UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

# El espectro de álgebras de funciones analíticas sobre espacios de Banach de dimensión infinita.

Román Villafañe

Director: Daniel Carando

CO-Director: Santiago Muro

26 de Marzo de 2010

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar el espectro del álgebra de funciones analíticas y acotadas en la bola de un espacio de Banach. La descripción de este espectro para el caso unidimensional (es decir, para el álgebra $H^\infty = H^\infty(\triangle)$ de funciones analíticas y acotadas en el disco unidad complejo $\triangle$) es ya clásica, y está desarrollada, por ejemplo, en el libro "Banach spaces of analytic functions"de Hoffman [14]. Recordemos que el espectro $\mathcal{M}(H^\infty)$ es el conjunto formado por los funcionales lineales, multiplicativos y no nulos sobre $H^\infty$. Para describir este conjunto se define una proyección $\pi : \mathcal{M}(H^\infty) \to \mathbb{C}$, cuya imagen resulta la clausura $\bar{\triangle}$ del disco unidad. Entonces, una parte fundamental de la descripción del espectro consiste en caracterizar las fibras que resultan de esta proyección, es decir, analizar $\pi^{-1}(\lambda)$ para $\lambda \in \bar{\triangle}$. Se demuestra que la fibra de cada $\lambda$ en el interior del disco tiene un solo elemento (o sea, $\pi$ es inyectiva sobre $\pi^{-1}(\triangle)$). En cambio, si $\lambda$ está en el borde del disco, resulta que la fibra $\pi^{-1}(\{\lambda\})$ tiene cardinal mayor a $c$. Como consecuencia, tenemos que $\mathcal{M}(H^\infty)$ está formado por una copia de $\triangle$ y un borde complicado.

Este trabajo se trata de hacer un análisis similar pero en el caso que el dominio sea un espacio de Banach de dimensión infinita. Está basado en el artículo "Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space" de Aron, Cole y Gamelin [1].

En lo que sigue, $\mathbf{X}$ será un espacio de Banach complejo, y $B$ denotará la bola unidad abierta de $\mathbf{X}$. Nuestro objetivo es entonces estudiar el álgebra uniforme $H^\infty(B)$ formado por las funciones analíticas sobre $B$ que son acotadas. Particularmente, nos interesa estudiar su espectro $\mathcal{M}$, formado por los funcionales lineales, multiplicativos y no nulos sobre $H^\infty(B)$.

Definiremos una proyección natural $\pi : \mathcal{M} \to \mathbf{X}^{**}$ dada por $\pi(\varphi) = \varphi|_{\mathbf{X}^*}$, cuya imagen queda incluida en $\bar{B}^{**}$, la bola unidad cerrada de $\mathbf{X}^{**}$. Veremos que las fibras $\pi^{-1}(\{z\})$ tienen cardinal mayor a $c$ para todo $z \in \bar{B}^{**}$ (de hecho, contienen a una copia de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, donde $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-$\check{C}$ech de los naturales). Esto marca una notable diferencia con lo que ocurre para $\mathbf{X} = \mathbb{C}$ donde, como comentamos anteriormente, las fibras sobre los puntos interiores tienen un solo elemento. Sin embargo, un replanteo de la situación nos mostrará cuál es la analogía del resultado para espacios de Banach con el de una variable (ver el párrafo al final de esta Introducción)

Para obtener propiedades del álgebra $H^\infty(B)$ y de su espectro $\mathcal{M}$, estudiaremos el álgebra de Fréchet $H_b(\mathbf{X})$ formada por las funciones enteras que son acotadas sobre subconjuntos acotados de $\mathbf{X}$, con la topología de la convergencia uniforme sobre acotados. Y también estudiaremos su espectro $M_b$, que consiste en los funcionales lineales, continuos, multiplicativos y no nulos sobre $H_b(\mathbf{X})$ (notemos que para álgebras de Banach como $H^\infty(B)$, la continuidad es automática).

Veremos que $M_b$ tiene muchas estructuras analíticas, por ejemplo veremos que $M_b$ es unión de copias del plano complejo. Definiremos una función radio $R$ en $M_b$ con la propiedad de que el subconjunto $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant 1\}$ se identifica con el espectro del álgebra $H^\infty_{uc}(B)$ de las funciones analíticas sobre $B$ que son acotadas y uniformemente continuas.

Vamos a definir una operación de convolución $\varphi * \theta$, para $\varphi, \theta \in H_b(\mathbf{X})^*$, que restringida a $M_b$, nos da para $M_b$ una estructura de semigrupo con identidad. Vía la identificación de $\mathbf{X}$ dentro de $M_b$ dada por la aplicación $x \to \delta_x$ (el morfismo evaluación), veremos que la suma en $\mathbf{X}$ se traduce en la convolución en $M_b$, es decir, $\delta_{x+y} = \delta_x * \delta_y$ para todo $x, y \in \mathbf{X}$, por lo que podemos pensar a $\mathbf{X}$ como un subgrupo del semigrupo, donde $\delta_0$ es la identidad, que está incluido en el centro del semigrupo.

Además, las funciones de $H_b(\mathbf{X})$ se extienden naturalmente a funciones en $H_b(\mathbf{X}^{**})$ [2] y que esta extensión da un isomorfismo entre $H_b(\mathbf{X})$ y una subálgebra cerrada de $H_b(\mathbf{X}^{**})$. Luego podemos, en particular, definir las evaluaciones en puntos de $\mathbf{X}^{**}$, es decir, tenemos definido $\delta_z$ para $z \in \mathbf{X}^{**}$. Veremos que para un $\varphi \in M_b$ fijo, la aplicación $z \to \delta_z * \varphi$ con $z \in \mathbf{X}^{**}$, define una trayectoria que pasa por $\varphi$ donde las funciones de $H_b(\mathbf{X})$ resultan analíticas sobre ellas, es decir, para cada $f \in H_b(\mathbf{X})$, la función $z \to \delta_z * \varphi(f)$ es analítica. Podemos pensar entonces que dichas trayectorias son parametrizaciones de $\mathbf{X}^{**}$ dentro de $M_b$. Luego $M_b$ es una unión de copias analíticas de $\mathbf{X}^{**}$. Veremos que el producto de convolución entre evaluaciones en puntos de $\mathbf{X}^{**}$ no es necesariamente conmutativa y estudiaremos condiciones que aseguren esta conmutatividad. Probaremos que $\delta_w * \delta_z = \delta_z * \delta_w$ para todo $z, w \in \mathbf{X}^{**}$ es equivalente a que toda forma bilineal, continua y simétrica en $\mathbf{X}$ se extiende a una forma bilineal, continua y simétrica débil-$*$ continua en cada variable en $\mathbf{X}^{**}$. Y esta propiedad, a su vez, es equivalente a que todo operador lineal, simétrico y continuo de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{X}^*$ es débil compacto. Veremos que bajo estas condiciones, el espectro $M_b$ se puede identificar con el conjunto $\mathbf{X}^{**} \times \pi^{-1}(\{0\})$, donde las funciones de $H_b(\mathbf{X})$ resultan analíticas sobre cada dirección $\mathbf{X}^{**} \times \{z\}$, con $z \in \pi^{-1}(\{0\})$ fijo. Además, las trayectorias $z \to \delta_z * \varphi$ con $z \in \mathbf{X}^{**}$ resultan disjuntas, por lo que $M_b$ resulta una variedad analítica que es una unión disjunta de copias de $\mathbf{X}^{**}$.

Finalmente, veremos cómo el espectro $M_b$ nos da información sobre el espectro $\mathcal{M}$ de $H^\infty(B)$, a partir de un resultado que puede verse como análogo al caso de una variable. Definiendo una proyección natural de $\mathcal{M}$ en $M_b$, podemos ver que $\mathcal{M}$ se proyecta sobre $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant 1\}$, y que es inyectiva sobre $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) < 1\}$. Teniendo en cuenta que para $\mathbf{X} = \mathbb{C}$ se tiene $H_b(X) = H(\mathbb{C})$ y $M_b = \mathbb{C}$, y que la función radio de $M_b$ coincide con el módulo de $\mathbb{C}$, podemos concluir que $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant 1\}$ coincide con $\bar{\triangle}$ y $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) < 1\}$ con $\triangle$. Como consecuencia, el caso clásico de una variable mencionado al comienzo queda enmarcado en el resultado general para espacios de Banach.

# Capítulo 2

# El espectro de $H^\infty(\triangle)$

Para introducir el problema que queremos estudiar, veamos primero un problema similar sobre el álgebra $H^\infty(\triangle)$ formado por las funciones analíticas acotadas sobre el disco unidad del plano complejo. Vamos a analizar el espectro de $H^\infty(\triangle)$ formado por los morfismos de álgebras no nulos de $H^\infty(\triangle)$ en $\mathbb{C}$, que llamaremos $\mathcal{M}(H^\infty)$.

La mayor parte de los resultados de esta sección aparecen en los libros de Gamelin [10] y de Hoffman [14].

Si consideramos $H^\infty(\triangle)$ con la norma $\|f\| = \sup\limits_{|z|<1} |f(z)|$, entonces $H^\infty(\triangle)$ resulta un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Luego, hay una biyección entre $\mathcal{M}(H^\infty)$ y el conjunto de ideales maximales de $H^\infty(\triangle)$, que viene dada por $\varphi \longmapsto Ker(\varphi)$. Veamos que además cada $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty)$ es continua y cumple que $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|$ para toda $f \in H^\infty(\triangle)$. Si suponemos que no se cumple esta propiedad, existe $f \in H^\infty(\triangle)$ tal que $|\varphi(f)| > \|f\|$. Luego $\|\frac{f}{\varphi(f)}\| < 1$ y entonces $1 - \frac{f}{\varphi(f)}$ es inversible, y como $\varphi$ es multiplicativa y no nula tenemos que $\varphi(1) = 1$, por lo que $\varphi(1 - \frac{f}{\varphi(f)}) \neq 0$. Luego, $1 = \varphi(1) \neq \varphi(\frac{f}{\varphi(f)}) = 1$ que resulta una contradicción.

Ahora bien, como $\varphi(1) = 1$ se deduce en particular que $\|\varphi\| = 1$ (tomando a $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty) \subset H^\infty(\triangle)^*$) . Entonces $\mathcal{M}(H^\infty)$ está contenido en la esfera unidad de $H^\infty(\triangle)^*$, que es compacta para la topología débil-$*$.

**Proposición 2.1.** *$\mathcal{M}(H^\infty)$ es cerrado para la topología débil-$*$.*

*Demostración.* Basta ver que dada $T : H^\infty(\triangle) \to \mathbb{C}$ continua que pertenece a la clausura débil-$*$ de $\mathcal{M}(H^\infty)$, resulta que $T$ es multiplicativa y no nula. Ahora bien, como toda $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty)$

es no nula y cumplen que $\varphi(1) = 1$, entonces $T$ también cumple que $T(1) = 1$, por lo que es no nula. Veamos ahora que $T$ es multiplicativa, dado $\varepsilon > 0$ y dados $f, g \in H^\infty(\triangle)$, existe $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty)$ tal que

$$|\varphi(f) - T(f)| < \varepsilon$$

$$|\varphi(g) - T(g)| < \varepsilon$$

$$|\varphi(fg) - T(fg)| < \varepsilon.$$

Luego

$$\begin{aligned} |T(fg) - T(f)T(g)| &\leqslant |T(fg) - \varphi(fg)| + |\varphi(f)\varphi(g) - \varphi(f)T(g)| + |\varphi(f)T(g) - T(f)T(g)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon|\varphi(f)| + \varepsilon|T(g)| < \varepsilon(1 + \|f\| + \|g\|). \end{aligned}$$

Por lo que resulta que $T \in \mathcal{M}(H^\infty)$. $\square$

Podemos concluir entonces que el espectro $\mathcal{M}(H^\infty)$ es compacto para la topología débil-$*$.

A cada elemento $f \in H^\infty(\triangle)$ le podemos asociar una función $\hat{f} : \mathcal{M}(H^\infty) \to \mathbb{C}$ continua dada por $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$ que resulta continua por definición de la topología débil-$*$. Si llamamos $\widehat{H^\infty} = \{\hat{f} : f \in H^\infty(\triangle)\}$, entonces la aplicación $f \longmapsto \hat{f}$ es una representación de $H^\infty(\triangle)$ en $\widehat{H^\infty}$ que se llama la representación de Gelfand.

Los morfismos más simples que podemos encontrar en $\mathcal{M}(H^\infty)$ son las evaluaciones en puntos de $\triangle$ que llamaremos $\delta_\lambda$ para $\lambda \in \triangle$,

$$\delta_\lambda(f) = f(\lambda).$$

Sin embargo hay otros morfismos que no son las evaluaciones, por ejemplo si consideramos el conjunto $I = \{f \in H^\infty(\triangle) : f(\lambda) \to 0 \text{ con } \lambda \to 1 \text{ sobre el eje positivo de las x}\}$, constituye un ideal propio de $H^\infty(\triangle)$ por lo que está incluido en un ideal maximal $J$ de $H^\infty(\triangle)$. Esto es, existe $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty)$ tal que $\varphi(f) = 0$ para toda $f \in I$. Pero $\varphi$ no es la evaluacíon en algún $\lambda$ pues no hay ningún $\lambda$ donde se anulen todas las $f$ que pertenecen a $I$.

Las evaluaciones muestran que la representación de Gelfand es biyectiva, en efecto, claramente es sobreyectiva y si $\hat{f} = 0$, entonces $\hat{f}(\delta_\lambda) = f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \triangle$. Por lo que $f = 0$. Además la representación resulta una isometría:

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty)} |\hat{f}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty)} |\varphi(f)| \leqslant \|f\|,$$

$$\|\hat{f}\|_\infty \geqslant \sup_{|\lambda|<1} |\hat{f}(\delta_\lambda)| = \sup_{|\lambda|<1} |f(\lambda)| = \|f\|.$$

Luego $H^\infty(\triangle)$ es isométricamente isomorfo a $\widehat{H^\infty}$.

Además, hay un función continua natural que podemos definir, $\pi : \mathcal{M}(H^\infty) \to \mathbb{C}$ dada por $\pi(\varphi) = \varphi(id)$, o sea $\pi = \hat{id}$. Y lo notamos $\pi(\varphi) = \varphi(z)$.

**Teorema 2.2.** *La función $\pi$ es continua de $\mathcal{M}(H^\infty)$ en el disco cerrado unidad. Además sobre el disco abierto $\triangle$, $\pi$ es biyectiva y $\pi^{-1}$ es un homeomorfismo entre $\triangle$ y un subconjunto abierto $\widetilde{\triangle}$ de $\mathcal{M}(H^\infty)$.*

*Demostración.* Como notamos anteriormente, $\pi = \hat{id}$ por lo que es continua. Dado $\lambda \in \triangle$, $\pi(\delta_\lambda) = \lambda$, por lo que $\triangle \subset Im(\pi)$. Como $\mathcal{M}(H^\infty)$ es compacto (Proposición 2.1), entonces $Im(\pi)$ también lo es y cumple que $\triangle \subset Im(\pi) \subset \overline{\triangle}$, luego $Im(\pi) = \overline{\triangle}$.

Veamos ahora que $\pi : \pi^{-1}(\triangle) \to \triangle$ es homeomorfismo. Sea $\lambda \in \triangle$ y sea $\varphi$ tal que $\pi(\varphi) = \lambda$ y tomemos $f \in H^\infty(\triangle)$ tal que $f(\lambda) = 0$, entonces $f = (z - \lambda)g$ y además

$$\varphi(f) = \varphi((z-\lambda)g) = \varphi(z-\lambda)\varphi(g) = (\varphi(z) - \varphi(\lambda))\varphi(g) = (\pi(\varphi) - \lambda)\varphi(g) = 0.$$

Luego $Ker(\delta_\lambda) \subset Ker(\varphi)$, por lo que $Ker(\delta_\lambda) = Ker(\varphi)$ y como $\delta_\lambda(1) = \varphi(1) = 1$ resulta que $\varphi = \delta_\lambda$. Por lo tanto es una biyección y $\pi : \pi^{-1}(\triangle) \to \triangle$ es homeomorfismo. □

La aplicación $\pi$ es una proyección de $\mathcal{M}(H^\infty)$ en $\overline{\triangle}$, por lo que vimos en el teorema anterior podemos pensar a $\triangle$ homeomórficamente incluido en $\mathcal{M}(H^\infty)$ vía $\lambda \to \delta_\lambda$. Para terminar de analizar todo el espectro falta ver las preimágenes de los elementos del borde del disco unidad.

**Definición 2.3.** *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$, llamamos la fibra de $\mathcal{M}(H^\infty)$ sobre $\alpha$ a*

$$\mathcal{M}_\alpha = \pi^{-1}(\alpha) = \{\phi \in \mathcal{M}(H^\infty) : \varphi(z) = \alpha\}.$$

La fibra $\mathcal{M}_\alpha$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{M}(H^\infty)$ y está formada por los morfismos de $H^\infty(\triangle)$ que se parecen a la evaluación en $\alpha$.

**Teorema 2.4.** *Sea $f \in H^\infty(\triangle)$ y sea $\alpha$ un punto del círculo unidad. Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de elementos del disco abierto unidad que tiende a $\alpha$. Supongamos que existe $\lim f(\lambda_n) = \xi$, entonces existe $\varphi \in \mathcal{M}_\alpha$ tal que $\varphi(f) = \xi$.*

*Esto es $\lim \delta_{\lambda_n}(f) = \varphi(f)$.*

*Demostración.* Considero $J = \{g \in H^\infty(\triangle) : \text{lím}\, g(\lambda_n) = 0\}$, es un ideal propio de $H^\infty(\triangle)$, entonces $J$ está incluido en un ideal maximal $M$. Luego existe $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty)$ tal que $\varphi(g) = 0$ para toda $g \in J$. Pero si consideramos $g_1 = z - \alpha$ y $g_2 = f - \xi$, tenemos que $g_1, g_2 \in J$. Entonces $\varphi(g_1) = \varphi(z) - \varphi(\alpha) = \pi(\varphi) - \alpha = 0$ por lo que $\pi(\varphi) = \alpha$ y $\varphi$ pertenece a $\mathcal{M}_\alpha$. Y por otro lado $\varphi(g_2) = \varphi(f) - \xi = 0$ por lo que $\varphi(f) = \xi$ como queríamos. □

**Teorema 2.5.** *La función $\hat{f}$ es constante sobre la fibra $\mathcal{M}_\alpha$ si y solo si $f$ se puede extender continuamente a $\triangle \cup \{\alpha\}$.*

*Demostración.* Supongamos que $\hat{f}$ es constante sobre $\mathcal{M}_\alpha$, o sea, existe $\xi$ tal que $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f) = \xi$ para todo $\varphi \in \mathcal{M}_\alpha$. Por el Teorema 2.4 tenemos que dado $\lambda_n \to \alpha$, si existe el límite de $f(\lambda_n)$ y es igual a $a$, entonces existe $\varphi \in \mathcal{M}_\alpha$ tal que $\varphi(f) = a$. Pero tenemos que $\varphi(f) = \xi$ para todo $\varphi \in \mathcal{M}_\alpha$, por lo que $\text{lím}\, f(\lambda_n) = \xi$. Luego si existe el límite de $f(\lambda_n)$ debe ser necesariamente $\xi$. Ahora bien, veamos que dado $\lambda_n \to \alpha$, existe dicho límite. Supongamos que no, o sea, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(\lambda_n) - \xi| > \varepsilon$ para infinitos $n$, y tomemos la subsucesión $\{f(\lambda_{n_k})\}$ formada por dichos elementos. Como $f \in H^\infty(\triangle)$, $\{f(\lambda n_k)\} \subset \mathbb{C}$ esta acotada, luego tiene una subsucesión convergente $\{f(\lambda_{n_{k_j}})\}$ que no tiende a $\xi$ lo que resulta una contradicción.

Supongamos ahora que $f$ se puede extender continuamente a $\triangle \cup \{\alpha\}$, entonces hay un valor complejo $\xi$ tal que $\text{lím}\, f(\lambda_n) = \xi$ para toda sucesión $\{\lambda_n\} \subset \triangle$ que tiende a $\alpha$. Veamos que $\hat{f}$ es constante sobre $\mathcal{M}_\alpha$ y vale $\xi$. Podemos suponer que $\xi = 0$ pues si no, tomamos la función $f - \xi$. Sea $h(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + \bar{\alpha}\lambda)$, luego $h(\alpha) = 1$ y $|h| < 1$ en cualquier otro punto del disco cerrado. Probemos que $(1 - h^n)f$ converge uniformemente a $f$. Dado $\varepsilon > 0$, tomo $\delta > 0$ tal que $|f(\lambda)| < \varepsilon/2$ si $|\lambda - \alpha| < \delta$, existe tal $\delta$ porque $f$ es continua en $\alpha$ y $f(\alpha) = 0$. Para $|\lambda - \alpha| \geqslant \delta$, vale que $|h(\lambda)| < 1 - \eta$, con $\eta > 0$ pues $\{\lambda \in \triangle : |\lambda - \alpha| \geqslant \delta\}$ es compacto. Entonces existe $n_0$ tal que $|h^n(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|}$ para todo $n \geqslant n_0$. Por lo tanto, si $|\lambda - \alpha| < \delta$, entonces $|(1 - h^n(\lambda))f(\lambda) - f(\lambda)| = |h^n(\lambda)f(\lambda)| \leqslant |f(\lambda)| < \varepsilon/2$, esto vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $|\lambda - \alpha| \geqslant \delta$, entonces $|h^n(\lambda)f(\lambda)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|f\|}\|f\| = \varepsilon/2$ para todo $n \geqslant n_0$.

Luego dado $\varphi \in \mathcal{M}_\alpha$, tenemos que $\varphi(h) = 1$. Por lo tanto, $\varphi((1 - h^n)f) = 0$ y como $\varphi$ es continua, $\varphi(f) = 0$. Luego $\hat{f}$ es identicamente 0 sobre $\mathcal{M}_\alpha$. □

Más aún, vale el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [14, p.162]

**Teorema 2.6.** *Sea $f \in H^\infty(\triangle)$, y sea $\alpha$ un punto del círculo unidad. Si existe $\varphi \in \mathcal{M}_\alpha$ tal que $\varphi(f) = 0$, entonces existe una sucesión $\{\lambda_n\} \subset \triangle$ tal que $\lim \lambda_n = \alpha$ y $\lim f(\lambda_n) = 0$.*

**Corolario 2.7.** *Si $f \in H^\infty(\triangle)$ y $\alpha$ pertenece al círculo unidad, entonces la imagen de $\hat{f}$ sobre la fibra $\mathcal{M}_\alpha$ esta compuesta por todos lo números complejos $\xi$ para los cuales existe una sucesión en el disco unidad $\{\lambda_n\}$ con $\lim \lambda_n = \alpha$ y $\lim f(\lambda_n) = \xi$.*

**Ejemplo 2.8.** En este ejemplo veremos que $\#(\mathcal{M}_1) \geqslant c$ (en realidad vale que es mayor estricto, ver Observación 2.9).

Consideremos la función $f(z) = \exp(\dfrac{z+1}{z-1})$. Observemos que la función $g(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ manda $\overline{\triangle}$ en el conjunto $\{w \in \mathbb{C} : Re(w) \leqslant 0\}$ y en particular manda $\triangle$ en $\{Re(w) < 0\}$ y manda el borde de $\overline{\triangle}$ en $\{Re(w) = 0\}$. Ahora bien, si $Re(w) \leqslant 0$, entonces $|\exp(w)| \leqslant 1$, por lo que $f \in H^\infty(\triangle)$ y además vale que $f(\triangle) \subset \triangle$.

Sea $\lambda \in \overline{\triangle}$. Si $|\lambda| < 1$, $\lambda = \rho \exp(i\theta)$ con $\rho < 1$, luego $\lambda = \exp(-a + \theta i) = \exp(-a + (\theta + 2k\pi)i)$. Tomamos $w_k = -a + (\theta + 2k\pi)i$. Si $|\lambda| = 1$, $\lambda = \exp(i\theta)$. Si consideramos $\lambda_k = \exp(-1/k + (\theta + 2k\pi)i)$, vale que $\lambda_k \to \lambda$. Tomamos en este caso $w_k = -1/k + (\theta + 2k\pi)i$.

En ambos casos $w_k \in \{Re(w) \leqslant 0\}$, entonces tomamos $z_k = g^{-1}(w_k)$, como $w_k \to \infty$, tenemos que $z_k \to 1$ y además vale que $f(z_k) = \exp(w_k) = \lambda_k \to \lambda$. Luego, por el Teorema 2.4, dado $\lambda \in \overline{\triangle}$, existe $\varphi \in \mathcal{M}_1$ tal que $\varphi(f) = \lambda$. Y así obtuvimos una copia de $\overline{\triangle}$ dentro de la fibra $\mathcal{M}_1$, por lo tanto $\#(\mathcal{M}_1) \geqslant c$.

**Observación 2.9.** Usando un resultado de Carleson y Newman sobre existencia de sucesiones interpolantes para $H^\infty(\triangle)$ (ver [14, p.204]), podemos probar que efectivamente dado $\lambda$ con $|\lambda| = 1$, vale que $\mathcal{M}_\lambda$ tiene cardinal mayor que $c$. Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión interpolante para $H^\infty(\triangle)$, esto es, dado $a \in \ell^\infty$, existe $f \in H^\infty(\triangle)$ tal que $f(\lambda_n) = a_n$, tal que $\lambda_n \to \lambda$.

Consideremos la aplicación $I : H^\infty(\triangle) \longrightarrow \ell^\infty$ definida por $f \longmapsto \{f(\lambda_n)\}_n$. Esta aplicación es un morfismo de álgebras (es multiplicativa) suryectivo. Tomemos, ahora, la aplicación dual asociada $I^* : (\ell^\infty)^* \longrightarrow (H^\infty(\triangle))^*$. Como $I$ es multiplicativa, podemos restringir $I^*$ a $\mathcal{M}(\ell^\infty)$ y resulta que $I^* : \mathcal{M}(\ell^\infty) \longrightarrow \mathcal{M}(H^\infty)$ dada por $\varphi \longmapsto \varphi \circ I$ está bien definida y es inyectiva.

Ahora bien, $\mathcal{M}(\ell^\infty) = \mathcal{M}(C_b(\mathbb{N}))$ coincide con $\beta\mathbb{N}$ [16, Theorem 2.4.12], donde $\beta\mathbb{N}$ denota la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ y $C_b(\mathbb{N})$ denota el álgebra de funciones continuas y acotadas sobre los naturales. Luego si $m \in \mathbb{N} \subset \beta\mathbb{N}$,

$$I^*(m)(f) = m(I(f)) = m(\{f(\lambda_n)\}_n) = f(\lambda_m),$$

luego $I^*(m) = \delta_{\lambda_m}$. Por otro lado, si $\eta \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, existe una red $(n_\alpha)_\alpha \subset \mathbb{N}$ tal que $n_\alpha \to \eta$. Entonces $\eta(a) = \lim a_{n_\alpha}$ para todo $a \in \ell^\infty$ y por lo tanto

$$I^*(\eta)(f) = \eta(If) = \eta(\{f(\lambda_n)\}_n) = \lim f(\lambda_{n_\alpha}).$$

Entonces $I^*(\eta)(z) = \lim z(\lambda_{n_\alpha}) = \lim \lambda_{n_\alpha} = \lambda$, por lo que resulta que $\pi(I^*(\eta)) = \lambda$. Luego, $I^*(\eta) \in \pi^{-1}(\lambda)$ para todo $\eta \in \beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ y como $I^*$ es inyectiva, podemos concluir que $\mathcal{M}_\lambda$ contiene una copia de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ cuyo cardinal es mayor que $c$.

Vimos en el Teorema 2.2 que hay un homeomorfismo entre $\triangle$ y $\widetilde{\triangle} \subset \mathcal{M}(H^\infty)$, por lo que $\widetilde{\triangle}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{M}(H^\infty)$. Una pregunta que surge es si $\widetilde{\triangle}$ es denso en $\mathcal{M}(H^\infty)$, o sea, nos preguntamos si toda $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty)$ es límite de una red $\{\delta_\lambda\}_\lambda$.

**Teorema 2.10.** *$\widetilde{\triangle}$ es denso en $\mathcal{M}(H^\infty)$ si y sólo si se cumple la siguiente condición:*

*Si $f_1, \dots, f_n \in H^\infty(\triangle)$ tales que $|f_1(\lambda)| + \cdots + |f_n(\lambda)| \geqslant \eta > 0$, con $|\lambda| < 1$, entonces existen $g_1, \dots, g_n \in H^\infty(\triangle)$ tales que $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$.*

*Demostración.* Supongamos que existe $\varphi_0 \in \mathcal{M}(H^\infty)$ que no está en la clausura de $\widetilde{\triangle}$, luego existen $f_1, \dots, f_n \in H^\infty(\triangle)$ y $\eta > 0$ tales que $\varphi_0(f_i) = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ y además el entorno de $\varphi_0$ dado por $\{\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty) : |\varphi(f_i)| < \eta,\ i = 1, \dots, n\}$ no intersecta a $\widetilde{\triangle}$. Luego, vale en particular que dado $\lambda \in \triangle$, $\delta_\lambda(f_i) \geqslant \eta$ para algún $1 \leqslant i \leqslant n$ por lo que $|f_1| + \cdots + |f_n| \geqslant \eta$ sobre $\triangle$. Pero $f_1, \dots, f_n \in Ker(\varphi_0)$ que es un ideal propio de $H^\infty(\triangle)$ por lo que 1 no pertenece a dicho ideal, o sea, no existen $g_1, \dots, g_n \in H^\infty(\triangle)$ tales que $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$.

