Tesis de Licenciatura
El problema de Kakeya

Ezequiel Rela
Directora: Dra.Úrsula Molter
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - U.B.A.

Marzo de 2006

Agradecimientos

A mis viejos, porque... porque son mis viejos y los quiero.

A Ele, que es sin dudas la persona más importante de mi vida. Siempre estuvo a mi lado y me ayudó a pasar un obstáculo tras otro. Aunque no le guste que lo diga, sin ella jamás habría llegado hasta acá.

A Úrsula, que aceptó dirigir este trabajo. Por el entusiasmo siempre presente, por su sabiduría y por su paciencia.

A todos esos amigos que hicieron que este largo camino pareciera al menos un poco más corto. A aquellos que siempre tenían alguna palabra de aliento, algún consejo, o que simplemente estaban ahí acompañando. Sin ningún orden en particular, acá van:

Aro, Mati, Nico, Caro, Ari y Yani de allá lejos hace tiempo.

Santiago, Luciano, Torry, Andrei, Ezequiel D., Nino y Adrián. A Caro, Fer, el colo, Juan Manuel, Nico B., Andrés V.

Un renglón aparte merece la oficina 2106 (Irene y Leandro). Incontables veces fui en busca de ayuda y siempre se resolvía con algún pase mágico de Leandro en Linux o con "yo tenía ese paper en algún lado" de Irene. Una vez más, gracias.

A Rami y a Lore, porque sí.

Índice general

Introducción **5**

Notación **7**

1. Conjuntos de Kakeya - Besicovitch **9**
1.1. El problema original 9
1.2. Un conjunto de Kakeya de medida cero 12
1.3. Generalizaciones 20

2. Conjetura "H" de Kakeya en $\mathbb{R}^2$ **23**
2.1. Medida y dimensión de Hausdorff 23
2.2. Dimensión de los conjuntos de Kakeya 32
2.2.1. Proyecciones 32
2.2.2. Dualidad 34

3. La función maximal de Kakeya **41**
3.1. Preliminares 41
3.2. La función maximal de Kakeya 44
3.3. Conjetura "M" implica conjetura "H" 47

4. Conjetura "M" de Kakeya en $\mathbb{R}^2$ **55**
4.1. Preliminares 55
4.2. El problema de Kakeya en $\mathbb{R}^2$ 60
4.3. Conjuntos de Furstenburg 70

5. Conjetura "M" de Kakeya en $\mathbb{R}^n$ **71**
5.1. La conjetura de Kakeya en cuerpos finitos 71
5.2. De los cuerpos finitos a $\mathbb{R}^n$. 76

6. Otros problemas relacionados con Kakeya **81**
6.1. Dimensión de Minkowski 81
6.2. El problema del multiplicador del disco 83

6.3. Otros problemas relacionados con Kakeya 97

A. Conjunto de Cantor Generalizado **99**

B. Test de Schur **105**

Bibliografía **109**

Introducción

El problema de Kakeya es en realidad una familia de problemas reunidos bajo el mismo nombre. En líneas generales, se entiende como problema de tipo Kakeya o Besicovitch a cualquier pregunta referente a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que contengan un segmento unitario o una recta en cada dirección posible. Si bien el primer problema de tipo Kakeya es relativamente antiguo, dado que data de principios de siglo XX, fue después de 1970 y principalmente a partir de los años 90 que surgieron nuevas y más profundas versiones de estos problemas conectadas con áreas de la matemática aún en desarrollo.

Un conjunto de Kakeya o Besicovitch es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ que contiene un segmento en cada dirección posible. La versión más antigua del problema de Kakeya trata de la existencia de conjuntos de Kakeya de medida cero. En el capítulo 1 se muestra que dichos conjuntos efectivamente existen y se formulan otros problemas similares. Una formulación más moderna y más fuerte del problema es la conjetura "H" de Kakeya. La conjetura es que la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Kakeya en $\mathbb{R}^n$ es n y hasta ahora sólo se sabe que es cierta en $n = 2$. En el capítulo 2 se introduce el concepto de dimensión de Hausdorff y se exponen resultados de Davies y Falconer ([Dav71],[Fal86]) que prueban la conjetura en este caso. Un enfoque más moderno del problema aparece por primera vez en trabajos de A. Córdoba ([Cór75],[Cor77]) y consiste en estudiar propiedades de acotación de operadores de tipo maximal sobre familias de tubos delgados y largos en cada dirección. Más precisamente, se define el operador maximal de Kakeya como

$$(K_\delta f)(e) = \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f(x)|dx$$

donde $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $T_e^\delta(a)$ es un tubo centrado en $a \in \mathbb{R}^n$ de largo 1 y sección transversal de radio δ. La conjetura "M" de Kakeya dice que estos operadores están acotados de $L^n(\mathbb{R}^n)$ en $L^n(\mathbb{S}^{n-1})$. Al igual que en el caso de la conjetura "H" se sabe que es cierta en dimensión 2 pero sigue sin ser resuelta en dimensiones superiores. En el capítulo 3 se estudian propiedades de este operador y se muestra que efectivamente la conjetura "M" es más fuerte que la

conjetura “H”. En el capítulo 4 se exponen distintos argumentos que prueban la conjetura “M” en el caso $n = 2$. Una de las estrategias usadas para obtener resultados en dimensiones superiores es considerar problemas análogos sobre cuerpos finitos. Este enfoque y algunos resultados positivos en dimensión n se encuentran en el capítulo 5. El mayor atractivo de este tipo de problemas sea quizás que están vinculados con dos problemas muy profundos y aún abiertos del análisis armónico: los multiplicadores de Bochner-Riesz y el problema de la restricción de la transformada de Fourier. En el capítulo 6 se muestra el vínculo entre la construcción que permite definir un conjunto de Kakeya y el problema del multiplicador para el disco. También se hace una descripción informal de estos dos problemas y de su relación con las distintas versiones de la conjetura de Kakeya.

Notación

A lo largo de este trabajo usaremos con frecuencia el símbolo $\lesssim$ que, como es de suponer, se refiere a una relación de desigualdad. Indicamos en este apartado su significado preciso. Vamos a notar $A \lesssim B$ cada vez que exista una constante C que permita escribir $A \leq CB$. La constante debe ser independiente de las variables involucradas, pudiendo depender de la dimensión del espacio en el que se está trabajando. Por citar algunas situaciones típicas, tenemos por ejemplo que $n^2+n \lesssim n^2$ donde la constante en cuestión es $C = 2$. Si $B(0,\delta)$ es una bola de radio δ en $\mathbb{R}^n$ escribimos $|B(0,\delta)| \lesssim \delta^n$ donde $|B(o,\delta)|$ indica la medida de Lebesgue. También usaremos que $|\mathbb{S}^{n-1} \cap B(0,\delta)| \lesssim \delta^{n-1}$. En el caso de tener cualquier cantidad $A > 0$ podemos escribir $A \gtrsim 1$. En el Capítulo 4 usamos que $\sum_{j=1}^{K} \frac{1}{j} \lesssim \log K$

Algunos símbolos específicos están contenidos en la siguiente lista

Símbolo	Página
$\mathcal{A}_N$	14
G-set	12
d_L	81
$H^s(E)$	24
d_U	81
H^s_δ	23
$\dim_H(E)$	24
$L(E)$	34
$\operatorname{diam}(U)$	23
$\mathcal{N}_\delta$	55
E^δ	17
S^δ_ℓ	12
$\hat{f}$	57
$T^\delta_e(a)$	44
f^*_δ	44
$\operatorname{vp}\frac{1}{x}$	86
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	58

La siguiente es notación completamente estándar:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	Números naturales, racionales, reales y complejos
$\mathbb{S}^{n-1}$	Elementos de $\mathbb{R}^n$ de módulo 1
$\mathbb{F}_q$	Cuerpo finito de q elementos
$d(x, y)$	distancia entre x e y en el espacio métrico correspondiente
$B(x, r)$	Bola abierta con centro en x y radio r
$\#(E)$	Cantidad de elementos de E
$\lvert E\rvert$	Medida de Lebesgue de E en $\mathbb{R}^n$
$\sigma(\Omega)$	Medida del conjunto Ω en $\mathbb{S}^{n-1}$
$\lfloor x \rfloor$	Parte entera de x.

Capítulo 1

Conjuntos de Kakeya - Besicovitch

1.1. El problema original

El problema de Kakeya-Besicovitch tiene su primer antecedente en un trabajo de Besicovitch de 1919 [Bes19]. En "*Sur deux questions d'intégrabilité des fonctions*" consideraba el siguiente problema:

> *Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable Riemman, ¿es siempre posible encontrar un par de direcciones ortogonales u, v tales que la función $g(u) = \int f(u, v)dv$ exista como integral de Riemman para todo u, que $g(u)$ sea también integrable Riemman y que la integración iterada respecto de esas direcciones sea igual al valor de la integral sobre $\mathbb{R}^2$?*

Besicovitch dio una respuesta negativa a este problema que dependía de la posibilidad de contruir un conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ de medida de Lebesgue cero que contenga un segmento unitario en cada posible dirección. Besicovitch efectivamente logró construir tal conjunto en 1919 pero, dada la situación de Rusia en esa época, tuvo poca difusión.

Paralelamente, los matemáticos Kakeya y Fujiwara mencionan en [FK17] el siguiente problema conocido como el *"Kakeya needle problem"*:

> *En la clase de las figuras convexas planas dentro de las cuales puede rotarse en forma continua un segmento de longitud uno, ¿Cuál es la de menor área?*

Ellos conjeturaron que el triángulo equilátero de altura 1 era la figura buscada y que si la condición de convexidad era excluida, la figura buscada era el hipocicloide de tres picos.

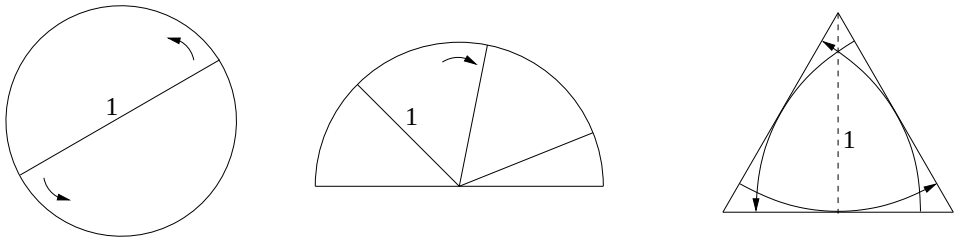

Figura 1.1: Conjuntos de Kakeya convexos: el círculo de diámetro uno y área $\frac{\pi}{4}$, el semicírculo de radio 1 y área $\frac{\pi}{2}$ y el triángulo equilátero de altura 1 y área $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

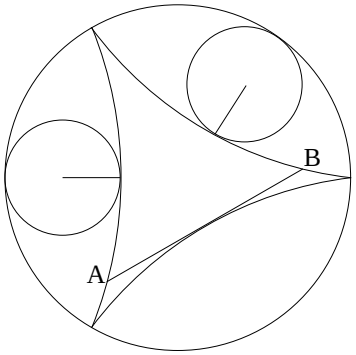

Figura 1.2: Conjunto de Kakeya no convexo: el hipocicloide de tres picos inscripto en un círculo de díametro $\frac{3}{2}$ y área $\frac{\pi}{8}$.

En 1928 Besicovitch [Bes28] demostró que la conjetura de Kakeya era falsa modificando su construcción original y obteniendo conjuntos de Kakeya de medida arbitrariamente chica. Una versión mejorada de su solución al problema de Kakeya se puede encontar en [Bes63] y en [Fal86]. En este último trabajo Besicovitch hace uso de una construcción que llamó "Perron-Schoenberg trees" y resuelve la dificultad de lograr la construcción sin perder la continuidad del desplazamiento del segmento gracias a los "joins" sugeridos por J. Pal.

A continuación vamos a describir y comentar (sin demasiado rigor, pues no es el tema central de este trabajo) algunos aspectos relacionados con el *"Kakeya needle problem"*. La solución de Besicovitch al problema de Kakeya está basada en la idea de partir de un triángulo equilátero de altura 1 y dividirlo en "triángulos elementales¨ de la misma altura y bases iguales.

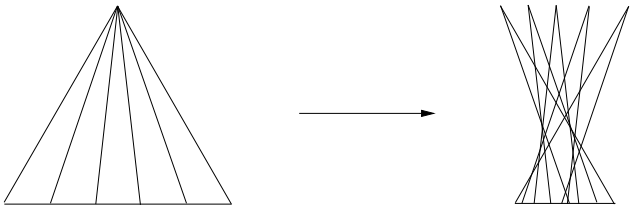

Figura 1.3: Shifting triangles

Luego, desplazándolos lateralmente se busca tal grado de superposición entre ellos que haga que el conjunto resultante tenga área suficientemente chica (Figura 1.3). Como dentro del triángulo original se puede rotar en forma continua un segmento de longitud 1 en un arco de 60°, también se puede lograr este movimiento usando a los triángulos elementales si se pudiera resolver el problema de pasar el segmento de un triángulo a otro en forma continua. Podemos recurrir a la siguiente idea: ubicamos el punto A y trazamos dos rectas que lo unan a los vértices B y C. De esta manera, podemos partir con un segmento dentro de uno de los dos triángulos, desplazarlo por la recta AB, girarlo en la zona sombreada y volver al otro triángulo por la recta AC. El incremento del área puede ser controlado tomando al punto A suficientemente lejos de B y C.

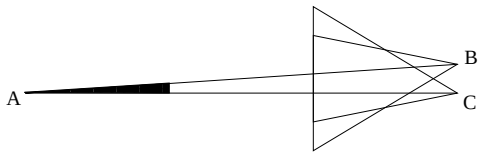

Figura 1.4: Pal´s join

Claramente esta construcción conduce a un conjunto que no es convexo. Tampoco es simplemente conexo, debido a los joins necesarios para pasar de un triángulo elemental a otro.

A lo largo de este trabajo no nos ocuparemos más del problema de la continuidad en el desplazamiento del segmento dentro del conjunto, sino que centraremos la atención en distintas nociones de tamaño de estos conjuntos y en su importancia en áreas del análisis armónico en actual desarrollo. Vamos a adoptar entonces la siguiente definición:

Definición 1.1.1 *Un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se llamará de Kakeya o Besicovitch si contiene un segmento de longitud 1 en cada dirección. Más precisamente,*

$$\forall\, e \in \mathbb{S}^{n-1}\ \exists\, a_e \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \left\{ a_e + te : t \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right] \right\} \subseteq E.$$

1.2. Un conjunto de Kakeya de medida cero

Damos en esta sección una demostración (que no es la original de Besicovitch) de la existencia de conjuntos de Kakeya de medida cero en $\mathbb{R}^n$. Vamos a probar primero la existencia de conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^2$ que contienen un segmento en cada dirección y después extender esa idea a $\mathbb{R}^n$. Introducimos las siguientes definiciones:

Definición 1.2.1 *Decimos que $E \subseteq \mathbb{R}^2$ es un $G-$ set si es un subconjunto compacto de la banda $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1\}$ tal que para cada $m \in [0, 1]$ hay un segmento contenido en E que conecta las rectas $x = 0$ y $x = 1$ con pendiente m. Es decir,*

$$\forall\, m \in [0,1]\ \ \exists\, b \in \mathbb{R} : mx + b \in E\ \ \forall\, x \in [0,1]. \tag{1.1}$$

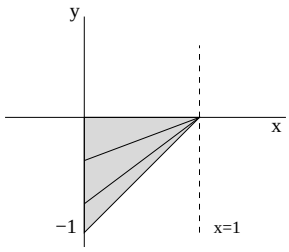

Figura 1.5: El triángulo formado por los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, -1)$ es un $G-$ set

Definición 1.2.2 *Para cada recta no vertical $\ell = \{(x, y) : y = mx + b\}$ y cada $\delta > 0$ definimos $S_\ell^\delta = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ y } |y - (mx + b)| \leq \delta\}$. Con esta definición S_ℓ^δ resulta un conjunto compacto.*

Observación 1.2.3 *Está claro que si probamos la existencia de $G-$ sets de medida cero tenemos como corolario la existencia de conjuntos de Kakeya de medida cero. Vamos a usar también el siguiente hecho que se verifica fácilmente: si la recta ℓ tiene pendiente m entonces el conjunto S_ℓ^δ contiene segmentos que conectan $x = 0$ con $x = 1$ con cualquier pendiente entre $m-2\delta$ y $m + 2\delta$.*

La construcción fundamental está basada en la misma idea de desplazamiento y superposición de triángulos de Besicovitch, pero presentamos acá una versión más directa que puede encontrarse en [Fal86] y en [Wol99].

Teorema 1.2.4 *Sea $\varepsilon > 0$. Existe un G-set $E \subseteq [0,1] \times [-1,1]$ tal que $|E| < \varepsilon$*

Demostración: La idea es la siguiente: dado un N suficientemente grande, partimos el triángulo de la Figura 1.5 en N triángulos dividiendo el lado vertical en N segmentos iguales. Dejamos el triángulo superior quieto y desplazamos los demás verticalmente de tal manera que las intersecciones con la recta $x = 0$ coincidan. Como segundo paso, tomamos cada triángulo de la etapa previa y los dividimos en N triángulos de manera análoga a la anterior. Dejamos el triángulo superior de cada conjunto quieto y desplazamos verticalmente los demás de tal manera que las intersecciones con la recta $x = \frac{1}{N}$ coincidan. Repetimos el proceso con los puntos de abscisa $\frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \frac{4}{N}, ...\frac{N-1}{N}$ y definimos el conjunto E como la unión de todos los N^N triángulos de base $\frac{1}{N^N}$ y altura 1. La Figura 1.6 muestra el caso $N = 3$.

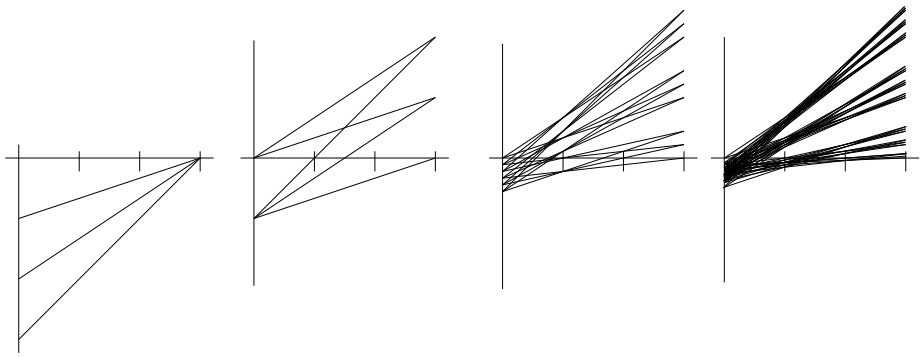

Figura 1.6: La construcción del Teorema 1.2.4 para $N = 3$

Esta construcción nos dará el resultado buscado si podemos probar que el grado de superposición de los triángulos desplazados es suficiente como para

lograr que la medida de E sea pequeña. Más precisamente, vamos a probar que podemos conseguir que para cada $t \in [0,1]$ la medida de la sección $E_t = \{(x,y) \in E : x = t\}$ tiene medida suficientemente chica. Para describir rigurosamente esta construcción vamos a ver dónde queda ubicado el lado superior de cada triángulo de base $\frac{1}{N^N}$ luego de todos los desplazamientos.

Luego de todas las subdivisiones obtenemos una colección de N^N triángulos $\{T_k\}_{k=1}^{N^N}$. Conviene pensar que la división en N^N triángulos se hace en etapas tal como se describió al principio de manera que se obtienen N colecciones de triángulos:

$$\{T_i^j\}_{i=1}^{N^j} \quad 1 \leq j \leq N,$$

donde para cada j todos los triángulos T_i^j resultan de dividir los triángulos del nivel anterior en N triángulos de igual base y altura 1. Podemos asociar al lado superior de cada triángulo T_k una recta del tipo $g_{a^k}(t) = a^k t - a^k$ donde el valor a^k de la pendiente se puede escribir en base N usando a lo sumo N dígitos.

Por comodidad para la exposición introducimos el siguiente conjunto que llamaremos $\mathcal{A}_N$: sea N un entero fijo y sea $\mathcal{A}_N$ el conjunto de números en $[0,1)$ tales que su expansión en base N termina después de N dígitos:

$$a \in \mathcal{A}_N \iff a = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{N^j} \qquad \text{con } a_j \in \{0,1,.....N-1\}. \tag{1.2}$$

A modo de ejemplo, describimos $\mathcal{A}_2 = \{0; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}\}$ y $\mathcal{A}_3 = \{0; \frac{1}{27}; \frac{2}{27}; \frac{3}{27}; ...; \frac{26}{27}\}$. Veamos que los dígitos correspondientes a la pendiente a^k nos dan la información acerca de cuántas unidades debe desplazarse hacia arriba el triángulo T_k. Recordemos que N está fijo. Para calquier k entre 1 y N^j tenemos que la intersección del triángulo T_i^{j+1} con la recta vertical $x = \frac{j}{N}$ $(0 \leq j \leq N-1)$ tiene longitud $\frac{N-j}{N^{j+2}}$. Para ver esto último recordemos que el triángulo T_i^{j+1} tiene base $\frac{1}{N^{j+1}}$ y altura 1 de modo que por semejanza resulta lo afirmado. Volvemos a los dígitos: la sucesión de dígitos correspondiente a la función g_k definida antes para T_k nos dice justamente en cuáles de los triángulos T_i^j estaba incluido T_k, de manera que los desplazamientos hacia arriba de T_k están dados por

$$a_1^k \frac{N}{N^2} + a_2^k \frac{N-1}{N^3} + a_3^k \frac{N-2}{N^4} + ... + a_N^k \frac{1}{N^{N+1}}$$

donde

$$a^k = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^k}{N^j} \qquad \text{con } a_j^k \in \{0,1,.....N-1\}.$$

Por lo tanto, si consideramos este desplazamiento sobre la función g_k asociada a T_k obtenemos

$$\begin{aligned}
\ell_{a^k}(t) &= g_k(t) + \sum_{j=0}^{N-1} a_{j+1}^k \frac{N-j}{N^{j+2}} \\
&= a^k t - a^k + \sum_{j=0}^{N-1} a_{j+1}^k \frac{N-j}{N^{j+2}} \\
&= a^k t - a^k + \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^k}{N^j} - \sum_{j=1}^{N} a_j^k \frac{1-j}{N^{j+1}} \\
&= a^k t - \sum_{j=1}^{N} a_j^k \frac{1-j}{N^{j+1}}
\end{aligned}$$

Ahora la idea es engordar sólo un poco a los segmentos ℓ_a con $a \in \mathcal{A}_N$ para reproducir el efecto de los triángulos desplazados. Para cada $a \in \mathcal{A}_N$ tenemos que:

$$\ell_a = \{(t, \phi_a(t) : 0 \leq t \leq 1\} \qquad \text{con } \phi_a(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(Nt - j + 1)a_j}{N^{j+1}}.$$

Necesitamos el siguiente lema:

Lema 1.2.5 *Para cada $t \in [0,1]$ existe un entero $k \in \{0, 1, ...N\}$ y una familia de a lo sumo N^{k-1} intervalos $\{I_j\}_{j=1}^{N^{k-1}}$ cada uno de longitud $2N^{-k}$ tal que*

$$\{\phi_a(t) : a \in \mathcal{A}_N\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N^{k-1}} I_j.$$

Antes de la demostración un comentario informal: si miramos la Figura 1.6 notamos que los triángulos T_k (una vez desplazados) se agrupan de tal manera que en la región entre $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ hay un "manojo" de triángulos cuya unión no es más ancha que $\frac{2}{3}$, en la región entre $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$ hay 3 "manojos" de triángulos cuya unión no es más ancha que $\frac{2}{9}$ y en la región entre $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$ hay 9 "manojos" de triángulos cuya unión no es más ancha que $\frac{2}{27}$. Este lema muestra que lo mismo ocurre en el caso general.

Demostración: Sea k tal que $\frac{k-1}{N} < t < \frac{k}{N}$. Dados a y b en $\mathcal{A}_N$ decimos que son equivalentes si $a_j = b_j$ para todo $j \leq k-1$. Claramente hay N^{k-1} clases de equivalencia y si a y b son equivalentes entonces

$$
\begin{aligned}
|\phi_a(t) - \phi_b(t)| &\leq |\sum_{j=k}^{N} \frac{(Nt - j + 1)(a_j - b_j)}{N^{j+1}}| \\
&\leq \sum_{j=k}^{N} \frac{|Nt - j + 1|.|a_j - b_j|}{N^{j+1}}. \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

Si miramos el factor $|Nt - j + 1|$ vemos que, como $\frac{k-1}{N} < t < \frac{k}{N}$, tenemos que

$$k - j \leq Nt - j + 1 \leq k - j + 1$$

y dado que $j \geq k$, tomando módulo queda

$$|Nt - j + 1| \leq \text{máx}(j - k, 1).$$

Entonces en (1.3) queda

$$
\begin{aligned}
|\phi_a(t) - \phi_b(t)| &\leq \sum_{j=k}^{N} \frac{\text{máx}(j - k, 1)|a_j - b_j|}{N^{j+1}} \\
&\leq \frac{N-1}{N^{k+1}} \sum_{j=k}^{N} \frac{\text{máx}(j - k, 1)}{N^{j-k}} \\
&\leq 2\frac{N-1}{N^{k+1}} < \frac{2}{N^k} \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Podemos definir entonces los intervalos $\{I_j\}_{j=1}^{N^{k-1}}$ tales que para cada clase de equivalencia $[\mathcal{A}_N]_j$ en $\mathcal{A}_N$ el intervalo I_j contenga a todos sus elementos. Por la desigualdad (1.4) sabemos que esos intervalos pueden elegirse de longitud $\frac{2}{N^k}$. ■

Volvemos ahora a la demostración del Teorema 1.2.4. Para construir el G-set E de medida menor que ε, fijamos primero $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{4}{N} < \varepsilon$. Definimos (recordar la definición de S_ℓ^δ)

$$E_N = \bigcup_{a \in \mathcal{A}_N} S_{\ell_a}^{(N^{-N})}$$

Notar que E es compacto pues es unión finita de conjuntos compactos. Dado que $a \in \mathcal{A}_N$, por la Observación 1.2.3 sabemos que E_N contiene segmentos con cualquier pendiente entre 0 y 1 pues contiene a ℓ_a para todo $a \in \mathcal{A}_N$. Ahora, por el Lema 1.2.5 tenemos que para cada $t \in [0, 1]$ la sección $(E_N)_t$

puede cubrirse con N^{k-1} intervalos de longitud $2N^{-k}+2N^{-N} \leq 4N^{-k}$ (pues el conjunto $S_{\ell_a}^{(N^{-N})}$ tiene un "ancho vertical" de $2N^{-N}$). Es claro entonces que $|E_N| \leq \frac{4}{N} < \varepsilon$. Tomamos $E = E_N$ y esto concluye la demostración del Teorema 1.2.4. ∎

Veamos ahora que podemos "pasar a límite" y construir un conjunto de Kakeya de medida cero.

