  x_1 - 1 + 2 w x_2 + x_2
              2           2           2
       - w x_2  - 4 x_3 x_2  + 4 x_3 x_2  w
```

```
> G2:=normal(subs({w^2=w-1},normal(subs({x_2=(w-1)*x_2},g))));
```

```
                  2                                  2
  G2 := -4 w x_3 x_2  x_1 - 1 - 2 x_2 + 2 w x_2 + w x_2
                2
       - 4 x_3 x_2  w
```

```
> G3:=normal(subs({w^2=w-1},normal(subs({x_2=-1*x_2},g))));

                        2                        2           2
      G3 := 4 x_3 x_2  x_1 - 1 - 2 x_2 - x_2  + 4 x_3 x_2

> G4:=normal(subs({w^2=w-1},normal(subs({x_2=-w*x_2},g))));

                  2                  2                         2
  G4 := -4 x_3 x_2  x_1 + 4 w x_3 x_2  x_1 - 1 - 2 w x_2 + x_2
              2           2           2
       - w x_2  - 4 x_3 x_2  + 4 x_3 x_2  w

> G5:=normal(subs({w^2=w-1},normal(subs({x_2=(-w+1)*x_2},g))));
                    2                                    2
  G5 := -4 w x_3 x_2  x_1 - 1 - 2 w x_2 + 2 x_2 + w x_2
                    2
       - 4 x_3 x_2  w
```

Esto muestra que la factorización predicha de antemano es correcta. Notemos que en este caso $\beta = (2,0,6) = 5C_1(\alpha) + 2C_2(\alpha) \in \mathbb{N}^3$. ■

Ejemplo 4.4.16 Consideremos

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \alpha := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} .$$

Calculando las ecuaciones implícitas, resulta $\Delta_B := y_1^2 + y_1 * y_3 + y_2 * y_3^3 + y_2 * y_3^2$ y $\Delta_C := y_1^3 * y_3^6 + y_1^2 * y_2^3 * y_3^2 + 3 * y_1^2 * y_2^2 * y_3^4 + 3 * y_1^2 * y_2 * y_3^5 + 3 * y_1 * y_2^4 * y_3^2 + 6 * y_1 * y_2^3 * y_3^3 + 3 * y_1 * y_2^2 * y_3^4 + y_2^6 + 3 * y_2^5 * y_3 + 3 * y_2^4 * y_3^2 + y_2^3 * y_3^3$. Además, $p(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1^2}{x_2 * x_3}, x_1 * x_2 * x_3^2, x_1 * x_2 * x_3)$, con lo cual $p^{-1}(\{(1,1,1)\}) = \{(w, w^2, 1) : w^3 = 1\}$.

En consecuencia

$$\Delta_C \circ p(y) = y_1^6 y_2^3 y_3^3 \prod_{w^3=1} \Delta_B((w, w^2, 1) \cdot y) \; ,$$

con $\beta = (6,3,3) = 1C_1(\alpha) + 4C_3(\alpha) \in \mathbb{N}^3$. ■

Ejemplo 4.4.17 Tomemos la misma matriz B que en el ejemplo anterior, pero modificando en cambio α y, en consecuencia, C:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \alpha := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; C := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

En este caso, $\Delta_C(y) := y_1^2 * y_2 * y_3^3 + y_1^2 * y_2 * y_3^2 + y_1 * y_3 + 1$. Luego,

$$\Delta_C \circ p(y) = y_1^{-2} \Delta_B(y)$$

y tenemos $\beta = (-2,0,0) = 2C_1(\alpha) \notin \mathbb{N}^3$. Por lo tanto, la factorización es en términos de polinomios de Laurent y no de polinomios propiamente dichos. ■

Demostración. [Teorema 4.4.14]
En primer lugar, y de acuerdo con los ejemplos vistos, notemos que la factorización debe ser en términos de polinomios de Laurent (i.e. admitimos β con coeficientes negativos), dado que α puede tener coordenadas negativas.

Sea $y \in (\mathbb{C}^*)^m$. Veamos que

$$\Delta_C(p(y)) = 0 \iff \exists\, \varepsilon \in G \text{ tal que } \Delta_B(\varepsilon \cdot y) = 0\,.$$

Para demostrar esto, trabajaremos con dos casos base. Primero supondremos que $p(y) \in Im\,\psi_{C|_U}$. Luego, por densidad, tendremos el caso general $p(y) \in \overline{Im\,\psi_{C|_U}} \cap (\mathbb{C}^*)^m = \overline{Im\,\psi_C} \cap (\mathbb{C}^*)^m$.

Dado que p es claramente suryectiva sobre $(\mathbb{C}^*)^m$, dado $u \in U \subset \mathbb{P}^{m-1}$ con $\psi(u) \in (\mathbb{C}^*)^m$, sea y tal que $p(y) = \psi_C(u)$. Como $\psi_C = p \circ \psi_B \circ \Lambda$, resulta $p(y) = p(\psi_B \circ \Lambda(u))$. En consecuencia, y de acuerdo con la Observación 4.4.10, sabemos que existe $\varepsilon \in G$ tal que $\varepsilon \cdot y = \psi_B(\Lambda(u))$, donde $\cdot$ indica la acción del toro. Luego, $\Delta_B(\varepsilon \cdot y) = \Delta_B(\psi_B(\Lambda(u))) = 0$, por definición de Δ_B. Con esto obtenemos:

$$y \in (\mathbb{C}^*)^m\ ,\ p(y) \in \psi_C(U) \implies \exists\, \varepsilon \in G \text{ tal que } \Delta_B(\varepsilon \cdot y) = 0\,. \tag{4.23}$$

Veamos que esto alcanza para probar la primera implicación, trabajando con argumentos de densidad. Sea $z \in (\Delta_C = 0) \cap (\mathbb{C}^*)^m = \overline{Im\,\psi_{C|_U}} \cap (\mathbb{C}^*)^m$. Existe entonces una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $Im\ \psi_{C|_U}$ tal que $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Tomemos la correspondiente sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en U tal que $z_n = \psi_C(u_n)$. Ahora bien, $z_n = \psi_C(u_n) = p \circ \psi_B \circ \Lambda(u_n)$ y por tanto $z'_n := \psi_B \circ \Lambda(u_n) \in p^{-1}(z_n)$. En consecuencia, $p(z'_n) \in \psi(U)$ y por lo visto en la expresión (4.23), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon_n \in G$ tal que $\Delta_B(\varepsilon_n \cdot z'_n) = 0$. Dado que G es finito, existe una subsucesión $(\varepsilon_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset G$ constante. Sea ε su valor. Por lo tanto, como $z = \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}$, podemos suponer que $\varepsilon_n = \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, trabajando con dicha subsucesión como sucesión original.