Recíprocamente, sean $f_1, \dots, f_n \in H^\infty(\triangle)$ tales que $|f_1(\lambda)| + \cdots + |f_n(\lambda)| \geqslant \eta$ para todo $\lambda \in \triangle$ y tales que no existen $g_1, \dots, g_m \in H^\infty(\triangle)$ con $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$. Entonces $f_1, \dots, f_n$ están incluidos en un ideal propio de $H^\infty(\triangle)$ y luego están incluidos en un ideal maximal de $H^\infty(\triangle)$. Esto es, existe $\varphi_0 \in \mathcal{M}(H^\infty)$ tal que $\varphi_0(f_i) = 0$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, luego si consideramos el entorno de $\varphi_0$ definido por $\{\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty) : |\varphi(f_i)| < \eta,\ i = 1, \dots, n\}$, este entorno no intersecta a $\widetilde{\triangle}$ por lo que $\varphi_0$ no pertenece a la clausura de $\widetilde{\triangle}$. $\square$

El conjunto $\mathcal{M}(H^\infty) \setminus \overline{\widetilde{\triangle}}$ fue llamada la Corona por Newman en 1959 [21], el Teorema de la Corona dice que la Corona es vacía. O sea, $\widetilde{\triangle}$ es denso en $\mathcal{M}(H^\infty)$ para la topología débil-$*$. Newman mostró que el Teorema de la Corona podía reducirse a un problema de interpolación, que finalmente fue probado por Carleson en 1962 [5].

**Teorema 2.11** (Teorema de la Corona)**.** *Toda $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty)$ es límite de una red $\{\delta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ con $\Lambda \subset \triangle$.*

En 1979 Wolff dió una demostración simplificada (no publicada) del Teorema de la Corona, descripta en [17] y en [12].

Cole mostró que este resultado no puede extenderse a toda superficie de Riemann abierta [11].

Todavía quedan abiertas versiones del problema de la corona para dominios de dimensión más grande (por ejemplo para la bola unidad de $\mathbb{C}^2$).

# Capítulo 3

# Funciones Analíticas en espacios de Banach

En esta sección vamos a estudiar primero las formas multilineales sobre espacios de Banach, que nos servirán para poder definir los polinomios, que a su vez usaremos para definir las funciones analíticas como series de potencias. Por último vamos a realizar un resumen de definiciones y resultados que necesitaremos a lo largo del trabajo. Referencias básicas sobre estos temas son los libros de Mujica [19] y Dineen [9] o las notas de Gamelin [13].

En lo que sigue $\mathbf{X}$ representará un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$.

## 3.1. Formas multilineales y polinomios

**Definición 3.1.** *Para cada $m \in \mathbb{N}$ notaremos como $\mathcal{L}_a({}^m\mathbf{X})$ al espacio vectorial de las formas $m$-lineales $A : \mathbf{X}^m \longrightarrow \mathbb{C}$ y notaremos como $\mathcal{L}({}^m\mathbf{X})$ al subespacio formado por las formas continuas de $\mathcal{L}_a({}^m\mathbf{X})$. Para cada $A \in \mathcal{L}_a({}^m\mathbf{X})$ definimos*

$$\|A\| = \sup\{|A(x_1, \ldots, x_m)| : \max_j \|x_j\| \leqslant 1\}.$$

*En el caso que $m = 1$, notaremos $\mathcal{L}_a({}^1\mathbf{X}) = \mathbf{X}^*$.*

**Proposición 3.2.** *Dada $A \in \mathcal{L}_a(^m\mathbf{X})$. A es continua si y sólo si $\|A\| < \infty$.*

*Demostración.* Si la norma de $A$ no es acotada, existe una sucesión $(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_m^k)$ en $\mathbf{X}^m$ tal que $\max_j \|x_j^k\| \leqslant 1$ y $|A(x_1^k, \ldots, x_m^k)| \geqslant k^m$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $\max_j \|\frac{x_j^k}{k}\| \leqslant \frac{1}{k}$ y $|A(\frac{x_1^k}{k}, \ldots, \frac{x_m^k}{k})| \geqslant 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo que $A$ no es continua en 0.

Recíprocamente, sean $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{X}^m$ y $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{X}^m$ tales que $\max_j \|a_j\| \leqslant c$ y $\max_j \|x_j\| \leqslant c$. Entonces

$$\begin{aligned}
|A(x_1, ..., x_m) - A(a_1, ..., a_m)| &= |\sum_{j=1}^{m} [A(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, ..., x_m) - A(a_1, ..., a_j, x_{j+1}, ..., x_m)]| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} |A(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j - x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \|A\| c^{m-1} \|x_j - a_j\|.
\end{aligned}$$

Luego si $\max_j \|x_j - a_j\| < \delta$, entonces

$$|A(x_1, \ldots, x_m) - A(a_1, \ldots, a_m)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|A\| c^{m-1} \|x_j - a_j\| < C\delta,$$

por lo que $A$ es continua. $\square$

**Proposición 3.3.** $(\mathcal{L}(^m\mathbf{X}), \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Es claro que $\|\cdot\|$ es una norma. Veamos que es completo, sea $\{A_j\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(^m\mathbf{X})$. Entonces para cada $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{X}^m$ tenemos que

$$|A_j(x) - A_k(x)| \leqslant \|A_j - A_k\| \|x_1\| \ldots \|x_m\|$$

por lo que $\{A_j(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, que es completo, luego la sucesión converge. Definimos $A$ como

$$A(x) = \lim_j A_j(x).$$

$A$ es $m$-lineal y como $\{A_j\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(^m\mathbf{X})$ vale que existe $c > 0$ tal que $\|A_j\| \leqslant c$ para todo $j \in \mathbb{N}$, luego $\|A\| \leqslant c$ por lo que resulta que $A$ es continua y además $\|A - A_j\| \to 0$ como queríamos. $\square$

**Definición 3.4.** *Para cada $m \in \mathbb{N}$ notaremos con $\mathcal{L}^s(^m\mathbf{X})$ al subespacio de $\mathcal{L}(^m\mathbf{X})$ formado por todas las formas simétricas. Esto es $A \in \mathcal{L}^s(^m\mathbf{X})$ si*

$$A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = A(x_1, \ldots, x_m)$$

*para todo $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{X}$ y para todo $\sigma \in S_m$, donde $S_m$ denota al grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, m\}$.*

**Proposición 3.5.** *Dada $A \in \mathcal{L}(^m\mathbf{X})$, sea $A^s$ definida por*

$$A^s(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}).$$

*Entonces la aplicación de $\mathcal{L}(^m\mathbf{X})$ en $\mathcal{L}^s(^m\mathbf{X})$ dada por $A \to A^s$ es una proyección continua con $\|A^s\| \leqslant \|A\|$.*

*Demostración.* Observemos primero que efectivamente $A^s$ es simétrica, sea $\tau \in S_m$,

$$\begin{aligned}
A^s(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(m)}) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\tau\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau\sigma(m)}) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\rho \in S_m} A(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(m)}) \\
&= A^s(x_1, \ldots, x_m).
\end{aligned}$$

Es una proyección pues dado $A \in \mathcal{L}^s(^m\mathbf{X})$, $A^s = A$ y además dado $x = (x_1, \ldots, x_m)$ con $\max_j \|x_j\| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}
|A^s(x)| &\leqslant \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} |A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma_m})| \\
&\leqslant \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \|A\| = \|A\|.
\end{aligned}$$

Luego $\|A^s\| \leqslant \|A\|$ y por lo tanto es una proyección continua. $\square$

**Definición 3.6.** *Sea* $A \in \mathcal{L}^s(^m\mathbf{X})$. *Entonces dados* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{X}^n$ *y* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ *con* $|\alpha| = m$, *definimos*

$$Ax_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} = A(x_1, \ldots, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_n)$$

*donde* $x_j$ *aparece* $\alpha_j$ *veces con* $1 \leqslant j \leqslant n$.

**Teorema 3.7.** *(Fórmula de Leibniz). Sea* $A \in \mathcal{L}^s(^m\mathbf{X})$. *Entonces dados* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{X}$ *tenemos que*

$$A(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} Ax_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

*donde* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

**Corolario 3.8.** *Sea* $A \in \mathcal{L}^s(^m\mathbf{X})$. *Entonces para todo* $x, y \in \mathbf{X}$ *tenemos la fórmula del binomio de Newton*

$$A(x + y)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} Ax^{m-j} y^j.$$

**Teorema 3.9.** *(Fórmula de Polarización). Sea* $A \in \mathcal{L}^s(^m\mathbf{X})$. *Entonces para todo* $x_0, ..., x_m \in \mathbf{X}$ *tenemos que*

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m.$$

**Definición 3.10.** *Decimos que la aplicación* $P : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ *es un polinomio m-homogéneo continuo si existe* $A \in \mathcal{L}(^m\mathbf{X})$ *tal que* $P(x) = Ax^m$ *para todo* $x \in \mathbf{X}$. *Notaremos con* $\mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ *al espacio vectorial de todos los polinomios m-homogéneos continuos. Dado* $P \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ *tenemos*

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |P(x)|.$$

**Teorema 3.11.** *Para cada* $A \in \mathcal{L}(^m\mathbf{X})$ *sea* $\hat{A} \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ *definida por* $\hat{A}(x) = Ax^m$ *para todo* $x \in \mathbf{X}$. *Entonces:*

(a) *La aplicación* $A \to \hat{A}$ *induce un isomorfismo de espacios vectoriales entre* $\mathcal{L}^s({}^m\mathbf{X})$ *y* $\mathcal{P}_m(\mathbf{X})$.

(b) *Vale que*

$$\|\hat{A}\| \leqslant \|A\| \leqslant \frac{m^m}{m!}\|\hat{A}\|$$

*para toda* $A \in \mathcal{L}({}^m\mathbf{X})$.

*Demostración.*

(a) Dado $P \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$, existe $A \in \mathcal{L}({}^m\mathbf{X})$ tal que $P = \hat{A}$. Entonces $P = \hat{A} = \hat{A}^s$, por lo que la aplicación es epimorfismo. Para ver que es monomorfismo, sea $A \in \mathcal{L}({}^m\mathbf{X})$ usando la Fórmula de Polarización 3.9 con $x_0 = 0$ tenemos que si $A_1, A_2 \in \mathcal{L}^s({}^m\mathbf{X})$ con $A_1 \neq A_2$, existe $x \in \mathbf{X}$ tal que $A_1x^m \neq A_2x^m$ por lo que $\hat{A}_1 \neq \hat{A}_2$

(b) Sea $x \in \mathbf{X}$ con $\|x\| \leqslant 1$, entonces $|\hat{A}(x)| = |Ax^m| \leqslant \|A\|$, por lo que $\|\hat{A}\| \leqslant \|A\|$. Sean ahora, $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{X}$ con $\max_j \|x_j\| \leqslant 1$, entonces usando la Fórmula de Polarización 3.9 con $x_0 = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} |A(x_1, \ldots, x_m)| &\leqslant \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} |\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m||A(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m| \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} |\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m||\hat{A}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)| \\ &\leqslant \frac{m^m\|\hat{A}\|}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} |\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m| = \frac{m^m}{m!}\|\hat{A}\|. \end{aligned}$$

Luego $\|A\| \leqslant \frac{m^m}{m!}\|\hat{A}\|$. □

La fórmula de polarización permite recuperar la forma $m$-lineal asociada a un polinomio $m$-homogéneo dado.

**Corolario 3.12.**

(a) *Un polinomio* $P$ *m-homogéneo es continuo si y sólo si* $\|P\| < \infty$.

(b) $(\mathcal{P}_m(\mathbf{X}); \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach.*

(c) *La aplicación* $A \to \hat{A}$ *induce un isomorfismo topológico entre* $\mathcal{L}^s({}^m\mathbf{X})$ *y* $\mathcal{P}_m(\mathbf{X})$.

El siguiente Teorema extiende el Principio de Acotación Uniforme a polinomios homogéneos. Antes veamos un Lema previo.

**Lema 3.13.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto y sea $\{f_i\}$ una familia de funciones continuas de $U$ en $\mathbb{C}$. Si la familia $\{f_i\}$ es puntualmente acotada sobre $U$ entonces existe un abierto $V \subset U$ donde la famila $\{f_i\}$ es uniformemente acotada.*

*Demostración.* Consideremos los conjuntos $A_n = \{x \in U : \|f_i(x)\| \leqslant n \text{ para todo i } \}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y cada $A_n$ es cerrado, luego por el Lema de Baire, algún $A_n$ tiene interior no vacío. Por lo tanto la familia $\{f_i\}$ es uniformemente acotada en el abierto $V = A_n^\circ$. $\square$

**Teorema 3.14.** *Un subconjunto de $\mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ es acotado en norma si y sólo si es puntualmente acotado.*

*Demostración.* Sea $\{P_i\} \subset \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ puntualmente acotado. Por el Lema anterior, la familia $\{P_i\}$ es uniformemente acotada en la bola $B(a;r)$ por $c$, luego usando la fórmula de polarización (Teorema 3.9) para $A_i$, con $P_i = \hat{A}_i$ y tomando $x_0 = a$ y $x_1 = \cdots = x_m \in B(0, r/m)$ tenemos que la familia $\{P_i\}$ es acotada uniformemente por $cm^m/m!$ sobre la bola $B(0;r)$. $\square$

**Definición 3.15.** *Diremos que la aplicación $P : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ es un polinomio continuo de grado a lo sumo $m$ si lo podemos representar como una suma*

$$P = P_0 + P_1 + \cdots + P_m$$

*donde $P_j \in \mathcal{P}_j(\mathbf{X})$. Notamos con $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ al espacio vectorial de todos los polinomios.*

**Observación 3.16.** *$\mathcal{P}(\mathbf{X})$ es la suma directa algebraica de los subespacios $\mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ con $m \in \mathbb{N}_0$.*

**Definición 3.17.** *Decimos que $P \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ es un polinomio de tipo finito $m$-homogéneo sobre $\mathbf{X}$ si es de la forma $P(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i L_i(x)^m$, con $L_i \in \mathbf{X}^*$. Notaremos con $\mathcal{P}_m^f(\mathbf{X})$ al conjunto de los polinomios de tipo finito $m$-homogéneos.*

*Un polinomio de tipo finito es una combinación lineal finita de polinomios homogéneos de tipo finito. Notaremos con $\mathcal{P}^f(\mathbf{X})$ al conjunto de los polinomios de tipo finito.*

**Observación 3.18.** *El conjunto de los polinomios de tipo finito sobre $\mathbf{X}$ son el álgebra generada por $\mathbf{X}^*$.*

**Observación 3.19.** En el caso que el espacio $\mathbf{X}$ sea de dimensión finita, todo polinomio es de tipo finito. Sin embargo esto no es válido para espacios de dimensión infinita. El Teorema de Littlewood -Bogdanowicz -Pelczynski (ver [3, 23]) dice que todo polinomio $m$-homogéneo sobre $c_0$ se puede aproximar uniformemente por polinomios de tipo finito, es decir, $\mathcal{P}_m(c_0) = \overline{\mathcal{P}_m^f(c_0)}$.

En general, en espacios de Banach de dimensión infinita, existen polinomios homogéneos que no se pueden aproximar por polinomios de tipo finito. Por ejemplo si $\mathbf{X} = \ell^2$, el polinomio $P(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j^2$ es un polinomio 2-homogéneo en $\ell^2$ que no es aproximable por polinomios de tipo finito.

## 3.2. Funciones analíticas

En esta sección vamos a definir funciones analíticas en espacios de Banach. Para ello veamos antes la noción de series de potencias de polinomios homogéneos.

**Definición 3.20.** *Una serie de potencias de $\mathbf{X}$ en $\mathbb{C}$ centrada en $a \in \mathbf{X}$ es una serie de la forma $\sum_{m \in \mathbb{N}_0} P_m(x-a)$, donde $P_m \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.*

Observemos que también podemos escribir la serie de pontencias $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} P_m(x-a)$ como $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} A_m(x-a)^m$, donde $A_m \in \mathcal{L}^s(\mathbf{X})$ con $\hat{A_m} = P_m$.

**Proposición 3.21.** *Sea* $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} P_m(x-a)$ *de* $\mathbf{X}$ *en* $\mathbb{C}$. *Si existe* $r>0$ *tal que* $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} P_m(x-a) = 0$ *para todo* $x \in B(a;r)$, *entonces* $P_m = 0$ *para todo* $m \in \mathbb{N}_0$.

*Demostración.* Dado $x \in B(a,r)$, llamo $y = x - a \in B(0;r)$, como $y = \|y\|\frac{y}{\|y\|}$, entonces $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} P_m(x-a) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} P_m(y) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \|y\|^m P_m(\frac{y}{\|y\|})$, donde $\|y\| \leqslant r$. Luego llamando $c_m$ a $P_m(\frac{y}{\|y\|})$ y $\lambda$ a $\|y\|$, basta probar que dada una sucesión $\{c_m\}$ en $\mathbb{C}$, si $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} c_m\lambda^m = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leqslant r$, entonces $c_m = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

En efecto, por inducción en $m$. Para $m = 0$, tomando $\lambda = 0$ sale que $c_0 = 0$. Supongamos entonces que $c_o = \cdots = c_m = 0$ y veamos que $c_{m+1} = 0$. Como $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} c_m r^m$ converge, existe $C > 0$ tal que $|c_m|r^m \leqslant C$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$ y como $c_0 = \cdots = c_m = 0$ tenemos que

$$c_{m+1} = -\sum_{j\geqslant m+2} c_j \lambda^{j-m-1}$$

para $0 < |\lambda| \leqslant r$. Entonces para $0 < |\lambda| \leqslant r/2$ tenemos que

$$\|c_{m+1}\| \leqslant |\lambda| \sum_{j\geqslant m+2} Cr^{-j}\left(\frac{r}{2}\right)^{j-m-2} = 2|\lambda|Cr^{-m-2}.$$

Luego tomando $\lambda \to 0$ tenemos que $c_{m+1} = 0$. □

Estamos en condiciones, entonces, de definir las funciones analíticas en espacios de Banach.

**Definición 3.22.** *Sea* $U \subset \mathbf{X}$ *abierto. Decimos que la función* $f : U \to \mathbb{C}$ *es analítica si para cada* $a \in U$ *existe una bola* $B(a;r) \subset U$ *y una sucesión de polinomios* $P_m \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ *tal que*

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} P_m(x-a)$$

*donde la convergencia es uniforme para cada* $x \in B(a;r)$. *Notaremos con* $\mathcal{H}(U)$ *al espacio vectorial formado por todas las funciones analíticas de* $U$ *en* $\mathbb{C}$.

**Observación 3.23.** *Como consecuencia de la Proposición 3.21 podemos concluir que la sucesión de los* $\{P_m\}$ *de la definición anterior quedan unívocamente determinados por* $f$ *y por* $a$*. Notaremos* $P_m = P^m f(a)$ *para todo* $m \in \mathbb{N}_0$*. La serie* $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} P^m f(a)(x-a)$ *se llama la serie de Taylor de* $f$ *en* $a$*.*

**Ejemplo 3.24.** Como primer ejemplo, veamos que los polinomios definidos anteriormente son efectivamente funciones analíticas, o sea, $\mathcal{P}(\mathbf{X}) \subset \mathcal{H}(\mathbf{X})$

*Demostración.* Basta ver que cada $P \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ pertenece a $\mathcal{H}(\mathbf{X})$. Sea $A \in \mathcal{L}^s({}^m\mathbf{X})$ tal que $P = \hat{A}$, dados $a, x \in \mathbf{X}$, por la Fórmula de Newton 3.8 tenemos que

$$P(x) = Ax^m = A(x-a+a)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} Aa^{m-j}(x-a)^j.$$

Luego $P$ pertenece a $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ y además

$$P^jP(a)(t) = \binom{m}{j} Aa^{m-j}t^j \quad \text{para } j \leqslant m$$

$$P^jP(a)(t) = 0 \qquad\qquad \text{para } j > m.$$

□

Veamos ahora algunos resultados conocidos para funciones analíticas en $\mathbb{C}$ que son válidos también para las funciones analíticas sobre espacios de Banach. Demostraremos aquellos resultados que usaremos a lo largo del trabajo.

**Lema 3.25.** *Sea* $U \subset \mathbf{X}$ *abierto, y sea* $f \in \mathcal{H}(U)$*. Entonces:*

*(a)* $f$ *es continua.*

*(b)* $f$ *es localmente acotada.*

*(c) Dados* $a \in U$*,* $b \in \mathbf{X}$*, la función* $\lambda \to f(a+\lambda b)$ *es analítica sobre el conjunto abierto* $\{\lambda \in \mathbb{C} : (a+\lambda b) \in U\}$*.*

Principio de identidad.

**Proposición 3.26.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto y conexo, y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Si $f$ es idénticamente cero en un conjunto abierto no vacío $V \subset U$, entonces $f$ es idénticamente cero en $U$.*

Principio de la Aplicación Abierta.

**Proposición 3.27.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto y conexo, y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Si $f$ es no constante en $U$, entonces $f(V)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ para todo subconjunto abierto $V \subset U$.*

Principio del Máximo.

**Proposición 3.28.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto y conexo, y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Si existe $a \in U$ tal que $|f(x)| \leqslant |f(a)|$ para todo $x \in U$, entonces $f$ es constante.*

Teorema de Liouville.

**Proposición 3.29.** *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ es acotada en $\mathbf{X}$, entonces $f$ es constante en $\mathbf{X}$.*

Veamos ahora las extensiones de las fómulas integrales de Cauchy para funciones analíticas sobre espacios de Banach.

**Teorema 3.30.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto y conexo, y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Sean $a \in U$, $t \in \mathbf{X}$ y $r > 0$ tal que $a + \zeta t \in U$ para todo $\zeta \in \overline{\triangle}(0; r)$. Entonces para cada $\lambda \in \triangle(0; r)$ tenemos la fórmula integral de Cauchy*

$$f(a + \lambda t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \zeta t)}{\zeta - \lambda} d\zeta.$$

*Demostración.* Por el Lema 3.25, la función $g(\zeta) = f(a + \zeta t)$ es analítica en un entorno del disco cerrado $\overline{\triangle}(0; r)$. Usando la fórmula integral de Cauchy para funciones analíticas sobre $\mathbb{C}$ tenemos que

$$f(a + \lambda t) = g(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \lambda} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \zeta t)}{\zeta - \lambda} d\zeta$$

para todo $\lambda \in \triangle(o; r)$. $\square$

**Corolario 3.31.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto y conexo, y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Sean $a \in U$, $t \in \mathbf{X}$ y $r > 0$ tal que $a + \zeta t \in U$ para todo $\zeta \in \overline{\triangle}(0; r)$. Entonces para cada $\lambda \in \triangle(0; r)$ tenemos el desarrollo en serie de la forma*

$$f(a + \lambda t) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} c_m \lambda^m$$

*donde*

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \lambda t)}{\zeta^{m+1}} d\zeta.$$

*Esta serie converge absoluta y uniformemente para $|\lambda| \leqslant s$ con $0 \leqslant s < r$.*

*Demostración.* Consideremos $\lambda$ con $|\lambda| < |\zeta| = r$. Entonces

$$\frac{f(a + \zeta t)}{\zeta - \lambda} = \frac{f(a + \zeta t)/\zeta}{1 - \lambda/\zeta} = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \lambda^m \frac{f(a + \zeta t)}{\zeta^{m+1}},$$

y como $f$ es acotada sobre el conjunto acotado $\{a + \zeta t : |\zeta| = r\}$, tenemos que la serie converge absoluta y uniformemente para $|\zeta| = r$ y $|\lambda| \leqslant s < r$. Luego podemos integrar término a término y obtenemos

$$f(a + \lambda t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \zeta t)}{\zeta - \lambda} d\zeta = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \lambda^m \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \zeta t)}{\zeta^{m+1}} d\zeta,$$

donde la última serie converge absoluta y uniformemente para $|\lambda| \leqslant s$ con $0 \leqslant s < r$. □

**Corolario 3.32.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto y conexo, y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Sean $a \in U$, $t \in \mathbf{X}$ y $r > 0$ tal que $a + \zeta t \in U$ para todo $\zeta \in \overline{\triangle}(0; r)$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}_0$ tenemos la fórmula*

$$P^m f(a)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \zeta t)}{\zeta^{m+1}} d\zeta.$$

*Demostración.* Como $f$ es analítica tiene un desarrollo en serie de Taylor en $a$ de la forma

$$f(a + \lambda t) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} P^m f(a)(\lambda t) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \lambda^m P^m f(a)(t),$$

luego por unicidad de desarrolo, tenemos por Corolario 3.31 que

$$P^m f(a)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \zeta t)}{\zeta^{m+1}} d\zeta.$$

□

**Corolario 3.33.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto y conexo, y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Sean $a \in U$, $t \in \mathbf{X}$ y $r > 0$ tal que $a + \zeta t \in U$ para todo $\zeta \in \overline{\triangle}(0; r)$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}_0$ tenemos la inecuación*

$$|P^m f(a)(t)| \leqslant r^{-m} \sup_{|\zeta|=r} |f(a + \zeta t)|.$$

*Demostración.* Por Corolario 3.32 tenemos que

$$|P^m f(a)(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{|f(a+\zeta t)|}{|\zeta|^{m+1}} d\zeta \leqslant \frac{1}{2\pi r^{m+1}} \sup_{|\zeta|=r} |f(a+\zeta t)| \int_{|\zeta|=r} d\zeta = r^{-m} \sup_{|\zeta|=r} |f(a+\zeta t)|.$$

□

**Corolario 3.34.** *Si $P \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$, entonces dados $a, t \in \mathbf{X}$ tenemos la fórmula integral*

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{P(a+\zeta t)}{\zeta^{m+1}} d\zeta.$$

**Corolario 3.35.** *Sea $P \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$. Si $P$ está acotado por $c$ en la bola abierta $B(a, r)$, entonces $P$ también esta acotado por $c$ en la bola abierta $B(0, r)$.*

Obsevemos que este corolario da una cota mejor a la dada en la demostración del Teorema 3.14.

**Definición 3.36.** *Llamaremos polidisco en $\mathbb{C}^n$ a un producto de discos. El polidisco abierto de centro $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y radio $r = (r_1, \ldots, r_n)$ lo vamos a notar $\triangle^n(a, r)$. Y al polidisco cerrado lo notaremos $\bar{\triangle}^n(a, r)$. Es decir:*

$$\triangle^n(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j \text{ para } 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

$$\bar{\triangle}^n(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| \leqslant r_j \text{ para } 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

*Si $a = (0, \ldots, 0)$ y $r = (1, \ldots, 1)$, escribiremos $\triangle^n(0, 1) = \triangle^n$ y $\bar{\triangle}^n(0, 1) = \bar{\triangle}^n$.*

*Lamaremos $\partial_0 \triangle^n(a, r)$ al conjunto incluido en la frontera $\partial \triangle^n(a, r)$ de $\triangle^n(a, r)$ dado por*

$$\partial_0 \triangle^n(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| = r_j \text{ para } 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

**Teorema 3.37.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto, y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Sean $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{X}$, $r_1, \ldots, r_n > 0$ y $a \in U$ tales que $a+\zeta_1 t_1+\cdots+\zeta_n t_n \in U$ para todo $\zeta \in \bar{\triangle}^n(0,r)$. Entonces para cada $\lambda \in \triangle^n(0,r)$, tenemos la fórmula integral de Cauchy*

$$f(a+\lambda_1 t_1+\ldots,\lambda_n t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0\triangle^n(0,r)} \frac{f(a+\zeta_1 t_1+\cdots+\zeta_n t_n)}{(\zeta_1-\lambda_n)\ldots(\zeta_n-\lambda_n)} d\zeta_1\ldots d\zeta_n$$

*Demostración.* Como $\bar{\triangle}^n(0,r)$ es compacto, entonces podemos tomar $R_1 > r_1, \ldots, R_n > r_n$ tales que $a+\zeta_1 t_1+\cdots+\zeta_n t_n \in U$ para todo $\zeta \in \triangle^n(0,R)$. Ahora bien, si consideramos la función $g(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) = f(a+\zeta_1 t_1+\cdots+\zeta_n t_n)$, resulta analítica en cada variable. Luego aplicando la fórmula integral de Cauchy (Teorema 3.30) en cada variable, tenemos que

$$f(a+\lambda_1 t_1+\cdots+\lambda_n t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1|=r_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-\lambda_1}\int_{|\zeta_2|=r_2}\frac{d\zeta_2}{\zeta_2-\lambda_2}\cdots\int_{|\zeta_n|=r_n}\frac{f(a+\zeta_1 t_1+\ldots\zeta_n t_n)}{\zeta_n-\lambda_n}d\zeta_n$$

para todo $\lambda \in \triangle^n(0,r)$. Como la función $h(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) = \dfrac{f(a+\zeta_1 t_1+\cdots+\zeta_n t_n)}{(\zeta_1-\lambda_1)\ldots(\zeta_n-\lambda_n)}$ es continua en el conjunto compacto $\partial_0\triangle^n(0,r)$, entonces por el Teorema de Fubini podemos reemplazar la integral iterada por la integral múltiple. $\square$

**Corolario 3.38.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto, y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Sean $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{X}$, $r_1, \ldots, r_n > 0$ y $a \in U$ tales que $a+\zeta_1 t_1+\cdots+\zeta_n t_n \in U$ para todo $\zeta \in \bar{\triangle}^n(0,r)$. Entonces para cada $\lambda \in \triangle^n(0,r)$, tenemos el siguiente desarrollo en serie*

$$f(a+\lambda_1 t_1+\cdots+\lambda_n t_n) = \sum_{\alpha} c_\alpha \lambda_1^{\alpha_1}\ldots\lambda_n^{\alpha_n}$$

*donde* $c_\alpha = \dfrac{1}{(2\pi i)^n}\displaystyle\int_{\partial_0\triangle^n(0,r)}\frac{f(a+\zeta_1 t_1+\cdots+\zeta_n t_n)}{\zeta_1^{\alpha_1+1}\ldots\zeta_n^{\alpha_n+1}}d\zeta_1\ldots d\zeta_n.$

*Esta serie converge absoluta y uniformemente para $\lambda \in \bar{\triangle}^n(0,s)$, donde $0 \leqslant s_j < r_j$ para todo $j$.*

*Demostración.* Si $|\lambda_j| < |\zeta_j| = r_j$ para $1 \leqslant j \leqslant n$, entonces podemos escribir (haciendo lo mismo que hicimos en la demostración del Corolario 3.31)

$$\frac{f(a+\lambda_1 t_+\cdots+\lambda_n t_n)}{(\zeta_1-\lambda_1)\ldots(\zeta_n-\lambda_n)} = \sum_\alpha \lambda_1^{\alpha_1}\ldots\lambda_n^{\alpha_n}\frac{f(a+\zeta_1 t_1+\cdots+\zeta_n t_n)}{\zeta_1^{\alpha_1+1}\ldots\zeta_n^{\alpha_n+1}}$$

donde esta serie múltiple converge absoluta y uniformemente para $|\zeta_j| = r_j$ y $|\lambda_j| \leqslant s_j < r_j$. Luego podemos integrar término a término y obtenemos lo que queríamos. $\square$