Definición 1.2.6 *Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ definimos el δ-entorno de E como*

$$E^\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) < \delta\} \tag{1.5}$$

Lema 1.2.7 *Sea F un G-set, $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$. Existe un conjunto H que es un G-set contenido en el ε-entorno de F y de medida menor que η.*

Demostración: Notamos con F^δ el δ-entorno abierto de F. Sea $\delta < \varepsilon$ y K un entero tal que $K = \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor$. Como F es un G-set, podemos elegir un conjunto de números $\{m_j\}_{j=0}^K = \{j\delta\}_{j=0}^K$ tal que para cada j existe un segmento

$$\ell_j = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = m_j x + b_j\}$$

contenido en F con pendiente m_j que une las rectas $x = 0$ y $x = 1$. Consideramos el paralelogramo $S_{\ell_j}^\delta$ y la aplicación

$$A_j : [0, 1] \times [-1, 1] \to S_{\ell_j}^\delta$$

definida por

$$A_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_j & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_j \end{pmatrix}.$$

Observemos que de la definición se deduce inmediatamente que la aplicación A_j reduce medidas en un factor δ, pues el determinante de la matriz es δ. Otra propiedad de A_j que vamos a usar es que transforma segmentos de pendiente μ en segmentos de pendiente $m_j + \delta\mu$

Tomamos ahora $N > \frac{(K+1)4\delta}{\varepsilon}$ y usamos el conjunto E_N definido como en el Teorema 1.2.4. Si definimos

$$H = \bigcup_{j=0}^{K} A_j(E_N)$$

tenemos en H al conjunto buscado: H es compacto pues E_N es compacto y las aplicaciones A_j son todas continuas. H es un G-set, pues tiene segmentos con pendientes entre 0 y $m_{K+1} = (\lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor + 1)\delta \geq \frac{1}{\delta}\delta = 1$. Como la imagen de

A_j está contenida en $S^{\delta}_{\ell_j} \subseteq F^{\delta}$ entonces $H \subseteq F^{\varepsilon}$. Finalmente, para la medida de H tenemos que

$$|H| \leq \sum_{j=0}^{K} |A_j(E_N)| \leq \sum_{j=0}^{K} \delta \frac{4}{N} = \frac{1}{N}(K+1)4\delta < \varepsilon$$

pues tomamos $N > \frac{(K+1)4\delta}{\varepsilon}$ ■

Teorema 1.2.8 *Existen conjuntos de Kakeya de medida cero en* $\mathbb{R}^2$.

Demostración: Vamos a contruir una sucesión de G-sets $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ y una sucesión numérica $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfacen *simultáneamente* las siguientes condiciones:

1. Sea $F_n^{e_n} \subseteq F_{n-1}^{e_{n-1}}$
2. $|\overline{F_n^{e_n}}| < \frac{1}{2^n}$

Construimos inductivamente la sucesión de la siguiente manera:

Tomamos como F_0 cualquier G-set y ponemos $e_0 = 1$. Una vez definidos F_{n-1} y e_{n-1} podemos construir F_n gracias al Lema 1.2.7 con $\varepsilon = e_{n-1}$ y $\eta = \frac{1}{2^n}$. Como F_{n-1} es compacto, si tomamos e_n suficientemente chico podemos asegurar que $F_n^{e_n} \subseteq F_{n-1}^{e_{n-1}}$ pues la distancia entre F_n y el complemento de $F_{n-1}^{e_{n-1}}$ es positiva y que $|\overline{F_n^{e_n}}| < 2^{-n}$ pues $|F_n| < 2^{-n}$ por construcción. Definimos ahora el conjunto

$$H = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{F_n^{e_n}}$$

Veamos que H es un conjunto de medida cero que contiene un segmento de longitud 1 para cada pendiente $m \in [0, 1)$.

- $H \neq \emptyset$ pues es la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos compactos (los $\overline{F_n^{e_n}}$).
- $|H| = \lim_{k\to\infty} |\bigcap_{n=0}^{k} \overline{F_n^{e_n}}| \leq \lim_{k\to\infty} |\overline{F_n^{e_n}}| = 0$
- H contiene un segmento de longitud 1 para cada pendiente entre 0 y 1: sea $m \in [0, 1)$. Sea $\ell_n(t) = mt + b_n$ un segmento de pendiente m contenido en F_n. Como $\{\ell_n(1)\}_{n\geq 0}$ es una sucesión contenida en

$$H_1 = \{(x, y) \in H : x = 1\}$$

que es compacto pues H lo es, tenemos que hay una subsucesión de $\{\ell_n(1)\}_{n\geq 0}$ convergente. Sea $\{\ell_{n_k}(1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ esa subsucesión. Dado que $\ell_{n_k}(1) = m + b_{n_k}$ tenemos que b_{n_k} converge, digamos, a b. Consideramos el segmento

$$\ell(t) = mt + b$$

Veamos que para todo $t \in [0,1)$ tenemos que $\ell(t) \in H$. La sucesión $\{F_{n_k}^{e_{n_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos, de modo que el segmento ℓ_{n_k} está contenido en $F_{n_j}^{e_{n_j}}$ para todo $k \geq j$. Como $\overline{F_{n_j}^{e_{n_j}}}$ es cerrado, tenemos que para todo $t \in [0,1)$ el punto $\ell(t)$ está en $\overline{F_{n_j}^{e_{n_j}}}$. Por lo tanto el segmento $\ell(t) = mt + b$ está en $\overline{F_{n_j}^{e_{n_j}}}$ para todo j y entonces está contenido en H.

Para terminar la construcción del conjunto de Kakeya de medida cero, basta tomar cuatro copias congruentes del conjunto H de tal manera que contengan segmentos de longitud 1 con cualquier pendiente $e \in \mathbb{S}^1$.

■

Es fácil ahora conseguir conjuntos de Kakeya de medida cero en $\mathbb{R}^n$. Basta tomar el producto de un conjunto de Kakeya de medida cero en $\mathbb{R}^2$ y un disco cerrado de radio $\frac{1}{2}$ en $\mathbb{R}^{n-2}$.

Corolario 1.2.9 *Existen conjuntos de Kakeya de medida cero en* $\mathbb{R}^n$

Demostración: Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto de Kakeya de medida cero. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^{n-2}$ la bola cerrada centrada en el origen de radio $\frac{1}{2}$. Afirmamos que el conjunto $E = K \times B$ es un conjunto de Kakeya de medida cero en $\mathbb{R}^n$. Es evidente que la medida de E es cero pues la medida de K es cero. Veamos que E contiene un segmento en cada dirección. Dada una dirección $e \in \mathbb{S}^{n-1}$, escribimos

$$e = (e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$$

Si $(e_1, e_2) = (0,0)$ el resultado es inmediato. Si no, por hipótesis sobre K, sabemos que existe un segmento unitario $I_e \subseteq K$ en dirección $(e_1, e_2) \in \mathbb{S}^1$. Podemos escribir al segmento I_e como

$$I_e = \{(a_1, a_2) + t(e_1, e_2) : t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$$

con $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Como el conjunto $I_e \times B$ esta contenido en E, el segmento

$$J_e = \{(a_1, a_2, 0, ..., 0) + t(e_1, e_2, e_3, ..., e_n) : t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$$

está contenido en E y claramente está en la dirección e. ■

1.3. Generalizaciones

Existen numerosas generalizaciones y variantes del problema de Kakeya. El problema general consiste en estudiar la existencia de conjuntos en $\mathbb{R}^2$ de medida cero que contengan una traslación o una copia congruente de cada miembro de una cierta familia de figuras. Está claro que estamos considerando sólo el borde de las figuras. Es decir, si hablamos de rectánglos, por ejemplo, nos referimos a la unión de los cuatro segmentos que forman su borde. Citamos algunos ejemplos y resultados sorprendentes[1]:

1. La primera generalización es considerar rectas en lugar de segmentos en la definición del conjunto de Kakeya. En [Fal86] se puede encontar la demostración de que existen subconjuntos del plano de medida cero que contienen una recta en cada dirección.

2. Si consideramos el caso de rectángulos en el plano tenemos el siguiente resultado de Kinney ([Kin68]): El conjunto de Cantor[2] E es de medida cero en la recta. Además se puede probar que dado cualquier $\lambda \in (0,1)$ existen $x, y \in E$ tales que $|x - y| = \lambda$. Entonces el conjunto

$$H = (E \times [0,1]) \cup ([0,1] \times E)$$

   es de medida cero en $\mathbb{R}^2$ y contiene copias congruentes de cualquier rectángulo de lados de longitud menor que 1. Tomando una unión numerable de copias semejantes de H obtenemos un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^2$ que contiene una copia de cada rectángulo.

3. Un problema de similar estilo es construir un conjunto de Nikodym, es decir, un subconjunto F del cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$ de medida 1 tal que para cada $x \in F$ exista una recta que interseque a F sólo en x. La construcción original de Nikodym de 1927 fue mejorada por Davies que mostró que es posible incluso encontrar un conjunto de Nikodym pero de tal modo que por cada punto pasa una cantidad no numerable de rectas en las condiciones mencionadas. También probó que dado cualquier conjunto de $\mathbb{R}^2$ de medida finita existe otro conjunto de la misma medida que lo contiene y que es una unión de rectas. De la misma naturaleza sorprendente es el siguiente resultado de Larman: existe una colección $\{I_j\}_{j \in J}$ de segmentos congruentes al segmento $[0,1]$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $|\bigcup_{j \in J} I_j| > 0$ y $|\bigcup_{j \in J} \tilde{I}_j| = 0$, donde notamos con $\tilde{I}_j$ al segmento I_j luego de quitarle sus extremos. Es decir, la medida de la

[1] para más detalles, ver [Fal86]

[2] en el Capítulo 2 se hace la construcción de este conjunto

unión está concentrada en los extremos de los intervalos.
Con respecto a estos conjuntos, comentamos que en [Bou91] se da la siguiente definición de conjunto de Nikodym: Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice de Nikodym si tiene medida cero y para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe un segmento L centrado en x tal que $L\backslash\{x\} \subset A$. La conjetura (cierta para el caso de $\mathbb{R}^2$) es si la dimensión[3] de un conjunto de Nikodym en $\mathbb{R}^n$ debe ser n. Notemos que si sólo estuviéramos considerando el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$ un conjunto de Nikodym con esta última definición sería exactamente el complemento de un conjunto de Nikodym con la definición dada más arriba. La definición de Bourgain parece ser la más adecuada para tratar la conjetura con las técnicas más recientes del análisis armónico, tales como las formulaciones maximales de todos estos problemas que desarrollaremos en el Capítulo 4.

4. Besicovitch & Rado, Kinney mostraron que existen conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^2$ que contienen círculos de cualquier radio.

5. Conjuntos de (n,k)-Besicovitch. Decimos que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de (n,k)-Besicovitch si tiene medida de Lebesgue cero (n-dimensional) y contiene una traslación de cada subespacio k-dimensional de $\mathbb{R}^n$. El punto 1 asegura que existen los conjuntos de $(2,1)$-Besicovitch y se extiende inmediatamente a conjuntos de $(n,1)$-Besicovitch considerando el producto de $\mathbb{R}^{n-2}$ con un conjunto de $(2,1)$-Besicovitch. El caso $(3,2)$ está estudiado en [Fal86] donde se demuestra usando dualidad y proyecciones que no existen los conjuntos de $(3,2)$-Besicovitch. El caso general está abierto (se recomienda [Fal86] para una descripción breve y [Bou91] para una prueba de la no existencia de conjuntos de (n,k)-Besicovitch en el caso $n \leq 2^{k-1} + k$).

Con el Teorema 1.2.8 quedó completamente resuelta la cuestión acerca del "tamaño" de los conjuntos de Kakeya en relación a la noción de medida. Sin embargo, no resuelve satisfactoriamente otro tipo de formulación de la idea de tamaño de un conjunto en $\mathbb{R}^n$. Una versión más cuantitativa del problema de compresión de segmentos puede conseguirse introduciendo una discretización espacial. Por ejemplo, reemplazar los segmentos por δ-tubos (tubos de largo 1 y sección transversal de radio δ) con $0 < \delta \ll 1$ y preguntarse por la compresión óptima de dichos tubos. Otra posibilidad es estimar cotas para el volumen de un δ-entorno de un conjunto de Kakeya. Para tratar estos problemas es necesario considerar el concepto de dimensión de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. En la siguiente sección se da un resumen de las definiciones y resultados necesarios.

[3]En el Capítulo 2 desarrollaremos el concepto de dimensión.

Capítulo 2

Conjetura "H" de Kakeya en $\mathbb{R}^2$

En esta sección introducimos las definiciones y resultados necesarios acerca de la dimensión de Hausdorff de un conjunto en $\mathbb{R}^n$. Algunos de los teoremas no serán demostrados aquí pues son resultados clásicos de la teoría de la medida. Pueden encontrarse las pruebas en [Fal86] o en [Rog70].

2.1. Medida y dimensión de Hausdorff

Comenzamos con algunas definiciones básicas y algo de notación.

Dado un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos el diámetro de U como

$$\operatorname{diam}(U) = \sup\{|x - y| : x, y \in U\} \tag{2.1}$$

Si E es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que $E \subset \bigcup_i U_i$ y $\operatorname{diam}(U_i) < \delta$ $(\delta > 0)$ decimos que $\{U_i\}_i$ es un δ-cubrimiento de E.

Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y s un número real no negativo. Para cada $\delta > 0$ definimos

$$H^s_\delta(E) = \text{ínf} \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(U_i))^s \tag{2.2}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los δ-cubrimientos numerables de E. Notar que como todo conjunto está contenido en un conjunto convexo de igual diámetro, en la definición de H^s_δ puede asumirse que el cubrimiento está formado por conjuntos convexos. Argumentos de rutina de la teoría de la medida muestran que H^s_δ es una medida exterior. Observemos que para s y E fijos, a medida que δ decrece $H^s_\delta(E)$ crece. Esto es así pues si $\delta_1 < \delta_2$ entonces cualquier δ_1-cubrimiento de E es también un δ_2- cubrimiento, de manera que el ínfimo se toma sobre familias cada vez más chicas, por lo que resulta cada vez más grande. Entonces el siguiente límite existe (puede ser

infinito) y permite definir

$$H^s(E) := \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(E) = \sup_\delta H^s_\delta(E) \tag{2.3}$$

para obtener la *medida exterior de Hausdorff s-dimensional* $H^s(E)$. Notar que para $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tenemos que $0 \leq H^s(E) \leq \infty$ y que puede ocurrir también que sea 0 o ∞. Otra vez es de rutina ver que H^s es una medida exterior y no lo haremos. Lo que sí mostramos es que es una medida exterior métrica.

Lema 2.1.1 *H^s es una medida exterior métrica. Es decir, si E y F son conjuntos separados por una distancia $\eta > 0$ entonces*

$$H^s(E \cup F) = H^s(E) + H^s(F).$$

Demostración: Sean E y F dos conjuntos separados por una distancia $\eta > 0$. Entonces, para todo $0 < \delta < \eta$, ningún conjunto en un δ-cubrimiento de $E \cup F$ puede intersecar a E y a F al mismo tiempo. Más precisamente, dado un δ-cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de $E \cup F$ con $0 < \delta < \eta$ podemos elegir una partición de $I = I_1 \cup I_2$ tal que

$$E \subseteq \bigcup_{i \in I_1} U_i \quad \text{y} \quad F \subseteq \bigcup_{i \in I_2} U_i$$

y entonces como

$$\text{ínf} \sum_{i \in I} (\text{diam}(U_i))^s \;\; = \;\; \text{ínf} \sum_{i \in I_1} (\text{diam}(U_i))^s + \text{ínf} \sum_{i \in I_2} (\text{diam}(U_i))^s$$

tenemos que

$$H^s_\delta(E \cup F) = H^s_\delta(E) + H^s_\delta(F)$$

para todo $0 < \delta < \eta$ y en el límite obtenemos la misma igualdad para H^s.

■

De este lema se deduce que la σ-álgebra de conjuntos H^s-medibles contiene a los conjuntos borelianos (en particular los conjuntos de tipo G_δ y F_σ son H^s-medibles). La restricción de H^s a esta σ-álgebra nos da la *medida de Hausdorff s-dimensional*.

Definición 2.1.2 *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un s-set si es H^s-medible y además $0 < H^s(E) < \infty$.*

Otro resultado que enunciamos sin demostración y que vamos a usar es el siguiente:

Lema 2.1.3 *H^s es una medida exterior regular: dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ existen conjuntos G y F de tipo G_δ y F_σ respectivamente tales que*

$$F \subseteq E \subseteq G \quad y \quad H^s(F) = H^s(E) = H^s(G)$$

Estamos ahora en condiciones de definir la dimensión de Hausdorff.

Lema 2.1.4 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto. Si $0 < s < t$ entonces*

1. $H^t_\delta(E) \leq \delta^{t-s} H^s_\delta(E)$
2. Si $H^t(E) > 0$ entonces $H^s(E) = \infty$
3. Si $H^s(E) < \infty$ entonces $H^t(E) = 0$

Demostración: Para el punto 1 basta escribir las definiciones de H^s y H^t:

$$H^t_\delta(E) = \text{ínf} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^t = \text{ínf} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s \, (\text{diam}(U_i))^{t-s} \leq \delta^{t-s} H^s(E)$$

El punto 2 se obtiene a partir de 1 haciendo $\delta \to 0$ y el punto 3 es inmediato a partir de 2. ∎

Tenemos entonces dos posibilidades para cada conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si vale que $H^s(E) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}_{>0}$ diremos que el conjunto E tiene dimensión cero. Si no, por el Lema 2.1.4 existe un único número d tal que

$$H^s(E) = \infty \quad \forall\, 0 < s < d \quad \text{y} \quad H^s(E) = 0 \quad \forall\, d < s < \infty.$$

Vamos a llamar *dimensión de Hausdorff* de E a ese número d y lo notamos: $\dim_H(E)$. Una definición equivalente que puede resultar útil para probar algunas propiedades es la siguiente: en el caso de que el conjunto

$$A = \{s \in \mathbb{R} : H^s(E) = \infty\}$$

sea no vacío, definimos $\dim_H(E) := \sup(A)$ (esta definición tiene sentido si el conjunto A está acotado, cosa que siempre es cierta y que se prueba en la Proposición 2.1.5).

Veamos algunas propiedades de $\dim_H(E)$.

Proposición 2.1.5 *Valen las siguientes propiedades*

1. Si $E \subseteq F$ entonces $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$

2. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de conjuntos tales que para cada $i \in \mathbb{N}$ vale que $\dim_H(E_i) = d_i$. Entonces $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = d = \sup\{d_i\}$

3. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $\dim_H(E) \leq n$

4. $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$

5. Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto con $\dim_H(E) = s$ entonces existe un conjunto G de tipo G_δ tal que $E \subseteq G$ y $\dim_H(G) = s$

Demostración: Para el punto 1 basta usar que la misma desigualdad es válida para las medidas H^s. Para el punto 2 calculamos el valor de $H^s(E)$ con $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ distinguiendo dos casos:

1. si $s > d$ entonces $H^s(E_i) = 0$ para todo i y entonces

$$H^s(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(E_i) = 0$$

   y por lo tanto $\dim_H(E) \leq s$ para todo $s > d$, lo que implica que $\dim_H(E) \leq d$

2. si $s < d$ entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_{i_0} > s$. Para ese i_0 vale que $H^s(E_{i_0}) = \infty$ y por el punto 1 tenemos que como $E_i \subseteq E$ entonces

$$\infty = H^s(E_i) \leq H^s(E)$$

   y de ahí que $\dim_H(E) \geq s$ para todo $s < d$, lo que implica que $\dim_H(E) \geq d$.

Para el punto 3, notar que el punto 1 permite afirmar que basta probar que $\dim_H(\mathbb{R}^n) \leq n$. Ahora, si usamos la propiedad 2 en el caso particular en que $d_i = d$ para todo $i \in \mathbb{N}$, resulta que basta probar que si $C = [0,1]^n$ entonces $\dim_H(C) \leq n$. Para probar esto último, veamos que $H^n(C) < \infty$. Sea $\delta > 0$. Dividimos el cubo unitario en k^n cubitos de lado $\frac{1}{k}$ de la manera obvia de modo que cada uno de ellos tiene diámetro menor o igual que $\frac{1}{k}\sqrt{n}$. Podemos tomar k de tal modo que $\delta \geq \frac{1}{k}\sqrt{n}$. Entonces, por la definición de H^n_δ vale que

$$H^n_\delta(C) \leq \sum_{i=1}^{k^n} \left(\frac{1}{k}\sqrt{n}\right)^n = k^n \left(\frac{1}{k}\sqrt{n}\right)^n = \sqrt{n}^n < \infty$$

y esta acotación no depende de δ, de manera que $H^n(C) < \infty$. Por lo tanto, para todo $s > n$ tenemos que $H^s(C) = 0$ y entonces $0 \leq \dim_H(C) \leq n$.

Veamos el punto 4. Ya sabemos que $\dim_H(\mathbb{R}^n) \leq n$. Argumentamos igual que en el punto 3 y probamos que $\dim_H(C) \geq n$ con $C = [0,1]^n$. Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un δ-cubrimiento. Como $\operatorname{diam}(U_i) \leq \delta$ podemos encontrar para cada U_i un cubo Q_i tal que $U_i \subseteq Q_i$ y de lado igual al diámetro de U_i. Entonces $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ y

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(U_i))^n = \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{vol}(Q_i)) \geq \operatorname{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right) \geq \operatorname{vol}(C) = 1$$

Tenemos entonces que $H^n_\delta(C) \geq 1$ para todo $\delta > 0$ y por lo tanto $H^n(C) > 0$. Concluimos que $\dim_H(C) \geq n$ y de ahí que $\dim_H(\mathbb{R}^n) \geq n$. Finalmente, para el punto 5. basta usar el Lema 2.1.3. ∎

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que todo conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de interior no vacío tiene dimensión de Hausdorff n pues contiene un cubo de volumen positivo y podemos aplicar razonamientos análogos a los del punto 4. de la Proposición 2.1.5. Esto muestra que la dimensión de Hausdorff respeta la idea intuitiva de que los conjuntos "gorditos" en $\mathbb{R}^n$ deben tener la misma dimensión del espacio ambiente. Más aún, esto vale para todos los conjuntos de medida de Lebesgue n-dimensional positiva. Es claro que las medidas de Lebesgue y Hausdorff 1-dimensionales coinciden sobre $\mathbb{R}$ y si $n > 1$ tenemos que satisfacen la relación[1]:

$$|E| = c_n H^n(E)$$

donde c_n es el volumen de la bola de diámetro 1 en $\mathbb{R}^n$. De esta relación se deduce que si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue positiva (podría ser infinita), entonces $0 < H^n(E) \leq \infty$ y por lo tanto tiene dimensión de Hausdorff al menos n. Como no puede exceder este valor, resulta que $\dim_H(E) = n$. Ilustramos ahora con algunos ejemplos:

El conjunto ternario de Cantor

Considerar la siguiente familia de subconjuntos del intervalo $[0,1]$:

[1] Para la demostración ver [Fal86]

$$
\begin{aligned}
F_0 &= [0,1] \\
F_1 &= \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right] \\
F_2 &= \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9};\frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right] \\
F_3 &= \left[0,\frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27};\frac{3}{27}\right] \cup \left[\frac{6}{27},\frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27},\frac{9}{27}\right] \cup \left[\frac{18}{27};\frac{19}{27}\right] \cup \\
&\quad \cup \left[\frac{20}{27},\frac{21}{27}\right] \cup \left[\frac{24}{27},\frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27},1\right]
\end{aligned}
$$

Cada conjunto F_j se obtiene dividiendo cada intervalo de F_{j-1} en tres partes y removiendo el intervalo abierto central. En la Figura 2.1 se muestran los primeros 4 pasos.

Figura 2.1: Conjunto ternario de Cantor

Cada conjunto F_j consta de 2^j intervalos de longitud 3^{-j}. El conjunto ternario de Cantor se define como

$$C = \bigcap_{j=0}^{\infty} F_j$$

que resulta ser un conjunto perfecto. Notar que el conjunto C es, salvo un conjunto numerable de puntos, el conjunto de los números reales en el intervalo $[0,1]$ cuya expansión decimal en base 3 no requiere el uso del dígito 1. Otra observación útil es que si tomamos dos intervalos cualesquiera en esta construcción (eventualmente de distintos F_j) son disjuntos o están contenidos uno en el otro.

Teorema 2.1.6 *Sea C el conjunto ternario de Cantor. La dimensión de Hausdorff de C es $\frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2$.*

Demostración: Sea $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. Veamos primero que $H^s(C) \leq 1$. Como el conjunto C puede ser cubierto con los 2^j intervalitos de longitud 3^{-j} que

forman al conjunto F_j para cualquier valor de j, vemos que

$$H^s_{3^{-j}}(C) \leq 2^j 3^{-js} = 2^j 2^{-j} = 1$$

y haciendo tender j a infinito, tenemos que $H^s(C) \leq 1$ y por lo tanto $\dim_H(C) \geq s$. Veamos ahora que $H^s(C) > 0$. Más precisamente, veremos que $H^s(C) \geq 1$. Tenemos que probar que si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de C por intervalos entonces

$$1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s \tag{2.4}$$

(pues si vale esto entonces $H^s_\delta(C) \geq 1$ para algún δ y de ahí deducimos que $H^s(C) \geq 1$). Bastará probar (2.4) para cualquier colección *finita* de intervalos pues podemos hacer la siguiente reducción: sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un δ-cubrimiento por intervalos arbitrario y $\varepsilon > 0$ fijo. Podemos definir $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un δ-cubrimiento asociado a $\mathcal{U}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, $\widetilde{U}_i$ es un intervalo *abierto,* $U_i \subseteq \widetilde{U}_i$ y

$$\left(\text{diam}(\widetilde{U}_i)\right)^s < (\text{diam}(U_i))^s + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Como C es compacto, podemos elegir finitos $N = N(\varepsilon)$ intervalos tales que

$$C \subseteq \bigcup_{k=1}^{N(\varepsilon)} \widetilde{U}_{i_k}$$

Usamos ahora la hipótesis de la reducción y tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(\text{diam}(\widetilde{U}_{i_k})\right)^s \\ &< \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(\text{diam}(U_{i_k})^s + \frac{\varepsilon}{2^{i_k}}\right) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \text{diam}(U_{i_k})^s \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s. \end{aligned}$$

Dado que ε es arbitrario, concluimos que

$$1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s .$$

Hacemos ahora otra reducción similar que nos permite suponer que los extremos de los finitos intervalos $U_1, ..., U_N$ son puntos del complemento de

C. Supongamos que en dicha situación tenemos probada la cota (2.4). Sea $\varepsilon > 0$. Si los extremos de U_i caen fuera de C no hay nada que hacer. Si no, como todos los puntos de C están en F_j para todo $j \in \mathbb{N}$, tenemos la posibilidad de encontrar dos intervalos de F_j que contengan a cada uno de los extremos de U_i y que sean de longitud tan chica como se desee. Por lo tanto, fijada cualquier cantidad $\eta > 0$, podemos desplazar los extremos de U_i en menos que η y dejarlos fuera de C.

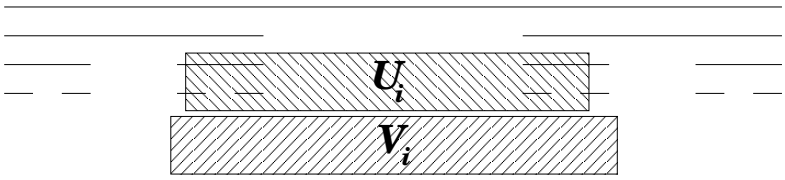

Figura 2.2: Los intervalos V_i tienen sus extremos fuera de C y son apenas más grandes que los U_i.

