

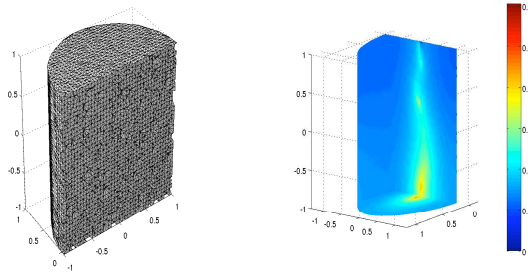


UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Análisis de un modelo sobre el fenómeno de perfusión tisular

Gisele Hollisch



Director: Dr. Gabriel Acosta

Fecha de Presentación : Julio de 2010

*Dedico este trabajo a mi papá.
Y a su título intermedio*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mis padres Alejandra y Hugo, por ser soporte fundamental durante toda la carrera. Por enseñarme que, con un poco de esfuerzo y perseverancia, uno siempre puede lograr lo que se propone. A Vic, por su invaluable ayuda con los temas computacionales. A Mariano porque, cuando está de buen humor, alegra los domingos. Gracias a mis abuelos Nelly y Néstor, a Fabián y Julián por estar siempre. No saben cuánto los quiero y los necesito.

Gracias a Gabriel por aceptar hacer este trabajo conmigo, por su tiempo, sus correcciones y su infinita paciencia con esta alumna a la que le costó bastante entender algunas cosas. Por su ayuda en la parte de programación. Fue todo un gusto trabajar con él.

Quiero agradecer a Vicky, Nati, Fla y Juli, mis grandes amigas. Nadie mejor que ellas sabe lo que me costó llegar hasta acá. Gracias por aguantarme, por acompañarme en todo momento. Las quiero mucho chicas. A Gabriel, Samanthis, Gisela y Ariel. Si algo le tengo que agradecer a la facultad es haberlos conocido y haber formado un grupo tan lindo. Este trabajo es un poquito también de cada uno de ellos.

Gracias a Susana por confiar en mí y darme la posibilidad de crecer no sólo en lo profesional sino también en lo personal. A Vale y Anita, por la gran cantidad de horas de oficina compartidas. Quiero agradecer a Martha porque con ella aprendí mucho de lo que sé dando clases. Gracias a todo el grupo de profesoras de UADE y del CBC (son muchas para nombrarlas a todas) por las previas compartidas antes de cada clase, porque trabajar con cada una de ellas es un gusto. En especial, quiero agradecer a Heidi y Anabella, dos de las personas más fuertes que conozco. Me enseñaron que, más allá de lo que pase, siempre se puede salir adelante.

Y gracias a vos, cielo. Todo lo que pueda llegar a escribir va a parecer cursi y resumir todo lo que significas para mí me resulta un poco frío; es por eso que prefiero darte un muy lindo beso el día que me reciba. Uf bnp nvdip! (y más todavía). Si de algo estoy realmente segura es que vamos a estar juntos, siempre.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	5
1.1. Planteo del problema	6
1.2. Descripción de la tesis	7
2. Motivación	8
2.1. Un poco de Fisiología	8
2.2. Medios porosos y Ley de Darcy	9
2.2.1. Conservación de la masa	11
2.3. El modelo	13
2.3.1. Formulación débil del problema	14
3. Los espacios funcionales	16
3.1. Los espacios de Sobolev con peso	16
3.2. La clase de Muckenhoupt	18
3.3. Algunas propiedades importantes	23
4. Análisis del problema	28
4.1. Notación y descripción de los aspectos geométricos	28
4.2. Análisis del problema desacoplado	31
4.3. El problema acoplado 1D - 3D	46
5. Aproximación de la solución del problema acoplado 1D - 3D por el Método de Elementos Finitos	51
5.1. Discretización del problema acoplado	51
5.2. Implementación del programa. Solución aproximada del problema	57
5.2.1. Construcción de las matrices de masa y de rigidez	57
5.3. Solución del problema planteado	60
5.4. Convergencia del método de elementos finitos en norma $H^1_\alpha(\Omega)$	60
6. Apéndice	66

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones de reacción - difusión son modelos matemáticos que describen el modo en que la concentración de una o más sustancias se modifica debido a la influencia de dos procesos: uno de ellos es el dado por las reacciones químicas o procesos biológicos que provocan que las partículas cambien de estado o se conviertan unas en otras; el otro fenómeno es el de difusión, que hace que las sustancias se distribuyan y se esparsan en el espacio. La forma general que presentan las ecuaciones de este tipo es

$$u_t - \nabla \cdot (D \nabla u) = f(t, \mathbf{x}, u)$$

donde D , que representa la difusión, es conocida y $u = u(\mathbf{x}, t)$ una función definida en un medio de difusión $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denominada función de densidad en tiempo t y posición \mathbf{x} . La función $u(\mathbf{x}, t)$ tiene diferentes interpretaciones de acuerdo al ámbito de estudio: de esta manera, puede representar densidad de masa (cuando se analizan procesos de reacción química), temperatura (cuando se trata con situaciones relacionadas a la conducción del calor), etc. El término $\nabla \cdot (D \nabla u(\mathbf{x}, t))$ representa la tasa de cambio debido a la difusión, mientras que $f(t, \mathbf{x}, u)$ es la cantidad de sustancia (o calor) generada por unidad de tiempo y por unidad de volumen gracias a los procesos de reacción.

Si Ω es un dominio acotado, las condiciones de contorno adecuadas dependen de las condiciones físicas y de las propiedades de las sustancias que se encuentran tanto dentro como fuera del medio de difusión. En este sentido, si la función de densidad es conocida en la superficie $\partial\Omega$ se utilizan condiciones del tipo Dirichlet:

$$u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) \quad t > 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

mientras que las condiciones del tipo Neumann son útiles cuando se conoce el flujo que atraviesa dicha superficie.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(\mathbf{x}, t) \quad t > 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

siendo $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ la derivada direccional de u en la dirección de ν , normal unitaria exterior a $\partial\Omega$. En particular, condiciones de Neumann homogéneas significan, desde un punto de vista físico, que estamos en presencia de un medio aislado ya que no hay flujo que atraviese la superficie de la frontera.

En esta tesis estudiaremos dos problemas *acoplados* de reacción-difusión, uno de los cuales tiene lugar en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, mientras que el restante se define en un subdominio unidimensional $\Lambda \subset \Omega$ y consiste en una curva simple (estos dominios aparecen esquematizados en

la Figura 1). Ambos problemas se relacionan por medio de ciertos términos de intercambio y representan un modelo simplificado acerca del flujo de determinados fluidos en un medio poroso tridimensional, en el cual podemos encontrar fracturas que pueden ser descritas mediante curvas.

En particular, este modelo puede ser aplicado al estudio del flujo sanguíneo a través de los tejidos: los vasos sanguíneos forman una intrincada red en todo el cuerpo, denominada red capilar, la cual posibilita el intercambio de sustancias (tales como oxígeno y dióxido de carbono) entre la sangre y las células de los tejidos. Es la perfusión sanguínea de los tejidos el proceso que asegura el suministro de oxígeno y nutrientes a las células. Nos proponemos entonces construir un modelo matemático que permita estudiar este proceso de perfusión y lo haremos a partir de ecuaciones de reacción - difusión acopladas. Para ello, será necesario pensar en los vasos sanguíneos que integran la red capilar como “finas” estructuras incrustadas dentro un medio poroso tridimensional.

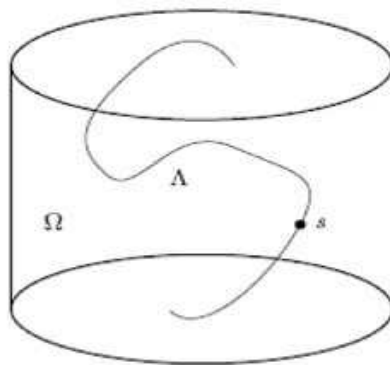


Figura 1.1: Dominio 3D (Ω) con fisura 1D (Λ)

1.1. PLANTEO DEL PROBLEMA

El problema que vamos a estudiar en este trabajo es: Encontrar $(u, \hat{u}) \in V_1 \times \hat{V}$ tal que:

$$\begin{cases} A(u, v) + \int_{\Lambda} \beta(\Pi u - \hat{u})v ds = B(v) & \forall v \in V_2 \\ \hat{A}(\hat{u}, \hat{v}) - \int_{\Lambda} \beta(\Pi u - \hat{u})\hat{v} ds = \hat{B}(\hat{v}) & \forall \hat{v} \in \hat{V} \end{cases} \quad (1.1)$$

siendo $\beta \in L^\infty(\Lambda)$, $\Pi : V_1 \rightarrow L^2(\Lambda)$ un operador lineal continuo y $B : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{B} : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funcionales lineales continuos dados. Las formas bilineales

$$A : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{A} : \hat{V} \times \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

están definidas por:

$$A(u, v) := \int_{\Omega} A_1 \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} A_0 uv \, dx \quad (1.2)$$

$$\widehat{A}(\widehat{u}, \widehat{v}) := \int_{\Lambda} \widehat{A}_1 \frac{d\widehat{u}}{ds} \frac{d\widehat{v}}{ds} \, ds + \int_{\Lambda} \widehat{A}_0 \widehat{u} \widehat{v} \, ds \quad (1.3)$$

siendo $A_1, A_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $\widehat{A}_0, \widehat{A}_1 \in L^\infty(\Lambda)$.

Los espacios V_1 y V_2 , al igual que \widehat{V} , serán definidos más adelante y resultarán adecuados para demostrar la existencia de una única solución al problema planteado. El problema (1.1) no es típico debido a que la continuidad de la forma bilineal dada por el término

$$\int_{\Lambda} \beta(\Pi u - \widehat{u}) v \, ds$$

no puede garantizarse en espacios de Sobolev tradicionales. En efecto, si se toma $V_2 = H^1(\Omega)$ no se tiene operador de traza continuo $\gamma_{\Lambda} : V_2 \rightarrow L^2(\Lambda)$, lo que fuerza a tomar V_2 como un espacio menor (y por ende V_1 como un espacio mayor) que $H^1(\Omega)$.

1.2. DESCRIPCIÓN DE LA TESIS

Esta tesis tiene como eje central el artículo [1], en el que se tratan esencialmente todos los tópicos que aquí desarrollamos. Hemos intentado dar una visión autocontenida de los temas que componen ese trabajo a través de otras referencias (en particular [12]). El capítulo siguiente está dedicado a la aplicación del problema que planteamos recientemente; asimismo, teniendo en cuenta la Ley de Darcy para fluidos en medios porosos y la ley de conservación de la masa, veremos de donde surgen las ecuaciones anteriores. La solución al problema acoplado pertenece a una clase particular de espacios de Sobolev con peso. En el capítulo tres definiremos estos espacios y estudiaremos algunas de sus propiedades más importantes; demostraremos que la función peso con la que trabajaremos pertenece a la denominada clase de Muckenhoupt, lo que nos permitirá deducir otras características de estos espacios.

En los capítulos cuatro y cinco retomaremos el análisis de nuestro problema: en el primero probaremos que existe una única solución al problema acoplado 1D - 3D y en el último capítulo aproximaremos dicha solución por el método de elementos finitos. Asimismo, demostraremos la convergencia del método en la norma inducida por los espacios de Sobolev con peso.

CAPÍTULO 2

MOTIVACIÓN

En este capítulo veremos, en primer lugar, cuales son las posibles aplicaciones del modelo que estudiaremos. Para ello, daremos una breve descripción acerca de la fisiología de la circulación sanguínea.

El sistema planteado en (1.1) es la formulación débil del problema de perfusión tisular; a fin de deducir las ecuaciones que describen este fenómeno trataremos la Ley de Darcy, la cual describe el comportamiento de los fluidos (en nuestro caso, el flujo sanguíneo) en un medio pososo (los tejidos). Otro resultado importante del área de la física que utilizaremos es el principio de conservación de la masa. Tanto las ecuaciones de Darcy como el principio de conservación de la masa nos permitirán concluir la “formulación fuerte” de nuestro problema: un sistema acoplado de ecuaciones de reacción - difusión.

2.1. UN POCO DE FISIOLÓGÍA

Haremos algunos comentarios sobre los mecanismos de transferencia que se producen entre la sangre y los tejidos (a través de los vasos sanguíneos). Es necesario que conozcamos, antes de continuar, algunos tipos de vasos sanguíneos:

- Las *arterias* se encargan de conducir la sangre que bombea el corazón hacia los órganos, transportando oxígeno y nutrientes (a excepción de la arterias pulmonares que transportan dióxido de carbono).
- Las *venas* cuya función es llevar la sangre desde los órganos y tejidos hasta el corazón y desde éste a los pulmones, donde se intercambia el dióxido de carbono con el oxígeno del aire inspirado (a excepción de las arterias pulmonares, que transportan sangre oxigenada).
- Los *capilares* que tienen su origen en la progresiva división de las arterias en ramas cada vez más pequeñas y a través de los cuales pasan las células sanguíneas, los nutrientes y el resto de las sustancias que transporta la sangre. La liberación de la sangre hacia los capilares se produce por medio de las arteriolas.

La mayor parte de los procesos de transferencia entre la sangre y los tejidos tienen lugar en los pequeños vasos (capilares y arteriolas). Estos procesos involucran entrega de oxígeno, eliminación de dióxido de carbono así como también transferencia de ciertas sustancias (como la glucosa) y el intercambio de calor.

El concepto, dentro del campo de la medicina, que describe cuantitativamente la relación entre el flujo de sangre y los tejidos es el de *perfusión* y se define como el volumen de sangre que pasa a través de cierta masa de tejido en un período determinado. La unidad que se utiliza normalmente para medir la perfusión tisular es 100 mg/min. Este es un importante indicador acerca del estado fisiológico de los tejidos. En este sentido, se sabe que los cambios en la perfusión de la sangre se correlacionan con varios procesos patológicos: un ejemplo de ello es la aparición de tumores. La detección a tiempo de cambios en la perfusión local puede ayudar no sólo a encontrar sino también a identificar y determinar el grado de gravedad de tumores o lesiones. Como vemos, la modelación y la simulación de la perfusión de los tejidos puede proporcionar una mejor comprensión de los mecanismos inherentes a una cierta patología y, en consecuencia, a mejorar los diagnósticos médicos.

Si queremos un análisis detallado del comportamiento del flujo sanguíneo, debemos distinguir entre dos niveles, a los que llamaremos *macro* y *microescala*. El primero hace referencia a lo que sucede en los vasos sanguíneos más “grandes” (aquellos cuyo diámetro es mayor a 0.4 mm) en cuyo caso nos interesaría tener en cuenta la geometría de los mismos, mientras que el segundo afecta a los vasos más pequeños, como los capilares, para cuyo estudio conviene utilizar modelos simplificados en los que se vean afectados el promedio de las cantidades que intervienen:

- A nivel de *macroescala*, los vasos sanguíneos se modelizan mediante una compleja red de arterias; el flujo sanguíneo y el transporte de nutrientes a este nivel se da de manera *rápida*. Los modelos a *macroescala* permiten una mejor identificación de los aspectos geométricos de las arterias involucradas y, por lo tanto, detectar y estudiar con más profundidad las principales variables fisiológicas, tales como la presión sanguínea o la temperatura. En este caso, los modelos en una dimensión suelen ser los más adecuados.
- Los procesos de transferencia tienen lugar a nivel de *microescala*; a esta altura, la circulación del flujo sanguíneo se da de modo más *lenta*. A nivel de *microescala* resulta conveniente trabajar con cantidades promedio para describir los procesos de interés. De hecho los datos geométricos no se conocen con exactitud (notemos que la estructura que presenta la red capilar puede ser bastante compleja como se muestra en la Figura 2.1) así como tampoco algunas propiedades relacionadas al intercambio de nutrientes. En este sentido, como el radio de los vasos sanguíneos que intervienen es demasiado pequeño, una posible estrategia es pensarlos como poros de un medio poroso tridimensional, los tejidos. De hecho en [5, 6], se proponen modelos en los que se tienen en cuenta diversas escalas geométricas, cada escala contempla redes de vasos de tamaño comparable pensados como jerarquías de poros en un medio homogéneo.

El propósito de este trabajo consiste en presentar un modelo que describa el acoplamiento entre el flujo de sangre en un vaso particular y el flujo a través de los tejidos circundantes (medio poroso).

2.2. MEDIOS POROSOS Y LEY DE DARCY

En esta sección enunciaremos aquellos resultados provenientes del área de la física que nos serán de utilidad para modelizar el flujo de un fluido en un medio poroso tridimensional que



Figura 2.1: Tejido retinal, en el que se observa la compleja red de vasos sanguíneos

presenta fracturas que pueden ser descritas mediante curvas. En particular, este modelo provee las bases para el análisis del flujo sanguíneo a través de los tejidos, posibilitando el cálculo de la presión sanguínea tanto en los tejidos como en los vasos.

Podríamos definir un medio poroso como aquel material compuesto por dos fases: una matriz sólida y en su interior un sistema de huecos, denominados poros, que pueden o no estar interconectados entre sí. Estos últimos pueden tener geometrías, tamaños y topologías variadas, dependiendo de su origen de formación. La geometría de un medio poroso describe las formas y tamaños de sus poros así como también la rugosidad de superficie mientras que la topología nos dice la manera en que dichos poros están conectados entre sí.