### 3.2.1. Funciones G-Analíticas

**Definición 3.39.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto. Decimos que la función $f : U \to \mathbb{C}$ es G-analítica si para todo $a \in U$ y $b \in \mathbf{X}$ la aplicación $\lambda \to f(a + \lambda b)$ es analítica sobre el conjunto abierto $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in U\}$. Notaremos con $\mathcal{H}_G(U)$ al espacio vectorial formado por todas las funciones G-analíticas de $U$ en $\mathbb{C}$.*

**Ejemplo 3.40.** $\mathcal{P}(\mathbf{X}) \subset \mathcal{H}_G(\mathbf{X})$. *Pues $P(a + \lambda b)$ es un polinomio en la variable $\lambda$ para todo $a, b \in \mathbf{X}$.*

**Definición 3.41.** *Decimos que un subconjunto $A \subset \mathbf{X}$ que contiene al origen es balanceado si para todo $x \in A$ y $\zeta \in \overline{\triangle}$, vale que $\zeta x \in A$. Si $a \in A$, decimos que $A$ es a-balanceado si el conjunto $A - a$ es balanceado.*

**Teorema 3.42.** *Sea $U$ un subconjunto abierto, a-balanceado de $\mathbf{X}$, y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Entonces la serie de Taylor de $f$ en $a$ converge a $f$ uniformemente sobre algún entorno de cada subconjunto compacto de $U$.*

*Demostración.* Sea $K \subset U$ compacto. Entonces el conjunto $A = \{a + \zeta(x - a) : x \in K,\ \zeta \in \overline{\triangle}\}$ está incluido en $U$ y además $f$ está acotada sobre $A$. Como $A$ es compacto, podemos hallar $r > 1$ y un entorno $V$ de $K$ en $U$ tal que el conjunto $B = \{a + \zeta(x - a) : x \in V,\ \zeta \in \overline{\triangle}(0; r)\}$ esta contenido en $U$ y además $f$ está acotada sobre $B$ también. Luego podemos escribir

$$\frac{f(a + \zeta(x - a))}{\zeta - 1} = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \frac{f(a + \zeta(x - a))}{\zeta^{m+1}}$$

y la serie converge absoluta y uniformemente para $x \in V$ y $|\zeta| = r$. Luego por el Teorema 3.30 tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \zeta(x - a))}{\zeta - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \frac{f(a + \zeta(x - a))}{\zeta^{m+1}}.$$

Luego por el Corolario 3.32 tenemos que

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} P^m f(a)(x - a)$$

y la serie converge absoluta y uniformemente para $x \in V$. $\square$

**Teorema 3.43.** *(Lema de Schwarz). Sea* $U = B(a;r) \subset \mathbf{X}$ *y sea* $f \in \mathcal{H}(U)$*. Si* $|f(x)| \leqslant c$ *para todo* $x \in B(a;r)$ *y además existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $P^j f(a) = 0$ *para todo* $j < m$*. Entonces* $|f(x)| \leqslant c(\frac{\|x-a\|}{r})^m$ *para todo* $x \in B(a;r)$*.*

*Demostración.* Sea $x \in B(a;r)$ con $x \neq a$ y sea $g$ la función de una variable compleja definida por

$$g(\lambda) = \lambda^{-m} f(a + \lambda(x-a)) \quad \textit{para } 0 < |\lambda| < \frac{r}{\|x-a\|},$$
$$g(0) = P^m f(a)(x-a).$$

Ahora bien, por el Teorema 3.42 la serie de Taylor de $f$ en $a$ converge puntualmente a $f$ sobre la bola $B(a;r)$. Luego podemos escribir a $g$ como sigue

$$g(\lambda) = \sum_{j=m}^{\infty} \lambda^{j-m} P^j f(a)(x-a)$$

con $\lambda \in \triangle(0; \frac{r}{\|x-a\|})$ y además $g$ es analítica en dicho disco. Tomemos $s$ tal que $\|x-a\| < s < r$, como $|f| < c$ sobre la bola $B(a;r)$, tenemos que

$$|g(\lambda)| \leqslant c\left(\frac{\|x-a\|}{s}\right)^m$$

para $|\lambda| = s/\|x-a\|$ y luego por el Principio de Máximo (para funciones complejas) también vale para $|\lambda| \leqslant \frac{s}{\|x-a\|}$. Entonces aplicando la inecuación para $\lambda = 1$ tenemos que

$$|f(x)| \leqslant c\left(\frac{\|x-a\|}{s}\right)^m.$$

Por último, tomando $s \to r$ obtenemos lo que queríamos. $\square$

**Observación 3.44.** Las extensiones del Principio de Identidad, el Principio de la Aplicación Abierta, el Principio del Máximo, el Teorema de Liouville y el Lema de Schwarz a funciones analíticas sobre espacios de Banach son también válidos para las funciones $G$-analíticas.

**Observación 3.45.** Si miramos las demostraciones del Teorema 3.30 y el Corolario 3.31 notamos que son también válidos si nos restringimos a las funciones $G$-analíticas. De la misma forma son válidos el Teorema 3.37 y el Corolario 3.38 para funciones $G$-analíticas que resultan continuas cuando se restringen a subespacios de dimensión finita.

**Proposición 3.46.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto, y sea $f \in \mathcal{H}_G(U)$. Entonces $f$ es continua si y sólo si $f$ es localmente acotada.*

*Demostración.* Sea $f : U \to \mathbb{C}$ $G$-analítica y localmente acotada. Dado $a \in U$ tomamos $r > 0$ y $c > 0$ tales que $|f(x)| \leqslant c$ para todo $x \in B(a;r)$. Aplicando el Lema de Schwarz (Teorema 3.43) para funciones $G$-analíticas a la función $f(x) - f(a)$ tenemos que

$$|f(x) - f(a)| \leqslant 2c\frac{\|x-a\|}{r}$$

para todo $x \in B(a;r)$ por lo que $f$ es continua en $a$. □

El siguiente teorema da una caracterización de las funciones analíticas y además da una herramienta para probar que una función dada es analítica.

**Teorema 3.47.** *Sea $U \subset \mathbf{X}$ abierto. Entonces para cada función $f : U \to \mathbb{C}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(1) $f$ es analítica.*

*(2) $f$ es continua y $G$-analítica.*

*(3) $f$ es localmente acotada y $G$-analítica.*

*(4) $f$ es continua y $f|_{U\cap M}$ es analítica para todo subespacio $M$ de $\mathbf{X}$ de dimensión finita.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2): Es claro.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Ya lo probamos (Proopsición 3.46).

(2) $\Rightarrow$ (4): Sea $f : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ una función $G$-analítica y continua, y sea $M \subset \mathbf{X}$ un subespacio de dimensión finita con base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Entonces por la Observación 3.45 tenemos el desarrollo en serie de la forma

$$f(a + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \sum_\alpha c_\alpha \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n}$$

donde la serie múltiple converge absoluta y uniformemente sobre $\triangle^n(0,r)$ para algún $r > 0$. Si definimos $P_m \in \mathcal{P}_m(M)$ como

$$P_m(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \sum_\alpha c_\alpha \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n},$$

entonces conseguimos el desarrollo en serie de Taylor para $f|_{U\cap M}$ que converge uniformemente en $\triangle^n(0,r)$.

Luego $f|_{U\cap M}$ es analítica para todo subespacio $M$ de $\mathbf{X}$ de dimensión finita.

(4) $\Rightarrow$ (1): Sea $B(a,r)\subset U$. Si $M\subset \mathbf{X}$ es un subespacio de dimensión finita que contiene a $a$, entonces por hipótesis tenemos que $f|_{U\cap M}$ es analítica. Luego por el Teorema 3.42 $f|_{U\cap M}$ tiene desarrollo en serie de taylor

$$f(x)=\sum_{m\in\mathbb{N}_0} P_m^M(x-a)$$

para todo $x\in M\cap B(a,r)$ y donde $P_m^M\in\mathcal{P}_m(M)$.

Consideremos ahora $M$ y $N$ dos subespacios de $\mathbf{X}$ de dimensión finita que contienen a $a$, luego por la unicidad del desarrollo en serie de Taylor, tenemos que $P_m^M(t)=P_m^N(t)$ para todo $t\in M\cap N$ y para todo $m\in\mathbb{N}_0$. Sea $P_m:\mathbf{X}\to\mathbb{C}$ definido por $P_m(t)=P_m^M(t)$ donde $M$ es un subespacio de $\mathbf{X}$ de dimensión finita que contiene a $a$ y a $t$. Entonces $P_m\in\mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ y además $f(x)=\sum_{m\in\mathbb{N}_0} P_m(x-a)$ para todo $x\in B(a,r)$.

Ahora bien, como $f$ es continua, existe $\bar{B}(a,s)\subset B(a,r)$ tal que $|f(x)|\leqslant c$ para todo $x\in\bar{B}(a,s)$. Luego, dado $t\in\mathbf{X}$ con $\|t\|\leqslant 1$, sea $M$ un subespacio de $\mathbf{X}$ de dimensión finita que contiene a $a$ y a $t$. Entonces por la fórmula integral de Cauchy (Corolario 3.32) tenemos que

$$P_m(t)=P_m^M(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=s}\frac{f(a+\zeta t)}{\zeta^{m+1}}d\zeta,$$

por lo que $\|P_m\|\leqslant cs^{-m}$. Luego cada $P_m$ es continuo y resulta que $f$ es analítica. $\square$

## 3.3. El espacio $H_b(\mathbf{X})$.

Si $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, el espacio $H(\mathbf{X})$ de todas las funciones analíticas sobre $\mathbf{X}$ no es un espacio metrizable. Una manera de generalizar a dimensión infinita el espacio $H(\mathbb{C}^n)$ de manera de obener un espacio métrico es considerar a las funciones analíticas en $\mathbf{X}$ que son acotadas en subconjutos acotados de $\mathbf{X}$. Vamos a comenzar recordando algunas nociones básicas sobre espacios vectoriales topológicos.

**Definición 3.48.** *Sean $E$ un $\mathbb{C}$ espacio vectorial y $\tau$ una topología en $E$. Decimos que $(E,\tau)$ es un espacio vectorial topológico si las aplicaciones naturales*

$E \times E \to E$ *dada por* $(x,y) \longmapsto x+y$,

$\mathbb{C} \times E \to E$ *dada por* $(\lambda,x) \longmapsto \lambda x$

*son continuas.*

**Definición 3.49.** *Decimos que una aplicación $p : E \to \mathbb{R}_+$ es una seminorma sobre $E$ si verifica:*

*i)* $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y para todo* $x \in E$,

*ii)* $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, *para todo* $x, y \in E$.

Sea $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$ una familia de seminormas sobre $E$ tal que para todo subconjunto finito $J \subset I$, vale que $\sup_{j \in J} p_j \in \mathcal{P}$ (una familia $\mathcal{P}$ con esta propiedad se llama estable por envolvente superior finita). Y definimos una topología $\tau$ en $E$ cuya base está dada por los subconjuntos $U$ de $E$ que verifican la propiedad

$$\forall x \in U,\ \exists i \in I,\ \exists r > 0 \ \textit{tal que}\ \{y \in E : p_i(x-y) < r\} \subset U.$$

Observemos que si la familia de seminormas es creciente, entonces es estable por envolvente superior finita.

$(E,\tau)$ asi definido es un espacio vectorial topológico. Dichos espacios vectoriales topológicos se llaman localmente convexos.

**Definición 3.50.** *Decimos que una familia $\mathcal{P}$ de seminormas sobre $E$ es separante si se verifica que*

$$(p(x) = 0 \ \forall p \in \mathcal{P}) \Rightarrow x = 0.$$

**Proposición 3.51.** *Sea $E$ un espacio vectorial topológico localmente convexo cuya topología viene definida por una familia separante de seminormas $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$ estable por envolvente superior finita. Entonces, una sucesión $\{x_n\}_n \subset E$ tiende a $0$ si y solo si $p_i(x_n)$ tiende a $0$ para todo $i \in I$.*

En el caso que tengamos un espacio vectorial topológico localmente convexo donde la familia de seminormas es creciente y separante, si consideramos la distancia dada por

$$d(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)},$$

esta distancia define la topología y además cumple que es invariante por traslaciones. Diremos entonces que $E$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable.

**Definición 3.52.** *Decimos que $E$ es un espacio de Fréchet si es un espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable completo.*

**Definición 3.53.** *Definimos el espacio $H_b(\mathbf{X})$ como el espacio de las funciones analíticas sobre $\mathbf{X}$ que son acotadas sobre subconjuntos acotados de $\mathbf{X}$.*

Consideramos en $H_b(\mathbf{X})$ la familia creciente de seminormas $\Lambda=\{p_r\}_{r\geqslant 0}$ definidas por $p_r(f)=\sup_{\|x\|\leqslant r}|f(x)|$ para $r>0$ y $p_0(f)=|f(0)|$. Observemos que $p_r$ es una norma en $H_b(\mathbf{X})$ que notaremos $p_r(f)=\|f\|_r$, por lo que la familia es separante.

Luego $(H_b(\mathbf{X}),\Lambda)$ es un espacio de Fréchet y la topología viene dada por $f_\alpha\to f$ si y sólo si $\|f_\alpha-f\|_r$ tiende a 0 para todo $r\geqslant 0$. Esta topología se llama la topología de la convergencia uniforme sobre acotados.

**Ejemplo 3.54.** Veamos un ejemplo de una función analítica pero que no es acotada sobre acotados. Tomemos $\mathbf{X}=c_0$ ó $\ell^p$ y definimos $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n^n$. Para probar que $f$ es analítica, por el Teorema 3.47, basta ver que $f$ es $G$-analítica y localmente acotada. Veamos que $f$ es $G$-analítica, o sea que $f(x+\lambda y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n+\lambda y_n)^n$ es analítica en $\lambda$ en algún entorno del 0 para todo $x,y\in\mathbf{X}$. Luego tenemos que ver que la serie converge uniformemente en $|\lambda|<\varepsilon$ para todo $\|y\|\leqslant 1$. Ahora bien,

$$f(x+\lambda y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n+\lambda y_n)^n=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_n^{n-k}\lambda^k y_n^k=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\lambda^j$$

donde $a_0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ y para $j>0$, $a_j = \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} x_n^{n-j} y_n^j$. Como $x_n \to 0$, si tomamos raíz $n$-ésima al término general de la serie de $a_j$, tiende a 0. Por lo que $f(x+\lambda y)$ es una serie de potencias en $\lambda$. Ahora bien, si analizamos la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n+\lambda y_n)^n$, tomando raíz $n$-ésima tenemos que

$$|x_n+\lambda y_n| \leqslant |x_n| + |\lambda||y_n| \leqslant |x_n| + \varepsilon|y_n| \to 0.$$

Luego la serie converge uniformemente para $|\lambda| \leqslant \varepsilon$.

Veamos ahora que $f$ es localmente acotada. Supongamos que $\|x\| \leqslant C$, en particular vale que $|x_n| \leqslant C$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y además existe $n_0$ tal que $|x_n| \leqslant 1/2$ para todo $n \geqslant n_0$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^n \leqslant \sum_{n=1}^{n_0-1} |x_n|^n + \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{n_0-1} C^n + \sum_{n=n_0}^{\infty} (1/2)^n \leqslant K \end{aligned}$$

Luego tenemos que $f$ es analítica sobre $\mathbf{X}$ pero si consideramos $x^k = 2e_k$, $x^k \in B(0,3)$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y $f(x^k) = 2^k$. Por lo que $f$ no es acotada sobre acotados.

El Teorema de Josefson-Nissenzweig [15, 22] dice que si $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $(\gamma_n)_n \subset S_{\mathbf{X}^*}$ tal que $\gamma_n \xrightarrow{w^*} 0$. Como consecuencia, haciendo un razonamiento análogo al del ejemplo anterior, se obtiene que la función $f(x) = \sum_n \gamma(x)^n$ no es acotada en acotados. Es decir, vale en general que en todo espacio de Banach $\mathbf{X}$ de diemnsión infinita existe $f \in H(\mathbf{X}) \setminus H_b(\mathbf{X})$.

Si $P \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$, entonces $P$ es acotado sobre subconjuntos acotados de $\mathbf{X}$, luego $\mathcal{P}_m(\mathbf{X}) \subset H_b(\mathbf{X})$. Si consideramos en $\mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ la norma de la convergencia uniforme sobre la bola unidad, o sea, $\|P\| = \|P\|_1 = \sup_{x\in B} |P(x)|$, resulta que $(\mathcal{P}_m(\mathbf{X}), \|\cdot\|)$ es completo. Además por ser homogéneos tenemos que si $P \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$, entonces $\|P\|_r = r^m\|P\|$ con $r>0$. Luego la topología de la norma en $\mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ coincide con la topología inducida como subespacio de $H_b(\mathbf{X})$.

Cada $f \in H_b(\mathbf{X})$ tiene un desarrollo en serie de Taylor

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} f_m,$$

donde $f_m \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$.

La siguiente proposición da una caracterización de las funciones de $H_b(\mathbf{X})$, como las funciones analíticas en $\mathbf{X}$ tales que su desarrollo en serie de Taylor tiene radio de convergencia uniforme infinito.

**Proposición 3.55.** $H_b(\mathbf{X}) = \{f \in H(\mathbf{X}) : \|P^m f(0)\|^{1/m} \to 0\}$.

*Demostración.* Sea $f \in H_b(\mathbf{X})$, entonces $f(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} P^m f(0)(x)$ donde la serie converge puntualmente en $\mathbf{X}$. Por Corolario 3.33, tenemos que dado $x \in \mathbf{X}$ con $\|x\| \leqslant 1$,

$$|P^m f(0)(x)| \leqslant \frac{1}{r^m} \sup_{|\xi|=r} |f(\xi x)| \leqslant \frac{\|f\|_r}{r^m},$$

para todo $r > 0$. Entonces $\|P^m f(0)\| \leqslant \frac{\|f\|_r}{r^m}$. Luego tomando raíz $m$-ésima tenemos que $\|P^m f(0)\|^{1/m} \leqslant \frac{\|f\|_r^{1/m}}{r}$, y tomando límite obtenemos que

$$\lim_m \|P^m f(0)\|^{1/m} \leqslant \lim_m \frac{\|f\|_r^{1/m}}{r} = \frac{1}{r},$$

ya que $f$ es acotada en $rB$. Como esto vale cualquiera sea el $r > 0$, podemos concluir que $\|P^m f(0)\|^{1/m} \to 0$.

Recíprocamente, sea $f \in H(\mathbf{X})$ con $\|P^m f(0)\|^{1/m} \to 0$. Sea $x \in rB$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0} |P^m f(0)(x)| \\ &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0} r^m |P^m f(0)(\frac{x}{\|x\|})| \\ &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0} r^m \|P^m f(0)\| < \infty. \end{aligned}$$

□

La última parte de la demostración anterior muestra que la serie de Taylor de una función de $H_b(\mathbf{X})$ converge uniformemente sobre subconjuntos acotados de $\mathbf{X}$, o sea, la serie converge en $H_b(\mathbf{X})$.

**Corolario 3.56.** *Los polinomios son densos en $H_b(\mathbf{X})$.*

**Proposición 3.57.** *Toda $f \in H_b(\mathbf{X})$ es uniformemente continua sobre acotados de $\mathbf{X}$.*

*Demostración.* Sea $f \in H_b(\mathbf{X})$, $f$ tiene desarrollo en serie de Taylor $f(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} f_m(x)$, donde $f_m \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$, y sea $A_m$ la forma $m$-lineal simétrica asociada a $f_m$. Sean $x, y \in rB$, entonces tenemos

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0} |f_m(x) - f_m(y)|.$$

Ahora bien,

$$|f_m(x) - f_m(y)| \leqslant mr^{m-1}\|A_m\|\|x - y\|.$$

Para ilustrarlo hagamos la cuenta para el caso de $f_3$

$$\begin{aligned}
|f_3(x) - f_3(y)| &= |A_3(x,x,x) - A_3(y,y,y)| \\
&\leqslant |A_3(x,x,x) - A_3(x,x,y)| + |A_3(x,x,y) - A_3(x,y,y)| \\
&\quad +|A_3(x,y,y) - A_3(y,y,y)| \\
&= |A_3(x,x,x-y)| + |A_3(x,x-y,y)| + |A_3(x-y,y,y)| \\
&\leqslant \|A_3\|\|x\|^2\|x-y\| + \|A_3\|\|x\|\|y\|\|x-y\| + \|A_3\|\|y\|^2\|x-y\| \\
&\leqslant 3r^2\|A_3\|\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0} |f_m(x) - f_m(y)| \leqslant (\sum_{m\in\mathbb{N}_0} mr^{m-1}\|A_m\|)\|x-y\| < C\|x-y\|$$

pues $(mr^{m-1})^{1/m} \to r$ y $\|A_m\|^{1/m} \leqslant (\frac{m^m}{m!}\|f_m\|)^{1/m} \to 0$. Luego $f$ es uniformemente continua sobre acotados de $\mathbf{X}$. $\square$

Del Teorema de Littlewood-Bogdanowicz [3] -Pelczynski [23], se deduce la siguiente proposición.

**Proposición 3.58.** $H_b(c_0) = \{$ *álgebra cerrada generada por* $c_0^* \} = \overline{\mathcal{P}^f(c_0)}$.

### 3.3.1. Extensión de Aron-Berner

Vimos en el Teorema 3.11 que hay un isomorfismo $T : \mathcal{P}_m(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathcal{L}^s({}^m\mathbf{X})$ dado por: $P \longmapsto \check{P}$ donde $P(x) = \check{P}x^m$. Vamos a extender un polinomio $m$-homogéneo sobre $\mathbf{X}$, $P$, a $AB(P) \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X}^{**})$ de la siguiente manera:

Tomamos $\check{P}$ y dado $z \in \mathbf{X}^{**}$, por Teorema de Goldstine, existe una red $\{y_\alpha\} \subset \mathbf{X}$ acotada tal que $y_\alpha$ tiende débil-$*$ a $z$, por lo que podemos extender la última coordenada a $\mathbf{X}^{**}$ como sigue

$$\tilde{\check{P}}(x_1, x_2, \ldots, z) = \lim_{\alpha} \check{P}(x_1, x_2, \ldots, y_\alpha).$$

Ahora hacemos de la misma forma con cada una de las coordenadas y obtenemos

$$\tilde{\check{P}}(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \lim_{\alpha_1} \ldots \lim_{\alpha_m} \check{P}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_m})$$

Esta extensión depende del orden en que se extienden las variables, pero cuando evaluamos en la diagonal, $\tilde{\check{P}}(z, \ldots, z)$, gracias a la simetría de $\check{P}$, el resultado no depende del orden en que se hizo la extensión. Definimos entonces $AB(P)(z) = \tilde{\check{P}}(z, \ldots, z)$, claramente verifica que $AB(P)(x) = P(x)$ para todo $x \in \mathbf{X}$. Esta extensión se llama la extensión de Aron-Berner [2] y resulta una isometría, o sea $\|P\|_{rB} = \|AB(P)\|_{rB^{**}}$, [7]. Más aún en [7] probaron la siguiente generalización del teorema de Goldstine: dado $z \in B^{**}$, existe una red $(y_\alpha)_\alpha \subset B$ tal que para todo polinomio $P$ en $\mathbf{X}$ (no necesariamente homogéneo) vale que $P(y_\alpha) \to AB(P)(z)$.

Ahora bien, dada $f \in H_b(\mathbf{X})$, se puede extender canónicamente a una función analítica $\hat{f} \in H_b(\mathbf{X}^{**})$ y la extensión viene dada como sigue

$f \in H_b(\mathbf{X})$, tiene desarrollo en serie de Taylor $f = \sum_m f_m$ donde $f_m \in \mathcal{P}_m$. Definimos $\hat{AB} : H_b(\mathbf{X}) \longrightarrow H_b(\mathbf{X}^{**})$ como $\hat{AB}(f) = \sum_m AB(f_m)$.

Notación: $\hat{AB}(f) = \hat{f}$

**Proposición 3.59.** *La extensión $\hat{AB}$ es continua y multiplicativa*

*Demostración.* Veamos primero que la aplicación $f \longmapsto \hat{f}$ es continua. Para esto, vamos a considerar el espacio $H_b(\mathbf{X})$ dotado de otra familia de seminormas $\{q_r\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ definidas por $q_r(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} r^n \|P^n f(0)\|$. Observemos que por la Proposición 3.55 los $q_r$ estan bien definidos.

Veamos ahora que $(H_b(\mathbf{X}), \{\|\cdot\|_r\}_{r\in\mathbb{R}_+}) = (H_b(\mathbf{X}), \{q_r\}_{r\in\mathbb{R}_+})$, o sea, que las familias de seminormas $\{\|\cdot\|_r\}$ y $\{q_r\}$ definen la misma topología para $H_b(\mathbf{X})$. Sea, entonces, $f_k \to 0$ para la topología dada por la familia $\{\|\cdot\|_r\}$, o sea, $\|f_k\|_r \to 0$ para todo $r > 0$. Veamos que $f_k \to 0$ para la topología dada por la familia $\{q_r\}$, esto es, $q_s(f_k) \to 0$ para todo $s > 0$. Dado $s > 0$, tomemos $r > s$ entonces

$$\begin{aligned} q_s(f_k) &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} s^n \|P^n f_k(0)\| = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (s/r)^n r^n \|P^n f_k(0)\| \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (s/r)^n \|P^n f_k(0)\|_r \leqslant \|f_k\|_r \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (s/r)^n = C\|f_k\|_r \to 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente supongamos que $f_k \to 0$ para la topología dada por la familia $\{q_r\}$, entonces

$$\|f_k\|_r = \|\sum_{n\in\mathbb{N}_0} P^n f_k(0)\| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|P^n f_k(0)\|_r = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} r^n \|P^n f_k(0)\| = q_r(f_k) \to 0,$$

para todo $r > 0$. Luego ambas familias de seminormas definen la misma topología para $H_b$.

Ahora bien, sea $f_k \to 0$ en $H_b(\mathbf{X})$ y veamos que $\hat{f}_k \to 0$ en $H_b(\mathbf{X}^{**})$. Como $\|P\|_{rB} = \|\hat{P}\|_{rB^{**}}$ para todo polinomio $P$, tenemos que

$$q_r(\hat{f}_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|\widehat{P^n f_k(0)}\|_{rB^{**}} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|P^n f(0)\|_{rB} = q_r(f_k) \to 0,$$

para todo $r > 0$. Por lo que resulta que la aplicación $f \longmapsto \hat{f}$ es continua.

Veamos por último que la aplicación $f \longmapsto \hat{f}$ es multiplicativa. Para esto, basta ver que dados $f \in H_b(\mathbf{X})$ y $z \in B^{**}$ existe una red $\{x_\alpha\}_\alpha \subset B$ tal que $\hat{f}(z) = \lim_\alpha f(x_\alpha)$ pues como tomar límite es multiplicativo, resulta que la aplicación también lo es. Para esto, vamos a usar que dado $z \in B^{**}$, existe una red $\{x_\alpha\}_\alpha \subset B$ tal que $P(x_\alpha) \to \hat{P}(z)$ para todo polinomio $P \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ [7]. Ahora bien,

$$|\hat{f}(z) - f(x_\alpha)| \leqslant |\hat{f}(z) - \hat{P}(z)| + |\hat{P}(z) - P(x_\alpha)| + |P(x_\alpha) - f(x_\alpha)|,$$

para todo polinomio $P \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$. Entonces, como los sumas parciales de la serie de Taylor de $f$ convergen a $f$ uniformemente sobre acotados, podemos tomar un polinomio $P$ de manera tal que $\|P - f\|_{1B} < \varepsilon/3$ y tal que $\|\hat{f} - \hat{P}\|_{1B^{**}} < \varepsilon/3$ ya que la aplicación es continua. Luego tenemos que $|\hat{f}(z) - \hat{P}(z)| < \varepsilon/3$ y $|P(x_\alpha) - f(x_\alpha)| < \varepsilon/3$ para todo $\alpha$ pues $\{x_\alpha\} \subset B$ además existe $\alpha_0$ tal que $|\hat{P}(z) - P(x_\alpha)| < \varepsilon/3$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$. Luego $|\hat{f}(z) - f(x_\alpha)| < \varepsilon$ para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$. □

Vamos a estudiar también el espacio $H_b^*(\mathbf{X})$ dotado con la topología débil-$*$, esto es, dado $\{\varphi_\alpha\} \subset H_b^*(\mathbf{X})$, decimos que $\varphi_\alpha \to \varphi$ si $\varphi_\alpha(f) \to \varphi(f)$ para toda $f \in H_b(\mathbf{X})$. Y en especial estudiaremos un subconjunto particular de $H_b^*(\mathbf{X})$ que se llama el espectro de $H_b(\mathbf{X})$ que lo notaremos $M_b(\mathbf{X})$ y consiste en los morfismos continuos multipilicativos y no nulos de $H_b(\mathbf{X})$ en $\mathbb{C}$, con la topología inducida por $H_b^*(\mathbf{X})$.

Un funcional $\varphi \in H_b^*(\mathbf{X})$ es continuo respecto a la topología de la convergencia uniforme en $rB$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que $|\varphi(f)| \leqslant C\|f\|_r$ para toda $f \in H_b(\mathbf{X})$.

**Observación 3.60.** Dado $\varphi \in H_b^*(\mathbf{X})$, vale que $\varphi$ es continua respecto de la topología de la convergencia uniforme para alguna bola $rB$. O sea, existen $C > 0$ y $r > 0$ tales que para toda $f \in H_b(\mathbf{X})$ se verifica $|\varphi(f)| \leqslant C\|f\|_r$.

# Capítulo 4

# El espectro de $H_b$

## 4.1. La Función Radio en $M_b$

A partir de esta sección vamos a llamar $H_b$ a $H_b(\mathbf{X})$ , $H_b^*$ a $H_b^*(\mathbf{X})$ y $M_b$ a $M_b(\mathbf{X})$, salvo donde sea necesario aclarar sobre qué espacio estamos trabajando.