Supongamos entonces que existe una subsucesión $(z'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a un z' en $(\mathbb{C}^*)^m$. Por lo tanto $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon \cdot z'_{n_k} = \varepsilon \cdot z'$ y $z = \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} p(z'_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} p(\varepsilon \cdot z'_{n_k}) = p(\varepsilon \cdot z') = p(z')$ por continuidad de p. Además, por continuidad de Δ_B, $\Delta_B(\varepsilon \cdot z') = 0$. Llamando $z'' := \varepsilon \cdot z'$ resulta

$$\Delta_C(z) = 0 \implies \exists\, z'' \in p^{-1}(z) \text{ tal que } \Delta_B(z'') = 0\,,$$

o equivalentemente, vía la suryectividad de p,

$$\Delta_C(p(y)) = 0 \implies \exists\, \varepsilon \in G \text{ tal que } \Delta_B(\varepsilon \cdot y) = 0\,.$$

Resta entonces probar la existencia de una subsucesión convergente de $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathbb{C}^*)^m$. Pero esto muy sencillo de probar. En efecto, basta decir que, por construcción, el morfismo $p : (\mathbb{C}^*)^m \to (\mathbb{C}^*)^m$ es un g-revestimiento (g finito), y que $\lim\limits_{n\to\infty} p(z'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in (\mathbb{C}^*)^m$ (ver Figura 4.1).

En consecuencia, por el Nullstellensatz, resulta

$$\Delta_C \circ p(y) \ \mid\ \prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot y)^{n_\varepsilon} \quad , \quad n_\varepsilon > 0 \tag{4.24}$$

en el anillo de polinomios de Laurent.

Recíprocamente, supongamos que tenemos $y \in (\mathbb{C}^*)^m$ y $\varepsilon \in G$ tal que $\varepsilon \cdot y = \psi_B(v)$ está en la imagen de ψ_B. Como Λ es un isomorfismo, esto equivale a $\varepsilon \cdot y = \psi_B \circ \Lambda(u)$ para algún $u \in U$. Aplicando el morfismo p (o $\tilde{p}$), resulta $p(\varepsilon \cdot y) = p(y) = \psi_C(u)$. En consecuencia, $\Delta_C \circ p(y) = 0$. Usando la densidad de $Im(\psi_B \circ \Lambda)$ en $(\Delta_B = 0)$ resulta

$$\varepsilon \cdot y \in (\Delta_B = 0) \implies \Delta_C \circ p(y) = 0\,.$$

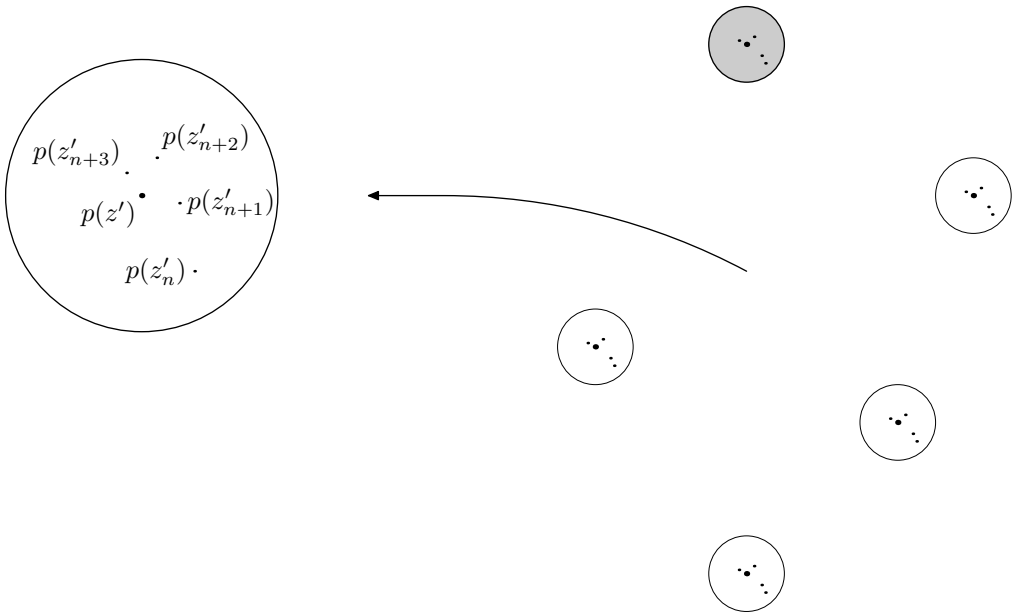

Figura 4.1: En la región sombreada existe una subsucesión (infinita) de $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que tendrá una sub-subsucesión convergente.

Es decir, dado $y \in (\mathbb{C}^*)^m$ se cumple $\Delta_B(\varepsilon \cdot y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_C \circ p(y) = 0$.

Esto dice, por el Nullstellensatz, que $\Delta_B(\varepsilon \cdot y) \mid \Delta_C \circ p(y)$ como polinomios de Laurent, para cada ε (dado que Δ_B es irreducible, el exponente de $\Delta_C \circ p$ es igual a 1).

Por el Lema 4.4.13 sabemos que todos los $\Delta_B(\varepsilon \cdot y)$ son coprimos dos a dos. En consecuencia,

$$\prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot y) \quad | \quad \Delta_C \circ p(y) \tag{4.25}$$

como polinomios de Laurent.

Combinando las ecuaciones (4.24) y (4.25) tenemos una factorización en términos de polinomios de Laurent:

$$\Delta_C \circ p(y) = a y^\beta \prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot y)^{n_\varepsilon} \ ,$$

donde $a \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{Z}^m$ y $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, ya que $\Delta_C \circ p$ y el producto de los $\Delta_B(\varepsilon \cdot y)^{n_\varepsilon}$ sólo difieren en una unidad del anillo de polinomios de Laurent, es decir, en un monomio de Laurent.

