**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

# Teoría de grado topológico y aplicaciones a las ecuaciones diferenciales

Julián Haddad

Director de Tesis: Dr. Pablo Amster

Lugar de Trabajo: Departamento de Matemática- FCEyN (UBA)

Buenos Aires, Julio de 2009.

# Índice general


0.1. Agradecimientos . . . . . 4
0.1.1. Más en particular . . . . . 4

**1. Introducción** **5**
1.1. Motivaciones . . . . . 5
1.2. Ejemplos . . . . . 6

**2. El grado de Brouwer** **9**
2.1. Definición y propiedades . . . . . 9
2.1.1. Implicaciones de la teoría del grado de Brouwer . . . . . 15
2.2. El grado en dimensión infinita . . . . . 18

**3. Aplicaciones al análisis no lineal** **21**
3.1. Un teorema de extensión . . . . . 21
3.2. Teorema del punto fijo de Schauder . . . . . 23
3.3. Teoremas globales sobre invariancia homotópica . . . . . 24
3.3.1. Conexión, lema de Whyburn . . . . . 25
3.3.2. Continuos de soluciones . . . . . 26
3.3.3. Aplicaciones a Teoría de Bifurcación . . . . . 29
3.4. Teorema de Krein-Rutman . . . . . 32

**4. Aplicación a las ecuaciones diferenciales ordinarias** **36**
4.1. Problemas no resonantes . . . . . 36
4.1.1. Ecuacion periódica de primer orden . . . . . 36
4.1.2. Ecuación de segundo orden con condiciones de Dirichlet . . . . . 37
4.1.3. Generalización a sistemas . . . . . 39

4.2. Problemas resonantes . . . . . 41
4.2.1. Condiciones de Landesman-Lazer . . . . . 41
4.2.2. Generalización a sistemas: Condicion de Nirenberg . . . . . 48
4.2.3. Resonancia en un autovalor de orden superior: Condicion de Lazer-Leach . . . . . 49

## 0.1. Agradecimientos

A la gente de la FCEyN:

Gracias por la confianza, por el entusiasmo, por la exigencia y por la paciencia.

Gracias por los problemas.

Gracias por la inducción, las sucesiones, los polinomios, las integrales, los compactos, las bases, las medidas, los ideales, las representaciones, las densidades, los quivers, los índices, las homotopías, los ganchos, los dynkin, las holomorfas, los proyectivos, los fibrados, las cotas, los banach, las geodésicas, las transformadas, las generatrices, las homologías y las extensiones de Galois.

Gracias por jugarse por nosotros.

Gracias por Heine-Borel, por Runge-Kutta, por Jordan, por Harnak, por Stone-Weiestrass, por Tychonoff, por Krein-Millman, por Gauss-Bonet, por Hölder, por Baer, por Baire, por Egorov, por Hurewitz, por el teorema de representación conforme, por el algoritmo Buchberger, por Hahn-Banach, por Sard-Smale, por Radon-Nikodym, por el teorema de no retracción, y por supuesto, por Zorn.

Gracias por las categorías.

Gracias por hacernos pensar.

Y por la gente que conocí.

Y por hacer de estos, los mejores años de mi vida.

### 0.1.1. Más en particular

Agradezco a mi director

Pablo Amster

A a mis profesores

Andrea Solotar, Julián Bonder, Mariano Suarez Álvares, Miguel Ottina y José Luis Romero.

A mis compañeros

Quimey, Pablo, Marco, Yanina, Ximena y Lucía

A mi novia

Ariana F. Galeano

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Motivaciones

Hay problemas del análisis que resultan muy difíciles de probar con herramientas clásicas.

Por ejemplo:

1. Si apoyamos en el piso un mapa de Buenos Aires, entonces seguro que hay un punto del mapa que se representa a si mismo (Teorema de Brouwer).

2. Si tiramos dos panes y un jamón al aire, podemos cortarlos simultaneamente a la mitad mediante un corte plano de cuchilla (Teorema de Stone-Tukey).

3. En todo momento hay dos puntos antipodales de la tierra que tienen igual presión y temperatura (Teorema de Borsuk-Ulam).

4. Si una función continua de la bola cerrada en sí misma deja fijo el borde, entonces es sobreyectiva. (No retracción)

5. Si aplastamos un cubo de plastilina entonces hay algún punto que no se mueve (Teorema de Miranda).

6. No se puede peinar una bola peluda.

Esto se debe a que el motivo por el que son ciertos es de naturaleza topológica y no analítica. En este trabajo presentaremos un invariante con el que podemos resolver todos estos problemas (y más), usando ideas muy sencillas.

Cuando esta teoría se generaliza a espacios de Banach, los teoremas anteriores dan mucha más información. En lugar de demostrar la existencia de "un punto muy especial", demuestran la existencia de "un elemento en un espacio de Banach, muy especial". Por ejemplo, una solución a una ecuación diferencial.

Empezamos dando ejemplos que ayuden a la intuición del lector.

## 1.2. Ejemplos

1. Sea
$$g_\lambda : (-4, 1) \to \mathbb{R}$$
dada por
$$g_\lambda(x) = x^2 + \lambda$$
Observemos el conjunto de ceros de $g_\lambda$ mientras $\lambda$ se mueve. Si $\lambda \in (-1, 0)$, $g_\lambda$ tiene dos ceros $a_\lambda$ y $b_\lambda$. En cada uno, los signos de $g'_\lambda$ son distintos. Cuando $\lambda$ cruza la barrera del 0 y se hace positivo, estos ceros se aniquilan y la $g$ deja de anularse. Cuando $\lambda$ cruza el $-1$ hacia el intervalo $(-2, -1)$, el cero de la derecha se escapa por el borde. Al cruzar el $-2$ se escapa el otro.

2. Sea
$$f_\lambda : D^2 \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
dada por
$$f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$$
Cuando $\lambda \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ tenemos dos ceros $a_\lambda$ y $b_\lambda$. La diferencial de $f_\lambda$ es una transformación conforme, puesto que $f_\lambda$ es un polinomio. Esto dice que si $\gamma$ es una curva a que da una vuelta al rededor de $a_\lambda$ o de $b_\lambda$ en sentido horario y que no se aleja mucho, entonces $f\gamma$ dará una vuelta al 0 (en el codominio) en el mismo sentido.

   Cuando $\lambda$ se acerca a 0, $a_\lambda$ y $b_\lambda$ están muy cerca. Si tomamos una curva $\delta$ que de una vuelta a $a_\lambda$ y a $b_\lambda$ en sentido horario, $f\delta$ dará dos vueltas al 0. Ahora los

ceros no se aniquilan cuando $\lambda$ cruza la barrera del 0 sino todo lo contrario. En el ejemplo anterior, la diferencial de $f_\lambda$ preservaba la orientación del espacio en un cero y la invertía en el otro. En este caso la orientación se preserva en ambos.

3. Sea
$$f : D^2 \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
una función holomorfa que no se anula en $S^1$ y sea
$$\gamma(t) = e^{it}$$
Del análisis complejo sabemos que
$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt$$
es un número entero que cuenta la cantidad de veces que $f$ se anula en $D^2$ (con multiplicidad). Además este número es igual a
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{f\gamma} \frac{1}{z} dz \tag{1.1}$$
que cuenta la cantidad de vueltas que la curva $f\gamma$ le da al 0. Pero si $f$ no es holomorfa sino sólo continua, (1.1) se puede calcular. En este caso ya no es necesario que este número cuente la cantidad de ceros de $f$ (podrían ser infinitos) pero sigue siendo un número entero que depende de los valores de $f$ en $S^1$.

Nos imaginamos que $D^2$ es una membrana elástica y que su borde $S^1$ es un alambre. $f(D^2)$ es la membrana deformada de forma continua y nos estamos preguntando qué podemos decir de la cantidad de veces que la membrana toca al origen. Viéndolo de esta forma es bastante claro que si $f\gamma$ da alguna cantidad no nula de vueltas al cero, entonces necesariamente $f$ tiene que anularse en algún punto de $D^2$. Esto es porque "la membrana no tiene agujeros".

Este número (1.1) es lo que a continuación vamos a definir como el grado de la función $f$ respecto del dominio $D^2$. Hay muchas formas de hacerlo y algunas requieren que el lector tenga manejo de lenguajes algebraicos sofisticados.

Con homología singular o simplicial podemos dar la definición del grado para funciones continuas definidas en un dominio del cual se conoce el $H^n$ de su frontera

(por ejemplo una bola). Las propiedades útiles del grado se deducen trivialmente de la definición.

Con formas diferenciales se puede definir el grado para funciones de clase $C^\infty$ entre variedades diferenciales conexas compactas orientadas y de la misma dimensión, en términos del morfismo inducido en los grupos de cohomología de de Rham. La hipótesis de compacidad se puede relajar a pedir sólo que la función sea propia. Ver [6].

También se puede dar una generalización de (1.1) para dimensión $n$ cuando la frontera del dominio es una subvariedad diferencial de $\mathbb{R}^n$. Esta se conoce como la integral de Kronecker. Ver [5].

Todas son equivalentes. Elegimos una definición elemental.

# Capítulo 2

# El grado de Brouwer

## 2.1. Definición y propiedades

**Definición** Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^m$ diferenciable. Decimos que $q \in D$ es un punto regular de $f$ si $d_q f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un epimorfismo. Decimos que $p \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de $f$ si todos los $q \in f^{-1}(\{p\})$ son puntos regulares. Si $f^{-1}(\{p\}) = \emptyset$ la condición se cumple de forma tautológica.

**Observaciones** Obviamente, $n \geq m$ en la definición. Además $d_q f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un epi si y solo si hay una submatriz de $m \times m$ de la matriz de $d_q f$ (en alguna base) que es inversible. Como esto ocurre si y solo si el *det* de esta submatriz es no nulo, deducimos que si $f$ es $C^1$ el conjunto de puntos regulares es un abierto.

**Definición** Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado , $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ diferenciable y $p \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$p \notin f(\partial D) \tag{2.1}$$

y

$$p \text{ es un valor regular de } f \tag{2.2}$$

definimos

$$deg(f, D, p) = \sum_{x \in f^{-1}(\{p\})} sg(det(d_x f)) \tag{2.3}$$

Debemos justificar que esta definición tiene sentido. En primer lugar, (2.2) implica que $det(d_x f)$ es no nulo y que le podemos tomar signo. En segundo lugar, hay que probar que la suma es finita. Esto lo vemos en la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.1** *Sean $D$, $f \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ y $p$ como antes. Llamemos $C = f^{-1}(\{p\})$. Entonces $C$ es finito y $\exists\, V$ entorno de $p$ y $V_1, \ldots, V_n$ abiertos disjuntos tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$, $f : V_i \to V$ es un difeomorfismo y todo $q \in V$ es regular.*

**Demostración** Podemos suponer que $p = 0$. Como 0 es un valor regular de $f$, por el teorema de la función inversa $\forall x \in C\ \exists A_x, B_x$ entornos de $x$ y 0 respectivamente tales que $f : A_x \to B_x$ es un difeomorfismo. Como $f$ es $C^1$, podemos suponer (achicando los $A_x$ y $B_x$) que $d_x f$ es isomorfismo $\forall x \in A_x$.

En cada $A_x$ el único cero de $f$ es $x$. $\{A_x : x \in C\} \cup \{\overline{D} \setminus C\}$ es un cubrimiento por abiertos de $\overline{D}$ (que es compacto) del cual todo subcubrimiento debe contener a los $A_x$. Luego hay finitos abiertos y $C$ es finito.

Tomamos

$$V = \bigcap_{x \in C} B_x \setminus f\left(\overline{D} \setminus \bigcup_{x \in C} A_x\right)$$

y

$$V_x = A_x \cap f^{-1}(V)$$

Es directo verificar que $V$ y $V_x, x \in C$ son abiertos y que satisfacen la tesis del enunciado.

**Observaciones** El hecho de que $f$ sea $C^1$ y los puntos de $V$ sean regulares implican que $det(d_x f)$ es continuo en $x \in V_i$ y es nunca nulo.

**Corolario 2.1.2** *El deg de la definición (2.3) es localmente constante en $p$*

**Observaciones** Es trivial el hecho de que $deg(f, D, p) = deg(f - p, D, 0)$ por lo que $deg(f - p, D, 0)$ tambien es localmente constante en $p$.

**Definición** Un poco de notación:

dada $H : \overline{D} \times I \to \mathbb{R}^n$ una homotopía, llamamos $H_\lambda = H(., \lambda)$

dado un conjunto $C$ en un espacio métrico $X$ y $\epsilon > 0$ llamamos $B(C, \epsilon) = \{x \in X : dist(x, C) < \epsilon\}$

El próximo teorema es clave en el desarrollo de la teoría. Describe lo que sucede con el conjunto de ceros de una función mientras se la perturba de forma continua. Por lejos, es el teorema más importante de este capítulo.

**Teorema 2.1.3** *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$, $f, g : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ y $H : \overline{D} \times I \to \mathbb{R}^n$ una homotopía de clase $C^\infty$ con $H_0 = f$ y $H_1 = g$ tal que*

$$p \notin H_t(\partial D) = H(\partial D \times \{t\}) \, \forall t \in I \tag{2.4}$$

$$p \text{ es un valor regular de } H, f \text{ y } g. \tag{2.5}$$

*Entonces $deg(f, D, p) = deg(g, D, p)$.*

**Demostración**

Llamemos $C = H^{-1}(\{p\})$. $C$ es una subvariedad diferencial compacta de $\overline{D} \times I$ de dimensión 1, con $\partial C \subset \partial(\overline{D} \times I) = (\overline{D} \times \{0\}) \cup (\overline{D} \times \{1\}) \cup (\partial D \times I)$.

Sabemos que $C \cap \partial D \times I = \emptyset$. Al ser $C$ de dimensión 1, sabemos que es homeomorfo a una unión disjunta de finitos intervalos cerrados y circunferencias. Las circunferencias están en $I^o \times D$ porque $p$ es valor regular de $f$ y de $g$, y los intervalos tienen borde en $D \times \{0\} \cup D \times \{1\}$.

Para simplificar el problema cambiamos un poco la homotopía:

Sea $s : I \to I$ tal que

1. $s$ es $C^\infty$ ,
2. $s([0, \frac{1}{3}]) = \{0\}$, $s([\frac{2}{3}, 1]) = \{1\}$ y
3. $s'(t) \neq 0 \, \forall t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

Consideramos $\overline{H}(x, t) = H(x, s(t))$. Hay que chequear que $p$ sigue siendo un valor regular de $\overline{H}$, pero esto es fácil: la matriz de la diferencial de $\overline{H}$ en $(x, t)$ contiene los primeros $n$ vectores columna de la matriz de $H$ en $(x, s(t))$ y el último vector es $\frac{\partial H}{\partial t}(x, s(t))s'(t)$. En los $t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $s'(t) \neq 0$ así que esta matriz tiene el mismo rango que la de $H$ en $(x, s(t))$. En los $t \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ la matriz de la diferencial de $\overline{H}$ contiene la de $f$ o a la de $g$ y por lo tanto tiene rango $n$ (recordar que $H_0 = f$ y $H_1 = g$).