**Definición 4.1.** *Sea $\varphi \in H_b^*$ definimos la función radio como*

$$\begin{aligned} R(\varphi) &:= \inf\{r > 0 : \varphi \textit{ es continua respecto a la topología de la convergencia uniforme en } rB\} \\ &= \inf\{r > 0 : \ \exists C > 0, \ \textit{con } |\varphi(f)| \leqslant C\|f\|_r \textit{ para toda } f \in H_b\}. \end{aligned}$$

**Observación 4.2.** *Como consecuencia de la Observación 3.60, la función radio está bien definida y además: $0 \leqslant R(\varphi) < \infty$.*

Llamaremos $\delta_x$ al morfismo evaluación en $x \in \mathbf{X}$. O sea, $\delta_x(f) = f(x)$ para $f \in H_b$. Observemos que $\delta_x$ pertenece a $H_b^*$ para todo $x \in \mathbf{X}$, es más, $\delta_x$ pertenece a $M_b$.

**Lema 4.3.** *Sea $\varphi \in M_b$, entonces*

$$|\varphi(f)| \leqslant \|f\|_{R(\varphi)} \ \forall f \in H_b.$$

*Además $R(\varphi) = 0$ si y sólo si $\varphi = \delta_0$.*

*Demostración.* Como $\varphi$ es continua, existen $r > 0$ y $C > 0$ tal que $|\varphi(f)| \leqslant C\|f\|_r$, luego, como $\varphi$ es multiplicativa, tenemos que $|\varphi(f^n)| = |\varphi(f)|^n \leqslant C\|f^n\|_r = C\|f\|_r^n$. Por lo que tomando raíz n-ésima obtenemos que $|\varphi(f)| \leqslant C^{1/n}\|f\|_r$ y haciendo tender a $n$ a infinito se deduce entonces que $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|_r$ para toda $f \in H_b$. Como no depende de $C$, esto vale para todo $r > R(\varphi)$.

Ahora bien, como toda $f \in H_b$ es uniformemente continua sobre acotados de $\mathbf{X}$ (Proposición 3.57), la norma de $f$ en $rB$ depende continuamente de $r$. Luego tomando límite de $r$ tendiendo a $R(\varphi)$ tenemos que $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|_{R(\varphi)}$ para toda $f \in H_b$ como queríamos.

Por último, si $R(\varphi) = 0$, entonces $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|_r$ para todo $r > 0$ y para toda $f \in H_b$, luego tomando $r \to 0$, tenemos que $|\varphi(f)| \leqslant |f(0)|$ para toda $f \in H_b$. En particular vale para la función $f - f(0)$, o sea, $|\varphi(f - f(0))| \leqslant |(f - f(0))(0)| = |f(0) - f(0)| = 0$, luego $0 = \varphi(f - f(0)) = \varphi(f) - \varphi(f(0)) = \varphi(f) - f(0)\varphi(1) = \varphi(f) - f(0)$, por lo que $\varphi = \delta_0$.

Recíprocamente, si $\varphi = \delta_0$, tenemos que $|\delta_0(f)| = |f(0)| \leqslant \|f\|_r$ para todo $r > 0$ y para toda $f \in H_b$, luego $R(\delta_0) = 0$. $\square$

**Ejemplo 4.4.** $R(\delta_x) = \|x\|$ *para todo* $x \in \mathbf{X}$.

*Demostración.* Veamos primero que $R(\delta_x) \leqslant \|x\|$

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| \leqslant \sup\{|f(y)| : y \in B_{\|x\|+\varepsilon}\} = \|f\|_{\|x\|+\varepsilon} \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Luego $|\delta_x(f)| \leqslant \|f\|_{\|x\|}$ para toda $f \in H_b$ con lo que $R(\delta_x) \leqslant \|x\|$.

Veamos ahora que $R(\delta_x) \geqslant \|x\|$

Dado $r < \|x\|$, por el teorema de separación de convexos de Hahn-Banach, tenemos que existe $L \in \mathbf{X}^* \subseteq H_b$ tal que $|L| \leqslant 1$ en $rB$ y $|L(x)| > 1$ o sea que $|\delta_x(L)| = |L(x)| > 1$ por lo que no se cumple que $|\delta_x(L)| \leqslant \|L\|_r$. Luego $R(\delta_x) \geqslant \|x\|$. $\square$

**Lema 4.5.** *Dado* $r \geqslant 0$ *el conjunto* $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant r\}$ *es compacto en* $M_b$. *Además, la función radio* $R$ *es una función semicontinua inferiormente en* $M_b$.

*Demostración.* Consideremos el espacio $\mathbf{Y} = (H_b, \|\cdot\|_r)$, resulta que $\mathbf{Y}$ es un espacio normado. Llamemos $A = \{\varphi \in M_b : \ R(\varphi) \leqslant r\} = \{\varphi \in M_b : |\varphi(f)| \leqslant \|f\|_r \text{ para toda } f \in H_b\}$, $A \subset \overline{B_{\mathbf{Y}^*}}$

que es débil-$*$ compacto por el Teorema de Alaoglu, por lo que basta ver que $A$ es débil-$*$ cerrado. Sea $\{\varphi_\alpha\} \subset A$ tal que $\varphi_\alpha$ tiende débil-$*$ a $\varphi$, esto es, $\varphi_\alpha(f) \to \varphi(f)$ para toda $f \in H_b$. Como $|\varphi_\alpha(f)| \leqslant \|f\|_r$ para todo $\alpha$, entonces $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|_r$. Además $\varphi_\alpha(f.g) \to \varphi(f.g)$ y por otro lado $\varphi_\alpha(f.g) = \varphi_\alpha(f)\varphi_\alpha(g) \to \varphi(f)\varphi(g)$ por lo que $\varphi(f.g) = \varphi(f)\varphi(g)$. Luego $\varphi \in A$. La función radio $R$ es una función semicontinua inferiormente si los conjuntos $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) > r\}$ son abiertos para todo $r \in \mathbb{R}$ que se verifica trivialmente. $\square$

Vimos que cada $f \in H_b$ tiene su desarrollo en serie de Taylor (que converge en $H_b$)

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} f_m,$$

donde $f_m \in \mathcal{P}_m$. Como $\varphi \in H_b^*$ es continua, tenemos que

$$\varphi(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(f_m).$$

Llamamos $\varphi_m$ a la restricción de $\varphi$ sobre $\mathcal{P}_m$. Luego $\varphi_m$ es continua y su norma en $\mathcal{P}_m$ viene dada por

$$\|\varphi_m\| = \sup\{|\varphi(P)| : P \in \mathcal{P}_m \ y \ \|P\| \leqslant 1\}.$$

Veamos ahora un resultado importante que relaciona la función radio con las normas de las $\varphi_m$.

**Teorema 4.6.** *Sea $\varphi \in H_b^*$. La función radio viene dada por*

$$R(\varphi) = \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m}.$$

*Demostración.* Sea $0 < t < \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m}$. Si suponemos que $|\varphi(P_m)| = |\varphi_m(P_m)| \leqslant t^m$ para todo $\|P_m\| = 1$ y para todo $m \geqslant m_0$, entonces $\|\varphi_m\| \leqslant t^m$ para todo $m \geqslant m_0$ por lo que $\|\varphi_m\|^{1/m} \leqslant t$ para todo $m \geqslant m_0$ y por lo tanto $\limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m} \leqslant t$ que resulta una contradicción. Luego existe una subsucesión $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $P_j \in \mathcal{P}_{m_j}$ tal que $\|P_j\| = 1$ y $|\varphi(P_j)| > t^{m_j}$.

Ahora bien, sea $0 < r < t$, tenemos que

$$\|P_j\|_r = \sup_{x\in rB}\{|P_j(x)|\} = \sup_{x\in B}\{|P_j(rx)|\} = r^{m_j}\|P_j\| = r^{m_j}.$$

Luego $|\varphi(P_j)| > (\frac{t}{r})^{m_j}\|P_j\|_r$ y como $(\frac{t}{r})^{m_j} \to \infty$ no existe $C > 0$ tal que $|\varphi(P)| \leqslant C\|P\|_r$ con $P \in \mathcal{P} \subseteq H_b$ por lo que $\varphi$ no es continua respecto a la topología de la convergencia uniforme en $rB$. Entonces $R(\varphi) \leqslant r$ para todo $0 < r < t$, luego $R(\varphi) \leqslant t$ para todo $0 < t < \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m}$.

Por lo tanto $\limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m} \leqslant R(\varphi)$.

Para ver la otra desigualdad, sea $s > \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m}$, entonces existe $m_0$ tal que para todo $m \geqslant m_0$, $\|\varphi_m\| \leqslant s^m$ lo que indica que existe $c \geqslant 1$ tal que $\|\varphi_m\| \leqslant cs^m$ para todo $m \geqslant 0$. Sea $r > s$ y sea $f \in H_b$, $f$ tiene su desarrollo en serie de Taylor y vale que $r^m\|f_m\| = \|f_m\|_r \leqslant \|f\|_r$. Luego $|\varphi(f_m)| = |\varphi_m(f_m)| \leqslant \|\varphi_m\|\|f_m\| \leqslant c(\frac{s}{r})^m\|f\|_r$ pues $\varphi_m$ es continua en $(\mathcal{P}^*, \|\cdot\|)$ que es un espacio de Banach.

Por lo tanto tenemos que $|\varphi(f)| \leqslant c(\sum_m (\frac{s}{r})^m)\|f\|_r$.

Observemos que como $\frac{s}{r} < 1$ la suma converge y por lo tanto $\varphi$ resulta continua respecto a la topología de la convergencia uniforme en $rB$. Entonces $R(\varphi) \leqslant r$ para todo $r > s$, luego $R(\varphi) \leqslant s$ para todo $s > \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m}$. Por lo tanto $R(\varphi) \geqslant \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m}$. $\square$

**Teorema 4.7.** *Sea $\varphi_m \in \mathcal{P}_m^*$ tal que la norma de $\varphi_m$ en $\mathcal{P}_m^*$ satisface*

$$\|\varphi_m\| \leqslant cs^m \quad \textit{para todo } m \geqslant 0$$

*para algún $c, s > 0$.*

*Entonces existe una única $\varphi \in H_b^*$ cuya restricción a $\mathcal{P}_m$ es $\varphi_m$, para todo $m \geqslant 0$.*

*Demostración.* En la demostración del teorema anterior vimos que si $\|\varphi_m\| \leqslant cs^m$ entonces para todo $r > s$, $\sum_m \varphi_m(f_m)$ converge. Si definimos $\varphi(f) = \sum_m \varphi_m(f_m)$ entonces $\varphi \in H_b^*$ y resulta continua respecto a la topología de la convergencia uniforme en $rB$ pues

$$|\varphi(f)| \leqslant c(\sum_m (s/r)^m)\|f\|_r \leqslant C\|f\|_r.$$

Claramente $\varphi|_{\mathcal{P}_m} = \varphi_m$. $\square$

**Observación 4.8.** *En el caso que $\varphi \in M_b$, $R(\varphi) = \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m} = \sup_{m\geqslant 1} \|\varphi_m\|^{1/m}$.*

*Demostración.* Como $\varphi$ es multiplicativa y $\mathcal{P}_m\mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{P}_{m+k}$, tenemos que $\|\varphi_m\|\|\varphi_k\| \leqslant \|\varphi_{m+k}\|$. De hecho, para todo $P_m \in \mathcal{P}_m$, $P_k \in \mathcal{P}_k$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\varphi_m(P_m)||\varphi_k(P_k)| &= |\varphi(P_m)\varphi(P_k)| = |\varphi(P_mP_k)| = |\varphi_{m+k}(P_mP_k)| \\ &\leqslant \|\varphi_{m+k}\|\|P_mP_k\| = \|\varphi_{m+k}\|\|P_m\|\|P_k\|. \end{aligned}$$

Ahora bien, para que el límite superior coincida con el supremo basta ver que dado $\varphi_m$ existe $n > m$ tal que $\|\varphi_m\|^{1/m} \leqslant \|\varphi_n\|^{1/n}$. Como $\|\varphi_m\|^{2/m} = (\|\varphi_m\|\|\varphi_m\|)^{1/m} \leqslant \|\varphi_{2m}\|^{1/m}$, luego para cada $m \in \mathbb{N}$, $\|\varphi_m\|^{1/m} \leqslant \|\varphi_{2m}\|^{1/2m}$.Por lo que podemos concluir que

$$R(\varphi) = \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m} = \sup_{m\geqslant 1} \|\varphi_m\|^{1/m}.$$

□

## 4.2. Fibrado de $M_b$ sobre $\mathbf{X}^{**}$

Consideremos a $M_b$ con la topología inducida por la topología $\sigma(H_b^*, H_b)$ en $H_b^*$ y a $\mathbf{X}^{**}$ con la topología débil-$*$. Se puede definir una proyección $\pi : M_b \longrightarrow \mathbf{X}^{**}$ dada por $\pi(\varphi) = \varphi_1$ la restricción de $\varphi$ sobre $\mathbf{X}^* = \mathcal{P}_1$.

**Observación 4.9.** *Podríamos definir $\pi : H_b^* \longrightarrow \mathbf{X}^{**}$ y luego restringirla a $M_b$.*

**Observación 4.10.** *La proyección $\pi$ es continua.*

*Demostración.* Veamos que si $\varphi_\alpha \to \varphi$ en $H_b^*$ entonces $\pi(\varphi_\alpha) \to \pi(\varphi)$ en $\mathbf{X}^{**}$. Notemos que $\varphi_\alpha \to \varphi$ en $H_b^*$ si y sólo si $\varphi_\alpha(f) \to \varphi(f)$ para toda $f \in H_b$ y que $z_\alpha \to z$ en $\mathbf{X}^{**}$ si y sólo si $z_\alpha(\gamma) \to z(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathbf{X}^*$. Ahora bien, dado $\gamma \in \mathbf{X}^* \subset H_b$, tenemos que

$$\pi(\varphi_\alpha)(\gamma) = \varphi_\alpha(\gamma) \to \varphi(\gamma) = \pi(\varphi)(\gamma)$$

. □

**Definición 4.11.** *Dado $z \in \mathbf{X}^{**}$, llamamos $\delta_z$ a la evaluación en $z$ de $\hat{f}$, donde $\hat{f}$ es la extensión de $f \in H_b(\mathbf{X})$ a $\mathbf{X}^{**}$. O sea*

$$\delta_z(f) = \hat{f}(z)$$

Observemos que si $z \in \mathbf{X}$ esta definición coincide con la que ya teníamos.

**Lema 4.12.** *$R(\delta_z) = \|z\|$ para todo $z \in \mathbf{X}^{**}$*

*Demostración.* Se muestra en [7] que dado $z \in \mathbf{X}^{**}$, existe una red $\{x_\alpha\}$ en $\mathbf{X}$ tal que $\|x_\alpha\| \leqslant \|z\|$ y $P(x_\alpha) \to \hat{P}(z)$ para todo polinomio analítico $P$ en $\mathbf{X}$. Como los polinomios analíticos son densos en $H_b$ y la red está acotada uniformemente, también vale que $f(x_\alpha) \to \hat{f}(z)$ para toda $f \in H_b$ pues tomando $P$ suficientemente cerca de $f$, tenemos que

$$|f(x_\alpha) - \hat{f}(z)| \leqslant |f(x_\alpha) - P(x_\alpha)| + |P(x_\alpha) - \hat{P}(z)| + |\hat{P}(z) - \hat{f}(z)| < \varepsilon.$$

Observemos que en el primer término de la desigualdad es donde usamos que la red es acotada, cuestión que se necesita debido a que los desarrollos en serie de Taylor de $f$ convergen uniformemente sobre conjuntos acotados.

En particular la evaluación $\delta_{x_\alpha}$ tiende a $\delta_z$ en $M_b$. Luego

$$|\delta_z(f)| = \lim_\alpha |\delta_{x_\alpha}(f)| \leqslant \limsup_\alpha \|f\|_{R(\delta_{x_\alpha})} = \limsup_\alpha \|f\|_{\|x_\alpha\|} \leqslant \|f\|_{\|z\|}$$

Luego $R(\delta_z) \leqslant \|z\|$, para ver la otra desigualdad, observemos que $\delta_z|_{\mathbf{X}^*} = \pi(\delta_z) = z$ (ver Lema 4.13) luego por la Observación 4.8 $R(\varphi) \geqslant \|z\|$. $\square$

**Lema 4.13.** *Dada $\varphi \in M_b$ vale que*

$$\|\pi(\varphi)\| \leqslant R(\varphi).$$

*Además $\pi(\delta_z) = z$ para todo $z \in \mathbf{X}^{**}$.*

*Demostración.* Como $\varphi \in M_b$, entonces por la Observación 4.8 vale que $R(\varphi) = \sup_{m \geqslant 1} \|\varphi_m\|^{1/m}$ y $\pi(\varphi) = \varphi_1$, luego $\|\pi(\varphi)\| \leqslant R(\varphi)$. Además, dado $\gamma \in \mathbf{X}^*$, $J(\gamma) \in \mathbf{X}^{***} \subset H_b(\mathbf{X}^{**})$ entonces $\delta_z(\gamma) = \hat{\gamma}(z) = J(\gamma)(z) = z(\gamma)$. Luego, $\pi(\delta_z)(\gamma) = \delta_z|_{\mathbf{X}^*}(\gamma) = \delta_z(\gamma) = z(\gamma)$, entonces $\pi(\delta_z) = z$, $z \in \mathbf{X}^{**}$ y además $\pi$ es sobreyectiva. $\square$

Una pregunta que surge a partir de este resultado es cuándo $\pi$ es biyectiva, en dicho caso $M_b$ coincidirá con $\mathbf{X}^{**}$. Veamos un caso donde vale, otro donde no y un criterio para decidir si $\pi$ es biyectiva.

**Teorema 4.14.** *Si el álgebra de los polinomios de tipo finito es densa en $H_b$, entonces vale que $\pi : M_b \longrightarrow \mathbf{X}^{**}$ es biyectiva y manda cada conjunto $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant r\}$ homeomorficamente a la bola cerrada $\{z \in \mathbf{X}^{**} : \|z\| \leqslant r\}$ con la topología débil-$*$.*

*Demostración.* Ya vimos que $\pi$ es sobreyectiva, veamos entonces que $\pi$ es inyectiva.

Observemos primero que $\varphi(\gamma) = \varphi|_{\mathbf{X}^*}(\gamma) = \pi(\varphi)(\gamma) = \hat{\gamma}(\pi(\varphi)) = \delta_{\pi(\varphi)}(\gamma)$, para todo $\varphi \in M_b$ y $\gamma \in \mathbf{X}^*$.

Ahora bien, si $P_k$ es un polinomio $k$-homogéneo de tipo finito, $P_k = \displaystyle\sum_j \gamma_j^k$ con $\gamma_j \in \mathbf{X}^*$, entonces $\varphi(P_k) = \sum_j \varphi(\gamma_j)^k$.

Como los polinomios de tipo finito son densos en $H_b$ y quedan determinados por los $\gamma_j \in \mathbf{X}^*$, y además vale que $\varphi(\gamma) = \delta_{\pi(\varphi)}(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathbf{X}^*$, entonces tenemos que $\varphi(f) = \delta_{\pi(\varphi)}(f)$ para todo $f \in H_b$. Luego $\varphi = \delta_{\pi(\varphi)}$.

O sea: si $\pi(\varphi) = \pi(\psi) \Rightarrow \delta_{\pi(\varphi)} = \delta_{\pi(\psi)} \Rightarrow \varphi = \psi$.

Por último veamos que $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant r\} \xrightarrow{\pi} \{z \in X^{**} : \|z\| \leqslant r\}$ es homeomorfismo. Sea $\varphi$ tal que $R(\varphi) \leqslant r$, entonces $\|\pi(\varphi)\| \leqslant R(\varphi) \leqslant r$. Recíprocamente, sea $z$ tal que $\|z\| \leqslant r$ entonces $z = \pi(\delta_z)$ y $R(\delta_z) = \|z\| \leqslant r$.

Ahora bien, $\pi$ es continua y dado $C \subset \{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant r\}$ cerrado, como tenemos que $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant r\}$ es compacto, entonces $C$ es compacto también por lo que resulta que $\pi(C) \subset \{z \in X^{**} : \|z\| \leqslant r\}$ es compacto, en particular es cerrado, por lo que $\pi$ es cerrada. Luego es un homeomorfismo. $\square$

**Ejemplo 4.15.** Consideremos $c_0$ el espacio de sucesiones que tienden a 0. Por el teorema de Littlewood-Bogdanowicz [3]-Pelczynski [23] toda forma m-lineal en $c_0$ se puede aproximar por polinomios de tipo finito en las funciones coordenadas de $c_0$. Luego podemos usar el teorema anterior en este caso y concluimos que toda $\varphi \in M_b(c_0)$ viene de algún $z \in \ell^\infty$. Luego $M_b(c_0)$ coincide como conjunto con $\ell^\infty$ y la topología de $M_b(c_0)$ cincide con la topología débil-$*$ de $\ell^\infty$ en cada conjunto acotado.

**Ejemplo 4.16.** Un ejemplo donde $\pi : M_b \longrightarrow \mathbf{X}^{**}$ no resulta biyectiva es considerando $\mathbf{X} = \ell^p$ con $1 < p < \infty$.

Sea $\{e_1, e_2 \dots\}$ la base canónica de $\ell^p$, y sea $\phi_j = \delta_{e_j} \in M_b(\ell^p)$ la evaluación en $e_j$. Entonces tenemos que $R(\phi_j) = \|e_j\| = 1$, luego $\{\phi_j\}$ está incluido en un subconjunto compacto de $M_b(\ell^p)$, pues $\{\phi_j\} \subset \{\varphi \in M_b(\ell^p) : R(\varphi) \leqslant 1\} = \pi^{-1}\{z \in \mathbf{X}^{**} : \|z\| \leqslant 1\}$ que es compacto, por lo que $\overline{\{\phi_j\}} \neq \emptyset$. Además, existe una subred $\{\phi_{j_\alpha}\}$ convergente; digamos $\phi_{j_\alpha} \to \phi$, con $\phi \in M_b$. Como $\{e_j\}$ tiende débil a 0, tenemos que

$$\pi(\phi)(\gamma) = \phi(\gamma) = \lim_{\alpha} \phi_{j_\alpha}(\gamma) = \lim_{\alpha} \gamma(e_{j_\alpha}) = 0.$$

Luego $\pi(\phi) = 0$ para toda $\phi$ punto de acumulación de $\{\phi_j\}$.

Por último, dado $\alpha \in \ell^\infty$, tomemos $m \geqslant p$ y definimos $P \in \mathcal{P}_m(\ell^p)$ como

$$P(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j x_j^m,$$

con $x \in \ell^p$. Observemos que el hecho de que $m \geqslant p$ hace que efectivamente $P$ pertenezca a $\mathcal{P}_m(\ell^p)$. Entonces $\phi_j(P) = P(e_j) = \alpha_j$, luego $\{\phi_j\}$ es una sucesión interpolante para $H_b(\ell^p)$. Entonces tenemos que $\pi^{-1}(0)$ contiene una copia de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, donde $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-$\check{C}$ech de $\mathbb{N}$ (ver Observación 2.9), cuyo cardinal es mayor que $c$.

**Teorema 4.17** (Criterio)**.** *Sea* $\mathbf{Y}$ *isomorfo a un subespacio de* $\mathbf{X}$ *que es complementado.*

*Si* $\pi_1 : M_b(\mathbf{Y}) \longrightarrow \mathbf{Y}^{**}$ *no es biyectiva, entonces:* $\pi : M_b(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{X}^{**}$ *no es biyectiva.*

*Demostración.* Para una mejor comprensión, voy a llamar $\tilde{\delta}_z$ a la evaluacíon sobre funciones de $H_b(\mathbf{Y})$ y $\delta_z$ a la evaluación sobre funciones de $H_b(\mathbf{X})$.

Como $\mathbf{Y}$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathbf{X}$, tenemos una proyección $Q : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ y inclusión $i : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$, como $\pi_1$ no es biyectiva, existen $\theta_1, \theta_2 \in M_b(\mathbf{Y})$ tales que $\theta_1 \neq \theta_2$ y $\pi_1(\theta_1) = \pi_1(\theta_2) = z \in \mathbf{Y}^{**}$. Luego como $\pi_1(\tilde{\delta}_z) = z$, vale que existen $\theta \in M_b(\mathbf{Y})$ y $z \in \mathbf{Y}^{**}$ tales que $\theta \neq \tilde{\delta}_z$ y $\pi_1(\theta) = z$.

Sea $g \in H_b(\mathbf{Y})$ tal que $\theta(g) \neq \tilde{\delta}_z(g)$, entonces la función definida por $G = g \circ Q$ pertenece a $H_b(\mathbf{X})$. Sea ahora $\varphi \in M_b(\mathbf{X})$ definida por $\varphi(h) = \theta(h \circ i)$ para $h \in H_b(\mathbf{X})$, vale que, dado $\gamma \in \mathbf{X}^*$, $\varphi(\gamma) = \theta(\gamma \circ i) = \tilde{\delta}_z(\gamma \circ i)$ pues $\gamma \circ i \in \mathbf{Y}^*$. Además, por unicidad de la extensión, $\tilde{\delta}_z(\gamma \circ i) = (\widehat{\gamma \circ i})(z) = \hat{\gamma}(i(z)) = \delta_z(\gamma)$ para todo $z \in \mathbf{Y}^{**}$ donde la primera extensión es sobre $\mathbf{Y}^{**}$ y la segunda sobre $\mathbf{X}^{**}$, luego $\pi(\varphi) = \pi(\delta_z)$. Pero $\varphi(G) = \theta(G \circ i) = \theta(g \circ Q \circ i) = \theta(g) \neq \tilde{\delta}_z(g) = \tilde{\delta}_z(G \circ i) = \delta_z(G)$ por lo que $\varphi \neq \delta_z$. Por lo tanto $\pi$ no es biyectiva. $\square$

## 4.3. Topología de $M_b$

En esta sección definiremos una nueva topología para $H_b$, que resultará más fina que la definida en la Sección 3.3. También veremos una versión débil del Teorema de la Corona.

**Definición 4.18.** *Llamamos la topología $H_b$ de $\mathbf{X}$ a la menor topología en $\mathbf{X}$ que hace continuas a las $f \in H_b(\mathbf{X})$.*

Los siguientes resultados muestran que la topología $H_b$ de $\mathbf{X}$ tiene más abiertos que la topología débil de $\mathbf{X}$.

**Lema 4.19.** *Si $P \in \mathcal{P}_m$ es acotado en un entorno débil de 0, entonces $P$ es un polinomio de tipo finito.*

*Demostración.* Supongamos que $|P(x)| \leqslant M$ para todo $x \in V$ donde $V$ es un entorno débil de 0, $V = \{x \in \mathbf{X} : |L_i(x)| < 1 \text{ } con \text{ } 1 \leqslant i \leqslant N \text{ } y \text{ } L_i \in \mathbf{X}^*\}$.

Observemos primero que si $L_i(x) = L_i(y)$ para todo $1 \leqslant i \leqslant N$ entonces $P(x) = P(y)$. En efecto, podemos elegir $k$ de manera que $|L_i(\frac{x+\lambda(x-y)}{k})| = |L_i(\frac{x}{k})| < 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, luego $|P(\frac{x+\lambda(x-y)}{k})| < M$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, en consecuencia $P(x + \lambda(x - y))$ es un polinomio en $\lambda$ acotado, por lo que $P(x+\lambda(x-y))$ es constante. En particular tomando $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ tenemos que $P(x) = P(y)$.

Cosideremos ahora $T : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}^N$ dada por $x \longmapsto (L_1(x), \dots, L_N(x))$. El operador $T$ es lineal y $Im(T) \subset \mathbb{C}^N$ es un subespacio. Definamos ahora $q : Im(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ como $q(z) = P(x)$ donde $Tx = z$, $q$ está bien definida por lo observado anteriormente y resulta un polinomio $m$-homogéneo pues $q(\lambda z) = P(\lambda x) = \lambda^m P(x) = \lambda^m q(z)$. Tomemos, por último, la proyección $\pi : \mathbb{C}^N \longrightarrow Im(T)$, entonces tenemos que $q \circ \pi : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio en $N$ variables complejas $m$-homogéneo. Luego $q \circ \pi(z_1, \dots, z_N) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_m \leqslant N} a_{i_1} \dots a_{i_m} z_{i_1} \dots z_{i_m}$. Entonces $P(x) = q(Tx) = q \circ \pi(L_1(x), \dots, L_N(x)) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_m \leqslant N} a_{i_1} \dots a_{i_m} L_{i_1}(x) \dots L_{i_m}(x)$ que es un polinomio de tipo finito. $\square$

**Teorema 4.20.** *Si $\mathbf{X}$ tiene dimensión infinita, entonces la topología $H_b$ de $\mathbf{X}$ tiene más abiertos que la topología débil de $\mathbf{X}$*

*Demostración.* Como $\mathbf{X}$ tiene dimensión infinita, existe una sucesión básica $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ (ver [8, Corollary V.3]). Notemos por $\gamma_j$ a los funcionales coordenadas extendidos a todo $\mathbf{X}$ por Hahn-Banach. Sea $f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon_j \gamma_j^2(x)$ con $(\varepsilon_j)$ rápidamente decreciente a 0. Entonces $f$ es acotada en acotados, por lo que $f \in H_b$ y es continua en 0 para la topología $H_b$ de $\mathbf{X}$. Pero no es un polinomio de tipo finito. Para ver esto, consideremos para cada polinomio $P \in \mathcal{P}_2$ la forma bilineal simétrica asociada $F$ y definimos el operador $T_P : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ como $T_P(x)(y) = F(x, y)$. Ahora bien, probemos que si $P$ es de tipo finito, entonces resulta que $T_P$ es un operador de rango finito, es decir que la dimensión de la imagen de $T_P$ es finita. Como $P \in \mathcal{P}_2$ es de tipo finito, entonces es de la forma $P(x) = \sum_{j=1}^{M} \theta_j^2(x)$, donde $\theta_j \in \mathbf{X}^*$. Luego $T_P(x) = \sum_{j=1}^{M} \theta_j(x)\theta_j$, por lo que $T_P$ es de rango finito ya que la imagen esta incluida en el subespacio de $\mathbf{X}^*$ generado por $\{\theta_1, \ldots, \theta_M\}$. Por último veamos que para $f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon_j \gamma_j^2(x) \in \mathcal{P}_2$ vale que $T_f$, que queda definido por $T_f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon_j \gamma_j(x)\gamma_j$, no es un operador de rango finito. De hecho si evaluamos en cada $e_j$, tenemos que $T_f(e_j) = \varepsilon_j\gamma_j$, por lo que $\gamma_j \in Im(T_f)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Luego por el lema anterior, $f$ no es continua para la topología débil de $\mathbf{X}$. $\square$

La clausura débil de la esfera unidad en un espacio de Banach es la bola unidad. Vale el mismo resultado para la clausura en la topología $H_b$.