El único detalle que falta probar es que todos los n_ε coinciden y valen 1. Veamos primero que son todos iguales. Consideremos la última ecuación (factorización de $\Delta_C \circ p$), y evaluemos la misma en $y := \delta \cdot y$, para $\delta \in G$. Resulta

$$\Delta_C \circ p(\delta \cdot y) = a(\delta \cdot y)^\beta \prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot (\delta \cdot y))^{n_\varepsilon} \ .$$

Pero $\Delta_C \circ p(\delta \cdot y) = \Delta_C \circ (\underbrace{p(\delta)}_{=\bar{1}} \cdot p(y)) = \Delta_C \circ p(y)$. Como la acción del toro $\cdot$ es el producto en el grupo abeliano G, el miembro derecho de la última ecuación se transforma en

$$a(\delta \cdot y)^\beta \prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B((\varepsilon \cdot \delta) \cdot y))^{n_\varepsilon} = a(\delta)^\beta y^\beta \prod_{\varepsilon'\in G} \Delta_B(\varepsilon' \cdot y))^{n_{(\varepsilon' \cdot \delta^{-1})}} \ .$$

Por lo tanto:

$$a y^\beta \prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot y)^{n_\varepsilon} = \Delta_C \circ p(y) = a(\delta)^\beta y^\beta \prod_{\varepsilon'\in G} \Delta_B(\varepsilon' \cdot y))^{n_{(\varepsilon' \cdot \delta^{-1})}} \ .$$

Por factorización única en el anillo de polinomios $\mathbb{C}[y_1^{\pm}, \dots, y_m^{\pm}]$ y por ser los $\Delta_B(\varepsilon \cdot y)$ coprimos dos a dos, resulta $n_{\varepsilon'} = n_{\varepsilon' \cdot \delta^{-1}}$ para todo $\delta \in G$, que es un grupo finito (de g elementos). Esto implica $n_\varepsilon = n_\gamma$ para todo $\varepsilon, \gamma \in G$, y llamamos a este número con n. Asimismo, notemos que $a = a\delta^\beta$ implica $\delta^\beta = 1$ para todo $\delta \in G$.

Finalmente, resta probar que $\beta \in \mathbb{Z}\langle C_1(\alpha), \dots, C_m(\alpha)\rangle$, y que $n = 1$. Veamos en primer término el enunciado correspondiente a $\beta \in \mathbb{Z}^{m\times 1}$. Sabemos, por lo observado previamente, que $\varepsilon^\beta = 1$ para todo $\varepsilon \in G$. Por otro lado, es un hecho conocido que la matriz entera α admite una Forma Normal de Smith:

$$\alpha = U \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \end{pmatrix}}_{=D} \cdot V \tag{4.26}$$

donde $U, V \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ son inversibles en $\mathbb{Z}$ y $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_m$ en $\mathbb{Z}$. Luego, combinando esto con el Lema 4.4.12, tenemos $p_\alpha = p_{(U \cdot D \cdot V)} = p_V \circ p_D \circ p_U$. Más aún $p_D^{-1}(\{(1, \dots, 1)\}) = \{(w_1, \dots, w_m) : (w_i)^{d_i} = 1 \,\forall\, i\}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \varepsilon \in (p_\alpha)^{-1}(\{(1,\dots,1)\}) = \big(p_{U^{-1}} \circ (p_D)^{-1} \circ p_{V^{-1}}\big)(\{(1,\dots,1)\}) = \\ = p_{U^{-1}} \circ (p_D)^{-1}(\{(1,\dots,1)\}) \,. \end{aligned} \tag{4.27}$$

En particular $\varepsilon = p_{U^{-1}}(w_1, \dots, w_m)$ para algún $w_i \in \mathbb{G}_{d_i}$.

Con esto en mente, $\varepsilon^\beta = p_\beta(\varepsilon) = p_\beta \circ p_{U^{-1}}(w_1, \dots, w_m) = p_{U^{-1} \cdot \beta}(w_1, \dots, w_m) = \prod_{j=1}^{m} w_j^{\gamma_j} = 1$ para cualquier elección de $w_j \in \mathbb{G}_{d_j}$, donde $U^{-1} \cdot \beta = \gamma \in \mathbb{Z}^{m\times 1}$. Fijemos $i = 1, \dots, m$ y consideremos $w_j = 1$ para todo $j \neq i$ y w_i cualquier raíz d_i-ésima primitiva de la unidad. En este caso, resulta $p_\beta(\varepsilon) = (w_i)^{\gamma_i} = 1$, con lo cual $d_i \mid \gamma_i$ en $\mathbb{Z}$, i.e. existe $s_i \in \mathbb{Z}$ tal que $\gamma_i = d_i s_i$. En consecuencia

$$\gamma = U^{-1} \cdot \beta = \begin{pmatrix} d_1 s_1 \\ \vdots \\ d_m s_m \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

y

$$\beta = U \cdot D \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = (U \cdot D \cdot V) \cdot V^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{(V^{-1} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix})}_{:=(v_1,\dots,v_m)^t \in \mathbb{Z}^{m\times 1}} .$$

Luego $\beta = \sum_{i=1}^m (v_i * C_i(\alpha)) \in \mathbb{Z}\langle C_1(\alpha), \dots, C_m(\alpha)\rangle$, como queríamos demostrar.

Ahora veamos que $n = 1$. Llamemos $F = F(y) := \prod_{\varepsilon \in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot y)$. Nuestra factorización resulta entonces $\Delta_C \circ p(y) = a y^\beta F(y)^n$. Diferenciemos esta última ecuación en el toro $(\mathbb{C}^*)^m$. Por Regla de la Cadena, tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla \Delta_C)_{(p(y))} \cdot (Jp)_{(y)} = a\nabla(y^\beta)\, F^n + a y^\beta n F^{n-1} (\nabla F)_{(y)} = \\ = F^{n-1} a \left\{ \nabla(y^\beta)\, F + y^\beta n (\nabla F)_{(y)} \right\} . \end{aligned} \tag{4.28}$$

Miremos más de cerca a $(Jp)_{(y)}$, con y en el toro:

$$((Jp)_{(y)})_{i,j} = (J(y^\alpha))_{i,j} = \frac{\partial(\prod_{k=1}^m y_k^{\alpha_{ki}})}{\partial\, y_j} = \alpha_{ji} \frac{\prod_{k=1}^m y_k^{\alpha_{ki}}}{y_j} = \alpha_{ji} \frac{y^{\alpha_{(i)}}}{y_j} \,.$$

Luego

$$((Jp)_{(y)})_{i,j} = \begin{pmatrix} y^{\alpha_{(1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y^{\alpha_{(m)}} \end{pmatrix} \cdot \alpha^t \cdot \begin{pmatrix} 1/y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/y_m \end{pmatrix} .$$

En consecuencia, para cualquier y en el toro, $((Jp)_{(y)})_{i,j}$ es inversible, por ser producto de matrices inversibles.