Miremos la matriz $J_x$ que es la matriz de la diferencial de $\overline{H}$ en $x$. Sabemos que los vectores fila de $J_x$ son l.i. porque $d_x\overline{H}$ es epi. Ahora sea $\gamma : I \to \overline{D} \times I$ una parametrización de una de las componentes conexas de $C$ que tienen borde. Por la regla de la cadena, sabemos que $J_{\gamma(t)}\gamma'(t) = 0$ lo que nos dice que $\gamma'(t)$ es l.i. con las filas de $J_\gamma(t)$. Entonces la matriz cuadrada $K_t$ formada por las filas de $J_{\gamma(t)}$, y $\gamma'(t)$ es inversible $\forall t \in I$. Por lo tanto el determinante tiene signo constante.

Vamos ahora a $\partial C$. Por cómo es $s$ cerca del 0 y el 1, los vectores fila de $J$ tienen última coordenada 0 y los vectores $\gamma'(0), \gamma'(1)$ son de la forma $(0, \ldots, 0, a(t))$ para $t = 0, 1$. Luego $det(K_0) = det(d_{\gamma(0)}\overline{H}(., 0))a(0)$ y lo mismo con 1. Observar que $\overline{H}(., 0) = f$ y $\overline{H}(., 1) = g$.

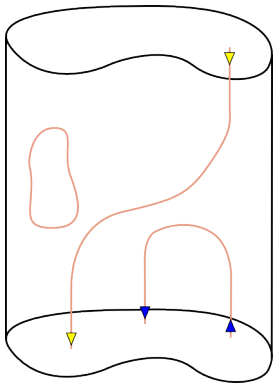

Figura 2.1: Ceros de la homotopía

En resumen, si la curva $\gamma$ une $(x_0, t_0)$ con $(x_1, t_1)$, donde $t_0, t_1 \in \{0, 1\}$, el signo del determinante de $H(., t_0)$ en $x_0$ será igual o distinto al de $H(., t_1)$ en $x_1$ dependiendo de si $a(0)$ y $a(1)$ tienen igual o distinto signo. Pero dado que $Im(\gamma) \subseteq D \times I$, si $t_0 = t_1$ entonces tienen distinto signo, y si $t_0 \neq t_1$ tienen el mismo signo.

De esto se deduce facilmente que $deg(f, D, p) = deg(g, D, p)$. ∎

Recordamos dos resultados clásicos, que pueden enunciarse de forma mucho más general:

**Teorema 2.1.4** Teorema de Stone-Weierstrass

*Las funciones polinomiales son densas en el conjunto de funciones continuas, con la norma infinito.*

**Teorema 2.1.5** Lema de Sard

*Los valores regulares de una función $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ $m \geq n$ son densos en todo el codominio.*

**Proposición 2.1.6** *Llamemos $M_p \subset C^\infty(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ al conjunto de funciones $g$ tales que $p \in \mathbb{R}^n$ es valor regular de $g$ y $p \notin g(\partial D)$. Sea $f \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ con $p \notin f(\partial D)$.Le damos a estos espacios la norma infinito. Entonces existe un entorno $B$ de $f$ en donde $deg(., D, p) : M_p \cap B \to \mathbb{Z}$ es constante.*

**Demostración** Dada $f \in M_p$, $\exists \epsilon > 0$ tal que $E = B(f(\partial D), \epsilon)$ es disjunto con $p$. Si $g, h \in M_p$ están en $B(f, \epsilon)$, la homotopía del segmento entre $g$ y $h$ (llamémosla $H$) cumple con la condición (2.4). Por el lema de Sard existe un $v \in \mathbb{R}^n$ tan chico como queramos tal que $p$ es valor regular de $H + v$. Por la proposición 2.1.1 podemos tomar $v$ de forma que $p$ sea también valor regular de $f + v$ y $g + v$ y que los grados sean los de $f$ y $g$.

Por el teorema anterior, los grados de $f$,$f + v$,$g + v$ y $g$ son todos iguales.

Con estos dos teoremas, la siguiente definición está claramente justificada.

**Definición** Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ continua y $p \in D$ tal que:

$$p \notin f(\partial D). \tag{2.6}$$

definimos

$$deg(f, D, p) = deg(g, D, p) \tag{2.7}$$

donde $g \in C^\infty(\overline{D}, \mathbb{R}^n) \cap M_p$ está suficientemente cerca de $f$.

Llamamos $D_p = \{f \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^n) : p \notin f(\partial D)\}$

**Observaciones** Se deduce de 2.1.5 y 2.1.4, que la función $deg(., D, p) : D_p \to \mathbb{Z}$ es continua.

**Proposición 2.1.7** Propiedades interesantes:

*Sean $f, g$ continuas, $E, D \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y $p \in \mathbb{R}^n$ tales que se cumple 2.6 con $D$ y $E$ (para que todo esté bien definido). Entonces:*

1. $deg(id, D, .) = I(D)$ *(la función indicadora de $D$)*
2. $deg(f, D, p) = deg(f - p, D, 0)$
3. $deg(f, D, p) = 0$ *si* $f \neq p$ *en todo* $D$
4. *si* $f = g$ *en* $\partial D \Rightarrow deg(f, D, p) = deg(g, D, p)$
5. *si* $f \cong_H g$ *y* $p \notin H_\lambda(\partial D) \Rightarrow deg(f, D, p) = deg(g, D, p)$
6. *si* $D, E$ *son disjuntos entonces* $deg(f, D \cup E, p) = deg(f, D, p) + deg(f, E, p)$

7. *si* $D \subseteq E$ *y* $p \notin f(E \setminus \overline{D})$ *entonces* $deg(f, E, p) = deg(f, D, p)$

**Demostración** De la definición (2.3) se deduce el punto 1. Los items 2, 3, 6 y 7 son triviales para las funciones de la definición 2.3 y se deducen fácilmente para funciones de la definición 2.1. El punto 5 para funciones continuas se deduce de la continuidad de $deg(., D, p) : D_p \to \mathbb{Z}$. El punto 4 sale de considerar la homotopía del segmento entre $f$ y $g$.

**Observaciones**

La propiedad 3 tiene la siguiente importante consecuencia:

Una función con grado no nulo tiene que tomar el valor $p$ en algún punto de $D$. Más aún, por la proposición (2.1.1) $f(D)$ es entorno de $p$.

La propiedad 5 es una buena herramienta para calcular el grado de una función.

La propiedad 4 dice que el grado queda determinado conociendo los valores que toma la función en el borde. Es más. De la propiedad 5 se ve que la función $deg(., D, p) : D_p \to \mathbb{Z}$ tiene más sentido si se la ve factorizada por $deg(., D, p) : \Pi_0(D_p) \to \mathbb{Z}$. (donde $\Pi_0(D_p)$ es el conjunto de componentes arco conexas de $D_p$). Luego puede pensarse al grado como una función $deg(., D, p) : \Pi_0(C(\partial D, \mathbb{R}^n \setminus \{p\})) \to \mathbb{Z}$ o por qué no...

$$deg(., D, p) : \Pi_0(C(\partial D, S^n)) \to \mathbb{Z}$$

Cabe destacar que, en el caso que $D$ sea una bola, conociendo alguna teoría de homología de espacios topológicos se puede dar una definición directa del *deg* para funciones continuas que nos ahorra todo el trabajo que hicimos hasta ahora.

**Proposición 2.1.8** Fórmula del producto cartesiano

*Sean* $f, D, p$ *como antes,* $D \subseteq \mathbb{R}^n$*. Llamamos* $D^m = D \cap \mathbb{R}^m$ *con* $m < n$ *donde identificamos a* $\mathbb{R}^m$ *con un subespacio de* $\mathbb{R}^n$ *por* $(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots 0)$.

*Supongamos que* $f = id - \phi$ *donde* $Im(\phi)$ *cae en* $\mathbb{R}^m$ *y que* $p \in \mathbb{R}^m$*. Entonces*

$$deg(f, D, p) = deg(f|_{\mathbb{R}^m}, D^m, p)$$

**Demostración** Lo probamos primero para las funciones de la definición 2.3. Llamemos $g = f|_{\mathbb{R}^m}$. Es claro que $g$ tiene imagen en $\mathbb{R}^m$ y su grado está bien definido. Si $x \in D$ es tal que $f(x) = p$ entonces $x - \phi(x) = p \Rightarrow x = p + \phi(x) \in D^m$, luego $f^{-1}(\{p\}) = g^{-1}(\{p\})$.

Sea $A$ la matriz de la diferencial de $f$ en $x$ y $B$ la de $g$. Queremos ver que tienen determinantes del mismo signo. Pero $A$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

, entonces vale.

Para ver que vale para funciones continuas basta aproximar a $\phi$ por una función $\overline{\phi}$ tal que $id - \overline{\phi}$ cumpla con 2.1 y 2.2.

**Observaciones** Esta propiedad se enuncia con el lenguaje de la topología algebraica, diciendo que el grado es invariante por suspensión.

**Definición** Dado un espacio vectorial $V$ de dimensión finita con una norma cualquiera, una función $f : D \subset V \to V$ que cumpla 2.1 y 2.2 y $p \in V \setminus f(\partial D)$, podemos definir el grado de $f$ de la siguiente forma. Tomamos $\delta : V \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo cualquiera y definimos

$$deg(f, D, p) = deg(\delta f \delta^{-1}, \delta(D), \delta(p))$$

Hay que ver que esta definición no depende de $\delta$. Si tenemos $\psi$ otro isomorfismo, $\psi f \psi^{-1} = \psi\delta^{-1} \circ \delta f \delta^{-1} \circ \delta\psi^{-1}$. Esto dice que $\psi f \psi^{-1}$ y $\delta f \delta^{-1}$ son conjugados por un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto los grados coinciden. Lo mismo puede decirse para $f$ continua

### 2.1.1. Implicaciones de la teoría del grado de Brouwer

Exponemos algunos resultados clásicos sobre la topología de $\mathbb{R}^n$ que se pueden demostrar usando teoría de grado. En su mayoría, estos teoremas pueden demostrarse unos a otros. Son todos " equivalentes " (no sólo por ser verdaderos) y dependen fuertemente de la existencia del grado y sus propiedades listadas en (2.1.7).

**Teorema 2.1.9** *$S^n$ no es un retracto de $D^{n+1}$.*

**Demostración** Sea $f : D^{n+1} \to S^n$ una retracción. Componiendo con la inclusión $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tenemos que $f : D^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ es continua y coincide en $S^n$ con la identidad. Por las propiedades (4) y (1), $deg(f, D^{n+1}, 0) = 1$ por lo que $f$ debe anularse. Esto es absurdo porque $Im(f) = S^n$.

**Observaciones** Un poco más en general, se puede decir que si $f : D^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ cumple que $f(S^n) \subseteq S^n$ y $f|_{S^n} : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es homotópica a la inclusión, entonces $Im(f) \supseteq D^{n+1}$. La misma demostración funciona, tomando $deg(f, D^{n+1}, p)$ con $p \in D^{n+1}$.

**Teorema 2.1.10** (Teorema del punto fijo de Brouwer)
*Toda función continua $f : D^n \to D^n$ tiene un punto fijo.*

**Demostración** Sea $g(x) = f(x) - x$. Es intuitivo el hecho de que $g$ es un campo que apunta hacia adentro de la esfera, por lo que su grado es el mismo que el de $-id$ que es $(-1)^n$. Entonces $g$ debe anularse. Esta demostración está detallada más adelante en el teorema del punto fijo de Leray-Schauder. Daremos una prueba parecida:

Supongamos que $f$ no tiene puntos fijos. Consideramos $h(x) = f(x)+\delta(x)(x-f(x))$ donde $\delta(x) \geq 0$ es el único número positivo tal que $h(x) \in S^n$. Geométricamente, $h(x)$ es el punto de intersección entre $S^n$ y la semirrecta que empieza en $f(x)$ y pasa por $x$. Es fácil ver que $\delta$ es continua porque la función $g$ no se anula. Además $\delta|_{S^n} = 1$ por lo que $h$ es una retracción de $D^n$ en $S^n$, contradiciendo el teorema anterior.

**Teorema 2.1.11** (Teorema de Bolzano generalizado)
*Sean $(f_i)_{i=1}^n$ funciones $f_i : I^n \to \mathbb{R}$ continuas con $I = [-1, 1]$, tales que*

$$f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_n) < 0 < f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \; \forall 1 \leq i \leq n$$

*Entonces existe un cero común a todas.*

**Demostración** Consideramos $f = (f_1, \ldots, f_n)$ y la homotopía $h_\lambda(x)$ del segmento entre $f$ y la identidad de $I^n$. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \partial I^n$, entonces hay un $j$ tal que $x_j \in \{-1, 1\}$. Como $f_j(x)$ y $x_j$ tienen el mismo signo (por la fórmula de la hipótesis) vale que la coordenada $j$-ésima de $h_\lambda$ no se anula. Entonces $h$ es una homotopía que no se anula en el borde de $I^n$ y $deg(f, I^n, 0) = 1$ que es lo que queríamos.

**Definición** Sea $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ continua. Todas las extensiones de $f$ a $\overline{f} : D^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tienen el mismo grado respecto de un punto $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus Im(f)$. Definimos $deg(f, S^n, p)$ como el grado de alguna de sus extensiones a $D^{n+1}$. Lo llamamos el número de rotación del campo $f$ al rededor de $p$. También suele notarse $\mu(f, p)$ o $\mu(f, S^n, p)$.

**Teorema 2.1.12** (odd mapping theorem) *Sea $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tal que $f(-x) = -f(x)$ (decimos que $f$ es impar si pasa esto). Entonces $deg(f, S^n, 0)$ es impar.*

**Demostración** Primero podemos suponer que $f$ está definida en $D^{n+1}$ y que es impar. De hecho, si tenemos una extensión $g$ cualquiera, tomamos $\frac{g(x)-g(-x)}{2}$ que es una extensión impar.

También podemos suponer que $f$ es una función suave y tal que 0 es valor regular. Para probar el teorema cuando $f$ es continua e impar, basta aproximar por funciones suaves e impares que tienen a 0 como valor regular.

Ahora podemos usar la definición 2.3 y probar que este número es impar.

Es claro que $f(0) = 0$ porque $f(0) = f(-0) = -f(0)$. Además el conjunto de ceros de $f$ es de la forma

$$\{0, x_1, -x_1, \ldots, x_m, -x_m\}$$

Pero la diferencial de una función impar, es una función par. Entonces

$$sg(det(d_{x_i} f)) = sg(det(d_{-x_i} f)) \ \ \forall i$$

y el grado de $f$ es simplemente $sg(det(d_0 f)) + 2\sum_{i=1}^{m} sg(det(d_{x_i} f)) = \pm 1 + 2k$, que es impar.