**Teorema 4.21.** *Si $\mathbf{X}$ tiene dimensión infinita, entonces: La clausura de la esfera unidad $S$ de $\mathbf{X}$ en la topología $H_b$ incluye a la bola unidad cerrada $\overline{B^{**}}$ de $\mathbf{X}^{**}$.*

*Demostración.* Como vimos anteriormente (ver demostración de la Proposición 3.59), dado $z \in \overline{B^{**}}$ existe una red $\{x_\alpha\} \subset B$ tal que $\hat{f}(z) = \lim_\alpha f(x_\alpha)$ por lo que $B$ es denso en $\overline{B^{**}}$ para la topología $H_b$. Luego basta ver que $S$ es denso en $B$ para la topología $H_b$. Sea $z \in B$ y sean $f_1, \ldots, f_N \in H_b$, basta encontar un $x \in S$ tal que $f_j(x) = f_j(z)$ para $1 \leqslant j \leqslant N$. Para esto, consideremos $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ un subespacio cualquiera de dimensión $N+1$ que contenga a $z$ y sea $V$ una componente irreducible de la variedad dada por $\{y \in \mathbf{Y} : f_j(y) = f_j(z),\ 1 \leqslant j \leqslant N\}$ que contiene a $z$. Como la variedad está definida por $N$ funciones e $\mathbf{Y}$ tiene dimensión $N+1$, entonces $V$ tiene dimensión positiva. Luego por el Principio del Máximo tenemos que $V$ no está acotada y como $B \cap V \neq \emptyset$, entonces tenemos también que $V \cap S \neq \emptyset$ por lo que podemos tomar $x \in S$ en esa intersección. □

El siguiente teorema muestra que $\mathbf{X}$ con la topología $H_b$ no necesariamente es un espacio vectorial topológico.

**Teorema 4.22.** *Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Entonces la operación de suma $(x, y) \longmapsto x + y$ restringida a $B \times B$ no es continua respecto a la topología $H_b$.*

*Demostración.* Como $\mathbf{X}$ es Hilbert, podemos pensar a $\mathbf{X}$ como $L^2$. Notemos con $\overline{x}$ al conjugado complejo de $x$. Por el Teorema 4.21 existe una red $\{x_\alpha\} \subset \mathbf{X}$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $x_\alpha \to 0$ en la topología $H_b$. Entonces también vale que $\overline{x_\alpha} \to 0$ en la topología $H_b$. Pero si consideramos la función $f(x) = \int x^2 dx$, vale que $f \in \mathcal{P}_2$ y cumple que

$$f(x_\alpha + \overline{x_\alpha}) = f(x_\alpha) + f(\overline{x_\alpha}) + 2\|x_\alpha\|^2 \to 2.$$

Luego $x_\alpha + \overline{x_\alpha}$ no tiende a 0 en la topología $H_b$. □

El problema de la Corona para $H_b$ consiste en determinar cuándo $\mathbf{X}$ es denso en $M_b$. En el caso que $M_b = \mathbf{X}^{**}$, el Teorema de aproximación de Davie-Gamelin [7] muestra que $\mathbf{X}$ es denso en $M_b$. No sabemos qué sucede en el caso que $M_b$ sea mas grande que $\mathbf{X}^{**}$. Sin embargo, la idea usada en la demostración del Teorema 4.21, nos permite probar que $\mathbf{X}$ es denso en $M_b$ en la topología débil determinada por los polinomios analíticos.

Para probar la densidad, necesitaremos usar el hecho de que la clausura de la imagen de un polinomio $F$ sobre un espacio vectorial complejo $Y$ de dimensión finita en $\mathbb{C}^n$ es una variedad algebraica en $\mathbb{C}^n$. En este caso vale que la clausura de $F(Y)$ es una variedad irreducible. Veremos una versión para $Y$ de dimensión infinita.

**Lema 4.23.** *Sea $Y$ un espacio vectorial complejo. Sea $F = (f_1, \ldots, f_n)$ una función de $Y$ en $\mathbb{C}^n$ tal que la restricción de cada $f_j$ a cualquier subespacio de $Y$ de dimensión finita es un polinomio. Entonces la clausura de la imagen de $F$ es una variedad algebraica.*

*Demostración.* Sea $Y_0$ un subespacio de dimensión finita de $Y$, entonces $\overline{F(Y_0)}$ es una variedad algebraica irreducible en $\mathbb{C}^n$, digamos de dimensión $k$. Podemos suponer (si no agregamos más elementos) que tomamos $Y_0$ de manera que la dimensión $k$ de $\overline{F(Y_0)}$ es máxima. Luego si $Y_1$ es un subespacio de dimensión finita de $Y$ tal que $Y_1 \supseteq Y_0$, entonces $\overline{F(Y_1)}$ también es una variedad algebraica irreducible de dimensión $k$ que contiene a $\overline{F(Y_0)}$, por lo que $\overline{F(Y_0)} = \overline{F(Y_1)}$. Luego $\overline{F(Y_0)} = \overline{F(Y)}$. □

**Teorema 4.24.** *Sea $Y$ un espacio vectorial complejo. Sea $A$ un álgebra de funciones en $Y$ tal que la restricción de cada $f \in A$ a un subespacio de dimensión finita de $Y$ es un polinomio analítico. Sea $I$ un ideal propio de $A$. Entonces existe una red $\{y_\alpha\} \subset Y$ tal que $f(y_\alpha) \to 0$ para toda $f \in I$.*

*Demostración.* Supongamos que no existe tal red. Entonces existen $f_1, \ldots, f_n \in I$ tales que

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i(y)| \geqslant 1, \text{ para todo } y \in Y.$$

Consideremos $F = (f_1, \ldots, f_n)$ la función de $Y$ en $\mathbb{C}^n$ y sea $V$ la clausura de la imagen de $F$. Entonces $V$ es una variedad algebraica que no contiene a 0. Luego existe un polinomio $p$ en $\mathbb{C}^n$ tal que $p = 0$ sobre $V$ y $p(0) = 1$. Como el polinomio $p$ junto con las funciones coordenadas $z_1, \ldots, z_n$ no tienen ceros comunes, entonces del Nullstellensatz (ver [6, Theorem 4.1]) deducimos que el ideal generado por ellos en el anillo de polinomios en $\mathbb{C}^n$ no es propio. Luego existen polinomios $q_0, q_1, \ldots, q_n$ en $\mathbb{C}^n$ tales que

$$pq_0 + z_1q_1 + \cdots + z_nq_n = 1 \ \ en \ \mathbb{C}^n,$$

entonces

$$z_1q_1 + \cdots + z_nq_n = 1 \ \ en \ V.$$

Luego si tomamos $g_1, \ldots, g_n \in A$, las composiciones de $q_1, \ldots, q_n$ con $F$, resulta entonces que $f_1g_1 + \cdots + f_ng_n = 1$ y el ideal $I$ no es propio. □

Como consecuecia de este último Teorema, conseguimos una versión débil del Teorema de la Corona.

**Corolario 4.25.** *Sea $\phi$ un morfismo cualquiera de $H_b$ en $\mathbb{C}$. Entonces existe una red $\{x_\alpha\} \subset \mathbf{X}$ tal que $f(x_\alpha) \to \phi(f)$ para todo polinomio analítico $f$ en $\mathbf{X}$.*

## 4.4. Acción de operadores en $M_b$

En esta sección definiremos una acción sobre $H_b^*$ que nos permitirá conocer aspectos topológicos del espectro $M_b$. Veremos, por ejemplo, que $M_b$ está formado por copias del plano complejo que pasan por $\delta_0$.

**Definición 4.26.** *Consideremos el espacio $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ de los operadores lineales acotados de $\mathbf{X}$. Estos operadores actúan sobre $H_b$ por composición, es decir, dados $f \in H_b$ y $T \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$, $f \cdot T = f \circ T \in H_b$. Esta acción induce otra acción sobre $H_b^*$, dada por $T \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ como*

$$(\Lambda_T \varphi)(f) = \varphi(f \circ T) \text{ con } f \in H_b \text{ y } \varphi \in H_b^*.$$

**Observación 4.27.**

$$\Lambda_{ST} = \Lambda_S \Lambda_T \text{ para todo } S, T \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$$

*pues dados $\varphi \in H_b^*$ y $f \in H_b$,*

$$(\Lambda_{ST}\varphi)(f) = \varphi(f \circ (ST)) = \varphi((f \circ S) \circ T) = (\Lambda_T \varphi)(f \circ S) = \Lambda_S(\Lambda_T \varphi)(f).$$

*Luego $\Lambda_{ST} = \Lambda_S \Lambda_T$.*

Veamos algunos resultados más.

**Lema 4.28.** *$R(\Lambda_T \varphi) \leqslant \|T\| R(\varphi)$, para todo $\varphi \in H_b^*$ y $T \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$.*

*Demostración.* Sabemos por el Teorema 4.6 que $R(\varphi) = \limsup_{m\to\infty} \|\varphi_m\|^{1/m}$.

Luego $R(\Lambda_T \varphi) = \limsup_{m\to\infty} \|(\Lambda_T \varphi)_m\|^{1/m}$. Ahora bien, dado $P_m \in \mathcal{P}_m$, como también vale que $P_m \circ T \in \mathcal{P}_m$ tenemos que

$$(\Lambda_T \varphi)_m(P_m) = (\Lambda_T \varphi)(P_m) = \varphi(P_m \circ T) = \varphi_m(P_m \circ T) = (\Lambda_T \varphi_m)(P_m).$$

Luego $(\Lambda_T \varphi)_m = \Lambda_T \varphi_m$ y además vale que

$$\|P_m \circ T\| \leqslant \|T\|^m \|P_m\|,$$

pues dado $x \in B$, $\|P_m(Tx)\| = \|P_m(\|T\|\frac{Tx}{\|T\|})\| = \|T\|^m\|P_m(\frac{Tx}{\|T\|})\| \leqslant \|T\|^m\|P_m\|$.

Por último, dado $P_m \in \mathcal{P}_m$,

$$|(\Lambda_T\varphi)_m(P_m)| = |\Lambda_T\varphi_m(P_m)| = |\varphi_m(P_m \circ T)| \leqslant \|\varphi_m\|\|P_m \circ T\| \leqslant \|\varphi_m\|\|T\|^m\|P_m\|.$$

Luego, $\|\Lambda_T\varphi_m\| \leqslant \|T\|^m\|\varphi_m\|$. Entonces $\|(\Lambda_T\varphi)_m\|^{1/m} \leqslant \|T\|\|\varphi_m\|^{1/m}$.

En consecuencia tomando límite superior, tenemos que $R(\Lambda_T\varphi) \leqslant \|T\|R(\varphi)$ como queríamos. □

**Lema 4.29.** *$\pi(\Lambda_T\varphi) = T^{**}(\pi(\varphi))$ para todos $\varphi \in H_b^*$ y $T \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$.*

*Demostración.* Si $L \in \mathbf{X}^*$, entonces $L \circ T = T^*L$, luego dada $\gamma \in \mathbf{X}^*$, como $\gamma \circ T \in \mathbf{X}^*$ tenemos que

$$\pi(\Lambda_T\varphi)(\gamma) = (\Lambda_T\varphi)(\gamma) = \varphi(\gamma\circ T) = \pi(\varphi)(\gamma\circ T) = \pi(\varphi)(T^*(\gamma)) = (\pi(\varphi)\circ T^*)(\gamma) = (T^{**}\pi(\varphi))(\gamma).$$

Por lo tanto, $\pi(\Lambda_T\varphi) = T^{**}(\pi(\varphi))$. □

Este resultado muestra en particular que la fibra $\pi^{-1}(0)$ es invariante por la acción de $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ pues si $\varphi \in \pi^{-1}(0)$, $\pi(\varphi) = 0$ y en consecuencia $T^{**}(\pi(\varphi)) = \pi(\Lambda_T\varphi) = 0$, o sea $\Lambda_T\varphi \in \pi^{-1}(0)$.

**Lema 4.30.** *Para cada $\varphi \in H_b^*$ y $f \in H_b$ fijos, la aplicación $T \longmapsto (\Lambda_T\varphi)(f)$ es analítica sobre $\mathcal{B}(\mathbf{X})$.*

*Demostración.* Por Teorema 3.47 basta ver que $(\Lambda_{T_1+\lambda T_2}\varphi)(f)$ es analítica en $\lambda$ para todo $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ y que la aplicación es localmente acotada o sea, que existen $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ tales que $|\Lambda_T\varphi(f)| < M$ para todo $T \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ con $\|T\| \leqslant N$.

Veamos primero que es analítica en $\lambda$:

$$\Lambda_{T_1+\lambda T_2}\varphi(f) = \Lambda_{T_1+\lambda T_2}\varphi(\sum_{m\in\mathbb{N}_0} f_m) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \Lambda_{T_1+\lambda T_2}\varphi(f_m) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \varphi(f_m \circ (T_1 + \lambda T_2)).$$

Observemos que para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $\varphi(f_m \circ (T_1 + \lambda T_2))$ es un polinomio en $\lambda$, pues

$$\begin{aligned} f_m \circ (T_1 + \lambda T_2)(x) &= f_m(T_1x + \lambda T_2x) = \check{f}_m(T_1x + \lambda T_2x)^m \\ = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \check{f}_m((T_1x)^{m-k}, (\lambda T_2x)^k) &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \check{f}_m((T_1x)^{m-k}, (T_2x)^k)\lambda^k, \end{aligned}$$

donde $\check{f}_m((T_1x)^{m-k},(T_2x)^k)$ es la forma multilineal $\check{f}_m(T_1x_1,\dots,T_1x_{m-k},T_2x_{m-k+1},\dots,T_2x_m)$ evaluada en la diagonal, por lo que existe $Q_m \in \mathcal{P}_m$ tal que $Q_m(x) = \check{f}_m((T_1x)^{m-k},(T_2x)^k)$. Luego $f_m \circ (T_1+\lambda T_2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}Q_m\lambda^k$ y entonces $\varphi(f_m \circ (T_1+\lambda T_2)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\varphi(Q_m)\lambda^k$ resulta un polinomio en $\lambda$.

Luego basta ver que la serie converge uniformemente si $|\lambda| \leqslant C$. Como

$$\begin{aligned}
|\varphi(f_m \circ (T_1+\lambda T_2))| &\leqslant D\|f_m \circ (T_1+\lambda T_2)\|_{R(\varphi)+\varepsilon} \\
&\leqslant D(R(\varphi)+\varepsilon)^m\|f_m \circ (T_1+\lambda T_2)\| \\
&\leqslant D(R(\varphi)+\varepsilon)^m\|f_m\|\|T_1+\lambda T_2\|^m \\
&\leqslant D(R(\varphi)+\varepsilon)^m\|f_m\|(\|T_1\|+|\lambda|\|T_2\|)^m \\
&\leqslant D((R(\varphi)+\varepsilon)(\|T_1\|+C\|T_2\|))^m\|f_m\|.
\end{aligned}$$

Entonces $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}_0}|\varphi(f_m \circ (T_1+\lambda T_2))| \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0} C((R(\varphi)+\varepsilon)(\|T_1\|+C\|T_2\|))^m\|f_m\|$ y como vale que $D^{1/m}(R(\varphi)+\varepsilon)(\|T_1\|+C\|T_2\|)\|f_m\|^{1/m} \to 0$, la serie converge uniformemente para todo $|\lambda| \leqslant C$.

Para ver que es localmente acotada usamos la misma cuenta tomando $T = T_1+\lambda T_2$ y suponiendo que $\|T\| \leqslant N$, resulta que

$$|\Lambda_T\varphi(f)| \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(\|T\|(R(\varphi)+\varepsilon))^m\|f_n\| \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(N(R(\varphi)+\varepsilon))^m\|f_n\| < M$$

por la misma razón que antes. □

Vamos a considerar, ahora, la familia de operadores $\xi I$, donde $I$ es la identidad de $X$ y $\xi \in \mathbb{C}$.

**Definición 4.31.** *Vamos a llamar $\varphi^\xi$ a $\Lambda_{\xi I}\varphi$. O sea si $f \in H_b$ se desarrolla como $f = \sum_m f_m$, entonces*

$$\varphi^\xi(f) = \sum_m \xi^m\varphi(f_m).$$

En particular vale que la restricción de $\varphi^\xi$ a $\mathcal{P}_m$ coincide con $\xi^m\varphi_m$.

**Lema 4.32.** *Sea $\varphi \in H_b^*$ fijo. Entonces:*

*(1) La aplicación $\mathbb{C} \longrightarrow H_b^*$ que manda $\xi \longmapsto \varphi^\xi$ es entera. O sea, $\xi \longmapsto \varphi^\xi(f)$ es entera para toda $f \in H_b$.*

*(2) $\varphi^1 = \varphi$.*

*(3) $\varphi^0 = \delta_0$.*

*(4) $\pi(\varphi^\xi) = \xi\pi(\varphi)$ para todo $\xi \in \mathbb{C}$.*

*(5) Si $P \in \mathcal{P}_m$, entonces $\varphi^\xi(P) = \xi^m(P)$.*

*(6) $R(\varphi^\xi) = |\xi| R(\varphi)$ para todo $\xi \in \mathbb{C}$.*

*Demostración.*

(1) Vale pues $\varphi^\xi(f) = \displaystyle\sum_m \xi^m \varphi(f_m)$ es entera, ya que

$$\limsup_m |\xi^m \varphi(f_m)|^{1/m} \leqslant \limsup_m |\xi| \|\varphi_m\|^{1/m} \|f_m\|^{1/m} \leqslant |\xi| R(\varphi) \limsup_m \|f_m\| = 0.$$

(2) $\varphi^1(f) = \displaystyle\sum_m \varphi(f_m) = \varphi(f)$ para toda $f \in H_b$.

(3) $\varphi^0(f) = \displaystyle\sum_m 0^m \varphi(f_m) = \varphi(f_0) = f_0 = f(0)$.

(4) $\pi(\varphi^\xi) = \pi(\displaystyle\sum_m \xi^m \varphi_m) = \xi\varphi_1 = \xi\pi(\varphi)$.

(5) Sea $P \in \mathcal{P}_m$, $\varphi^\xi(P) = \sum_m \xi^m \varphi_m(P) = \xi^m \varphi_m(P) = \xi^m \varphi(P)$.

(6) Observemos que $(\varphi^\xi)_m = \xi^m \varphi_m$, entonces $\|(\varphi^\xi)_m\|^{1/m} = (|\xi|^m \varphi_m)^{1/m} = |\xi| \|\varphi_m\|^{1/m}$, luego tomando límite superior tenemos que $R(\varphi^\xi) = |\xi| R(\varphi)$ para todo $\xi \in \mathbb{C}$.

□

**Observación 4.33.** *Notemos primero que las tranformaciones* $\Lambda_T$ *dejan* $M_b$ *invariante. Pues si tomamos* $\varphi \in M_b$ *y* $f, g \in H_b$*, tenemos que*

$$\Lambda_T\varphi(f.g) = \varphi((f.g)\circ T) = \varphi((f\circ T).(g\circ T)) = \varphi(f\circ T)\varphi(g\circ T) = \Lambda_T\varphi(f)\Lambda_T\varphi(g).$$

*Luego* $\Lambda_T\varphi \in M_b$*. En particular, para* $\varphi \in M_b$ *la correspondencia* $\xi \longmapsto \varphi^\xi$ *es una función analítica de* $\mathbb{C}$ *en* $H_b^*$*, cuya imagen está incluida en* $M_b$ *y pasa por* $\varphi$ *y por* $\delta_0$*.*

*Si* $\pi(\varphi) \neq 0$*, la parte* (4) *del Lema 4.32 muestra que la correspondencia es inyectiva, pues si* $\varphi^\xi = \varphi^\eta$ *entonces* $\xi\pi(\varphi) = \pi(\varphi^\xi) = \pi(\varphi^\eta) = \eta\pi(\varphi)$ *y como* $\pi(\varphi) \neq 0$ *resulta que* $\xi = \eta$*. Luego la imagen de la aplicación contiene una copia de* $\mathbb{C}$ *dentro de* $M_b$ *que pasa por* $\varphi$ *y por el origen* $\delta_0$*.*

En el caso que la aplicación $\xi \longmapsto \varphi^\xi$ no sea inyectiva, se puede reparametrizar, y encontrar también una copia de $\mathbb{C}$ que pasa por $\varphi$ y por el origen $\delta_0$ como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 4.34.** *Toda* $\varphi \in M_b$ *está incluida en una copia de* $\mathbb{C}$ *dentro de* $M_b$ *que pasa por el origen* $\delta_0$*.*

*Demostración.* Consideremos el conjunto $A = \{k \in \mathbb{N} : \textit{ existe } P \in \mathcal{P}_k \textit{ tal que } \varphi(P) \neq 0\}$. Como $\varphi$ es multiplicativa, $A$ resulta un semigrupo. Sea $m$ el máximo común divisor de $A$ y veamos que $\varphi^\xi = \varphi^\eta$ si y sólo si $\xi = \mu\eta$ con $\mu$ raíz $m$-ésima de la unidad.

Supongamos primero que $\varphi^\xi = \varphi^\eta$ y sea $n \in A$, o sea existe $P \in \mathcal{P}_n$ tal que $\varphi(P) \neq 0$. Entonces por parte (5) del Lema 4.32, $\xi^n\varphi(P) = \varphi^\xi(P) = \varphi^\eta(P) = \eta^n\varphi(P)$ y como $\varphi(P) \neq 0$ resulta que $\xi^n = \eta^n$, y esto vale para todo $n \in A$. Ahora bien, si $\xi^n = \eta^n$ para todo $n \in A$ (como números complejos) entonces para todo $r \in \mathbb{Z}$ vale que $\xi^{nr} = \eta^{nr}$, por lo tanto dados $n, k \in A$ vale que $\xi^{rn+sk} = \eta^{rn+sk}$ para todo $r, s \in \mathbb{Z}$, luego $\xi^m = \eta^m$, o sea, $\xi = \mu\eta$ con $\mu$ raíz $m$-ésima de la unidad. Recíprocamente, si $\xi = \mu\eta$, entonces $\varphi^\xi = \sum_k \xi^k\varphi_k = \sum_{m|k}\xi^k\varphi_k = \sum_{m|k}\eta^k\varphi_k = \varphi^\eta$ pues para que exista $P$ con $\varphi(P) \neq 0$ para $P$ un polinomio $k$-homogéneo, tiene que pasar que $m|k$.

Entonces la aplicación que manda $\rho \to \varphi^\xi$ donde $\xi^m = \rho$ está bien definida pues si $\xi^m = \eta^m$ entonces $\varphi^\xi = \varphi^\eta$ y, además, resulta inyectiva y analítica. Por lo tanto la imagen de la aplicación contiene una copia de la recta compleja dentro de $M_b$ que pasa por $\varphi$ y por el origen $\delta_0$. $\square$

## 4.5. La operación Convolución

En esta sección definiremos una operación dentro de $H_b^*$, a la que llamaremos convolución. Veremos que podemos restringir esta operación al espectro de $H_b$ y esto nos permitirá darle una estructura de semigrupo a $M_b$. Y, bajo cierta condición que estudiaremos en las secciones 4.6 y 4.7, veremos que $M_b$ está formada por copias analíticas y disjuntas de $\mathbf{X}^{**}$.

**Definición 4.35.** *Dado $x \in \mathbf{X}$, definimos el operador de traslación $T_x$ en $H_b$ como*

$$(T_x f)(y) = f(x + y), \quad f \in H_b.$$

**Observación 4.36.** *$T_x f$ es analítica en $\mathbf{X}$ y es acotada sobre subconjuntos acotados de $\mathbf{X}$, luego $T_x f \in H_b$.*

**Observación 4.37.** *Si $Q$ es un polinomio analítico en $\mathbf{X}$, entonces tenemos que*

$$T_x Q = Q + \textit{polinomios de menor orden}.$$

*En el caso particular que $L \in \mathbf{X}^*$ tenemos que*

$$T_x L = L + L(x)$$

*pues $T_x L(y) = L(x + y) = L(y) + L(x)$.*

**Observación 4.38.** *Una estimación para la norma de $T_x f$ en la bola $rB$ viene dada por*

$$\|T_x f\|_r \leqslant \|f\|_{r+\|x\|}$$

*pues*

$$\|T_x f\|_r = \sup_{\|y\| \leqslant r} |T_x f(y)| = \sup_{\|y\| \leqslant r} |f(x + y)| \leqslant \sup_{\|y\| \leqslant r+\|x\|} |f(y)| = \|f\|_{r+\|x\|}.$$

*Luego, cada $T_x : H_b \longrightarrow H_b$ es un operador continuo. Y, como además las funciones de $H_b$ son uniformemente continuas sobre subconjuntos acotados de $\mathbf{X}$, los elementos $T_x f$ en $H_b$ se mueven continuamente con $x$ en la topología de le convergencia uniforme en $H_b$, es decir, la aplicación $(\mathbf{X}, \|\cdot\|) \to H_b$ dada por $x \longmapsto T_x f$ es continua.*

**Ejemplo 4.39.** *La acción que manda $x \to T_x f$ no es necesariamente continua respecto de la topología débil de* $\mathbf{X}$. *Tomemos por ejemplo $X = \ell^2$ y sea $\{e_1, e_2, \dots\}$ la base canónica de $\ell^2$. Definimos $P(x) = \sum x_j^2$ con $x = \sum x_j e_j \in \ell^2$.*

*Como $e_n$ tiende débil a 0, si la acción fuera continua debería ser que $P(x + e_n)$ tiende a $P(x)$, pero $P(x+e_n) = \sum (x_j + (e_n)_j)^2 = \sum (x_j^2 + 2x_j(e_n)_j + ((e_n)_j)^2) = P(x) + 2x_n + 1$ tiende a $P(x) + 1$.*

**Definición 4.40.** *La acción dual de los $T_x$ produce un grupo de operadores lineales inversibles $S_x : H_b^* \longrightarrow H_b^*$ definidos por*

$$(S_x \varphi)(f) = \varphi(T_x f), \quad x \in \mathbf{X},\ f \in H_b,\ \varphi \in H_b^*.$$

Como $T_x f$ varía continuamente en $x$ considerando la topología inducida por la norma en $\mathbf{X}$, entonces para cada $\varphi \in H_b^*$ fijo, los $S_x \varphi$ también lo cumplen. Además, $S_x$ deja $M_b$ invariante, o sea

$$S_x(M_b) = M_b,\ x \in \mathbf{X},$$

pues dados $\varphi \in M_b$ y $f, g \in H_b$, tenemos que

$$S_x \varphi(f.g) = \varphi(T_x(f.g)) = \varphi(T_x f . T_x g) = \varphi(T_x f)\varphi(T_x g) = S_x \varphi(f) S_x \varphi(g).$$

**Proposición 4.41.** *Dados $x \in \mathbf{X}$ y $z \in \mathbf{X}^{**}$, vale que*

$$S_x \delta_z = \delta_{x+z}.$$

*Demostración.* Veamos primero que $S_x \delta_y = \delta_{x+y}$ para todo $x, y \in \mathbf{X}$. Sea $f \in H_b$, entonces $S_x \delta_y(f) = \delta_y(T_x f) = T_x f(y) = f(x+y) = \delta_{x+y}(f)$.

Ahora bien, para ver que $S_x \delta_z = \delta_{x+z}$ con $x \in \mathbf{X}$ y $z \in \mathbf{X}^{**}$ basta ver que coinciden sobre los espacios $\mathcal{P}_m$, $m \geqslant 1$. Sea entonces $P \in \mathcal{P}_m$, consideremos $F$ la forma multilineal simétrica sobre $\mathbf{X}$ asociada, y sea $\hat{F}$ la forma multilineal sobre $\mathbf{X}^{**}$ obtenida extendiendo $F$ mediante la continuidad débil-$*$, una variable a la vez, de la última a la primera. Luego si extendemos de la misma manera a la $m$-forma en $\mathbf{X}$

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto F(x + x_1, \dots, x + x_m)$$

a $\mathbf{X}^{**}$ obtenemos $\hat{F}(x+z_1,\ldots,x+z_m)$, pues

$$\lim_{y_{\alpha_1}\to z_1}\ldots\lim_{y_{\alpha_m}\to z_m} F(x+y_{\alpha_1},...,x+y_{\alpha_m}) = \lim_{y_{\alpha_1}\to x+z_1}\ldots\lim_{y_{\alpha_m}\to x+z_m} F(y_{\alpha_1},...,y_{\alpha_m}) = \hat{F}(x+z_1,...,x+z_m).$$

Restringiendo a la diagonal obtenemos

$$\widehat{T_xP}(z) = \hat{F}(x+z,\ldots,x+z) = \hat{P}(x+z),$$

pues $T_xP(y) = P(x+y) = F(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}F(x^k,y^{m-k})$, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{T_xP}(z) &= (\lim_{y_{\alpha_1}\to z_1}\ldots\lim_{y_{\alpha_m}\to z_m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}F(x^k,y_{\alpha_{k+1}},\ldots,y_{\alpha_m}))|_z \\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\hat{F}(x^k,z^{m-k}) = \hat{F}(x+z)^m.\end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$S_x\delta_z(P) = \delta_z(T_xP) = T_x\hat{}P(z) = \widehat{P}(x+z) = \delta_{x+z}(P).$$

$\square$

**Proposición 4.42.** *Dados $x\in\mathbf{X}$ y $\varphi\in H_b^*$ se tiene:*

$$R(S_x\varphi)\leqslant R(\varphi)+\|x\|.$$

*Demostración.* Dado $\varepsilon>0$, existe $C>0$ tal que

$$|\varphi(g)|\leqslant C\|g\|_{R(\varphi)+\varepsilon},\quad g\in H_b.$$

Entonces dada $f\in H_b$ tenemos que

$$|(S_x\varphi)(f)| = |\varphi(T_xf)|\leqslant C\|T_xf\|_{R(\varphi)+\varepsilon}\leqslant C\|f\|_{R(\varphi)+\|x\|+\varepsilon}.$$

Luego $R(S_x\varphi)\leqslant R(\varphi)+\|x\|$. $\square$

**Proposición 4.43.** *Dados $x \in \mathbf{X}$ y $\varphi \in H_b^*$ se tiene:*

$$\pi(S_x\varphi) = x + \pi(\varphi).$$

*Demostración.* Como consecuencia de la Observación 4.37 tenemos que dado $L \in \mathbf{X}^*$,

$$(S_x\varphi)(L) = \varphi(T_xL) = \varphi(L(x) + L) = L(x) + \varphi(L) = L(x) + \pi(\varphi)(L) = (x + \pi(\varphi))(L).$$

Luego, $\pi(S_x\varphi) = x + \pi(\varphi)$ □

Este resultado muestra que para cada $\varphi \in H_b^*$ fijo, la acción $x \mapsto S_x\varphi$ es inyectiva. Pues si $S_x\varphi = S_y\varphi$ entonces $x + \pi(\varphi) = \pi(S_x\varphi) = \pi(S_y\varphi) = y + \pi(\varphi)$, luego $x = y$. Por lo cuál esta acción de $\mathbf{X}$ en $H_b^*$ tiene el efecto de partir $H_b^*$ en órbitas, donde cada una es una copia de $\mathbf{X}$.