Supongamos $n > 1$, y tomemos cualquier $y \in (\mathbb{C}^*)^m$ tal que $\Delta_C \circ p(y) = 0$. Por ende, $F(y) = 0$ y por la ecuación (4.28) tenemos $(\nabla \Delta_C)_{(p(y))} \cdot (Jp)_{(y)} = 0$. Pero, dado que $(Jp)_{(y)}$ es inversible, resulta $(\nabla \Delta_C)_{(p(y))} = 0$ si $y \in (\mathbb{C}^*)^m$ y $p(y) \in \overline{Im\ \psi_C} \cap (\mathbb{C}^*)^m$.

Usemos que la imagen de p contiene un abierto denso V de $\overline{Im\ \psi_C} \cap (\mathbb{C}^*)^m$, como vimos en la Observación 4.4.6 (por ejemplo, $V = Im(\psi_{C|_U})$). Se verifica entonces:

$$(\nabla \Delta_C)_{(y)} = 0 \ \text{ y } \ \Delta_C(y) = 0 \ \text{ para todo } y \in V \subset \overline{Im\ \psi_C} \cap (\mathbb{C}^*)^m ,$$

y, por densidad, para todo $y \in \overline{Im\ \psi_C}$. Como $\overline{Im\ \psi_C} = (\Delta_C = 0)$, con Δ_C irreducible y por tanto, libre de cuadrados, por el Nullstellensatz, tenemos $\Delta_C \mid (\nabla \Delta_C)_{(y)})_i$ en el anillo de polinomios $\mathbb{C}[y_1, \ldots y_m]$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Como Δ_C es no constante, debe existir un i tal que $\frac{\partial \Delta_C}{\partial y_i} \neq 0$. Tomando grados con respecto a la variable y_i resulta entonces $\deg_{y_i}(\Delta_C) \leq \deg_{y_i}(\frac{\partial \Delta_C}{\partial y_i}) = \deg_{y_i}(\Delta_C) - 1$, que es una contradicción. Por ende, $n = 1$ como queríamos probar. □

Como consecuencia natural de esta factorización, tenemos los siguientes corolarios y observaciones.

Corolario 4.4.18 *Si $|\det(\alpha)| = 1$, entonces $\Delta_C(y^\alpha) = y^a \Delta_B(y)$, con lo cual $N\Delta_C$ (que denota al Polítopo de Newton de Δ_C) se obtiene a partir de $N\Delta_B$ como sigue:*

$$N(\Delta_C \circ y^\alpha) = L_\alpha(N\Delta_C) = a + N\Delta_B$$

esto es, es la imagen de $N\Delta_B$ bajo un isomorfismo afín ($L_\alpha(x) = \alpha \cdot x^t$).

Corolario 4.4.19 *Considerando la función de grado total* $\deg : \mathbb{C}[y_1^{\pm 1}, \ldots, y_m^{\pm 1}] \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$, *resulta:*

$$\deg(\Delta_C \circ p) = \beta + g \deg(\Delta_B) .$$

Demostración. Basta decir que el grado es aditivo. En efecto, para demostrar esto, alcanza con mostrar que el producto de dos formas homogéneas de grado d es no nulo, por ser el anillo de polinomios de Laurent sobre $\mathbb{C}$ un dominio íntegro. Escribiendo cada polinomio como suma de sus componentes homogéneas, la componente homogénea de mayor grado en el producto resulta el producto de las componentes homogéneas de mayor grado de cada polinomio y, por tanto, es no nula. □

Observación 4.4.20 *De acuerdo con los ejemplos vistos anteriormente, resulta $\beta \notin \mathbb{N}^m$ sii $\Delta_C \circ p(y) \notin \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$.*

A partir de esta factorización podemos extraer un método para calcular Δ_C si Δ_B es conocido. Este hecho será de suma utilidad ya que en muchos casos es difícil calcular Δ_C, contrariamente a Δ_B, pues el último tiene en general menor grado.

Para hacer esto, quisiéramos tomar como y la inversa bajo p de un punto genérico z. Pero este método funcionará sólo localmente. En efecto, podemos "invertir" p en algún

abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}^m$ que no contenga al origen. Tomaremos entonces otra elección para y, muy cercana a la primera.

Es un hecho conocido de Algebra Lineal que $\frac{1}{\det(\alpha)} Adj(\alpha) = \alpha^{-1}$. Como $Adj(\alpha) \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ y $\det(\alpha) = g$ tenemos $Adj(\alpha) = g \centerdot \alpha^{-1} \in \mathbb{Z}^{m\times m}$.