Con esto podemos conseguir otra colección finita de intervalos $\{V_i\}_{i=1}^N$ tales que $U_i \subseteq V_i$ y

$$(\text{diam}(V_i))^s < (\text{diam}(U_i))^s + \frac{\varepsilon}{N}$$

por la hipótesis de esta reducción, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{k=1}^{N} (\text{diam}(V_i))^s \\ &< \sum_{k=1}^{N} \Big(\text{diam}(U_i) + \frac{\varepsilon}{N}\Big) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{N} \text{diam}(U_i)^s \end{aligned}$$

y como ε es arbitrario, concluimos que

$$1 \leq \sum_{k=1}^{N} \text{diam}(U_i)^s.$$

Hechas estas reducciones, basta probar la cota (2.4) para un cubrimiento finito de C por intervalos cuyos extremos caen todos fuera de C. En esta situación, resulta que cada intervalo U_i puede asumirse de la forma

$$U_i = I \cup K \cup I'. \tag{2.5}$$

con K un intervalo en el complemento de C y donde los intervalos I e I' son los más grandes contenidos en U_i. Por ejemplo, si U_i fuera el intervalo $[0, \frac{22}{27}]$ contiene a los intervalos $[0, \frac{1}{3}] \subseteq F_1$ y $[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \subseteq F_2$. Reemplazamos en este caso a U_i por el intervalo $[0, \frac{7}{9}]$. Hechas todas estas observaciones, tenemos que en la descomposición hecha en (2.5) se cumple que

$$\operatorname{diam}(I) \leq \operatorname{diam}(K) \quad \text{y} \quad \operatorname{diam}(I') \leq \operatorname{diam}(K)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(\operatorname{diam}(U_i))^s &= (\operatorname{diam}(I) + \operatorname{diam}(K) + \operatorname{diam}(I'))^s \\
&\geq \left(\operatorname{diam}(I) + \frac{1}{2}(\operatorname{diam}(I) + \operatorname{diam}(I')) + \operatorname{diam}(I')\right)^s \quad (2.6) \\
&= \left(\frac{3}{2}(\operatorname{diam}(I) + \operatorname{diam}(I'))\right)^s \\
&= 2\left(\frac{1}{2}(\operatorname{diam}(I) + \operatorname{diam}(I'))\right)^s \quad (2.7) \\
&\geq 2\frac{1}{2}\left((\operatorname{diam}(I))^s + (\operatorname{diam}(I'))^s\right) \quad (2.8) \\
&= (\operatorname{diam}(I))^s + (\operatorname{diam}(I'))^s,
\end{aligned}$$

donde usamos en (2.6) que para cualquier intervalo del conjunto F_j vale que el segmento medio extraido mide 3^{-j+1}, al igual que los dos restantes (que es el caso extremo en el que los dos intervalos I e I' considerados fueran iguales). En (2.7) usamos que $3^s = 2$ y en (2.8) que la función $\varphi(t) = t^s$ es cóncava pues $s < 1$.

Después de finitos pasos, podemos reemplazar cada U_i en (2.4) por intervalos de longitud 3^{-j_0} sin incrementar el valor de la suma. Estos intervalos siguen siendo un cubrimiento, de manera que deben estar todos los intervalos que forman a F_{j_0}, de modo que

$$1 = \sum_{\ell=1}^{2^{j_0}} 3^{-j_0 s} \leq \sum_{k=1}^{N} (\operatorname{diam}(U_I))^s.$$

La misma cota debe valer para el cubrimiento $\mathcal{U}$ original y concluimos que

$$H^s(C) = 1$$

con $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. Entonces, $\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$. ∎

2.2. Dimensión de los conjuntos de Kakeya

En el capítulo anterior resolvimos la primera versión de la conjetura de Kakeya al construir un subconjunto del plano de medida de Lebesgue cero que contiene un segmento de longitud 1 en cada dirección. Ahora que hemos desarrollado otra idea más delicada acerca del "tamaño" de un conjunto en $\mathbb{R}^n$ es razonable enunciar una nueva versión de la conjetura en términos de la dimensión de Hausdorff:

Conjetura H:

La dimensión de Hausdorff de un conjunto de Kakeya $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es n

En esta sección desarrollaremos los resultados obtenidos en los años 1950-1970 por Marstrand ([Mar54a, Mar54b]), Davies ([Dav71]) y Falconer ([Fal86]) con respecto a la conjetura en el caso de dimensión 2. Estos resultados se basan en propiedades de las proyecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ sobre rectas y en el "principio de dualidad".

2.2.1. Proyecciones

Definición 2.2.1 *Dado $\theta \in [0, \pi)$ notamos con L_θ a la recta de $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen y forma un ángulo θ con el eje x. Notamos con $proy_\theta$ a la proyección ortogonal sobre dicha recta.*

Definición 2.2.2 *Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y un número $\alpha > 0$, decimos que f satisface una condición de Lipschitz-α si existe una constante $c > 0$ tal que para cualquier par de puntos x,y vale*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

Lema 2.2.3 *Sean E y F conjuntos H^s- medibles y sea $\psi : E \to F$ una transformación sobreyectiva Lipschitz-1 de constante $c > 0$. Entonces $H^s(F) \leq c^s H^s(E)$.*

Demostración: Si $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un δ-cubrimiento de E entonces para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\text{diam}(\psi(E \cap U_i)) \leq c\text{diam}(U_i) \leq c\delta$$

entonces $\{\psi(E \cap U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un $c\delta$-cubrimiento de F y por lo tanto

$$H^s_{c\delta}(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(\psi(E \cap U_i))^s \leq c^s \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s$$

y como $H^s_\delta(E)$ es un ínfimo tenemos que

$$H^s_\delta(E)c^s \geq H^s_{c\delta}(F).$$

Haciendo $\delta \to 0$ obtenemos

$$H^s(E)c^s \geq H^s(F).$$

■

Corolario 2.2.4 *Sean E y F dos conjuntos y sea $\psi : E \to F$ una transformación sobreyectiva Lipschitz de constante $c > 0$. Entonces*

$$dim_H(F) \leq dim_H(E)$$

Demostración: Es inmediato pues si $\dim_H(E) = d$ entonces para todo $s > d$ tenemos que $H^s(E) = 0$ y usando la proposición obtenemos que

$$H^s(F) \leq c^s H^s(E) = 0$$

para todo $s > d$. Concluimos que $\dim_H(F) \leq d = \dim_H(E)$ ■

Como las proyecciones ortogonales no aumentan las distancias (son transformaciones Lipschitz de constante 1) tenemos el siguiente corolario inmediato.

Corolario 2.2.5 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y S un subespacio. Si $\Pi_S : \mathbb{R}^n \to S$ es la proyección ortogonal sobre S entonces $dim_H(\Pi_S(E)) \leq dim_H(E)$.*

Otro corolario útil, sobre la dimensión de conjuntos semejantes, es el siguiente:

Corolario 2.2.6 *Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ semejantes entre sí. Entonces $dim_H(A) = dim_H(B)$*

Demostración: Sea $G : A \to B$ la transformación asociada a la relación de semejanza entre los conjuntos A y B. Entonces tanto G como G^{-1} son transformaciones Lipschitz. Más precisamente, existe $c > 0$ tal que

$$\|G(x) - G(y)\| = c\|x - y\|$$

y

$$\|G^{-1}(x) - G^{-1}(y)\| = \frac{1}{c}\|x - y\|$$

Si usamos ahora el Corolario 2.2.4 para G y para G^{-1} obtenemos

$$\dim_H(B) \leq \dim_H(A) \qquad \text{y} \qquad \dim_H(A) \leq \dim_H(B)$$

de modo que $\dim_H(A) = \dim_H(B)$ ■

El siguiente teorema es el resultado fundamental acerca de las proyecciones ortogonales de los s-sets en $\mathbb{R}^2$. En este teorema, "para casi todo θ" se refiere a la medida de Lebesgue. Las demostraciones de estos resultados pueden encontrarse en [Fal86] o en [Mar54a, Mar54b].

Teorema 2.2.7 *Sea E un conjunto boreliano de $\mathbb{R}^2$ tal que $dim_H(E) = s$*

1. Si $s \leq 1$ entonces $\dim_H(\text{proy}_\theta(E)) = s$ para casi todo $\theta \in [0, \pi)$.
2. Si $s > 1$ entonces $|\text{proy}_\theta(E)| > 0$ para casi todo $\theta \in [0, \pi)$.

Otro resultado que necesitaremos es el siguiente teorema sobre secciones de un conjunto de $\mathbb{R}^2$

Teorema 2.2.8 *Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $M_x = \{(a, b) \in M : a = x\}$ la sección respecto de x y A cualquier subconjunto del eje x. Si para cada $x \in A$ vale que $H^t(M_x) > C$ para alguna constante C entonces existe $b > 0$ tal que*

$$H^{s+t}(M) \geq bCH^s(A)$$

donde b depende sólo de s y t.

2.2.2. Dualidad

El objetivo de esta sección es presentar las ideas básicas de dualidad usadas por Besicovitch y Falconer para tratar el problema de Kakeya. La idea principal es parametrizar rectas por puntos de tal modo que dado un conjunto E, la proyección de E en una dirección resulta semejante a la intersección del conjunto de rectas parametrizadas por E con una determinada recta asociada a la dirección elegida para proyectar. Luego, es posible estudiar la dimensión de este conjunto de líneas a través de las proyecciones de E en distintas direcciones.

Empezamos con algunas definiciones y notación. Dado un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, notamos con $L(a, b)$ a la recta de ecuación $y = a + bx$. Si E es un conjunto, notamos con $L(E)$ al conjunto de todas las rectas definidas por los elementos de E:

$$L(E) = \bigcup_{(a,b)\in E} L(a, b) \tag{2.9}$$

Dado $c \in \mathbb{R}$ definimos $L_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = c\}$. Tenemos entonces las siguientes propiedades:

$$L(a, b) \cap L_c = (c, a + bc) = (c, \langle (a, b), (1, c) \rangle)$$

y entonces

$$L(E) \cap L_c = \{(c, \langle (a, b), (1, c) \rangle) : (a, b) \in E\}.$$

Por otro lado, dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que para $c = \tan\theta$ la proyección de (a, b) sobre L_θ es

$$\text{proy}_\theta((a, b)) = \langle (a, b), (1, c) \rangle \frac{(1, c)}{1 + c^2}.$$

Probaremos que dado $\theta \in [0, \pi)$, si $c = \tan\theta$ entonces $L(E) \cap L_c$ es semejante a $\text{proy}_\theta(E)$ con razón de semejanza $\sqrt{(1 + c^2)}$. Consideramos las siguientes transformaciones:

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + c, y)$
- $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación tal que $R(1, c) = (0, \sqrt{(1 + c^2)})$
- $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $H(x, y) = \sqrt{(1 + c^2)}(x, y)$

Veamos que podemos aplicar estas transformaciones sobre $\text{proy}_\theta(E)$ para obtener $L(E) \cap L_c$ (ver Figura 2.3) .

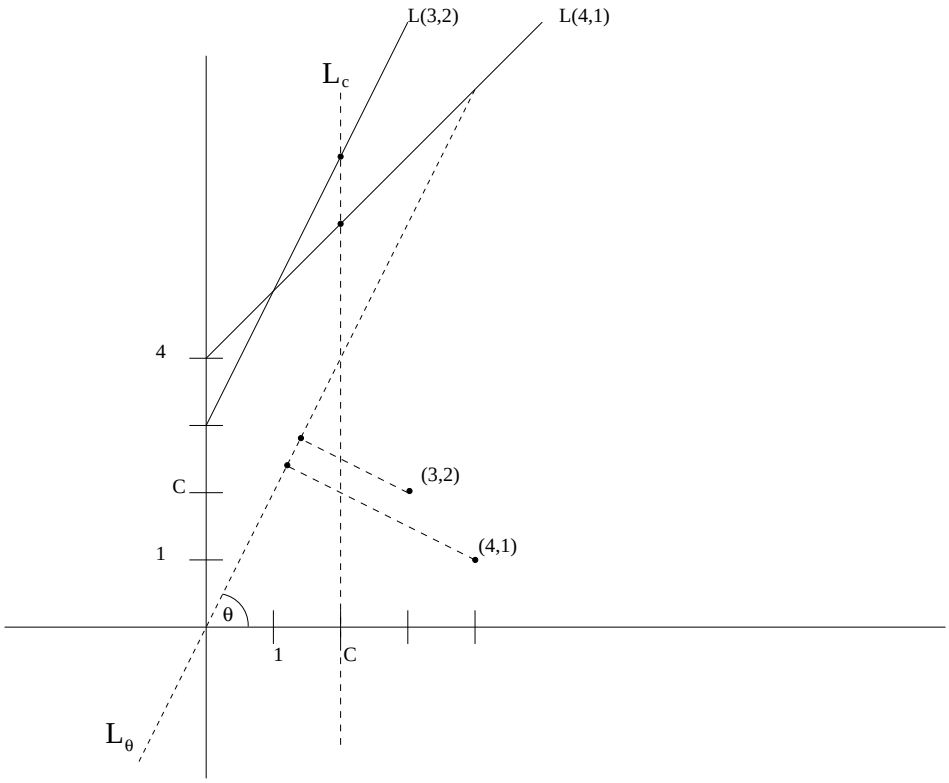

Figura 2.3: principio de dualidad con $c = 2 = \tan\theta$

Consideremos un punto típico $A \in \text{proy}_\theta(E)$ y calculemos $T \circ R \circ H(A)$.

$$\begin{aligned}
T \circ R \circ H(A) &= T \circ R \circ H\left(\langle (a,b),(1,c)\rangle \frac{(1,c)}{1+c^2}\right) \\
&= T \circ R\left(\frac{\langle (a,b),(1,c)\rangle}{\sqrt{(1+c^2)}}(1,c)\right) \\
&= T\left(\frac{\langle (a,b),(1,c)\rangle}{\sqrt{(1+c^2)}}(0,\sqrt{(1+c^2)})\right) \\
&= T\left(\langle (a,b),(1,c)\rangle\,(0,1)\right) \\
&= T\left((0,\langle (a,b),(1,c)\rangle)\right) \\
&= (c,\langle (a,b),(1,c)\rangle)
\end{aligned}$$

El último renglón no es otra cosa que $L(a,b) \cap L_c$. Como aplicamos una dilatación, una rotación y una traslación, resulta que los conjuntos $\text{proy}_\theta(E)$ y $L(E) \cap L_c$ son semejantes con razón $\sqrt{(1+c^2)}$ (que es la razón de la

dilatación H). Si usamos ahora el Corolario 2.2.6 obtenemos el siguiente resultado que llamaremos *principio de dualidad*

Principio de dualidad Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ y $c = \tan\theta$, entonces

$$\dim_H(L(E) \cap L_c) = \dim_H(\text{proy}_\theta(E)). \tag{2.10}$$

Podemos observar que si proyectamos sobre el eje y, tenemos que para un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la proyección con $\theta = \frac{\pi}{2}$ es b. De manera que si el punto b pertenece a $\text{proy}_{\frac{\pi}{2}}(E)$ entonces $L(E)$ contiene una recta con pendiente b. Estamos ahora en condiciones de probar la siguiente versión de la conjetura de Kakeya:

Teorema 2.2.9 *Sea F un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que contiene una recta en cada dirección. Entonces F tiene dimensión de Hausdorff igual a 2.*

Demostración: Por la Proposición 2.1.5 podemos suponer sin pérdida de generalidad que el conjunto F es G_δ. Definimos

$$\begin{aligned} E &= \{(a,b) : L(a,b) \subset F\} \\ &= \bigcap_{r=1}^{\infty} \{(a,b) : L(a,b) \cap \overline{D(0,r)} \subset F \cap \overline{D(0,r)}\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

que resulta ser también de tipo G_δ pues cada uno de los conjuntos intersecados en (2.11) es de tipo G_δ. Veamos esto último: fijamos $r \in \mathbb{N}$ y como $F = \cap_{i=1}^{\infty} F_i$ con F_i abierto para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\{(a,b) : L(a,b) \cap \overline{D(0,r)} \subset \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right) \cap \overline{D(0,r)}\} =$$

$$= \{(a,b) : L(a,b) \cap \overline{D(0,r)} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(F_i \cap \overline{D(0,r)}\right)\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{\infty} \{(a,b) : L(a,b) \cap \overline{D(0,r)} \subset \left(F_i \cap \overline{D(0,r)}\right)\}$$

Ahora tomamos $(x_0, y_0) \in \{(a,b) : L(a,b) \cap \overline{D(0,r)} \subset \left(F_i \cap \overline{D(0,r)}\right)\}$. Como cada F_i es abierto y para cualquier $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ el conjunto

$$L = L(x_0, y_0) \cap \overline{D(0,r)}$$

es compacto, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que el δ-entorno L_δ de L satisfaga

$$L_\delta \cap \overline{D(0,r)} \subset F_i \cap \overline{D(0,r)}.$$

Entonces se puede encontrar un entorno U de (x_0, y_0) tal que para cualquier $(x, y) \in U$ vale

$$L(x,y) \cap \overline{D(0,r)} \subset \left(F_i \cap \overline{D(0,r)}\right)$$

(la idea es que si modificamos poco la pendiente y la ordenada al origen de la recta $L(x_0, y_0)$ obtenemos rectas que caen dentro del δ-entorno L_δ). De esto último se deduce que el conjunto $\{(a,b) : L(a,b) \cap \overline{D(0,r)} \subset \left(F_i \cap \overline{D(0,r)}\right)\}$ es abierto y por lo tanto el conjunto E es G_δ (y por lo tanto boreliano).

Como el conjunto F contiene rectas en todas las direcciones, $\text{proy}_{\frac{\pi}{2}}(E)$ es todo el eje y. Entonces $H^1(\text{proy}_{\frac{\pi}{2}}(E)) = \infty$ y por el Corolario 2.2.5 tenemos que $H^1(E) = \infty$. El conjunto E debe tener entonces dimensión de Hausdorff al menos 1. Aplicamos el Teorema 2.2.7 para obtener que $\dim_H(\text{proy}_\theta(E)) = 1$ para casi todo θ. Ahora, por el principio de dualidad (2.10) queda que

$$\dim_H(L(E) \cap L_c) = 1$$

para casi todo $c \in \mathbb{R}$. Aplicamos ahora el Teorema 2.2.8 tomando $s = 1$, $0 < t < 1$, $M = L(E)$ y A el conjunto de los valores de $c \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(L(E) \cap L_c) = 1$.

Verifiquemos las hipótesis de ese teorema:

- Para cada $c \in A$ vale que existe una constante $C > 0$ tal que

  $$H^t(L(E)_c) = H^t(L(E) \cap L_c) > C$$

  pues $t < 1$ y $\dim(L(E) \cap L_c) = 1$ para todo $c \in A$. Entonces

  $$H^t(L(E) \cap L_c) = \infty$$

  y podemos tomar $C = 1$.

- $H^s(A) > 0$ pues el conjunto A es casi todo $\mathbb{R}$.

Usamos entonces el Teorema 2.2.8 y obtenemos que existe $b > 0$ tal que

$$H^{1+t}(L(E)) \geq bH^1(A) = \infty$$

para cualquier $0 < t < 1$. Entonces, para cualquier número real $1 \leq r < 2$ tenemos que

$$H^r(L(E)) \geq \infty$$

y entonces $\dim_H(L(E)) = 2$. Finalmente, como $L(E) \subseteq F$ tenemos que $\dim_H(F) = 2$. ■

En [Dav71] se usa un argumento muy similar (de hecho, es el argumento original en el que se basa el teorema anterior) para probar que la dimensión de Hausdorff de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que contenga un segmento de longitud 1 en cada dirección (en lugar de una recta completa) debe ser también 2. En los siguientes capítulos trabajaremos con formulaciones más fuertes de la conjetura de Kakeya y daremos otra prueba de estos resultados con técnicas más modernas del análisis armónico desarrolladas por Córdoba, Bourgain, Fefferman y Wolff entre otros, a partir de la década de 1970 y principalmente durante los años 90.

Capítulo 3

La función maximal de Kakeya

En este capítulo trataremos con una versión más fuerte de la conjetura de Kakeya formulada en términos de funciones maximales. Más precisamente, dada una función f definida en $\mathbb{R}^n$ y un número real positivo δ le asociaremos una función f_δ^* definida en $\mathbb{S}^{n-1}$ dado por un operador de tipo maximal K_δ. El objetivo de este capítulo es estudiar qué consecuencias tienen las acotaciones logradas para el operador K_δ sobre la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Kakeya. Necesitamos algunas definiciones y lemas preliminares que desarrollamos a continuación.

3.1. Preliminares

Definición 3.1.1 *Sea (X, μ) un espacio de medida. Dado $1 \leq p < \infty$, notamos con $L^p(X, \mu)$ al espacio de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ μ-medibles tales que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. Para el caso $p = \infty$ decimos que $f \in L^\infty(X, \mu)$ si y sólo si*

$$\sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \mu\left(\{|f| \geq \lambda\}\right) > 0\} < \infty.$$

Si no hay posibilidad de confusión, notaremos a $L^p(X, \mu)$ simplemente como $L^p(X)$. Para una función en $L^p(X, \mu)$ con $1 \leq p < \infty$ definimos

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

y para una función en $L^\infty(X, \mu)$ definimos

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \|f\|_\infty := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \mu\left(\{|f| \geq \lambda\}\right) > 0\}.$$

Nuevamente indicamos que en los símbolos $\|f\|_p$ y $\|f\|_\infty$ el espacio de medida se desprende del contexto.

Definición 3.1.2 *Dados dos espacios de medida (X, μ), (Y, ν) decimos que un operador lineal $T : L^p(X, \mu) \to L^q(Y, \nu)$ es*

1. de tipo fuerte (p, q) con $1 \leq p, q \leq \infty$ si existe una constante $C > 0$ independiente de f tal que

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p \qquad \forall\, f \in L^p(X, \mu).$$

2. de tipo débil (p, q) con $1 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q < \infty$ si existe una constante $C > 0$ independiente de f tal que para todo $\lambda > 0$ vale que

$$\nu\left(\{|Tf| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^q \qquad \forall\, f \in L^p(X, \mu)$$

   Decimos además que T es de tipo débil (p, ∞) si está acotado como operador de $L^p(X, \mu)$ en $L^\infty(Y, \nu)$.

Una noción de acotación débil usada en [Wol99] es la siguiente: Sea un operador lineal $T : L^p(X, \mu) \to L^q(Y, \nu)$. Si existe una constante C tal que para todo conjunto E μ-medible de medida finita y para todo $\lambda > 0$ vale

$$\nu\left(\{|T\chi_E| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\mu(E)^{\frac{1}{p}}\right)^q. \tag{3.1}$$

escribimos

$$\|Tf\|_{q,\infty} \leq C\|f\|_{p,1} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

y decimos que el operador T tiene norma "restricted weak" (p, q) menor o igual que C. Está claro que si el operador es de tipo débil (p, q) entonces se satisface la condición (3.1)

Podemos observar que si $(X, \mu) = (Y, \nu)$ y el operador T es la identidad entonces la desigaldad de tipo débil $(1, 1)$ es la conocida desigualdad de Tchebyshev.

Tenemos el siguiente lema.

Lema 3.1.3 *Sea $T : L^p(X, \mu) \to L^q(Y, \nu)$ un operador lineal y sean p y q tales que $1 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q < \infty$. Si T es de tipo fuerte (p, q) entonces es de tipo débil (p, q) (Está claro que vale también para el caso $q = \infty$ pues las definiciones coinciden).*

Demostración: Sea $\lambda > 0$. Consideremos los conjuntos

$$E_\lambda := \{|Tf| > \lambda\}$$

Entonces

$$\nu(E_\lambda) \leq \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \frac{|Tf|}{\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left(\frac{|Tf|}{\lambda}\right)^q d\nu$$

pues en E_λ vale que $|Tf| \geq \lambda$ y $q \geq 1$. Entonces

$$\nu(E_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda^q} \int_{E_\lambda} |Tf|^q d\nu \leq \frac{1}{\lambda^q} \int_Y |Tf|^q d\nu \leq \frac{1}{\lambda^q} \|Tf\|_q^q$$

y como por hipótesis el operador es de tipo fuerte (p, q) entonces queda que

$$\nu(E_\lambda) \leq \frac{C^q}{\lambda^q} \|f\|_p^q = \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_p\right)^q$$

que es la desigualdad buscada. ∎

Introducimos la siguiente definición

Definición 3.1.4 *Decimos que un operador $T : X \to Y$ es sublineal si para cada par de elementos f, g en X vale que $T(f + g) \leq T(f) + T(g)$ y para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f \in X$, $T(\lambda f) = \lambda T(f)$.*

Enunciamos ahora dos teoremas fundamentales de interpolación. Las demostraciones pueden encontrarse en [Kat04].

Teorema 3.1.5 *(de interpolación de Marcinkiewicz) Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador sublineal definido en $L^{p_0} + L^{p_1}$ que es de tipo débil (p_0, p_0) y de tipo débil (p_1, p_1). Entonces T es de tipo fuerte (p, p) para todo $p_0 < p < p_1$.*

Teorema 3.1.6 *(de interpolación de M. Riesz-Thorin) Sean p_0, p_1, q_0, q_1 tales que $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ y para $0 < \theta < 1$, definamos p y q como*[1]

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad , \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Si T es un operador lineal de $L^{p_0} + L^{p_1}$ en $L^{q_0} + L^{q_1}$ tal que

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \quad \text{para } f \in L^{p_0}$$

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1} \quad \text{para } f \in L^{p_1}$$

entonces,

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p \quad \text{para } f \in L^p$$

[1] adoptamos la notación $\frac{c}{\infty} = 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

3.2. La función maximal de Kakeya

Tal como anticipamos al principio de este capítulo, vamos a formular el problema de Kakeya en términos de un operador de tipo maximal. Introducimos la siguiente notación:

Dado $a \in \mathbb{R}^n$, $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $\delta > 0$ definimos el δ-tubo unitario $T_e^\delta(a)$ en la dirección e centrado en a como

$$T_e^\delta(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle (x-a), e\rangle| \leq \frac{1}{2},\ |(x-a)^\perp| \leq \delta\} \tag{3.2}$$

donde $x^\perp = x - \langle x, e\rangle\, e$.

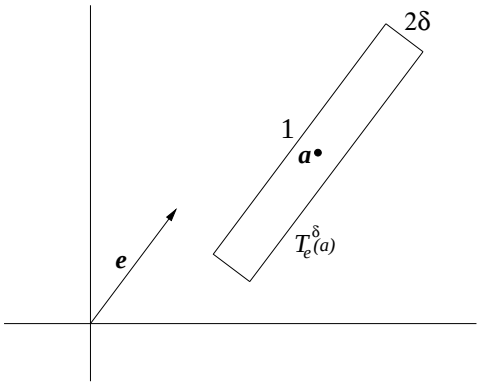

Figura 3.1: δ-tubo centrado en a en la dirección e.

Notemos que para un δ-tubo en $\mathbb{R}^n$ vale

$$|T_e^\delta(a)| = C\delta^{n-1}. \tag{3.3}$$

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente integrable podemos definir su función maximal de Kakeya asociada calculando los promedios sobre estos δ-tubos de la siguiente manera:

Definición 3.2.1 *(función maximal de Kakeya) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente integrable. Se define $f_\delta^* : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:*

$$f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f|\, dx \tag{3.4}$$

Esta definición se debe a Bourgain y es usada en [Bou91]. Quizás uno de los primeros antecedentes de funciones maximales de este tipo sean los trabajos

de Córdoba ([Cór75],[Cor77]). En esta sección veremos cuál es la importancia de esta función con respecto a la conjetura "H" de Kakeya, pero antes estudiaremos algunas propiedades del operador maximal de Kakeya K_δ definido por

$$K_\delta(f) = f_\delta^*.$$

Más precisamente, veremos que de lograr cierta acotación sobre el operador K_δ tendremos cotas inferiores para la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Kakeya en $\mathbb{R}^n$.