Entre las características más importantes de los medios porosos, podemos mencionar la porosidad del medio, la permeabilidad y la tortuosidad. Nos referiremos brevemente a cada una de ellas:

- *Porosidad*: la característica más simple de un medio poroso es su porosidad Φ , la cual se define como la fracción de volumen ocupada por los poros. Dependiendo del tipo de medio poroso, puede variar desde prácticamente cero para el caso de los metales y ciertas rocas volcánicas hasta uno para aerogeles.
- *Permeabilidad*: esta medida se refiere a la conductividad de flujo dentro del medio poroso.
- *Tortuosidad* (τ): se define como la razón entre la longitud real que debe recorrer una partícula de fluido para unir dos puntos en el seno del medio poroso y la distancia en línea recta entre dichos puntos. Como es esperable, τ depende de Φ : si τ es muy baja, Φ es muy grande. Generalmente, τ no puede ser medida experimentalmente y en la mayoría de los modelos clásicos de flujo y transporte en medios porosos se trata como un parámetro ajustable.

El movimiento de un fluido a través de un medio poroso se describe mediante la Ley de Darcy, la cual fue formulada en el año 1856 a partir de los resultados obtenidos experimentalmente

por Henry Darcy, en los que analizaba el flujo de agua a través de “sacos” o camas de arena. Esta ley se utiliza para describir no sólo flujos de agua, sino también de gas y petróleo y cumple un papel análogo a lo que es la ley de Fourier en el campo de la conducción del calor, a la ley de Ohm dentro del campo de la electricidad o la ley de Ficks en la teoría de la difusión.

La Ley de Darcy establece una relación proporcional entre la velocidad del flujo que atraviesa el medio poroso y la diferencia de presión que éste experimenta (en realidad la relación no es lineal en general sino potencial, de todos modos la linealidad es una hipótesis razonable para velocidades bajas) . La podemos expresar, para un flujo unidimensional, de la siguiente manera:

$$v = -K \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

donde:

- v representa la *velocidad de Darcy*, definida como la razón entre el caudal del fluido y el área de la sección transversal del recipiente en el que se encuentra (la velocidad verdadera es una velocidad lineal media que involucra el coeficiente de tortuosidad).
- u es la presión de Darcy, es decir, la presión que ejerce el fluido por unidad de superficie del recipiente que lo contiene.
- K representa la permeabilidad del medio poroso (en realidad no es intrínseca del medio pues depende también del fluido).

Notemos que el signo menos se debe a que la velocidad es una magnitud vectorial cuya dirección es hacia los incrementos decrecientes de u . Esta expresión se generaliza a tres dimensiones:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K} \cdot \nabla u \tag{2.1}$$

en la que la permeabilidad \mathbf{K} es un tensor de segundo orden y \mathbf{v} y ∇u son los vectores correspondientes a la velocidad y presión de Darcy respectivamente. En el caso de medios porosos isotrópicos (como es el caso de los tejidos), la ecuación (2.1) nos queda expresada como:

$$\mathbf{v} = -K \cdot \nabla u \tag{2.2}$$

donde K es una función escalar.

2.2.1. CONSERVACIÓN DE LA MASA

Los principios de conservación son una de las teorías fundamentales que gobiernan las ecuaciones de la física. Cuando el proceso en estudio involucra un proceso de reacción acompañado de un fenómeno de difusión, este principio conduce a una serie de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en las que las incógnitas son algunas de las cantidades que intervienen en el proceso.

Consideremos una función escalar $\rho(t, x, y, z)$ a la que llamaremos función de densidad en tiempo t y posición $\mathbf{x} = (x, y, z)$ (masa por unidad de volumen) definida en un medio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

El principio de conservación establece que “ Para cualquier subdominio R de Ω con frontera $S = \partial R$ la razón de cambio de la masa total en R es igual a la razón de flujo que atraviesa S más la tasa de flujo que se genera dentro de R ”.

Sea $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ el campo de velocidad de un fluido y sea $\int_S \mathbf{v} \cdot \rho dS$ la cantidad de fluido que fluye a través de la superficie S por unidad de área y de tiempo (denominada razón de flujo). Definimos $J = \rho \cdot \mathbf{v}$. Sea ν el vector normal exterior a la superficie S y sea q_0 el flujo generado dentro en R por unidad de tiempo y por unidad de volumen. Suponiendo que ρ y q_0 son continuas en las variables espaciales, que J es de clase C^1 y que ρ posee derivada continua respecto del tiempo, la relación de balance la podemos expresar como:

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho d\mathbf{x} = - \int_S J \cdot \nu dS + \int_R q_0 d\mathbf{x} \quad (2.3)$$

El signo negativo de la integral se debe a que la masa fluye hacia fuera de R a través de la superficie $S = \partial R$. A partir del teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \int_S J \cdot \nu dS &= \int_R \nabla \cdot J d\mathbf{x} \\ &= \int_R \text{div}(J) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

por lo que la ecuación (2.3) nos queda expresada como:

$$\int_R (\rho_t + \text{div}J - q_0) d\mathbf{x} = 0$$

Las hipótesis que hicimos acerca de la continuidad de ρ_t y $\text{div}J$ así como también la arbitrariedad en la elección de la superficie S nos permiten deducir que se cumple en Ω la siguiente igualdad:

$$\rho_t + \text{div}J - q_0 = 0$$

La igualdad anterior recibe en nombre de *ecuación de conservación de la masa* o *ecuación de continuidad*. Equivalentemente, teniendo en cuenta que $J = \rho \mathbf{v}$, podemos escribir:

$$\rho_t + \rho \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho - q_0 = 0$$

Si estamos ante la presencia de un fluido incompresible (como es el caso del flujo sanguíneo) en el que la densidad es constante, se tiene que:

$$\rho \text{div}(\mathbf{v}) - q_0 = 0$$

O bien, si llamamos $q = \frac{q_0}{\rho}$:

$$\text{div}(\mathbf{v}) - q = 0 \quad (2.4)$$

2.3. EL MODELO

Modelizar el funcionamiento del flujo sanguíneo y sus interacciones tanto mecánicas como químicas con las paredes de los vasos es una tarea bastante compleja. A nivel de microescala, el comportamiento de las variables de interés (tasa de flujo y presión principalmente) está descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales que se deducen de los principios de la física (conservación de la masa, del momento) y, como señalamos anteriormente, a este nivel las ecuaciones modelizan la evolución de los valores promedios de estas variables.

Queremos modelizar el intercambio de flujo sanguíneo entre los vasos y los tejidos. Para ello, vamos a considerar un estado estacionario de perfusión (es decir, independiente del tiempo) de un tejido biológico, el cual va a ser representado por un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Nos interesa las características geométricas que tienen las arterias por lo que vamos a suponer que los tejidos presentan en su composición una arteria simple que tiene un determinado radio $R > 0$; consideraremos el caso en que $R \ll \text{diam}(\Omega)$: este hecho nos permite representar a la arteria como un subdominio Λ parametrizado por una abscisa curvilínea que llamaremos $s \in [0; L]$ siendo L la longitud de la arteria.

La presión promedio de flujo en la matriz porosa del tejido la podemos modelizar por medio de la ley de Darcy y, si R es lo suficientemente pequeño, ecuaciones unidimensionales similares se derivan también en el vaso sanguíneo (para más detalles, ver flujo Poiseuille [7]). Para introducir las ecuaciones que describen el fenómeno de perfusión tisular, denotemos por $u, k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a la presión que ejerce el flujo sanguíneo y a la conductividad de Darcy en el tejido respectivamente y por $\hat{u}, \hat{k}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ la presión y la conductividad en el vaso. Sea $q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la tasa de flujo sanguíneo, por unidad de volumen, que circula desde el tejido y es recolectada por los vasos sanguíneos. Finalmente, sea $\hat{f}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ el volumen de sangre transferido desde el vaso hasta los tejidos por unidad de tiempo y por unidad de longitud (del vaso correspondiente). Entonces, de acuerdo a la Ley de Darcy y a (2.4):

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) + q - \hat{f} \delta_\Lambda = 0.$$

Como ya mencionamos, ecuaciones análogas rigen para los vasos sanguíneos. Por lo tanto, la presión sanguínea tanto en el tejido como en el vaso satisface el sistema siguiente:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k \nabla u) + q - \hat{f} \delta_\Lambda = 0 & \text{en } \Omega \\ -\frac{d}{ds} (\hat{k} \frac{d\hat{u}}{ds}) + \hat{f} = 0 & \text{en } \Lambda \end{cases} \quad (2.5)$$

donde denotamos por $\hat{f} \delta_\Lambda$ a la medida de Dirac con masa en Λ y con densidad \hat{f} . Asumimos la siguiente convención: para $f \in L^2(\Lambda)$, denotamos por $f \delta_\Lambda$ al operador lineal definido en $C_c^\infty(\Omega)$, el espacio de las funciones C^∞ de soporte compacto sobre Ω , dado por:

$$(f \delta_\Lambda, \phi) = \int_\Lambda f \phi ds$$

En particular $f \delta_\Lambda$ es una medida (si $f = 1$ coincide con la medida de Dirac).

Observemos que el término \widehat{f} aparece como una medida en la ecuación 3D y como una función en la ecuación 1D y expresa la conservación del flujo sanguíneo: la sangre que se pierde en los vasos circula hacia los tejidos. El modelo anterior describe el flujo de un fluido en un medio poroso tridimensional, que presenta fracturas que pueden ser descritas por variedades unidimensionales.

Para finalizar el planteo de nuestro modelo, necesitamos condiciones de contorno para el problema (2.5). Suponemos para ello que, a la entrada del vaso sanguíneo, es impuesta una determinada cantidad de flujo Q y que la presión ejercida por el flujo sanguíneo a la salida del vaso (cuando $s = L$) es cero. Asimismo, suponemos que no hay flujo de sangre que atraviese la frontera del tejido. Es decir, que:

$$\begin{cases} -k \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ -\widehat{k} \frac{d\widehat{u}}{ds} = Q \text{ en } s = 0, \widehat{u} = 0 \text{ en } s = L \end{cases} \quad (2.6)$$

siendo n el vector normal exterior a la superficie $\partial\Omega$.

En las aplicaciones, ni q ni \widehat{f} son conocidas *a priori*, por lo que necesitamos valernos de leyes constitutivas para ambos flujos. En consecuencia, consideramos para \widehat{f} la siguiente ley, denominada de filtración lineal:

$$\widehat{f}(u, \widehat{u})(s) = \beta(\widehat{u}(s) - \bar{u}(s)), \quad (2.7)$$

donde β es un coeficiente de permeabilidad para la transferencia de sangre que se produce entre vasos y tejidos y $\bar{u}(s)$ es el valor promedio de u sobre el círculo cuyo radio es el de la arteria, R , y cuyo centro se encuentra sobre la curva Λ , en el punto cuya abscisa curvilínea es s . En otras palabras, estamos suponiendo que la tasa de flujo sanguíneo por unidad de longitud desde los vasos hacia el tejido es proporcional a la diferencia entre la presión ejercida en los vasos y el valor promedio de la presión en el tejido; este último valor es de carácter *local*, en el sentido de que se computa en un entorno del punto de la curva Λ de abscisa s .

Necesitamos también una ley constitutiva para la tasa de flujo que sale desde los tejidos y penetra en los vasos sanguíneos (en particular en las venas), es decir, para q . Al igual que lo hicimos anteriormente, vamos a establecer una ley en la que q es proporcional a la diferencia de presión sanguínea en los tejidos y en los vasos. Sólo que, por una cuestión de simplicidad, suponemos que la presión ejercida por las venas en la interfaz es cero. Es decir, tenemos que:

$$q = \gamma u \quad (2.8)$$

siendo $\gamma > 0$ es un coeficiente de conductividad dado.

2.3.1. FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA

Consideremos la primera ecuación planteada en el problema (2.5) con las condiciones de borde dadas por (2.6). Procederemos a concluir una formulación débil para este problema, la cual coincide con las ecuaciones planteadas en (1.1). Para ello, multiplicando ambos lados de

la igualdad de la primera ecuación por una función $v \in V_2$ suficientemente regular e integrando sobre Ω se tiene:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (k \nabla u) + \gamma u - \widehat{f} \delta_\Lambda &= 0 \\ \int_\Omega -\nabla \cdot (k \nabla u) v \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \gamma uv \, d\mathbf{x} &= \int_\Lambda \widehat{f} v \, ds \end{aligned}$$

Debido a la fórmula de Green y gracias a que $-k \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$:

$$\int_\Omega k \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \gamma uv \, d\mathbf{x} - \int_\Lambda \widehat{f} v \, ds = 0$$

Trabajemos ahora con la segunda ecuación de (2.5). Multiplicando ambos miembros de la ecuación por una función $\widehat{v} \in \widehat{V}$ tal que $\widehat{v}(L) = 0$ suficientemente regular e integrando por partes sobre Λ :

$$\begin{aligned} \int_\Lambda -\frac{d}{ds} \left(\widehat{k} \frac{d\widehat{u}}{ds} \right) \widehat{v} \, ds + \int_\Lambda \widehat{f} \widehat{v} \, ds &= 0 \\ \int_\Lambda \widehat{k} \frac{d\widehat{u}}{ds} \frac{d\widehat{v}}{ds} \, ds + \widehat{v}(0) \left(\widehat{k} \frac{d\widehat{u}}{ds} \right) (0) - \widehat{v}(L) \left(\widehat{k} \frac{d\widehat{u}}{ds} \right) (L) - \int_\Lambda \widehat{f} \widehat{v} \, ds &= 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de borde, resulta que:

$$\int_\Lambda \widehat{k} \frac{d\widehat{u}}{ds} \frac{d\widehat{v}}{ds} \, ds - \widehat{v}(0) Q + \int_\Lambda \widehat{f} \widehat{v} \, ds = 0$$

En conclusión, la formulación débil del problema (2.5) con las condiciones de borde (2.6) es el sistema (1.1) que habíamos planteado al inicio de este trabajo. Teniendo en cuenta la definición de \widehat{f} resulta que $\Pi(u) = \bar{u}$, $B(v) = 0$, $\widehat{B}(\widehat{v}) = Q\widehat{v}(0)$ y $A_1 = k$, $A_0 = \gamma$, $\widehat{A}_1 = \widehat{k}$, $\widehat{A}_0 = 0$

Queremos demostrar que la formulación débil admite única solución. Es decir, que hay una única función $u \in V_1$ y una única $\widehat{u} \in \widehat{V}$, donde V_1 y \widehat{V} son espacios funcionales adecuados tales que:

$$\begin{cases} A(u, v) + \int_\Lambda \beta(\bar{u} - \widehat{u})v \, ds = 0 & \forall v \in V_2 \\ \widehat{A}(\widehat{u}, \widehat{v}) - \int_\Lambda \beta(\bar{u} - \widehat{u})\widehat{v} \, ds = Q\widehat{v}(0) & \forall \widehat{v} \in \widehat{V} \end{cases}$$

siendo $\beta \in L^\infty(\Lambda)$. Recordemos que las formas bilineales $A: V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\widehat{A}: \widehat{V} \times \widehat{V} \rightarrow \mathbb{R}$, están definidas por:

$$\begin{aligned} A(u, v) &:= \int_\Omega k \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \gamma uv \, d\mathbf{x} \\ \widehat{A}(\widehat{u}, \widehat{v}) &:= \int_\Lambda \widehat{k} \frac{d\widehat{u}}{ds} \frac{d\widehat{v}}{ds} \, ds \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

LOS ESPACIOS FUNCIONALES

En este capítulo queremos dar cuenta de los aspectos teóricos que, más adelante, nos serán de utilidad. A tal fin, en primer lugar definiremos los espacios adecuados para resolver el problema planteado en (2.5). Recordemos, como habíamos señalado al inicio de este trabajo, que los espacios de Sobolev tradicionales no son suficientes para demostrar la existencia y unicidad de la solución.

En la primera sección de este capítulo definiremos los espacios de Sobolev con peso. En particular, nuestra función peso estará dada por potencias adecuadas de la función distancia de un punto $\mathbf{x} \in \Omega$ a la curva Λ , es decir, $d(\mathbf{x})^\alpha$, con $d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)$. Veremos que los pesos involucrados pertenecen a la clase de Muckenhoupt, lo que nos permitirá deducir algunas propiedades importantes sobre estos espacios de Sobolev, que usaremos más adelante para demostrar la existencia de una solución al problema planteado. Finalmente, demostraremos la desigualdad de Hardy con pesos, que también será utilizada en el desarrollo de este trabajo.