El siguiente teorema muestra que la extensión natural de $f \in H_b$ a $H_b^*$, dada por $\hat{f}$, pertenece a $H_b$ sobre cada una de las órbitas. Podemos pensar así que $\{S_x(\varphi) : x \in \mathbf{X}\}$ es una parametrización de $\mathbf{X}$ adentro de $H_b^*$.

**Teorema 4.44.** *Dados $\varphi \in H_b^*$ fijo y $f \in H_b$, la función*

$$x \mapsto (S_x\varphi)(f) = \varphi(T_xf), \quad x \in \mathbf{X}$$

*pertenece a $H_b$.*

*Demostración.* En 4.42 vimos que $|(S_x\varphi)(f)| \leqslant C\|f\|_{R(\varphi)+\varepsilon+\|x\|}$. Entonces

$$|(S_x\varphi)(f)| \leqslant C\|f\|_{R(\varphi)+\varepsilon+r}, \text{ para todo } \|x\| \leqslant r.$$

Luego, $(S_x\varphi)(f)$ es acotada sobre subconjuntos acotados de $\mathbf{X}$.

Para ver que la función es analítica, tenemos que ver que $(S_x\varphi)(f) = \varphi(T_xf)$ depende analíticamente de $x$. Como toda $f \in H_b$ mirada sobre los acotados de $\mathbf{X}$ es límite uniforme de polinomios, basta ver que $\varphi(T_xP)$ depende analíticamente de $x$ para todo $P \in \mathcal{P}_m$ pues si $P_m \to f$ uniformemente sobre acotados, entonces dado $x \in sB$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\varphi(T_xP_m) - \varphi(T_xf)| &= |\varphi(T_x(P_m - f))| \leqslant C\|T_x(P_m - f)\|_r \\ &= C \sup_{\|y\| \leqslant r} |(P_m - f)(x + y)| \leqslant C\|P_m - f\|_{r+s} \to 0, \end{aligned}$$

luego $\varphi(T_x P_m) \to \varphi(T_x f)$ uniformemente sobre acotados.

Sea entonces $P \in \mathcal{P}_m$ y consideremos su forma $m$-lineal simétrica asociada $F$. Entonces

$$(T_x P)(y) = P(x+y) = F(x+y, \dots, x+y)$$

es una suma de términos de la forma $F(x, \dots, x, y, \dots, y)$ por ser multilineal y simétrica. Si $\varphi \in H_b^*$ opera sobre funciones que dependen de la variable $y$, entonces

$$x_1, \dots, x_k \mapsto \varphi(F(x_1, \dots, x_k, y, \dots, y))$$

es una forma $k$-lineal simétrica y continua sobre $\mathbf{X}$, luego su restricción a la diagonal

$$x \mapsto \varphi(F(x, \dots, x, y, \dots, y))$$

es analítica sobre $\mathbf{X}$. Por último como $\varphi(T_x P)$ es suma de dichas funciones, resulta que depende analíticamente de $x$. □

El Teorema 4.44 nos permite extender la acción de $\mathbf{X}$ en $H_b^*$ a una convolución de todo $H_b^*$ en sí mismo, como sigue.

**Definición 4.45.** *Dados $\varphi, \theta \in H_b^*$, definimos la convolución $\varphi * \theta \in H_b^*$ como*

$$(\varphi * \theta)(f) = \varphi(\theta(T_x f)), \quad f \in H_b;$$

*donde identificamos $\theta(T_x f)$ con la función $x \mapsto \theta(T_x f) \in H_b$.*

*Si tomamos la función auxiliar $g$ definida por*

$$g(x) = \theta(T_x f) = (S_x \theta)(f), \quad x \in \mathbf{X},$$

*por el Teorema 4.44, $g \in H_b$ y entonces $\varphi * \theta$ viene dada por*

$$(\varphi * \theta)(f) = \varphi(g).$$

Los siguientes lemas extienden lo hecho para la acción de $\mathbf{X}$ en $H_b^*$ a la convolución.

**Lema 4.46.** *Si $\varphi, \theta \in H_b^*$, entonces $\varphi * \theta \in H_b^*$ y*

$$R(\varphi * \theta) \leqslant R(\varphi) + R(\theta).$$

*Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, existen $C, D > 0$ tales que

$$|\varphi(f)| \leqslant C\|f\|_{R(\varphi)+\varepsilon}, \quad f \in H_b \ \ y$$

$$|\theta(f)| \leqslant D\|f\|_{R(\theta)+\varepsilon}, \quad f \in H_b.$$

Sea $f \in H_b$ y tomemos $g \in H_b$ su función auxiliar como en la Definición 4.45. Entonces

$$|g(x)| = |\theta(T_x f)| \leqslant D\|T_x f\|_{R(\theta)+\varepsilon} \leqslant D\|f\|_{R(\theta)+\|x\|+\varepsilon}.$$

Luego como $\|g\|_{\|x\|} = \sup\{|g(y)| : \|y\| \leqslant \|x\|\} \leqslant D\|f\|_{R(\theta)+\|x\|+\varepsilon}$, tenemos que

$$\|g\|_{R(\varphi)+\varepsilon} \leqslant D\|f\|_{R(\varphi)+R(\theta)+2\varepsilon}$$

y, entonces,

$$|(\varphi * \theta)(f)| = |\varphi(g)| \leqslant C\|g\|_{R(\varphi)+\varepsilon} \leqslant CD\|f\|_{R(\varphi)+R(\theta)+2\varepsilon}.$$

Luego

$$R(\varphi * \theta) \leqslant R(\varphi) + R(\theta) + 2\varepsilon, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Por lo tanto

$$R(\varphi * \theta) \leqslant R(\varphi) + R(\theta).$$

□

El siguiente Lema muestra que los elementos de $\mathbf{X}$ y los de $H_b^*$ conmutan bajo la convolución.

**Lema 4.47.** *Si $\theta \in H_b^*$ e $y \in \mathbf{X}$, entonces*

$$\delta_y * \theta = \theta * \delta_y = S_y \theta.$$

*En particular,*

$$\delta_0 * \theta = \theta * \delta_0 = \theta, \quad \theta \in H_b^*.$$

*Demostración.* Sea $f \in H_b$. Entonces

$$(\delta_y * \theta)(f) = \delta_y(g) = g(y),$$

donde $g(x) = \theta(T_x f)$ es la función auxiliar. Luego

$$(\delta_y * \theta)(f) = g(y) = \theta(T_y f) = (S_y \theta)(f).$$

Por otro lado,

$$(\theta * \delta_y)(f) = \theta(\tilde{g})$$

donde $\tilde{g}(x) = \delta_y(T_x f) = T_x f(y) = f(x+y) = T_y f(x)$ es la función auxiliar. Luego

$$(\theta * \delta_y)(f) = \theta(\tilde{g}) = \theta(T_y f) = (S_y\theta)(f).$$

Por lo tanto $\delta_y * \theta = \theta * \delta_y = S_y\theta$.

En particular, como vale que $(S_0\theta)(f) = \theta(T_0 f) = \theta(f)$, podemos concluir entonces que $\delta_0 * \theta = \theta * \delta_0 = S_0\theta = \theta$. $\square$

**Lema 4.48.** *La operación de convolución es asociativa, o sea*

$$\varphi * (\theta * \psi) = (\varphi * \theta) * \psi, \text{ para todo } \varphi, \theta, \psi \in H_b^*.$$

*Demostración.*

$$(\varphi * (\theta * \psi))(f) = \varphi((\theta * \psi)(T_y f)) = \varphi(\theta(\psi(T_x T_y f))),$$

donde $\varphi$ actúa sobre funciones de $y$ y $\theta$ sobre funciones de $x$. Por otro lado

$$((\varphi * \theta) * \psi)(f) = (\varphi * \theta)(\psi(T_x f)) = \varphi(\theta(T_y \psi(T_x f))).$$

Ahora bien $T_y\psi(T_x f) = T_y g(x)$, donde $g(x) = \psi(T_x f)$, entonces

$$T_y\psi(T_x f) = T_y g(x) = g(x+y) = \psi(T_{x+y} f) = \psi(T_x T_y f).$$

Luego

$$\varphi * (\theta * \psi) = (\varphi * \theta) * \psi.$$

$\square$

El desarrollo de cada $f \in H_b$ en serie de Taylor nos da una descomposición de $H_b$ en una suma directa donde las combinaciones lineales pueden ser infinitas

$$H_b \cong \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m.$$

Hay una descomposición similar para $H_b^*$,

$$H_b^* \cong \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m^*,$$

donde llamamos $\mathcal{P}_m^*$ al subespacio de $H_b^*$ que anula todo $P \in \mathcal{P}_k$ para $k \neq m$. Luego, por ejemplo, $\mathcal{P}_0^* \cong \mathbb{C}$ es el subespacio de dimensión uno generado por $\delta_0$ y $\mathcal{P}_1^* \cong \mathbf{X}^{**}$. Para $\varphi \in H_b^*$, llamamos $\varphi_m$ a la restricción de $\varphi$ sobre $\mathcal{P}_m$, si definimos $\varphi_m$ como 0 sobre $\mathcal{P}_k$ con $k \neq m$, entonces $\varphi_m$ pertenece a $H_b^*$. Con esta definición de $\varphi_m$ tenemos, por ejemplo, que $\varphi_0 = \varphi(1)\delta_0$ pues $\varphi_0(f) = \varphi_0(\sum_m f_m) = \varphi_0(f_0) = \varphi_0(\delta_0(f)) = \varphi_0(1)\delta_0(f)$.

**Teorema 4.49.** *Sean $\varphi \in \mathcal{P}_j^*$ y $\theta \in \mathcal{P}_k^*$. Entonces $\varphi * \theta$ pertenece a $\mathcal{P}_{j+k}^*$.*

*Además, si $P \in \mathcal{P}_{j+k}$ y $F$ es la forma $(j+k)$-lineal simétrica asociada, entonces*

$$(\varphi * \theta)(P) = \frac{(j+k)!}{j!k!} \varphi^{(x)}(\theta^{(y)}(F(x, \dots, x, y, \dots, y))),$$

*donde $x$ aparece $j$ veces e $y$ aparece $k$ veces y donde $\varphi$ opera sobre funciones que dependen de la variable $x$ y $\theta$ sobre funciones que dependen de la variable $y$.*

*Demostración.* Sea $m \geqslant 0$ y sea $P \in \mathcal{P}_m$ con $F$ la forma $m$-lineal simétrica asociada. Entonces

$$(T_x P)(y) = F(x+y, \dots, x+y) = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!(m-i)!} F(x, \dots, x, y, \dots, y),$$

donde $x$ aparece $i$ veces e $y$ aparece $m-i$ veces en el sumando $i$-ésimo. Entonces $\theta^{(y)}$ aplicada al sumando $i$-ésimo es cero salvo cuando $m - i = k$. Luego

$$\theta^{(y)}(T_x P) = \frac{m!}{(m-k)!k!} \theta^{(y)}(F(x, \dots, x, y, \dots, y)),$$

donde $x$ aparece $m-k$ veces e $y$ aparece $k$ veces. Si aplicamos ahora $\varphi^{(x)}$, da cero como resultado salvo que $m - k = j$. Luego $\varphi * \theta = 0$ sobre $\mathcal{P}_m$ para $m \neq j + k$, por lo tanto $\varphi * \theta$ pertenece a $\mathcal{P}_{j+k}^*$. En el caso donde $m = j + k$ obtenemos la fórmula

$$(\varphi * \theta)(P) = \frac{(j+k)!}{j!k!} \varphi^{(x)}(\theta^{(y)}(F(x, \dots, x, y, \dots, y))).$$

□

Si consideramos los desarrollos de $\varphi, \theta \in H_b^*$ tenemos $\varphi = \sum_k \varphi_k$ y $\theta = \sum_j \theta_j$, entonces la proyección sobre $\mathcal{P}_m^*$ de la convolución $\varphi * \theta$ viene dada por $\sum_{k=0}^{m} \varphi_k * \theta_{m-k}$. Luego tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.50.** *Sean $\varphi, \theta, \psi \in H_b^*$. Entonces $\varphi * \theta = \psi$ si y sólo si las proyecciones sobre $\mathcal{P}_m^*$ satisfacen*

$$\sum_{k=0}^{m} \varphi_k * \theta_{m-k} = \psi_m, \quad m \geqslant 0.$$

Observemos que, por el Lema 4.47, el término que involucra a $\varphi_m$ en la $m$-ésima ecuación es

$$\varphi_m * \theta_0 = \theta(1)\varphi_m * \delta_0 = \theta(1)\varphi_m.$$

Luego si $\theta(1) \neq 0$, podemos usar este sistema de ecuaciones para escribir cada $\varphi_m$ en función de $\theta$ y $\psi$.

**Corolario 4.51.** *Sean $\theta, \psi \in H_b^*$ fijos con $\theta(1) \neq 0$. Entonces la ecuación $\varphi * \theta = \psi$ tiene a lo sumo una solución $\varphi \in H_b^*$. En el caso que tenga dicha solución $\varphi$, sus proyecciones $\varphi_m$ sobre $\mathcal{P}_m^*$ quedan determinadas recursivamente por las siguientes ecuaciones*

$$\theta(1)\varphi_m + \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k * \theta_{m-k} = \psi_m, \quad m \geqslant 0.$$

**Observación 4.52.** De la misma forma, si tomamos $\varphi, \psi \in H_b^*$ fijos, con $\varphi(1) \neq 0$, la ecuación $\varphi * \theta = \psi$ tiene a lo sumo una solución $\theta \in H_b^*$, que puede ser obtenida resolviendo recursivamente el sistema lineal asociado para cada $\theta_m$.

Veamos ahora qué conclusiones podemos sacar si nos restringimos a $M_b$.

**Lema 4.53.** *Sean $\varphi, \theta \in M_b$, entonces*

$$\pi(\varphi * \theta) = \pi(\varphi) + \pi(\theta).$$

*Demostración.* Sea $L \in \mathbf{X}^*$. Entonces la función auxiliar asociada a $f = L$ viene dada por $g(x) = \theta(T_x L) = \theta(L(x) + L) = L(x) + \theta(L) = L(x) + \pi(\theta)(L)$. Luego,

$$(\varphi * \theta)(L) = \varphi(g) = \varphi(L) + \varphi(\pi(\theta)(L)) = \pi(\varphi)(L) + \pi(\theta)(L).$$

Por lo tanto

$$\pi(\varphi * \theta) = \pi(\varphi) + \pi(\theta).$$

□

**Teorema 4.54.** *Si $\varphi, \theta \in M_b$ entonces $\varphi * \theta$ pertenece a $M_b$.*

*Demostración.* Sean $f, h \in H_b$, entonces

$$\begin{aligned}(\varphi * \theta)(f.h) &= \varphi(\theta(T_x(f.h))) = \varphi(\theta(T_x f.T_x h)) = \varphi(\theta(T_x f).\theta(T_x h)) \\ &= \varphi(\theta(T_x f))\varphi(\theta(T_x h)) = (\varphi * \theta)(f)(\varphi * \theta)(h).\end{aligned}$$

Luego $\varphi * \theta$ pertenece a $M_b$. □

Luego la operación de convolución hace de $M_b$ un semigrupo, donde $\delta_0$ es la identidad. Además como

$$\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}, \quad x, y \in \mathbf{X},$$

podemos pensar al espacio $\mathbf{X}$ como subgrupo del semigrupo y como vimos en el Lema 4.47 $\delta_x * \theta = \theta * \delta_x$ para todo $\theta \in M_b$, concluimos que $\mathbf{X}$ queda incluido en el centro del semigrupo.

En general hay elementos del semigrupo que no tienen inverso, por lo que el semigrupo no es un grupo.

Ahora vamos a estudiar los morfismos $\delta_z$ con $z \in \mathbf{X}^{**}$. Vimos en el Lema 4.13 que

$$(\delta_z)_1 = z \in \mathbf{X}^{**}.$$

Queremos ahora identificar sus otros componentes.

**Lema 4.55.** *Sean $z_1, \ldots, z_m \in \mathbf{X}^{**}$ y sea $P \in \mathcal{P}_m$, tomemos $F$ la forma $m$-lineal simétrica asociada y $\hat{F}$ la extensión de $F$ a $\mathbf{X}^{**}$ que se obtiene extendiendo por continuidad respecto a la topología débil-$*$, una variable por vez, de la última a la primera. Entonces*

$$(z_1 * \cdots * z_m)(P) = m!\hat{F}(z_1, \ldots, z_m).$$

*Demostración.* Para probar este resultado, hagamos inducción sobre $m$.

$m = 1$: $z(P) = \delta_z(P) = \hat{F}(z)$.

Supongamos entonces que vale para $m-1$ y consideremos la función auxiliar $g$ como

$$g(x) = (z_2 * \cdots * z_m)(T_x P) = (z_2 * \cdots * z_m)(F(x+y, \ldots, x+y)).$$

Desarrollando la expresión de $F$ y usando que $z_2 * \cdots * z_m \in \mathcal{P}_{m-1}^*$ anula todos los términos salvo los $m$ términos que son $(m-1)$-homogéneos en $y$, tenemos que

$$g(x) = m(z_2 * \cdots * z_m)(F(x, y, \ldots, y)).$$

Llamemos $F_Q(y_2, \ldots, y_m) = F(x, y_2, \ldots, y_m)$, que es una forma $(m-1)$-lineal para cada $x$ fijo.

Por hipótesis inductiva obtenemos

$$g(x) = m(m-1)!\hat{F_Q}(z_2, \ldots, z_m).$$

Ahora bien, si consideramos $\hat{F}$ la extensión de $F$ a $\mathbf{X}^{**}$, por unicidad de la extensión tenemos que $\hat{F}(x, z_2, \ldots, z_m) = \hat{F_Q}(z_2, \ldots, z_m)$ para cada $x \in \mathbf{X}$. Por lo tanto tenemos que

$$g(x) = m!\hat{F}(x, z_2, \ldots, z_m).$$

Luego

$$(z_1 * \cdots * z_m)(P) = z_1(g) = m!\hat{F}(z_1, \ldots, z_m).$$

$\square$

En particular tenemos para $P \in \mathcal{P}_m$ que

$$\delta_z(P) = \hat{P}(z) = \hat{F}(z, \ldots, z) = \frac{1}{m!}(z * \cdots * z)(P).$$

Esto nos da una expresión para la proyección de $\delta_z$ sobre $\mathcal{P}_m^*$:

$$(\delta_z)_m = \frac{1}{m!} z * \cdots * z \quad (m \textit{ veces}).$$

Vamos a notar $z * \cdots * z$ $m$ veces como $z^{*m}$. Con esta notación $z^{*0} = \delta_0$. Luego tenemos la siguiente fórmula

$$\delta_z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^{*m}, \quad z \in \mathbf{X}.$$

O, dicho de otra forma,

$$\delta_z = \exp(*z), \quad z \in \mathbf{X}^{**}.$$

Estudiemos ahora la conmutatividad de los $\delta_z$, para elementos de $\mathcal{X}^{**}$.

**Teorema 4.56.** *Dados $z, w \in \mathbf{X}^{**}$ fijos. Son equivalentes:*

*(1)* $z * w = w * z$,

*(2)* $\delta_z * \delta_w = \delta_w * \delta_z$,

*(3)* $\delta_{z+w} = \delta_z * \delta_w$.

*Demostración.* Tenemos que $\delta_z * \delta_w = \sum_j \frac{1}{j!} z^{*j} * \sum_k \frac{1}{k!} w^{*k}$. Entonces

$$(\delta_z * \delta_w)_2 = \sum_{j+k=2} \frac{z^{*j} w^{*k}}{j!k!} = \frac{1}{2}(z * z + 2z * w + w * w),$$

análogamente

$$(\delta_w * \delta_z)_2 = \frac{1}{2}(z * z + 2w * z + w * w),$$

y además

$$(\delta_{z+w})_2 = \frac{1}{2}(z + w) * (z + w) = \frac{1}{2}(z * z + z * w + w * z + w * w),$$

pues dado $P \in \mathcal{P}_2$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}((z + w) * (z + w))(P) &= \frac{1}{2} 2! \hat{F}(z + w, z + w) \\
&= (\hat{F}(z, z) + \hat{F}(z, w) + \hat{F}(w, z) + \hat{F}(w, w)) \\
&= \frac{1}{2}((z * z)(P) + (z * w)(P) + (w * z)(P) + (w * w)(P)),
\end{aligned}$$

donde $\hat{F}$ es la extensión sobre $\mathbf{X}^{**}$ de $F$, la forma bilineal simétrica asociada a $P$.

Ahora bien, si vale (2) o vale (3), entonces vale (1). Recíprocamente si vale (1), claramente vale (2) y como vale también que

$$(\delta_z * \delta_w)_m = \sum_{j+k=m} \frac{z^{*j} w^{*k}}{j!k!} = \frac{(z + w)^{*m}}{m!} = (\delta_{z+w})_m$$

se deduce entonces que (3) es cierto. $\square$

Podemos concluir entonces, que en general $z*w \neq w*z$. Por ejemplo si $\mathbf{X} = \ell^1$ (ver Teorema 4.64 y Ejemplo 4.66).

Por otro lado, podemos pensar en una acción de $\mathbf{X}^{**}$ sobre $M_b$ que consiste en hacer convolución con $\delta_z$. Esto lo podemos usar para ver que cada punto de $M_b$ esta incluido en una copia de $\mathbf{X}^{**}$, como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 4.57.** *Sea $\theta \in M_b$ fijo. Entonces la correspondencia de $\mathbf{X}^{**}$ en $M_b$ dada por $z \to \delta_z * \theta$ es inyectiva y continua respecto de la topología de la norma en $\mathbf{X}^{**}$. Además, si $f \in H_b$, la función $x \mapsto \theta(T_x f)$ pertenece a $H_b(\mathbf{X})$ y su extensión canónica sobre $\mathbf{X}^{**}$ viene dada por la función $z \mapsto (\delta_z * \theta)(f)$ que pertenece a $H_b(\mathbf{X}^{**})$.*

*Demostración.* Por Lema 4.53 tenemos que $\pi(\delta_z * \theta) = \pi(\delta_z) + \pi(\theta) = z + \pi(\theta)$, luego la correspondencia es inyectiva. Veamos ahora que la aplicación $z \mapsto \delta_z * \theta$ es continua. Sea $z \in \mathbf{X}^{**}$ y sea $\{z_\alpha\} \subset \mathbf{X}^{**}$ tal que $z_\alpha \to z$, queremos ver $\delta_{z_\alpha} * \theta \to \delta_z * \theta$ en $M_b$, o sea, que $|\delta_{z_\alpha} * \theta(f) - \delta_z * \theta(f)| \to 0$ para toda $f \in H_b$. Ahora bien, dado $f \in H_b$, consideremos la función auxiliar $g \in H_b$ dada por $g(x) = \theta(h)$ donde $h(x) = T_x f$, luego

$$|\delta_{z_\alpha} * \theta(f) - \delta_z * \theta(f)| = |\delta_{z_\alpha}(g) - \delta_z(g)| = |\hat{g}(z_\alpha) - \hat{g}(z)| \to 0,$$

pues $\hat{g}$ es continua (Proposición 3.59).

Sabemos, por el Teorema 4.44, que la función $x \mapsto \theta(T_x f)$ pertenece a $H_b(\mathbf{X})$ y, por definición de $\delta_z$, la extensión canónica a $\mathbf{X}^{**}$ viene dada por $z \mapsto \delta_z(\theta(T_x f)) = (\delta_z * \theta)(f)$, luego la aplicación $z \mapsto (\delta_z * \theta)$ pertenece a $H_b(\mathbf{X}^{**})$. $\square$

Vamos a llamar al conjunto $\{\delta_z * \theta : \ z \in \mathbf{X}^{**}\}$, la trayectoria determinada por $\theta$ en $M_b$. En el caso que $\delta_z * \delta_w = \delta_{z+w}$ para todo $z, w \in \mathbf{X}^{**}$ vale que dos trayectorias coinciden o son disjuntas pues si $\delta_{w_1} * \theta = \delta_{w_2} * \varphi$, entonces $\theta = \delta_{w_2 - w_1} * \varphi$, luego $\delta_z * \theta = \delta_{z+w_2-w_1} * \varphi$, por lo que las trayectorias coinciden. Esto nos dice que las trayectorias forman una foliación de $M_b$ formada por copias de $\mathbf{X}^{**}$ donde en cada una de las hojas las funciones de $H_b$ son analíticas. O sea, se puede pensar que $\{\delta_z * \theta : \ z \in \mathbf{X}^{**}\}$ es una parametrización de $\mathbf{X}^{**}$ dentro de $M_b$.

En el caso donde existen $w_1, w_2 \in \mathbf{X}^{**}$ tales que $\theta = \delta_{w_1} * \delta_{w_2} \neq \delta_{w_1+w_2}$, como $\pi(\theta) = w_1 + w_2$, entonces $\theta$ no es ninguno de los $\delta_z$. O sea, $\theta$ no pertenece a la trayectoria determinada por $\delta_0$. Sin embargo las trayectorias de $\delta_0$ y $\theta$ no son disjuntas pues $\delta_{w_2} = \delta_{-w_1} * \theta = \delta_{w_2} * \delta_0$. Por lo que $\delta_{w_2}$ pertenece a copias analíticas de $\mathbf{X}^{**}$ que estan orientadas en distintas direcciones.

## 4.6. Continuidad débil-$*$ en cada variable de formas multilineales

Dado $F$ una forma $m$-lineal en $\mathbf{X}$, vimos que la podemos extender a una única forma $m$-lineal $\hat{F}$ en $\mathbf{X}^{**}$ con la siguiente prepiedad:

para cada $1 \leqslant j \leqslant m$, y dados $x_1, \ldots, x_{j-1} \in \mathbf{X}$ y $z_{j+1}, \ldots, z_m \in \mathbf{X}^{**}$ fijos, la función

$$z \to \hat{F}(x_1, \ldots, x_{j-1}, z, z_{j+1}, \ldots, z_m),$$

con $z \in \mathbf{X}^{**}$, es débil-$*$ continua. Y para obtener $\hat{F}$, extendemos por continuidad débil-$*$, una variable a la vez, desde la última a la primera. Observamos anteriormente que esta extensión depende del orden en que se extienden las variables, la pregunta que queremos responder en este capítulo es: ¿cuándo se llega a la misma extensión $\hat{F}$ extendiendo las variables en otro orden? Esta pregunta es equivalente a preguntarse cuándo la extensión $\hat{F}$ es débil-$*$ continua en cada variable.

Observemos que si existiera alguna extensión débil-$*$ continua en cada variable de $F$ a $\mathbf{X}^{**}$, entonces la extensión es única.

**Proposición 4.58.** *Toda forma $m$-lineal continua en $\mathbf{X}$ se extiende a una forma $m$-lineal débil-$*$ continua en cada variable sobre $\mathbf{X}^{**}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ si y sólo si toda forma bilineal continua en $\mathbf{X}$ se extiende a una forma bilineal débil-$*$ continua en cada variable sobre $\mathbf{X}^{**}$.*

*Demostración.* Supongamos que toda forma bilineal en $\mathbf{X}$ se extiende a una forma bilineal débil-$*$ continua en cada variable sobre $\mathbf{X}^{**}$. Consideremos la extensión de una forma $m$-lineal obtenida extendiendo una variable por vez, en algún orden. La hipótesis dice que si cambiamos el orden de dos variables consecutivas en la extensión, obtenemos la misma extensión. Por lo que podemos cambiar el orden de las variables consecutivas en la extensión sucesivas veces y llegar a cualquier orden de las variables y siempre obtenemos la misma extensión. Luego es débil-$*$ continua en cada variable. □

Un operador lineal $T$ de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{X}^*$ determina una forma bilineal $F$ en $\mathbf{X}$ mediante la fórmula

$$F(x, y) = Ty(x) = \langle x, Ty \rangle, \quad x, y \in \mathbf{X}.$$

**Observación 4.59.** *Toda forma bilineal $F : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ proviene de un operador lineal $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ y la correspondencia $T \to F$ es un isomorfismo isométrico. Pues*

$$\|T\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |Ty(x)| = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |F(x,y)| = \|F\|.$$

Sea $F_1$ la extensión de la forma bilineal simétrica $F(x,y)$ a $\mathbf{X}^{**}$ que se obtiene extendiendo por continuidad débil-$*$ primero respecto de $x$ y luego respecto de $y$, y sea $F_2$ la extensión de la forma bilineal $F(x,y)$ a $\mathbf{X}^{**}$ que se obtiene extendiendo por continuidad débil-$*$ primero respecto de $y$ y luego respecto de $x$. Entonces tenemos que $F_1(z,w) = F_2(w,z)$, con $z, w \in \mathbf{X}^{**}$, pues $F_1(z,w) = \lim\limits_{y_\alpha \to w} \lim\limits_{x_\alpha \to z} F(x_\alpha, y_\alpha) = \lim\limits_{y_\alpha \to w} \lim\limits_{x_\alpha \to z} F(y_\alpha, x_\alpha) = F_2(w,z)$.