Antes del primer resultado hacemos una aclaración con respecto a la notación que adoptaremos a partir de esta sección mientras el contexto permita evitar confusiones. Cuando consideramos al K_δ aplicado sobre funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ y queremos estimar la norma de f_δ^* en $L^q(\mathbb{S}^{n-1})$, entenderemos que

$$\|f_\delta^*\|_q \leq C \|f\|_p$$

significa más precisamente

$$\|f_\delta^*\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Para empezar, tenemos las siguientes acotaciones que se verifican muy fácilmente:

Proposición 3.2.2 *Valen las siguientes cotas:*

1. Acotación de tipo fuerte (∞, ∞)

$$\|f_\delta^*\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.5}$$

2. Acotación de tipo fuerte $(1, \infty)$

$$\|f_\delta^*\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \frac{1}{\delta^{n-1}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.6}$$

Demostración: Veamos 1:

$$|f_\delta^*(e)| \leq \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty$$

Para ver 2,

$$|f_\delta^*(e)| = \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f| dx \leq \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx = \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \|f\|_1$$

y por la ecuación (3.3) tenemos el resultado buscado. ∎

Además de los casos $p = 1$ y $p = \infty$, podemos estudiar si esta familia de operadores (tenemos un operador para cada $\delta > 0$) está acotada de L^p en L^q uniformemente en δ.

A modo de aproximación al problema, empezamos aplicando este operador sobre algunas funciones particulares para ver qué clase de cotas es razonable conjeturar. En primer lugar escribimos un resultado negativo: no es posible probar una acotación del tipo

$$\|f_\delta^*\|_q \leq C \|f\|_p$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y para todo $\delta > 0$ con la constante C independiente de δ. Para ello nos valemos de la existencia de conjuntos de Kakeya de medida cero probada en el Capítulo 1.

Proposición 3.2.3 *Si $n \geq 2$ y $p < \infty$ no es posible hallar una cota C independiente de δ tal que*

$$\|f_\delta^*\|_q \leq C \|f\|_p \quad \forall \delta \, \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

Demostración: Por el Teorema 1.2.8 sabemos que podemos encontrar un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de Kakeya de medida cero. Sea E^δ un δ-entorno de E y sea $f_\delta = \chi_{E^\delta}$ la función característica de E^δ. Entonces

$$(f_\delta)_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \left| T_e^\delta(a) \cap E^\delta \right| \geq 1$$

pues para cualquier $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $T_e^\delta(a) \subseteq E^\delta$. Como además

$$\|f_\delta^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty = \|\chi_{E^\delta}\|_\infty = 1$$

tenemos que $(f_\delta)_\delta^*(e) = 1 \; \forall e \in \mathbb{S}^{n-1}$. Por lo tanto, $\|f_\delta^*\|_q \approx 1 \; \forall \delta > 0$. Por otro lado, tenemos que $\lim_{\delta \to 0} \left| E^\delta \right| = |E| = 0$ y entonces $\lim_{\delta \to 0} \|f\|_p = \lim_{\delta \to 0} \left| E^\delta \right|^{\frac{1}{p}} = 0 \; \forall p < \infty$. Esto muestra que la desigualdad

$$\|f_\delta^*\|_q \leq C \|f\|_p \quad \forall \delta \, \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

no es posible, pues el lado izquierdo se mantiene acotado inferiormente por una constante uniformemente en δ pero el derecho tiende a cero cuando $\delta \to 0$. ∎

El objetivo que nos planteamos entonces es considerar el caso $p = q$ y ver si es posible probar una acotacion del tipo "$\delta^{-\varepsilon}$" uniforme en δ:

$$\forall \varepsilon \, \exists \, C_\varepsilon : \|f_\delta^*\|_p \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_p \tag{3.7}$$

Veamos ahora qué pasa con la función maximal asociada a la función característica de una $\delta-$bola.

Si $f = \chi_{B(0,\delta)}$, como para cada $e \in \mathbb{S}^{n-1}$el tubo $T_e^\delta(0)$ contiene a $B(0,\delta)$ resulta que

$$f_\delta^*(e) = \frac{|B(0,\delta)|}{|T_e^\delta(0)|} \approx \delta$$

y entonces

$$\|f_\delta^*\|_p \approx \delta$$

pero

$$\|f\|_p \approx \delta^{\frac{n}{p}}$$

de modo que si tuviéranos una cota como en (3.7),

$$\forall \varepsilon \, \exists \, C_\varepsilon : \|f_\delta^*\|_p \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_p$$

entonces la constante C_ε debería cumplir, aplicando el operador a las funciones $f_\delta = \chi_{B(0,\delta)}$,

$$\begin{aligned} \delta \approx \|(f_\delta)_\delta^*\| &\leq C_\epsilon \delta^{\frac{n}{p}-\epsilon} \\ \delta^{1-(\frac{n}{p}-\epsilon)} &\leq C_\epsilon. \end{aligned}$$

Ahora, observemos que si $p < n$ podemos elegir $\epsilon > 0$ tal que $\frac{n}{p} - \epsilon > 1$. Esto muestra que la acotación (3.7) no puede ocurrir si $p < n$. Observamos que, más precisamente, lo que ocurre es que dado un $\varepsilon > 0$, la acotación (3.7) no puede ocurrir para $p < p(\varepsilon) = \frac{n}{\varepsilon+1}$.

A partir de estos resultados parciales sobre el operador maximal de Kakeya es razonable conjeturar lo siguiente:

Conjetura M de Kakeya

$$\forall \varepsilon \, \exists \, C_\varepsilon : \|f_\delta^*\|_{L^n(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \, \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \, \delta > 0 \, \forall f \in L^n(\mathbb{R}^n). \quad (3.8)$$

3.3. Conjetura "M" implica conjetura "H"

Habíamos anticipado que la conjetura maximal de Kakeya es una versión más fuerte que la conjetura "H". Para ver esto probamos ahora que si vale (3.8) entonces los conjuntos de Kakeya en $\mathbb{R}^n$ tienen dimensión de Hausdorff igual a n. Necesitamos un lema geométrico acerca de la intersección de tubos y bolas.

Observación 3.3.1 *Recordamos que, sobre todo esta sección, estamos usando la notación $|E|$ para referirnos a la medida de Lebesgue de E en el espacio de medida correspondiente sin notar explícitamente la dimensión. En el siguiente lema, por ejemplo, usamos $|I|$ para notar la medida 1-dimensional de un segmento en $\mathbb{R}^n$ y usamos $|T_e^\delta(a)|$ para la medida n-dimensional de un δ-tubo en $\mathbb{R}^n$. En todas las situaciones el contexto evita cualquier confusión.*

Lema 3.3.2 *Sea $e \in \mathbb{S}^{n-1}$, I_e un segmento de longitud 1 en la dirección e centrado en a_e y considerar un conjunto finito de bolas $B_j = B(x_j, r_j)$, $1 \leq j \leq m$ tal que $2^{-k} \leq r_j \leq 2^{-(k-1)}$. Entonces,*

$$|I_e \cap (\cup_j B_j)| \geq \alpha \;\; \Rightarrow \;\; |T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap (\cup_j B(x_j, 2r_j)| \geq \alpha |T_e^{2^{-k}}(a_e)| \quad (3.9)$$

Demostración: Consideremos primero el caso de una sola bola B centrada en x de radio $2^{-k} \leq r \leq 2^{-(k-1)}$. Consideramos el conjunto Z representado con la zona sombreada en la Figura 3.2, es decir, Z consiste de todos los puntos del tubo $T_e^{2^{-k}}(a_e)$ que proyectados ortogonalmente sobre I_e caen en $I_e \cap B$. Sea $y \in Z$ y sea $\tilde{y}$ el punto que resulta de proyectar ortogonalmente a y sobre I_e. Entonces

$$\begin{aligned} |y - x| &\leq |y - \tilde{y}| + |\tilde{y} - x| \\ &< \frac{1}{2^k} + r \leq 2r. \end{aligned}$$

de modo que toda la región sombreada en la Figura 3.2 está contenida en $T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap B(x, 2r)$ y como la medida de esta región es justamente $\alpha |T_e^{2^{-k}}(a_e)|$ tenemos el resultado para el caso de una bola:

$$|I_e \cap B| \geq \alpha \Rightarrow |T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap B(x, 2r)| \geq \alpha |T_e^{2^{-k}}(a_e)|$$

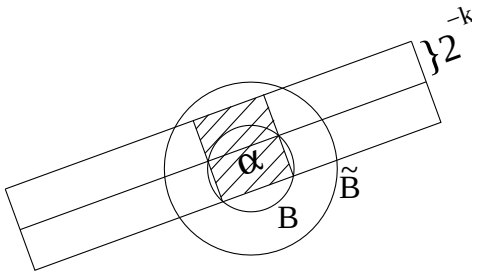

Figura 3.2: Lema 3.3.2 con una sola bola

Veamos ahora el caso de finitas bolas $B_1, ..., B_m$ donde cada bola B_i cumple

$$|B_i \cap I_e| \geq \alpha_i$$

Notamos con $\tilde{B}_i = B(x_i, 2r_i)$. Definimos como en el caso anterior los conjuntos $Z_i \subseteq T_e^{2^{-k}}(a_e)$ para cada i. Es inmediato que si tenemos la hipótesis de que

$$|I_e \cap (\bigcup_{i=1}^{m} B_i)| \geq \alpha$$

entonces vale que (ver Figura 3.3)

$$|T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap (\bigcup_{i=1}^{m} Z_i)| \geq \alpha |T_e^{2^{-k}}(a_e)| \tag{3.10}$$

De ahí se deduce que, como por el caso ya probado tenemos que para todo $1 \leq i \leq m$

$$\left(T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap Z_i\right) \subseteq \left(T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap \tilde{B}_i\right)$$

entonces

$$\left(T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap (\bigcup_{i=1}^{m} Z_i)\right) \subseteq \left(T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap (\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{B}_i)\right)$$

y por la desigualdad (3.10) dedcimos que

$$|T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap (\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{B}_i)| \geq |T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap (\bigcup_{i=1}^{m} Z_i)| \geq \alpha |T_e^{2^{-k}}(a_e)|$$

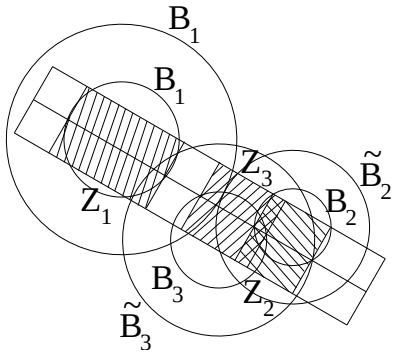

Figura 3.3: Los conjuntos Z_i

■

Teorema 3.3.3 *Si vale la acotación*

$$\forall \varepsilon \, \exists \, C_\varepsilon : \|f_\delta^*\|_p \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_p$$

para algún $p < \infty$ entonces todos los conjuntos de Kakeya en $\mathbb{R}^n$ tienen dimensión de Hausdorff n.

Demostración: Sea E un conjunto de Besicovitch en $\mathbb{R}^n$. Sea $\{B_j\}_{j\in J}$ un cubrimiento de E tal que $B_j = B(x_j, r_j)$. Necesitamos acotar por debajo la cantidad $H^s(E)$. Podemos asumir que $0 < r_j < 1$. Sea

$$J_k = \{j : 2^{-k} < r_j < 2^{-(k-1)}\}$$

(podemos asumir que cada J_k es finito, pues si alguno no lo fuera el cubrimiento nos daría una suma infinita en el cálculo de $H^s_\delta(E)$ para $\delta \geq 2^{-(k-2)}$). Dado $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ existe un segmento $I_e \subset E$ tal que en la dirección e. Sea

$$S_k = \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : |I_e \cap (\bigcup_{j\in J_k} B_j)| \geq \frac{c}{k^2}\} \qquad \text{con } c < \frac{6}{\pi^2}$$

Veamos primero que $\mathbb{S}^{n-1} = \cup_{k=1}^\infty S_k$. Suponer que no. Entonces, existe $e \in \mathbb{S}^{n-1} \backslash (\cup_{k=1}^\infty S_k)$. Para ese e vale que $|I_e \cap (\cup B_j)| < \frac{c}{k^2} \forall k$ y entonces

$$\sum_{k=1}^\infty |I_e \cap (\bigcup_{j\in J_k} B_j)| \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{c}{k^2} < 1$$

pero

$$\sum_{k=1}^\infty |I_e \cap (\bigcup_{j\in J_k} B_j)| \geq \left|\bigcup_{k=1}^\infty I_e \cap (\bigcup_{j\in J_k} B_j)\right| = |I_e \cap (\bigcup_j B_j)| = |I_e| = 1.$$

Sea ahora $F_k = \bigcup_{j\in J_k} B(x_j, 2r_j)$ y sea $f = \chi_{F_k}$. Si $e \in S_k$ entonces por (3.9) tenemos que

$$|T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap F_k| \geq \frac{c}{k^2} |T_e^{2^{-k}}(a_e)|.$$

Estimamos ahora la norma p de $f^*_{2^{-k}}$. Si $e \in S_k$,

$$\begin{aligned} f^*_{2^{-k}}(e) &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^{2^{-k}}(a)|} \int_{T_e^{2^{-k}}(a)} |f(x)|dx \\ &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^{2^{-k}}(a)|} |T_e^{2^{-k}}(a) \cap F_k| \\ &\geq \frac{1}{|T_e^{2^{-k}}(a_e)|} |T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap F_k| \\ &\geq \frac{c}{k^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\|f^*_{2^{-k}}\|_p = \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f^*_{2^{-k}}(e)|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{c}{k^2}\sigma(S_k)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.11}$$

Por (3.7), para todo $\varepsilon > 0$:

$$\|f^*_{2^{-k}}\|_p \leq C_\varepsilon 2^{k\varepsilon}\|f\|_p \leq C_\varepsilon 2^{k\varepsilon}\left(\#(J_k)\frac{1}{2^{(k-1)n}}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.12}$$

lo que junto con (3.11) implica

$$\begin{aligned}\sigma(S_k) &\leq \left(\frac{k^2}{c}\|f^*_{2^{-k}}\|_p\right)^p \leq \left(\frac{k^2}{c}C_\varepsilon 2^{k\varepsilon}\right)^p \#(J_k)2^{-(k-1)n} \\ &\lesssim k^{2p}2^{k\varepsilon p}\#(J_k)2^{-(k-1)n} \lesssim 2^{-k(n-\varepsilon p)}\#(J_k).\end{aligned}$$

Entonces, si $\alpha < n$, se tiene que (con un ε tal que $n - \varepsilon p > \alpha$)

$$\begin{aligned}\sum_j r_j^\alpha &\geq \sum_j r_j^{n-\varepsilon p} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in J_k} 2^{-k(n-\varepsilon p)} \\ &\gtrsim \sum_{k=1}^{\infty}\sigma(S_k) = \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \gtrsim 1\end{aligned}$$

■

El mismo resultado puede obtenerse si en Teorema 3.3.3 se asume que existe un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ de medida positiva tal que para cada $e \in \Omega$ existe un intervalo I_e en la dirección e incluido en el conjnto E.

Se puede repetir el mismo argumento definiendo

$$S_k = \{e \in \Omega : |I_e \cap (\cup D_j)| \geq \frac{c}{k^2}\}$$

y concluyendo que si $\alpha < n$ queda que $\sum_j r_j^\alpha \gtrsim \sigma(\Omega) \gtrsim 1$ (pues $\sigma(\Omega) > 0$)

El próximo teorema es un resultado similar obtenido a partir de la suposición de una acotación débil del operador maximal de Kakeya.

Teorema 3.3.4 *Supongamos que existen constantes $C > 0$ y $\alpha > 0$ tales que para cualquier $E \subset \mathbb{R}^n$ de medida finita vale (para $\lambda > 0$)*

$$\sigma(\{(\chi_E)^*_\delta > \lambda) \leq \left(\frac{C\delta^{-\alpha}|E|^{\frac{1}{p}}}{\lambda} \right)^q \tag{3.13}$$

es decir, con la notación de (3.1)*,*

$$\|K_\delta f\|_{q,\infty} \leq C\delta^{-\alpha}\|f\|_{p,1} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

Entonces los conjuntos de Kakeya tienen dimensión al menos $n - p\alpha$.

Demostración: Sea E un conjunto de Kakeya y sea $s < n - p\alpha$. Acotaremos $H^s(E)$ por debajo de manera de manera similar a lo hecho en el teorema anterior. Igual que antes, I_e es un segmento de longitud 1 en la dirección e contenido en E. Consideramos un cubrimiento de E por bolas $\{B_j\}_{j\in J}$ tal que $B_j = B(x_j, r_j)$ (podemos asumir que $r_j < 1$) y definimos J_k, S_k y F_k como antes y $f = \chi_{F_k}$.

Tenemos entonces los mismos resultados: $\mathbb{S}^{n-1} = \cup_k S_k$ y si $e \in S_k$ vale que $|T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap F_k| \geq \frac{c}{k^2}|T_e^{2^{-k}}(a_e)|$. Por lo tanto, si $e \in S_k$ tenemos que

$$\begin{aligned} f^*_{2^{-k}}(e) &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^{2^{-k}}(a)|} \int_{T_e^{2^{-k}}(a)} \chi_{F_k}(x)dx \\ &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^{2^{-k}}(a)|} |T_e^{2^{-k}}(a) \cap F_k| \\ &\geq \frac{c}{k^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : f^*_{2^{-k}}(e) \geq \frac{c}{k^2}\} \supseteq S_k$$

y por lo tanto

$$\sigma(\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : f^*_{2^{-k}}(e) \geq \frac{c}{k^2}\}) \geq \sigma(S_k) \tag{3.14}$$

Por hipótesis,

$$\sigma(\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : f^*_{2^{-k}} \geq \frac{c}{k^2}\}) \leq \left(\frac{C2^{k\alpha}|F_k|^{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{k^2}} \right)^q \tag{3.15}$$

de modo que juntando (3.14) y (3.15) tenemos que

$$\sigma(S_k) \lesssim \left(2^{k\alpha}k^2|F_k|^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.16}$$

Por otro lado, como F_k es una unión de bolas, tenemos que

$$|F_k|^{\frac{1}{p}} \lesssim (\#(J_k)(2r_j)^n)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left(\#(J_k)2^{-kn}\right)^{\frac{1}{p}},$$

entonces

$$\sigma(S_k) \lesssim \left(2^{k\alpha}k^2\left(\#(J_k)2^{-kn}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q \tag{3.17}$$

Finalmente, despejando $\#(J_k)$ de (3.17) obtenemos

$$\#(J_k) \gtrsim \left(\sigma(S_k)^{\frac{1}{q}}k^{-2}2^{-k\alpha}\right)^p 2^{kn} = 2^{k(n-p\alpha)}k^{-2p}\sigma(S_k)^{\frac{p}{q}}$$

Podemos ahora acotar $H^s(E)$. Si $\varepsilon = n - p\alpha - s > 0$,

$$\sum_j r_j^s \geq \sum_k \#(J_k)2^{-ks} \gtrsim \sum_k \sigma(S_k)^{\frac{p}{q}}k^{-2p}2^{k\varepsilon} \gtrsim C > 0,$$

pues existe un k tal que $\sigma(S_k) > 0$ pues $\mathbb{S}^{n-1} = \cup_k S_k$. Por lo tanto, para todo s menor que $n - p\alpha$ tenemos que $H^s(E) > 0$ y entonces $\dim(E) \geq n - p\alpha$. ■

Vemos entonces que el principal (y el más ambicioso) objetivo es tratar de obtener cotas, ya sea de tipo fuerte o débil, para el operador maximal de Kakeya. Una manera de atacar el problema sería valerse del Teorema 3.3.4 y buscar cotas del tipo

$$\sigma(\{(\chi_E)^*_\delta > \lambda) \leq \left(\frac{C\delta^{-\alpha}|E|^{\frac{1}{p}}}{\lambda}\right)^q$$

con valores de α pequeños. O mejor aún, alguna expresión dependiente de δ con crecimiento más lento que cualquier potencia del tipo $\delta^{-\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$, por ejemplo un factor logarítmico del tipo $\log(\frac{1}{\delta})$. Precisamente una cota de ese tipo es la que se conoce para dimensión 2, que es el único caso no trivial para el que la conjetura está resuelta.

Una manera de obtener resultados parciales en dimensiones altas usada en [Wol95] es la siguiente: fijada la dimensión n, interpolamos con el Teorema de Riesz-Thorin entre la desigualdad conocida (3.6)

$$\|f^*_\delta\|_\infty \leq C\delta^{-(d-1)}\|f\|_1$$

y la conjeturada (3.8)

$$\|f^*_\delta\|_n \leq C\delta^{-\varepsilon}\|f\|_n$$

con $p \leq n$ y $q = (n-1)p'$ donde p'es el exponente dual de p definido por $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. Tenemos entonces

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{n} + \frac{1-\theta}{1} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{n} + \frac{1-\theta}{\infty} = \frac{\theta}{n}$$

de modo que

$$\theta = \frac{n}{q} = \frac{n}{(n-1)p'} = \frac{n}{n-1}\frac{p-1}{p}$$

y

$$1-\theta = 1 - \frac{n(p-1)}{(n-1)p} = \frac{np-p-np+n}{(n-1)p} = \frac{n-p}{(n-1)p}.$$

Con estos exponentes, la acotación del teorema es

$$\|f_\delta^*\|_q \leq \left(C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon}\right)^\theta \left(\delta^{-(n-1)}\right)^{1-\theta} \|f\|_p.$$

Miremos las potencias de δ:

$$\begin{aligned} \delta^{-\varepsilon\theta-(n-1)(1-\theta)} &= \delta^{-\varepsilon\frac{n}{n-1}\frac{p-1}{p}-(n-1)\frac{n-p}{(n-1)p}} \\ &= \delta^{-\varepsilon\frac{n}{n-1}\frac{p-1}{p}-\frac{n}{p}+1}. \end{aligned}$$

Como para $p \leq n$ vale $\frac{n}{n-1}\frac{p-1}{p} \leq 1$ entonces (δ siempre se supone $\ll 1$) obtenemos la desigualdad

$$\delta^{-\varepsilon\theta-(n-1)(1-\theta)} \leq \delta^{1-\frac{n}{p}-\varepsilon}.$$

A partir de esto se puede trabajar con una familia de conjeturas del tipo

$$\forall \varepsilon\, \exists\, C_\varepsilon : \|f_\delta^*\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C_\varepsilon \delta^{1-\frac{n}{p}-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \delta > 0\, \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad (3.18)$$

donde $p \leq n$ y $q = (1-n)p'$. A medida que p se agranda, se obtienen mejores acotaciones, de modo que el objetivo es probar estas cotas para valores de p grandes. En relación con la conjetura "H", vemos que si vale (3.18) para algún p, si aplicamos el Teorema 3.3.4 (cosa que podemos hacer pues ya vimos que acotación fuerte implica débil) tenemos que la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Kakeya en $\mathbb{R}^n$ es al menos

$$n + p(1 - \frac{n}{p} - \epsilon) = p(1-\varepsilon)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Concluimos que la dimensión debe ser al menos p. En esta dirección existen numerosos resultados parciales, uno de los mejores es el obtenido por Wolff en [Wol95] y dice que (3.18) vale con $p = \text{mín}\left(\frac{n+2}{2}, \frac{4n+3}{7}\right)$ y un q adecuado.

Capítulo 4

Conjetura "M" de Kakeya en $\mathbb{R}^2$

En el capítulo anterior probamos que la conjetura "M" de Kakeya implica la conjetura "H". En este capítulo probaremos que en dimensión 2 la conjetura de "M" es cierta y por lo tanto tenemos otra manera de verificar la validez de la conjetura "H" en $\mathbb{R}^2$. Necesitaremos algunos conceptos previos que probaremos en el contexto de $\mathbb{R}^n$ pues así los usaremos más adelante y no aumentan la dificultad de la demostración.

4.1. Preliminares

Definición 4.1.1 *Sea (X, d) un espacio métrico, $S \subseteq X$ un conjunto y $\delta > 0$. Decimos que S es un conjunto δ-separado si para cualquier par de elementos $x, y \in S$ se cumple que $d(x, y) \geq \delta$.*

Definición 4.1.2 *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y $\delta > 0$. La δ-entropía de S, $\mathcal{N}_\delta(S)$, es la máxima cantidad de elementos de un subconjunto de S δ-separado.*

Lema 4.1.3 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ y $\delta > 0$. Entonces $\mathcal{N}_\delta(\Omega)$ satisface*

$$\mathcal{N}_\delta(\Omega) \gtrsim \frac{\sigma(\Omega)}{\delta^{n-1}}.$$

Demostración: Consideremos un conjunto $\{x_i\}_{i=1}^N$ de puntos δ-separados en Ω maximal con esa propiedad. Para cada $1 \leq i \leq N$ tomamos una bola $B_i := B(x_i, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n$. Afirmamos que $\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_i$. Si así no fuera, debería existir un punto $x_0 \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N B_i$, pero entonces

$$d(x_0, x_i) \geq \delta \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

de modo que el conjunto $\{x_i\}_{i=0}^N$ también sería δ-separado, contradiciendo la hipótesis de maximalidad. Entonces

$$\begin{aligned}\sigma(\Omega) &\leq \sigma(\mathbb{S}^{n-1} \cap \bigcup_{i=1}^{N} B_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \sigma(\mathbb{S}^{n-1} \cap B_i) \\ &= N\sigma(\mathbb{S}^{n-1} \cap B_i) \\ &\lesssim N\delta^{n-1}\end{aligned}$$

Esta última desigualdad se deduce de que la medida en la esfera de $\mathbb{S}^{n-1} \cap B_i$ es del orden de δ^{n-1}. Obtenemos entonces que

$$\mathcal{N}_\delta(\Omega) \gtrsim \frac{\sigma(\Omega)}{\delta^{n-1}}.$$

■

Observamos que la misma manera de razonar permite probar el resultado general en $\mathbb{R}^n$: Dado un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$, tenemos que $\mathcal{N}_\delta(\Omega) \gtrsim \frac{|\Omega|}{\delta^n}$. Vale además la siguiente generalización

Lema 4.1.4 *Sea $\delta > 0$ y sea $A = \{\alpha_k\}_{k=1}^M$ un conjunto δ-separado en $\mathbb{S}^{n-1}$. Si $\eta > 0$ entonces $\mathcal{N}_\eta(A) \gtrsim \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^{n-1} M$.*

Demostración: Consideramos el conjunto de $V \subseteq \mathbb{R}^n$ definido como

$$V = \bigcup_{k=1}^{M} B(\alpha_k, \tfrac{\delta}{2})$$

Como el conjunto A es δ-separado, la unión anterior es disjunta. Tomamos $S = \{\alpha_{k_j}\}_{j=1}^N$ un subconjunto η-separado de A maximal. Entonces

$$\bigcup_{k=1}^{M} B(\alpha_k, \tfrac{\delta}{2}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(\alpha_{k_j}, 2\eta)$$

pues dado $x \in \bigcup_{k=1}^M B(\alpha_k, \frac{\delta}{2})$, existe $1 \leq k \leq M$ tal que $x \in B(\alpha_k, \frac{\delta}{2})$. Además, al igual que en el lema anterior, $A \subseteq \bigcup_{k=1}^M B(\alpha_{k_j}, \eta)$ por la maximalidad. Entonces

$$|x - \alpha_{k_j}| \leq |x - \alpha_k| + |\alpha_k - \alpha_{k_j}| < \frac{\delta}{2} + \eta < \frac{3}{4}\eta < 2\eta$$

Podemos calcular las medidas de estas uniones, recordando que la unión en V es disjunta

$$\begin{aligned} M(\tfrac{\delta}{2})^{n-1} &\approx \sigma\left(\mathbb{S}^{n-1} \cap (\bigcup_{k=1}^{M} B(\alpha_k, \tfrac{\delta}{2}))\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \sigma\left(\mathbb{S}^{n-1} \cap B(\alpha_{k_j}, 2\eta)\right) \\ &\lesssim N\,(2\eta)^{n-1} \end{aligned}$$

y entonces

$$N \gtrsim M\left(\frac{\delta}{\eta}\right)^{n-1}$$

y de ahí que $\mathcal{N}_\eta(A) \gtrsim M\left(\frac{\delta}{\eta}\right)^{n-1}$ ∎

Vamos a necesitar también algunos resultados y propiedades elementales del análisis de Fourier. Los introducimos a continuación. Adoptaremos la siguiente definición:

Definición 4.1.5 *Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos su transformada de Fourier $\hat{f}$ como*

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \tag{4.1}$$

Las siguientes son propiedades bien conocidas de la transformada de Fourier:

Proposición 4.1.6 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces vale*

1. *$\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Si $h(x) = f(x-a)$ con $a \in \mathbb{R}$ entonces $\hat{h}(\xi) = e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi)$.*
3. *Si $h(x) = f(ax)$ con $a \in \mathbb{R}$ entonces $\hat{h}(\xi) = a^{-n} \hat{f}(\frac{\xi}{a})$.*
4. *$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ donde $f * g$ denota la convolución entre f y g definida como*
$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy.$$
5. *Si T es una transformación lineal inversible entonces*
$$\widehat{f \circ T} = |\det(T)|^{-1} \hat{f} \circ T^{-t}$$
(si la tranformación T es ortogonal entonces $\widehat{f \circ T} = \hat{f} \circ T$).