3.1. LOS ESPACIOS DE SOBOLEV CON PESO

Notación: utilizaremos la siguiente notación para las derivadas: sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Entonces se denota, para $f \in C^{|\alpha|}(U)$

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

DEFINICION 3.1.1 Sean $u, v \in L^1_{loc}(U)$ y sea α un multiíndice. Decimos que v es la α -derivada débil de u y escribimos $v = D^\alpha(u)$ si:

$$\int_U u D^\alpha \phi \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, d\mathbf{x}$$

para toda función test ϕ de soporte compacto, es decir, $\phi \in C_c^\infty(U)$

En este capítulo estudiaremos los espacios funcionales que nos garantizan la buena definición del problema que estamos tratando, es decir la existencia y unicidad de una solución. Trabajaremos con los espacios de Sobolev con peso los cuales serán denotados por:

$$W^{k,p}(\Omega; \sigma)$$

siendo:

- k un entero no negativo,
- p un número real, $1 \leq p < \infty$,
- Ω es un dominio en \mathbb{R}^n con frontera $\partial\Omega$,
- Dado α un multiíndice, es decir, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, σ es un vector formado por funciones medibles no negativas en casi todo punto definidas en Ω , que llamaremos *peso*:

$$\sigma = \{\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, |\alpha| \leq k\}$$

Los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega; \sigma)$ con peso están definidos como el conjunto formado por las funciones $u = u(\mathbf{x})$ definidas en casi todo punto de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y cuyas derivadas (en el sentido débil) $D^\alpha u$, de orden $|\alpha| \leq k$ satisfacen

$$\int_{\Omega} |D^\alpha u(\mathbf{x})|^p \sigma_\alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < \infty$$

Si $u \in W^{k,p}(\Omega; \sigma)$, definimos su norma como:

$$\|u\|_{k,p,\sigma} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p \sigma_\alpha(x) \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Para el caso en que $k = 0$ introducimos la siguiente convención:

$$W^{0,p}(\Omega; \sigma) = L^p(\Omega; \sigma)$$

y denotamos

$$\|u\|_{p,0} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \sigma(x) \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

En particular, trabajaremos con espacios de Sobolev en los cuales $p = 2$ y el peso está dado por la función $d^{2\alpha}$, con $\alpha \in (-1; 1)$ donde la función $d(\mathbf{x})$ representa la distancia del punto \mathbf{x} a la curva Λ , es decir, $d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)$. Sea $\alpha \in (-1, 1)$; denotamos por $L_\alpha^2(\Omega)$ al conjunto formado por las funciones medibles u tal que

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x})^2 d^{2\alpha}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < \infty$$

lo cual significa que $u \in L_\alpha^2(\Omega)$ si y sólo si $d^\alpha u$ pertenece al espacio $L^2(\Omega)$. Aclaremos que, si bien la definición anterior puede extenderse para cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, nos ocuparemos del caso particular en que $\alpha \in (-1, 1)$. $L_\alpha^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno definido por:

$$(u, v)_{L_\alpha^2(\Omega)} = \int_\Omega u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d^{2\alpha}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

DEFINICION 3.1.2 Dado α tal que $|\alpha| < 1$, definimos

$$H_\alpha^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega, d^{2\alpha})$$

Es decir:

$$H_\alpha^1(\Omega) = \{u \in L_\alpha^2(\Omega) : \nabla u \in L_\alpha^2(\Omega)^3\}$$

Y, de acuerdo a lo visto anteriormente, el producto escalar está definido por:

$$(u, v)_{H_\alpha^1(\Omega)} = (u, v)_{L_\alpha^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L_\alpha^2(\Omega)^3}$$

3.2. LA CLASE DE MUCKENHOUP

Muchas de las propiedades que conocemos que se cumplen para los espacios de Sobolev convencionales son válidas en los espacios de Sobolev con peso (tales como la desigualdad de Poincaré, la densidad de las funciones de clase C^∞ o el teorema de Rellich - Kondratiev por citar algunas) siempre que los pesos satisfagan determinadas propiedades. Estudiaremos una clase particular de funciones peso, como son aquellas pertenecientes a la clase de Muckenhoupt, que definiremos a continuación.

DEFINICION 3.2.1 Sea $p > 1$. La clase de Muckenhoupt A_p es el conjunto formado por todas las funciones $w \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ tales que:

$$\sup_{B=B(\mathbf{x}, r)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(\mathbf{x})^{\frac{-1}{p-1}} \, d\mathbf{x} \right)^{p-1} < \infty$$

donde el supremo se toma sobre todas las $B = B(\mathbf{x}, r)$ centradas en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r > 0$ y $|B|$ denota su medida.

Demostremos a continuación que la función $d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)^{2\alpha}$, $\alpha \in (-1; 1)$ pertenece a la clase de Muckenhoupt A_2 de funciones $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que verifican la desigualdad anterior, lo cual nos garantizará la validez de ciertas proposiciones y resultados que serán necesarios para demostrar la buena definición de nuestro problema.

En lo que sigue, dado un conjunto compacto $F \in \mathbb{R}^n$ denotaremos por $d(\mathbf{x}, F)$ la distancia de \mathbf{x} a F . La demostraciones siguientes se encuentran en [11], las rescribimos aquí para dar completitud al trabajo.

DEFINICION 3.2.2 Para $0 \leq m \leq n$, un conjunto compacto $F \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto m - regular si existe una constante positiva C tal que:

$$C^{-1}r^m < \mathcal{H}^m(B(\mathbf{x}, r) \cap F) < Cr^m$$

para todo $\mathbf{x} \in F$ y $0 < r \leq \text{diam}F$, donde \mathcal{H}^m representa la medida de Hausdorff m - dimensional y $B(\mathbf{x}, r)$ es la bola de radio r centrada en \mathbf{x} . La restricción $0 < r \leq \text{diam}F$ es eliminada en el caso de que el conjunto F esté integrado por un único punto.

Nos interesa, en particular, cuando $m = 1$ y F es una curva rectificable en \mathbb{R}^3 : en dicho caso, la medida de Hausdorff \mathcal{H}^1 coincide con la longitud de la curva.

LEMA 3.2.1 Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto incluido en un conjunto m - regular K . Si

$$-(n - m) < \alpha < (n - m)(p - 1)$$

entonces $d(\mathbf{x}, F)^\alpha$ pertenece a la clase A_p , $p > 1$.

Para demostrar este lema trabajaremos con descomposiciones de Whitney. Si F es un conjunto cerrado no vacío de \mathbb{R}^n , entonces $\mathbb{R}^n \setminus F$ puede ser representado por una unión de cubos diádicos cerrados Q_j^k tales que el interior de dos cualesquiera de ellos es disjunto y de modo tal que satisfacen:

$$\mathbb{R}^n \setminus F = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j=1}^{N_k} Q_j^k$$

donde la longitud del lado de Q_j^k es 2^{-k} . La descomposición anterior se denomina *descomposición de Whitney* [19] de $\mathbb{R}^n \setminus F$ y la colección $\{Q_j^k : j = 1, 2, \dots, N_k\}$ recibe el nombre de k - ésima generación de cubos de Whitney y satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\ell_k \leq d(Q_j^k, F) \leq 4\ell_k$$

siendo ℓ_k el diámetro de Q_j^k y $d(Q_j^k, F)$ la distancia del cubo al conjunto F .

Para $\mathbf{x}_0 \in F$ y $R > 0$, definiremos $N_k(B(\mathbf{x}_0, R))$ al número de cubos de Whitney de F^c de la k - ésima generación contenidos en $B(\mathbf{x}_0, R)$.

LEMA 3.2.2 Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto contenido en un conjunto m - regular K . Dado $\mathbf{x}_0 \in F$ y $0 < R < \frac{\text{diam}F}{3}$ existe una constante C , que depende sólo de K tal que:

$$N_k(B(\mathbf{x}_0, R)) \leq CR^m 2^{km}$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $2^{-k} \leq R$ ya que en caso contrario $N_k(B(\mathbf{x}_0, R)) = 0$. Afirmamos que el número de cubos de Whitney de F^c en la k - ésima generación contenidos en $B(\mathbf{x}_0, R)$ pueden ser estimados en términos del número de bolas de radio 2^{-k} cuyo centro se encuentra en el conjunto F necesarias para cubrir $F \cap B(\mathbf{x}_0, 2R)$. En este sentido, supongamos que existen bolas $B(\mathbf{x}_i, 2^{-k})$ con $\mathbf{x}_i \in F$, $1 \leq i \leq N$ tales que

$$F \cap B(\mathbf{x}_0, 2R) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{x}_i, 2^{-k}) \quad (3.1)$$

y sea Q^k un cubo de Whitney en la k -ésima generación contenido en $B(\mathbf{x}_0, R)$. Entonces, se verifica que

$$d(Q^k, F) = d(Q^k, F \cap B(\mathbf{x}_0, 2R))$$

Puesto que como $Q^k \subset B(\mathbf{x}_0, R)$ ningún punto de Q^k puede distar de \mathbf{x}_0 en más de R , y por estar $\mathbf{x}_0 \in F$ se tiene que $d(Q^k, F) < R$, y por desigualdad triangular se sigue la afirmación. Luego si $y_Q \in F$ es un punto que satisface $d(Q^k, F) = d(Q^k, y_Q)$, entonces $y_Q \in B(\mathbf{x}_0, 2R)$. Como, además estamos suponiendo que $F \cap B(\mathbf{x}_0, 2R) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{x}_i, 2^{-k})$, existe algún i , $1 \leq i \leq N$ tal que $y_Q \in B(\mathbf{x}_i, 2^{-k})$. Por lo tanto, teniendo en cuenta que Q^k es un cubo de Whitney en la k -ésima generación se sigue que

$$Q^k \subset B(\mathbf{x}_i, 6\ell_k)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} d(Q^k, \mathbf{x}_i) &\leq d(Q^k, y_Q) + d(y_Q, \mathbf{x}_i) \\ &\leq 4\ell_k + 2 \cdot 2^{-k} \\ &\leq 4\ell_k + 2\ell_k \\ &= 6\ell_k \end{aligned}$$

Pero, por otro lado, $B(\mathbf{x}_i, 6\ell_k)$ no puede contener más que una cantidad finita $c(n)$ de los cubos Q^k . Entonces, teniendo en cuenta la inclusión (3.1) deducimos que

$$N_k(B(\mathbf{x}_0, R)) \leq c(n)N$$

Para completar la demostración tenemos que ver que existen N bolas que satisfacen la relación (3.1) con $N \leq CR^m 2^{km}$. Para ello, sea $r = 2^{-(k+1)}$. Para $K_0 = K \cap B(\mathbf{x}_0, 2R)$ definimos los siguientes números:

$$\begin{aligned} H_m(K_0, r) &:= \min \left\{ Nr^m : K_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{x}_i, r) \text{ con } \mathbf{x}_i \in K_0 \right\} \\ P(K_0, r) &:= \max \{ N : \text{existen bolas disjuntas } B(\mathbf{x}_i, r), i = 1, \dots, N \text{ con } \mathbf{x}_i \in K_0 \} \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta que K es un conjunto m -regular:

$$\begin{aligned}
H_m(K_0, r) &\leq P(K_0, \frac{r}{2})r^m = 2^m P(K_0, \frac{r}{2}) \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^m \\
&< 2^m C \sum_{i=1}^{P(K_0, \frac{r}{2})} \mathcal{H}^m \left(B(\mathbf{x}_i, \frac{r}{2}) \cap K \right) \\
&= 2^m C \sum_{i=1}^{P(K_0, \frac{r}{2})} \mathcal{H}^m \left(B(\mathbf{x}_i, \frac{r}{2}) \cap K \cap B(\mathbf{x}_0, 3R) \right) \\
&\leq 2^m C \mathcal{H}^m (K \cap B(\mathbf{x}_0, 3R)) \\
&< C^2 6^m R^m
\end{aligned}$$

Usando la definición de $H_m(K_0, r)$ obtenemos (modificando C adecuadamente):

$$K \cap B(\mathbf{x}_0, 2R) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{x}_i, 2^{-(k+1)}) \quad \text{y} \quad N \leq CR^m 2^{(k+1)m}$$

ya que, de la desigualdad anterior se deduce que:

$$Nr^m = N2^{-m(k+1)} \leq CR^m$$

Ahora bien: F está contenido en el conjunto K y, por ende

$$F \cap B(\mathbf{x}_0, 2R) \subset \bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{x}_i, 2^{-(k+1)}).$$

Entonces, si $B(\mathbf{x}_i, 2^{-(k+1)}) \cap F \neq \emptyset$, para $\mathbf{x}'_i \in F \cap B(\mathbf{x}_i, 2^{-(k+1)})$ tenemos que:

$$B(\mathbf{x}_i, 2^{-(k+1)}) \subseteq B(\mathbf{x}'_i, 2^{-k})$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{x} - \mathbf{x}'_i \| &\leq \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_i \| + \| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i \| \\
&\leq 22^{-(k+1)} = 2^{-k}
\end{aligned}$$

Las bolas $B(\mathbf{x}'_i, 2^{-k})$ satisfacen la relación (3.1), lo que concluye la demostración. \square

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA (3.2.1): Sea B una bola en \mathbb{R}^n . Llamemos r_B al radio de la misma y sea $d(B)$ la distancia de B al conjunto F y sea $d(x) = d_F(x) = \text{dist}(\mathbf{x}, F)$.

- Si $r_B \leq d(B)$, dado $\mathbf{x} \in B$ tenemos que $d(B) \leq d(\mathbf{x}, F) \leq 3d(B)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B|} \int_B d^\alpha \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B d^{\frac{-\alpha}{p-1}} \right)^{p-1} \\
&\leq C \left(\frac{1}{|B|} \int_B d(B)^\alpha \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B d(B)^{\frac{-\alpha}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C
\end{aligned}$$

- Por otro lado, si $r_B \geq d(B)$, entonces existe $\mathbf{x}_0 \in \partial F$ tal que $B \subseteq B(\mathbf{x}_0, 3r_B)$. Luego, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la bola B está centrada en un punto del conjunto F . Distinguiremos dos casos:

(a) Si $r_B < \frac{\text{diam}F}{6}$, de la descomposición de Whitney para F tenemos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|B|} \int_B d^\alpha \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B d^{\frac{-\alpha}{p-1}} \right)^{p-1} \\ & \leq Cr_B^{-np} \left(\sum_{Q^k} \int_{Q^k} d^\alpha \right) \left(\sum_{Q^k} \int_{Q^k} d^{\frac{-\alpha}{p-1}} \right)^{p-1} \end{aligned}$$

donde la suma se toma sobre todos los cubos de Whitney que intersecan a la bola B ; sabemos que es suficiente con considerar los cubos de Whitney contenidos en $2B$, la bola de radio $2r_B$. El término Cr_B^{-np} proviene de considerar la medida de la bola B .

Llamemos

$$I := Cr_B^{-np} \left(\sum_{Q^k} \int_{Q^k} d^\alpha \right) \left(\sum_{Q^k} \int_{Q^k} d^{\frac{-\alpha}{p-1}} \right)^{p-1}$$

Observemos que si Q^k está contenido en $2B$, entonces su diagonal es menor que el diámetro de $2B$. Por lo tanto se tiene que $\sqrt{n}2^{-k} < 4r_B$, o sea $2^{-k} < \frac{4r_B}{\sqrt{n}}$. Sea k_0 el mínimo k tal que existe Q^k contenido en B ; luego se verifica que $2^{-k_0} \leq Cr_B$. Usando que $d(\mathbf{x}) \approx d(Q^k) \approx 2^{-k}$ para todo $\mathbf{x} \in Q^k$ y el lema anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} I & \leq Cr_B^{-np} \left(\sum_{Q^k} 2^{-kn} 2^{-k\alpha} \right) \left(\sum_{Q^k} 2^{-kn} 2^{\frac{k\alpha}{p-1}} \right)^{p-1} \\ & \leq Cr_B^{-np} \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} N_k(B(\mathbf{x}_0, 2r_B)) 2^{-kn} 2^{-k\alpha} \right) \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} N_k(B(\mathbf{x}_0, 2r_B)) 2^{-kn} 2^{\frac{k\alpha}{p-1}} \right)^{p-1} \\ & \leq Cr_B^{-np} \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} r_B^m 2^{-k(n-m+\alpha)} \right) \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} r_B^m 2^{-k(n-m-\frac{\alpha}{p-1})} \right)^{p-1} := II \end{aligned}$$

Luego, como por hipótesis $-(n-m) < \alpha < (p-1)(n-m)$:

$$\begin{aligned} II & \leq Cr_B^{-pn} (r_B^m 2^{-k_0(\alpha+n-m)}) \left(r_B^m 2^{-k_0(n-m-\frac{\alpha}{p-1})} \right)^{p-1} \\ & = Cr_B^{-p(n-m)} (2^{-k_0(\alpha+n-m)}) \left(2^{-k_0(n-m-\frac{\alpha}{p-1})} \right)^{p-1} \\ & \leq Cr_B^{-p(n-m)} (2^{-k_0})^{p(n-m)} \leq C \end{aligned}$$

puesto que $r_B^{-1} 2^{-k_0} < C$.