Nuestro objetivo es ver cuándo $F_1$ coincide con $F_2$, consideremos entonces los operadores lineales de $\mathbf{X}^{**}$ en $\mathbf{X}^{***}$ corespondientes a $F_1$ y a $F_2$ y veamos si coinciden. Para esto, notemos con $J$ la inclusión canónica de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{X}^{**}$ y con $J^*$ la correspondiente proyección de $\mathbf{X}^{***}$ en $\mathbf{X}^*$.

**Lema 4.60.** *Supongamos que la forma bilineal continua $F$ en $\mathbf{X}$ se corresponde con el operador lineal de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{X}^*$, $T$, y sean $F_1$ y $F_2$ las extensiones de $F$ a $\mathbf{X}^{**}$ como antes. Entonces los operadores lineales de $\mathbf{X}^{**}$ en $\mathbf{X}^{***}$ correspondientes a $F_1$ y a $F_2$ estan determinados por*

$$F_1(z,w) = \langle z, T^{**}w \rangle, \quad z, w \in \mathbf{X}^{**},$$

$$F_2(z,w) = \langle z, J^*T^{**}w \rangle, \quad z, w \in \mathbf{X}^{**},$$

*donde $J^*$ es la proyección canónica de $\mathbf{X}^{***}$ en $\mathbf{X}^*$.*

*Demostración.* Para ver la primera igualdad, basta ver que para cada $y \in \mathbf{X}$, la aplicación dada por $z \mapsto \langle z, T^{**}\hat{y} \rangle$ resulta débil-$*$ continua en $\mathbf{X}^{**}$ y que para cada $z \in \mathbf{X}^{**}$, la aplicación $w \mapsto \langle z, T^{**}w \rangle$ es débil-$*$ continua en $\mathbf{X}^{**}$. Ahora bien,

$$\langle z, T^{**}\hat{y} \rangle = T^{**}\hat{y}(z) = \hat{y}(T^*z) = T^*z(y) = z(Ty) = \langle Ty, z \rangle,$$

con $Ty \in \mathbf{X}^*$, o sea, la aplicación manda $z$ en $z(Ty)$ por lo que es débil-$*$ continua en $\mathbf{X}^{**}$. Por otro lado,

$$\langle z, T^{**}w \rangle = T^{**}w(z) = w(T^*z) = \langle T^*z, w \rangle,$$

con $T^*z \in \mathbf{X}^*$, por lo que la aplicación resulta débil-$*$ continua en $\mathbf{X}^{**}$.

Procedemos de la misma manera para probar la segunda igualdad. Dado $x \in \mathbf{X}$, la aplicación

$$w \mapsto \langle x, J^* T^{**} w\rangle = J^* T^{**} w(x) = \hat{x}(J^* T^{**} w) = T^{**} w(\hat{x}) = w(T^* \hat{x}) = \langle T^* \hat{x}, w\rangle$$

es débil-$*$ continua en $\mathbf{X}^{**}$ pues $T^* \hat{x} \in \mathbf{X}^*$. Por último, dado $w \in \mathbf{X}^{**}$, la aplicación

$$z \mapsto \langle z, J^* T^{**} w\rangle$$

es débil-$*$ continua en $\mathbf{X}^{**}$ pues $J^* T^{**} w \in \mathbf{X}^*$. $\square$

**Lema 4.61.** *Sea $F$ una forma bilineal continua y simétrica en $\mathbf{X}$, con las respectivas extensiones $F_1$ y $F_2$ del Lema 4.60, y sea $P$ el polinomio 2-homogéneo en $\mathbf{X}$ asociado a $F$. Entonces*

$$\delta_{z+w}(P) = (\delta_z * \delta_w)(P) + F_1(z, w) - F_2(z, w), \quad z, w \in \mathbf{X}^{**}.$$

*Demostración.* Sean $x, y \in \mathbf{X}$,

$$\begin{aligned} (T_x P)(y) &= P(x+y) = F(x+y, x+y) \\ &= F(x,x) + F(y,y) + F(x,y) + F(y,x) \\ &= P(x) + P(y) + 2F(x,y). \end{aligned}$$

Luego la función auxiliar $g$ como en la Definición 4.45 viene dada por

$$g(x) = \delta_w(T_x P) = P(x) + \hat{P}(w) + 2F_2(x, w).$$

Luego

$$(\delta_z * \delta_w)(P) = \delta_z(g) = \hat{P}(z) + \hat{P}(w) + 2F_2(z, w).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \delta_{z+w}(P) &= \hat{P}(z+w) = F_1(z+w, z+w) \\ &= F_1(z,z) + F_1(w,w) + F_1(z,w) + F_1(w,z) \\ &= \hat{P}(z) + \hat{P}(w) + F_1(z,w) + F_2(z,w). \end{aligned}$$

Con lo que se deduce lo que queríamos. $\square$

**Definición 4.62.** *Decimos que un operador continuo $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ es simétrico si para todo $x, y \in \mathbf{X}$ vale que*

$$\langle x, Ty\rangle = \langle y, Tx\rangle.$$

Luego los operadores simétricos son lo que se corresponden con las formas bilineales simétricas.

Enunciaremos un resultado que puede verse en [24, Prop 1.2] que nos sera útil para demostrar el siguiente teorema.

**Proposición 4.63.** *Sea $F$ una forma bilineal simétrica continua. Consideremos $F_1$ la extensión del Lema 4.60. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(1) $F_1$ es simétrica.*

*(2) $F_1$ es débil-$*$ continua en cada variable sobre $\mathbf{X}^{**}$.*

*(3) El operador asociado a $F$, $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ es débil compacto.*

**Teorema 4.64.** *Las siguientes propiedades son equivalentes.*

*(1) Cada forma $m$-lineal continua y simétrica en $\mathbf{X}$ se extiende por débil-$*$ continuidad en cada variable a una forma $m$-lineal continua y simétrica en $\mathbf{X}^{**}$, para todo $m \in \mathbb{N}$.*

*(2) Toda forma bilineal continua y simétrica en $\mathbf{X}$ se extiende por débil-$*$ continuidad en cada variable a una forma bilineal continua y simétrica en $\mathbf{X}^{**}$.*

*(3) Todo operador continuo y simétrico de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{X}^*$ es débil compacto.*

*(4) Dado $z \in \mathbf{X}^{**}$, el operador de traslación $T_z$ en $H_b(\mathbf{X}^{**})$ deja $H_b(\mathbf{X})$ invariante.*

*(5) Dado $z \in \mathbf{X}^{**}$, el operador de traslación $T_z$ en $H_b(\mathbf{X}^{**})$ deja invariante al espacio de los polinomios cuadráticos en $\mathbf{X}$, $\mathcal{P}_0(\mathbf{X}) + \mathcal{P}_1(\mathbf{X}) + \mathcal{P}_2(\mathbf{X})$.*

*(6) $\delta_{z+w}(P) = (\delta_z * \delta_w)(P)$ para todo $z, w \in \mathbf{X}^{**}$ y para todo $P$ polinimio cuadrático en $\mathbf{X}$.*

*(7) $\delta_{z+w} = \delta_z * \delta_w$ para todo $z, w \in \mathbf{X}^{**}$.*

*(8)* $\delta_z * \delta_w = \delta_w * \delta_z$ *para todo* $z, w \in \mathbf{X}^{**}$.

*(9)* $z * w = w * z$ *para todo* $z, w \in \mathbf{X}^{**}$.

*Demostración.* La equivalencia de (1), (2) y (3) sale de la Proposición 4.58 y de la Proposición 4.63.

La equivalencia de (7), (8) y (9) ya la probamos en el Teorema 4.56.

(3) $\Leftrightarrow$ (5): Sea $P \in \mathcal{P}_2(\mathbf{X})$, tiene asociado una forma bilineal simétrica, que a su vez se corresponde con un operador lineal $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*$ dado por

$$P(x) = \langle x, Tx \rangle, \quad x \in \mathbf{X},$$

La extensión canónica $\hat{P}$ de $P$ a $\mathbf{X}^{**}$ viene dada por

$$\hat{P} = \langle w, T^{**}w \rangle, \quad w \in \mathbf{X}^{**},$$

por el Lema 4.60. Luego, dado $z \in \mathbf{X}^{**}$ fijo,

$$T_z(P)(w) = \hat{P}(w+z) = \hat{P}(w) + \langle w, T^{**}z \rangle + \langle z, T^{**}w \rangle + \langle z, T^{**}z \rangle.$$

Ahora bien, $\hat{P}(w) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{X})$, y $\langle z, T^{**}z \rangle \in \mathcal{P}_0(\mathbf{X})$, pues $z$ está fijo y como $T^*z \in \mathbf{X}^*$, tenemos que $\langle z, T^{**}w \rangle = \langle T^*z, w \rangle \in \mathbf{X}^* = \mathcal{P}_1(\mathbf{X})$. Luego el polinomio $w \mapsto \hat{P}(w+z)$ es la extensión canónica de un polinomio en $\mathbf{X}$ si y sólo si el funcional lineal $w \mapsto \langle w, T^{**}z \rangle$ pertenece a $\mathbf{X}^*$, o sea, si $T^{**}z$ pertenece a $\mathbf{X}^*$. Y esto ocurre para todo $z \in \mathbf{X}^{**}$ si y sólo si $T$ es débil compacto.

(4) $\Rightarrow$ (5) es trivial.

(5) $\Rightarrow$ (4): Sea $P \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$, y sea $\hat{P}$ la extensión canónica de $P$ a $\mathbf{X}^{**}$, como (5) y (1) son equivalentes, $\hat{P}$ es la restricción a la diagonal de una forma $m$-lineal simétrica y débil-$*$ continua en cada variable $\hat{F}$ sobre $\mathbf{X}^{**}$. Usando la linealidad y la simetría, tenemos que, si fijamos $z \in \mathbf{X}^{**}$

$$\begin{aligned} T_z(P)(w) &= \hat{P}(w+z) \\ &= \hat{F}(w+z, \ldots, w+z) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \hat{F}(z, \ldots, z, w, \ldots, w), \end{aligned}$$

es una suma de términos de la forma $\hat{F}(w,\ldots,w,z,\ldots,z)$. Donde cada uno de los sumandos es la restricción a la diagonal de una forma $k$-lineal simétrica y débil-$*$ continua en cada variable sobre $\mathbf{X}^{**}$

$$(w_1,\ldots,w_k)\to \hat{F}(w_1,\ldots,w_k,z,\ldots,z).$$

Luego cada uno de los sumandos es la extensión canónica a $\mathbf{X}^{**}$ de un polinomio en $\mathcal{P}_k(\mathbf{X})$, por lo que $T_z$ deja invariante a $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ para $z\in\mathbf{X}^{**}$. Tomando límite uniforme tenemos que $T_z$ deja invariante a $H_b(\mathbf{X})$.

(6) $\Leftrightarrow$ (2): Por el Lema 4.61, tenemos que vale (6) si y sólo si las extensiones $F_1$ y $F_2$ coinciden para toda forma bilineal continua y simétrica $F$ en $\mathbf{X}$ y esto vale si y sólo si vale (2)

(7) $\Rightarrow$ (6) es trivial.

(1) $\Rightarrow$ (7): Sea $P\in\mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ y sea $\hat{F}$ su correspondiente forma $m$-lineal es débil-$*$ continua en cada variable sobre $\mathbf{X}^{**}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\delta_{z+w})(P) &= \hat{P}(z+w)\\
&= \hat{F}(z+w,\ldots,z+w)\\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\hat{F}(z,\ldots,z,w,\ldots,w),
\end{aligned}$$

donde en el $k$-ésimo sumando aparece $k$ veces la variable $z$ y $(m-k)$ veces la variable $w$. Calculemos ahora $(\delta_z*\delta_w)(P)$, sea $g$ la función auxiliar

$$\begin{aligned}
g(x) &= \delta_w(T_xP)\\
&= \delta_w(F(x+y,\ldots,x+y))\\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\hat{F}(x,\ldots,x,w,\ldots,w).
\end{aligned}$$

Como $\hat{F}$ es débil-$*$ continua en cada variable, entonces la extensión canónica a $\mathbf{X}^{**}$ de los polinomios $k$-homogéneos en la variable $x$ de cada sumando se obtiene reemplazando $x$ por $z$, entonces $\delta_{z+w}(P)=(\delta_z*\delta_w)(P)$ para todo $P\in\mathcal{P}_m$ y para todo $m\in\mathbb{N}_0$, luego vale también para toda $f\in H_b(\mathbf{X})$. $\square$

**Definición 4.65.** *Un espacio $\mathbf{X}$ que cumple con alguna de las condiciones del Teorema 4.64 se llama simétricamente regular.*

Una familia de espacios de Banach no reflexivos que son simétricamente regulares son los espacios $C(K)$, donde $K$ es compacto.

**Ejemplo 4.66.** Si tomamos $\mathbf{X} = \ell^1$ es un espacio que no es simétricamente regular. Veamos un ejemplo de una forma bilineal simétrica en $\ell^1$ que no tiene una extensión débil-$*$ continua en cada variable a $(\ell^1)^{**}$. Definimos la forma bilineal simétrica $B$ como

$$B(x, y) = \sum_{j\ par} \sum_{1 \leqslant k < j} x_j y_k + \sum_{k\ par} \sum_{1 \leqslant j < k} x_j y_k.$$

Una forma de ver que $B$ no se puede extender por continuidad débil-$*$ en cada variable es calcular el operador $T$ de $\ell^1$ en $\ell^\infty$ asociado a $B$ y ver que $T$ no es débil compacto. En efecto, si calculamos $T$ obtenemos que

$$(Te_{2m})_k = B(e_{2m}, e_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \text{ es impar y } k < 2m; \\ 0, & \text{si } k \text{ es impar y } k > 2m. \end{cases}$$

Entonces, si $\{Te_{2m}\}$ tuviera una subred débil convergente, el límite $a$ debería tener sus coordenadas impares iguales a 1. Ahora bien, si definimos un funcional lineal sobre el subespacio $S = \{x \in \ell^\infty : x_{2n+1} \text{ tiene límite}\}$ como $\varphi(x) = \lim x_{2n+1}$ y lo extendemos a $\ell^\infty$, tenemos que $\varphi(Te_{2m}) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ por lo que $\varphi$ evaluado en la subred vale siempre 0, pero $\varphi(a) = 1$. Luego $\{Te_{2m}\}$ no es débil precompacto en $\ell^\infty$.

## 4.7. Acción de $\mathbf{X}^{**}$ en $M_b$

En esta Sección veremos que si $\mathbf{X}$ es un espacio simétricamente regular, podemos extender la noción de acción de $\mathbf{X}$ sobre $M_b$ estudiada en la Sección 4.4 a $\mathbf{X}^{**}$.

Supongamos que $\mathbf{X}$ es un espacio simétricamente regular, o sea, dado $z \in \mathbf{X}^{**}$, el operador de traslación $T_z : H_b(\mathbf{X}^{**}) \longrightarrow H_b(\mathbf{X}^{**})$ deja a $H_b(\mathbf{X})$ invariante. Entonces nos podemos restringir este operador al espacio $H_b(\mathbf{X})$ y definir el operador $T'_z = T_z|_{H_b(\mathbf{X})} : H_b(\mathbf{X}) \longrightarrow H_b(\mathbf{X})$. Consideremos ahora su aplicación dual $S'_z : H_b^*(\mathbf{X}) \longrightarrow H_b^*(\mathbf{X})$ y la restringimos a $M_b$, o sea

$$S'_z \varphi(f) = \varphi(T'_z f),$$

para $f \in H_b(\mathbf{X})$, $\varphi \in M_b$, $z \in \mathbf{X}^{**}$.

La correspondencia $z \mapsto S'_z$ es una representación de $\mathbf{X}^{**}$ como un grupo de homeomorfismos sobre $M_b$. Además, podemos extender los resultados de la Seccion 4.5 para $S_x$ a este contexto. O sea, tenemos que dados $\varphi \in M_b$ y $z \in \mathbf{X}^{**}$,

$$R(S'_z\varphi) \leqslant R(\varphi) + \|z\|.$$

También vale que para $z, w \in \mathbf{X}^{**}$,

$$S'_z\delta_w = \delta_{z+w},$$

y que

$$\pi(S'_z\varphi) = z + \pi(\varphi).$$

Luego como $\mathbf{X}$ es simétricamente regular tenemos que $S'_z\delta_w = \delta_z * \delta_w$ para todo $z, w \in \mathbf{X}^{**}$.

Teniendo en cuenta las dos identidades $S'_z\delta_w = \delta_{z+w} = \delta_z * \delta_w$ podemos definir dos representaciones de $M_b$ como el conjunto $\pi^{-1}(0)\times\mathbf{X}^{**}$. Una de ellas viene dada por la correspondencia de $\pi^{-1}(0) \times \mathbf{X}^{**}$ en $M_b$ dada por

$$(\psi, z) \mapsto S'_z\psi,$$

donde $\psi \in \pi^{-1}(0)$, $z \in \mathbf{X}^{**}$. Esta correspondencia es biyectiva y su inversa viene dada por

$$\varphi \mapsto (S'_{-\pi(\varphi)}\varphi, \pi(\varphi)).$$

En efecto,

$$(\psi, z) \mapsto S'_z\psi \mapsto (S'_{-\pi(S'_z\psi)}S'_z, \pi(S'_z\psi)) = (S'_{-(z+\pi(\psi))}S'_z\psi, z + \pi(\psi)) = (S'_{-z}S'_z\psi, z) = (\psi, z),$$

$$\varphi \to (S'_{-\pi(\varphi)}\varphi, \pi(\varphi)) \to S'_{\pi(\varphi)}S'_{-\pi(\varphi)}\varphi = \varphi.$$

La otra representación de $M_b$ como el conjunto $\pi^{-1}(0) \times \mathbf{X}^{**}$ viene dada por la correspondencia

$$(\theta, z) \mapsto \delta_z * \theta,$$

donde $\theta \in \pi^{-1}(0)$, $z \in \mathbf{X}^{**}$. En este caso la inversa viene dada por

$$\varphi \mapsto (\delta_{-\pi(\varphi)} * \varphi, \pi(\varphi)).$$

Cada una de estas representaciones tiene la propiedad de que la restricción de una $f \in H_b(\mathbf{X})$ a cualquiera de las $\mathbf{X}^{**}$-órbitas pertenece a $H_b(\mathbf{X})$. No sabemos cuándo esas estructuras en las órbitas son las mismas, o sea, si $S'_z\theta = \delta_z * \theta$ para todo $\theta \in M_b(\mathbf{X})$, $z \in \mathbf{X}^{**}$.

Vimos en la Sección 4.4 que $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ induce una acción sobre $H_b$. El siguiente lema muestra que si $\mathbf{X}$ es simétricamente regular, entonces $\mathcal{B}(\mathbf{X}^*)$ también induce una acción sobre $H_b$.

**Lema 4.67.** *Sea $\mathbf{X}$ un espacio simétricamente regular. Si $T \in \mathcal{B}(\mathbf{X}^*)$, entonces el operador de composición $f \mapsto \hat{f} \circ T^*$ sobre $H_b(\mathbf{X}^{**})$ deja a $H_b(\mathbf{X})$ invariante.*

*Demostración.* Queremos ver que dada $f \in H_b(\mathbf{X})$, vale que $\hat{f} \circ T^*$ es la extensión a $\mathbf{X}^{**}$ de alguna función de $H_b(\mathbf{X})$. Como la aplicación $f \mapsto \hat{f}$ es continua (Proposición 3.59) basta ver que esta propiedad se cumple para polinomios homogéneos. Sea entonces $f \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ y sea $\hat{f} \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X}^{**})$ su extensión. Consideremos $F$ la forma $m$-lineal simétrica sobre $\mathbf{X}^{**}$ asociada a $\hat{f}$. Entonces tenemos que $\hat{f} \circ T^* \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X}^{**})$ es el polinomio asociado a la forma $m$-lineal simétrica $F \circ T^*$, donde $F \circ T^*(x_1, \ldots, x_m) = F(T^*(x_1), \ldots, T^*(x_m))$. Ahora bien, como $T^*$ es el operador adjunto de $T$, entonces es $w^* - w^*$ continuo, luego $F \circ T^*$ es débil-$*$ continua en cada variable, ya que $F$ lo es. Luego, si $P \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ es el polinomio asociado a la forma $m$-lineal simétrica $(F \circ T^*)|_{\mathbf{X}}$, entonces $\hat{P}$ es el polinomio asociado a $F \circ T^*$. Por lo tanto, $\hat{P} = \hat{f} \circ T^*$. $\square$

**Observación 4.68.** También vale el recíproco del lema anterior: si $S \in \mathcal{B}(\mathbf{X}^{**})$ cumple que el operador de composición $f \to f \circ S$ en $H_b(\mathbf{X}^{**})$ deja a $H_b(\mathbf{X})$ invariante, entonces $S = T^*$ para un operador $T \in \mathcal{B}(\mathbf{X}^*)$.

De hecho, $\gamma \in \mathbf{X}^*$ entonces $\gamma \circ S \in \mathbf{X}^{***} \subset H_b(\mathbf{X}^{**})$ es extensión canónica, por lo que $\gamma \circ S$ es débil-$*$ continuo. Como esto es cierto para todo $\gamma \in \mathbf{X}^*$, tenemos que $S$ es $w^* - w^*$ continuo. Luego, existe $T \in \mathcal{B}(\mathbf{X}^*)$ tal que $S = T^*$.

**Observación 4.69.** *Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son simétricamente regulares y $T \in \mathcal{B}(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$. Entonces el operador de composición $\Psi : H_b(\mathbf{X}^{**}) \to H_b(\mathbf{Y}^{**})$ dado por $\Psi(f) = f \circ T^*$ cumple que $\Psi(H_b(\mathbf{X})) \subset H_b(\mathbf{Y})$.*

Como consecuencia de esta observación se puede obtener el siguiente resultado de Lassalle-Zalduendo [18] (ver también [4]).

**Teorema 4.70.** *Si* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *son simétricamente regulares y* $\mathbf{X}^*$ *es isomorfo a* $\mathbf{Y}^*$*, entonces* $H_b(\mathbf{X})$ *es isomorfo a* $H_b(\mathbf{Y})$*. Más aún,* $\mathcal{P}_m(\mathbf{X})$ *es isomorfo a* $\mathcal{P}_m(\mathbf{Y})$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$*.*

*Demostración.* Sea $T : \mathbf{X}^* \to \mathbf{Y}^*$ un isomorfismo. Entonces el operador de composición $\Psi$ es un isomorfismo y su inverso viene dado por $\Psi^{-1}(g) = \hat{g} \circ (T^{-1})^*$. Como además, por la observación anterior tenemos que $\Psi(H_b(\mathbf{X})) \subset H_b(\mathbf{Y})$, resulta que $\Psi|_{H_b(\mathbf{X})} : H_b(\mathbf{X}) \to H_b(\mathbf{Y})$ es un isomorfismo. Más aún, como $\Psi$ es un operador de composición con un operador lineal, resulta que $\Psi|_{\mathcal{P}_m(\mathbf{X})} : \mathcal{P}_m(\mathbf{X}) \to \mathcal{P}_m(\mathbf{Y})$ también es un isomorfismo. Pues si $P \in \mathcal{P}_m(\mathbf{X})$, vale que $\hat{P} \circ T^*$ es $m$-homogéneo y, además, si consideramos $F$ la forma $m$-lineal sobre $\mathbf{X}$ asociada a $P$, se tiene que $\hat{F} \circ T^*$ es una forma $m$-lineal sobre $\mathbf{Y}^{**}$ que evaluada en la diagonal da como resultado $\Psi(P)$, por lo que $\Psi(P) \in \mathcal{P}_m(\mathbf{Y})$. $\square$

# Capítulo 5

# El espectro de $H^{\infty}(B)$

Vamos a estudiar ahora el álgebra de Banach $H^{\infty}(B)$ formado por las funciones analíticas acotadas sobre la bola unidad abierta $B$ del espacio de Banach $\mathbf{X}$, donde la norma definida viene dada por $\|f\| = \sup_{x \in B} |f(x)|$. Notamos con $\mathcal{M}$ al espectro de $H^{\infty}(B)$, que es el conjunto de morfismos de álgebra, no nulos, de $H^{\infty}(B)$ en $\mathbb{C}$. Observemos que dado $f \in H_b(\mathbf{X})$, la restricción de $f$ a la bola $B$ es una función que pertenece a $H^{\infty}(B)$ pues es analítica y acotada. Podemos pensar así que $H_b(\mathbf{X})$ esta incluido en $H^{\infty}(B)$ pues si $f, g \in H_b(\mathbf{X})$ cumplen que $f$ restringida a $B$ es igual a $g$ restringida a $B$, entonces por el principio de identidad tenemos que $f = g$. Luego hay una proyección natural

$$\rho : \mathcal{M} \to M_b,$$

definida por $\rho(\psi)$ es la restricción de $\psi \in \mathcal{M}$ a $M_b$. Entonces la restricción de $\psi \in \mathcal{M}$ a $\mathbf{X}^*$ es el funcional lineal $\pi(\rho(\psi)) : \mathbf{X}^* \to \mathbb{C}$. Extendemos, también, la definición de la función radio $R$ a $\psi \in \mathcal{M}$ como $R(\psi)$ es el ínfimo $r$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, tal que $\psi$ es contínua respecto a la topología de la convergencia uniforme sobre $rB$. Esto es,

$$R(\psi) = \operatorname{ínf}\{0 \leqslant r \leqslant 1 : |\psi(f)| \leqslant \|f\|_r \text{ para toda } f \in H^{\infty}(B)\}.$$

**Teorema 5.1.** *La imagen de la proyección $\rho : \mathcal{M} \to M_b$ es el conjunto*

$$\rho(\mathcal{M}) = \{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant 1\}.$$

*Además, la proyección $\rho$ establece un biyección entre el conjunto formado por los $\psi \in \mathcal{M}$ que satisfacen $R(\psi) < 1$ y el conjunto de los $\varphi \in M_b$ que satisfacen $R(\varphi) < 1$.*

*Demostración.* Observemos primero que si $\psi \in \mathcal{M}$ cumple que $|\psi(f)| \leqslant \|f\|_r$ para toda función $f \in H^\infty(B)$, entonces la desigualdad vale en particular para toda $f \in H_b$. Luego tenemos que $R(\rho(\psi)) \leqslant R(\psi) \leqslant 1$ para toda $\psi \in \mathcal{M}$, por lo que $\rho(\mathcal{M}) \subset \{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant 1\}$.

Veamos ahora que $\rho$ define una biyección entre el conjunto $\{\psi \in \mathcal{M} : R(\psi) < 1\}$ y el conjunto $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) < 1\}$.

Por la observación anterior, tenemos que $\rho(\{\psi \in \mathcal{M} : R(\psi) < 1\}) \subset \{\varphi \in M_b : R(\varphi) < 1\}$. Sea, entonces, $\varphi \in M_b$ tal que $R(\varphi) < 1$. Entonces, en particular, $\varphi$ es continua respecto a la topología de la convergencia uniforme sobre $R(\varphi)B$. Ahora bien, cada $f \in H^\infty(B)$ es límite uniforme sobre $rB$, para cualquier $0 < r < 1$, de las sumas parciales de su desarrollo en serie de Taylor, o sea, $\sum_{n=0}^{N} f_n \to f$ uniformemente sobre $rB$. En particular vale que $\|f - \sum_{n=0}^{N} f_n\|_{R(\varphi)} \to 0$. Entonces $\{\varphi(\sum_{n=0}^{N} f_n)\} \subset \mathbb{C}$ es una sucesión de Cauchy, pues

$$|\varphi(\sum_{n=0}^{N} f_n) - \varphi(\sum_{n=0}^{M} f_n)| = |\varphi(\sum_{n=N+1}^{M} f_n)| \leqslant \|\sum_{n=N+1}^{M} f_n\|_{R(\varphi)} \to 0$$

Luego $\varphi$ determina unívocamente $\psi \in \mathcal{M}$ definida por $\psi(f) = \lim_{N\to\infty} \varphi(\sum_{n=0}^{N} f_n)$. Además se cumple que

$$|\psi(f)| = \lim_{N\to\infty} |\varphi(\sum_{n=0}^{N} f_n)| \leqslant \lim_{N\to\infty} \|\sum_{n=0}^{N} f_n\|_{R(\varphi)} = \|f\|_{R(\varphi)}.$$

Por lo que $R(\psi) \leqslant R(\varphi)$ y ya habíamos visto que $R(\varphi) \leqslant R(\psi)$. Luego $R(\psi) = R(\varphi)$ y $\rho$ define una biyección entre el conjunto $\{\psi \in \mathcal{M} : R(\psi) < 1\}$ y el conjunto $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) < 1\}$.

Por último veamos que efectivamente la imagen de la aplicación $\rho$ coincide con el conjunto $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant 1\}$. Sea $\varphi \in M_b$ tal que $R(\varphi) = 1$. Entonces consideremos para $|\xi| < 1$ el morfismo $\varphi^\xi \in M_b$ definido en la Sección 4.4. Como $R(\varphi^\xi) = |\xi| R(\varphi) = |\xi| < 1$, por lo visto a lo largo de esta demostración, $\varphi^\xi$ se extiende a un morfismo en $\mathcal{M}$. Si $\psi$ esta en la clausura en $\mathcal{M}$ de las extensiones de los $\varphi^\xi$ con $\xi \to 1$ y $|\xi| < 1$, entonces $\rho(\psi) = \varphi$, por lo que $\varphi$ pertenece a la imagen de $\rho$. $\square$

Como consecuencia de este último Teorema, podemos identificar el conjunto de los $\varphi \in M_b$ que satisfacen $R(\varphi) < 1$ con el correspondiente subconjunto de $\mathcal{M}$.