Omitimos las demostraciones pues son resultados bien conocidos: 1, 2, 3 y 5 son aplicaciones del teorema de cambio de variables y el punto 4 es una consecuencia del teorema de Fubini (para ver éstas y otras propiedades se puede consultar [Duo01] o [Wol03]).

Proposición 4.1.7 *Si f y g están en $L^2(\mathbb{R}^n)$*

1. (Plancherel)
$$\int f\overline{g} = \int \hat{f}\overline{\hat{g}}$$
2. $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$
3. $\|f * g\|_\infty \leq \|\hat{f}\hat{g}\|_1$

El punto 1 es otro resultado muy conocido de esta teoría y aparece en la mayoría de los textos. El punto 2 es una consecencia inmediata de 1. Sí probamos la desigualdad del punto 3. Sean f y g en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos la función $h(y) = \overline{g(x-y)}$. Entonces

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{h(y)}dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{h}(\xi)}d\xi\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)|dy = \|\hat{f}\hat{g}\|_1
\end{aligned}$$

donde aplicamos Plancherel y el punto 2 de la Proposición 4.1.6. Concluimos que $\|f * g\|_\infty \leq \|\hat{f}\hat{g}\|_1$

Definimos a continuación la *clase de Schwartz.*

Definición 4.1.8 *Una función f está en la Clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si es infinitamente derivable y todas sus derivadas decrecen rápido en el infinito, es decir,*
$$\|x^\alpha D^\beta f(x)\|_\infty < \infty \qquad , \qquad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Más adelante usaremos algunas propiedades muy útiles de este espacio de funciones. Particularmente, usaremos que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y P es un polinomio, entonces $Pf \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Hacemos ahora una observación elemental pero esencial para lo que sigue. Queremos estimar el diámetro y la medida de la intersección de δ-tubos en $\mathbb{R}^n$.

Lema 4.1.9 *Sean T_1 y T_2 dos δ-tubos en $\mathbb{R}^n$ que se intersecan en un ángulo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ como en la Figura 4.1. Entonces diam$(T_1 \cap T_2) \lesssim \frac{\delta}{\sin\theta}$ y por lo tanto $|T_1 \cap T_2| \lesssim \frac{\delta^n}{\sin\theta}$*

Demostración: Los dos tubos tienen sus ejes principales sobre un 2-plano Π en $\mathbb{R}^n$. Denotemos con p_Π a la proyección ortogonal sobre Π. Dados dos puntos $x, y \in (T_1 \cap T_2)$, tenemos que

$$\|x - y\| \leq 2\delta + \|p_\Pi(x) - p_\Pi(y)\|$$

Para analizar $\|x - y\| \leq 2\delta + \|p_\Pi(x) - p_\Pi(y)\|$ notemos que estamos en una situación como la representada en la Figura 4.1. La intersección de $p_\Pi(T_1)$ y $p_\Pi(T_2)$ está contenida en (o es igual a) un rombo de lado $\frac{2\delta}{\sin\theta}$, de modo que el diam$(p_\Pi(T_1 \cap T_2))$ es menor o igual que $\frac{4\delta}{\sin\theta}$. Entonces

$$\|x - y\| \leq 2\delta + \frac{4\delta}{\sin(\theta)} \leq 6\frac{\delta}{\sin\theta}$$

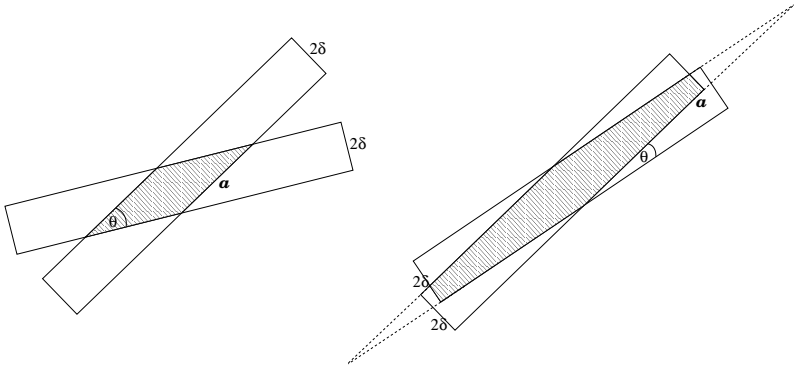

Figura 4.1: Intersección de dos δ-tubos en un ángulo θ donde $a = \frac{2\delta}{\sin\theta}$

.

■

4.2. El problema de Kakeya en $\mathbb{R}^2$

En esta sección probaremos de varias maneras que en $\mathbb{R}^2$ la conjetura "M" de Kakeya es verdadera. El primer resultado positivo en dimensión 2 es la acotación débil del operador maximal de Kakeya. Esto da otra prueba de que la conjetura "H" de Kakeya en $\mathbb{R}^2$ es verdadera gracias al Teorema 3.3.4. Mostraremos también que en dimensión dos vale la acotación fuerte del operador maximal de Kakeya. Daremos dos demostraciones independientes, una debida a Bourgain que usa análisis de Fourier y otra debida a Wolff[1] que usa argumentos geométricos y de dualidad.

Empezamos estableciendo el resultado para la acotación débil del operador de Kakeya.

Teorema 4.2.1 *El operador maximal de Kakeya satisface:*

$$\|K_\delta f\|_{2,\infty} \leq C \log(\tfrac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}} \|f\|_{2,1} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Demostración: Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$, $|E| < \infty$, $\lambda \in (0,1]$. Elegimos $f = \chi_E$ y $\Omega = \{e \in \mathbb{S}^1 : f_\delta^*(e) > \lambda\}$. Tenemos que ver que

$$\sigma(\Omega) \lesssim \frac{\log(\frac{1}{\delta})|E|}{\lambda^2}. \tag{4.2}$$

Notamos con θ_{jk} al ángulo entre $e_j, e_k \in \mathbb{S}^1$ y con θ_j al ángulo formado por e_j y el eje x. Por claridad de la exposición veremos la desigualdad (4.2) para

$$\tilde{\Omega} = \Omega \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$$

de lo que se deduce (4.2). Sea $\delta > 0$. Sea $\{e_j\}_{j=1}^M \subseteq \tilde{\Omega}$ un conjunto δ-separado tal que $\theta_j > \theta_k$ si $j > k$ con $\sigma(\tilde{\Omega}) \leq \delta M$ (lo que se puede conseguir por Lema 4.1.3). Para cada $e_j \in \tilde{\Omega}$ vale que $f_\delta^*(e_j) > \lambda$. Entonces existe $a_j \in \mathbb{R}^n$ y un δ-tubo que notaremos T_j tal que $T_j = T_{e_j}^\delta(a_j)$ y

$$\frac{1}{|T_j|} \int_{T_j} \chi_E(x)dx = \frac{|T_j \cap E|}{|T_j|} \geq \lambda.$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^M |T_j \cap E| \geq \sum_{j=1}^M \lambda |T_j| \approx \sum_{j=1}^M \lambda\delta = M\lambda\delta.$$

[1] La demostración en [Wol03] es una modificación de un argumento de Antonio Córdoba usado en [Cor77]

Ahora,

$$\begin{aligned} M\lambda\delta &\lesssim \sum_{j=1}^{M} |T_j \cap E| = \sum_{j=1}^{M} \int_E \chi_{T_j}(x)dx \\ &= \int_E \sum_{j=1}^{M} \chi_{T_j}(x)dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_E(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \| \sum_{j=1}^{M} \chi_{T_j} \|_2 \qquad \text{Cauchy-Schwartz} \\ &= |E|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\sum_{j=1}^{M} \chi_{T_j}(x)dx)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |E|^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j,k} |T_k \cap T_j| \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Para acotar la última suma usamos la observación previa sobre intersección de δ-tubos y obtenemos

$$\left(\sum_k \sum_j |T_k \cap T_j| \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_k \left(\delta + \sum_{j \neq k} \frac{\delta^2}{\sin(\theta_{kj})} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Usamos ahora que si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entonces $\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\sum_k \sum_j |T_k \cap T_j| \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \left(\sum_k \left(\delta + \sum_{j \neq k} 2\frac{\delta^2}{\theta_{kj}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} && (4.3) \\ &\leq \left(\sum_k \left(\delta + 2\sum_{j \neq k} \frac{\delta^2}{|k-j|\delta} \right) \right)^{\frac{1}{2}} && (4.4) \\ &= \left(\sum_k \delta \left(1 + 2\sum_{j \neq k} \frac{1}{|k-j|} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\sim \left(\sum_k \delta \log(\frac{1}{\delta}) \right)^{\frac{1}{2}} && (4.5) \\ &\leq \left(M\delta \log(\frac{1}{\delta}) \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde usamos en (4.4) que $\theta_{kj} \geq |k-j|\delta$ y en (4.5) que para cada k fijo hay $\approx \frac{1}{\delta}$ valors de j. Obtuvimos entonces que,

$$M\lambda\delta \leq |E|^{\frac{1}{2}} (M\delta)^{\frac{1}{2}} \log(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}}$$

de modo que

$$(M\delta)^{\frac{1}{2}}\lambda \leq |E|^{\frac{1}{2}} \log(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}}$$

y como $\sigma(\tilde{\Omega}) \leq M\delta$ tenemos el resultado deseado

$$\sigma(\tilde{\Omega}) \leq M\delta \leq \frac{|E| \log(\frac{1}{\delta})}{\lambda^2}.$$

■

Estamos ahora en condiciones de usar el Teorema 3.3.4 para concluir que la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Kakeya en $\mathbb{R}^2$ es 2. Basta observar que dado $\alpha > 0$, podemos elegir δ_0 suficientemente chico para que $\log(\frac{1}{\delta}) \leq \delta^{-\alpha}$ para todo $\delta \leq \delta_0$. Entonces concluimos que la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Kakeya es mayor o igual que $2 - 2\alpha$ para todo $\alpha > 0$, de modo que debe ser exactamente 2.

En dimensión 2 también es conocido un resultado positivo sobre la acotación fuerte del operador maximal de Kakeya. Damos a continuación dos pruebas independientes del siguiente teorema

Teorema 4.2.2 *El operador maximal de Kakeya satisface*

$$\|K_\delta f\|_2 \leq C \log(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

Demostración: (Bourgain)

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que f es una función no negativa. Definimos las siguientes funciones para cada $\delta > 0$ y cada $e \in \mathbb{S}^1$

$$\rho_\delta^e(x) := \frac{\chi_{T_e^\delta(0)}(x)}{2\delta}$$

Esto nos permite reescribir la función maximal de Kakeya en términos de una convolución pues haciendo el cambio de variables $x = a - y$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\delta} \int_{T_e^\delta(a)} f(x)dx &= \frac{1}{2\delta} \int_{T_e^\delta(0)} f(a-y)dx \\
&= \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{T_e^\delta(0)}(y) f(a-y)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\delta^e(y) f(a-y)dx \\
&= (\rho_\delta^e * f)(a)
\end{aligned}$$

Entonces

$$f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\rho_\delta^e * f)(a)$$

Tomemos ahora una función ϕ en la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\hat{\phi}$ tenga soporte compacto contenido en $[-M, M]$ para algún $M > 0$ y $\phi(x) \geq 1$ para todo x tal que $|x| \leq 1$. A partir de esa función definimos $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$\psi(x_1, x_2) := \phi(x_1)\frac{1}{\delta}\phi\left(\frac{x_2}{\delta}\right).$$

Observemos que si tomamos la dirección $e = e_1 = (1, 0)$, para todo $x \in T^{\delta}_{e_1}(0)$ vale

$$\psi(x) = \phi(x_1)\frac{1}{\delta}\phi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \geq \frac{1}{\delta}$$

de modo que $\psi(x) \geq \rho^e_\delta(x)$ y por lo tanto

$$f^*_\delta(e_1) \leq \sup_{a\in\mathbb{R}^2} (\psi * f)(a)$$

(donde usamos la hipótesis de no negatividad de la f). Del mismo modo, dado un $e \in \mathbb{S}^1$ arbitrario, es posible definir una rotación r_e de modo que para $\psi_e := \psi \circ r_e$ obtengamos la misma relación

$$f^*_\delta(e) \leq \sup_{a\in\mathbb{R}^2} (\psi_e * f)(a)$$

para todo $e \in \mathbb{S}^1$. Entonces por la propiedad 3 de la Proposición 4.1.7

$$f^*_\delta(e) \leq \|\psi_e * f\|_\infty \leq \|\hat{\psi}_e \hat{f}\|_1$$

y obtenemos que

$$\begin{aligned} f^*_\delta(e) &\leq \|\hat{\psi}\hat{f}\|_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_e(\xi)||\hat{f}(\xi)|d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_e(\xi)|^{\frac{1}{2}}(1+|\xi|)^{\frac{1}{2}}|\hat{f}(\xi)|\frac{|\hat{\psi}_e(\xi)|^{\frac{1}{2}}}{(1+|\xi|)^{\frac{1}{2}}}d\xi. \end{aligned}$$

Usando Cauchy-Schwartz (pues $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$) y obtenemos

$$f^*_\delta(e) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_e(\xi)|(1+|\xi|)|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}_e(\xi)|}{1+|\xi|}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.6}$$

Para acotar la segunda integral en (4.6), observemos que podemos escribir $\hat{\psi}(\xi_1, \xi_2)$ de acuerdo a la definición

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi_1, \xi_2) &= \int \phi(x_1)\frac{1}{\delta}\phi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) e^{-2\pi i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} dx_1 dx_2 \\ &= \hat{\phi}(\xi_1)\hat{\phi}(\delta\xi_2). \end{aligned}$$

de modo que el soporte de $\hat{\psi}$ esta contenido en un rectángulo del tipo $[-M, M] \times [\frac{-M}{\delta}, \frac{M}{\delta}]$. Además, como r_e es una transformación ortogonal, por la propiedad 5 de la Proposición 4.1.6 tenemos que $\hat{\psi}_e = \hat{\psi} \circ r_e$. De esto último deducimos que el soporte de $\hat{\psi}_e$ está contenido en un rectángulo R_e centrado en el origen de lados de longitud $2M$ y $\frac{2M}{\delta}$. Por último recordemos que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de modo que también $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En particular, $\|\hat{\phi}\|_\infty \leq K < \infty$ y lo mismo vale para $\hat{\psi}_e$.

Podemos ahora acotar la segunda integral de (4.6):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}_e(\xi)|}{1+|\xi|} d\xi &\leq \int_{R_e} \frac{K}{1+|\xi|} d\xi \\ &\leq \int_{-\frac{M}{\delta}}^{\frac{M}{\delta}} \int_{-M}^{M} \frac{K}{1+|\xi|} d\xi \end{aligned}$$

pues el integrando es radial. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}_e(\xi)|}{1+|\xi|} d\xi &\lesssim \int_{-\frac{M}{\delta}}^{\frac{M}{\delta}} \frac{K}{1+|\xi_2|} d\xi_2 \\ &\lesssim \int_{0}^{\frac{M}{\delta}} \frac{K}{1+|\xi_2|} d\xi_2 \\ &\approx \log(1+\frac{M}{\delta}) \end{aligned}$$

y como sólo nos interesa el rango $\delta \ll 1$ la última línea es comparable con $\log(\frac{1}{\delta})$. Volvemos a la ecuación (4.6) y reemplazamos para obtener:

$$f_\delta^*(e) \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_e(\xi)|(1+|\xi|)|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\log(\frac{1}{\delta}) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Calculamos ahora la norma 2 de $f_\delta^*(e)$:

$$\begin{aligned} \|f_\delta^*\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 &\lesssim \log(\frac{1}{\delta}) \int_{\mathbb{S}^1} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_e(\xi)|(1+|\xi|)|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) de \\ &= \log(\frac{1}{\delta}) \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|)|\hat{f}(\xi)|^2 \left(\int_{\mathbb{S}^1} |\hat{\psi}_e(\xi)| de \right) d\xi. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Queremos estimar ahora el valor de la integral sobre $\mathbb{S}^1$.

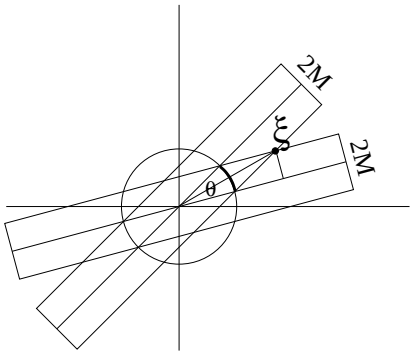

Figura 4.2:

Para eso notemos primero que como el soporte de $\hat{\psi}_e$ está contenido en un rectángulo R_e centrado en el origen, para valores grandes de $|\xi|$ (con ξ fijo) la medida del conjunto de puntos $e \in \mathbb{S}^1$ tal que $\hat{\psi}_e \neq 0$ es del orden de $\frac{1}{|\xi|}$. Esto es así pues, como se ve en la Figura 4.2, $\sin(\frac{\theta}{2}) = \frac{M}{|\xi|}$ para $|\xi| \geq M$ y entonces $\theta \lesssim \arcsin(\frac{M}{|\xi|}) \approx \frac{M}{|\xi|}$. Podemos ahora calcular la integral (4.7) en dos partes: sea B una bola de radio mayor que M centrada en el origen.

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|)|\hat{f}(\xi)|^2 \left(\int_{\mathbb{S}^1} |\hat{\psi}_e(\xi)| de \right) d\xi = \int_B + \int_{B^c}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_B + \int_{B^c} &\lesssim \int_B |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int_{B^c} |\hat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|) K \arcsin(\frac{M}{|\xi|}) d\xi \\ &\lesssim \int_B |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int_{B^c} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

. Reemplazando en la desigualdad (4.7) queda

$$\|f^*_\delta\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)} \lesssim \log(\frac{1}{\delta}) \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

que es la desigualdad buscada. ∎

Presentamos ahora la otra demostración, que usa argumentos geométricos y de dualidad. Vamos a necesitar un lema previo. Para eso definimos la siguiente propiedad $\mathcal{P}(q)$:

Propiedad $\mathcal{P}(q)$: Decimos vale la propiedad $\mathcal{P}(q)$ si dado $\{e_k\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ un conjunto δ-separado maximal y $\{y_k\}$ una sucesión de números reales tal que $\delta^{n-1} \sum_k y_k^q \leq 1$ entonces existe una constante $0 < A < \infty$ tal que para cualquier elección de puntos $a_k \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\| \sum_k y_k \chi_{T^\delta_{e_k}(a_k)} \|_q \leq A$$

Tanto la propiedad $\mathcal{P}(q)$ como el lema que sigue están enunciados y probados en el contexto general de dimensión n y exponente q, aunque en la demostración del teorema sólo usaremos $n = p = 2$.

Lema 4.2.3 *Sea $1 < p < \infty$ y sea p' tal que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$.*
Supongamos que vale la propiedad $\mathcal{P}(p')$. Entonces

$$\|f^*_\delta\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim A \|f\|_p$$

Demostración: Sea $\{e_k\}$ un subconjunto δ-separado maximal de $\mathbb{S}^{n-1}$. Observemos primero que si para un par de direcciones cualesquiera $e, e' \in \mathbb{S}^{n-1}$ tenemos que $|e - e'| = \eta < \delta$ entonces $f^*_\delta(e) \leq C f^*_\delta(e')$. Esto es así pues como $\eta < \delta$ existe una constante C independiente de δ tal que cada tubo $T^\delta_e(a)$ puede ser cubierto por a lo sumo C tubos en dirección e'.

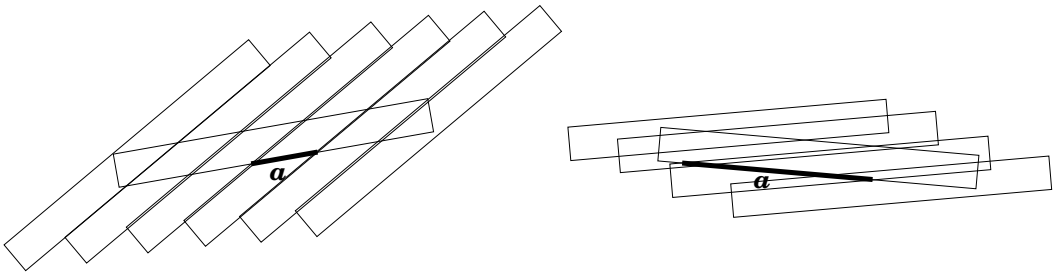

Figura 4.3: Si $|e - e'| = \eta < \delta$, cada tubo en la dirección e se cubre con una cantidad acotada de tubos en la dirección e'.

La cantidad de tubos en la dirección e' necesarios es del orden de $\frac{1}{a}$ con $a = \text{mín}(1, \frac{2\delta}{\sin \eta})$ de modo que esta cantidad es $\approx \text{máx}(1, \frac{2 \sin \eta}{\delta})$ que está acotado por una constante pues $\eta < \delta$. Valiéndonos de este hecho, para $e, e' \in \mathbb{S}^1$ con $|e - e'| = \eta < \delta$ podemos acotar a $f^*_\delta(e)$ de la siguiente manera.

Tomamos un promedio típico de los que definen a $f_\delta^*(e)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|T_e^\delta(a)|}\int_{T_e^\delta(a)}|f| &\leq \frac{1}{|T_e^\delta(a)|}\int_{\bigcup_{i=1}^C T_{e'}^\delta(a_i)}|f| \\ &\leq \sum_{i=1}^C \frac{1}{|T_e^\delta(a)|}\int_{T_{e'}^\delta(a_i)}|f|\end{aligned}$$

y como los tubos tienen todos la misma medida,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|T_e^\delta(a)|}\int_{T_e^\delta(a)}|f| &\leq \sum_{i=1}^C \frac{1}{|T_{e'}^\delta(a_i)|}\int_{T_{e'}^\delta(a_i)}|f| \\ &\leq Cf_\delta^*(e').\end{aligned}$$

Como $f_\delta^*(e)$ es el supremo de todos estos promedios y $Cf_\delta^*(e')$ resulta ser una cota superior, tenemos la desigualdad buscada

$$f_\delta^*(e) \leq Cf_\delta^*(e').$$

Ahora usamos una vez más que como $\{e_k\}$ es un subconjunto δ-separado maximal las δ-bolas con centro en los puntos e_k cubren $\mathbb{S}^{n-1}$ y entonces

$$\begin{aligned}\|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} &= \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|f_\delta^*(e)|^p de\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\bigcup_k B(e_k,\delta)}|f_\delta^*(e)|^p de\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_k \int_{B(e_k,\delta)}|f_\delta^*(e)|^p de\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Por la observación hecha al principio, sobre cada bola podemos acotar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\|f_\delta^*\|_p &\lesssim \left(\sum_k \int_{B(e_k,\delta)}|f_\delta^*(e_k)|^p de\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \left(\sum_k \delta^{n-1}|f_\delta^*(e_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \delta^{\frac{n-1}{p}}\left(\sum_k |f_\delta^*(e_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \delta^{\frac{n-1}{p}}\|\{f_\delta^*(e_k)\}_k\|_{\ell^p}\end{aligned}$$

Usamos ahora un argumento de dualidad entre $\ell^p(\mathbb{N})$ y $\ell^{p'}(\mathbb{N})$ para expresar la norma de la última igualdad como

$$\|\{f_\delta^*(e_k)\}_k\|_{\ell^p} = \sum_k y_k \delta^{\frac{n-1}{p'}} f_\delta^*(e_k),$$

con $\{y_k\}_k$ una sucesión en $\ell^{p'}(\mathbb{N})$ tal que $\|\{y_k\}_k\|_{p'} = \delta^{-\frac{n-1}{p'}}$. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
\|f_\delta^*\|_p &\lesssim \delta^{\frac{n-1}{p}} \sum_k y_k \delta^{\frac{n-1}{p'}} f_\delta^*(e_k) \\
&= \delta^{(n-1)(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'})} \sum_k y_k f_\delta^*(e_k) \\
&= \delta^{n-1} \sum_k y_k \frac{1}{|T_{e_k}^\delta(a_k)|} \int_{T_{e_k}^\delta(a_k)} |f|.
\end{aligned}$$

Como los δ-tubos en $\mathbb{R}^n$ tienen medida del orden de δ^{n-1} queda que

$$\begin{aligned}
\|f_\delta^*\|_p &\lesssim \sum_k y_k \int_{T_{e_k}^\delta(a_k)} |f| \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_k y_k \chi_{T_{e_k}^\delta(a_k)} |f| \\
&\leq \|\sum_k y_k \chi_{T_{e_k}^\delta(a_k)}\|_{p'} \|f\|_p \qquad \text{(Hölder)} \\
&\leq A\|f\|_p.
\end{aligned}$$

■

Presentamos ahora la segunda demostración de Teorema 4.2.2

Demostración: (Wolff-Córdoba)

Gracias al Lema 4.2.3 basta probar que si $\{e_k\}$ es un conjunto δ-separado maximal en $\mathbb{S}^1$ y $\{y_k\}$ cumple $\delta \sum_k y_k^2 = 1$, entonces para cualquier elección de puntos $\{a_k\}$vale la cota

$$\|\sum y_k \chi_{T_{e_k}^\delta(a_k)}\|_2 \leq \sqrt{\log(\frac{1}{\delta})}.$$

Razonaremos en forma similar a lo hecho en la demostración del Teorema 4.2.1. Adoptamos la misma notación: θ_{jk} representa el ángulo formado entre

los δ-tubos en direcciones e_j y e_k. Tenemos que,

$$\begin{aligned}
\|\sum y_k \chi_{T^\delta_{e_k}(a_k)}\|_2^2 &= \sum_{j,k} y_j y_k |T^\delta_{e_j}(a_j) \cap T^\delta_{e_k}(a_k)| \\
&\lesssim \sum_k \delta y_k^2 + \sum_{k\neq j} y_j y_k \frac{\delta^2}{\sin(\theta_{jk})} \qquad (4.8) \\
&= \sum_k \delta y_k^2 + \sum_{k\neq j} \sqrt{\delta} y_j \sqrt{\delta} y_k \frac{\delta}{\sin(\theta_{jk})} \\
&\lesssim \sum_k \delta y_k^2 + \sum_{k\neq j} \sqrt{\delta} y_j \sqrt{\delta} y_k \frac{\delta}{\theta_{jk}}.
\end{aligned}$$

donde usamos en (4.8) el Lema 4.1.9.