(b) Si $r_B \geq \frac{\text{diam}F}{6}$, sea \mathbf{x}_F un punto en el conjunto F independiente de B . Entonces, como $\mathbf{x}_0 \in F$ y $r_B \geq \frac{\text{diam}F}{6}$ podemos asumir que B es la bola de radio $r_B > 3\text{diam}F$ y centro \mathbf{x}_F . Por otro lado, si B_1 denota la bola de radio $2\text{diam}(K)$ y centro \mathbf{x}_F , d^α y $d^{\frac{-\alpha}{p-1}}$ son integrables sobre B_1 . Entonces:

$$\int_{B_1} d^\alpha \leq C$$

y

$$\int_{B_1} d^{\frac{-\alpha}{p-1}} \leq C$$

Usando que $d(\mathbf{x}, F) \approx d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_F)$, para cualquier $\mathbf{x} \in B \setminus B_1$:

$$\begin{aligned} \int_{B_1} d^\alpha &= \int_{B_1} d^\alpha + \int_{B-B_1} d^\alpha \\ &\leq C \left(1 + \int_{B-B_1} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_F\|^\alpha \right) \\ &\leq C \left(1 + \int_{2\text{diam}F}^{r_B} \rho^{n-1} \rho^\alpha \right) \\ &\leq Cr_B^{\alpha+n} \end{aligned}$$

De la misma manera, podemos demostrar que

$$\int_B d^{\frac{-\alpha}{p-1}} \leq Cr_B^{\frac{-\alpha}{p-1}+n}$$

y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d^\alpha \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B d^{\frac{-\alpha}{p-1}} \right)^{p-1} &\leq C \frac{1}{|B|^p} r_B^{\alpha+n} r_B^{-\alpha+n(p-1)} \\ &\leq C \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

Observemos que el Lema 3.2.1 dice, en particular, que la función definida por $d(\mathbf{x}, \Lambda)^{2\alpha} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a la clase de Muckenhoupt A_2 , en el caso que resulta de interés para nosotros $-1 < \alpha < 1$.

3.3. ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES

¿Porqué nos interesa demostrar que la función peso con la que estamos trabajando pertenece a la clase A_2 ? Muchas de las propiedades importantes que conocemos que se cumplen en los espacios de Sobolev tradicionales continúan siendo válidas en los espacios de Sobolev con pesos

para aquellos pesos que pertenecen a esta clase. Mencionaremos debajo la densidad de funciones regulares [16, 17] que usaremos frecuentemente. En [9] se tratan pesos del tipo potencias de distancias a variedades M de dimensión arbitraria, pero existe cierta restricción ya que $M \subset \partial\Omega$ con cierta propiedad de cono exterior para los puntos de M , por lo que no está claro que se pueda adaptar esos resultados al presente trabajo. El dominio Ω es un abierto acotado.

TEOREMA 3.3.1 DENSIDAD DE LAS FUNCIONES C^∞ : *Sea σ una función de peso perteneciente a la clase de Muckenhoupt A_2 . El conjunto de las funciones de clase $C^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{1,2}(\Omega, \sigma)$. Es decir:*

$$W^{1,2}(\Omega, \sigma) = \overline{C^\infty(\Omega)}$$

donde la clausura del conjunto $C^\infty(\Omega)$ del lado derecho se toma respecto a la norma $\| \cdot \|_{W^{1,2}}$.

Demostremos a continuación la siguiente desigualdad de Hardy con pesos. La demostración que haremos es un caso particular de la dada en [10].

TEOREMA 3.3.2 (DESIGUALDAD DE HARDY CON PESOS) *Sean $0 < p \leq q < \infty$, $0 < R \leq \infty$ y sean w_1 y w_2 funciones de peso definidas en $(0, +\infty)$. Supongamos que para todo $r > 0$ se verifica*

$$\int_0^r w_2(t)^{\frac{1}{1-p}} < \infty \quad (3.2)$$

Entonces, la desigualdad

$$\left(\int_0^R \left(\int_0^r f(t) dt \right)^q w_1(r) dr \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^R f^p(t) w_2(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.3)$$

se verifica para toda función f positiva definida en $(0, +\infty)$ si y sólo si

$$D = \sup_{r \in (0, R)} \left(\int_r^R w_1(t) dt \right)^{\frac{1}{1-p}} \left(\int_0^r w_2(t)^{\frac{1}{1-p}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty$$

Mas aún, la mejor constante C en (3.3) satisface la desigualdad:

$$D \leq C \leq k(p, q)D$$

donde

$$k(p, q) = \left(\frac{p + qp - q}{p} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p + qp - p}{(p-1)q} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

DEMOSTRACIÓN: Demostremos sólo la condición necesaria, ya que es la de nuestro interés. Como consecuencia de que (3.2) es finita para todo $r > 0$, podemos deducir que la función

$$h(z) = \left(\int_0^z w_2(t)^{\frac{1}{1-p}} dt \right)^{\frac{1}{p's}}$$

siendo $p' = \frac{p}{p-1}$ (o sea $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) y s es un número fijo perteneciente al intervalo $(1, +\infty)$, satisface $0 < h(z) < \infty$ para todo $z \in (0, R)$.

Sea f una función positiva definida en el intervalo $(0, R)$. Por la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} \int_0^r f(t) dt &= \int_0^r f(t) w_2^{\frac{1}{p}}(t) h(t) h^{-1}(t) w_2^{\frac{-1}{p}}(t) dt \\ &\leq \left(\int_0^r f^p(t) w_2(t) h^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r h^{-p'}(t) w_2(t)^{1-p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de la función h e integrando:

$$\begin{aligned} \int_0^r h(t)^{-p'} w_2(t)^{1-p'} dt &= \int_0^r \left(\int_0^t w_2^{1-p'}(y) dy \right)^{\frac{-1}{s}} w_2^{1-p'}(t) dt \\ &= \frac{s}{s-1} \left(\int_0^r w_2^{1-p'}(y) dy \right)^{\frac{s-1}{s}} \\ &= \frac{s}{s-1} h^{(s-1)p'}(r) \end{aligned} \tag{3.4}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} &\left[\int_0^R \left(\int_0^r f(t) dt \right)^q w_1(r) dr \right]^{\frac{p}{q}} \\ &\leq \left[\int_0^R \left(\int_0^r f^p(t) w_2(t) h^p(t) dt \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_0^r h^{-p'}(t) w_2^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{q}{p'}} w_1(r) dr \right]^{\frac{p}{q}} \\ &\leq \left[\int_0^R \left(\int_0^r f^p(t) w_2(t) h^p(t) dt \right)^{\frac{q}{p}} \left(\frac{s}{s-1} h^{(s-1)p'}(r) \right)^{\frac{q}{p'}} w_1(r) dr \right]^{\frac{p}{q}} \\ &= \left(\frac{s}{s-1} \right)^{\frac{p}{p'}} \left[\int_0^R \left(\int_0^r f^p(t) w_2(t) h^p(t) dt \right)^{\frac{q}{p}} h^{(s-1)q}(r) w_1(r) dr \right]^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Minkowski¹ aplicada en el caso en que $r = \frac{q}{p}$:

$$\left[\int_0^R \left(\int_0^r f(t) dt \right)^q w_1(r) dr \right]^{\frac{p}{q}} \leq \left(\frac{s}{s-1} \right)^{\frac{p}{p'}} \left(\int_0^R f^p(t) w_2(t) h^p(t) dt \right) \left(\int_t^R h^{(s-1)q}(r) w_1(r) dr \right)^{\frac{p}{q}} \tag{3.5}$$

De la definición de D en el enunciado del teorema se tiene que:

¹La desigualdad utilizada es $\left[\int_a^b \Phi(x) \left(\int_a^x \Psi(y) dy \right)^r dx \right]^{\frac{1}{r}} \leq \int_a^b \Psi(y) \left(\int_y^b \Phi(x) dx \right)^{\frac{1}{r}} dy \quad \forall$ funciones Ψ, Φ positivas en (a, b)

$$h^{(s-1)q}(r) = (h^s(r))^{\frac{(s-1)q}{s}} \leq D^{\frac{(s-1)q}{s}} \left(\int_r^R w_1(t) dt \right)^{\frac{-(s-1)}{s}}$$

Multiplicando la desigualdad anterior por $w_1(r)$ e integrando entre t y R , $0 < t < R$:

$$\begin{aligned} \int_t^R h^{(s-1)q}(r) w_1(r) dr &\leq D^{\frac{(s-1)q}{s}} \int_t^R \left(\int_r^R w_1(y) dy \right)^{-1+\frac{1}{s}} w_1(r) dr \\ &= s D^{\frac{(s-1)q}{s}} \left(\int_t^R w_1(y) dy \right)^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

Esta estimación implica que:

$$\begin{aligned} \left(\int_t^R h^{(s-1)q}(r) w_1(r) dr \right)^{\frac{p}{q}} &\leq s^{\frac{p}{q}} D^{\frac{(s-1)p}{s}} \left(\int_t^R w_1(y) dy \right)^{\frac{p}{qs}} \\ &\leq s^{\frac{p}{q}} D^{\frac{(s-1)p}{s}} \left[D \left(\int_0^t w_2^{1-p'}(y) dy \right)^{\frac{-1}{p'}} \right]^{\frac{p}{s}} \\ &= s^{\frac{p}{q}} D^p h^{-p}(t) \end{aligned}$$

y, elevando la desigualdad (3.5) a $\frac{1}{p}$ tenemos:

$$\begin{aligned} &\left[\int_0^R \left(\int_0^r f(t) dt \right)^q w_1(t) dt \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\frac{s}{s-1} \right)^{\frac{1}{p'}} s^{\frac{1}{q}} D \left(\int_0^R f^p(t) w_2(t) h^p(t) h^{-p}(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= g(s) D \left(\int_0^R f^p(t) w_2(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

donde $g(s) = s^{\frac{1}{q}} \left(\frac{s}{s-1} \right)^{\frac{1}{p'}}$

Recordemos que s era arbitrario, $s > 1$. La función $g(s)$ tiene un mínimo en $s = 1 + \frac{q}{p'}$, por lo que

$$\inf_{s>1} g(s) = g\left(1 + \frac{q}{p'}\right) = \left(\frac{p + qp - q}{p} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p + qp - p}{(p-1)q} \right)^{\frac{p-1}{p}} = k(p, q)$$

por lo que concluimos:

$$\left(\int_0^R \left(\int_0^r f(t) dt \right)^q w_1(r) dr \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^R f^p(r) w_2(r) dr \right)^{\frac{1}{p}}$$

con C constante tal que $C \leq k(p, q)D \square$

La desigualdad de Hardy nos será de utilidad, en el capítulo siguiente, para demostrar un teorema relativo a la traza de una función en el espacio de Sobolev con peso $H^1_{-\alpha}(\Omega)$, dado en la definición (3.1.2).

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

En este capítulo, en primer lugar, introduciremos los aspectos geométricos y la notación que será utilizada. Como ya mencionamos, las condiciones de acoplamiento entre tejidos y vasos no son estándares, por lo que para simplificar estudiaremos, en primer lugar, el problema “desacoplado” en el cual consideraremos que la presión sanguínea en los vasos sanguíneos es conocida. Luego trasladaremos los resultados obtenidos al problema acoplado 1D - 3D.

El teorema de Nečas, una generalización del teorema de Lax - Milgram, será la herramienta teórica que nos garantice la existencia de una única solución del problema desacoplado. A fin de aplicar este teorema, necesitaremos un resultado relacionado con el operador de trazas.

4.1. NOTACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LOS ASPECTOS GEOMÉTRICOS

Vamos a detallar los aspectos geométricos y la notación que usaremos en este trabajo. Como señalamos, nuestro modelo intenta ser aplicado a problemas relacionados con el flujo sanguíneo por lo cual nos referiremos a Ω como el tejido y a Λ como el vaso sanguíneo.

- I. Por simplicidad, vamos a suponer que el vaso Λ es una curva simple, parametrizada por longitud de arco:

$$\Lambda = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s), s \in [s_1, s_2]\}$$

donde s es la denominada abscisa curvilínea y $\mathbf{x} : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización suave. Esta hipótesis puede ser extendida fácilmente si tenemos en cuenta las ramificaciones de los vasos.

- II. Suponemos que el verdadero radio del vaso sanguíneos es una constante positiva $R > 0$. Luego, definimos el volumen que ocupa el vaso como el conjunto de puntos que distan de Λ menos que R :

$$\Omega^R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda) < R\}$$

El anterior es un dominio *auxiliar*, el cual usaremos solamente para el análisis de las condiciones del acoplamiento entre el tejido y el vaso sanguíneo unidimensional. Asumimos

que R es lo suficientemente pequeño de modo que $\bar{\Omega}^R \subset \Omega$.

Vamos a describir al conjunto Ω^R por medio de tres aplicaciones locales (*atlas*), utilizando los versores tangente, normal y binormal (que conforman el denominado triedro de Frenet). A tal fin, definimos los siguientes conjuntos:

$$\Omega_0^R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0(s, r, \theta), (s, r, \theta) \in (s_1, s_2) \times [0, R) \times [0, 2\pi) \}$$

$$\Omega_1^R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1(r, \theta, \phi), (s, \theta, \phi) \in [0, R) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \}$$

$$\Omega_2^R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_2(r, \theta, \phi), (r, \theta, \phi) \in [0, R) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \}$$

siendo:

$$\mathbf{x}_0(s, r, \theta) = \mathbf{x}(s) + \mathbf{n}(s)r \cos(\theta) + \mathbf{b}(s)r \sin(\theta), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x}_1(r, \theta, \phi) = \mathbf{x}(s_1) + \mathbf{n}(s_1)r \cos \theta \sin \phi + \mathbf{b}(s_1)r \sin \theta \sin \phi + \mathbf{t}(s_1)r \cos \phi, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{x}_2(r, \theta, \phi) = \mathbf{x}(s_2) + \mathbf{n}(s_2)r \cos \theta \sin \phi + \mathbf{b}(s_2)r \sin \theta \sin \phi + \mathbf{t}(s_2)r \cos \phi \quad (4.3)$$

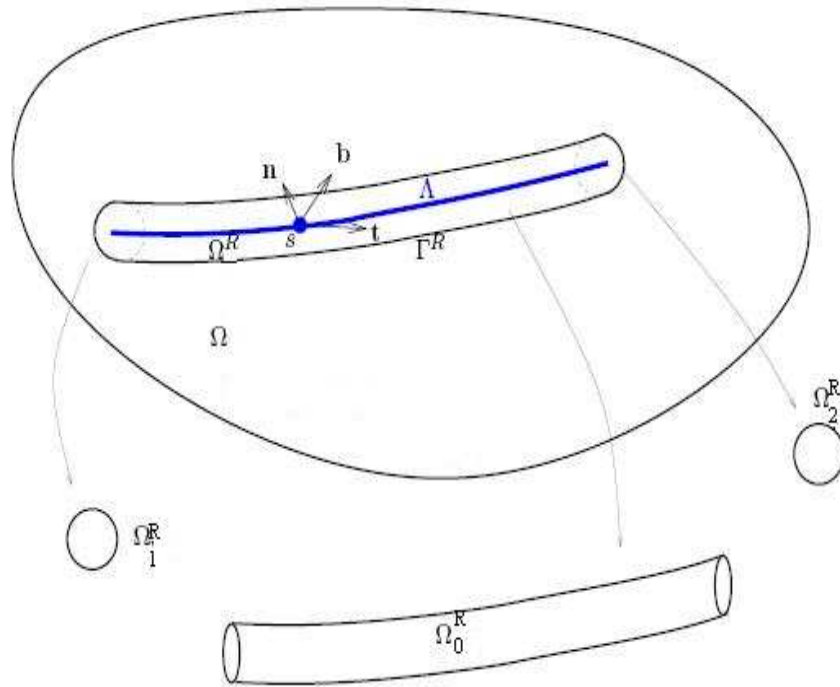


Figura 4.1: Subdominios en Ω : El dominio unidimensional Λ y el dominio auxiliar 3D Ω^R . Notemos que Ω^R es la unión superpuesta de los subconjuntos $\Omega_0^R, \Omega_1^R, \Omega_2^R$, donde sus coordenadas cilíndricas/esféricas $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ y \mathbf{x}_2 han sido ya definidas.

donde $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ son, respectivamente, los versores tangente, normal y binormal a la curva Λ (ver figura 4.1). En otras palabras, estamos suponiendo que Ω^R puede ser parametrizado por una unión superpuesta de tres aplicaciones: una de ellas en coordenadas

cilíndricas sobre Ω_0^R mientras que las dos restantes son parametrizaciones en coordenadas esféricas sobre Ω_1^R y Ω_2^R respectivamente.