Consideremos $y = p_{Adj(\alpha)}(z)$ para cualquier $z \in (\mathbb{C}^*)^m$. En tal caso, $p(y) = p_\alpha(y) = p_\alpha \circ p_{Adj(\alpha)}(z) = p_{Adj(\alpha)\alpha}(z) = p_{gId}(z) = z^g$, de acuerdo con el Lema 4.4.12. Evaluando $\Delta_C \circ p(y)$ en este punto particular y resulta

$$\Delta_C(z^g) = a\ (p_{Adj(\alpha)}(z))^\beta \prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot p_{Adj(\alpha)}(z))\ . \tag{4.29}$$

Miremos más de cerca los nuevos monomios presentes en el miembro derecho de esta ecuación. Aplicando nuevamente el Lema 4.4.12 y el Teorema 4.4.14, tenemos

$$\begin{aligned}(p_{Adj(\alpha)}(z))^\beta = p_\beta \circ (p_{Adj(\alpha)}(z)) = p_{Adj(\alpha)\centerdot\beta}(z) = p_{((g\alpha^{-1})\centerdot(\underbrace{\alpha(v_1,\ldots,v_m)^t}_{:=\beta}))}(z) = \\ = p_{(gId)\centerdot(v_1,\ldots,v_m)^t}(z)) = p_{(v_1,\ldots,v_m)^t} \circ p_{(gId)}(z) = p_{(v_1,\ldots,v_m)^t}(p_{(gId)}(z)) = \\ = p_{(v_1,\ldots,v_m)^t}(z^g)\ .\end{aligned} \tag{4.30}$$

Combinando las ecuaciones (4.29) y (4.30), vemos que $\prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot p_{Adj(\alpha)}(z))$ es un polinomio de Laurent en z^g. Esto nos permitirá recuperar Δ_C. En efecto, si $\Delta_C(z) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{m\times 1}} a_\gamma z^\gamma$, tenemos $\Delta_C(z^g) = \sum_{\gamma\in g\mathbb{N}^{m\times 1}} a_{\gamma/g} z^\gamma = \sum_{\gamma\in g\mathbb{N}^{m\times 1}} \widetilde{a_\gamma} z^\gamma$. Llamemos $\Gamma = \{\gamma : \widetilde{a_\gamma} \neq 0\}$, i.e. el soporte de $\Delta_C(z^g)$. Entonces $\Gamma \subset g\mathbb{N}^{m\times 1}$. Luego, como $\mathbb{C}$ (o simplemente $\mathbb{Q}$) es un cuerpo infinito,

$$\Delta_C(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \widetilde{a_\gamma} z^{(\frac{\gamma}{g})}\ .$$

Como tenemos el "levantado" de $(p_{Adj(\alpha)}(z))^\beta$ sólo tenemos que levantar $\prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot p_{Adj(\alpha)}(z))$ a un *polinomio de Laurent* en z^g. Esto es muy simple, pues todos los polinomios son muy parecidos: los monomios involucrados son los mismos, y sólo difieren en los coeficientes que acompañan a cada monomio. Consideraremos cada monomio posible del producto indexado sobre G como un producto de g monomios, uno por cada $\Delta_B(\varepsilon \cdot p_{Adj(\alpha)}(z))$, con $\varepsilon \in G$ (hay g posibles ε). Tomaremos cada producto en forma aislada, sin asociar todos aquellos que devuelvan el mismo monomio. Si el monomio resultante $\widetilde{a_\gamma} z^\gamma$ vive en $g\mathbb{N}^{m\times 1}$, lo levantamos a $\widetilde{a_\gamma} z^{(\gamma/g)}$. En caso contrario, simplemente lo descartamos. En resumen, levantamos cada monomio y luego asociamos los que sean iguales, sumando los respectivos coeficientes entre sí.

¿Qué podemos decir con respecto a los a_γ's? Pensemos cada exponente $\gamma^{(i)}$ como vector columna en $\mathbb{N}^m$. Cada "monomio producto" en $\prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B(\varepsilon \cdot p_{Adj(\alpha)}(z))$, sin su respectivo coeficiente, será:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{g} \left(p_{Adj(\alpha)}(z)\right)^{\gamma^{(i)}} = \prod_{i=1}^{g} \left(z^{Adj(\alpha)}\right)^{\gamma^{(i)}} = \prod_{i=1}^{g} z^{Adj(\alpha)\centerdot\gamma^{(i)}} = z^{(Adj(\alpha)\centerdot(\sum_{i=1}^{g}\gamma^{(i)}))} = \\ = \left(z^{Adj(\alpha)}\right)^{\sum_{i=1}^{g}\gamma^{(i)}}\ .\end{aligned}$$

Llamemos con $\tilde{z} = p_{Adj\alpha}(z) = z^{Adj(\alpha)}$. Por lo tanto, en el producto $\prod_{\varepsilon\in G} \Delta_B(\varepsilon\cdot\tilde{z})$, tenemos monomios $\tilde{z}^{\sum_{i=1}^g \gamma^{(i)}}$. Notemos, asimismo, que $\tilde{z}^{\sum_{i=1}^g \gamma^{(i)}}$ es un monomio presente a priori en $\Delta_B(\tilde{z})^g$. Sea $\Delta_B = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{m\times 1}} b_\gamma z^\gamma$. El coeficiente asociado al monomio producto (de variables $\widetilde{z}$) en el primer producto (el indexado por ε) será $\prod_{i=1}^g b_{\gamma_i}{\varepsilon_i}^{\gamma_i} = \prod_{i=1}^g b_{\gamma_i}\prod_{i=1}^g {\varepsilon_i}^{\gamma_i}$, mientras que el que acompaña en $\Delta_B(\tilde{z})^g$ será $\prod_{i=1}^g b_{\gamma_i}$. Vemos entonces que la estructura es muy similar en ambos casos.

Recordemos que necesitamos $\exp(z^{Adj(\alpha)\cdot\sum_{i=1}^g\gamma^{(i)}}) = Adj(\alpha)\cdot(\sum_{i=1}^g\gamma^{(i)}) \in g\mathbb{Z}^{m\times 1}$. Esto puede resolverse pues

$$Adj(\alpha)\cdot(\sum_{i=1}^g\gamma^{(i)}) \in g\mathbb{Z}^{m\times 1} \Leftrightarrow (\sum_{i=1}^g\gamma^{(i)}) \in Adj(\alpha)^{-1}\cdot g\mathbb{Z}^{m\times 1} = \frac{1}{g}\alpha\cdot g\mathbb{Z}^{m\times 1} = \alpha\,\mathbb{Z}^{m\times 1}\,. \tag{4.31}$$

Esto es, $\sum_{i=1}^g \gamma^{(i)}$ es una combinación lineal *entera* de los vectores columnas de la matriz α.

Analicemos los coeficientes de ambos productos: $\prod_{\varepsilon\in G}(\Delta_B(\varepsilon\cdot\tilde{z}))$ vs. $\Delta_B(\tilde{z})^g$. Cada monomio producto en el primero tiene coeficiente

$$\prod_{i=1}^g b_{\gamma^{(i)}}\varepsilon^{\gamma^{(i)}} = \prod_{i=1}^g b_{\gamma^{(i)}}\prod_{i=1}^g {\varepsilon_i}^{\gamma^{(i)}}\,.$$

En consecuencia, cada monomio producto en $\prod_{\varepsilon\in G}\Delta_B(\varepsilon\cdot\tilde{z})$ viene acompañado por el coeficiente $\prod_{i=1}^g b_{\gamma^{(i)}}\prod_{i=1}^g {\varepsilon_i}^{\gamma^{(i)}}$, que es (salvo un elemento en G) el coeficiente del monomio producto en $\Delta_B(\tilde{z})^g$.

Con esto tenemos la siguiente Proposición, que resuelve el problema de levantamiento del producto indexado por $\varepsilon\in G$.