**Teorema 2.1.13** (Teorema de Borsuk-Ulam) *Dada $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ continua existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

**Demostración** Tomamos $g(x) = f(x) - f(-x)$ y queremos ver que $g$ se anula. $g$ es una función impar. Pensamos a $S^{n-1}$ como el ecuador de $S^n$ e identificamos $D^n$ con la semiesfera superior, $S^n_+$. Llamamos $h = g|_{S^{n-1}}$, $h : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. Si $g$ se anula en $S^{n-1}$ ya está probado el teorema así que suponemos que no. En este caso está bien definido $deg(h, S^{n-1}, 0)$ que es no nulo (porque $h$ es impar), por lo que cualquier extensión de $h$ a $D^n$ debe anularse. Por como hicimos las identificaciones, podemos pensar a $g|_{D^n}$ como una de estas extensiones. Esto prueba el teorema.

**Corolario 2.1.14** *Sea $A_1 \ldots A_n$ un cubrimiento por cerrados de $S^n$ entonces algún $A_i$ contiene un par de puntos antipodales.*

**Demostración** Basta considerar la función continua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x) = (dist(x, A_1), \ldots, dist(x, A_n))$$

por Borsuk-Ulam existe un $y$ tal que $f(y) = f(-y)$. El punto $y$ está en algún $A_i$, así que $dist(y, A_i) = 0$. Pero entonces $dist(-y, A_i) = 0$ y $-y \in A_i$.

**Teorema 2.1.15** *Dada $f : S^n \to S^n$ continua tal que $\langle f(x), x\rangle = 0\ \forall x \in S^n$, $f$ es homotópica a $id$ y a $-id$.*

**Demostración** Tomamos la homotopía del segmento con $\pm id$.

$$H_\lambda(x) = \lambda f(x) \pm (1-\lambda)x$$

$H_\lambda$ no se anula nunca. Supongamos $H_\lambda(x) = 0$. Obviamente debe ser $\lambda \neq 1$. Multiplicando por $x$,

$$0 = \lambda\langle f(x), x\rangle \pm (1-\lambda)\langle x, x\rangle = \pm(1-\lambda)\langle x, x\rangle$$

entonces $x = 0$ que es absurdo.

Ahora podemos normalizar $H$ para obtener una homotopía dentro de $S^n$.

**Corolario 2.1.16** (Teorema de la bola peluda)

*Si existe un campo continuo de vectores unitarios tangentes a $S^n$, entonces $n$ es impar.*

**Demostración** Si identificamos el espacio tangente a $S^n$ en un punto $x$ con el subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ correspondiente, el campo está dado por una $f : S^n \to S^n$ continua que cumple que $f(x) \in T_x S^n$. $f$ está en las condiciones del teorema anterior, entonces $id$ y $-id$ son homotópicas. Pero sus grados son respectivamente 1 y $(-1)^{n+1}$. Como son iguales, $n$ es impar.

## 2.2. El grado en dimensión infinita

Nos proponemos definir el grado de funciones entre espacios de Banach. Para esto será necesario tener hipótesis adicionales. Cabe destacar que no está claro cuál es la condición natural para esta definición, pero que sólo con la de continuidad no alcanza. Veamos un ejemplo.

**Proposición 2.2.1** *Sea $S$ la esfera de $l^2(\mathbb{R})$. $S$ es contráctil.*

**Demostración** Consideramos el operador shift $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, \dots)$ y $H$ la homotopía del segmento entre la identidad y $T$. Como $T$ no tiene autovalores no nulos, $H$ no se anula en $l^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ y podemos normalizarla para obtener una homotopía entre $id_S$ y $T : S \to S$ (observar que $T$ es una isometría y $T(S) \subseteq S$).

Ahora tomamos la siguiente homotopía: $G(t,(x_1,x_2,\dots)) = (\sin(t),\cos(t)x_1,\cos(t)x_2,\dots)$ es claro que $G(0,x) = T(x)$, $G(1,x) = (1,0,0,\dots)$ y $Im(g) \subseteq S$. Luego $T$ (y por lo tanto la identidad de $S$) es nullhomotópica.

En este ejemplo se ve que el problema de la dimensión infinita es que en una homotopía podemos mover infinitas coordenadas simultáneamente. Pero no todo está perdido.

**Definición** Sean $X, Y$ espacios de Banach y $f : D \subset X \to Y$ una función continua. Decimos que $f$ es compacta si $\overline{f(B)}$ es compacto para todo $B \subset D$ acotado.

Llamamos rango de $f$ a la dimensión del subespacio generado por la imágen.

**Proposición 2.2.2** *Dada $f : D \subset X \to Y$ compacta con $D$ acotado, existe $f_\epsilon : D \to Y$ continua de rango finito tal que $||f - f_\epsilon||_\infty < \epsilon$.*

**Demostración** Sabemos que $K = f(D)$ es totalmente acotado. Entonces existen $B_i$ bolas de radio $\epsilon$ y centros $y_i, i = 1\dots,n$ que cubren $K$. Definimos

$$f_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dist(f(x), B_i^c)}{\sum_{j=1}^{n} dist(f(x), B_j^c)} y_i$$

El denominador nunca se anula, justamente porque $\{B_i\}$ es un cubrimiento de $K$. $f_\epsilon$ es continua y la imagen de $f_\epsilon$ cae dentro de la cápsula convexa de los $y_i$ que está dentro de un subespacio de dimensión finita. Además

$$||f(x) - f_\epsilon(x)|| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{dist(f(x), B_i^c)}{\sum_{j=1}^{n} dist(f(x), B_j^c)} ||f(x) - y_i||$$

En todo sumando no nulo correspondiente al índice $i$, debe valer que $f(x) \in B_i$ y por lo tanto $||f(x) - y_i|| < 2\epsilon$. Luego

$$||f(x) - f_\epsilon(x)|| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{dist(f(x), B_i^c)}{\sum_{j=1}^{n} dist(f(x), B_j^c)} \epsilon \leq \epsilon$$

y el teorema queda probado.

**Lema 2.2.3** *Sea $X$ un Banach, $D$ abierto y acotado, $K : \overline{D} \subseteq X \to X$ continua y compacta, $f : D \subseteq X \to X, f = Id - K$, $p \in D \setminus f(\partial D)$*

*Entonces $dist(p, f(\partial D)) > 0$*

**Demostración** De lo contrario tendríamos una sucesión $x_n \in \partial D$ con $f(x_n) \to p$. Al ser $x_n$ acotada y $K$ compacta podemos suponer que $K(x_n) \to q$, luego $x_n = K(x_n)+p \to q+p \in \partial D$ entonces $q = K(p+q)$ y $f(p+q) = p+q-K(p+q) = p$ que contradice la hipótesis.

**Definición** Bajo las condiciones del lema anterior definimos:

$$deg(f, D, p) = deg(f_\epsilon|_V, D \cap V, p) \tag{2.8}$$

donde $\epsilon < \frac{1}{2} dist(p, f(\partial D))$ y $f_\epsilon$ tiene imagen en $V$ que es de dimensión finita.

Debemos ver que la definición no depende de la $f_\epsilon$ ni del $\epsilon$. Si tenemos otra aproximación $g_\delta$, llamamos $V, W$ a los subespacios donde caen $f_\epsilon, g_\delta$ y $U = V + W$. Por la fórmula del producto cartesiano vale que

$$deg(f_\epsilon, D \cap V, p) = deg(f_\epsilon, D \cap U, p)$$

$$deg(g_\delta, D \cap W, p) = deg(g_\delta, D \cap U, p)$$

Por como elegimos el $\epsilon$ es fácil ver que la homotopía del segmento entre $f_\epsilon$ y $g_\delta$ cumple 5 de 2.1.7 probando que los dos grados son iguales.

Llamamos perturbaciones compactas de la identidad (PCI) a las funciones de la forma $Id - K$ con $K$ compacta.

**Observaciones** Las propiedades de la proposición 2.1.7 siguen valiendo para el grado de LS, así como también vale la fórmula del producto cartesiano. La única que merece mención es la propiedad de invariancia homotópica.

**Proposición 2.2.4** *$f, g : D \subset X \to X$ PCIs $p \in X \setminus \partial D$, $H : D \times I \to X$ tal que $p \notin H_t(\partial D)$ y $H_t$ es PCI $\forall t$. Entonces $deg(f, D, p) = deg(g, D, p)$.*

La razón por la que vale es que $deg(., D, p) : K \to \mathbb{Z}$ es continuo donde $K$ es el espacio de PCIs. Por eso necesitamos que la homotopía sea una curva contenida en $K$.

**Definición** Mirando la propiedad (7) de (2.1.7) se ve que si tenemos $x$ un cero aislado de $f$ y $D_i$ es un filtro de entornos de $x$, el grado de $f$ en $D_i$ eventualmente está bien definido y es (eventualmente) constante. A este número lo llamamos el índice de $x$ como cero de $f$ y lo notamos

$$I(f, x, 0)$$

# Capítulo 3

# Aplicaciones al análisis no lineal

## 3.1. Un teorema de extensión

Empezamos esta sección con una herramienta importante para probar los teoremas que siguen. Recordamos un resultado de topología general.

**Definición** Un espacio topológico $X$ se dice paracompacto si es $T2$ y todo cubrimiento por abiertos tiene un refinamiento localmente finito. Es decir que dado un cubrimiento de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$, existe un cubrimiento de abiertos $\{V_j\}_{j\in J}$ tal que $\forall j \in J\ \exists i \in I$ con $V_j \subseteq U_i$ y tal que $\forall x \in X\ \exists V_x$ entorno de $x$ que es disjunto con $V_j$ para todos salvo finitos $j$.

**Lema 3.1.1** *Todo espacio métrico es paracompacto.*

**Observaciones** La demostración usa fuertemente el axioma de elección, a menos que el espacio sea separable.

**Teorema 3.1.2** Teorema de extensión de Dugundgi
*$E$ y $X$ espacios de Banach, $C \subseteq E$ cerrado y $K \subseteq X$ convexo. Sea $f : C \to K$ continua. Entonces existe una función continua $g : E \to K$ con $g|_C = f|_C$*

**Demostración** Llamamos

$$r_u = \frac{1}{3} dist(u, C)$$

y

$$B_u = B(u, r_u)$$

$diam(B_u) \leq dist(B_u, C)$ La colección $\{B_u\}_{u \in E \setminus C}$ es un cubrimiento por abiertos de $E \setminus C$ que es un espacio paracompacto. Entonces tenemos un refinamiento $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ localmente finito con una partición de la unidad $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ subordinada al cubrimiento. Para cada $\lambda \in \Lambda$ tomamos un $u_\lambda \in C$ tal que

$$dist(u_\lambda, O_\lambda) \leq 2dist(C, O_\lambda)$$

definimos

$$g(u) = f(u)$$

para $u \in C$

$$g(u) = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda(u) f(u_\lambda)$$

para $u \notin C$
De la definición tenemos que $g$ es una extensión de $f$ que es continua en $E \setminus C$ y en $C^o$ (puede ser que $C^o$sea vacío). Solo resta ver que $g$ es continua en $\partial C$ "desde afuera". Sean $u \in \partial C$ y $v \in E \setminus C$.

$$||g(u) - g(v)|| = ||f(u) - \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda(v) f(u_\lambda)|| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda(v) ||f(u) - f(u_\lambda)||$$

En cada sumando no nulo de índice $\lambda$, $v \in O_\lambda$. Dado $w \in O_\lambda$, $||v - u_\lambda|| \leq ||v - w|| + ||w - u_\lambda|| \leq diam(O_\lambda) + ||w - u_\lambda||$. Tomando ínfimo para $w \in O_\lambda$ tenemos

$$||v - u_\lambda|| \leq diam(O_\lambda) + dist(u_\lambda, O_\lambda)$$

Ahora, $O_\lambda \subseteq B_{u_1}$ para algún $u_1 \in E \setminus C$. Entonces, dado que

$$diam(O_\lambda) \leq diam(B_{u_1}) \leq dist(B_{u_1}, C) \leq dist(C, O_\lambda)$$

obtenemos

$$||v - u_\lambda|| \leq 3dist(C, O_\lambda) \leq 3||v - u||$$

Luego, para todo $\lambda$ con $p_\lambda(u) \neq 0$ tenemos $||u - u_\lambda|| \leq ||v - u|| + ||v - u_\lambda|| \leq 4||u - v||$ Con estas cotas, y como $f$ es continua, si $v \to u \Rightarrow p_\lambda(v)||f(u) - f(u_\lambda)|| \to 0$ uniformemente en $\lambda$. Y como $\sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda(u) = 1 \Rightarrow ||g(u) - g(v)|| \to 0$

**Corolario 3.1.3** *$E, X$ espacios de Banach, $C \subseteq E$ cerrado, $f : C \to X$ continua. Entonces $f$ admite una extensión a $E$ cuya imagen cae en $co(f(C))$ (la cápsula convexa de la imagen de $f$).*

**Observaciones** Si además $f$ es una función compacta y $C$ es acotado, se puede ver que $g$ es compacta. Es claro que $f(C)$ es precompacto y que si $B$ es acotado, $\overline{g(B)} \subset \overline{co(f(C))}$. Hay que ver que la cápsula convexa de un precompacto es precompacta. Este resultado es una propiedad de las medidas de no-compacidad (Ver [1], teorema 6.1.5).

## 3.2. Teorema del punto fijo de Schauder

**Proposición 3.2.1** *Sea $X$ un espacio de Banach, $C \subseteq X$ un conjunto convexo, cerrado, acotado y con interior no vacío. Sea*

$$T : C \to C$$

*Una funcion continua y compacta. Entonces $T$ tiene un punto fijo.*

**Demostración** Llamemos $D = C^o$ y sea $x_0 \in D$. Como C es convexo, $\partial C = \partial D$ y $\overline{D} = \overline{C} = C$. Probemos esto.

Sea $x \in C$, y $B = B(x_0, r) \subseteq C$, $B_t = tx + (1-t)B \subseteq C \, \forall t \in [0, 1]$. Como $B_t$ es entorno de $tx + (1-t)x_0$ para $t \in (0, 1)$, este punto está en $D$. Se sigue que $D$ es denso en $C$. Entonces $\overline{D} = \overline{C}$ y $\partial D = \overline{D} \setminus D^o = \overline{C} \setminus C^o = \partial C$.

Volviendo al problema, sea $f_\lambda = Id - (\lambda x_0 + (1-\lambda)T)$ con $0 \leq \lambda \leq 1$. Un cero de $f_\lambda$ es un $x$ que cumple $x = \lambda x_0 + (1-\lambda)T(x)$. Como $x_0$ está en el interior y $C$ es convexo, para $\lambda > 0$ un cero de $f_\lambda$ debe estar en el interior de $C$. Al ser $ImT \subseteq C$, sabemos que $f_\lambda$ no tiene ceros en $\partial D$ a menos que $\lambda = 0$, en cuyo caso tenemos el punto fijo buscado. Supongamos que esto no ocurre.

Por la propiedad de invariancia homotópica tenemos que $deg(f_0, D, 0) = deg(f_1, D, 0)$. Pero $deg(f_0, D, 0) = deg(Id - x_0, D, 0) = deg(Id, D, x_0) = 1$. Luego $deg(f_0, D, 0) = 1$ y $f_0$ tiene al menos un cero en $D$ como queríamos probar.