- III. Denotamos por $\Gamma^R = \partial\Omega^R$ a la interfaz entre el vaso y el tejido. La parte “ cilíndrica ” de Γ^R que pertenece a la frontera de Ω_0^R la denotaremos por Γ_0^R :

$$\Gamma_0^R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0(s, R, \theta), (s, \theta) \in (s_1, s_2) \times [0, 2\pi) \}$$

La hipótesis fundamental que haremos acerca de la geometría que presenta el vaso sanguíneo es que la proyección desde Ω^R a Λ es única. Es decir que:

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^R : \exists! \mathbf{x}_0 \in \Lambda : \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \quad (4.4)$$

lo cual puede asegurarse para valores chicos de R . Como consecuencia de esta propiedad tendremos que:

$$\text{dist}(\mathbf{x}_0(s, r, \theta), \Lambda) = r \quad \forall (r, s, \theta) \in [s_1, s_2] \times [0, R] \times [0, 2\pi).$$

- IV. Sea $\{\varphi_i\}$ una partición de la unidad tal que, para $i = 0, 1, 2$, $\varphi_i : \Omega_i^R \rightarrow \mathbb{R}$ es una función regular no negativa cuyo soporte $\text{sop}(\varphi_i) \subset \Omega_i^R$ y se verifica que $\sum_i \varphi_i = 1$ en Ω^R . Dada u una función medible, $u : \Omega^R \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\int_{\Omega^R} u \, d\mathbf{x} = \int_{s_1}^{s_2} \int_0^R \int_0^{2\pi} u_0(s, r, \theta) \cdot r \, ds dr d\theta + \sum_{i=1,2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_i(r, \theta, \Phi) \cdot r^2 \sin(\Phi) \, dr d\theta d\Phi$$

donde

$$u_i = (u\varphi_i) \circ \mathbf{x}_i \quad i = 0, 1, 2$$

Más aún, obtenemos la siguiente fórmula:

$$\int_{\Gamma^R} u \, d\sigma = \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} u_0(s, R, \theta) \cdot R \, ds d\theta + \sum_{i=1,2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_i(R, \theta, \Phi) \cdot R^2 \sin(\Phi) \, d\theta d\Phi$$

De esta ecuación, si u es una función continua en Ω^R entonces:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma^{\epsilon R}} u \, d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} u_0(s, \epsilon R, \theta) \cdot R \, ds d\theta = \int_{s_1}^{s_2} 2\pi u(s) R \, ds = 2\pi R \int_{\Lambda} u \, ds,$$

con $u(s) = u(\mathbf{x}_0(s, 0, 0))$.

Denotaremos por \bar{u} al promedio de la función u sobre los círculos de radio R que se encuentran sobre la superficie cilíndrica Γ_0^R y en el plano normal a la curva Λ (es decir, en el plano generado por los versores normal y binormal).

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{x}_0(s, R, \theta)) \, d\theta$$

Utilizando las coordenadas locales \mathbf{x}_0 y definiendo $u_\epsilon = u(s, \frac{r}{\epsilon}, \theta)$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0^{\epsilon R}} u_\epsilon \, d\sigma = 2\pi R \int_{s_1}^{s_2} \bar{u}(s) \, ds$$

Para el problema de perfusión descrito en (1.1) habíamos visto que $\Pi(u) = \bar{u}$, donde \bar{u} es el valor medio de la función u en el círculo de radio R , sobre la superficie cilíndrica Ω_0^R y normal a la curva Λ . Con la notación que acabamos de introducir y si la función u es regular, \bar{u} está definida, por:

$$\bar{u}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{x}_0(s, R, \theta)) \, d\theta \quad (4.5)$$

4.2. ANÁLISIS DEL PROBLEMA DESACOPLADO

En los capítulos anteriores planteamos el problema de nuestro interés, dando como resultado un sistema de ecuaciones elípticas que constituye un modelo matemático para el estudio del intercambio de flujo sanguíneo entre los vasos y los tejidos. En este sentido, queremos encontrar (u, \hat{u}) que satisfagan:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k \nabla u) + q - \hat{f} \delta_\Lambda = 0 & \text{en } \Omega \\ -\frac{d}{ds} \left(\hat{k} \frac{d\hat{u}}{ds} \right) + \hat{f} = 0 & \text{en } \Lambda \end{cases}$$

donde $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\hat{u} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ representan la presión sanguínea en los tejidos y en los vasos respectivamente, $\hat{f} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ es el volumen de sangre transferido desde las venas hacia los tejidos por unidad de tiempo y de longitud y $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es la tasa de la tasa de flujo sanguíneo, por unidad de volumen, que circula desde el tejido y es recolectada por los vasos sanguíneos.

Asimismo, tratamos la teoría acerca de los espacios funcionales que nos serán útiles para demostrar que el problema está bien definido. Es decir, que existe solución y es única. Con este fin, consideraremos el problema 'desacoplado': estudiaremos la primera ecuación del sistema, suponiendo que la presión sanguínea en el vaso es conocida, para luego extender estos resultados al problema acoplado.

Supongamos que $\hat{u} = u_0 \in L^2(\Lambda)$. Luego, el problema se reduce a tratar con una única ecuación planteada en el dominio 3D, Ω . Para obtener la existencia y unicidad de la solución nos valdremos de una generalización del teorema de Lax - Milgram, que es conocida como

el teorema de Nečas. A tal fin, recordemos las formas bilineales que definimos en el primer capítulo:

$$A(u, v) := \int_{\Omega} A_1 \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} A_0 uv \, dx$$

y sea

$$\begin{aligned} a(u, v) &= A(u, v) + \int_{\Lambda} \beta \Pi u(s) v(s) \, ds \\ &= \int_{\Omega} A_1 \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} A_0 uv \, dx + \int_{\Lambda} \beta \Pi u(s) v(s) \, ds \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sea F el funcional lineal definido por:

$$F(v) = \int_{\Lambda} \beta u_0 v(s) \, ds + B(v) \quad (4.7)$$

Luego, el problema desacoplado se traduce en: *Encontrar $u \in V_1$ tal que:*

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V_2 \quad (4.8)$$

La idea es considerar los espacios de Sobolev con peso tratados en el capítulo anterior y tomar $V_1 = H_{\alpha}^1$ y $V_2 = H_{-\alpha}^1$, con $\alpha \in (0; 1)$. Para obtener la existencia de una única solución u a este problema nos valdremos, del siguiente teorema.

TEOREMA 4.2.1 (NEČAS) *Sean V_1 y V_2 dos espacios de Hilbert, $F \in V_2'$ un funcional lineal acotado en V_2 y $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal en $V_1 \times V_2$ tal que:*

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{V_1} \|v\|_{V_2} \quad \forall (u, v) \in V_1 \times V_2 \quad (4.9)$$

$$\sup_{u \in V_1} a(u, v) > 0 \quad \forall v \in V_2, v \neq 0 \quad (4.10)$$

$$\sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} a(u, v) \geq C_2 \|u\|_{V_1} \quad \forall u \in V_1 \quad (4.11)$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas. Entonces existe una única $u \in V_1$ tal que

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V_2$$

La función u depende lineal y continuamente de F :

$$\|u\|_{V_1} \leq \frac{1}{C_2} \|F\|_{V_2'}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $u \in V_1$. La aplicación $a(u, \cdot) : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es, por ser lineal y continua, un elemento de V_2' . Por el teorema de representación de Riesz, existe una única $w \in V_2$ tal que

$$a(u, v) = (w, v)_{V_2} \quad \forall v \in V_2$$

siendo (\cdot, \cdot) el producto interno definido en V_2 .

Sea $A : V_1 \rightarrow V_2$ el operador lineal tal que $Au = w$. A es continua: En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \| Au \|_{V_2}^2 &= (Au, Au)_{V_2} \\ &= a(u, Au) \leq C_1 \| u \|_{V_1} \| Au \|_{V_2} \end{aligned}$$

por lo que $\| Au \|_{V_2} \leq C_1 \| u \|_{V_1} \quad \forall u \in V_1$.

El problema se reduce luego a, dada $F \in V_2'$, encontrar una única $u \in V_1$ tal que $Au = F$. Para ello, basta ver que A es biyectiva:

- A es inyectiva: En efecto, $Aw = 0$ implica que $a(w, v) = 0 \quad \forall v \in V_2$ y, teniendo en cuenta (4.10) se sigue que $w = 0$.
- Veamos que A es sobreyectiva, para lo cual veremos que su rango es igual a V_2 . Afirmamos que el rango de A es cerrado: en efecto, sea w_n una sucesión en V_1 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} Aw_n = v$, $v \in V_2$. Luego de (4.11):

$$\begin{aligned} \| w_n - w_m \|_{V_1} &\leq \frac{1}{C_2} \sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} a(w_n - w_m, v) \\ &= \frac{1}{C_2} \sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} (A(w_n - w_m), v)_{V_2} \\ &\leq \frac{1}{C_2} \| A(w_n - w_m) \|_{V_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $w_n \rightarrow w$ en V_1 y $Aw_n \rightarrow Aw = v$ en V_2

Para finalizar, sea $z \in rg(A)^\perp$, es decir $(Aw, z)_{V_2} = a(w, z) = 0 \quad \forall w \in V_1$. De (4.10) se sigue que $z = 0$. Por lo tanto, A es suryectiva.

Hemos demostrado entonces que, dada $F \in V_1'$ existe una única $u \in V_1$ tal que $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V_2$. Mas aún:

$$\begin{aligned} C_2 \| u \|_{V_1} &\leq \sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} (Au, v)_{V_2} \\ &= \sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} (F(v), v)_{V_2} = \| F \|'_{V_2} \end{aligned}$$

□

Aplicaremos el teorema anterior al problema que estamos tratando, tomando $V_1 = H_\alpha^1(\Omega)$ y $V_2 = H_{-\alpha}^1(\Omega)$. Para ello, tenemos que demostrar que estamos bajo las hipótesis, es decir que valen los siguientes resultados:

1. El funcional F definido en (4.7) es continuo en H_α^1

II. La forma bilineal $a(u, v)$ definida en (4.6) es continua en $H_\alpha^1 \times H_{-\alpha}^1$ y satisface las desigualdades dadas en (4.10) y (4.11)

Comenzaremos por el primer apartado. Para ver que F es un funcional lineal continuo, necesitamos antes un resultado referido a la traza de una función en $H_{-\alpha}^1(\Omega)$.

TEOREMA 4.2.2 (OPERADOR DE TRAZA EN Λ) *Sea $0 < \alpha < 1$. Existe una única aplicación lineal continua*

$$\gamma_\Lambda : H_{-\alpha}^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Lambda)$$

tal que $\gamma_\Lambda \phi = \phi|_\Lambda$ para toda función $\phi \in C^\infty(\Omega)$. En particular, existe una constante positiva $C_\Lambda = C_\Lambda(\alpha)$ tal que

$$\|\phi\|_{L^2(\Lambda)} \leq C_\Lambda(\alpha) \|\phi\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in H_{-\alpha}^1(\Omega) \quad (4.12)$$

DEMOSTRACIÓN: La idea de la demostración es ver, en primer lugar, que el resultado vale para las funciones de clase $C^\infty(\Omega)$ y luego, por un argumento de densidad, extender esta propiedad a toda $\phi \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$. Sea $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Integrando sobre Ω_0^R en la dirección radial, y usando coordenadas cilíndricas locales, tenemos que para todo $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$\phi(s, 0, 0) = \phi(s, r, \theta) - \int_0^r \frac{\partial \phi}{\partial r}(s, t, \theta) dt$$

Elevando al cuadrado la igualdad anterior y usando que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$:

$$\phi(s)^2 \leq 2\phi(s, r, \theta)^2 + 2 \left(\int_0^r \frac{\partial \phi}{\partial r}(s, t, \theta) dt \right)^2$$

donde $\phi(s) = \phi(s, 0, 0)$. Multiplicando ambos lados de la desigualdad por r e integrando sobre Ω_0^R :

$$\pi R^2 \int_\Lambda \phi(s)^2 ds \leq 2 \int_{\Omega_0^R} \phi(s, r, \theta)^2 r ds dr d\theta + 2 \int_{\Omega_0^R} \left(\int_0^r \frac{\partial \phi}{\partial r} dt \right)^2 r ds dr d\theta \quad (4.13)$$

Recurriremos, a continuación, a la desigualdad de Hardy con pesos (3.3) anteriormente demostrada, en el caso particular en el que $p = q = 2$ y considerando como funciones de peso:

$$w_1(t) = t, \quad w_2(t) = t^{1-2\alpha}$$

y $f(t) = \left| \frac{\partial \phi}{\partial r}(s, r, \theta) \right|$. De hecho, siendo por hipótesis $\alpha > 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^r w_2(t)^{\frac{1}{1-p}} dt &= \int_0^r t^{2\alpha-1} dt \\ &= \frac{r^{2\alpha}}{2\alpha} < \infty \end{aligned}$$

y, por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar el teorema mencionado. En particular:

$$\begin{aligned} D(\alpha) &:= \sup_{r \in (0, R)} \left(\int_r^R t \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^r t^{2\alpha-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{r \in (0, r)} \left[\frac{1}{4\alpha} (R^2 - r^2) r^{2\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Derivando respecto de r se infiere que $g(r) = \left[\frac{1}{4\alpha} (R^2 - r^2) r^{2\alpha} \right]^{\frac{1}{2}}$ es creciente en el intervalo $(0, \frac{R\alpha^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\alpha}})$, de donde:

$$\sup_{r \in (0, r)} \left[\frac{1}{4\alpha} (R^2 - r^2) r^{2\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{R^{2\alpha+2} \alpha^\alpha}{4\sqrt{\alpha}(1+\alpha)^{\alpha+1}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

por lo que

$$\sup_{r \in (0, R)} \left[\frac{1}{4\alpha} (R^2 - r^2) r^{2\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} = R^{1+\alpha} \frac{\alpha^{(-1+\alpha)/2}}{2(\alpha+1)^{(1+\alpha)/2}}$$

Luego, aplicando la desigualdad de Hardy:

$$\int_0^R \left(\int_0^r \left| \frac{\partial \phi}{\partial r}(s, t, \theta) \right| dt \right)^2 r \, dr \leq C(\alpha)^2 \int_0^R \left| \frac{\partial \phi}{\partial r}(s, t, \theta) \right|^2 r^{1-2\alpha} \, dr, \quad (4.14)$$

Recordemos que hemos definimos en (3.3) $k(p, q) = \left(\frac{p+qp-q}{p} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p+qp-p}{(p-1)q} \right)^{\frac{p-1}{p}}$, de donde $k(2, 2) = 2$. Luego, $C(\alpha)$ es una constante que verifica:

$$D(\alpha) \leq C(\alpha) \leq 2D(\alpha) \quad (4.15)$$

Puesto que $r = \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)$ en Ω_0^R y $\forall \mathbf{x} \in \Omega_0^R$ se verifica la desigualdad $\text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)^{-2\alpha} R^{2\alpha} \geq 1$, se tiene en (4.13):

$$\begin{aligned} \pi R^2 \int_{\Lambda} \phi(s)^2 \, ds &\leq 2R^{2\alpha} \int_{\Omega_0^R} \phi(s, r, \theta)^2 \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)^{-2\alpha} r \, ds dr d\theta \\ &\quad + 2 \int_{\Omega_0^R} \left(\int_0^R \frac{\partial \phi}{\partial r} dt \right)^2 r \, ds dr d\theta \end{aligned}$$

De (4.14):

$$\begin{aligned} \pi R^2 \int_{\Lambda} \phi(s)^2 \, ds &\leq 2R^{2\alpha} \int_{\Omega_0^R} \phi(s, r, \theta)^2 \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)^{-2\alpha} r \, ds dr d\theta + \\ &\quad 2C(\alpha)^2 \int_{\Omega_0^R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}(s, r, \theta) \right)^2 \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)^{-2\alpha} r \, ds dr d\theta \\ &\leq 2 \max \{ R^{2\alpha}, C(\alpha)^2 \} \|\phi\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Hemos probado entonces que $\forall \phi \in C^\infty(\Omega)$ se cumple:

$$\| \phi \|_{L^2(\Lambda)} \leq C_\Lambda(\alpha) \| \phi \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}$$

donde $C_\Lambda(\alpha) = \sqrt{\text{máx}\{R^{2\alpha}, C(\alpha)^2\} / (\pi R^2)}$ Es decir, que para cada función ϕ regular, la aplicación $\gamma_\Lambda(\phi) : C^\infty(\Omega) \rightarrow L^2(\Lambda)$ definida por la restricción de ϕ a Λ es continua.

La extensión para $\phi \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$ se sigue mediante un argumento de densidad; en efecto, sea $u \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$. Luego, existe una sucesión $\{u_j\} \subseteq C^\infty(\Omega)$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u$ en $H_{-\alpha}^1(\Omega)$. Observemos que u_j es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Lambda)$, gracias a lo demostrado previamente, en efecto:

$$\| u_k - u_j \|_{L^2(\Lambda)} \leq C_\Lambda(\alpha) \| u_k - u_j \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}$$

Como $L^2(\Lambda)$ es completo, existe $v \in L^2(\Lambda)$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \| v - u_j \|_{L^2(\Lambda)} = 0$. Definimos:

$$\gamma_\Lambda(u) = u|_\Lambda = v$$

Veamos que $u|_\Lambda = v$ esta bien definida, o sea, que la definición no depende de la sucesión u_j que tomemos. Supongamos que v_j es otra sucesión de funciones de clase $C^\infty(\Omega)$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \| u - v_j \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \| v - v_j \|_{L^2(\Lambda)} &\leq \| v - u_j \|_{L^2(\Lambda)} + \| u_j - v_j \|_{L^2(\Lambda)} \\ &\leq \| v - u_j \|_{L^2(\Lambda)} + C_\Lambda(\alpha) \| u_j - v_j \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} \\ &\leq \| v - u_j \|_{L^2(\Lambda)} + C_\Lambda(\alpha) \left(\| u_j - u \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} + \| v_j - u \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} \right) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty \end{aligned}$$

por lo que $u|_\Lambda$ está bien definida en $L^2(\Lambda)$. Por último, vemos tomando límite por sucesiones aproximantes que (4.12) se verifica para toda función $u \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$. Para finalizar, observemos que de (4.15), $\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\Lambda(\alpha) = \infty$: lo cual es coherente con resultados conocidos de trazas en espacios sin peso (con $\alpha = 0$). \square

Mencionamos anteriormente que para aplicar el teorema de Nečas con el objetivo de demostrar que el problema (4.8) esta bien definido (es decir, que tiene solución y es única) necesitamos verificar que se cumplan las siguientes condiciones:

- I. La función F definida en (4.7) es continua en $H_{-\alpha}^1$
- II. La forma bilineal a definida en (4.6) es continua en $H_\alpha^1 \times H_{-\alpha}^1$ y satisface las desigualdades dadas en (4.10) y (4.11).