Proposición 4.4.21 *Siguiendo la notación del Teorema 4.4.14, el coeficiente* $\prod_{i=1}^g b_{\gamma^{(i)}}$ *de cada monomio de forma* $z^{(Adj(\alpha)\cdot(\sum_{i=1}^g\gamma^{(i)}))}$*, presente en* $\prod_{\varepsilon\in G}\Delta_B(\varepsilon\cdot p_{Adj(\alpha)}(z))$ *coincide, salvo factor* $\prod_{i=1}^g {\varepsilon_i}^{\gamma^{(i)}}$*, con el coeficiente del monomio* $z^{(\sum_{i=1}^g\gamma^{(i)})}$ *presente en* $\Delta_B(z)^g$*. Más aún, los únicos monomios presentes en el primer producto son aquellos para los cuales* $\sum_{i=1}^g\gamma^{(i)} \in \alpha\mathbb{Z}^{m\times 1}$.

En consecuencia tenemos un algoritmo que resuelve el problema del cálculo de Δ_C a partir de la factorización de $\Delta_C\circ p$. Recordemos que dicha factorización era de la forma

$$\Delta_C\circ p(z) = az^\beta\prod_{\varepsilon\in G}\Delta_B(\varepsilon\cdot z)\,,$$

siendo cada factor irreducible. Notemos $\Delta_B(z) = \sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} b_\gamma z^\gamma$, es decir $\widetilde{\Gamma} = \mathrm{sop}(\Delta_B)$.

Algoritmo 2 Cálculo de Δ_C a partir de Δ_B

Entradas: Δ_B y factorización $\Delta_C \circ p(z)$.

Salida: Δ_C.

1: Considere el monomio z^β de dicha factorización y calcule $(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{Z}^m$ tal que $\beta = \alpha \centerdot (v_1, \ldots, v_m)^t$.

2: Para cualquier g-upla $\gamma = (\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(g)}) \in \widetilde{\Gamma}^g$, verifique si $\sum_{i=1}^{g} \gamma^{(i)} \in \alpha\mathbb{Z}^{m\times 1}$. Sea $\Lambda \subset \widetilde{\Gamma}^g$ el conjunto de g-uplas que verifican esto.

3: Para cada $\gamma \in \Lambda$, sea $w_\gamma := (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{Z}^m$ tal que $\sum_{i=1}^{g} \gamma^{(i)} = \alpha \centerdot (w_1, \ldots, w_m)^t$. Sea $c_\gamma = \prod_{i=1}^{g} b_{\gamma_i} \prod_{i=1}^{g} {\varepsilon_i}^{\gamma^{(i)}}$.

4: Finalmente,

$$\Delta_C(z) \leftarrow z^{(v_1,\ldots,v_m)^t} \sum_{\gamma\in\Lambda} c_\gamma z^{w_\gamma^t} \ .$$

Asociando los términos por igual exponente, se obtiene el resultado.

Demostración. Lo único que resta por argumentar es el último paso. Sabemos que el exponente de z en cada sumando del factor no monomial del miembro derecho es $Adj(\alpha) \centerdot \sum_{i=1}^{g} \gamma^{(i)}$. No obstante, por definición de Λ, junto con la expresión (4.31), resulta

$$Adj(\alpha) \centerdot \sum_{i=1}^{g} \gamma^{(i)} = (g\alpha^{-1}) \centerdot \sum_{i=1}^{g} \gamma^{(i)} \ ,$$

donde, además, los exponentes resultantes son vectores de números enteros en $g\mathbb{Z}^{m\times 1}$.

Por último, el miembro derecho, que a primera vista parece un polinomio de Laurent deberá tener exponentes naturales. Esto se verificará también por construcción del algoritmo. □

Ejemplo 4.4.22 Consideremos ahora uno de los ejemplo de factorización dados anteriormente. Recordemos el Ejemplo 4.4.16: $\Delta_B := y_1^2 + y_1 * y_3 + y_2 * y_3^3 + y_2 * y_3^2$,

$$\alpha := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(\alpha) := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \ ,$$

y $\beta = (6,3,3) = 1C_1(\alpha) + 4C_3(\alpha) = \alpha \cdot (1,0,4)^t \in \mathbb{N}^3$. Notemos que $g = det(\alpha) = -3$. Luego, por la Proposición 4.4.21, y calculando con MAPLE, tenemos: $\Delta_C(z^{-3}) = (z^{-3})^{(1,0,4)^t} * \{(3*z_1^9*z_3^{15}*z_2^3+3*z_1^9*z_3^{12}*z_2^6+z_1^9*z_3^9*z_2^9+3*z_2^6*z_1^6*z_3^{12}+6*z_2^9*z_1^6*z_3^9+3*z_2^{15}*z_1^3*z_3^3+3*z_2^{12}*z_1^6*z_3^6+z_2^{18}+z_3^{12}*z_1^3*z_2^9+3*z_2^{12}*z_1^3*z_3^6+z_1^9*z_3^{18})/(z_2^{18}*z_1^6*z_3^6)\}$. Nuevamente, con la ayuda de MAPLE, sustituimos z por $y^{-1/3}$, pues ya sabemos de antemano que cada monomios de la expresión entre llaves es un monomio en z^{-3}, y el polinomio resultante deberá ser Δ_C.

$$\Delta_C(z) = 3 * z_3 * z_2^5 + 3 * z_3^2 * z_2^4 + z_3^3 * z_2^3 + 3 * z_2^4 * z_1 * z_3^2 + 6 * z_1 * z_3^3 * z_2^3 + \\ +3 * z_1^2 * z_3^5 * z_2 + 3 * z_1 * z_3^4 * z_2^2 + z_1^3 * z_3^6 + z_1^2 * z_3^2 * z_2^3 + 3 * z_2^2 * z_1^2 * z_3^4 + z_2^6 \ ,$$

que coincide con la ecuación ya calculada en el Ejemplo 4.4.16. ■

Capítulo 5

Trabajo Futuro

Durante el trabajo realizado surgieron diversas líneas de investigación, como posibles caminos a seguir. Explicaremos el origen de las mismas y su posible evolución.