**Teorema 3.2.2** (Punto fijo de Schauder) *En el teorema anterior, la hipótesis de que $C$ tenga interior no vacío, no es necesaria.*

**Demostración** El teorema de extensión de Dugundgi dice que existe una

$$\overline{T} : B \to C$$

compacta con $\overline{T}|_C = T$. Donde $B$ es una bola que contiene a $C$. Por el teorema anterior $\overline{T}$ tiene un punto fijo que necesariamente es punto fijo de $T$.

**Observaciones** La hipótesis de que $C$ sea convexo, se puede relajar. Si $C$ es homeomorfo a un convexo, también vale.

## 3.3. Teoremas globales sobre invariancia homotópica

En el teorema (2,1,4) del capítulo 2, describimos el conjunto de ceros de una homotopía por medio de la geometría diferencial. Ahora veremos cómo usando el grado como herramienta principal, se pueden dar descripciones análogas para el caso de funciones continuas en dimensión infinita.

**Definición** Dados $X, Y$ espacios de Banach pensamos a $X \times Y$ con la norma dada por $||(x, y)|| = max(||u||, ||y||)$.
Dado $G \subseteq X \times Y$ un conjunto abierto y $x \in X$, definimos $G_x = \{y \in Y : (x, y) \in G\}$.
Idem $G_y$ con $y \in Y$
Dada una función $f : X \times Y \to Z$ llamamos $f_x$ con $x \in X$ a la función $f(x, .)$. Es decir, $f_x(y) = f(x, y)$. Idem $f_y$ (con $y \in Y$).
En los teoremas de esta sección usaremos mayormente el caso en que $Y = \mathbb{R}$.

**Teorema 3.3.1** Principio generalizado de invariancia homotópica

*Sea $O$ un conjunto abierto y acotado de $X \times [a, b]$. Sea $T : \overline{O} \to X$ una función continua y compacta y $f_\lambda = f(x, \lambda) = x - T(x, \lambda)$. Supongamos que $0 \notin f(\partial O)$*

*Entonces $deg(f_\lambda, O_\lambda, 0)$ es independiente de $\lambda$.*

**Demostración** Podemos suponer que $O \neq \emptyset$ y que $a = \text{ínf}\{\lambda : O_\lambda \neq \emptyset\}$, $b = \sup\{\lambda : O_\lambda \neq \emptyset\}$
Sea $U = O \cup O_a \times (a - \epsilon, a] \cup O_b \times [b, b + \epsilon)$ donde $\epsilon$ está fijo. Entonces $U$ es un abierto

acotado de $X \times \mathbb{R}$. Sea $\overline{T}$ la extensión de $T$ a $X \times \mathbb{R}$ dada por el teorema de extensión de Dugundgi.
Sea $\overline{f}(x,\lambda) = (x - \overline{T}(x,\lambda), \lambda - \lambda^*)$ con $\lambda^* \in (a,b)$ fijo. $\overline{f}$ es una perturbación compacta de la identidad en $X \times \mathbb{R}$. Además, para cada $\lambda^*$, $\overline{f}(x,\lambda) \neq 0$ con $(x,\lambda) \in \partial U$.
El $deg(\overline{f}, U, 0)$ esta bien definido y es constante respecto de $\lambda$, y esto es para cada $\lambda^*$.
Consideramos la siguiente homotopía:

$$g_t(x,\lambda) = (x - t\overline{T}(x,\lambda) - (1-t)\overline{T}(x,\lambda^*), \lambda - \lambda^*)$$

$(x,\lambda)$ es un cero de $g_t$ si y solo si $\lambda = \lambda^*$ y $x = \overline{T}(x,\lambda)$. Entonces nuestras hipótesis implican que $g_t(x,\lambda) \neq 0$ para $(x,\lambda) \in \partial U$ y $t \in [0,1]$. Por el principio de invariancia homotópica concluimos que

$$deg(\overline{f}, U, 0) = deg(g_1, U, 0) = deg(g_0, U, 0)$$

pero $deg(g_0, U, 0) = deg(g_0, O_{\lambda^*} \times (a-\epsilon, b+\epsilon), 0)$ porque los ceros de $g_0$ están en $\lambda = \lambda^*$. Además, por la fórmula del producto cartesiano,

$$deg(g_0, O_{\lambda^*} \times (a-\epsilon, b+\epsilon), 0) = deg(g_0(-,\lambda^*), U_{\lambda^*}, 0)$$

Esto completa la prueba.

**Observaciones** Lo que dice este teorema es que además de poder "mover" a $p$ y a $f$ de forma continua sin cambiar $deg(f, D, p)$, ahora podemos mover al abierto $D$. Esta es una propiedad sumamente fuerte. Para ver lo que se puede hacer con ella, necesitamos algo de topología general.

### 3.3.1. Conexión, lema de Whyburn

**Definición** Dado un espacio topológico $X$ y un punto $x \in X$ llamamos "componente conexa de $x$" $(C_x)$ a la unión de los conjuntos conexos contienen a $x$. $C_x$ es conexo y cerrado.

Llamamos "quasi-componente conexa de $x$" $(Q_x)$ a la intersección de los conjuntos que contienen a $x$ y son a la vez abiertos y cerrados. Obviamente, una quasi-componente es cerrada. Pero no tiene porqué ser abierta ni conexa.

Es claro que $C_x \subseteq Q_x$ ($C_x$ está dentro de todo conjunto abierto y cerrado que contenga a $x$), pero en general no vale la igualdad.

Tenemos dos relaciones de equivalencia en el espacio $X$ dadas por las particiones en las componentes conexas o quasi-conexas. La partición de $C_x$ es más fina.

**Definición** Dados dos conjuntos $A$ y $B$ en un espacio topológico $X$, decimos que $A$ y $B$ están conectados si existe un conjunto conexo de $X$ que se interseca con $A$ y $B$.

Decimos que $A$ y $B$ están separados si existen abiertos disjuntos $U, V$ de $X$ tales que $U \supset A$, $V \supset B$ y $X = U \cup V$. Claramente, es lo mismo decir que $A$ y $B$ están separados si existe un $F \supset A$ abierto y cerrado que no toca a $B$. Dos puntos están separados si y solo si pertenecen a distintas componentes quasi-conexas.

**Lema 3.3.2** *Sea $X$ un espacio topológico compacto y $T2$. Entonces las quasi-componentes son conexas. Luego $C_x = Q_x \; \forall x \in X$*

**Demostración** Supongamos que $Q_x$ no es conexa. Tenemos un abierto $G \subseteq X$ y un $q \in Q_x \setminus G$ con

$$\partial G \cap Q_x = \emptyset$$

Dado un $y \in \partial G$, por la igualdad anterior $y$ NO está en algún conjunto $B_y$ abierto y cerrado, que contiene a $x$ (recordar la definición de $Q_x$). Entonces $\{B_y\}$ es un cubrimiento por abiertos de $\partial G$ que es compacto. Si unimos un subcubrimiento finito de los $\{B_y\}$ obtenemos un conjunto abierto y cerrado $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_{y_j}$ con $x \in B$ y $B \cap \partial G = \emptyset$. Ahora basta tomar $F = B \cap G$ que es abierto. Veamos que también es cerrado.

$$\overline{F} = \overline{B \cap G} \subseteq \overline{B} \cap \overline{G} = B \cap \overline{G} = (B \cap \partial G) \cup (B \cap G) = B \cap G = F$$

Pero teníamos que $q \notin G$ entonces $q \notin F$ lo que es absurdo porque $q$ y $x$ estaban quasi-conectados. Esto termina la demostración.

**Lema 3.3.3** (Whyburn) *Sean $A, B \subset K$ cerrados con $K$ compacto y $T2$. Entonces $A$ y $B$ están conectados o separados.*

**Demostración** Si $A$ y $B$ son puntos, el resultado se reduce al lema anterior. Si no, basta observar que $\forall a \in A, b \in B$, $a$ y $b$ NO están conectados. Entonces tenemos un cubrimiento finito de $A$ por conjuntos $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ que son abiertos y cerrados, y que no tocan a $B$. La unión es abierta y cerrada, y nos da la separación que buscábamos.

### 3.3.2. Continuos de soluciones

A partir de ahora, un continuo será un conjunto cerrado y conexo.

**Teorema 3.3.4** Teorema de continuacion de Leray-Schauder

*Bajo las mismas hipótesis del teorema 3.3.1 y suponiendo que* $deg(f_a, O_a, 0) \neq 0$, *Existe un continuo* $C \subseteq O$ *de ceros de* $f$ *tal que* $C_a \cap O_a \neq \emptyset \neq C_b \cap O_b$

**Demostración** Llamamos

$$S = f^{-1}(\{0\}) \cap \overline{O}$$
$$A = S_a \times \{a\}$$
$$B = S_b \times \{b\}$$

Sabemos que $deg(f_a, O_a, 0) = deg(f_b, O_b, 0) \neq 0$ y $A \neq \emptyset \neq B$. Al ser $O$ acotado y $T$ compacta, $S$, $A$ y $B$ resultan compactos. Usando el lema de Whyburn, si $A$ y $B$ no están conectados en $S$, existe una separación en $S$ de la forma $A \subseteq K_A$, $B \subseteq K_B$, $S = K_A \cup K_B$, $K_A \cap K_B = \emptyset$. Con $K_A$ y $K_B$ compactos. Tomando un inflado de $K_A$, construimos un conjunto $U$ abierto de $[a, b] \times X$ con $\partial U \cap S = \emptyset$. Sea $V = U \cap O$. $\partial V \subseteq \partial U \cup \partial O \Rightarrow \partial V \cap S = \emptyset$. Pero entonces

$$deg(f_a, V_a, 0) = deg(f_b, V_b, 0) = deg(f_b, \emptyset, 0)$$

Ahora, como $A \subseteq V$, no hay ceros de $f$ en $O_a \setminus \overline{V_a}$, luego

$$deg(f_a, O_a \setminus \overline{V_a}, 0) = 0$$
$$deg(f_a, O_a, 0) = deg(f_a, V_a, 0) + deg(f_a, O_a \setminus \overline{V_a}, 0) = deg(f_a, V_a, 0) = 0$$

Esto contradice la hipótesis.

Sea $T : \overline{D} \to X$ una función continua y compacta y $f_\lambda = f(x, \lambda) = x - T(x, \lambda)$. Consideremos la ecuación

$$f(x, \lambda) = 0 \tag{1}$$

El teorema de la función implícita dice que si $f$ es $C^1$ y su diferencial respecto de $u$ en $(u_0, \lambda_0)$ es un isomorfismo, entonces existe una curva $\{u(\lambda), \lambda\}$ de soluciones de (1) que pasa por $(u_0, \lambda_0)$. Esta condición además implica que $u_0$ es un cero aislado de (1) en $\lambda = \lambda_0$ y que

$$deg(f_{\lambda_0}, O, 0) \neq 0 \tag{2}$$

donde $O$ es un entorno aislante. Vamos a ver que la condición (2) sola implica que la ecuación tiene una rama global de soluciones a cada lado de $\lambda$.

**Teorema 3.3.5** (Globalización del teorema de la función implícita) *Sea $O$ un abierto acotado de $X$. Supongamos que para $\lambda = \lambda_0$ la ecuación (1) tiene solución única $u_0$ en $O$, y que vale (2).*
*Entonces existe un continuo $C^+ \subseteq X \times [\lambda_0, \infty)$ de soluciones de (1) tal que*

$$C^+ \cap O \times \{\lambda_0\} = (u_0, \lambda_0) \tag{i}$$

$$C^+ \cap (X \setminus O) \times \{\lambda_0\} \neq \emptyset \text{ o bien } C^+ \text{ es no acotado en } X \times [\lambda_0, \infty) \tag{ii}$$

**Demostración** Sea $C^+$ el conjunto conexo maximal que cumpla la condición (i) y supongamos que no se cumple (ii). Al ser $C^+$ acotado y $T$ compacta, es fácil ver que $C^+$ es compacto. Vamos a construir un abierto acotado $U$ tal que $U_{\lambda_0} \subseteq O$, $C^+ \subset U$ y $f$ no tiene ceros en $\partial U$. Como $U$ es acotado, $U_{\lambda_1} = \emptyset$ para algún $\lambda_1 > \lambda_0$. Entonces, por el teorema de continuación de Leray-Schauder,

$$I(f_{\lambda_0}, u_0) = deg(f_{\lambda_0}, U_{\lambda_0}, 0) = deg(f_{\lambda_1}, U_{\lambda_1}, 0) = 0$$

Pero esto es absurdo porque por hipótesis, el grado anterior es no nulo.

Para construir el abierto $U$, Tomamos $N$ un entorno de $C^+$ disjunto con $(X \setminus O) \times \{0\}$ y tal que $N_{\lambda_0} \subseteq O$. El conjunto $V = S \cap \overline{N}$ es compacto. Como $\partial N$ y $C^+$ son disjuntos y $C^+$ es conexo, tenemos que $C^+$ y $\partial N \cap S$ no están conectados en $V$. Entonces (por Whyburn) tenemos una separación por compactos $K_1$ y $K_2$ tales que $V = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $C^+ \subseteq K_1$ y $\partial N \cap S \subseteq K_2$. Ahora tomamos $U$ un entorno de $K_1$ que esté dentro de $N$ y sea disjunto con $K_2$.

**Observaciones**

1. La hipótesis de que la solución sea única en $O$, está sólo para facilitar la prueba. Alcanza con la condición (2)

2. Si se cumple que $C^+$ es acotado y $D$ es un entorno acotado de los ceros de $f_{\lambda_0}$ que no están en $O$ entonces, por la propiedad de escisión, $deg(f_{\lambda_0}, O \cup D, 0) = deg(f_{\lambda_0}, O, 0) + deg(f_{\lambda_0}, D, 0)$ y este grado es 0 por invariancia homotópica.

3. Si las soluciones de $f_{\lambda_0}$ son aisladas y tienen todas grados del mismo signo, entonces todos los continuos son no acotados.

**Ejemplo** sean $p, q \in \mathbb{C}[X]$ polinomios mónicos de grado $n$ y pensemos que son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Sea

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

dada por

$$f(z, \lambda) = \lambda p(z) + (1 - \lambda)q(z)$$

Sabemos que los ceros de $f$ estan acotados, que los ceros de $f_0$ y $f_1$ son aislados y que todos tienen grado positivo. Entonces para cada raíz de p existe un continuo de ceros de $f$ que es no acotado respecto de $\lambda$. En particular, cada uno llega a $\lambda = 1$. Luego los ceros de $p$ y de $q$ están conectados.

4. Supongamos que $f = Id - T$ ($T$ una función compacta) resulta una función coerciva, no sobreyectiva y que existe $x \in X$ tal que $deg(f, O, f(x))$ esté definido en algún entorno $O$ de $x$ y sea no nulo.
   Consideremos la función $g(x, \lambda) = f(x, \lambda) - (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0)$ donde $x_1$ no está en la imagen de $f$.
   Al ser $f$ coerciva, los ceros de $g$ son acotados en $x$. Además $g_1 = f - x_1$ que tampoco tiene ceros. El teorema anterior dice que debe haber un cero de $g_0$ en $X \setminus O$ y por lo tanto, una preimagen de $f(x_0)$ por $f$ distinta de $x_0$.
   Esta observación puede enunciarse de la sigiuente forma:
   $T : X \to X$ continua, compacta y $f = Id - T$ coerciva. Si existe un $x_0 \in X$ que es solución única de la ecuación $y = f(x)$ y $I(f, x) \neq 0$, entonces f es sobreyectiva.
   Esto puede pensarse como una versión globalizada del teorema de la función inversa.