Miremos ahora el operador $T_K : \ell^2 \to \ell^2$ definido como

$$\left(T_K(\{y_j\})\right)(k) = \sum_k K(j,k) y_k$$

con el núcleo K:

$$K(j,k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ \frac{\delta}{\theta_{jk}} & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Observemos ahora que por la maximalidad del conjunto δ-separado $\{e_k\}$ éste tiene una cantidad de elementos del orden de δ^{-1} de modo que para k fijo podemos argumentar de forma similar a la demostración de Teorema 4.2.1

$$\sum_j K(j,k) = 1 + \sum_{j\neq k} \frac{\delta}{\theta_{jk}} \lesssim 1 + \sum_{1\leq \ell \lesssim \frac{1}{\delta}} \frac{\delta}{\ell\delta} = 1 + \sum_{1\leq \ell \lesssim \frac{1}{\delta}} \frac{1}{\ell} \approx \log(\frac{1}{\delta})$$

y en forma análoga, para j fijo

$$\sum_j K(j,k) \lesssim \log(\frac{1}{\delta})$$

Aplicamos ahora el test de Schur (ver apéndice: Lema B.0.2)al núcleo $K(j,k)$ y al operador T_K obteneniendo que

$$\begin{aligned}
\|\sum y_k \chi_{T^\delta_{e_k}(a_k)}\|_2^2 &\lesssim \left\langle \{\sqrt{d} y_k\}, T_K(\{\sqrt{\delta} y_k\} \right\rangle_{\ell^2} \\
&\leq \|\{\sqrt{d} y_k\}\|_{\ell^2} \|T_K\{\sqrt{d} y_k\}\|_{\ell^2} \qquad \text{Cauchy-Schwarz} \\
&\lesssim \log(\frac{1}{\delta}) \|\{\sqrt{d} y_k\}\|_{\ell^2} \|\{\sqrt{d} y_k\}\|_{\ell^2} \\
&= \log(\frac{1}{\delta}) \|\{\sqrt{d} y_k\}\|_{\ell^2}^2 = \log(\frac{1}{\delta}) \sum_k (\sqrt{\delta} y_k)^2 = \log(\frac{1}{\delta}),
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del teorema ∎

4.3. Conjuntos de Furstenburg

Un problema en $\mathbb{R}^2$ de similar aspecto al de Kakeya pero aún abierto consiste en considerar un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que para cualquier dirección $e \in \mathbb{S}^1$ existe una recta L_e en dirección e con $\dim_H(E \cap L_e) \geq \alpha$. Un conjunto con estas características se denomina conjunto de Furstenburg(α). La pregunta es cuán chica puede ser la dimensión de Hausdorff de E

Los mejores resultados conocidos acerca de este problema están expuestos en [Wol99], en donde se muestra que con técnicas similares a las usadas en el problema de Kakeya se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1 *Sea $\alpha \in (0, 1]$ y $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto. Supongamos que para cada dirección $e \in \mathbb{S}^1$ existe una recta L_e en dirección e con $\dim_H(E \cap L_e) \geq \alpha$. Entonces $\dim_H(E) \geq \text{máx}\{2\alpha, \frac{1}{2} + \alpha\}$.*

Este teorema, junto con la construccion que se hace en [Wol99] de un conjunto de Furstenburg de dimensión $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha$ permiten acotar

$$\text{máx}(2\alpha, \frac{1}{2} + \alpha) \leq \gamma(\alpha) \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha$$

donde $\gamma(\alpha)$ es el ínfimo de los posibles valores de $\dim_H(E)$ para los conjuntos E de Furstenburg(α)

Capítulo 5

Conjetura "M" de Kakeya en $\mathbb{R}^n$

En dimensión $n \geq 3$ todas las versiones de la conjetura de Kakeya están aún abiertas. Mostraremos en esta sección algunas de las técnicas usadas para atacar el problema y algunos de los resultados conocidos en dimensiones superiores.

5.1. La conjetura de Kakeya en cuerpos finitos

Una de las técnicas apropiadas para estudiar el problema de Kakeya en dimensiones superiores es considerar primero el problema análogo formulado en espacios vectoriales sobre cuerpos finitos. La idea detrás de este enfoque es que en cuerpos finitos el problema involucra líneas en lugar de tubos y cardinalidad en lugar de medida, por lo que se reduce a la tarea más simple (pero aún nada trivial) de contar puntos. Introducimos la notación necesaria para eso.

Definición 5.1.1 *Sea $\mathbb{F}_q$ "el" cuerpo con q elementos. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_q$ de dimensión finita n. Para cada par de elementos $a, e \in V$, $e \neq 0$ definimos la recta $L(a, e) \subseteq V$ en dirección e como*

$$L(a, e) = \{a + te : t \in \mathbb{F}_q\}$$

Lema 5.1.2 *Dadas dos direcciones $e, e' \in \mathbb{F}_q^n \backslash \{0\}$ y $x \in \mathbb{F}_q^n$ vale que*

$$L(x, e) = L(x, e') \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{F}_q \text{ tal que } e = \lambda e' \quad .$$

Demostración: Si $L(x, e) = L(x, e')$ entonces para $1 = t \in \mathbb{F}_q$ existe $t' \in \mathbb{F}_q$ tal que

$$x + e = x + t'e'$$

y entonces

$$e = t'e'$$

Recíprocamente, si existe $\lambda \in \mathbb{F}_q \backslash \{0\}$ tal que $e = \lambda e'$ entonces para todo $t \in \mathbb{F}_q$ tenemos que

$$x + te = x + t\lambda e'$$

y obtenemos la conclusión tomando $t' = t\lambda$. ■

De este lema se deduce que en $\mathbb{F}_q^n$ hay sólo $\frac{q^n-1}{q-1} \approx q^{n-1}$ posibles direcciones para orientar una recta. A partir de aquí decimos que dos direcciones $e, e' \in \mathbb{F}_q^n$ son distintas si $e \neq \lambda e'$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}_q$. Necesitamos un lema acerca de la intersección de rectas en $\mathbb{F}_q^n$.

Lema 5.1.3 *Dos rectas distintas $L(x, e)$ y $L(x', e')$ en $\mathbb{F}_q^n$ son disjuntas o se intersecan en sólo un punto.*

Demostración: Supongamos que $a, b \in L(x, e) \cap L(x', e')$. Entonces existen t y t' en $\mathbb{F}_q$ tales que

$$a = x + t_a e = x' + t'_a e' \qquad \text{y} \qquad b = x + t_b e = x' + t'_b e'$$

entonces

$$x - x' = t'_a e' - t_a e \qquad \text{y} \qquad x - x' = t'_b e' - t_b e$$

de modo que

$$\begin{aligned} t'_a e' - t_a e &= t'_b e' - t_b e \\ t_b e - t_a e &= t'_b e' - t'_a e' \\ (t_b - t_a)e &= (t'_b - t'_a)e' \end{aligned}$$

y como $L(x, e) = L(a, e)$ y $L(x', e') = L(a, e')$ entonces por el Lema 5.1.2 resulta que $L(x, e) = L(x', e')$ lo que contradice la hipótesis. Entonces dos rectas distintas en $\mathbb{F}_q^n$ si se cortan lo hacen en tan sólo un punto. ■

Definición 5.1.4 *Sea $n \geq 2$, $V = \mathbb{F}_q^n$. Un conjunto de Kakeya $E \subseteq V$ es un conjunto tal que para cada $0 \neq e \in V$, existe $a \in V$ tal que*

$$L(a, e) \subseteq E$$

Podemos formular entonces el problema de Kakeya en este contexto.

Conjetura "F" de Kakeya

Si $E \subseteq V = \mathbb{F}_q^n$ es un conjunto de Kakeya entonces $(\#E) \gtrsim C_n q^n$ con C_n independiente de q.

Estimaremos la cantidad de elementos de los conjuntos de Kakeya con dos estrategias distintas. En ambas la idea es distinguir en los casos en que los conjuntos estan ó no "muy desparramados". Intuitivamente, si se buscan contraejemplos para la conjetura de Kakeya éstos deben ser construidos mediante conjuntos de rectas con un alto grado de incidencia.

El primer resultado en cuerpos finitos es el siguiente, conocido como el argumento del "arbusto"

Teorema 5.1.5 *Si $E \subseteq \mathbb{F}_q^n$ es un conjunto de Kakeya entonces $\#(E) \gtrsim q^{\frac{n+1}{2}}$*

Demostración: Sea $E \subseteq \mathbb{F}_q^n$ un conjunto de Kakeya. Entonces contiene una recta en cada una de las $\frac{q^n-1}{q-1} \geq Cq^{n-1}$ posibles direcciones. Para cada punto en E definimos el par (p, ℓ) si el punto p pertenece a la recta ℓ. La cantidad de dichos pares es al menos Cq^n pues cada recta tiene q puntos. Distinguimos dos casos:

1. todos los puntos de E pertenecen a menos de $Cq^{\frac{n-1}{2}}$ rectas (no hay puntos de alta multiplicidad)

2. existe algún punto de E que pertenece a por lo menos $Cq^{\frac{n-1}{2}}$ rectas (hay un punto de alta multiplicidad).

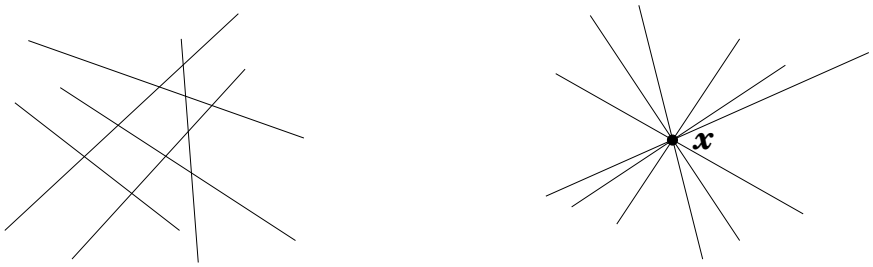

Figura 5.1: Baja y alta multiplicidad

En el caso 1, tenemos que como hay Cq^n pares (p, ℓ), podemos acotar

$$Cq^n \leq \#(E) q^{\frac{n-1}{2}}$$

y por lo tanto

$$\#(E) \geq C^{-1} q^{\frac{n+1}{2}}$$

En el caso 2, podemos tomar x un punto de alta multiplicidad. Definimos $L = Cq^{\frac{n-1}{2}}$ y sean $\{\ell_j\}_{j=1}^{L}$ las rectas a las que pertenece el punto x. Por el Lema 5.1.3 fuera del punto x estas rectas son disjuntas y la unión de ellas tiene $1 + L(q-1)$ elementos. Entonces

$$\#(E) \geq 1 + L(q-1) = 1 + Cq^{\frac{n-1}{2}}(q-1) \gtrsim q^{\frac{n+1}{2}} \quad .$$

■

Una manera de mejorar el argumento del "arbusto" del teorema anterior consiste en considerar rectas de alta multiplicidad en lugar de puntos de alta multiplicidad. El argumento se basa en reducir el problema al caso en que una de las rectas contenidas en el conjunto de Kakeya es cortada por suficientes de las demás rectas. El siguiente teorema se encuentra en [Wol99] y es conocido como el argumento del "cepillo". Vamos a necesitar un lema previo acerca del problema en dimensión 2.

Lema 5.1.6 *Sea $A \subseteq \mathbb{F}_q^2$. Sean $\ell_1, ..., \ell_m$ rectas en $\mathbb{F}_q^2$ en distintas direcciones. Si el conjunto A contiene al menos $\frac{q}{2}$ puntos en cada una de las rectas $\ell_1, ..., \ell_m$ entonces $\#(A) \gtrsim mq$.*

Demostración: Observemos primero que si $1 \leq i \neq j \leq m$ entonces tenemos que $\ell_i \cap \ell_j = \{p_{ij}\}$ pues al igual que en el espacio euclideano de dos dimensiones, dos rectas de pendientes distintas se intersecan en un punto. Además $m \leq q+1$ pues en dimensión 2 tenemos $\frac{q^2-1}{q-1} = q+1$ posibles direcciones distintas. Entonces

$$\begin{aligned}
(\frac{q}{2}m)^2 &= \left(\sum_{x\in A}\sum_{j=1}^{m} \chi_{\ell_j}(x)\right)^2 \\
&\leq \#(A)\sum_{x\in\mathbb{F}_q^2}\left(\sum_{j=1}^{m}\chi_j(x)\right)^2 \qquad \text{(Cauchy-Schwartz)} \\
&= \#(A)\sum_{j,k}^{m}\#(\ell_j\cap\ell_k) \\
&= \#(A)\sum_{j=1}^{m}(q+(m-1)) \\
&= \#(A)(mq+m(m-1)) \leq \#(A)2mq
\end{aligned}$$

y entonces $\#(A) \geq \frac{qm}{8} \gtrsim qm$. ■

Teorema 5.1.7 *Sea $E \in \mathbb{F}_q^n$ un conjunto de Kakeya. Entonces*

$$\#(E) \geq Cq^{\frac{n+2}{2}} \quad .$$

Demostración: Observemos primero que en el Lema 5.1.6 podemos tomar $m = q + 1$ y obtenemos la prueba del teorema para el caso $n = 2$, lo que muestra que la conjetura "F" de Kakeya también está resuelta para dimensión dos.

Sea ahora $n \geq 3$. En este caso el conjunto E contiene $\frac{q^n-1}{q-1} \approx q^{n-1}$ rectas $\ell_1, ..., \ell_m$. Fijamos un número $\mu \in \mathbb{N}$. Vamos adecir que una recta ℓ_k es de alta multiplicidad si para al menos $\frac{q}{2}$ de los q puntos $x \in \ell_k$ el conjunto $\{j : x \in \ell_j\}$ tiene cardinalidad mayor o igual que $\mu + 1$. Consideraremos por separado los casos en los que el conjunto E contenga o no rectas de alta multiplicidad.

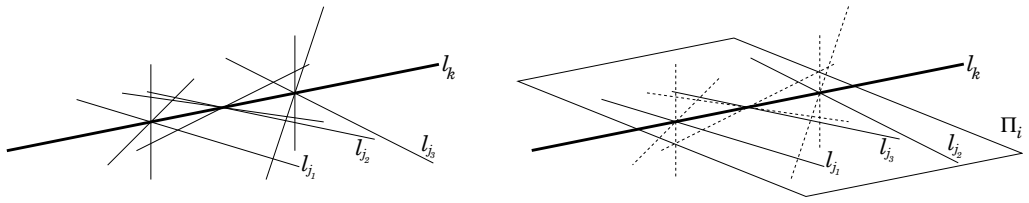

Figura 5.2: Muchas rectas cortan a la recta ℓ_k formando un "cepillo". El plano Π_i contiene a las rectas ℓ_{j_1}, ℓ_{j_2} y ℓ_{j_3}

Caso (1): El conjunto E no contiene rectas de alta multiplicidad. Definimos

$$\tilde{E} := \{x \in E : \#(\{j : x \in \ell_j\}) \leq \mu\} \quad .$$

Por hipótesis, tenemos que para todo $1 \leq j \leq m$ vale que $\#(\tilde{E} \cap \ell_j) \geq \frac{q}{2}$. Además,

$$\sum_{j=1}^{m} \#(\tilde{E} \cap \ell_j) = \sum_{x \in \tilde{E}} \#(\{x\} \cap \ell_j) \leq \sum_{x \in \tilde{E}} \mu = \#(\tilde{E})\mu$$

de modo que

$$\#(E) \geq \#(\tilde{E}) \geq \mu^{-1} \sum_{j=1}^{m} \#(\tilde{E} \cap \ell_j) \geq \mu^{-1} \frac{q}{2} m \gtrsim \mu^{-1} q^n \quad .$$

Caso (2): El conjunto E contiene una recta de alta multiplicidad. Sea ℓ_k tal recta. Por hipótesis, hay por lo menos $\frac{\mu q}{2}$ rectas ℓ_j $(j \neq k)$ que intersecan a ℓ_k. Sea $\{\Pi_i\}$ una numeración de todos los 2-planos que contienen a ℓ_k y a a alguna de las rectas ℓ_j. Cada una de estas rectas está en un único 2-plano Π_i y contiene a $q-1$ puntos de Π_i que no están en ℓ_k. Definimos como $\mathcal{L}_i$ el conjunto de rectas que están contenidas en Π_i. Observemos que para el plano Π_i estamos en las condiciones del Lema 5.1.6 de modo que

$$\#(E \cap \Pi_i \cap (\mathbb{F}_q^n \backslash \ell_k) \gtrsim q\#(\mathcal{L}_i)$$

como los conjuntos $\Pi_i \cap (\mathbb{F}_q^n \backslash \ell_k)$ son disjuntos con i variando tenemos que

$$\#(E) \geq \sum_i \#(\Pi_i \cap (\mathbb{F}_q^n \backslash \ell_k)) \gtrsim q \sum_i \#(\mathcal{L}_i) \geq \frac{q\mu}{2}$$

Antes de seguir hacemos una observación muy informal sobre estos dos casos. Cuanto más grande sea el valor de μ, más fácil será que no haya rectas de alta multiplicidad, pero entonces obtenemos las cotas del caso (1) que son peores a medida que μ crece. Por el otro lado, si μ es chico será más fácil que haya rectas de alta mltiplicidad pero la acotación ahí empeora cuando μ decrece. La idea entonces es elegir un valor de μ que nos brinde en los dos casos la cota que buscamos. Podemos tomar entonces $\mu = q^{\frac{n-2}{2}}$ y obtenemos en calquiera de los casos que

$$\#(E) \gtrsim q^{\frac{n+2}{2}} \quad .$$

■

5.2. De los cuerpos finitos a $\mathbb{R}^n$.

En la sección anterior probamos dos resultados sobre la conjetura de Kakeya en cuerpos finitos usando los argumentos del "arbusto" y del "cepillo". Es muy razonable pretender llevar esos argumentos al espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ cambiando las rectas por tubos y considerando "manojos" de tubos con ciertas propiedades de multiplicidad en la intersección. En esta sección mostraremos cómo llevar a $\mathbb{R}^n$ el argumento del "arbusto" para probar una acotación débil del operador maximal de Kakeya análoga a la del Teorema 5.1.5. También es posible razonar como en el Teorema 5.1.7 para obtener un resultado análogo en $\mathbb{R}^n$. Esta última prueba es bastante más delicada y no la expondremos aquí, pero señalamos que está desarrollada en un contexto más general en [Wol95].

Teorema 5.2.1 *El operador maximal de Kakeya en $\mathbb{R}^n$ es de tipo débil $(\frac{n+1}{2}, n+1)$ con norma menor o igual que $C_n\delta^{-\frac{n-1}{n+1}}$. Es decir*

$$\|f_\delta^*\|_{n+1,\infty} \leq C_n\delta^{-\frac{n-1}{n+1}}\|f\|_{\frac{n+1}{2},1} \qquad \forall\, f \in L^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Demostración: Tenemos que probar que para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida finita vale que

$$\sigma(\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : f_\delta^*(e) > \lambda\}) \leq \left(\frac{C_n\delta^{-\frac{n-1}{n+1}}|E|^{\frac{2}{n+1}}}{\lambda}\right)^{n+1} = \frac{A_n\delta^{-(n-1)}|E|^2}{\lambda^{n+1}}$$

Sea $\Omega = \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : f_\delta^*(e) > \lambda\}$ y $\delta > 0$. Por el Lema 4.1.3 tenemos que

$$\mathcal{N}_\delta(\Omega) \gtrsim \frac{\sigma(\Omega)}{\delta^{n-1}} \quad . \tag{5.1}$$

Podemos elegir entonces un conjunto δ-separado $\{e_j\}_{j=1}^M \subset \mathbb{S}^{n-1}$ con $M \gtrsim \frac{\sigma(\Omega)}{\delta^{n-1}}$. Por hipótesis, para cada $1 \leq j \leq M$ tenemos que $f_\delta^*(e_j) > \lambda$, de modo que existe un tubo $T_{e_j}^\delta$ tal que

$$|E \cap T_{e_j}^\delta| \geq \lambda|T_{e_j}^\delta| \approx \lambda\delta^{n-1} \quad .$$

Razonamos como en el Teorema 4.2.1. Como $\sigma(\Omega) \lesssim M\delta^{n-1}$, basta probar que

$$|E| \gtrsim \delta^{n-1}\lambda^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{M} \tag{5.2}$$

pues en ese caso,

$$\begin{aligned} |E|^2 &\gtrsim \delta^{2(n-1)}\lambda^{n+1}M \\ &\gtrsim \lambda^{n+1}\delta^{n-1}\sigma(\Omega) \quad . \end{aligned}$$

Fijamos ahora $\mu \in \mathbb{N}$ y distinguimos dos casos

1. (baja multiplicidad μ) Ningún punto $a \in E$ pertenece a más de μ tubos $T_{e_j}^\delta$
2. (alta multiplicidad μ) Existe un punto $a \in E$ que pertenece a más de μ tubos $T_{e_j}^\delta$

Para el caso 1 vemos que

$$\sum_{j=1}^M |E \cap T_{e_j}^\delta| = \sum_{j=1}^M \int_E \chi_{T_{e_j}^\delta}(x)dx = \int_E \sum_{j=1}^M \chi_{T_{e_j}^\delta}(x)dx \leq \int_E \mu = |E|\mu \quad .$$

y entonces

$$|E| \geq \mu^{-1} \sum_{j=1}^{M} |E \cap T_{e_j}^{\delta}| \gtrsim \mu^{-1} \lambda M \delta^{n-1} \quad .$$

Para el caso 2, tomamos $a \in E$ un punto de alta multiplicidad μ. Podemos suponer que a pertenece a $T_{e_j}^{\delta}$ cuando $j \leq \mu + 1$. Ahora como tenemos finitos tubos, podemos elegir una constante C_0 suficientemente grande para que

$$\left| T_{e_j}^{\delta} \cap B(a, \tfrac{\lambda}{C_0}) \right| \leq \frac{\lambda}{2} |T_{e_j}^{\delta}| \quad .$$

Entonces, para todo $1 \leq j \leq \mu + 1$

$$\begin{aligned} \lambda |T_{e_j}^{\delta}| &\leq |E \cap T_{e_j}^{\delta}| = |E \cap T_{e_j}^{\delta} \cap B(a, \tfrac{\lambda}{C_0})| + \left| E \cap T_{e_j}^{\delta} \cap \left(B(a, \tfrac{\lambda}{C_0}) \right)^c \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{2} |T_{e_j}^{\delta}| + \left| E \cap T_{e_j}^{\delta} \cap \left(B(a, \tfrac{\lambda}{C_0}) \right)^c \right| \end{aligned}$$

por lo que

$$\left| E \cap T_{e_j}^{\delta} \cap \left(B(a, \tfrac{\lambda}{C_0}) \right)^c \right| \geq \frac{\lambda}{2} |T_{e_j}^{\delta}| \approx \lambda \delta^{n-1} \quad . \tag{5.3}$$

La idea es tomar ahora sólo un subconjunto de las direcciones $\{e_j\}_{j=1}^{\mu+1}$ de manera que lejos del punto a los tubos en dichas direcciones resulten disjuntos. Para eso recordemos que por el Lema 4.1.9 sabemos que el diámetro de $(T_{e_j}^{\delta} \cap T_{e_k}^{\delta})$ es $\lesssim \frac{\delta}{\theta_{jk}}$ donde θ_{jk} representa el ángulo entre $T_{e_j}^{\delta}$ y $T_{e_k}^{\delta}$. Definimos para $1 \leq j \leq \mu + 1$

$$F_j := \left(E \cap T_{e_j}^{\delta} \cap B(a, \tfrac{\lambda}{C_0})^c \right) \quad ,$$

y observamos que

$$\begin{aligned} F_j \cap F_k &\subseteq \left(T_{e_j}^{\delta} \cap B(a, \tfrac{\lambda}{C_0})^c \right) \cap \left(\cap T_{e_k}^{\delta} \cap B(a, \tfrac{\lambda}{C_0})^c \right) \\ &\subseteq (T_{e_j}^{\delta} \cap T_{e_k}^{\delta}) \cap B(a, \tfrac{\lambda}{C_0})^c \\ &\subseteq B(a, \tfrac{\delta}{\theta_{jk}}) \cap B(a, \tfrac{\lambda}{C_0})^c \end{aligned}$$

de modo que si tomamos una constante $C_0 > C_1$ y sólo consideramos direcciones tales que $\theta_{jk} \geq C_1 \frac{\delta}{\lambda}$ entonces $B(a, \frac{\delta}{\theta_{jk}}) \subseteq B(a, \frac{\lambda}{C_1}) \subseteq B(a, \frac{\lambda}{C_0})$. De ahí concluimos que si tomamos un subconjunto $C_1 \frac{\delta}{\lambda}$-separado $\{e_{j_k}\}_{k=1}^{N} \subseteq \{e_j\}_{j=1}^{\mu+1}$

entonces los conjuntos F_{j_k}son disjuntos. Ahora,

$$\begin{aligned} |E| &\geq |E \cap \bigcup_{k=1}^{N} (T^{\delta}_{e_{j_k}} \cap B(a, \frac{\lambda}{C_0})^c)| \\ &= |\bigcup_{k=1}^{N} F_{j_k}| = \sum_{k=1}^{N} |F_{j_k}| \\ &\gtrsim \sum_{k=1}^{N} \lambda\delta^{n-1} = N\lambda\delta^{n-1} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Podemos tomar como N a la $C_1\frac{\delta}{\lambda}$-entropía de $\{e_j\}_{j=1}^{\mu+1}$ y como este conjunto es δ-separado, por el Lema 4.1.4 resulta que $N \gtrsim \mu\left(\frac{\delta}{\frac{\delta}{\lambda}}\right)^{n-1} = \mu\lambda^{n-1}$. Si juntamos esto con (5.4) obtenemos

$$|E| \gtrsim \mu\lambda^n\delta^{n-1} \quad .$$

Estamos ahora en una situación similar a la del Teorema 5.1.5, pues para cualquier μ debe ocurrir alguno de los dos casos 1 o 2. Tenemos que elegir un valor de μ que aporte en ambas situaciones la cota buscada. Si tomamos $\mu \approx \sqrt{M}\lambda^{-\frac{n-1}{2}}$ tenemos, ya sea en el caso 1 o en el 2, la acotación (5.2). En el caso 1 conseguimos

$$|E| \gtrsim \mu^{-1}\lambda M\delta^{n-1} \approx \sqrt{M}\delta^{n-1}\lambda^{\frac{n+1}{2}}$$

y en el caso 2

$$|E| \gtrsim \mu\lambda^n\delta^{n-1} \approx \sqrt{M}\delta^{n-1}\lambda^{\frac{n+1}{2}} \quad .$$

Esto concluye la demostración ∎

Observemos que como corolario de este teorema, si usamos el Teorema 3.3.4 con $p = \frac{n+1}{2}$ y $\alpha = \frac{n-1}{n+1}$ probamos que la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Kakeya en $\mathbb{R}^n$ debe ser al menos

$$n - p\alpha = n - \frac{n+1}{2}\frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1}{2}$$

que es el resultado análogo al del argumento del "arbusto" para cuerpos finitos. En [Wol95] se desarrolla el argumento del "cepillo" en $\mathbb{R}^n$ para obtener la cota (3.18)

$$\forall\varepsilon\ \exists\, C_\varepsilon : \|f^*_\delta\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C_\varepsilon\delta^{1-\frac{n}{p}-\varepsilon}\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\delta > 0\ \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

con $p = \frac{n+2}{2}$ y $q = (n-1)p'$. De ahí se concluye que la dimensión de Hausdorff de un conjunto de Kakeya en $\mathbb{R}^n$ debe ser al menos $\frac{n+2}{2}$.