**Teorema 5.2.** *El conjunto* $\{\varphi \in \mathcal{M} : R(\varphi) < 1\}$ *es unión de discos analíticos que pasan por el origen* $\delta_0$ *de* $\mathcal{M}$*.*

*Demostración.* Teniendo en cuenta la identificación mencionada, dado $\varphi \in \mathcal{M}$, consideramos la recta analítica en $M_b$ que pasa por $\varphi$ con $R(\varphi) < 1$ dada por la aplicación $\xi \mapsto \varphi^\xi$. Observemos que como $R(\varphi^\xi) = |\xi| R(\varphi)$, entonces $\varphi^\xi \in \mathcal{M}$ para $|\xi| < 1/R(\varphi)$.

Además cada función $f \in H^\infty(B)$ es límite uniforme de funciones en $H_b$ sobre cualquier conjunto $\{\varphi : R(\varphi) \leqslant r\}$, con $0 < r < 1$, pues

$$|\varphi(f - \sum_{m=0}^{N} f_m)| \leqslant \|f - \sum_{m=0}^{N} f_m\|_r \to 0$$

para toda $\varphi$ tal que $R(\varphi) \leqslant r$. Entonces si $|\xi| \leqslant c < 1/R(\varphi)$, como $\sum\limits_{m=0}^{N} f_m \to f$ uniformemente en $\{\varphi^\xi : |\xi| \leqslant c\} \subset \{\varphi : R(\varphi) \leqslant r\}$, vale que $\varphi^\xi(\sum\limits_{m=0}^{N} f_m)$ converge uniformemente a $\varphi^\xi(f)$ en $|\xi| \leqslant c$, luego la aplicación $\xi \longmapsto \varphi^\xi(f)$ es analítica en $|\xi| \leqslant c$. Como esto vale para todo $c < 1/R(\varphi)$, entonces la aplicación $\xi \longmapsto \varphi^\xi(f)$ es analítica en $|\xi| < 1/R(\varphi)$.

Luego cada $\varphi \in \mathcal{M}$ esta incluido en un disco analítico que pasa por el origen $\delta_0$. $\square$

Claramente $0 \leqslant R \leqslant 1$ y vale que $R(\varphi) = 0$ si y sólo si $\varphi = \delta_0$. Al igual que en la Sección 4.1, R es semicontinua inferiormente sobre $\mathcal{M}$. Sin embargo, no es válida en general la fórmula del Teorema 4.6 para $\varphi \in \mathcal{M}$. Más adelante veremos un ejemplo para $\mathbf{X} = c_0$, donde existe $\varphi \in \mathcal{M}$ tal que $R(\varphi) = 1$, pero $\varphi = 0$ sobre $\mathcal{P}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. (Ver Ejemplo 5.9).

Se prueba en [7] que toda $f \in H^\infty(B)$ se extiende canónicamente a $\hat{f} \in H^\infty(B^{**})$, donde la correspondencia $f \to \hat{f}$ es un isomorfismo isométrico entre $H^\infty(B)$ y una subálgebra cerrada de $H^\infty(B^{**})$. La extensión es isométrica sobre toda bola $rB$ con $0 < r < 1$, o sea, $\|f\|_{rB} = \|\hat{f}\|_{rB^{**}}$ para toda $f \in H^\infty(B)$. Observemos que en el caso que $f \in H_b$, entonces $\hat{f}$ conincide con la extensión definida en la Sección 4.2.

De la misma forma que en la Sección 4.2, definimos la evaluación en $z \in B^{**}$ como

$$\delta_z(f) = \hat{f}(z),$$

para $f \in H^\infty(B)$. Además $\delta_z$ coincide con la definida anteriormente vía la identificación del conjunto $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) < 1\}$ con el correspondiente subconjunto de $\mathcal{M}$, luego por el Lema 4.12 tenemos que $R(\delta_z) = \|z\| < 1$ para $z \in B^{**}$.

**Definición 5.3.** *Decimos que una función $g \in H^\infty(B^{**})$ es canónica si cumple que $g = \hat{f}$ para alguna $f \in H^\infty(B)$. En este caso, se cumple que $f = g|_B$.*

**Observación 5.4.** *La restricción a $B^{**}$ de un funcional débil-$*$ continuo sobre $\mathbf{X}^{**}$ es una función canónica. Polinomios finitos en funciones canónicas es canónica. Límite uniforme sobre $B^{**}$ de funciones canónicas es canónica.*

**Lema 5.5.** *Sea $g \in H^\infty(B^{**})$ una función canónica, sea $D \subset \mathbb{C}$ que contiene a $g(B^{**})$ y sea $h \in H^\infty(D)$. Entonces la composición $h \circ g \in H^\infty(B^{**})$ es canónica.*

*Demostración.* Sea $\triangle_0$ un disco incuido en $D$ que contiene a $g(0)$. Tomamos $r > 0$ suficientemente chico tal que $g(rB^{**}) \subset \triangle_0$. Entonces como $h$ es límite uniforme de polinomios sobre acotados, $h \circ g$ es límite uniforme sobre $rB^{**}$ de polinomios en $g$. Como los polinomios en $g$ son canónicos sobre $rB^{**}$, entonces $h \circ g$ es canónica sobre $rB^{**}$. Ahora bien, tenemos que $h \circ g(z) = \widehat{h \circ g|_{rB}}(z)$, para $z \in rB^{**}$. Veamos que $h \circ g(z) = \widehat{h \circ g|_B}(z)$, con $z \in rB^{**}$.

$$h \circ g|_{rB}(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} P^m(h \circ g)(0)(x), \text{ para } x \in rB,$$

$$h \circ g|_B(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} P^m(h \circ g)(0)(x), \text{ para } x \in B.$$

Luego sus extensiones vienen dadas por

$$\widehat{h \circ g|_{rB}}(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} P^m\widehat{(h \circ g)}(0)(z), \text{ para } z \in rB^{**},$$

$$\widehat{h \circ g|_r}(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0} P^m\widehat{(h \circ g)}(0)(z), \text{ para } z \in B^{**},$$

pero los polinomios, y en consecuencia sus extensiones, son los mismos. Luego coinciden sobre $rB^{**}$.

Como $h \circ g \in H^\infty(B^{**})$, tenemos que $h \circ g|_B \in H^\infty(B)$ y entonces $\widehat{h \circ g|_B} \in H^\infty(B^{**})$. Luego $h \circ g$ coincide con $\widehat{h \circ g|_B}$ sobre $rB^{**}$ y por el principio de identidad, resulta que $h \circ g = \widehat{h \circ g|_B}$. Por lo que $h \circ g$ es canónica. □

**Definición 5.6.** *Sea la sucesión $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset B^{**}$. Decimos que es una sucesión interpolante para $H^\infty(B)$ si dado $\alpha \in \ell^\infty$, existe $f \in H^\infty(B)$ tal que $\hat{f}(z_j) = \alpha_j$, para $1 \leqslant j < \infty$.*

**Teorema 5.7.** *Si $\{z_j\}$ es una sucesión incluida en $B^{**}$ tal que $\|z_j\| \to 1$. Entonces $\{z_j\}$ tiene una subsucesión que es interpolante para $H^\infty(B)$.*

*Demostración.* Sea $0 < r_j < 1$ tal que $r_j \to 1$. Vale que para una subsucesión de $\{z_j\}$, que volveremos a llamar $\{z_j\}$ por comodidad, existen $L_j \in \mathbf{X}^*$ tales que $\|L_j\| < 1$ y $0 < L_j(z_j) \to 1$ rápidamente. Como $\|L_j\| < 1$, dado $z \in r_j B^{**}$, vale que $|L_j(z)^j| < r_j^j$. Consideramos ahora la función conforme $\phi$ que mandan el disco unidad abierto al conjunto $\{Re(w) > 0\}$ dada por $\phi(w) = \dfrac{1+w}{1-w}$, y definimos $\phi_j$ como $\phi_j = \dfrac{1}{2^j}\phi$. La función $\phi$ cumple que si $|w| \leqslant \delta$, entonces

$$|\phi(w) - 1| = |\frac{2w}{1-w}| \leqslant \frac{2\delta}{1-\delta} < 3\delta.$$

Luego tenemos que si $|w| \leqslant \delta$, entonces $|\phi_j(w)| < \dfrac{3\delta}{2^j}$. Podemos suponer que $r_j \to 1$ de manera tal que $r_j^j < 1/3$, luego si $z \in r_j B^{**}$, entonces

$$|\phi_j(L_j(z)^j)| < \frac{1}{2^j},$$

pues $|L_j(z)^j| < r_j^j < 1/3 = \delta$. Además como $\phi_j$ manda el 1 a $\infty$ y $L_j(z_j) \to 1$ rápidamente podemos suponer que $Re(\phi_j(L_j(z_j)^j)) > j$.

Ahora bien, definimos $f_j = \phi_j \circ L_j^j$. Luego se cumple que $|f_j| < 1/2^j$ sobre $r_j B^{**}$ y definimos $g_m$ como

$$g_m = \frac{f_1 + \cdots + f_m - 1}{f_1 + \cdots + f_m + 1}.$$

Entonces, como $Re(f_j) > 0$ sobre $B^{**}$ tenemos que $|g_m| < 1$ sobre $rB^{**}$ para $0 < r < 1$ y además como $|f_j| < 1/2^j$, entonces $g_m$ converge uniformemente sobre $rB^{**}$, para $0 < r < 1$, a una función $g \in H^\infty(B^{**})$. Como $|g_m(z_j)| < 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $|g(z_j)| \leqslant 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, además $g(z_j) \to 1$ pues si $m > j$, como $Re(f_j) > 0$ y $Re(f_j(z_j)) > j$, entonces

$$|g_m(z_j) - 1| = \frac{2}{|f_1(z_j) + \cdots + f_m(z_j) + 1|} < \frac{1}{j},$$

luego $|g(z_j) - 1| < \frac{1}{j} \to 0$. Entonces como $L_j^j$, $f_j$ y $g_j$ son funciones canónicas y como $g$ es límite uniforme de $g_j$ sobre cualquier bola $rB^{**}$ con $0 < r < 1$ resulta que $g$ también es canónica. Ahora bien, como $g(z_j) \to 1$, entonces existe una subsucesión $\{g(z_{j_k})\}$ interpolante para $H^\infty(\triangle)$ [14, p.204]. O sea, existe $h \in H^\infty(\triangle)$ tal que $h(g(z_{j_k})) = \alpha_k$, luego componiendo $g$ con $h$, tenemos por el Lema 5.5 que $h \circ g \in H^\infty(B^{**})$ es canónica y además la subsucesión $\{z_{j_k}\}$ es interpolante para $H^\infty(B)$. $\square$

Si $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach de dimensión finita, vale que toda sucesión interpolante $\{x_j\}$ para $H^\infty(B)$ cumple que $\|x_j\| \to 1$. Esto también ocurre para algunos espacios de dimensión infinita, como por ejemplo $c_0$. Sin embargo, también hay casos donde existen sucesiones interpolantes $\{x_j\}$ para $H^\infty(B)$ que satisfacen que $\|x_j\| \leqslant r < 1$. Por ejemplo, si $\mathbf{X} = \ell^p$ con $1 \leqslant p < \infty$. Si la sucesión de numeros complejos $\{\lambda_j\}$ satisfacen que $|\lambda_j| < 1$ y que $\inf |\lambda_j| > 0$, entonces la sucesión $\{\lambda_j e_j\}$ es interpolante para $H^\infty(B)$. En efecto, si $N > p$, y $\alpha \in \ell^\infty$, la función $F(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_j}{\lambda_j^N} z^N$ con $z \in \ell^p$ pertenece a $H^\infty(B)$ y cumple que $F(\lambda_j e_j) = \alpha_j$.

De la misma forma que en el caso de $M_b$, podemos definir una proyección natural de $\mathcal{M}$ en $\mathbf{X}^{**}$ dada por la restricción de las morfismos de $\mathcal{M}$ a $\mathbf{X}^*$. Es decir, la proyección de la que hablamos es $\pi \circ \rho$, pero la notaremos con $\pi$. Luego $\pi(\psi) \in \mathbf{X}^{**}$ es la restricción de $\psi \in \mathcal{M}$ a $\mathbf{X}^*$. De la misma forma que antes, se puede ver que la imagen de $\pi$ está incluida en la bola unidad cerrada $\overline{B^{**}}$ de $\mathbf{X}^{**}$.

Se cumple también que $\pi(\delta_z) = z$ para todo $z \in B^{**}$. Además $\pi$ es continua de $\mathcal{M}$ en $\mathbf{X}^{**}$ con la topología débil-$*$. Luego, como $\pi(\mathcal{M})$ es débil-$*$ compacto y $B^{**} \subset \pi(\mathcal{M})$, tenemos que $\pi(\mathcal{M}) = \overline{B^{**}}$.

Llamamos $\mathcal{M}_z$ a la fibra de $\mathcal{M}$ sobre $z \in \overline{B^{**}}$. O sea, $\mathcal{M}_z = \pi^{-1}(\{z\})$ para $z \in \overline{B^{**}}$. Luego las fibras $\mathcal{M}_z$ forman una partición de $\mathcal{M}$ formada por subconjuntos disjuntos y compactos.

Si $\mathbf{X}$ es de dimensión finita, lo esperado es que $\mathcal{M}_z$ esté formado por el morfismo evaluación $\delta_z$ únicamente para $z \in B$, al igual que lo visto en la sección 2 para cuando la dimensión de $\mathbf{X}$ es igual a 1. La situación cambia totalmente en el caso que $\mathbf{X}$ tenga dimensión infinita.

**Teorema 5.8.** *Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces la fibra $\mathcal{M}_z$ de $\mathcal{M}$ sobre cualquier $z \in \overline{B^{**}}$ es infinita. Es más, contiene una copia de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, donde $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-Čech de los naturales.*

*Demostración.* Sea $\{z_j\} \subset B^{**}$ una sucesión que converge débil-$*$ a $z$ y tal que $\|z_j\| \to 1$. La existencia de tal sucesión es trivial si $\|z\| = 1$, pues tomamos $z_j = r_j z$, donde $\{r_j\} \subset \mathbb{R}_+$ tiende creciendo a 1. En el caso donde $\|z\| < 1$, la existencia de la sucesión es consecuencia del Teorema de Josefson-Nissenzwieg [15], [22], extendida en [8, p. 223]. Pasando por una subsucesión, podemos suponer también por el Teorema 5.7 que $\{z_j\}$ es una sucesión interpolante para $H^\infty(B)$. Luego si definimos la aplicación $I : H^\infty(B) \to \ell^\infty$ dada por $f \longmapsto \{\hat{f}(z_j)\}_j$ es un morfismo de álgebras y es sobreyectiva. Entonces si consideramos su aplicación dual asociada $I^* : (\ell^\infty)^* \to (H^\infty(B))^*$ y la restringimos a $\mathcal{M}(\ell^\infty)$ (se puede restringir gracias a que $I$ es multiplicativa) tenemos que $I^*|_{\mathcal{M}(\ell^\infty)} : \mathcal{M}(\ell^\infty) \to \mathcal{M}(H^\infty(B))$ está definida por $\varphi \longmapsto \varphi \circ I$ y resulta inyectiva. Ahora bien, $\mathcal{M}(\ell^\infty) = \mathcal{M}(C_b(\mathbb{N}))$ (donde $C_b(\mathbb{N})$ denota el álgebra de funciones continuas y acotadas sobre los naturales) coincide con $\beta\mathbb{N}$ [16, Theorem 2.4.12], la compactificación de Stone-Čech de los naturales.

Entonces si $m \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$I^*(m)(f) = m(\{\hat{f}(z_j)\}_j) = \hat{f}(z_m) = \delta_{z_m}(f),$$

luego $I^*(m) = \delta_{z_m}$.

Si $\eta \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, entonces existe una red $\{n_\alpha\} \subset \mathbb{N}$ tal que $n_\alpha \to \eta$, y vale que $\eta(\lambda) = \text{lím}_\alpha \lambda_{n_\alpha}$ para todo $\lambda \in \ell^\infty$, luego $I^*(\eta)(f) = \eta(If) = \eta(\{\hat{f}(z_j)\}_j) = \text{lím}_\alpha \hat{f}(z_{n_\alpha})$. Entonces tenemos que

$$\pi(I^*(\eta))(\gamma) = I^*(\eta)(\gamma) = \lim_\alpha \hat{\gamma}(z_{n_\alpha}) = \lim_\alpha z_{n_\alpha}(\gamma) = z(\gamma),$$

por lo que $\pi(I^*(\eta)) = z$.

Entonces $I^*(\eta) \in \mathcal{M}_z$ para todo $\eta \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ y como $I^*$ es inyectiva tenemos que $\mathcal{M}_z$ contiene una copia de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ para todo $z \in \overline{B^{**}}$, cuyo cardinal es mayor que $c$. □

Sea $\varphi \in \mathcal{M}$, en la sección anterior vimos que podemos definir $\varphi^\xi \in \mathcal{M}$, si $R(\varphi) < 1$ y $|\xi| < 1/R(\varphi)$. Podemos también definir $\varphi^\xi$ para $R(\varphi) = 1$ y $|\xi| \leqslant 1$, al igual que en la sección

4.4, como la acción dual inducida por el operador de compisición asociado a $\xi I$. Es decir, dado $f \in H^\infty(B)$ tenemos que $\varphi^\xi(f) = \varphi(f \circ \xi I)$. En el caso que $|\xi| < 1$, si $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} f_m$ es la serie de taylor de $f$, entonces $\sum_{m=0}^{N} \xi^m f_m$ converge uniformemente sobre $B$ a una función de $H^\infty(B)$, luego

$$\varphi^\xi(f) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \xi^m \varphi(f_m).$$

En particular vale que $\pi(\varphi^\xi) = \xi\pi(\varphi)$ para todo $|\xi| \leqslant 1$, pues

$$\pi(\varphi^\xi)(\gamma) = \varphi^\xi(\gamma) = \varphi(\gamma \circ \xi I) = \xi\varphi(\gamma) = \xi\pi(\varphi)(\gamma)$$

para todo $\gamma \in \mathbf{X}^*$. Luego, al igual que antes, tenemos que si $\pi(\varphi) \neq 0$, entonces la correspondencia $\xi \longmapsto \varphi^\xi$, con $|\xi| < 1$, introduce un disco analítico dentro de $\mathcal{M}$ que contiene a $\delta_0$. Sin embargo, no es necesariamente verdad que $\varphi$ esté en la clausura del disco analítico. Es más, puede ocurrir que $\varphi^\xi = \delta_0$ para todo $|\xi| < 1$, pero $\varphi \neq \delta_0$. Veamos a continuación un ejemplo de este hecho.

**Ejemplo 5.9.** Sea $\mathbf{X} = c_0$. Vimos en el Ejemplo 4.15 que $M_b(c_0) = \mathbf{X}^{**} = \ell^\infty$. En este caso, el subconjunto $\{R < 1\}$ de $\mathcal{M}$ coincide con la bola unidad $B^{**}$ de $\ell^\infty$. Luego por el Teorema 5.8, tenemos que existe $\varphi \in \mathcal{M}_0$ tal que $\varphi \neq \delta_0$. Además como $H_b(c_0)$ es el álgebra cerrada generada por $\mathbf{X}^* = c_0^*$, tenemos que $\varphi = 0$ sobre $\mathcal{P}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego, como $\varphi^\xi(f) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \xi^m\varphi(f_m)$ para todo $|\xi| < 1$, entonces deducimos que $\varphi^\xi = \delta_0$ para todo $|\xi| < 1$.

En particular, $\varphi$ no está en la clausura de la imagen de la aplicación $\xi \longmapsto \varphi^\xi$, con $|\xi| < 1$. Notemos también que en este caso no funciona la fórmula 4.6 para $\varphi$, pues $R(\varphi) = 1$ pero $\|\varphi_m\| = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Consideremos ahora $H^\infty_{uc}(B)$ el álgebra de las funciones analíticas y acotadas sobre $B$ que son uniformemente continuas. Luego tenemos que $H^\infty_{uc}(B)$ es una subálgebra cerrada de $H^\infty(B)$ que contiene a $H_b(\mathbf{X})$.

En el Teorema 5.1 vimos que hay una proyección natural de $\mathcal{M}$ en $M_b$ sobre el conjunto $\{R \leqslant 1\}$, que es inyectiva sobre $\{R < 1\}$. La demostración sigue valiendo si reemplazamos $H^\infty(B)$ por cualquier álgebra uniforme $H$ tal que $H^\infty_{uc}(B) \subset H \subset H^\infty(B)$. Cada $\varphi \in M_b$, con

$R(\varphi) < 1$, se extiende de manera única a un morfismo en el espectro $M_H$ de $H$, luego podemos identificar a $\{R < 1\}$ con un subconjunto de $M_H$.

Queremos, ahora, caracterizar el álgebra $H^\infty_{uc}(B)$. Para esto, dada $f \in H^\infty_{uc}(B)$, llamamos $S_k(f) = \sum_{j=0}^{k} f_j$. Y definimos

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f),$$

los $\sigma_n$ se llaman las medidas de Cesàro de $f$.

**Lema 5.10.** *Toda $f \in H^\infty_{uc}(B)$ es límite uniforme sobre $B$ de funciones de $H_b$.*

*Demostración.* Sea $f \in H^\infty_{uc}(B)$, consideremos las medidas de Cesàro de $f$, $\sigma_n$. Observemos que $\sigma_n(f) \in H_b$ y veamos que $\sigma_n(f)$ converge uniformemente a $f$ en $B$.

Sean $x \in B$ y $r < 1$, entonces

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leqslant |\sigma_n(f)(x) - \sigma_n(f)(rx)| + |\sigma_n(f)(rx) - f(rx)| + |f(rx) - f(x)|.$$

Ahora bien, sabemos que $S_n(f)$ converge uniformemente a $f$ en $rB$ para todo $0 < r < 1$, o sea, dado $\eta > 0$, existe $k_0$ tal que

$$|\sum_{j=0}^{k} f_j(rx) - f(rx)| < \eta$$

para todo $x \in B$ y para todo $k \geqslant k_0$. Veamos que $\sigma_n(f)$ también converge uniformemente a $f$ en $rB$. En efecto, sea $0 < r < 1$ y dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\eta < \varepsilon/4$, entonces si $n \geqslant k_0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f)(rx) - f(rx)| &= |\frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} f_j(rx) - (n+1)f(rx))| \\
&= \frac{1}{n+1}|\sum_{k=0}^{n}(\sum_{j=0}^{k} f_j(rx) - f(rx))| \\
&< \frac{1}{n+1}|\sum_{k=0}^{k_0}(\sum_{j=0}^{k} f_j(rx) - f(rx))| + \frac{1}{n+1}(n-k_0)\eta \\
&\leqslant \frac{K}{n+1} + \eta < \varepsilon/3
\end{aligned}$$

para todo $x \in B$ y para todo $n \geqslant n_0$.

O sea, tenemos que $|\sigma_n(f)(rx) - f(rx)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in B$ y para todo $n \geqslant n_0$ con $0 < r < 1$. Además, como $f \in H^\infty_{uc}(B)$, tenemos que el tercer sumando cumple que

$$|f(rx) - f(x)| < \varepsilon/3$$

para todo $x \in B$ para todo $r$ tal que $r_0 < r < 1$.

Por último, para acotar el primer sumando, consideremos la función $g(x) = f(x) - f(rx)$, que pertenece a $H^\infty_{uc}(B)$. Entonces, $\sigma_n(g)(x) = \sigma_n(f)(x) - \sigma_n(f)(rx)$ y por un resultado de [20][Proposición 5.2 (c)], tenemos que $\|\sigma_n(g)\| \leqslant \|g\|$. Luego tomando $r$ tal que $r_0 < r < 1$, vale que

$$|\sigma_n(f)(x) - \sigma_n(f)(rx)| = |\sigma_n(g)(x)| \leqslant \|g\| = \sup_{x\in B} |f(rx) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

Por lo tanto, $|\sigma_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in B$ y para todo $n \geqslant n_0$. $\square$

**Teorema 5.11.** *El espectro de $H^\infty_{uc}(B)$ está identificado con el conjunto $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant 1\}$.*

*Demostración.* Como observamos anteriormente, $H_b \subset H^\infty_{uc}(B)$, por lo que podemos definir una aplicación del espectro de $H^\infty_{uc}(B)$ en el conjunto $\{\varphi \in M_b : R(\varphi) \leqslant 1\}$ definida por $\psi \to \psi|_{H_b}$. Esta aplicación resulta inyectiva pues si $\psi|_{H_b} = \phi|_{H_b}$, entonces por el Lema 5.10, tenemos que $\psi = \phi$. Además, dado $\varphi \in M_b$ tal que $R(\varphi) \leqslant 1$, tenemos que $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|_B$. Entonces $\varphi : H_b \to \mathbb{C}$ es lineal y continua (con las funciones de $H_b$ restringidas a $B$). Luego, como $H_b$ es denso en $H^\infty_{uc}(B)$ (Lema 5.10), $\varphi$ se extiende a $\psi : H^\infty_{uc}(B) \to \mathbb{C}$ y vale que $\psi|_{H_b} = \varphi$, por lo que la aplicación es sobreyectiva. $\square$

**Teorema 5.12.** *Sea $H$ un álgebra uniforme tal que $H^\infty_{uc}(B) \subset H \subset H^\infty(B)$. Entonces la proyección natural de $M_H$ en $M_b$ sobre $\{R \leqslant 1\}$ es una biyección si y sólo si $H = H^\infty_{uc}(B)$.*

*Demostración.* Ya vimos en el Teorema 5.11 que si $H = H^\infty_{uc}(B)$, entonces la proyección natural de $M_H$ en $M_b$ sobre $\{R \leqslant 1\}$ es una biyección.

Supongamos ahora que $H \neq H^\infty_{uc}(B)$, luego existe $f \in H$ que no es uniformemente continua sobre $B$. O sea, existe $\varepsilon > 0$ y existen sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ en $B$ tales que $\|x_n - y_n\| \to 0$

y $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, tenemos identificado cada $x \in B$ con $\delta_x \in \{R \leqslant 1\} \subset M_b$. Entonces como $\{R \leqslant 1\}$ es compacto en $M_b$ existe una sub red $\{x_{n_\alpha}\}_\alpha$ que converge en $M_b$ a alguna $\varphi$ tal que $R(\varphi) \leqslant 1$. Como además $\|x_n - y_n\| \to 0$, resulta que también la subred $\{y_{n_\alpha}\}_\alpha$ converge en $M_b$ a $\varphi$.

Por otro lado, como $|f(x_{n_\alpha}) - f(y_{n_\alpha})| \geqslant \varepsilon$, tenemos que $\{x_{n_\alpha}\}$ y $\{y_{n_\alpha}\}$ tienen puntos de acumulación $\theta$ y $\theta'$ en $M_H$ tales que $f(\theta) \neq f(\theta')$. Además vale que $\theta|_{H_b} = \theta'|_{H_b} = \varphi$, entonces por el Lema 5.10, tenemos que $\theta = \theta'$ en $H^\infty_{uc}(B)$. Por lo que la proyección natural no resulta inyectiva. $\square$

Este resultado muestra que el álgebra $H^\infty_{uc}(B)$ queda caracterizada por su espectro, es decir, si $H$ es estrictamente más grande que $H^\infty_{uc}(B)$, entonces $M_H$ es estrictamente más grande que el espectro de $H^\infty_{uc}(B)$.

# Bibliografía


[1] Aron, R.M.; Cole, B.J.; Gamelin, T.W. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space. J. Reine Angew. Math. 415, 51-93 (1991).

[2] Aron, Richard M.; Berner, Paul D. A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings. Bull. Soc. Math. France 106 (1978), no. 1, 3–24.

[3] Bogdanowicz, W. On the weak continuity of the polynomial functional defined on the space $c_0$. Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III 5, 243-246 (1957).

[4] Cabello Sánchez, Félix; Castillo, Jesús M. F.; García, Ricardo. Polynomials on dual-isomorphic spaces. Ark. Mat. 38 (2000), no. 1, 37–44.

[5] Carleson, Lennart. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem. Ann. Of Math. (2) 76: 547–559 (1962).

[6] Cox, David; Little, John; O'Shea, Donal Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, (2007).

[7] Davie, A.M.; Gamelin, T.W. A theorem on polynomial-star approximation. Proc. Am. Math. Soc. 106, No.2, 351-356 (1989).

[8] Diestel, Joseph. Sequences and series in a Banach space. Graduate Texts in Mathematics, 92. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag. XIII, 261 p. (1984)

[9] Dineen, Seán. Complex analysis on infinite-dimensional spaces. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, (1999)

[10] Gamelin, Theodore W. Uniform algebras. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., (1969).

[11] Gamelin, T. W. Uniform algebras and Jensen measures. London Mathematical Society Lecture Note Series, 32, Cambridge-New York: Cambridge University Press (1978).

[12] Gamelin, T. W. Wolff's proof of the corona theorem. Israel J. Math. 37 (1-2): 113-119 (1980).

[13] Gamelin, Theodore W. Analytic functions on Banach spaces. Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993), 187–233, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 439, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1994).

[14] Hoffman, Kenneth Banach spaces of analytic functions. Dover Publications, Inc., New York, (1988).

[15] Josefson, Bengt. Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence. Ark. Mat. 13, 79-89 (1975).

[16] Kaniuth, Eberhard. A course in commutative Banach algebras. Graduate Texts in Mathematics, 246. Springer, New York, (2009).

[17] Koosis, Paul. Introduction to Hp-spaces. With an appendix on Wolff's proof of the corona theorem. London Mathematical Society Lecture Note Series, 40, Cambridge-New York: Cambridge University Press (1980)

[18] Lassalle, Silvia; Zalduendo, Ignacio. To what extent does the dual Banach space $E'$ determine the polynomials over $E$? Ark. Mat. 38 , no. 2, 343–354.(2000)

[19] Mujica, Jorge. Complex analysis in Banach spaces. North-Holland Mathematics Studies, 120. Notas de Matemática, 107. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1986).

[20] Mujica, Jorge. Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 324 , no. 2, 867–887. (1991)

[21] Newman, D. J. Some remarks on the maximal ideal structure of H?. Ann. Of Math. (2) 70: 438-445 (1959).

[22] Nissenzweig, A. $w^*$ sequential convergence. Isr. J. Math. 22(1975), 266-272 (1976).

[23] Pelczynski, Aleksander. A property of multilinear operations. Stud. Math. 16, 173-182 (1957).

[24] Zalduendo, Ignacio Extending polynomials on Banach spaces. A survey. Rev. Unión Mat. Argent. 46, No. 2, 45-72 (2005).