5.1 Naturaleza de los puntos base

Como vimos en la Sección §2.1, partimos de una parametrización racional de tipo Horn

$$\psi'_B : \mathbb{C}^m \setminus \mathcal{Z}' \to \mathbb{C}^m \qquad (u_1, \ldots, u_m) \mapsto (y_1, \ldots, y_m)\,,$$

donde $\mathcal{Z}'$ era la unión de los ceros de los denominadores involucrados. A continuación, observamos que dicha parametrización, luego de tomar denominador común entre los y_k, podía reescribirse en términos de una parametrización ψ_B entre planos proyectivos de dimensiones $m-1$ y m, definida en un abierto denso ($\mathbb{P}^m \setminus \mathcal{Z}$), dando lugar, naturalmente, a la definición del conjunto de puntos base proyectivos.

Un problema que surge al tomar denominador común entre todas las coordenadas de la parametrización, es el agregado de puntos base superfluos, que no son puntos problemáticos en la parametrización original. No obstante, se emplea esta técnica para hacer uso de la fórmula de grado enunciada en el Teorema 2.1.2. Esto lleva, obligadamente, a la siguiente pregunta. ¿Podemos evitar este método y trabajar directamente con $g_0, \ldots, g_m$? Sería deseable conseguir una fórmula similar a la que brinda el Teorema 2.1.2 en este caso. Estudiaremos principalmente [19].

5.2 Formulación del contexto algebraico para la definición de Hilbert-Samuel

En el Capítulo 3 se estudió la definición de multiplicidades de punto base siguiendo la construcción de Hilbert-Samuel y presentándola en el marco más general posible. El contexto usual en el cual se construye el polinomio de Hilbert-Samuel es el de un anillo noetheriano local. De igual modo, podemos partir de un ideal semilocal. En el caso que nos interesa, el de ideales generados a partir de nuestras parametrizaciones por matrices de tipo B (parametrizaciones "à la Horn"), dado que tenemos un número finito de puntos base, esta definición "semilocal" podría ser de utilidad. Tal vez se podrían calcular al mismo tiempo todas las multiplicidades, en vez de localizar el ideal en cada punto base y calcular cada una en forma separada.

En particular, se planea analizar el trabajo [27], para explotar las ideas presentados sobre el cálculo rápido del polinomio de Hilbert en el contexto de ideales primarios.

5.3 Cálculo de multiplicidades y cotas

Al comenzar a estudiar el comportamiento de las multiplicidades, se observaron serios inconvenientes para el cálculo general de estas magnitudes. En particular, notamos que el método algorítmico (combinatorio) más sencillo de emplear fallaba en caso de no partir de un ideal monomial. Como hemos mencionado ya en la Proposición 3.3.17, en [14] se presentan dos cotas para el cálculo, en términos de la multiplicidad del ideal inicial respecto a un orden monomial. Notemos que, vía traslaciones, siempre podemos suponer que $P = (1 : 0 : \ldots : 0)$, o cualquiera de los vectores canónicos de $\mathbb{C}^{m+1}$, es el punto base involucrado.

En relación con las cotas brindadas, y siguiendo los cálculos efectuados en los diversos ejemplos presentados, cabe observar que, en términos generales, los valores de $e(I)$ y $e(in_{\prec}(I))$ son muy cercanos, siendo la cota inferior $\frac{e(in_{\prec}(I))}{(m-1)!}$ muy lejana al valor real. En particular, en el Ejemplo 3.3.16 vimos que las cotas resultaban

$$\underbrace{\frac{1}{2!}e(in_{\prec}(I)_{P_{1,4}})}_{=5,5} << \underbrace{e(I_{P1,4})}_{=10} < \underbrace{e(in_{\prec}(I)_{P_{1,4}})}_{=11} .$$

Por lo tanto, es natural preguntarse cuán lejos está la cota superior para $e(I)$ de ser una igualdad, como así también buscar una cota inferior más fina. Para ello, se planea estudiar la bibliografía citada en [14], en especial [25] (la cota inferior, dada en (3.3) proviene de este último artículo) y [28], trabajos precursores en el campo de las multiplicidades.

En relación con las cotas, otro campo de análisis es el posible comportamiento asintótico de la multiplicidad $e(in \prec (I))$ respecto de $e(I)$. Una forma de proceder, es obtener un resultado similar al del Corolario 3.1.10, ya que en nuestro caso tenemos I_P generado por $m+1$ polinomios, siendo $\dim(R) = m-1$.

5.4 Cálculo de inversas para las parametrizaciones ψ_B

Como mencionamos en diversas oportunidades, el objetivo de todo el trabajo es el cálculo de Δ_B, o al menos, su grado. En el Capítulo 4 hemos encontrado una inversa para la parametrización ψ_B, en términos de la *ya conocida* ecuación Δ_B. En consecuencia, surge la siguiente pregunta. ¿Podemos calcular de otro modo la inversa y luego "integrar" respecto de cada variable para conseguir una fórmula explícita para el discriminante?

Como ya observamos, la inversa racional estará unívocamente determinada en el plano proyectivo, no así en $\mathbb{C}^{m+1}$ (Observación 4.3.6). No obstante, cualquier inversa a derecha en el plano complejo nos dará información sustancial para obtener Δ_B. En efecto, siguiendo esta idea, en la Observación 4.3.16 y la consecuente Proposición 4.3.17, bajo ciertas hipótesis especiales de la matriz B, es posible calcular una inversa genérica para la parametrización. Con esto, podemos recuperar el polinomio Δ_B. Sería interesante analizar bajo qué condiciones la matriz B cumple dichas hipótesis, y encontrar, asimismo, condiciones menos restrictivas para aplicar estas ideas.

Otra línea de trabajo desarrollada en la Observación 4.3.12, tendiente también a calcular la ecuación Δ_B, es la construcción de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, una vez que tenemos una inversa para la parametrización ψ_B. En efecto, sabemos que el polinomio Δ_B irreducible es único salvo constante. Nuestro sistema tiene como incógnitas a Δ_B y la familia de polinomios H_i, $i = 1, \ldots, m-1$, que son también únicos. ¿Cómo podemos garantizar condiciones sobre el sistema para obtener la unicidad salvo constante (signo) de Δ_B definido como solución de nuestro sistema de EDP? Es posible que esto aporte algún dato referente al Polítopo de Newton de los H_i, que son esencialmente iguales, además de tener coeficientes muy relacionados, como vimos en los ejemplos calculados (Ejemplos 4.3.14 y 4.3.15).