Capítulo 6

Otros problemas relacionados con Kakeya

Hay varios problemas de distintas áreas de la matemática que están en estrecha relación con el problema de Kakeya. En esta sección trataremos sólo algunos de ellos, propios del análisis armónico. Describiremos sin entrar en muchos detalles cuál es la conexión entre Kakeya y estos problemas. También comentaremos una versión de la conjetura Kakeya más débil que las expuestas hasta ahora, formulada en términos de la dimensión de Minkowski. Para un análisis más detallado de estas interrelaciones se puede consultar [Bou00] o [Wol99].

6.1. Dimensión de Minkowski

Vimos que el problema de Kakeya en cualquiera de sus formas resulta altamente complicado en dimensiones superiores. Es más, como vimos en el Capítulo 2 el cálculo de la dimensión de Hausdorff de un conjunto cualquiera ya es un problema bastante difícil. Una formulación más débil que las dos ya mencionadas de la conjetura de Kakeya está basada en la noción de dimensión de Minkowski.

Definición 6.1.1 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. La dimensión de Minkowski inferior (lower) de E es*

$$d_L(E) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \liminf_{\delta \to 0} \frac{|E^\delta|}{\delta^{n-\alpha}} > 0\} \quad .$$

y la dimensión de Minkowski superior (upper) de E es

$$d_U(E) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \limsup_{\delta \to 0} \frac{|E^\delta|}{\delta^{n-\alpha}} > 0\} \quad .$$

Una manera alternativa de referirse a $d_U(E)$ y $d_L(E)$ es la siguiente: $d_L(E)$ es el supremo de todos los α tales que, para alguna constante C, para todo $\delta > 0$, se tiene que

$$|E^\delta| \geq C\delta^{n-\alpha}$$

Por otro lado, $d_U(E)$ es el supremo de todos los α tales que, para alguna constante C, para alguna sucesión de $\delta' s$ que converge a cero, se tiene que

$$|E^\delta| \geq C\delta^{n-\alpha}$$

Si $d_U(E) = d_L(E) = \alpha$ decimos que la dimensión de Minkowski de E es α.

A modo de ejemplo, calculamos la dimensión de Minkowski del conjunto $E = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $\delta > 0$, podemos elegir n_0 el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$2\delta > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n^2+n} \geq \frac{1}{2n^2}$$

Podemos tomar como n_0 al mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \frac{1}{2\delta^{\frac{1}{2}}}$.

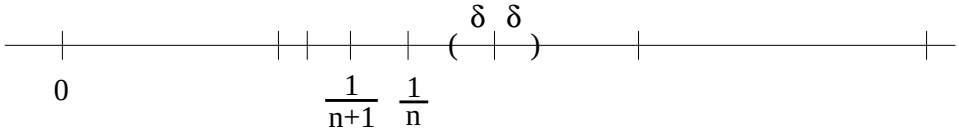

Figura 6.1: E^δ contiene a la unión disjunta de las bolas de radio δ centrada en $\frac{1}{n}$ para $n \leq n_0 - 1$ con $n_0 \geq \frac{1}{2\delta^{\frac{1}{2}}}$

Con este valor de n_0, tenemos que $|E^\delta| \geq 2\delta(n_0 - 1)$ y entonces

$$\frac{|E^\delta|}{\delta^{1-\alpha}} \geq \frac{2\delta(n_0-1)}{\delta^{1-\alpha}} \gtrsim \delta^{\alpha-\frac{1}{2}}$$

De esta última desigualdad se deduce que la dimensión de Minkowski es $\frac{1}{2}$. Este ejemplo muestra además que la dimensión de Minkowski se distingue de la de Hausdorff en una propiedad fundamental, que es que en el caso de Minkowski no se cumple el 2 de la Proposición 2.1.5, lo cual permite la existencia de un conjunto numerable de puntos de dimensión positiva.

En la práctica también resulta útil usar la definición (equivalente): $d_U(E)$ es el ínfimo de los exponentes α tales que para todo $0 < \delta \ll 1$ el conjunto E puede cubrirse con $O(\delta^{-\alpha})$ bolas de radio δ.

Tenemos la sigiente relación entre la dimensión de Hausdorff y la de Minkowski

Lema 6.1.2 *Sea E un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\dim_H(E) \leq d_U(E)$$

Demostración: Sea $\alpha = d_U(E)$. Si tomamos $d > \alpha$, por la definición existe $\alpha \leq d' < d$ tal que para todo $0 < \delta \ll 1$ el conjunto E puede cubrirse con a lo sumo $O(\delta^{-d'})$ bolas de radio δ. Estas bolas son un 2δ-cubrimiento, de modo que

$$H^{d'}_{2\delta}(E) \leq O(\delta^{-d'})(2\delta)^{d'} \lesssim 2^{d'} < \infty$$

y por lo tanto $H^{d'}(E) < \infty$. Entonces $H^d(E) = 0$ para todo $d > \alpha$ y de ahí concluimos que $\dim_H(E) \leq \alpha$. ∎

Si formulamos la conjetura de Kakeya en términos de la dimensión de Minkowski obtenemos una versión más débil que las anteriores, de modo que es razonable esperar que sea un poco más fácil obtener resultados en esta dirección en los casos aún abiertos en dimensiones superiores a 2. En [ŁT01] se mejora la cota $\frac{n+2}{2}$ de Wolff para la dimensión de Minkowski de un conjunto de Kakeya llevándola al menos a $\frac{n+2}{2} + \varepsilon_n$ donde $\varepsilon_n \geq 10^{-10}$ es una constante que depende sólo de n.

6.2. El problema del multiplicador del disco

A modo de motivación, consideremos el siguiente problema: dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos definir su transformada de Fourier $\hat{f}$. Ahora bien, ¿Qué chances tenemos de recuperar la función f a partir de su transformada $\hat{f}$? Sabemos que para la clase de Schwartz tenemos la posibilidad de invertir la transformada de Fourier y obtener

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi \quad .$$

El problema es que si, por ejemplo, sólo sabemos que la función f está en L^p, la integral anterior ni siquiera está bien definida. La alternativa entonces es considerar las "sumas parciales" de esta fórmula de inversión definidas como

$$(S_R f)(x) := \int_{|\xi|<R} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi \quad , \tag{6.1}$$

de modo que las integrales sobre las bolas de radio R son convergentes y tiene sentido calcularlas. La esperanza es que para $f \in L^p$ valga que $\lim_{R\to\infty} \|S_R f - f\|_{L^p} = 0$. Si notamos con B a la bola unitaria podemos reescribir la expresión (6.1) de la siguiente manera

$$(S_R f)(x) := \int \chi_B(\tfrac{\xi}{R}) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi \quad . \tag{6.2}$$

Es fácil ver que el problema general de la convergencia en $L^p(\mathbb{R}^n)$ del operador S_R es equivalente a la acotación del operador $S := S_1$ de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lema 6.2.1 *Sean S_R y S los operadores definidos como*

$$(S_R f)(x) := \int \chi_B(\tfrac{\xi}{R})\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi$$

y

$$(Sf)(x) := \int \chi_B(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi \quad .$$

Entonces $\lim_{R\to\infty}\|S_R f - f\|_{L^p} = 0$ *si y sólo si S es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración: Veamos primero que si S es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces S_R también lo es. Basta escribir las definiciones y aplicar varias veces un cambio de variables

$$\begin{aligned}(S_R f)(x) &= \int \chi_B(\tfrac{\xi}{R})\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi \\ &= \int \chi_B(y)\hat{f}(Ry)e^{2\pi i xRy}R^n dy \\ &= \int \chi_B(y)\widehat{f_R}(y)e^{2\pi i Rxy}dy = (Sf_R)(Rx)\end{aligned}$$

donde definimos $f_R(x) = f(\frac{x}{R})$, de modo que por las propiedades de la transformada de Fourier vale que $\widehat{f_R}(\xi) = R^n\hat{f}(R\xi)$. Entonces

$$\begin{aligned}\|S_R f\|_p^p &= \int |(S_R f)(x)|^p dx \\ &= \int |(Sf_R)(Rx)|^p dx \\ &= \int |(Sf_R)(y)|^p R^{-n} dy \\ &\leq R^{-n}\|Sf_R\|_p^p \leq R^{-n}\|S\|^p\|f_R\|_p^p\end{aligned}$$

y como $\|f_R\|_p^p = R^n\|f\|_p^p$ tenemos que

$$\|S_R f\|_p \leq \|S\|\|f\|_p$$

Podemos ver ahora que si S está acotado entonces hay convergencia en $L^p(\mathbb{R}^n)$ de las sumas parciales. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y sea $\varepsilon > 0$. Podemos elegir un $R_0 \in \mathbb{R}$ y una función $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tales que el soporte de g esté contenido

en B_{R_0} y además $\|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2\|S\|}$. Con esa elección de R_0 y g tenemos que para todo $R > R_0$ vale

$$\begin{aligned} \|S_R f - f\|_p &\leq \|S_R f - S_R g\|_p + \|S_R g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq \|S_R\| \|g - f\|_p + \|g - f\|_p \\ &< \varepsilon \quad , \end{aligned}$$

pues como $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $S_R g = g$ y por lo visto antes, las normas de S_R están acotadas por la norma de S.

Veamos ahora la recíproca. Por la definición de S, basta considerar funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ tales que su transformada tenga soporte en la bola unitaria. Sea f una función en esas condiciones. Por hipótesis, tenemos que

$$\lim_{R \to \infty} \|S_R f - f\|_p = 0 \quad .$$

Por otro lado, para todo $R \geq 1$ tenemos que $S_R f = Sf$, de modo que $\|Sf - f\|_p = 0$ y de ahí que

$$\|Sf\|_p \leq \|Sf - f\|_p + \|f\|_p = \|f\|_p \quad .$$

■

De acuerdo con este lema, es razonable estudiar las propiedades de acotación de este tipo de operadores. Introducimos la siguiente definifición

Definición 6.2.2 *Un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal T acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para el que existe una función $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$(Tf)(x) = \int \mu(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

para toda función f en la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 6.2.3 *Esto basta para definirlo en todo $L^p(\mathbb{R}^n)$ pues T es continuo y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

En distintas fuentes puede encontrarse que se llama multiplicador tanto al operador T como a la función μ.

Podemos reformular la pregunta acerca de la sumabilidad de las integrales en términos de multiplicadores: ¿Para qué valores de p y de n resulta que χ_B es un multiplicador? La conjetura hasta los años 70 era que la función χ_B daba un multiplicador para todo p en dimensión 1 y para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ en dimensión $n \geq 2$. Este problema es conocido como el problema del multiplicador para el disco, y veremos en esta sección una respuesta completa que se

basa en una construcción similar a la del conjunto de Kakeya de medida cero. La solución definitiva a este problema es el contenido del trabajo de Charles Fefferman [Fef71]. La construcción que acá presentamos está basada en ese trabajo de Fefferman pero algo modificada, tal como aparece en [DC87] o en [Ste93]. Antes de mostrar esta construcción presentamos algunos ejemplos, definiciones y resultados que serán útiles (para las pruebas se puede consultar la excelente exposición que se hace en [DC87])

Proposición 6.2.4 *Sea T un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^n)$ definido por*

$$(Tf)(x) = \int \mu(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

entonces T está definido por la ecuación

$$\widehat{Tf}(\xi) = \mu(\xi)\hat{f}(\xi) \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

y además existe una distribución K tal que

$$Tf(x) = (K * f)(x) \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Usualmente se hace referencia al multiplicador como la terna (T, μ, K). Puede verse que como distribuciones $K = \check{\mu}$ y $\hat{K} = \mu$.

La primera observación es que en el caso de $L^2(\mathbb{R}^n)$ es fácil ver que cualquier función $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ define un multiplicador T_μ a través de la ecuación

$$\widehat{T_\mu f}(\xi) = \mu(\xi)\hat{f}(\xi)$$

pues la buena definición de T se deduce de Plancherel y además

$$\|T_\mu f\|_2 = \|\mu\hat{f}\|_2 \leq \|\mu\|_\infty \|f\|_2$$

En dimensión 1 podemos citar a modo de ejemplo al multiplicador dado por la transformada de Hilbert H definido por cualquiera de las formulaciones equivalentes:

$$\widehat{Hf}(\xi) \;\; = \;\; -i\, sgn(\xi)\hat{f}(\xi)$$

$$Hf = (\frac{1}{\pi}\mathrm{vp}\frac{1}{x}) * f$$

donde $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ denota a la distribución "valor principal $\frac{1}{x}$" que actúa sobre funciones test como

$$\mathrm{vp}\frac{1}{x}(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx \quad , \tag{6.3}$$

de modo que

$$\left((\frac{1}{\pi} \mathrm{vp} \frac{1}{x}) * f \right)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy \quad .$$

Para la demostración de estas equivalencias y del hecho de que realmente H es un multiplicador en $L^p(\mathbb{R})$ para todo $1 < p < \infty$ se puede consultar [Duo01].

Otra observación interesante que relaciona multiplicadores con el problema de sumabilidad de integrales es la siguiente: podemos escribir a la caracterísitca de $(0, \infty)$ usando la transformada de Hilbert. Como

$$\chi_{(0,\infty)}(\xi) = \frac{1 - i(i\, sgn(\xi))}{2} \quad ,$$

tenemos quesi definimos $\widehat{Tf} = \chi_{(0,\infty)}(\xi)\hat{f}(\xi)$, entonces $T = \frac{I+iH}{2}$ y resulta que T es un multiplicador. Además vale el siguiente resultado general que permite definir multiplicadores en dimensiones superiores a través de un multiplicador en $\mathbb{R}$.

Lema 6.2.5 *Sea T un multiplicador en $L^p(\mathbb{R})$ dado por la ecuación $\widehat{T_\mu f}(\xi) = \mu(\xi)\hat{f}(\xi)$. Entonces la función de $\mathbb{R}^n$ dada por $\mu(\xi_1)$ permite definir un operador $\tilde{T}_\mu$ en $\mathbb{R}^n$ que actúa sobre una función f en la forma*

$$(\tilde{T}_\mu f)(x_1, ..., x_n) = \left(T_\mu f(\cdot, x_2, ..., x_n)\right)(x_1)$$

que resulta acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración: Es una consecuencia directa del teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(\tilde{T}_\mu f)(\overline{x})|^p d\overline{x} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |T_\mu f(\cdot, x_2, ..., x_n)(x_1)|^p dx_1 \right) dx_2 ... dx_n \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2, ..., x_n)|^p d\overline{x} = C\|f\|_p^p \quad . \end{aligned}$$

■

Si tomamos en esta observación como μ a la función característica de la semirrecta $(0, \infty)$ concluimos que la función característica del semiespacio $\{\xi_1 > 0\}$ define un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < \infty$. El siguiente lema, que no vamos a probar pues es consecuencia inmediata de las propiedades de la transformada de Fourier, permite construir una serie bastante amplia de ejemplos de multiplicadores.

Lema 6.2.6 *Si $\mu(\xi)$ define un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces las funciones*

- $\mu_a(\xi) := \mu(\xi - a)$ *con* $a \in \mathbb{R}^n$.
- $\mu_\lambda(\xi) := \mu(\lambda\xi)$ *con* $\lambda > 0$.
- $\mu_\rho(\xi) := \mu(\rho\xi)$ *con* $\rho \in O(n)$ *una transformación ortogonal.*

también definen multiplicadores y tienen la misma norma como operadores que el operador asociado a μ.

La parte interesante de esto es que con las operaciones anteriores se puede definir la función característica de cualquier poliedro convexo en $\mathbb{R}^n$ pues es el producto de funciones características de semiespacios y éstos se obtienen como rotación y traslación del semiespacio $\{\xi_1 > 0\}$. Tenemos entonces el siguiente corolario del Lema 6.2.1

Corolario 6.2.7 *Sea P un poliedro convexo de $\mathbb{R}^n$ que contiene al origen. Entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|S_{\lambda P} f - f\|_p = 0 \qquad 1 < p < \infty$$

donde $S_{\lambda P}$ es el multiplicador definido a partir de la función característica de $\lambda P = \{\lambda x : x \in P\}$

Exponemos ahora el tema central de esta sección, que es el problema del multiplicador para el disco. Necesitamos tres lemas previos. A partir de ahora notamos con T al operador asociado a la función característica de la bola unitaria B.

Lema 6.2.8 *Si T está acotado en algún $L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces para cualquier sucesión de funciones $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ vale*

$$\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |Tf_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \leq C \| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p$$

Demostración: Sea $k \in \mathbb{N}$. Notamos con $\overline{f}$ al vector de k funciones $(f_1, ..., f_k)$ y con $\overline{Tf}$ al vector $(Tf_1, ..., Tf_k)$. Como el núcleo de convolución que define a T es real, el operador conserva la parte real e imaginaria de las funciones, por

lo que podemos suponer que las funciones f_j son reales. Sea $\overline{v} = (v_1, ..., v_k)$ un vector unitario. Tenemos que

$$\left\langle \overline{v}, \overline{Tf} \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} v_j T f_j = T(\sum_{j=1}^{k} v_j f_j)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^k$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^{k-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\left\langle \overline{v}, \overline{Tf} \right\rangle|^p dx dv &= \int_{\mathbb{S}^{k-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |T(\sum_{j=1}^{k} v_j f_j)|^p dx dv \\
&= \int_{\mathbb{S}^{k-1}} \|T(\sum_{j=1}^{k} v_j f_j)\|_p^p dv \\
&\leq \|T\|^p \int_{\mathbb{S}^{k-1}} \|\sum_{j=1}^{k} v_j f_j\|_p^p dv \\
&= \|T\|^p \int_{\mathbb{S}^{k-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\left\langle \overline{v}, \overline{f} \right\rangle|^p dx dv \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que si $\theta(\overline{v}, x)$ es el ángulo entre $\overline{v}$ y $\overline{f}(x)$

$$|\left\langle \overline{v}, \overline{f} \right\rangle| = \langle \overline{v}, \overline{v} \rangle^{\frac{1}{2}} \left\langle \overline{f}, \overline{f} \right\rangle^{\frac{1}{2}} \cos(\theta(\overline{v}, x)) = \left\langle \overline{f}, \overline{f} \right\rangle^{\frac{1}{2}} \cos(\theta(\overline{v}, x))$$

Con esto podemos reescribir la desigualdad obtenida antes en (6.4) y obtener la acotación luego de cambiar el orden de integración

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{k-1}} |\cos(\theta(\overline{v}, x))|^p dv |\left\langle \overline{Tf}, \overline{Tf} \right\rangle^{\frac{1}{2}}|^p dx \leq$$

$$\leq \|T\|^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{k-1}} |\cos(\theta(\overline{v}, x))|^p dv |\left\langle \overline{f}, \overline{f} \right\rangle^{\frac{1}{2}}|^p dx$$

Ahora notemos que una vez fijado el vector $\overline{f}(x)$, la integral del coseno sobre $\mathbb{S}^{k-1}$ es una constante independiente de x que sale de ambos lados de la desigualdad, de modo que nos queda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\left\langle \overline{Tf}, \overline{Tf} \right\rangle^{\frac{1}{2}}|^p dx \leq \|T\|^p \int_{\mathbb{R}^n} |\left\langle \overline{f}, \overline{f} \right\rangle^{\frac{1}{2}}|^p dx$$

que es lo mismo que

$$\| \left(\sum_{j=1}^{k} |Tf_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \leq \|T\| \| \left(\sum_{j=1}^{k} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p$$

Por último, como k es arbitrario, vale el lema. ∎

El segundo lema que necesitamos es conocido como el "Lema de Meyer" y formaliza la idea intuitiva de que la caracterísitca de una bola muy grande tangente a una recta actúa como la característica del semiplano determinado por esa recta.

Lema 6.2.9 *(Yves Meyer) Sea $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$; sea $P_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, \xi\rangle \geq 0\}$ y sea H_j el multiplicador definido por χ_{P_j}. Entonces, si el operador T está acotado en algún $L^p(\mathbb{R}^n)$ vale*

$$\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |H_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \leq \|T\| \| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p$$

para cualquier sucesión de funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración: Introducimos algo de notación: Para cada $R \in \mathbb{R}$, sea B_j^R la bola de centro Rv_j y radio R. Notamos con T_j^R al operador asociado a la característica de B_j^R y con T^R al asociado a la característica de la bola de radio R centrada en el origen. Está claro que como tenemos la hipótesis de que T está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ también tenemos que los operadores T_j^R están acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \widehat{Tf}(\xi) &= \chi_B(\xi)\hat{f}(\xi) \\ \widehat{T^R f}(\xi) &= \chi_B(\frac{\xi}{R})\hat{f}(\xi) \\ \widehat{T_j^R f}(\xi) &= \chi_B(\frac{\xi - v_j R}{R})\hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Definamos ahora la isometría $J : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $(Jf)(x) = f(x)e^{2\pi i x R v_j}$. Esto nos permite escribir

$$T_j^R = JT^R J^{-1}$$

Entonces

$$\| \left(\sum_{j=1}^{k} |T_j^R f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \leq \| \left(\sum_{j=1}^{k} |T^R(J^{-1} f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p$$

y por el Lema 6.2.8 aplicado a T^R

$$\begin{aligned} \| \left(\sum_{j=1}^{k} |T_j^R f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p &\leq \|T^R\| \| \left(\sum_{j=1}^{k} |J^{-1} f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \\ &= \|T\| \| \left(\sum_{j=1}^{k} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \end{aligned}$$

Ahora la idea es tomar límite con R tendiendo a infinito y ver en qué sentido podemos afirmar que T_j^R tiende a H_j. Para eso trabajamos con las funciones características. Observemos primero que

$$\lim_{R\to\infty} \chi_B(\frac{\xi - v_j R}{R}) = \chi_{P_j}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

pues si ξ es tal que $\lim_{R\to\infty} \chi_B(\frac{\xi - v_j R}{R}) < 1$, esto es equivalente a que

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} |\frac{\xi - v_j R}{R}| < 1 &\iff \lim_{R\to\infty} |\frac{\xi - v_j R}{R}| < 1 \\ &\iff \lim_{R\to\infty} \left\langle \frac{\xi - v_j R}{R}, \frac{\xi - v_j R}{R} \right\rangle < 1 \\ &\iff \lim_{R\to\infty} \left(\frac{|\xi|^2}{R^2} - \frac{2\langle \xi, v_j R \rangle}{R} + \frac{R^2 |v_j|^2}{R^2} \right) < 1 \\ &\iff \langle \xi, v_j \rangle < 0 \end{aligned}$$

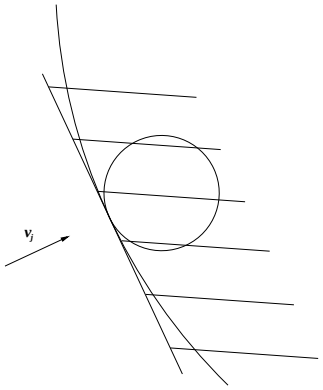

Figura 6.2: Una bola muy grande actúa como un semiplano

Por lo tanto, para $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\lim_{R\to\infty} \chi_B(\frac{\xi - v_j R}{R})\hat{f}(\xi) = \chi_{P_j}(\xi)\hat{f}(\xi)$$

y la convergencia es dominada pues $\chi_B(\frac{\xi - v_j R}{R}) \leq \chi_{P_j}(\xi)$ para todo ξ. Tenemos entonces que

$$\lim_{R\to\infty} T_j^R f_j = H_j f_j$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R}^n)$. De ahí concluimos que existe una sucesión $\{R_k\}$ tal que

$$\lim_{R\to\infty} T_j^R f_j(x) = H_j f_j(x) \qquad \text{p.p.}$$

Por el lema de Fatou, queda que

$$\begin{aligned}
\| \left(\sum_{j=1}^k |H_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p &= \| \liminf_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^k |T_j^{R_k} f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \| \left(\sum_{j=1}^k |T_j^{R_k} f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \|T_j^{R_k}\| \| \left(\sum_{j=1}^k |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad aplicamos el Lema 6.2.8 al operador $T_j^{R_k}$. Como las normas de estos operadores son todas iguales a $\|T\|$ queda que

$$\| \left(\sum_{j=1}^k |H_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \leq \|T\| \| \left(\sum_{j=1}^k |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p$$

Igual que antes, como k es arbitrario, tenemos el resultado para cualquier sucesión de funciones $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con todas en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para extender el resultado a una sucesión cualquiera de funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$, basta usar un argumento de densidad y la continuidad de los multiplicadores H_j. ∎

El último lema que necesitamos es una consecuencia de la construcción que dimos en el Capítulo 1 de un G-set del plano de medida suficientemente chica.

Lema 6.2.10 *Dado $\varepsilon > 0$ existen dos colecciones $\{R_j\}_{j=1}^M$ y $\{\tilde{R}_j\}_{j=1}^M$ de rectángulos de dimensiones $1 \times \delta$ con $M \sim \delta^{-1}$ tales que $\tilde{R}_j = T_{e_j}^{\delta}(x_j)$ y $R_j = T_{e_j}^{\delta}(x_j - 2e_j)$ y además cumplen que:*

- Los rectángulos $\tilde{R}_j$ son disjuntos.
- Los rectángulos R_j están bien superpuestos, de modo que $|\bigcup_{j=1}^M T_j| < \varepsilon$.

Demostración: Tenemos que volver a la construcción hecha en el Teorema 1.2.4. Ahí construimos un conjunto que llamamos E_N de medida menor que $\frac{4}{N} < \varepsilon$ y que estaba dado por la unión de los conjuntos $S_{\ell_a}^{N-N}$ donde las rectas ℓ_a están indexadas por elementos del conjunto $\mathcal{A}_N$ (números con N dígitos decimales en base N). Más precisamente, teníamos que

$$E_N = \bigcup_{a \in \mathcal{A}_N} S_{\ell_a}^{(N-N)}$$

donde para cada $a \in \mathcal{A}_N$ la recta ℓ_a está definida como

$$\ell_a = \{(t, \phi_a(t) : 0 \leq t \leq 1\} \qquad \text{con } \phi_a(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(Nt - j + 1)a_j}{N^{j+1}}$$

Observemos que si consideramos a las rectas ℓ_a definidas para todo valor de t vemos que si $a, b \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ y $a < b$ entonces $\phi_a(t) < \phi_b(t)$ para todo $1 \leq t \leq 2$. Más aún, si $t \geq \frac{3}{2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_b(t) - \phi_a(t) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{(Nt - j + 1)(b_j - a_j)}{N^{j+1}} \\ &\geq \frac{Nt - N + 1}{N^{N+1}} \geq \frac{\frac{1}{2}N + 1}{N^{N+1}} \geq \frac{1}{2}N^{-N} \end{aligned}$$

de modo que los conjuntos $S_{\ell_a}^{(\frac{1}{4}N^{-N})}$ y $S_{\ell_b}^{(\frac{1}{4}N^{-N})}$ son disjuntos en la región $\frac{3}{2} \leq t$

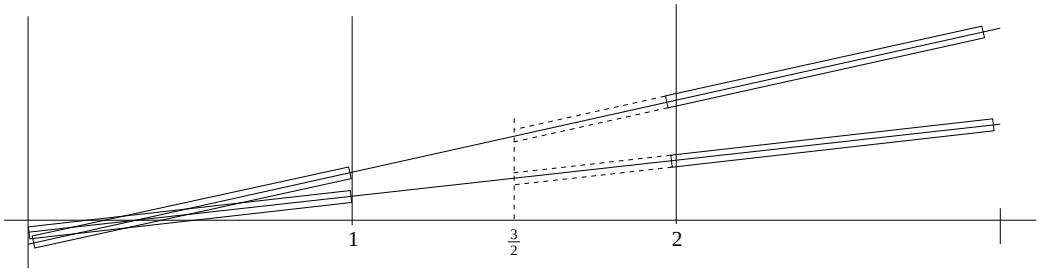

Figura 6.3: Los tubos desplazados son disjuntos

Para cada $a \in \mathcal{A}_N$ construimos un rectángulo R_a de dimensiones $1 \times \frac{1}{5}N^{-N}$ cuyo eje está sobre la recta ℓ_a y lo ubicamos de manera que el vértice inferior derecho esté en la recta $x = 1$ (Figura 6.3) En primer lugar, es claro que $R_a \subset S_{\ell_a}^{(N^{-N})}$, de modo que

$$|\bigcup_{a\in\mathcal{A}_N} R_a| < \varepsilon \quad .$$

Ahora desplazamos cada rectángulo hacia la derecha dos unidades en la dirección de su eje y obtenemos una nueva colección de rectángulos $\{\tilde{R}_a\}_{a\in\mathcal{A}_N}$ que resultan disjuntos. Para ver esto último, recordamos que por la construcción hecha, los ángulos formados por las rectas ℓ_a y la horizontal no exceden a $\frac{\pi}{4}$, de modo que los rectángulos desplazados están todos en la región $\{x > \frac{3}{2}\}$. Para ver que son disjuntos, observemos en la Figura 6.4 que la relación entre A y B está dada por

$$A = B\cos\theta \geq B\frac{\sqrt{2}}{2} \geq \frac{B}{2}$$

pues el ángulo θ es menor o igual que $\frac{\pi}{4}$. Esto quiere decir que si el ancho del tubo es menor o igual que B entonces el rectángulo cae dentro de S_ℓ^B.