Acabamos de demostrar la primera de estas afirmaciones: si $0 < \alpha < 1$, las funciones de $H_{-\alpha}^1$ admiten un operador de traza continuo sobre Λ . Este resultado nos permite demostrar F es un funcional continuo en $H_{-\alpha}^1$; recordemos que en nuestro planteo $B(v) = 0$, que $\beta \in L^\infty(\Lambda)$ y $F(v) : H_{-\alpha}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $u_0 \in L^2(\Lambda)$. Entonces, aplicando la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}
F(v) &= \int_{\Lambda} \beta u_0 v(s) \, ds \\
|F(v)| &\leq \|\beta\|_{\infty} \|u_0\|_{L^2(\Lambda)} \|v\|_{L^2(\Lambda)} \\
&\leq C_{\Lambda} \|v\|_{H^1_{-\alpha}(\Lambda)}
\end{aligned}$$

Comencemos entonces a probar la segunda condición. El aspecto *complicado* es ver que $a(u, v)$ satisface las desigualdades inf - sup. Para ello, vamos a considerar el siguiente lema, de carácter técnico, que será un resultado auxiliar y es por ello que su demostración se encuentra en el apéndice.

LEMA 4.2.1 *Sea $\delta \in (0, 1)$ y $u \in H^1_{\alpha}(\Omega)$, con $0 < \alpha \leq \delta$. Consideremos las siguientes expansiones en series de Fourier respecto de la coordenada local θ :*

$$u(s, r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_0^k(r, s) e^{ik\theta} \quad \text{en } \Omega_0^R, \quad (4.16)$$

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_1^k(r, \phi) e^{ik\theta} \quad \text{en } \Omega_1^R \setminus \Omega_0^R, \quad (4.17)$$

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_2^k(r, \phi) e^{ik\theta} \quad \text{en } \Omega_2^R \setminus \Omega_0^R \quad (4.18)$$

Consideremos la función a valores reales definida por:

$$\mathbf{A}^0(\mathbf{x}) = \begin{cases} A_0^0(r, s) & \text{en } \Omega_0^R \\ A_1^0(r, \phi) & \text{en } \Omega_1^R \setminus \Omega_0^R \\ A_2^0(r, \phi) & \text{en } \Omega_2^R \setminus \Omega_0^R \end{cases}$$

definida en Ω^R . Asimismo, definimos

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}; u) = \begin{cases} \Psi(r, y; u) = \int_r^R t^{2\alpha+1} A^0(t, y) \, dt & \text{en } \Omega^R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.19)$$

Mediante la variable y indicamos cualesquiera de las variables s o ϕ , dependiendo del subdominio de Ω^R al cual pertenece \mathbf{x} . En particular, notemos que Ψ es independiente de θ .

Entonces existen constantes positivas C_1, C_2 y C_3 , que dependen únicamente de δ y R tales que $\forall \alpha \in (0, \delta]$ se verifican las siguientes desigualdades :

$$\|u - A^0\|_{L^2_{\alpha-1}(\Omega^R)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^2_{\alpha}(\Omega)} \quad (4.20)$$

$$\|\Psi\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{L^2_{\alpha}(\Omega)} \quad (4.21)$$

$$\|d^{2\alpha-1} u \nabla d + \nabla \Psi\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega^R)} \leq C_3 \|\nabla u\|_{L^2_{\alpha}(\Omega^R)} \quad (4.22)$$

donde, como convenimos, $d = \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)$.

Gracias a este lema, podemos demostrar el siguiente resultado:

LEMA 4.2.2 Sean $A_0, A_1 \in L^\infty(\Omega)$; supongamos que existe una constante $A_{\min} > 0$ tal que $A_0, A_1 \geq A_{\min}$ en Ω . Entonces existe una constante $\tilde{\delta} \in (0, 1)$ tal que para cada $\alpha \in (0, \tilde{\delta})$ existe una única $\omega \in H_\alpha^1(\Omega)$ que satisface

$$A(\omega, \psi) = \tilde{F}(\psi) \quad \forall \psi \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$$

siendo A definida por (1.2) y \tilde{F} un funcional lineal continuo en $H_{-\alpha}^1(\Omega)$.

Mas aún, existe un número positivo $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha, A_{\min}, \|A_0\|_\infty, \|A_1\|_\infty)$ tal que

$$\| \omega \|_{H_\alpha^1(\Omega)} \leq \tilde{C} \| \tilde{F} \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} \quad \forall \tilde{F} \in H_{-\alpha}^1(\Omega)' \quad (4.23)$$

DEMOSTRACIÓN: La idea es aplicar el teorema de Nečas (4.2.1) considerando como espacio V_1 a $H_\alpha^1(\Omega)$ y considerando $V_2 = H_{-\alpha}^1(\Omega)$ para $\alpha > 0$ suficientemente chico. Afirmamos que la forma bilineal A es continua en $H_\alpha^1(\Omega) \times H_{-\alpha}^1(\Omega)$. En efecto, aplicando la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} |A(\omega, \psi)| &\leq \left| \int_\Omega A_1 \nabla \omega \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} \right| + \left| \int_\Omega A_0 \omega \psi \, d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \int_\Omega A_1 d^\alpha \nabla \omega d^{-\alpha} \nabla \psi \, d\mathbf{x} \right| + \left| \int_\Omega A_0 d^\alpha \omega d^{-\alpha} \psi \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|A_1\|_{L^\infty} \| \nabla \omega \|_{L_\alpha^2} \| \nabla \psi \|_{L_{-\alpha}^2} + \|A_0\|_{L^\infty} \| \omega \|_{L_\alpha^2} \| \psi \|_{L_{-\alpha}^2} \\ &\leq \max \{ \|A_0\|_{L^\infty}, \|A_1\|_{L^\infty} \} \| \omega \|_{H_\alpha^1} \| \psi \|_{H_{-\alpha}^1} \end{aligned}$$

Sea $\psi \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$, $\psi \neq 0$. Dado que $\alpha > 0$ sabemos que $H_{-\alpha}^1(\Omega) \subset H_\alpha^1(\Omega)$. Por lo tanto:

$$\sup_{u \in H_\alpha^1} A(u, \psi) \geq A(\psi, \psi) \geq A_{\min} \| \nabla \psi \|_{L^2(\Omega)}^2 + A_{\min} \| \psi \|_{L^2(\Omega)}^2 > 0$$

Luego, A verifica la condición (4.10) del teorema de Nečas.

Para demostrar (4.11) basta ver que existen constantes positivas m, M tales que para toda $\omega \in H_\alpha^1$ existe $\psi \in H_{-\alpha}^1$ tal que se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\| \psi \|_{H_{-\alpha}^1} \leq m \| \omega \|_{H_\alpha^1} \quad (4.24)$$

$$A(\omega, \psi) \geq M \| \omega \|_{H_\alpha^1}^2 \quad (4.25)$$

En efecto, supongamos que (4.24) y (4.25) se cumplen. Entonces tendríamos que, tomando $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\| \psi \|_{H_{-\alpha}^1}}$:

$$\begin{aligned} \sup_{\| \psi \|_{H_{-\alpha}^1} \leq 1} A(\omega, \psi) &\geq A(\omega, \tilde{\psi}) \\ &\geq \frac{M}{m} \| \omega \|_{H_\alpha^1} \end{aligned}$$

y por lo tanto (4.11) se cumple tomando $C_2 = \frac{M}{m}$.

Probemos (4.24). Para ello dada $\omega \in H_\alpha^1$ definimos las siguientes funciones:

$$\psi(\mathbf{x}) = \tilde{d}(\mathbf{x})^{2\alpha}\omega(\mathbf{x}) + 2\alpha\Psi(\mathbf{x}), \quad (4.26)$$

siendo \tilde{d} la siguiente función Lipschitz y, en particular, continua:

$$\tilde{d}(\mathbf{x}) = \min \{dist(\mathbf{x}, \Lambda), R\} = \begin{cases} dist(\mathbf{x}, \Lambda) & \text{en } \Omega^R \\ R & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.27)$$

y, como antes, $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, \omega)$ es la función auxiliar definida en el lema (4.2.1) aplicada en el caso en que $\omega = u$:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}; u) = \begin{cases} \Psi(r, y; u) = \int_r^R t^{2\alpha+1} A^0(t, y) dt & \text{en } \Omega^R \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Notemos que la función \tilde{d} es equivalente a la distancia d en el siguiente sentido;

$$\left(\frac{R}{diam(\Omega)} \right) d \leq \tilde{d} \leq d \quad \text{en } \Omega \quad (4.28)$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L_{-\alpha}^2} &= \left[\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x})^2 d^{-2\alpha} d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} \left[\tilde{d}(\mathbf{x})^{2\alpha}\omega(\mathbf{x}) + 2\alpha\Psi(\mathbf{x}) \right]^2 d^{-2\alpha} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\tilde{d}^{2\alpha}\omega(\mathbf{x})\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)} + 2\alpha \|\Psi(\mathbf{x})\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Acotemos cada uno de estos términos. En primer lugar debido a (4.28):

$$\begin{aligned} \|\tilde{d}^{2\alpha}\omega(\mathbf{x})\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)}^2 &= \left(\int_{\Omega} \tilde{d}^{4\alpha}\omega(\mathbf{x})^2 d^{-2\alpha} d\mathbf{x} \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \omega(\mathbf{x})^2 d^{2\alpha} d\mathbf{x} \right)^2 \\ &= \|\omega(\mathbf{x})\|_{L_\alpha^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando (4.21) del lema (4.2.1), existe una constante C tal que:

$$\|\Psi\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)} \leq C \|\omega\|_{L_\alpha^2(\Omega)}$$

Por ende, de las dos desigualdades anteriores:

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L_{-\alpha}^2} &\leq \|\omega(\mathbf{x})\|_{L_\alpha^2(\Omega)} + 2C\alpha \|\omega\|_{L_\alpha^2(\Omega)} \\ &\leq m_1 \|\omega\|_{H_\alpha^1} \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= 2\alpha\omega\tilde{d}^{2\alpha-1}\nabla\tilde{d} + \tilde{d}^{2\alpha}\nabla\omega + 2\alpha\nabla\Psi \\ &= 2\alpha\left(\tilde{d}^{2\alpha-1}\omega\nabla\tilde{d} + \nabla\Psi\right) + \tilde{d}^{2\alpha}\nabla\omega\end{aligned}$$

Considerando la desigualdad (4.22) y partir del hecho que $\tilde{d} = d$ en Ω^R , $\Psi = 0$ en $\Omega \setminus \Omega^R$, $\nabla\tilde{d} = \nabla\Psi = 0$ en $\Omega \setminus \Omega^R$ tenemos:

$$\begin{aligned}\|\nabla\psi\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} &= \|2\alpha\left(\tilde{d}^{2\alpha-1}\omega\nabla\tilde{d} + \nabla\Psi\right) + \tilde{d}^{2\alpha}\nabla\omega\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla\omega\|_{L^2_{\alpha}(\Omega)} + 2\alpha\|d^{2\alpha-1}\omega\nabla\tilde{d} + \nabla\Psi\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)^R} \\ &\leq m_2\|\nabla\omega\|_{L^2_{\alpha}(\Omega)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\|\psi\|_{H^1_{-\alpha}}^2 = \|\psi\|_{L^2_{-\alpha}}^2 + \|\nabla\psi\|_{L^2_{-\alpha}}^2 \leq (m_1^2 + m_2^2)\|\omega\|_{H^1_{\alpha}}^2$$

Se verifica entonces la desigualdad (4.24), basta tomar $m^2 = m_1^2 + m_2^2$. Y, por el lema (4.2.1), dado $\alpha \in (0, \delta]$, las constantes m_1 y m_2 dependen sólo de δ . Probemos ahora (4.25), para ello observemos que

$$\begin{aligned}A(\omega, \psi) &= \int_{\Omega} A_1\nabla\omega \cdot \nabla\psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} A_0\omega\psi \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} A_1\nabla\omega \cdot \nabla(\tilde{d}(\mathbf{x})^{2\alpha}\omega(\mathbf{x}) + 2\alpha\Psi(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} A_0\omega(\tilde{d}(\mathbf{x})^{2\alpha}\omega(\mathbf{x}) + 2\alpha\Psi(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} A_1\nabla\omega \left[\left(2\alpha\tilde{d}^{2\alpha-1}\omega\nabla\tilde{d} + \nabla\Psi\right) + \tilde{d}^{2\alpha}\nabla\omega \right] \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} A_0\omega(\tilde{d}(\mathbf{x})^{2\alpha}\omega(\mathbf{x}) + 2\alpha\Psi(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \\ &\geq A_{\min} \int_{\Omega} \tilde{d}^{2\alpha}|\nabla\omega|^2 \, d\mathbf{x} + A_{\min} \int_{\Omega} \tilde{d}^{2\alpha}\omega^2 \, d\mathbf{x} \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Omega^R} A_1\nabla\omega(\tilde{d}^{2\alpha-1}\omega\nabla\tilde{d} + \nabla\Psi) \, d\mathbf{x} + 2\alpha \int_{\Omega} A_0\omega\Psi \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Multiplicando y dividiendo por $\tilde{d}^{2\alpha}$, por la desigualdad de Hölder y usando (4.28) obtenemos:

$$\begin{aligned}A(\omega, \psi) &\geq A_{\min}\|\nabla\omega\|_{\tilde{L}^2_{\alpha}(\Omega)}^2 + A_{\min}\|\omega\|_{\tilde{L}^2_{\alpha}(\Omega)}^2 \\ &\quad - 2\alpha\|A_1\|_{L^{\infty}}\|\nabla\omega\|_{\tilde{L}^2_{\alpha}(\Omega^R)}\|d^{2\alpha-1}\omega\nabla\tilde{d} + \nabla\Psi\|_{\tilde{L}^2_{-\alpha}(\Omega^R)} \\ &\quad - 2\alpha\|A_0\|_{L^{\infty}}\|\omega\|_{\tilde{L}^2_{\alpha}(\Omega^R)}\|\Psi\|_{\tilde{L}^2_{-\alpha}(\Omega^R)} \\ &\geq A_{\min}\|\nabla\omega\|_{\tilde{L}^2_{\alpha}(\Omega)}^2 + A_{\min}\|\omega\|_{\tilde{L}^2_{\alpha}(\Omega)}^2 \\ &\quad - 2\alpha(\|A_1\|_{L^{\infty}}C_3\|\nabla\omega\|_{\tilde{L}^2_{\alpha}(\Omega)}^2 + \|A_0\|_{L^{\infty}}C_2\|\omega\|_{\tilde{L}^2_{\alpha}(\Omega^R)}^2)\end{aligned}\tag{4.29}$$

siendo $C_2 = C_2(\delta)$, $C_3 = C_3(\delta)$ las constantes estimadas en (4.21) y (4.22) y donde dada una función f y un subconjunto $A \subset \Omega$ definimos

$$\|f\|_{\tilde{L}_\alpha^2(A)}^2 := \int_A \tilde{d}^{2\alpha} |f|^2 \, d\mathbf{x}$$

Es obvio que $\|f\|_{L_\alpha^2(\Omega^R)} = \|f\|_{\tilde{L}_\alpha^2(\Omega^R)}$, y que $\|\cdot\|_{\tilde{L}_\alpha^2(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{L_\alpha^2(\Omega)}$ son normas equivalentes ya que gracias a (4.28) se tiene:

$$\frac{R^\alpha}{\text{diam}(\Omega)^\alpha} \|f\|_{L_\alpha^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\tilde{L}_\alpha^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_\alpha^2(\Omega)}$$

De (4.29):

$$\begin{aligned} A(\omega, \psi) &\geq (A_{\min} - 2\alpha \max\{C_3 \|A_1\|_{L^\infty}, C_2 \|A_0\|_{L^\infty}\}) \left(\|\omega\|_{\tilde{L}_\alpha^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\omega\|_{\tilde{L}_\alpha^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\geq (A_{\min} - 2\alpha \max\{C_3 \|A_1\|_{L^\infty}, C_2 \|A_0\|_{L^\infty}\}) \left(\frac{R^{2\alpha}}{\text{diam}(\Omega)^{2\alpha}} \right) \|\omega\|_{H_\alpha^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

A continuación, definimos el siguiente número, independiente de α :

$$\tilde{\delta} = \min \left\{ \delta, \frac{A_{\min}}{2 \max\{C_3 \|A_1\|_{L^\infty}, C_2 \|A_0\|_{L^\infty}\}} \right\} \quad (4.30)$$

Para $0 < \alpha < \tilde{\delta}$ tenemos que:

$$A(\omega, \psi) \geq M \|\omega\|_{H_\alpha^1(\Omega)}^2, \quad (4.31)$$

siendo

$$M = A_{\min} \left(1 - \frac{\alpha}{\tilde{\delta}}\right) \frac{R^{2\alpha}}{\text{diam}(\Omega)^{2\alpha}}$$

por lo que la desigualdad (4.25) es válida.