5.5 Polítopo de Newton de Δ_B

Como corolario de la Factorización de $\Delta_C \circ p$ vista en la Sección §4.4 (Corolario 4.4.18), hemos podido relacionar los Polítopos de Newton de Δ_C y Δ_B vía una transformación afín proveniente de la matriz α. Más allá de conocer el grado de la ecuación Δ_B, para acelerar la resolución del sistema lineal en los coeficientes de la misma, sería deseable conocer su Polítopo de Newton. De ahí la importancia de estudiar dicho objeto. En relación con esto, actualmente, se está trabajando para encontrar un invariante que relacione el polítopo de Newton del Discriminante homogeneizado (Δ_A), con el del deshomogeneizado. Se intenta conseguir un resultado análogo al Teorema 1.2 citado en [15].

5.6 Puntos singulares de las parametrizaciones ψ_B

En la formulación de la función logarítmica de Gauss (Definición 4.3.1), hemos visto que la misma está definida en el conjunto de puntos suaves de la superficie S. Esto motiva el interés por calcular los puntos no suaves, i.e. singulares (cfr. [12], [33]). Asimismo, otro problema interesante es el cálculo de las singularidades para la parametrización ψ_B.

En [30] se analiza el caso de los discriminantes univariados, que es un caso particular de las parametrizaciones que hemos trabajado. En particular, en la Sección §3.4 del mismo ("Singularities of the discriminant locus"), se estudia el lugar singular de la superficie definida por la parametrización. Pese a tratarse de morfismos muy particulares, que facilitan enormemente los cálculos, esperamos poder caracterizar también, en nuestro contexto más general, dicho conjunto de puntos.

Bibliografía

[1] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay Rings*, volume 39 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1993.

[2] L. Busé. Residual resultant over the projective plane and the implicitization problem. In *Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 48–55, 2001.

[3] L. Busé, D. Cox, and C. D'Andrea. Implicitization of surfaces in $\mathbb{P}^3$ in the presence of base points. *Journal of Algebra and its Applications*, 2(2):189–214, 2003.

[4] L. Busé, A. Dickenstein, and I. Emiris. Discriminants in codimension 3. Working notes, 2002.

[5] L. Busé, M. Elkadi, and B. Mourrain. Using projection operators in computer aided geometric design. *Proceedings of Algebraic Geometry and Geometric Modeling*, 2002.

[6] F. Catanese. Book review: Discriminants, resultants and multidimensional determinants. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37:183–198, 2000.

[7] D. Cox. Equations of parametric surfaces via syzygies. oct 2001. ArXiv Mathematics e-prints http://arxiv.org/abs/math/0306195.

[8] D. Cox. What is the multiplicity of a base point? Slides from the expository talk given at XIV CLA, La Falda, Argentina, 2001.

[9] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Using Algebraic Geometry*, volume 185 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, primera edition, 1998.

[10] R. Curran. *Restriction of A-Discriminants and Dual Defect Toric Varieties*. PhD thesis, Department of Mathematics and Statistics University of Massachusetts at Amherst, 2005. Advisor: Cattani, Eduardo.

[11] R. Curran and E. Cattani. Restriction of A-discriminants and dual defect toric varieties. Aceptado en el Journal of Symbolic Computation. Disponible en http://www.arxiv.org/abs/math.AG/0510615.

[12] C. D'Andrea and J. Chipalkatti. On the Jacobian ideal of the binary discriminant. Disponible en http://arxiv.org/abs/math.AG/0601705.

[13] C. De Concini and C. Procesi. Wonderful models of subspace arrangements. *Selecta Math. (N.S.)*, 1(3):459–494, 1995.

[14] D. Delfino, A. Taylor, W. V. Vasconcelos, N. Weininger, and R. H. Villarreal. Monomial ideals and the computation of multiplicities. In M. Fontana, S.-E. Kabbaj, and S. Wiegandl, editors, *Commutative Ring Theory and Applications*, volume 231 of

Lectures Notes in Pure and Applied Math., pages 87–107. Marcel Dekker, New York, 2002. Disponible en http://www.math.rutgers.edu/∼vasconce/mc8.pdf.

[15] A. Dickenstein, E. M. Feichtner, and B. Sturmfels. Tropical discriminants. ArXiv Mathematics e-prints http: //arxiv.org/abs/math.AG/0510126, 2005.

[16] A. Dickenstein and B. Sturmfels. Elimination theory in codimension two. *Journal of Symbolic Computation*, 34:119–135, 2002.

[17] G. Ewald. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, volume 168 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1st edition, 1996.

[18] W. Fulton. *Curvas algebraicas*. Reverté, 1971.

[19] W. Fulton. *Intersection Theory*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[20] I. M. Gelfand, M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*. Monograph. Birkhauser, Boston–Basel–Berlin, 1994.

[21] G.-M. Greuel and G. Pfister. *A Singular Introduction to Commutative Algebra*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1st edition, 2002.

[22] G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann. SINGULAR 3.0. A Computer Algebra System for Polynomial Computations, Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, 2005. `http://www.singular.uni-kl.de`.

[23] C. Hoffman. *Geometric and Solid Modeling*. Morgan–Kaufman, 1989.

[24] M. Kapranov. A characterization of a-discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic gauss map. *Mathematische Annalen*, 290:277–285, 1991.

[25] C. Lech. Note on multiplicities of ideals. *Arkiv för Matematik*, 4:63–86, 1960.

[26] H. Matsumura. *Commutative Ring Theory*, volume 8 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1st. edition, 1989.

[27] T. Mora and M. E. Rossi. An algorithm for the Hilbert-Samuel function of a primary ideal. *Commutative Algebra*, 23:1899–1911, 1995.

[28] D. G. Northcott. *Lessons on Rings, Modules and Multiplicities*. Cambridge University Press, London, 1968.

[29] D. G. Northcott and D. Rees. Reductions of ideals in local rings. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 50:145–158, 1954.

[30] M. Passare and A. Tsikh. Algebraic equations and hypergeometric series. In *The legacy of Niels Henrik Abel*, pages 653–672. Springer, 2004.

[31] D. Rees. α-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 57:8–17, 1961.

[32] J. P. Serre. *Algèbre locale. Multiplicités*, volume 11 of *Springer Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1965.

[33] J. Weyman and A. Zelevinsky. Singularities of hyperdeterminants. *Annales de l'Institut Fourier*, 46(3):591–644, 1996.

[34] H. Whitney. Elementary structure of real algebraic varieties. *Annals of Mathematics*, 66:545–556, 1957.