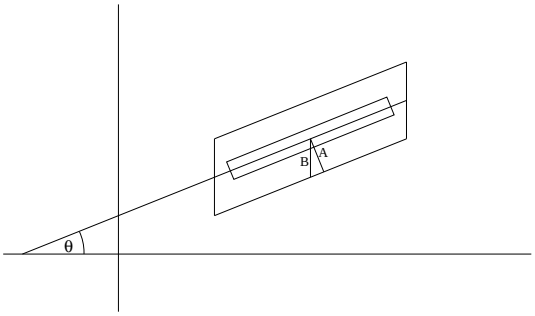

Figura 6.4: Los rectángulos $\tilde{R}_a$ caen dentro de los entornos de ℓ_a

En nuestro caso, tomamos δ-tubos con $\delta = \frac{1}{10}N^{-N}$ de modo que

$$\delta < \frac{1}{2}\frac{1}{4}N^{-N}$$

y por lo dicho antes cada δ-tubo $\tilde{R}_a$ está contenido en $S_{\ell_a}^{(\frac{1}{4}N^{-N})}$ y estos últimos son conjuntos disjuntos. Finalmente, por construcción tenemos una cantidad

de rectángulos igual a $N^N \sim \delta^{-1} = 10N^N$. Como observación final del lema vemos que como los rectángulos $\{\tilde{R}_a\}_{a\in\mathcal{A}_N}$son disjuntos, vale

$$|\bigcup_{a\in\mathcal{A}_N} \tilde{R}_a| = \sum_{a\in\mathcal{A}_N} |\tilde{R}_a| = N^N\delta = \frac{1}{10} \quad .$$

■

Estamos en condiciones de probar el siguiente

Teorema 6.2.11 *El operador T definido como $\widehat{Tf}(\xi) = \chi_B(\xi)\hat{f}(\xi)$ no es un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^2)$ si $p \neq 2$.*

Demostración: Supongamos que T está acotado en $L^p(\mathbb{R}^2)$ con $p < 2$. Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Consideremos las dos colecciones de rectángulos $\{R_j\}$ y $\{\tilde{R}_j\}$ del Lema 6.2.10 y pongamos $f_j = \chi_{R_j}$. Entonces, si aplicamos el Lema de Meyer, tenemos que

$$\| \left(\sum_j |H_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \leq \|T\| \| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p \tag{6.5}$$

donde los operadores H_j son los multiplicadores de los semiplanos definidos por las direcciones de los lados más largos de los rectánglos R_j.

Vamos a estimar ahora la cantidad $|H_j f_j|$ sobre los rectángulos $\tilde{R}_j$. Aplicando una traslación y una rotación, el problema se reduce al caso en que $R_j = (0,1)\times(0,\delta)$ y el multiplicador H_j está asociado a la característica del semiplano $\{x > 0\}$. Definamos el multiplicador unidimensional S^+ como

$$S^+ f(x) = \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

o bien como

$$\widehat{S^+ f}(\xi) = \chi_{(0,\infty)}(\xi)\hat{f}(\xi)$$

En nuestro caso, tenemos la comodidad extra de que la función f_j es de variables separadas, pues

$$f_j(x_1, x_2) = \chi_{(0,1)}(x_1)\chi_{(0,\delta)}(x_2)$$

Gracias a eso tenemos que

$$(H_j f_j)(x_1, x_2) \;\; = \;\; (S^+\chi_{(0,1)})(x_1)\chi_{(0,\delta)}(x_2)$$

Si usamos ahora que $\chi_{(0,\infty)}(\xi) = \frac{1-i(isgn(\xi_1)}{2}$ y los resultados y observaciones hechas al inicio de esta sección tenemos la siguiente igualdad en sentido

distribucional (la distribución δ es la "Delta de Dirac", que actúa sobre f como $\delta(f) = f(0)$ y cumple que $\delta * f = f$)

$$\widehat{\left(\frac{\delta - i(\frac{1}{\pi}\mathrm{vp}\frac{1}{x})}{2}\right)}(\xi) = \chi_{(0,\infty)}(\xi)$$

de modo que

$$\begin{aligned}(H_j f_j)(x_1,x_2) &= \left((\frac{\delta - i(\frac{1}{\pi}\mathrm{vp}\frac{1}{x})}{2}) * \chi_{(0,1)}\right)(x_1)\chi_{(0,\delta)}(x_2)\\ &= \frac{1}{2}\left(\chi_{(0,1)}(x_1) - i\frac{1}{\pi}\mathrm{vp}\int_{\mathbb{R}}\frac{\chi_{(0,1)}(y_1)}{x_1-y_1}dy_1\right)\chi_{(0,\delta)}(x_2)\end{aligned}$$

De ahí que

$$|(H_j f_j)(x_1,x_2)| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{vp}\int_{\mathbb{R}}\frac{\chi_{(0,1)}(y_1)}{x_1-y_1}dy_1\right)\chi_{(0,\delta)}(x_2)$$

Por lo tanto, si $(x_1,x_2) \in \tilde{R}_j$ tenemos que $\chi_{(0,\delta)}(x_2) = 1$ si $\chi_{(0,1)}(y_1) \neq 0$ entonces $|x_1 - y_1| < 3$. Entonces

$$\begin{aligned}|(H_j f_j)(x_1,x_2)| &\geq \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x_1-y_1}dy_1\\ &\geq \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{3}dy_1 = \frac{1}{6\pi}\end{aligned}$$

Si volvemos a la desigualdad (6.5) tenemos que

$$\begin{aligned}\|\left(\sum_j |H_j f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|_p &\geq c\|\chi_{\bigcup_j \tilde{R}_j}\|_p\\ &= c\sum_j |\tilde{R}_j| = \frac{c}{10}\end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{c}{10} \leq \|T\|\|\left(\sum_j |f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|_p$$

Por otro lado, si ponemos $E = \bigcup_j R_j$,

$$\begin{aligned}\|\left(\sum_j |f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^2}\chi_E(x)\left(\sum_j |f_j(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}}dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq |E|^{\frac{1}{q}\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\sum_j |f_j(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Usamos Hölder con exponenentes $\frac{2}{p}$ y $q = (\frac{2}{p})' = 1 - \frac{p}{2}$ pues la función $\left(\sum_j |f_j(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}}$ está en $L^{\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$. Entonces, como $|E| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_p &\leq \varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \sum_j |\chi_{R_j}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\sum_j |R_j| \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{10}} \end{aligned}$$

Juntamos los resultados obtenidos y nos queda

$$\frac{c}{10} \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leq \|T\|$$

lo que es absurdo si $p < 2$ pues ε es arbitrario. ∎

El teorema anterior resuelve el caso $n = 2$, $p < 2$. Para el caso $p > 2$ se extiende fácilmente pues es sabido que si T es un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces también es un multiplicador en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, para el caso $n > 2$ se deduce de un teorema debido a de Leeuw ([dL65],[Jod71]) que dice esencialmente que si T es acotado en $\mathbb{R}^n$ entonces su restricción a $\mathbb{R}^{n-1}$ es también acotada. Podemos notar que el teorema anterior hace uso del hecho de que existen conjuntos de Kakeya de medida cero, pero no hay ninguna mención del problema de la dimensión de Haussdorf de estos conjuntos.

6.3. Otros problemas relacionados con Kakeya

Para finalizar exponemos algunos resultados conocidos acerca de otros problemas relacionados con Kakeya.

En primer lugar retomamos el problema de los multiplicadores y notamos que el problema con la función característica de la bola está dado por las singularidades a lo largo de $\mathbb{S}^{n-1}$. Una variante para obtener un mltiplicador es considerar la familia de funciones

$$S_\alpha(\xi) := (\text{máx}\{0, (1 - |\xi|)\})^\alpha \qquad \alpha > 0$$

que varían la "suavidad" con α (notar que si $\alpha = 0$ se obtiene la característica de la bola). Este tipo de operadores se conocen con el nombre de Bochner-Riesz. Otra forma de presentar a los multiplciadores de Bochner-Riesz es considerar funciones características suavizadas de los δ-entornos de la $\mathbb{S}^{n-1}$.

Más precisamente, se toma una función ψ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ que sea constantemente igual a 1 en un entorno del origen y se define

$$m_\delta(\xi) = \psi(\frac{1-|\xi|}{\delta})$$

para definir los operadores

$$\widehat{T_{m_\delta} f}(\xi) = m_\delta(\xi)\hat{f}(\xi)$$

La conjetura de Bochner-Riesz dice que los operadores T_δ son multiplicadores en $L^p(\mathbb{R}^n)$ que satisfacen una estimación

$$\forall \varepsilon \; \exists C_\varepsilon \text{ tal que } \|T_{m_\delta} f\|_p \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_p \tag{6.6}$$

con $p \in [\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1}]$.

La conexión entre este problema y el problema de Kakeya aparece a través de otro problema central aún abierto del análisis armónico: el problema de la restricción de la transformada de Fourier. El problema se trata de restringir la transformada de Fourier a hipersuperficies en $\mathbb{R}^n$. Una formulación posible del problema es la siguiente:

Sea σ la medida en $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. ¿Es posible una acotación del tipo

$$\|\widehat{fd\sigma}\|_p \lesssim \|f\|_{L^p(d\sigma)}$$

para todo $p > \frac{2n}{n-1}$?

Se pueden encontrar muchos resultados parciales acerca de estos problemas ([Wol99]). Terminamos esta sección indicando que es sabido que todos los problemas mencionados hasta ahora satisfacen la siguiente cadena de implicaciones

$$\text{Bochner-Riesz} \Rightarrow \text{Restricción} \Rightarrow \text{Conjetura "M"de Kakeya} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Conjetura "H"de Kakeya} \Rightarrow \text{ Conjetura de Kakeya (Minkowski)}$$

Apéndice A

Conjunto de Cantor Generalizado

La construcción dada en el Capítulo 2 del conjunto ternario de Cantor puede generalizarse de tal manera que permite construir subconjuntos de la recta de cualquier dimensión de Hausdorff s con $0 < s < 1$.

La construcción es la siguiente: sea s un número real tal que $0 < s < 1$. Definimos inductivamente una sucesión de conjuntos $\{F\}_{j\in\mathbb{N}}$ de una manera similar a la del conjunto ternario de Cantor. Tomamos $F_0 = [0, 1]$ y definimos a los F_j de modo que formen una sucesión decreciente y cada uno de ellos sea una unión finita de intervalos cerrados. Para definir a cada F_{j+1} indicamos cómo es la intersección con cada intervalo I de los que forman a F_j. Dado I un intervalo tal y un entero $m \geq 2$, tomamos m intervalos cerrados equiespaciados $J_1, J_2, ...J_m$ contenidos en I cuyas longitudes están determinadas por la condición

$$|J_i|^s = \frac{1}{m}|I|^s \tag{A.1}$$

y dispuestos de tal modo que el extremo izquierdo de J_1 coincide con el extremo izquierdo de I y el extremo derecho de J_m coincide con el extremo derecho de I. De acuerdo a esta definición, tenemos que

$$m|J_i| + (m-1)d = |I| \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq m \tag{A.2}$$

donde d es la medida de los intervalos entre cada par de intervalos J_i y J_{i+1}. Definimos ahora F_{j+1} para que se cumpla que

$$F_{j+1} \cap I = \bigcup_{i=1}^{m} J_i$$

Notar que el valor de m puede variar en cada nivel de la construcción (puede variar con j) e incluso puede variar para cada uno de los intervalos I con-

tenidos en F_j. El conjunto que construimos es

$$C = \bigcap_{j=0}^{\infty} F_j \tag{A.3}$$

que resulta un conjunto perfecto nunca denso de dimensión de Hausdorff s. Probamos esto último en el siguiente teorema.

Teorema A.0.1 *Si C es un conjunto como el descripto en* (A.3) *entonces $dim_H(C) = s$.*

Demostración: Decimos que una familia de conjuntos $\{U_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de *red* si para cada par de conjuntos en la familia se cumple que o bien son disjuntos o bien uno de ellos está contenido en el otro. Claramente, la familia de todos los intervalos que se usan en la construcción de C forman una red. Llamaremos a cada uno de esos intervalos *r-intervalos.* Definimos, para cada $E \subseteq C$ la siguiente suma

$$\mu(F) = \text{ínf} \sum_{I\in\mathcal{U}} |I|^s \tag{A.4}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los cubrimientos de F por familias de r-intervalos. Esta función de conjuntos μ es una medida exterior sobre los subconjuntos de C pero a diferencia de H^s permite encontrar con facilidad la medida de estos subconjuntos. Probaremos que $H^s(C) = \mu(C) = 1$ pues de ahí se deduce el teorema.

Veamos primero que $\mu(C) = 1$. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por r-intervalos. Podemos asumir que la suma

$$\sum_{I\in\mathcal{U}} |I|^s \tag{A.5}$$

es finita pues cada r-intervalo es abierto relativo al conjunto compacto C. También podemos asumir que son disjuntos gracias a que el cubrimiento tiene la propiedad de red (para cada par de intervalos que se intersecan, uno de ellos está contenido en el otro y puede ser removido). Tomemos ahora J uno de los intevalos de longitud mínima en $\mathcal{U}$. Este intervalo debe ser parte de alguno de los F_j pues es un r-intervalo. Entonces $J \subseteq I$ para alguno de los intervalos que forman F_{j-1}. Dado que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento disjunto de C, todos los demás r-intervalos en $F_j \cap I$ deben estar en $\mathcal{U}$. Podemos usar la ecuación (A.1) para reemplzar todos estos intervalos de F_j por el intervalo más grande I sin alterar el valor de la suma (A.5). En finitos pasos, logramos

cambiar todos los intervalos del cubrimiento por el intervalo $[0,1]$ de tal manera que

$$\sum_{I\in\mathcal{U}} |I|^s = |[0,1]|^s = 1$$

por lo que concluimos que

$$\mu(C) = 1.$$

De la misma manera se puede demostar que para *cualquier* r-intervalo J vale que

$$\mu(J \cap C) = |J|^s. \tag{A.6}$$

Veamos ahora que se cumple $H^s(C) = \mu(C)$. Notar que si para un $\delta > 0$ fijo, el ínfimo (A.4) se toma sobre todos los δ-cubrimientos por r-intervalos, el valor de μ no se altera. Esto es así pues siempre es posible, dado un cubrimiento por r-intervalos, reemplazar cada intervado de longitud mayor que δ por subintervalos más chicos sin cambiar el valor de la suma usando la relación (A.1). Dado que esto es cierto para todo $\delta > 0$, tenemos la primera desigualdad buscada

$$H^s(C) \leq \mu(C).$$

Veamos ahora que para cualquier intervalo J vale que

$$\mu(J \cap C) \leq |J|^s. \tag{A.7}$$

Podemos suponer claramente que J está contenido en el intervalo $[0,1]$ y que los extremos de J están en C. Más aún, podemos asumir que los extremos de J coinciden con los extremos de algún par de r-intervalos contenidos en J. Sea I el r-intervalo más corto que contiene a J y suponer que este intervalo I es uno de los que forman a F_j. Por construcción, J debe intersecar a ciertos r-intervalos $J_q, J_{q+1}, ..., J_r$ todos ellos componentes de $F_{j+1} \cap I$ con $1 \leq q < r \leq m$. Queremos probar que

$$|J_q \cap J|^s + |J_{q+1} \cap J|^s + |J_{q+2} \cap J|^s + ... + |J_r \cap J|^s \leq |J|^s. \tag{A.8}$$

Supongamos, en primer lugar, que los intervalos J_q y J_r están contenidos en J. En ese caso, tenemos que la ecuación (A.8) se convierte en

$$k|J_i|^s \leq |J|^s$$

con $k = r - q + 1$. Esta desigualdad es en realidad una igualdad para los casos $k = 1$ y $k = m$ gracias a (A.1). Para los otros valores de k recordemos que igual que en (A.2) tenemos que

$$|J|^s = (k|J_i| + (k-1)d)^s$$

de modo que debemos probar la desigualdad

$$k|J_i|^s \leq (k|J_i| + (k-1)d)^s.$$

Como vale la igualdad en los casos $k = 1$ y $k = m$, basta notar que la expresión de la derecha es una función de k de concavidad negativa (es esencialmente como t^s) y por lo tanto vale la desigualdad para todo valor de k entre 1 y m de modo que tenemos la validez de (A.8) para este caso.

Notemos ahora que si el intervalo J fuera tal que $J_q \cap J$ no fuera todo J_qo $J_r \cap J$ no fuera todo J_r, podríamos expandirlo hasta conseguir un intervalo J' que estuviera en las condiciones de la suposición anterior, de modo que

$$|J_q \cap J'|^s + |J_{q+1} \cap J'|^s + |J_{q+2} \cap J'|^s + ... + |J_r \cap J'|^s \leq |J'|^s. \qquad (A.9)$$

Además, dado que $J \subseteq J'$ tenemos que

$$|J_q \cap J|^s + |J_{q+1} \cap J|^s + ... + |J_r \cap J|^s \leq |J_q \cap J'|^s + |J_{q+1} \cap J'|^s + ... + |J_r \cap J'|^s,$$

y

$$|J|^s \leq |J'|^s. \qquad (A.10)$$

Ahora, como $0 < s < 1$, el incremento en la ecuación (A.9) es mayor que el incremento en la ecuación (A.10) (estamos usando la concavidad de la función t^s y que tanto $J_q \cap J$ como $J_r \cap J$ están contenidos en J). Concluimos que la desigualdad (A.8) vale también para J. Para terminar con la demostración de la desigualdad (A.7) notemos que

$$\begin{aligned} \mu(C \cap J) &\leq \mu\left(C \cap J \cap (\cup_{i=q}^{r} J_i)\right) \\ &= \mu\left(\cup_{i=q}^{r} (C \cap J_i)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} \mu(C \cap J_i), \end{aligned}$$

y por (A.6) y (A.8)

$$\begin{aligned} \mu(C \cap J) &\leq \sum_{i=1}^{r} |J_i|^s \\ &\leq |J|^s. \end{aligned}$$

Finalmente, dado un cubrimiento $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ de C arbitrario, tenemos que

$$\begin{aligned}\mu(C) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(C \cap J_i)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu(C \cap J_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}|J_i|^s\end{aligned}$$

y entonces $H^s(C) \geq \mu(C)$. Concluimos que $H^s(C) = \mu(C) = 1$ y de ahí que $\dim_H(C) = s$. ■

Apéndice B

Test de Schur

Lema B.0.2 *(Test de Schur) Sean (X, μ), (Y, ν) dos espacios de medida y sea $K(x, y)$ una función medible en $X \times Y$ tal que*

$$\int_X |K(x,y)|d\mu(x) \leq A \qquad \text{para cada } y \in Y \tag{B.1}$$

$$\int_Y |K(x,y)|d\nu(y) \leq B \qquad \text{para cada } x \in X \tag{B.2}$$

Definimos un operador

$$T_K f(x) := \int_Y K(x,y) f(y) d\nu(y)$$

Entonces para $f \in L^2(d\nu)$ la integral que define a $T_K f$ converge para casi todo punto (respecto de $d\mu(x)$) y vale la acotación

$$\|T_K f\|_{L^2(d\mu)} \leq \sqrt{AB}\|f\|_{L^2(d\nu)} \tag{B.3}$$

Demostración: Una posibilidad es usar el teorema de interpolación de Riesz-Thorin, pues por la desigualdad (B.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \|T_K f\|_\infty &= \sup_x |\int_Y K(x,y) f(y) d\nu(y)| \\ &\leq \sup_x \int_Y |K(x,y)||f(y)|d\nu(y) \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_x \int_Y |K(x,y)|d\nu(y) \\ &\leq B\|f\|_\infty \end{aligned}$$

y por la desigualdad (B.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T_K f\|_1 &\leq \int_X |\int_Y K(x,y)f(y)d\nu(y)|d\mu(x) \\
&\leq \int_X \int_Y |K(x,y)||f(y)|d\nu(y)d\mu(x) \\
&= \int_Y |f(y)| \int_X |K(x,y)|d\mu(y)d\nu(x) \qquad \text{(Tonelli)} \\
&\leq \int_Y |f(y)|Ad\nu(x) = A\|f\|_1
\end{aligned}$$

Si aplicamos Riesz- Thorin con los exponentes $(1,1)$ y (∞,∞) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{1} \qquad &, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{1} \\
\frac{1}{p} = \theta \qquad &, \qquad \frac{1}{q} = \theta
\end{aligned}$$

de modo que con $\theta = \frac{1}{2}$ obtenemos la acotación

$$\|T_K f\|_{L^2(d\mu)} \leq B^{1-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(d\nu)} = \sqrt{AB}\|f\|_{L^2(d\nu)}$$

Otra prueba más elemental es la siguiente. Dados a y b números positivos entonces vale

$$\sqrt{ab} = \min_{\varepsilon \in (0,\infty)} \frac{\varepsilon a + \varepsilon^{-1} b}{2} \tag{B.4}$$

pues para todo $\varepsilon > 0$, por la conocida desigualdad entre media geométrica y aritmética, tenemos que

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\varepsilon a \varepsilon^{-1} b} \leq \frac{\varepsilon a + \varepsilon^{-1} b}{2}$$

y tomando $\varepsilon = \sqrt{\frac{b}{a}}$ queda

$$\frac{\varepsilon a + \varepsilon^{-1} b}{2} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} a + \sqrt{\frac{a}{b}} b}{2} = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{ab}}{2} = \sqrt{ab}$$

Ahora, usamos que por dualidad en $L^2(X,\mu)$

$$\begin{aligned}
\|T_K f\|_{L^2(d\mu)} &= \sup_{\|g\|_{L^2(d\mu)} \leq 1} \int_X T_K f(x) g(x) d\mu(x) \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L^2(d\mu)} \leq 1} \int_X \int_Y |K(x,y)||f(x)||g(x)|d\nu(y)d\mu(x)
\end{aligned}$$

de manera que para probar (B.3) alcanza con probar que para toda $f \in L^2(Y,\nu)$ y $g \in L^2(X,\mu)$ tales que $\|f\|_{L^2(d\nu)} \leq 1$ y $\|g\|_{L^2(d\mu)} \leq 1$ vale

$$\int_X \int_Y |K(x,y)||f(y)||g(x)|d\nu(y)d\mu(x) \leq \sqrt{AB}$$

para eso usamos (B.4) y obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_X \int_Y |K(x,y)||f(y)||g(x)|d\nu d\mu &= \frac{1}{2} \min_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon \int_X \int_Y |K(x,y)||f(y)|^2 d\nu d\mu \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^{-1} \int_X \int_Y |K(x,y)||g(x)|^2 d\nu d\mu \right) \\
&= \frac{1}{2} \min_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon A \int_Y |f(y)|^2 d\nu \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^{-1} B \int_X |g(x)|^2 d\mu \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \min_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon A + \varepsilon^{-1} B \right) = \sqrt{AB}
\end{aligned}$$

■

Bibliografía

[Bes19] A. S. Besicovitch, *Sur deux questions d'intégrabilité des fonctions*, J. Soc. Phys.-Math. (Perm') **2** (1919), 105–123.

[Bes28] ———, *On Kakeya's problem and a similar one*, Math. Z. **27** (1928), no. 1, 312–320. MR MR1544912

[Bes63] ———, *The Kakeya problem*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 697–706. MR MR0157266 (28 #502)

[Bou91] J. Bourgain, *Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis*, Geom. Funct. Anal. **1** (1991), no. 2, 147–187. MR MR1097257 (92g:42010)

[Bou00] ———, *Harmonic analysis and combinatorics: how much may they contribute to each other?*, Mathematics: frontiers and perspectives, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 13–32. MR MR1754764 (2001c:42009)

[Cór75] Antonio Córdoba, *A radial multiplier and a related Kakeya maximal function*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 428–430. MR MR0365016 (51 #1269)

[Cor77] Antonio Cordoba, *The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers*, Amer. J. Math. **99** (1977), no. 1, 1–22. MR MR0447949 (56 #6259)

[Dav71] Roy O. Davies, *Some remarks on the Kakeya problem*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **69** (1971), 417–421. MR MR0272988 (42 #7869)

[DC87] Katherine Michelle Davis and Yang-Chun Chang, *Lectures on Bochner-Riesz means*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 114, Cambridge University Press, Cambridge, 1987. MR MR921849 (88m:42031)

[dL65] Karel de Leeuw, *On L_p multipliers*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 364–379. MR MR0174937 (30 #5127)

[Duo01] Javier Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe. MR MR1800316 (2001k:42001)

[Fal86] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. MR MR867284 (88d:28001)

[Fef71] Charles Fefferman, *The multiplier problem for the ball*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 330–336. MR MR0296602 (45 #5661)

[FK17] M. Fujiwara and S. Kakeya, *On some problems of maxima and minima for the curve of constantbreadth and the in-revolvable curve of the equilateral triangle*, Tohoku Mathematical Journal **11** (1917), 92–110.

[Jod71] Max Jodeit, Jr., *A note on Fourier multipliers*, Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 423–424. MR MR0270072 (42 #4965)

[Kat04] Yitzhak Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, third ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. MR MR2039503 (2005d:43001)

[Kin68] J. R. Kinney, *A Thin Set of Circles*, Amer. Math. Monthly **75** (1968), no. 10, 1077–1081. MR MR1535168

[ŁT01] I. Łaba and T. Tao, *An improved bound for the Minkowski dimension of Besicovitch sets in medium dimension*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), no. 4, 773–806. MR MR1866801 (2003b:28006)

[Mar54a] J. M. Marstrand, *The dimension of Cartesian product sets*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **50** (1954), 198–202. MR MR0060571 (15,691g)

[Mar54b] ———, *Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions*, Proc. London Math. Soc. (3) **4** (1954), 257–302. MR MR0063439 (16,121g)

[Rog70] C. A. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge University Press, London, 1970. MR MR0281862 (43 #7576)

[Ste93] Elias M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III. MR MR1232192 (95c:42002)

[Wol95] Thomas Wolff, *An improved bound for Kakeya type maximal functions*, Rev. Mat. Iberoamericana **11** (1995), no. 3, 651–674. MR MR1363209 (96m:42034)

[Wol99] ———, *Recent work connected with the Kakeya problem*, Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 129–162. MR MR1660476 (2000d:42010)

[Wol03] Thomas H. Wolff, *Lectures on harmonic analysis*, University Lecture Series, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, With a foreword by Charles Fefferman and preface by Izabella Łaba, Edited by Łaba and Carol Shubin. MR MR2003254 (2004e:42002)