Probamos, en consecuencia, que se verifica $\sup_{\|\psi\| \in H_{-\alpha}^1(\Omega) \leq 1} A(\omega, \psi) \geq M \|\omega\|_{H_\alpha^1(\Omega)}$. Por lo tanto la demostración finaliza utilizando el teorema de Nečas. \square

Utilizaremos el lema previo a fin de demostrar que el problema desacoplado (4.8) está bien definido, al menos para $\|\beta\|_\infty$ suficientemente chico. El siguiente paso consistirá en demostrar que, bajo ciertas condiciones, existe una única función $u \in H_\alpha^1(\Omega)$ tal que $a(u, v) = F(v)$ para toda $v \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$.

TEOREMA 4.2.3 Sean $A_0, A_1 \in L^\infty(\Omega)$ y supongamos que existe una constante $A_{\min} > 0$ tal que $A_0, A_1 \geq A_{\min}$ en Ω . Sea $\Pi : H_\alpha^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Lambda)$ un operador lineal acotado, F el funcional lineal definido en (4.7) y $a : H_\alpha^1(\Omega) \times H_{-\alpha}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal dada en (1.3), siendo $B \in H_{-\alpha}^1(\Omega)'$. Entonces existe una constante $\delta \in (0, 1)$ y una función positiva $\beta_{\max}(\alpha)$ tal que si $\alpha \in (0, \delta)$ y $\|\beta\|_\infty < \beta_{\max}(\alpha)$ el problema

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_{-\alpha}^1(\Omega),$$

admite una única solución $u \in H_\alpha^1(\Omega)$.

Mas aún, existe una constante positiva $C = C(\alpha, A_{\min}, \|A_0\|_\infty, \|A_1\|_\infty, \|\beta\|_\infty)$ tal que

$$\|u\|_{H_\alpha^1(\Omega)} \leq C \left(\|u_0\|_{L^2(\Lambda)} + \|B\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)'} \right) \quad (4.32)$$

DEMOSTRACIÓN: La idea consiste en ver que $a(u, v)$ satisface las hipótesis del teorema de Nečas, dado en (4.2.1). Para ello, para cada $\alpha^* \in (0, 1)$ dado, sea α tal que $0 < \alpha \leq \alpha^*$. Veamos, en primer lugar, que la forma bilineal a dada por (1.3) es continua: por un lado, ya fue demostrado en el lema anterior que $A(u, v)$ es continua en $H_\alpha^1(\Omega) \times H_{-\alpha}^1(\Omega)$. Además, dado que $\beta \in L^\infty(\Omega)$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \left| \int_\Lambda \beta \Pi u(s) v(s) \, ds \right| &\leq \int_\Lambda |\beta \Pi u(s) v(s)| \, ds \\ &\leq \|\beta\|_\infty \|\Pi u\|_{L^2(\Lambda)} \|\gamma_\Lambda v\|_{L^2(\Lambda)} \end{aligned}$$

siendo $\gamma_\Lambda v : H_{-\alpha}^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Lambda)$ el operador de trazas definido en el teorema (4.2.2). De este último teorema se desprende que $\|v\|_{L^2(\Lambda)} \leq C_\Lambda(\alpha) \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}$ y, por hipótesis, Πu es un operador lineal acotado por lo que $\|\Pi u\|_{L^2(\Lambda)} \leq K_\Lambda(\alpha) \|u\|_{H_\alpha^1(\Omega)}$. Luego

$$\left| \int_\Lambda \beta \Pi u(s) v(s) \, ds \right| \leq \|\beta\|_\infty K_\Lambda(\alpha) C_\Lambda(\alpha) \|u\|_{H_\alpha^1(\Omega)} \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} \quad (4.33)$$

Hemos probado, por lo tanto, que la forma bilineal a es continua en $H_\alpha^1(\Omega) \times H_{-\alpha}^1(\Omega)$. Análogamente, recordando que $u_0 \in L^2(\Lambda)$ y gracias al Teorema 4.2.2 podemos ver que F es continuo en $H_\alpha^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|F\| &= \sup_{v \in H_{-\alpha}^1(\Omega), \|v\| \leq 1} \left| \int_\Lambda \beta u_0 v(s) \, ds + B(v) \right| \\ &\leq \|\beta\|_\infty \|u_0\|_{L^2(\Lambda)} \|v\|_{L^2(\Lambda)} + \|B\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)'} \\ &\leq \|\beta\|_\infty C_\Lambda(\alpha) \|u_0\|_{L^2(\Lambda)} + \|B\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)'} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Sea $v \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$, $v \neq 0$. El próximo paso consiste en ver que se verifica (4.10). O sea:

$$\sup_{u \in H_\alpha^1} a(u, v) > 0 \quad \forall v \in H_{-\alpha}^1, \quad v \neq 0 \quad (4.35)$$

Para ello, vamos a aplicar el Lema 4.2.2. Sea $u \in H_\alpha^1(\Omega)$ la única solución de

$$A(u, \psi) = \tilde{F}(\psi) \quad \forall \psi \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$$

siendo

$$\tilde{F}(\psi) = (v, \psi)_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}$$

Sabemos que \tilde{F} es un funcional lineal continuo en $H_{-\alpha}^1(\Omega)$. Además

$$\|\tilde{F}\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)'} = \sup_{\|\psi\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}=1} A(u, \psi) = \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}.$$

Mas aún, tenemos que:

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= A(u, v) + \int_{\Lambda} \beta \Pi u(s) v(s) \, ds \\
&= \tilde{F}(v) + \int_{\Lambda} \beta \Pi u(s) v(s) \, ds \\
&= (v, v)_{H_{-\alpha}^1} + \int_{\Lambda} \beta \Pi u(s) v(s) \, ds \\
&= \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}^2 + \int_{\Lambda} \beta \Pi u(s) v(s) \, ds
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Ahora bien, utilizando la desigualdad $\|u\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)} \leq \tilde{C} \|\tilde{F}\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)'}$, demostrada en el Lema 4.2.2 y siendo $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha, A_{\min}, \|A_0\|_{\infty}, \|A_1\|_{\infty}) > 0$ tenemos que

$$\|u\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)} \leq \tilde{C} \|\tilde{F}\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)'} = \tilde{C} \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}. \tag{4.37}$$

Gracias a (4.33), (4.36) y (4.37) deducimos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_{\Omega} A_1 \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} A_0 uv \, d\mathbf{x} + \int_{\Lambda} \beta \Pi u(s) v(s) \, ds \\
&\geq \|v\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)}^2 - \|\beta\|_{\infty} K_{\Lambda}(\alpha) C_{\Lambda}(\alpha) \|u\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)} \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} \\
&\geq \|v\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)}^2 - \|\beta\|_{\infty} K_{\Lambda}(\alpha) C_{\Lambda}(\alpha) \tilde{C} \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}^2 \\
&= (1 - \|\beta\|_{\infty} K_{\Lambda}(\alpha) C_{\Lambda}(\alpha) \tilde{C}) \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si pedimos que $1 - \|\beta\|_{\infty} K_{\Lambda}(\alpha) C_{\Lambda}(\alpha) \tilde{C} > 0$ o, equivalentemente, $0 \leq \|\beta\|_{\infty} < \frac{1}{K_{\Lambda} C_{\Lambda} \tilde{C}}$ se verifica (4.10), o sea $\sup_{u \in H_{\alpha}^1} a(u, v) > 0$

Veamos por último que se cumple (4.11). Queremos probar que existe una constante positiva C tal que

$$\sup_{\|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} \leq 1} a(u, v) \geq C \|u\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)}$$

Para ello, sea $u \in H_{\alpha}^1(\Omega)$ y sea v definida por:

$$v = \tilde{d}^{2\alpha} u + 2\alpha \Psi$$

siendo $\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}, u)$ y $\tilde{d}(\mathbf{x})$ las funciones definidas en la demostración del lema (4.2.2):

$$\tilde{d}(\mathbf{x}) = \min \{ \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda), R \} = \begin{cases} \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda) & \text{en } \Omega^R \\ R & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.38}$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}; u) = \begin{cases} \Psi(r, y; u) = \int_r^R t^{2\alpha+1} A^0(t, y) dt & \text{en } \Omega^R \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Ya hemos demostrado en este lema que se verificaban las siguientes desigualdades (4.24), (4.25):

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_{-\alpha}^1} &\leq m \|u\|_{H_{\alpha}^1} \\ A(u, v) &\geq M \|u\|_{H_{\alpha}^1}^2 \end{aligned}$$

con $M = M(\alpha) = A_{\min}(1 - \frac{\alpha}{\delta})R^{2\alpha}\text{diam}(\Omega)^{-2\alpha}$, y siendo

$$\delta = \min \left\{ \alpha^*, \frac{A_{\min}}{2 \max \{C_3 \|A_1\|_{L^\infty}, C_2 \|A_0\|_{L^\infty}\}} \right\} \quad (4.39)$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= A(u, v) + \int_{\Lambda} \beta \Pi u(s)v(s) ds \\ &\geq M \|u\|_{H_{\alpha}^1}^2 + \int_{\Lambda} \beta \Pi u(s)v(s) ds \end{aligned} \quad (4.40)$$

Debido a (4.33) podemos estimar la integral de línea como sigue

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \beta \Pi u(s)v(s) ds &\leq \int_{\Lambda} |\beta \Pi u(s)v(s)| ds \\ &\leq \|\beta\|_{\infty} K_{\Lambda}(\alpha) C_{\Lambda}(\alpha) \|u\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)} \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} \\ &\leq \|\beta\|_{\infty} m K_{\Lambda}(\alpha) C_{\Lambda}(\alpha) \|u\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

por lo que

$$a(u, v) \geq (M - \|\beta\|_{\infty} m K_{\Lambda}(\alpha) C_{\Lambda}(\alpha)) \|u\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)}^2$$

Si pedimos que $M - \|\beta\|_{\infty} m K_{\Lambda}(\alpha) C_{\Lambda}(\alpha) > 0$, o sea, $\|\beta\|_{\infty} \leq \frac{M}{m K_{\Lambda}(\alpha) C_{\Lambda}(\alpha)}$ entonces se verifica (4.11). Definiendo

$$\beta_{\max} = \beta_{\max}(\alpha) = \min \left\{ \frac{1}{K_{\Lambda} C_{\Lambda} \tilde{C}}, \frac{M}{m K_{\Lambda}(\alpha) C_{\Lambda}(\alpha)} \right\}$$

para $\alpha \in (0, \delta)$ y $\|\beta\|_{\infty} \leq \beta_{\max}$ estamos bajo las hipótesis del teorema de Nečas. Es decir, existe una única función $u \in H_{\alpha}^1(\Omega)$ tal que $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$. Mas aún, a partir del teorema de Nečas y la desigualdad dada en (4.34):

$$\begin{aligned}
\| u \|_{H_\alpha^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{\beta_{\text{máx}}} \| F \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)'} \\
&\leq \frac{1}{\beta_{\text{máx}}} (C_\Lambda(\alpha) \| u_0 \|_{L^2(\Lambda)} + \| B \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)'}) \\
&\leq \frac{\text{máx} \{C_\Lambda(\alpha), 1\}}{M(\alpha) - m \| \beta \|_\infty K_\Lambda(\alpha) C_\Lambda(\alpha)} (\| u_0 \|_{L^2(\Lambda)} + \| B \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)'})
\end{aligned}$$

con lo cual vemos que se verifica la desigualdad (4.32), por lo que concluye la demostración. \square

Para finalizar el estudio del problema desacoplado, nos resta verificar que el resultado anterior lo podemos aplicar en el caso particular en que $\Pi u = \bar{u}$, siendo \bar{u} el promedio de la función u sobre los círculos de radio R que se encuentran en la superficie cilíndrica Γ_0^R . Recordemos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, en el contexto en que está planteado nuestro problema, representa la presión sanguínea en los tejidos y está definida por:

$$\bar{u}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{x}_0(s, R, \theta)) d\theta$$

Queremos ver entonces que la aplicación $\Pi u : H_\alpha^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Lambda)$ definida por $\Pi u = \bar{u}$ es un funcional lineal acotado. Es justamente lo que establece el siguiente lema.

LEMA 4.2.3 *Sea $\alpha \in (-1, 1)$: La aplicación lineal $u \rightarrow \bar{u}$ siendo $u \in H_\alpha^1(\Omega)$ y $\bar{u} \in L^2(\Lambda)$ es acotada.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $u \in C^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Lambda \bar{u}(s)^2 ds &= \int_\Lambda \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{x}_0(s, R, \theta)) d\theta \right)^2 ds \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_\Lambda \int_0^{2\pi} u(\mathbf{x}_0(s, R, \theta))^2 d\theta ds \\
&= \frac{1}{2\pi R} \| u \|_{L^2(\Gamma_0^R)}^2
\end{aligned}$$

siendo Γ_0^R la región cilíndrica de la superficie del vaso

$$\Gamma_0^R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0(s, R, \theta), (s, \theta) \in (s_1, s_2) \times [0, 2\pi) \}$$

Luego, dado que $\text{dist}(\Gamma_0^R, \Lambda) = R > 0$, tenemos por un lado

$$\int_\Lambda \bar{u}(s)^2 ds \leq C \| u \|_{H_\alpha^1(\Omega)}$$

y por el otro que el operador de trazas de $H_\alpha^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma_0^R)$ es continuo, de ahí se sigue el resultado para funciones regulares. Gracias a la densidad de las funciones de clase C^∞ en H_α^1 , la función \bar{u} puede ser extendida a un operador definido en $H_\alpha^1(\Omega)$ en $L^2(\Lambda)$. \square

4.3. EL PROBLEMA ACOPLADO 1D - 3D

Recordemos que el problema acoplado 1D - 3D consistía, como lo definimos al inicio de este trabajo, en encontrar $(u, \hat{u}) \in H_\alpha^1 \times \hat{V}$ tal que

$$\begin{cases} A(u, v) + \int_\Lambda \beta(\Pi u - \hat{u})v \, ds = B(v) & \forall v \in V_2 \\ \hat{A}(\hat{u}, \hat{v}) - \int_\Lambda \beta(\Pi u - \hat{u})\hat{v} \, ds = \hat{B}(\hat{v}) & \forall \hat{v} \in \hat{V} \end{cases} \quad (4.41)$$

con $\beta \in L^\infty(\Lambda)$, $\Pi u : H_\alpha^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Lambda)$ un operador lineal acotado y siendo

$$\begin{aligned} A(u, v) &:= \int_\Omega A_1 \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega A_0 uv \, dx \\ \hat{A}(\hat{u}, \hat{v}) &:= \int_\Lambda \hat{A}_1 \frac{d\hat{u}}{ds} \frac{d\hat{v}}{ds} \, ds + \int_\Lambda \hat{A}_0 \hat{u} \hat{v} \, ds \end{aligned}$$

con $A_1, A_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $\hat{A}_1, \hat{A}_0 \in L^\infty(\Lambda)$

Para demostrar que este problema está bien definido nos valdremos de los resultados demostrados en las secciones anteriores, los cuales veremos que pueden ser utilizados sin grandes modificaciones. Antes que nada, para definir el espacio \hat{V} consideremos las condiciones de borde homogéneas de tipo Neumann - Dirichlet, siendo la condición homogénea de Dirichlet impuesta a la curva $\Lambda = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \quad s \in (s_1, s_2)\}$ (que representa una parametrización de la arteria) cuando $s = s_2$. Teniendo en cuenta esta condición esencial, definimos el subespacio de Hilbert \hat{V} como:

$$\hat{V} = \{\hat{u} \in H^1(\Lambda) : \hat{u}(s_2) = 0\}$$

Consideremos los espacios $\mathbf{V}_1 = H_\alpha^1(\Omega) \times \hat{V}$, $\mathbf{V}_2 = H_{-\alpha}^1(\Omega) \times \hat{V}$. Dada $\mathbf{u} = (u, \hat{u}) \in \mathbf{V}_1$ y $\mathbf{v} = (v, \hat{v}) \in \mathbf{V}_2$, definimos la forma bilineal $a : \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ y el funcional lineal $F : \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(u, v) + \hat{A}(\hat{u}, \hat{v}) + \int_\Lambda \beta(\Pi u - \hat{u})(v - \hat{v}) \, ds \quad (4.42)$$

$$F(\mathbf{v}) = B(v) + \hat{B}(\hat{v}) \quad (4.43)$$

siendo $\Pi : H_\alpha^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Lambda)$ un operador lineal acotado, $B \in V_2' = (H_{-\alpha}^1)'$, $\hat{B} \in \hat{V}'$, con $A(u, v)$ y $\hat{A}(\hat{u}, \hat{v})$ como antes.