   Un ejemplo de lo anterior es el teorema fundamental del álgebra

### 3.3.3. Aplicaciones a Teoría de Bifurcación

Consideramos la ecuación

$$f(x, \lambda) = 0 \tag{3}$$

donde

$$f(x, \lambda) = x - T(x, \lambda)$$

con $T : X \times \mathbb{R} \to X$ una función compacta. Supongamos que $T(0, \lambda) = 0$ de tal forma que hay una solución trivial para la ecuación 3, para todo $\lambda$.

llamamos
$S_0 = \{(x, t) : f(x, t) = 0\}$ a las soluciones del problema.
$T = \{0\} \times \mathbb{R}$ las soluciones triviales.
$A = \{0\} \times [a, b]$ las soluciones triviales en $[a, b]$
$S_1 = \overline{S_0 \setminus T}$ las soluciones que son no triviales o son aproximables por soluciones no triviales

**Definición** Decimos que $(0, \lambda_0)$ es un punto de bifurcación (o que $\lambda_0$ es un valor de bifurcación) de la ecuación si dentro de todo entorno de $(0, \lambda_0)$ existe una solución no trivial. En otras palabras, si $(0, \lambda_0) \in S_1$

**Teorema 3.3.6** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ tales que la solución trivial es aislada para $\lambda_0 = a, b$ y $a, b$ no son puntos de bifurcación.*
*Supongamos además que*

$$I(f_a, 0) \neq I(f_b, 0)$$

*donde $O = B_r(0) \subset X$ es un entorno aislante del 0.*
*Entonces hay un continuo $C \subseteq S_1$ de soluciones "no triviales"que cumple una de las siguientes condiciones:*

*1) Es no acotado en $X \times \mathbb{R}$*

*2) $C \cap (T \setminus A) \neq \emptyset$*

**Demostración** Llamemos $H = S_1 \cup A$. Sea $C \subset H$ la componente conexa de $H$ que contiene a $A$. Este va a ser el continuo buscado.

Dado que $a$ y $b$ no son valores de bifurcación, tenemos $B_a = B_\delta(0, a) \subset X \times \mathbb{R}$ y $B_b = B_\delta(0, b)$ disjuntos con $S_1$.

Definimos la siguiente familia de conjuntos:

$$U = \{\Omega \subset X \times \mathbb{R} : \Omega = \Omega_0 \cup \Omega_\infty\}$$

donde $\Omega_0 = B_\epsilon(0) \times [a,b]$, $\epsilon < \delta$ y $\Omega_\infty$ es un abierto acotado de $X$ con $\overline{\Omega_\infty} \cap T = \emptyset$.

i) Primero vamos a ver que $\forall\, \Omega \in U$ hay soluciones no triviales en $\partial\Omega$. Supongamos que esto no ocurre para un $\Omega$ en particular:

Consideramos $\Omega_\infty \cap (X \times [\alpha, a])$ como abierto de $X \times [\alpha, a]$, donde $\alpha$ es tal que $\Omega_\alpha = \emptyset$ (recordar que $\Omega$ es acotado).
Gracias a la existencia de $B_a$ sabemos que no hay ceros en $\partial\Omega_\infty \cap (X \times [\alpha, a])$:
$\partial\Omega_\infty \cap T = \emptyset \Rightarrow \partial\Omega_\infty \cap S_0 \subseteq B_a^c$
luego $\partial\Omega_\infty \cap S_0 \cap X \times [\alpha, a] \subseteq B_a^c \cap X \times [\alpha, a] \subseteq (\overline{\Omega_0})^c$
pero $\partial\Omega_\infty \setminus \overline{\Omega_0} \subseteq \partial\Omega$
entonces $\partial\Omega_\infty \cap S_0 \cap X \times [\alpha, a] \subseteq \partial\Omega \cap S_0 = \emptyset$
(en un futuro trataremos de evitar este tipo de cuentas y apelar a la intuición del lector) La frontera de $\Omega_\infty \cap X \times [\alpha, a]$ como subespacio de $X \times [\alpha, a]$ tampoco contiene soluciones, así que por el principio generalizado de invariancia homotópica, tenemos que $deg(f_a, \Omega_{\infty a}, 0) = deg(f_\alpha, \Omega_{\infty\alpha}, 0) = 0$. Un argumento análogo muestra que $deg(f_b, \Omega_{\infty b}, 0) = 0$. Por la propiedad de escisión, $deg(f_a, \Omega_a, 0) = I(f_a, 0)$ y $deg(f_b, \Omega_b, 0) = I(f_b, 0)$. Miramos $\Omega \cap (X \times [a,b])$ como abierto de $X \times [a,b]$. Como las soluciones triviales estan en $\Omega_0$, no hay soluciones en $\partial\Omega$ (frontera en $X \times [a,b]$). Otra vez por el principio generalizado de invariancia homotópica, $deg(f, \Omega_a, 0) = deg(f, \Omega_b, 0)$. Pero entonces resulta que.

$$I(f_a, 0) = I(f_b, 0)$$

que contradice la hipótesis.

ii) Dado un $\Omega \in U$ vamos a ver que $C \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ Consideramos los siguientes conjuntos:

$$K = S_0 \cap \overline{\Omega}$$
$$B = S_0 \cap \partial\Omega$$

Al ser $T$ compacta y $T|_{S_0} = id$, $S_0$ es localmente compacto. $K$ es entonces un espacio compacto y $A, B$ son subespacios compactos de $K$. Por el lema de Whyburn, $A$ y $B$ estan conectados o separados. Supongamos que estan separados, entonces $K = K_A \cup K_B$ compactos y existen $U, V$ abiertos acotados disjuntos con $A \subset K_A \subset U, B \subset K_B \subset V$. Consideramos $\Omega^* = \Omega \cap U$. $\Omega^*$ es un abierto cuya frontera es disjunta con $K$ porque

$$\partial(\Omega \cap U) \subseteq \partial\Omega \cup \partial U \Rightarrow \partial\Omega^* \cap S_0 \subseteq B \cup \partial U$$

Además, con un poco de imaginación, $\Omega^* \in U$. Esto niega lo demostrado en la parte $i$.

iii) Ahora sí, supongamos que no se cumplen ni 1 ni 2: Como suponemos que $C$ es acotado, resulta compacto y podemos construir un abierto $V = B_\epsilon(C)$ como en el teorema (3.3.5) cuya frontera sea disjunta con $S_1$. Cambiando $a, b$ por $a - \epsilon, b + \epsilon$ (que para $\epsilon$ chico, no son valores de bifurcación), $V$ es un abierto que está en $U$ y cuya frontera es disjunta con $S_1$. Absurdo.

**Observaciones** El teorema anterior se puede aplicar al caso en que

$$T(x, \lambda) = \lambda B(x) + H(x, \lambda)$$

donde $B$ es lineal compacta y $H(x, \lambda) = o(x)$ uniformemente sobre compactos en $\lambda$. Es fácil ver que bajo estas hipótesis, los valores de bifurcación deben ser valores característicos de $B$ y por lo tanto finitos. Además se puede ver (con bastante trabajo) que bajo ciertas condiciones sobre $T$, en cada valor característico $\lambda_0$ de $B$ de multiplicidad algebraica impar, $I(f_\lambda, 0)$ cambia de signo cuando $\lambda$ cruza a $\lambda_0$. Esto significa que hay finitos valores de $\lambda$ que dependen sólo de $B$, de donde sale una rama de soluciones. Esto está detallado en un hermoso paper [10] "Spectral Theory and Nonlinear Analysis".

## 3.4. Teorema de Krein-Rutman

Usaremos el teorema de la función implícita global para mostrar una generalización a dimensión infinita del teorema de Perron-Frobenius, sobre autovalores de matrices positivas. Necesitamos una noción de operador positivo en espacios de Banach.

**Definición** Sea $X$ un espacio de Banach. Decimos que un conjunto $K$ es un cono en $X$ si
1) $K$ es cerrado convexo
2) $\mathbb{R}_{\geq 0} K \subseteq K$
3) $K \cap -K = \emptyset$

**Definición** Un cono en $K$ en $X$ induce un orden parcial $\leq_K$ dado por $u \leq_K v$ sii $v - u \in K$.
Una función lineal $L : X \to X$ es positiva si $L(K) \subseteq K$.
Si $K^o \neq \emptyset$ decimos que $L$ es fuertemente positiva si $L(K \setminus \{0\}) \subseteq K^O$

**Ejemplo** En $\mathbb{R}^n$, los elementos de coordenadas positivas.
En $C(\Omega, \mathbb{R})$, las funciones positivas.

**Teorema 3.4.1** *Sea $X$ un Banach con un cono $K$, $L : X \to X$ una función lineal positiva y compacta. Supongamos que existe un $w \in K$, $w \neq 0$ y una constante $m > 0$ tal que*

$$w \leq mL(w)$$

*donde $\leq$ es el orden dado por $K$.*
*Entonces existe $\lambda_0 > 0$ y $u \in K$, $||u|| = 1$ tal que*

$$u = \lambda_0 L(u)$$

*(En palabras, $L$ tiene un autovector en el cono, de autovalor positivo)*

**Demostración** Tomamos $T$, la extensión de Dugundgi a $X$ de la restricción de $L$ a $K$. Como $L$ es compacto $T$ también. Como $K$ es convexo $T(X) \subseteq K$. Consideramos la ecuación

$$u = \lambda T(u + \epsilon w)$$

donde $\epsilon > 0$ está fijo. Aplicamos el teorema global de la funcion implícita (3.3.5). Para $\lambda = 0$ tenemos solución única $u = 0$. Tenemos un continuo $C_\epsilon$ de soluciones en $X \times [0, \infty)$. Como $T(X) \subseteq K$ y $T|_K = L|_K$, vale que

$$u = \lambda L(u + \epsilon w) \; \forall (u, \lambda) \in C$$

luego

$$\lambda L(u) \leq u$$

,

$$\frac{\lambda \epsilon}{m} w \leq \lambda \epsilon L(w) \leq u$$

Aplicando $L$ a la última desigualdad, tenemos

$$\left(\frac{\lambda}{m}\right)^n \epsilon w \leq u \tag{1}$$

Por hipótesis, $w \neq 0$. Por 1, $\lambda \leq m$. Pero esto implica que $C_\epsilon \subseteq X \times [0, m]$. Como $C_\epsilon$ es no acotado, debe existir un $(u_\epsilon, \lambda_\epsilon) \in C_\epsilon$, $||u_\epsilon|| = 1$, $\lambda_\epsilon \in [0, m]$
Haciendo esta construcción para todo $\epsilon$ y tomando $\epsilon \to 0$, $\{(u_\epsilon, \lambda_\epsilon)\}$ contiene una sucesión convergente a un $(u, \lambda_0) \in C$. Como $||u|| = 1$, claramente $\lambda_0 > 0$

**Definición** Si $L : X \to X$ es una función $\mathbb{R}$ lineal, decimos que $\lambda \neq 0$ es un valor característico si $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor.

**Teorema 3.4.2** *Sea $X$ un Banach con un cono $K$ de interior no vacío. Sea $L : X \to X$ una función lineal, fuertemente positiva y compacta. Entonces existe un único $\lambda_0$ con las siguientes propiedades:*
*1) $\exists u \in K$, $u = \lambda_0 L(u)$*
*2) Si $\lambda \in \mathbb{R}$,$\lambda \neq 0$ es tal que $\exists v \in X$, $v \neq 0$ con $v = \lambda L(v)$ entonces $v \notin K \cup -K$ y $\lambda_0 < \lambda$*
*(en palabras, $L$ tiene un único valor característico $\lambda_0$ con autovector en $K \cup -K$, y este es positivo y más chico que todos los valores característicos)*

**Demostración** Sea $w \in K \setminus 0$. Como $L(w) \in K^o$, existe un $\delta > 0$ tal que $L(w) - \delta w \in K^o$ y esto, en términos del orden, significa que $\delta w \leq L(w)$.
Ahora, por el teorema anterior, existe un $\lambda_0 > 0$ y $u \in K$ tales que $u = \lambda_0 L(u)$. Como $L$ es fuertemente positivo, $u \in K^o$. Si $(v, \lambda) \in (K \setminus \{0\}) \times (0, \infty)$ es tal que $v = \lambda L(v)$, entonces $v \in K^o$ y para todo $\delta$ chico, tenemos $u - \delta v \in K^o$. Consecuentemente, existe un $\delta^*$ maximo tal que $u - \delta^* v \in K$ (o sea $u - rv \notin K$ si $r > \delta^*$). Ahora,

$$L(u - \delta^* v) = \frac{1}{\lambda_0}(u - \frac{\lambda_0}{\lambda}\delta^* v)$$

Que implica que $u - \frac{\lambda_0}{\lambda}\delta^* v \in K^o$ a menos que $u - \delta^* v = 0$. Si $u - \delta^* v = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda$ y si no $\lambda_0 < \lambda$ porque $\delta^*$ es maximo. Si $\lambda_0 < \lambda$ podemos hacer la misma cuenta intercambiando $u$ y $v$ y obtener (con otro $\delta^*$) $\lambda_0 < \lambda$ que es absurdo, o sea que tiene que ser $\lambda_0 = \lambda$ y $u = \delta^* v$. Con esto hemos probado que $\lambda_0$ es el único valor característico de $L$ con autovector en el cono, y que el autoespacio asociado a $\lambda_0$ es de dimensión 1.
Ahora sea $\lambda \neq \lambda_0$ otro valor característico de $L$ y sea $v \neq 0$ tal que $v \notin K \cup -K$. De nuevo, para $|\delta|$ chico, tenemos $u - \delta v \in K^o$ y que existe $\delta^* > 0$ máximo tal que $u - \delta^* v \in K$ y $\delta_* < 0$ mínimo tal que $u - \delta_* v \in K$. De nuevo,

$$L(u - \delta^* v) = \frac{1}{\lambda_0}(u - \frac{\lambda_0}{\lambda}\delta^* v)$$

$$L(u - \delta_* v) = \frac{1}{\lambda_0}(u - \frac{\lambda_0}{\lambda}\delta_* v)$$

Si $\lambda > 0$ concluimos que $\lambda_0 < \lambda$ y si $\lambda < 0$ tenemos que $\lambda_0\delta^* < \lambda\delta_*$ y $\lambda_0\delta_* > \lambda\delta^*$, entonces $|\lambda_0| < |\lambda|$.

**Definición** Sabemos del análisis de operadores compactos que $dim(ker(1 - \lambda_0 L)^n) < \infty$ y que la cadena de subespacios se estaciona en un natural $n$. Llamamos a este $n$ la multiplicidad algebraica de $\lambda_0$ y llamamos a $ker(1 - \lambda_0 L)^n$ el autoespacio generalizado asociado al autovalor $\lambda_0$.

**Teorema 3.4.3** *La multiplicidad algebraica de $\lambda_0$ en el teorema anterior es 1.*

**Demostración** Supongamos lo contrario. Sea $n$ la multiplicidad algebraica. Entonces existe un $v$ tal que $(1-\lambda_0 L)^n(v) = 0$ pero $(1-\lambda_0 L)^{n-1}(v) = w \neq 0$. $w$ es un autovector de valor característico $\lambda_0$. Sea $u$ el autovector dado por el teorema anterior. Si $w$,$u$ fueran linealmente independientes tendríamos $u - \delta^* w \neq 0$ con $\delta^*$ como antes,

$$L(u - \delta^* w) = \frac{1}{\lambda_0}(u - \delta^* w)$$

y como $L$ es fuertemente positiva, $u - \delta^* w \in K^o$ que contradice la maximalidad de $\delta^*$. $w = ku$ y podemos suponer que $k > 0$. Sea $z = (1 - \lambda_0 L)^{n-2}(v)$, $\lambda_0 L(z) = z - ku$. Aplicando $\lambda_0 L$ sucesivas veces, tenemos que $\lambda_0^m L^m(z) = z - mku \, \forall m \in \mathbb{N}$. Se sigue que $z \notin K$ por que de lo contrario $\frac{z}{m} - ku \in K \, \forall m \Rightarrow -ku \in K$ que no es cierto. Como $u \in K^o$, existen $\alpha > 0$ y $y \in K$ tales que $z = \alpha u - y$. Entonces $\lambda_0^m L^m(z) = \alpha u - \lambda_0^m L^m(y)$ y $\lambda_0^m L^m(y) = y + mku$. Tomamos $\beta > 0$ tal que $y \leq \beta u$, luego $\lambda_0^m L^m(y) \leq \beta u$ y por lo anterior se ve que $y + mku \leq \beta u$. Dividiendo esta desigualdad por $m$ y haciendo tender $m \to \infty$ obtenemos que $ku \in -K$ que es falso.

# Capítulo 4

# Aplicación a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Primero, algo de notación:

1. decimos que $|x|$ es el módulo de $x$ si $x \in \mathbb{R}$ y es la norma si $x \in \mathbb{R}^n$
2. para un $x \in X$ un espacio de Banach, notamos $\|x\|$ a la norma de $x$.
3. A menos que se indique lo contrario, la norma que se considera en $C^k(X, Y)$ es $\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \|x^{(i)}\|_\infty$

## 4.1. Problemas no resonantes

Empezamos con una aplicación del grado en dimensión finita.

### 4.1.1. Ecuacion periódica de primer orden

Consideramos la ecuación

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u(1) \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente lipschitz.

Bajo nuestras hipótesis sobre $f$ sabemos que dado un $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos una solución $u_x : [0, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ tal que $u_x(0) = x$ y que está definida en algún entorno del 0. Es más. Se puede probar que si la $u_x$ no se puede extender más allá de cierto intervalo $[0, b)$ entonces necesariamente es no acotada en $b$.

Pedimos la siguiente condición en $f$:

$$x.f(t, x) \leq 0 \, \forall t \in [0, 1], |x| = R \tag{4.2}$$

con $R > 0$.

Esta condición se lee como que el campo $f$ apunta hacia adentro en la esfera de radio $R$. Esto nos garantiza que las soluciones $u_x$ con $x \in B = \overline{B(0, R)}$ tienen imagen dentro de $B$ y por la observación anterior quedan definidas para todo tiempo $t$, en particular para $t = 1$.

Definimos la función $P : B \to \mathbb{R}^n$ como $P(x) = u_x(1)$. Esta se conoce en general como la "aplicación de Poincare" inducida por la ecuación (4.1). De la teoría clásica de ecuaciones ordinarias se sabe que $P$ es continua y por lo dicho en el párrafo anterior, $P : B \to B$.

Es claro que una solución periódica de (4.1) es $u_x$ donde $x$ es un punto fijo de $P$. Entonces el teorema del punto fijo de Brouwer nos da la existencia de una solución periódica.

### 4.1.2. Ecuación de segundo orden con condiciones de Dirichlet

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0, \; u(1) = u_1 \end{cases} \tag{4.3}$$

donde $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Buscamos condiciones de $f$ para que exista al menos una solución. Para esto planteamos el problema como una ecuación entre espacios de banach. Sea $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ y $K : X \to X$ dado por $K(v) = u$ donde $u$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, v(t)) \\ u(0) = u_0, \; u(1) = u_1 \end{cases} \tag{4.4}$$

Ahora el problema se traduce en buscar un $u$ tal que $u = K(u)$ o lo que es lo mismo, un cero del funcional $F = id - K$. Para esto nos proponemos encontrar un

abierto $D \subseteq X$ en donde $deg(F, D, 0) \neq 0$. Esto implicaría la existencia de un cero de $F$ adentro de $D$.

Para calcular el grado de $F$ podemos construir una homotopía entre $F$ y una función más sencilla, y usar que el grado es invariante. Consideramos el problema

$$\begin{cases} u''(t) = \lambda f(t, v(t)) \\ u(0) = u_0,\ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{4.5}$$

que induce un operador "solución" $K_\lambda$ y una $F_\lambda = id - K_\lambda$. Es claro que $K_1 = K$ y que $K_0(u) = l\ \forall u$ donde $l$ es la recta que une $(0, u_0)$ con $(1, u_1)$.

Hay que ver que $K_\lambda(x)$ es continua respecto de $(\lambda, x)$, que $K_\lambda$ es compacta para todo $\lambda$, y construir un abierto $D \subseteq X$ tal que $0 \notin F_\lambda(\partial D)$.

Sean $v, w \in X$. Tales que $\|v - w\| < \epsilon$. Es fácil ver que si una función $C^2$ $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ cumple $u(0) = u(1) = 0$, entonces vale que

$$\|u\| \leq \|u'\| \leq \|u''\| \tag{4.6}$$

luego

$$\|K_\lambda(v) - K_\lambda(w)\| \leq \|K_\lambda(v)'' - K_\lambda(w)''\| = \lambda\|f(., v(.)) - f(., w(.))\|$$

Si pedimos $f$ continua, la continuidad de $K_\lambda$ se deduce de la continuidad uniforme de $f$ en el conjunto $[0, 1] \times [-\|u\| - \epsilon, \|u\| + \epsilon]$.

Veamos la compacidad.

Tomamos $B = B(0, r)$ una bola de $X$ y queremos ver que $\overline{K_\lambda(B)}$ es compacta.

Si $u \in K_\lambda(B) \Rightarrow u$ es $C^2$ y $\|u''\| = \lambda\|f(., v)\| \leq \|f(., v)\|$ con $v \in B$. Obtenemos

$$\|u''\| \leq M_r = \max_{[0,1]\times[-r,r]} f$$

que no depende de $u$. Además, como valen las condiciones de borde para $u$, tenemos por (4.6) que

$$\|u - l\| \leq \|(u - l)'\| \leq \|(u - l)''\| = \|u''\| \tag{4.7}$$

Con esto probamos que $K_\lambda(B)$ es un conjunto equiacotado y equicontinuo. Por el teorema de Arzelá-Ascoli, es precompacto.

En un ataque de inspiración se nos ocurre que $D$ podría ser una bola, por ejemplo de radio $r$. En este caso, necesitaríamos que las soluciones de $F_\lambda = 0$ tengan norma distinta de $r$. Supongamos que tenemos $u$ un cero de $F_\lambda$. Significa que

$$\|u - l\| \leq \|(u - l)''\| = \|u''\| = \|\lambda f(., u)\| = \lambda\|f(., u)\| \leq \|f(., u)\| \tag{4.8}$$

Necesitamos una condición en $f$ tal que la igualdad anterior garantice $\|u\| \neq r$ para alguna constante $r$ que no dependa de $u$ (ni de $\lambda$). Obviamente con $f$ acotada alcanza. Sin pedir tanto, (4.8) implica

$$\|u\| \leq \|l\| + \|f(.,u)\| = \text{máx}\{|u_0|, |u_1|\} + \|f(.,u)\|$$

por lo que existe un $t \in [0,1]$ tal que

$$\|u\| \leq \text{máx}\{|u_0|, |u_1|\} + |f(t,u(t))|$$

Podemos poner como condición que

$$\exists r > 0 \text{ tal que } |f(t,x)| < r - \text{máx}\{|u_0|, |u_1|\} \ \forall t \in [0,1], |x| \leq r \tag{4.9}$$

Esto implica que la desigualdad anterior no se cumple cuando $\|u\| = r$.

Con esto tenemos que $deg(F_\lambda, B_R, 0)$ está bien definido y no depende de $\lambda$. Ahora $F_0(u) = u - l$ y podemos restringir $g = F_0|_{\langle l \rangle} : \langle l \rangle \to \langle l \rangle$ y $D \cap \langle l \rangle = [-\frac{R}{\|l\|}, \frac{R}{\|l\|}]l$ que son de dimensión 1 !!. Identificando $l$ con $1 \in \mathbb{R}$, $g(t) = t - 1$ y $D \cap \mathbb{R}$ (el abierto donde calculamos el grado de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) es $[-\frac{R}{\|l\|}, \frac{R}{\|l\|}]$.Así que si además pedimos $R > \|l\|$, el grado de $g$ es 1.

**Teorema 4.1.1** *Dada $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que vale (4.9), entonces el problema (4.3) tiene al menos una solución.*

**Observaciones** La condición (4.9) pide una restricción en el crecimiento de $f$ respecto de $x$. Esta condición se cumple si por ejemplo, $|f(t,x)| \leq \epsilon|x| + A$ con $\epsilon < 1$.

### 4.1.3. Generalización a sistemas

Es fácil generalizar este problema a un sistema de ecuaciones, o sea

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0, \ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{4.10}$$

donde $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^n$. La forma de probar existencia es la misma. Las mismas acotaciones valen cambiando módulos por normas y sólo hay que considerar el espacio $X = C([0,1], \mathbb{R}^n)$. La homotopía es nuevamente

$$\begin{cases} u''(t) = \lambda f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0,\ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{4.11}$$

Otro tipo de acotación para las soluciones de (4.11) sale de considerar condiciones similares a (4.2). Si el campo $f$ cumple

$$x.f(t,x) \geq 0 \ \forall t \in [0,1], |x| \geq r \text{ donde } |u_0|, |u_1| < r \tag{4.12}$$

entonces es fácil ver que las soluciones de (4.11) están acotadas por $r$. De hecho, supongamos que una solución $u$ tiene norma $\|u\| \geq r$, llamamos $d(t) = |u(t)|^2$ y $t_0 = \text{ínf}\{t \in [0,1] : d(t) \geq r^2\}$.

Es claro que $d$ es diferenciable,
$d(0), d(1) < r^2$
$t_0 \in (0,1)$
y $d'(t_0) \geq 0$.
Además

$$d'(t) = 2u(t).u'(t)$$

y

$$d''(t) = 2(\|u'(t)\|^2 + u(t).u''(t)) = 2(\|u'(t)\|^2 + u(t).f(t,u(t)))$$

por lo que $d(t) \geq r^2$ y creciente para $t > t_0$. Esto no puede ser porque $d(1) < r^2$.

El párrafo anterior es una forma complicada de decir que si un campo de fuerzas apunta hacia afuera de la bola y una partícula tiene una aceleración dada por ese campo, una vez que la partícula se escapa de la bola no puede volver.

**Observaciones** La condición (4.12) no pide restricciones al crecimiento de $f$.

La hipótesis (4.12) se puede relajar bastante. Basta que el campo de aceleraciones apunte hacia afuera, sólo en el borde de la bola. Es decir

$$x.f(t,x) > 0 \ \forall t \in [0,1], |x| = r \text{ donde } \|u_0\|, \|u_1\| < r \tag{4.13}$$

Notar que ahora pedimos una desigualdad estricta, por lo que esta no es una condición estrictamente más fuerte que la anterior.

Esto es porque antes habíamos demostrado que no puede haber soluciones de norma mayor a $r$. Pero basta con que no haya soluciones de norma igual a $r$. En efecto, si $\|u\| = r$ y $d(t_0) = r^2$ es un máximo de $d$, tenemos que $d'(t_0) = 0$ y

$$d''(t_0) = 2(\|u'(t)\|^2 + u(t).f(t, u(t))) = 2u(t_0).f(t_0, u(t_0))) > 0$$

que es absurdo.

**Observaciones** En vista de lo anterior, no es difícil cambiar la condición (4.13) por

$$n(x).f(t, x) > 0 \ \forall t \in [0, 1], x \in \partial D \tag{4.14}$$

Donde $D$ es un abierto acotado, que contiene al segmento $[u_0, u_1]$, $\partial D$ es una subvariedad diferenciable inmersa en $\mathbb{R}^n$ y $n(x)$ es el vector normal exterior a $\partial D$. El abierto donde se calcula el grado de $K$ es $\{u \in C([0, 1], \mathbb{R}^n) : Im(u) \subseteq D\}$.

## 4.2. Problemas resonantes

### 4.2.1. Condiciones de Landesman-Lazer

Muchos problemas del análisis no lineal pueden presentarse en la forma

$$L(u) = N(u) \tag{4.15}$$

donde $L$ y $N$ son operadores entre espacios de banach, $L$ es un operador diferencial lineal y $N$ es no lineal y continuo pero depende de derivadas de $u$ de menor orden que $L$.

En la sección anterior teníamos $L(u) = u''$ y $N(u) = f(., u(.))$. El operador $K$ era una inversa de $L$ por lo que la ecuación (4.15) se transformaba en

$$u = K(N(u)) \tag{4.16}$$

En el caso en que el operador $L$ no es inversible pero es fredholm de índice 0, el problema se denomina "resonante". Esto ocurre, por ejemplo, cuando a la ecuación (4.3) se le ponen condiciones periódicas.

Para empezar tomamos este problema.

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases} \tag{4.17}$$

Sean

$$X = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) : f(0) = f(1), f'(0) = f'(1)\}$$

$$Y = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) : f(0) = f(1)\}$$

con las normas usuales. Definimos $L : X \to Y$ por $L(u) = u''$.

El operador $L$ es continuo y $K = Ker(L)$ es el conjunto de funciones constantes. Sea $R = Im(L) \subseteq Y$. $R$ es el conjunto de funciones de promedio 0. Como el núcleo de $L$ es no trivial, no hay una única inversa a derecha de $L$. Definimos $\mathcal{K} : R \to X$ dada por

$$\mathcal{K}(v) = u$$

donde $u$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} u''(t) = v(t) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \\ \overline{u} = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

es decir que $LK(v) = v \ \forall v \in R$. Es fácil ver que $K$ es continua.

Definimos las proyecciones $Q : Y \to K$, $P : Y \to R$ dadas por

$$Q(u) = \overline{u}$$

$$P(u) = u - Q(U)$$

(aquí, $\overline{u}$ significa el promedio de $u$ y está dado por $\overline{u} = \int_0^1 u$)

Algunas cosas a tener en cuenta:

Con las normas elegidas en $X$ e $Y$, la inclusión $\iota : X \hookrightarrow Y$ queda compacta. Esto es consecuencia del teorema de Arzelá-Ascoli. Por esta razón haremos distinción entre $X$ y $\iota(X)$ (a pesar de ser iguales como conjuntos). Las proyecciones $Q$ y $P$ nos dan una descomposición en suma directa de $Y = \iota(K) \oplus R$. El espacio $X$ hereda esta descomposición $X = K \oplus \iota^{-1}(R)$ porque obviamente $P$ y $Q$ se restringen bien a $\iota(X)$.

El operador no lineal $N : Y \to Y$ está dado por $N(u) = f(., u(.))$ y es continuo.

La ecuación (4.15) bien escrita es

$$L(u) = N(\iota(u))$$

con $u \in X$. Pero como los elementos son iguales, la escribimos en la forma (4.15). Aplicando $P$ y $Q$, resulta equivalente a

$$\begin{cases} PN(u) = PL(u) \\ \overline{Nu} = \overline{L(u)} \end{cases} \tag{4.19}$$

Por definición de $P$ y $Q$, tenemos que $PL(u) = L(u)$ y $\overline{Lu} = 0$. Y como $\mathcal{K}$ es inyectiva (es una sección de $L$), el problema es equivalente a

$$\begin{cases} \mathcal{K}PN(u) = \mathcal{K}L(u) \\ \overline{Nu} = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

y $\mathcal{K}L(u) = P(u)$. Como $Im(\mathcal{K}) \subseteq R$ y $\iota(K)$ y $R$ están en suma directa, la ecuación (4.20) es equivalente a la suma:

$$\mathcal{K}PN(u) = P(u) + \overline{Nu} \tag{4.21}$$

Entonces definimos $F : Y \to Y$, $F(u) = P(u)+\overline{Nu}-\iota\mathcal{K}PN(u) = u-\overline{u}+\overline{Nu}-\iota\mathcal{K}PN(u)$. Una función $u \in Y$ es un cero de $F$ si y solo si $u \in X$ y es solución de (4.17). Nos proponemos probar que:

1. $S(u) = \overline{u} + \overline{Nu} - \iota\mathcal{K}PN(u)$ es continua y compacta
2. $deg(F, D, 0) \neq 0$

Escribimos el problema directamente con la homotopía. $F_\lambda(u) = u - \overline{u} + \overline{Nu} - \lambda\iota\mathcal{K}PN(u)$. Teniendo en cuenta que $u \to \overline{u} + \overline{Nu}$ es lineal de rango 1 y que $\iota$ es compacta, ya tenemos la compacidad de $S$.

En el siguiente teorema vemos que en algunos casos se puede garantizar que el método de la homotopía funciona.

**Teorema 4.2.1** Teorema de Landesman-Lazer

*Supongamos que $p \in C([0, 1])$ es periódica y que $g \in C(\mathbb{R})$ es acotada y tiene límites en $\pm\infty$. Entonces la ecuación resonante*

$$u'' + g(u) = p(t) \tag{4.22}$$

*admite una solución $u$ de período 1 si*

$$\begin{array}{c} g(-\infty) < \overline{p} < g(+\infty) \\ o \\ g(-\infty) > \overline{p} > g(+\infty) \end{array} \tag{4.23}$$

**Observaciones** Además, si $g$ satisface

$$g(-\infty) < g(x) < g(+\infty)$$

entonces la condición es también necesaria.

La necesidad de la condición (4.23) es clara: si $u$ es solución periódica del problema, entonces $\overline{N(u)} = \overline{p}$. Como la imagen de $u$ es compacta, tenemos que $g(-\infty) < \delta_1 < g(u(t)) < \delta_2 < g(+\infty)$. Tomando promedio se deduce que $g(-\infty) < \overline{g(u)} < g(+\infty)$.

**Demostración** En vista de lo expuesto en los párrafos anteriores, basta probar que las soluciones de $F_\lambda$ están acotadas y que

$$deg(F_0, D, 0) \neq 0$$

Sea $u \in X$ tal que $F_\lambda(u) = 0$ con $\lambda \neq 0$. Como $g$ es acotada se ve que $u - \overline{u}$ y $\max u - \min u$, también (las cotas no dependen de $u$ ni de $\lambda$). Como $\overline{Nu} = 0$ tenemos que

$$\overline{g(u)} = \overline{p}$$

pero a medida que $u$ tiende uniformemente a $\pm\infty$, $\overline{g(u)}$ tiende a $g(\pm\infty)$ pero esto no puede ser porque en la condición (4.23) la desigualdad es estricta!!. Por esta razón, el grado de $F_\lambda(u) = 0$ en una bola grande, no depende de $\lambda$ (con $\lambda \neq 0$). Los ceros de $F_0$ son las funciones $u$ constantes con $g(u) = 0$ que también están acotados.

Ahora debemos calcular el grado de $F_0$ que tiene la forma $F_0(u) = u - q(u)$ donde la imagen de $q$ está en el conjunto de funciones constantes (que identificamos con $\mathbb{R}$). Cortando con este subespacio (nuevamente de dimensión 1) podemos calcular el grado de la función $u \to u - u + g(u) = g(u)$ que por hipótesis es $\pm 1$ (independientemente del tamaño de la bola) dependiendo de si se cumplen las desigualdades de arriba o de abajo en (4.23).

Esto implica entoces que $deg(F_1, B, 0) = deg(F_0, B, 0) \neq 0$ y existe un cero de $F_1$ que es una solución periódica a la ecuación (4.22).

**Observaciones** En el caso de que en (4.23) se cumpla la desigualdad de abajo, no hace falta pedir que $g$ sea acotada. Las cotas a priori se deducen de una forma parecida a lo que hicimos en la condicion (4.12).

En efecto, sea $u$ solución de (4.22). Como es periódica, podemos pensar que está definida en $\mathbb{R}$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $\overline{p} = 0$, entonces $\overline{g(u)} = 0$. Queremos acotar el mínimo de $u$ por abajo. Sean $t_0 < t_1 \in \mathbb{R}$ tales que $u(t_0)$ es mínimo de $u$.

Haciendo el desarrollo de Taylor de orden 2 tenemos que

$$u(t_1) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{s} u''(t)dtds + (t_1 - t_0)u'(t_0) \leq \int\int |p| - \int\int g(u)$$

(notar que $u'(t_0) = 0$).

Sabemos que hay un $x \in \mathbb{R}$ tal que $g((-\infty, x]) \subseteq (\delta, \infty)$ con $\delta > 0$. Supongamos que $u(t_0) < x$. De lo contrario ya tenemos una cota para $u(t_0)$. Al saber que $\overline{g(u)} = 0$, tiene que haber un $t$ tal que $u(t) = x$. Tomamos $t_1 = \text{mín}\{t \in [t_0, t_0+1] : u(t_1) = x\}$, entonces $g(u) \geq 0$ en $[t_0, t_1]$. Luego la desigualdad anterior nos dice $-u(t_0) \leq \int\int |p| - x$. De esta forma tenemos acotado el mínimo de $u$ y de manera análoga acotamos el máximo de $u$ por arriba.

**Observaciones** También podemos cambiar la hipótesis de $g$ acotada por cualquier otra que garantice la cota para $\|u - \overline{u}\|$. Si por ejemplo, $g$ es sublineal o si está acotada de uno de los dos lados, alcanza.

El teorema de Landesman-Lazer puede generalizarse en varias direcciones. En este trabajo expondremos algunas:

Por un lado se puede trabajar con elementos técnicos para relajar la hipótesis (4.23). También se puede plantear como un sistema de ecuaciones y las condiciones son del estilo de (4.12). Por último se puede cambiar el operador lineal $L$ por uno que tenga un núcleo de mayor dimensión.

Una generalización del teorema de (4.23) es que no hace falta que la $g$ tenga límites en $\pm\infty$ alcanza con que

$$\begin{gathered} \lim_{x\to-\infty} \sup g(x) < \overline{p} < \lim_{x\to+\infty} \inf g(x) \\ \text{o bien} \\ \lim_{x\to-\infty} \inf g(x) > \overline{p} > \lim_{x\to+\infty} \sup g(x) \end{gathered} \tag{4.24}$$

En efecto, sólo usamos de estas desigualdades que existe un $M > 0$ tal que

$$\overline{p} \notin g((-\infty, -M]) \cup g([M, \infty))$$

y que se puede definir el grado de $g$ en algún intervalo grande. Omitimos la demostración.

Además podemos intentar pedir que las desigualdades de (4.23) sean no estrictas, pero esto es un tanto sutil. De hecho es fácil dar contraejemplos. Si $g > 0 = \overline{p}$ no hay solución, pero puede pasar que $g(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$.

**Proposición 4.2.2** *Sean $p \in C([0,1])$ con $\overline{p} = 0$ y $g \in C(\mathbb{R})$ acotada. Supongamos que existe un $M > 0$ tal que si $|x| > M \Rightarrow x.g(x) \geq 0$. (o bien, la desigualdad opuesta)*

*Entonces el problema (4.22) tiene una solución periódica.*

**Observaciones**

1. Pedimos $\overline{p} = 0$ sólo para facilitar la escritura. Como podemos sumar constantes a (4.24), esta condición se puede pedir siempre.

2. $x.g(x) \geq 0$ significa que $g(x)$ y $x$ tienen el mismo signo (alguno puede ser 0). Esta condición es más débil que (4.24) pero más fuerte que

$$\limsup_{x \to -\infty} g(x) \leq \overline{p} \leq \liminf_{x \to +\infty} g(x)$$

(idem al revés)

**Demostración** Probamos el caso en que se cumple $x.g(x) \geq 0$. El otro caso es análogo. Consideramos

$$f_\lambda(t, x) = \lambda(p(t) - g(x)) - \lambda(1 - \lambda)\arctan(x)$$

y nuevamente el operador $N_\lambda$, dado por

$$N_\lambda(v) = f_\lambda(., v(.))$$

$N_\lambda(v)$ es continuo respecto de $(\lambda, v)$. Construimos la $F_\lambda$ del principio de la sección, de manera tal que una solución periódica de (4.22) es un cero de $F_1$. Ahora está dada por

$$F_\lambda(u) = u - \overline{u} + \overline{Nu} - KPN_\lambda(u)$$

Notemos que la función $h(x) = \lambda g(x) + \lambda(1-\lambda)\arctan(x)$ cumple con la desigualdad estricta $x.h(x) > 0$. Lo que buscamos con esto es perturbar a la $g$ para obtener las cotas

a priori. El factor $\lambda(1-\lambda)$ se anula en 0 y en 1. Con esto logramos que $KPN_0$ sea de rango 1 y que $F_1$ resuelva la ecuación (4.22) (ahora un cero de $F_\lambda$ es una solución a la ecuación $u'' = f_\lambda(t,x)$). El truco consiste en que la cota para los ceros de $F_\lambda$ obtenida en el teorema anterior, no depende de $g(\pm\infty)$ sino de la "velocidad" con que $g$ tiende a dichos límites.

Como $f_\lambda$ es acotada uniformemente en $\lambda$, tenemos nuevamente un $r > 0$ tal que $\text{máx}(u) - \text{mín}(u) < r$ para todo $u$ cero de $F_\lambda$. Tomamos $R \geq M + r$. Es claro que si $u$ es cero de $F_\lambda$ de norma $R$, $|u(t)| > M \ \forall t$ por lo que $u(t).g(u(t)) \geq 0$. Pero entonces si $\lambda \in (0,1)$,

$$\overline{f_\lambda(.,u(.))} = -(\lambda\overline{g(u)} + \lambda(1-\lambda)\overline{\arctan(u)})$$

que es mayor o menor que 0 dependiendo de si $u > M$ o $u < -M$. Pero esto es absurdo porque

$$\overline{f_\lambda(.,u(.))} = \overline{u''} = 0$$

(es igual que en el teorema anterior).

Ahora tenemos acotados todos los ceros de $F_\lambda$ con $\lambda \in (0,1)$. Si $F_1$ tiene algún cero ya tenemos probado el teorema, así que suponemos que no.

Descartemos otro caso: si existe un $k > 0$ tal que $g(x) = 0 \, \forall x > k$ o $\forall x < -k$ podemos construir una solución de (4.22) de la siguiente forma. Tomamos $u$ la única solución de

$$\begin{cases} u''(t) = p(t) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \\ \overline{u} = 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

luego $u + k + \|u\|$ será la solución buscada.

Ahora podemos suponer que $\exists x_0 < -(M+r), x_1 > M + r$ tales que

$$g(x_0) < 0 < g(x_1) \tag{4.26}$$

Sea $D = \{u \in C([0,1],\mathbb{R}) : x_0 < u < x_1\}$. Como no hay ceros de $F_\lambda$ de norma mayor o igual que $R$ para $\lambda \in (0,1]$ tenemos que no hay ceros de $F_\lambda$ en $\partial D$.

Para calcular el grado de la función $F_0 : D \to X$, cortamos de nuevo con el subespacio de funciones constantes y la identificamos con

$$g : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$$

y por (4.26) el grado es 1.

### 4.2.2. Generalización a sistemas: Condicion de Nirenberg

Queremos extender el resultado de Landesman-Lazer para resolver el problema

$$\begin{cases} u''(t) + g(u) = p(t) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases} \tag{4.27}$$

Donde $u : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y acotada. Ahora el núcleo de $L$ (que sigue siendo el conjunto de funciones constantes) tiene dimensión $n$.

Es interesante ver cuál es la noción que reemplaza los límites de $g$ en $\pm\infty$. Sea $v \in S^{n-1}$, definimos

$$g_\infty(v) = g(\infty.v) = \lim_{t \to +\infty} g(t.v)$$

$$g_\infty : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$$

definimos

$$\overline{p} = \int_0^1 p$$

**Teorema 4.2.3** (Nirenberg)
*Supongamos que*

1. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es continua y acotada.*
2. *Existen los límites radiales* $g(\infty.v)$ *y convergen uniformemente en* $S^{n-1}$
3. $g(\infty.v) \neq \overline{p}\ \forall v \in S^{n-1}$
4. $deg(g_\infty, D^n, \overline{p}) \neq 0$

**Demostración** Damos la idea general de la demostración. Los detalles se reconstruyen a partir de los teoremas anteriores.

Primero probamos que no hay soluciones de

$$\begin{cases} u''(t) = \lambda(p(t) - g(u)) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases} \tag{4.28}$$

de norma muy grande. Sea $u_n \to \infty$ una sucesión de soluciones de (4.28) para $\lambda = \lambda_n \in (0, 1]$. Como $g$ es acotada, tenemos que $\|u_n - \overline{u_n}\| < r$ con $r$ fijo. Luego $\overline{u_n} \to \infty$. Escribimos $\overline{u_n} = v_n.|\overline{u_n}|$ con $v_n \in S^{n-1}$. Por compacidad, podemos suponer que $v_n$ converge a $v$. Tomando promedio en (4.28) tenemos que $\overline{g(u_n)} = \overline{p}$. Sean $w_n(t) = \frac{u_n(t)}{|u_n(t)|}$ las proyecciones de $u_n$ en la esfera. Como $\|u_n - \overline{u_n}\|$ está acotado, es fácil ver que $w_n(t) \to v$ uniformemente. Luego $\overline{g(u_n)} \to g_\infty(v) \Rightarrow g_\infty(v) = \overline{p}$ que contradice la hipótesis.

Consideramos la homotopía $F_\lambda : B \to X$ donde $B$ es una bola grande. El grado de $F_0$ está dado otra vez por el grado de $g : B \cap \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que por la convergencia uniforme de $g$, es igual al grado de $g_\infty : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ y es no nulo por hipótesis.

Nuevamente, las hipótesis técnicas del teorema de Nirenberg pueden relajarse. La condicion de que $g$ sea acotada se puede cambiar por otra, con la que se pueda acotar $\|u - \overline{u}\|$.

La condición que dimos en (4.2.1) de que basta pedir $g$ acotada de un lado tiene su análogo en este caso. Ahora podemos pedir que cada coordenada de $g$ esté acotada de un lado. También se puede pedir que la imagen de $g$ viva en un sector angular delimitado por $n$ hiperplanos afines distintos.

Por otro lado, la condición (2) no puede quitarse. En [4] se exhibe una función $g$ que cumple (1), (3) y (4), y un forzante $p$ tales que el problema (4.27) no tiene solución. En [3] se muestra el teorema, cambiando la condición (2) por una más débil, que involucra el comportamiento de $g$ en un dominio acotado.

El análogo al caso no estricto de Landesman-Lazer (proposición 4.2.2) se estudia en detalle en [7]. El problema de elegir una condición débil, elegante y verificable, no es para nada obvio.

### 4.2.3. Resonancia en un autovalor de orden superior: Condicion de Lazer-Leach

Volvamos a los problemas en dimensión 1.

En los casos en que $u \to u'' + \lambda u$ tiene núcleo no trivial, $\lambda$ es un autovalor de $u \mapsto -u''$ (visto en el espacio de funciones periódicas). En esta sección vamos a trabajar en el espacio de funciones de período $2\pi$. Es sabido que los autovalores de $u \to -u''$ son $\lambda_m = m^2$ y que los autoespacios correspondientes están generados por las funciones

$x \to \sin(mx)$ y $x \to \cos(mx)$ para $m > 0$ entero. El primer autovalor es $m = 0$ (y el autoespacio es el núcleo).

Consideramos el problema resonante

$$\begin{cases} u''(t) + m^2 u + g(u) = p(t) \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases} \tag{4.29}$$

Sean

$$X = \{f \in H^2([0, 2\pi], \mathbb{R}) : f(0) = f(2\pi), f'(0) = f'(2\pi)\}$$
$$Y = \{f \in H^1([0, 2\pi], \mathbb{R}) : f(0) = f(2\pi)\}$$
$$Z = L^2((0, 2\pi))$$

con las normas usuales. Recordemos que en dimensión 1, las funciones del $H^1$ son absolutamente continuas. Definimos $L_m : X \to Z$ por $L_m(u) = u'' + m^2 u$.

El operador $L_m$ es continuo y autoadjunto respecto del producto de $Z$. $K = Ker(L)$ es el espacio generado por $s_m(x) = \sin(mx)$ y $c_m = \cos(mx)$. Sea $R = Im(L) \subseteq Z$. $R$ es el complemento ortogonal a $K$ en $Z$, es decir que

$$R = \{\phi \in L^2((0, 2\pi)) : \int_0^{2\pi} \phi(t)\cos(mt) = \int_0^{2\pi} \phi(t)\sin(mt) = 0\}$$

Sea $Q : Z \to Z$ la proyección ortogonal a $K$, y $P(u) = u - Q(u)$

Tenemos $\mathcal{K} : R \to X$, una inversa a derecha de $L_m$ dada por

$$\mathcal{K}(v) = u$$

donde $u$ es la única solución $2\pi$ periódica del problema

$$\begin{cases} u''(t) + m^2 u(t) = v(t) \\ Q(u) = 0 \end{cases} \tag{4.30}$$

Acá hay que ver que $\mathcal{K} : R \subseteq Z \to X$ es continua. Como es lineal y $\mathcal{K}L_m = P$, basta ver que se cumple el siguiente lema:

**Lema 4.2.4**

$$\|P(u)\| \leq \|L_m(u)\|$$

**Demostración** Usando el isomorfismo con $l^2(\mathbb{Z})$ dado por el desarrollo de Fourier, tenemos

$$u = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

$$P(u) = (\dots, a_{m-1}, 0, a_{m+1}, \dots)$$

$$L_m(u) = ((-i^2 + m^2).a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

$$\|L_m(u)\| = \|L_m P(u)\| = \sum_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{m\}} (-i^2+m^2)^2|a_i|^2 \geq \sum_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{m\}} (i^2+1)|a_i|^2 =$$

$$\|P(u)\|_{L^2} + \|P(u)'\|_{L^2} = \|P(u)\|_{H^1}$$

El operador no lineal $N : Z \to Z$ está dado por $N(u) = p - g(u(.))$ y es continuo.

Definimos $F_\lambda : Y \to Y$, $F_\lambda(u) = u - Q(u) + Q(N(u)) - \lambda\iota\mathcal{K}PN(u)$. Una solución de (4.29) es un cero de $F_1$. Como antes, $\iota : X \hookrightarrow Y$ es compacta. Luego $\lambda\iota\mathcal{K}PN$ es compacta para todo $\lambda$ y es continua respecto de $(\lambda, u)$.

**Teorema 4.2.5** (Lazer-Leach)

*Supongamos que $p \in C([0,1])$ es periódica y que $g \in C(\mathbb{R})$ es acotada y tiene límites en $\pm\infty$. Entonces la ecuación resonante*

$$u'' + m^2 u + g(u) = p(t) \tag{4.31}$$

*admite una solución $u$ de período $2\pi$ si*

$$\left| \int_0^{2\pi} p(t)e^{imt} \right| < 2|g(+\infty) - g(-\infty)| \tag{4.32}$$

**Demostración** Debemos ver que no hay ceros de $F_\lambda$ demasiado grandes. En primer lugar, si $F_\lambda(u) = 0$,

$$\|P(u)\| = |\lambda|\|N(u)\| \leq \|p\| + \|g(u)\| \leq M \tag{4.33}$$

donde $M$ no depende de $u$ ni de $\lambda$. Supongamos además que $M \geq \|g\|_\infty$. Sea $\phi \in K$, entonces

$$0 = \lambda^{-1}\langle L_m(u); \phi\rangle = \langle [p - g(u)]; \phi\rangle \tag{4.34}$$

Supongamos que tenemos $u_n \to \infty$ ceros de $F_{\lambda_n}$ con $\lambda_n \in (0,1]$. Por (4.33) tenemos que $Q(u_n) \to \infty$. Identificamos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ y con $K$ asignando $1 \to (1,0) \to c_m$ y $i \to (0,1) \to s_m$. Con estos isomorfismo, se identifican

$$re^{i\alpha} \to (r\cos(\alpha), r\sin(\alpha)) \to r\cos(mt-\alpha)$$

Por compacidad, podemos suponer que $Q(u_n) = r_n.e^{i\alpha_n}$ con $r_n \in \mathbb{R}, r_n \to \infty$ y $\alpha_n \in [0,2\pi], \alpha_n \to \alpha \in [0,2\pi]$. Calculamos el segundo miembro de (4.34):

$$\langle p - g(u_n); \phi\rangle = \langle p - g(Q(u_n)+P(u_n)); \phi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [p(t) - g(r_n\cos(mt-\alpha_n)+P(u_n)(t))].\phi(t)dt$$

Supongamos que $\phi(t) = e^{imt} = e^{i\alpha_n}e^{i(mt-\alpha_n)}$.
Por comodidad escribimos $\langle g(u_n);\phi\rangle = \langle g(u_n); Re(\phi)\rangle + i\langle g(u_n); Im(\phi)\rangle$

$$\langle g(u_n);\phi\rangle = e^{i\alpha_n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r_n\cos(mt-\alpha_n)+P(u_n)(t)).e^{i(mt-\alpha_n)}dt$$

$$= e^{i\alpha_n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r_n\cos(mt)+P(u_n)(t+\frac{\alpha_n}{m})).e^{imt}dt = e^{i\alpha_n}(a_n+ib_n) \tag{4.35}$$

Llamemos $\Theta_n(t) = P(u_n)(t+\frac{\alpha_n}{m})$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, podemos acotar $\|\Theta_n\|_\infty < C.\|\Theta_n\|_{H^1} < M$. Nos olvidamos de la constante $e^{i\alpha_n}$ y calculamos la parte imaginaria:

$$\begin{gathered} a_n = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r_n\cos(mt)+\Theta_n(t)).\sin(mt) = \\ \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r_n\cos(mt)+\Theta_n(t)).(\sin(mt) - \tfrac{\Theta_n'(t)}{r_n m})dt + \\ \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r_n\cos(mt)+\Theta_n(t)).\tfrac{\Theta_n'(t)}{r_n m} \end{gathered} \tag{4.36}$$

$$a_n = \frac{1}{r_n m}g(r_n\cos(mt)+\Theta_n(t))\Big|_{t=0}^{t=2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r_n\cos(mt)+\Theta_n(t)).\frac{\Theta_n'(t)}{r_n m}$$

luego

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi r_n m}\|g\|_\infty + \frac{1}{r_n m}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|g\|_\infty \|\Theta_n'\|_{L^2}$$

además, $\|\Theta_n'\|_{L^2} \leq \|P(u_n)\|_X \leq M$. Entonces tenemos que

$$a_n \to 0$$

Por otro lado, dado un $\epsilon > 0$

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} g(r_n \cos(mt) + \Theta_n(t)).\cos(mt)dt = \int_{\cos(mt)\geq\epsilon} + \int_{|\cos(mt)|<\epsilon} + \int_{\cos(mt)\leq-\epsilon}$$

$$\int_{|\cos(mt)|<\epsilon} \leq \epsilon M$$

$$\int_{\cos(mt)\geq\epsilon} \geq \left(\inf_{[+r_n\epsilon - M, +\infty]} g\right).\int_{\cos(mt)\geq\epsilon} \cos(mt)$$

$$\int_{\cos(mt)\leq-\epsilon} \leq \left(\sup_{[-\infty, -r_n\epsilon + M]} g\right).\int_{\cos(mt)\leq-\epsilon} \cos(mt)$$

Poniendo $\epsilon = r_n^{-1/2}$ y haciendo tender $n \to \infty$, tenemos que

$$b_n \to b \geq \frac{2}{\pi}(g(+\infty) - g(-\infty))$$

el 2 es por la integral de $\cos(mt)$ en los conjuntos donde es positiva y negativa. Juntando (4.34, 4.35, 4.36)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(t)e^{imt}dt = e^{i\alpha_n}(a_n + ib_n)$$

luego,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(t)e^{imt}dt\right| = |a_n + ib_n| \to |b| \geq \frac{2}{\pi}|g(+\infty) - g(-\infty)|$$

y

$$|Q(u)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(t)e^{imt}dt\right| \geq \frac{2}{\pi}|g(+\infty) - g(-\infty)|$$

que contradice la hipótesis.

Tenemos que acotar los ceros de $F_0$. Cuando $F_0(u) = 0$ tenemos que $u = Q(u) + Q(N(u))$ por lo que $u \in K$ y $Q(N(u)) = 0$. Entonces se pueden usar las mismas cuentas que antes, con $\Theta = 0$.

Ahora que tenemos las cotas a priori, sólo queda ver el grado de $F_0 = id - Q + QN$ en alguna bola grande, y basta calcular el grado de Brouwer en $K$. Pero $F_0|_K = QN$. Identificando $K$ con $\mathbb{C}$, y repitiendo la cuenta de antes (con $\Theta = 0$), tenemos que la función $QN : K \to K$ se identifica con

$$\psi : re^{i\alpha} \mapsto \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} p(t)e^{imt}dt + e^{i\alpha}\int_0^{2\pi} g(r\cos(mt))e^{imt}dt\right) = z_p + e^{i\alpha}w_{g,r}$$

donde $w_{g,r} \to w_g \in i\mathbb{R}$ cuando $r \to \infty$. De esta expresión se ve claramente que cuando $r$ es suficientemente grande, la curva $\alpha \mapsto \psi(re^{i\alpha})$ da exactamente una vuelta al 0 justamente porque $|w_g| > |z_p|$. Esto es consecuencia de la condición (4.32) y de las cuentas anteriores. Luego el grado es 1.

Esto termina la demostración.

Uno puede también considerar la ecuación (4.31) como un sistema de ecuaciónes en $\mathbb{R}^n$. Ahora el núcleo de $L$ es $2n$-dimensional y las condiciones se complican considerablemente.

En el paper [8] Krasnoselskii y Mawhin formulan las condiciones de Lazer-Leach en términos de la función $\Psi(x) = \int_0^1 \sin(nt)f(x\sin(nt))dt$ y dan condiciones suficientes para la existencia de infinitas soluciones de (4.31).

La cuenta del teorema de Lazer-Leach es sutil. Depende fuertemente de las propiedades de las funciones trigonométricas. La misma cuenta no funciona si uno quiere reemplazar el operador $L$ por uno no lineal (por ejemplo, por el $p$-laplaciano).

En el paper [9] Alan Lazer demuestra existencia en el problema periódico

$$u'' + u'g(u) + u = p(t) \tag{4.37}$$

usando el teorema del punto fijo de Brouwer en $\mathbb{R}^2$.

Es interesante comparar este resultado con la cuenta anterior, porque sugiere que el teorema de Lazer-Leach tal vez pueda probarse de forma análoga. Por ahora no lo sabemos.

# Bibliografía


[1] N. G. Lloyd: Degree Theory. Cambridge University Press. London (1978)

[2] K. Schmitt and R. C. Thompson: Nonlinear Analysis and Differential Equations, An Introduction. University of Utah. November 11, 2004.

[3] P. Amster: Métodos Topológicos en el Análisis no Lineal publicações matemáticas, IMPA (2009)

[4] R. Ortega and L. Sánchez: Periodic solutions of forced oscillators with several degrees of freedom, Bull. London Math. Soc. 34 (2002), 308-318.

[5] J. Mawhin: A simple approach to Brouwer degree based on differential forms Université do Louvain, Belgium (2005)

[6] M. Spivak: A comprehensive introduction to differential geometry, Volume I

[7] P. Amster, M. Clapp and R. Ortega, Periodic solutions of resonant systems without the Nirenberg condition

[8] Krasnosel'skii A. M., Mawhin J.: Periodic solutions of equations with oscillating nonlinearities

[9] A. C. Lazer: A second look at the first result of Landesman-Lazer type Electron. J. Diff. Eqns., Conf. 05, 2000, pp. 113-119

[10] J. López-Gómez: Spectral Theory and Nonlinear Analysis Matemática aplicada, Universidad Complutense de Madrid