La forma bilineal $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nos va a posibilitar resolver el problema acoplado. En efecto, observemos que si tomamos $\mathbf{v} = (v, 0)$, con $v \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$ tenemos que, para toda función $\mathbf{u} = (u, \hat{u}) \in V_1$:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(u, v) + \int_\Lambda \beta(\Pi u - \hat{u})v \, ds = B(v)$$

a partir de lo cual recuperamos la primera ecuación del sistema acoplado. Análogamente, tomando $\mathbf{v} = (0, \widehat{v}) \in H_{-\alpha}^1(\Omega) \times \widehat{V}$ recuperamos la segunda ecuación de este sistema. Demostraremos, a partir del siguiente teorema, que el problema acoplado 1D- 3D, bajo ciertas condiciones, admite una única solución débil.

TEOREMA 4.3.1 *Sea $A_i \in L^\infty(\Omega)$, $\widehat{A}_i \in L^\infty(\Lambda)$ y supongamos que $A_i \geq A_{\min}$, $\widehat{A}_0 \geq 0$, $\widehat{A}_1 \geq A_{\min}$ para $i = 0, 1$, siendo A_{\min} una constante positiva.*

Sea $\Pi : H_\alpha^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Lambda)$ un operador lineal acotado, $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ la forma bilineal definida en $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ dada en (4.42) y F el funcional lineal en \mathbf{V}_2 dado en (4.43).

Entonces, existe $\delta \in (0, 1)$ y una función positiva $\beta_{\max}(\alpha)$ tal que si $\alpha \in (0, \delta)$ y $\|\beta\|_\infty \leq \beta_{\max}(\alpha)$ entonces existe una única $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_1$ tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_2$$

Mas aún, existe una constante positiva $C = C(\alpha, A_{\min}, \|A_i\|_\infty, \|\widehat{A}_i\|_\infty, \|\beta\|_\infty)$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_1} \leq C \|F\|_{\mathbf{V}_2'} \quad (4.44)$$

DEMOSTRACIÓN: La idea es similar a la que hicimos en los teoremas y lemas anteriores: Se trata de probar que se verifican las hipótesis para estar en condiciones de aplicar el teorema de Nečas.

Comencemos entonces por probar que la forma bilineal a es continua en $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$, siendo

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(u, v) + \widehat{A}(\widehat{u}, \widehat{v}) + \int_\Lambda \beta(\Pi u - \widehat{u})(v - \widehat{v}) \, ds$$

Ya hemos probado con anterioridad que la forma bilineal dada por el primer término de la función a es continua en $H_\alpha^1(\Omega) \times H_{-\alpha}^1(\Omega)$. El segundo término es continuo en $\widehat{V} \times \widehat{V}$. En efecto, por la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} \left| A(\widehat{u}, \widehat{v}) \right| &\leq \int_\Lambda |A_1| \left| \frac{d\widehat{u}}{ds} \right| \left| \frac{d\widehat{v}}{ds} \right| \, ds + \int_\Lambda |A_0| |\widehat{u}| |\widehat{v}| \, ds \\ &\leq \|A_1\|_\infty \left\| \frac{d\widehat{u}}{ds} \right\|_{L^2(\Lambda)} \left\| \frac{d\widehat{v}}{ds} \right\|_{L^2(\Lambda)} + \|A_0\|_\infty \|\widehat{u}\|_{L^2(\Lambda)} \|\widehat{v}\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\leq \max\{\|A_1\|_\infty, \|A_0\|_\infty\} \|\widehat{u}\|_{\widehat{V}} \|\widehat{v}\|_{\widehat{V}} \end{aligned}$$

Nos queda por ver que el término *acoplado* restante es continuo en $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$. Para ello, llamemos $K_\Lambda(\alpha)$ a la norma del operador lineal acotado $\Pi : H_\alpha^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Lambda)$ y sea $C_\Lambda(\alpha) = \|\gamma_\Lambda\|$ la norma del operador de trazas $\gamma_\Lambda : H_{-\alpha}^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Lambda)$, Teorema 4.2.2. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_\Lambda \beta(\Pi u - \widehat{u})(v - \widehat{v}) \, ds \right| &\leq \|\beta\|_\infty \|\Pi u - \widehat{u}\|_{L^2(\Lambda)} \|\gamma_\Lambda v - \widehat{v}\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\leq \|\beta\|_\infty (K_\Lambda(\alpha) \|u\|_{H_\alpha^1(\Omega)} + \|\widehat{u}\|_{\widehat{V}}) (C_\Lambda(\alpha) \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} + \|\widehat{v}\|_{\widehat{V}}) \\ &\leq \|\beta\|_\infty C(\alpha) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_1} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2} \end{aligned} \quad (4.45)$$

siendo $C(\alpha) = \max\{1, K_\Lambda(\alpha), C_\Lambda(\alpha)\}$.

Tenemos que demostrar ahora que se satisface las desigualdades (4.10) y (4.11) del teorema de Nečas.

- A fin de ver que $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es una forma bilineal no degenerada, es decir, que $\sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{V}_1} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_2$, dada $\mathbf{v} = (v, \hat{v}) \in \mathbf{V}_2$, tomamos $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_1$, $\mathbf{u} = (u, \hat{v})$ siendo $u \in H_\alpha^1(\Omega)$ la única solución de $A(u, \psi) = (v, \psi)_{H_{-\alpha}^1} \quad \forall \psi \in H_{-\alpha}^1(\Omega)$ (lema 4.2.2). Mas aún, gracias a este resultado y al teorema de representación de Riesz, se cumple que

$$\| u \|_{H_\alpha^1} \leq \tilde{C}(\alpha) \| v \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}$$

siendo $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha, A_{\min}, \| A_0 \|_\infty, \| A_1 \|_\infty)$ una constante positiva. En particular se tiene que $A(u, v) = \| v \|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}^2$.

Definimos $C'(\alpha) = C(\alpha) \max\{1, \tilde{C}(\alpha)\}$, siendo $C(\alpha)$ la constante definida en la estimación (4.45). A partir del teorema de Poincaré, sabemos que la desigualdad $\| \hat{v} \|_{L^2(\Lambda)} \leq C_P \| \frac{d\hat{v}}{ds} \|_{L^2(\Lambda)}$ es válida en \hat{V} . Por lo que obtenemos la siguiente estimación (recordemos que \hat{A}_0 puede ser 0 por hipótesis, por eso recurrimos a la desigualdad de Poincaré):

$$\begin{aligned} \hat{A}(\hat{v}, \hat{v}) &= \int_\Lambda \hat{A}_1 \left(\frac{d\hat{v}}{ds} \right)^2 ds + \int_\Lambda \hat{A}_0 \hat{v}(s)^2 ds \\ &\geq A_{\min} \int_\Lambda \left(\frac{d\hat{v}}{ds} \right)^2 ds = A_{\min} \| \frac{d\hat{v}}{ds} \|_{L^2(\Lambda)}^2 \\ &= A_{\min} \left(\frac{1}{2} \| \frac{d\hat{v}}{ds} \|_{L^2(\Lambda)}^2 + \frac{1}{2} \| \frac{d\hat{v}}{ds} \|_{L^2(\Lambda)}^2 \right) \\ &\geq \frac{A_{\min}}{2} \left(\| \frac{d\hat{v}}{ds} \|_{L^2(\Lambda)}^2 + \frac{1}{C_P^{-2}} \| \hat{v} \|_{L^2(\Lambda)}^2 \right) \end{aligned}$$

Apoyándonos en la desigualdad anterior y en la desigualdad (4.45), podemos verificar que $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es una forma bilineal no degenerada. En efecto:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= A(u, v) + \widehat{A}(\widehat{u}, \widehat{v}) + \int_{\Lambda} \beta(\Pi u - \widehat{u})(v - \widehat{v}) \, ds \\
&\geq A(u, v) + \widehat{A}(\widehat{u}, \widehat{v}) - \|\beta\|_{\infty} C(\alpha) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_1} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2} \\
&\geq A(u, v) + \widehat{A}(\widehat{u}, \widehat{v}) - \|\beta\|_{\infty} C'(\alpha) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2}^2 \\
&\geq \|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)}^2 + \frac{A_{\min}}{2} \left(\left\| \frac{d\widehat{v}}{ds} \right\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \frac{1}{C_P^{-2}} \|\widehat{v}\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right) - \|\beta\|_{\infty} C'(\alpha) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2}^2 \\
&\geq \min \left\{ 1, A_{\min} \frac{\min\{1, C_P^{-2}\}}{2} \right\} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2}^2 - \|\beta\|_{\infty} C'(\alpha) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2}^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si

$$\|\beta\|_{\infty} < \frac{\min \left\{ 1, A_{\min} \frac{\min\{1, C_P^{-2}\}}{2} \right\}}{C'(\alpha)}$$

se verifica la condición (4.10) del teorema de Nečas.

- Dada $\mathbf{u} = (u, \widehat{u}) \in \mathbf{V}_2$, consideramos $\mathbf{v} = (v, \widehat{v}) = (\widetilde{d}^{2\alpha} u + 2\alpha\Psi, \widehat{u}) \in \mathbf{V}_2$, donde la función Ψ es la que definimos en el enunciado del Lema 4.2.1, dada por

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}; u) = \begin{cases} \Psi(r, y; u) = \int_r^R t^{2\alpha+1} A^0(t, y) \, dt & \text{en } \Omega^R \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y $\widetilde{d}(\mathbf{x})$ es la misma función que utilizamos en la demostraciones del Lema 4.2.2 y el Teorema 4.2.3, definida por

$$\widetilde{d}(\mathbf{x}) = \min \{ \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda), R \} = \begin{cases} \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda) & \text{en } \Omega^R \\ R & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.46)$$

Sabemos, a partir de las demostraciones de los resultados citados, que existen constantes positivas, m, δ , ambas independientes de α tales que

$$\|v\|_{H_{-\alpha}^1(\Omega)} \leq m \|u\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)} \quad , \quad A(u, v) \geq M \|u\|_{H_{\alpha}^1(\Omega)}^2$$

con $M = M(\alpha) = A_{\min}(1 - \frac{\alpha}{\delta})R^{2\alpha} \text{diam}(\Omega)^{-2\alpha}$. Teniendo en cuenta las estimaciones anteriores:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\geq A(u, v) + \widehat{A}(\widehat{u}, \widehat{v}) - \|\beta\|_{\infty} C(\alpha) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_1} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2} \\
&\geq M(\alpha) \|u\|_{H_{\alpha}^1}^2 + A_{\min} \left\| \frac{d\widehat{u}}{ds} \right\|_{L^2(\Lambda)}^2 - \|\beta\|_{\infty} C''(\alpha) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_1}^2
\end{aligned}$$

siendo $C'''(\alpha) = C(\alpha) \max\{1, m\}$. Mostramos en el ítem anterior que

$$A_{\min} \|\widehat{d\hat{u}/ds}\|_{L^2(\Lambda)}^2 \geq A_{\min} \frac{\min\{1, C_P^{-2}\}}{2} \|\widehat{u}\|_{L^2(\Lambda)}^2$$

por lo que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq C'''(\alpha) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_1}^2 - \|\beta\|_{\infty} C''(\alpha) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_1}^2$$

siendo $C'''(\alpha) = \min\left\{M(\alpha), A_{\min} \frac{\min\{1, C_P^{-2}\}}{2}\right\} > 0$, ya que si $\alpha \in (0, \delta)$, $M(\alpha) > 0$.

Por lo tanto, la desigualdad dada en (4.11) del teorema de Nečas se satisface si pedimos $\|\beta\|_{\infty} < C'''(\alpha)/C''(\alpha)$

Finalmente, si tomamos

$$\beta_{\max}(\alpha) = \min\left\{C'''(\alpha)/C''(\alpha), \frac{\min\left\{1, A_{\min} \frac{\min\{1, C_P^{-2}\}}{2}\right\}}{C'(\alpha)}\right\}$$

estamos bajo las hipótesis del teorema de Nečas. Concluimos que existe una única $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_1$ que satisface la igualdad

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_2$$

La desigualdad que aparece en el enunciado de este teorema se infiere directamente del teorema de Nečas. \square

Podemos aplicar el teorema anterior en el caso en que el operador $\Pi u = \bar{u}$ ya que, gracias al Lema 4.2.3 sabemos que es un operador lineal acotado de $H_{\alpha}^1(\Omega)$ en $L^2(\Lambda)$. Por lo tanto, hemos probado la existencia de una única solución débil a la formulación del problema que modeliza la perfusión sanguínea dado en (1.1) con condiciones de borde (2.6).

CAPÍTULO 5

APROXIMACIÓN DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ACOPLADO 1D - 3D POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

La ventaja de trabajar en espacios funcionales de Hilbert es que podemos estudiar resultados de convergencia para la solución aproximada del problema acoplado mediante el método de elementos finitos. Este último es un caso particular de las denominadas aproximaciones de Galerkin, las cuales consisten en definir un problema similar al que se está tratando sobre un espacio de dimensión finita V_h contenido en un cierto espacio V . La construcción del espacio de dimensión finita tiene tres aspectos básicos: en primer lugar, una triangulación \mathcal{T}_h del dominio Ω , es decir, pensamos este conjunto como una unión finita de elementos $T \in \mathcal{T}_h$. En segundo lugar, las funciones del espacio V_h son diferenciables a trozos, en el sentido de que se trata de funciones continuas en Ω tales que para cada $T \in \mathcal{T}_h$ pertenecen a el espacio \mathbb{P}_k formado por polinomios de grado menor o igual que k . Mencionemos por último que existe una base de V_h tal que las funciones que la integran son de soporte “pequeño”, lo que implica que las matrices involucradas en los cálculos resultan ralas.

En el modelo que estamos estudiando el planteo del problema discreto mediante aproximaciones de Galerkin es relativamente directo y demostraremos la existencia de una única solución a dicho modelo vía el teorema de Nečas. En este capítulo estudiaremos un resultado análogo al lema de Cea para verificar la convergencia de la aproximación obtenida en norma H_α^1 ; sin embargo, el análisis de la regularidad de la solución no es del todo trivial y excede el alcance de este trabajo. Para obtener una solución aproximada en primer lugar implementaremos un algoritmo que nos permita obtener una triangulación del dominio Ω (que representa el tejido) y, a partir de las aristas de los tetraedros que integren la triangulación, nos construiremos el dominio unidimensional Λ (representación del capilar sanguíneo). Luego resolveremos el problema acoplado 1D - 3D a partir de la adaptación del programa diseñado en Matlab [13] para la resolución de problemas elípticos en tres dimensiones.

5.1. DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA ACOPLADO

Por cuestiones de simplicidad, consideraremos que nuestro espacio de elementos finitos está integrado por los polinomios de grado menor o igual que uno, \mathbb{P}_1 . Asimismo, definimos una triangulación \mathcal{T}_h del dominio Ω de modo que se verifiquen las siguientes propiedades:

1. Ω es la unión de los elementos (en nuestro caso, tetraedros) de \mathcal{T}_h .

- II. Si $T_k \neq T_j$ y la intersección entre ambos tetraedros es no vacía, entonces $T_k \cap T_j$ es o bien una cara, una arista o un vértice. Denotaremos por \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, N_h$ a los nodos que forman la malla.
- III. Existe una constante $\sigma > 0$ independiente de h , tal que para todo $T \in \mathcal{T}_h$, $\text{diam}(T) < h$ y T contiene una esfera de radio σh_T . Es decir, requerimos que los elementos de la triangulación cumplan la denominada condición de regularidad. Aclaremos que el subíndice h de la triangulación está relacionado con el diámetro máximo de los elementos que la componen, mientras que la notación h_T está asociada al diámetro del elemento T .

Definimos la familia $\{V_h\}$ del espacio \mathbb{P}_1 de elementos finitos:

$$V_h = \{f \in C(\Omega) / f|_{T_i} \in \mathbb{P}_1(T_i) \quad \forall T_i \in \mathcal{T}_h\}$$

es decir, $\{V_h\}$ es el espacio de las funciones continuas tal que restringidas a cada elemento de la triangulación son polinomios de grado uno. Las funciones nodales que serán base para $\{V_h\}$ son $\{\psi_i\}$ $i = 1, \dots, N_h$ donde $\psi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$. Es decir, las funciones continuas en Ω y que restringidas a cada tetraedro son lineales y valen uno en un nodo y cero en los restantes.

La resolución del problema acoplado exige la parametrización de la curva Λ . Por cuestiones de simplicidad, vamos a considerar el caso en que el mallado de esta curva se extrae del mallado del dominio Ω . Esto es, construimos Λ a partir de las aristas de los tetraedros que conforman la triangulación de Ω , de modo que la curva es una colección I_m de lados de los tetraedros de \mathcal{T}_h . Desde un punto de vista computacional, debemos tener cuidado y asegurarnos que las ramas que elijamos para representar la curva se 'peguen', para así asegurar la continuidad de la misma. De esta manera podemos extraer una base del dominio unidimensional a partir de la base definida para V_h . Para ello, definimos el siguiente espacio de dimensión finita

$$\widehat{V}_h = \left\{ v \in C(\Lambda) : v(s_2) = 0, v|_{I_m} \in \mathbb{P}^1(I_m) \quad \forall I_m \in \tilde{\mathcal{T}}_h \right\}. \quad (5.1)$$

Notemos entonces que podemos obtener una base para el espacio \widehat{V}_h a partir de la base de Lagrange $\{\psi_i\}$ que construimos para V_h : basta considerar la restricción de estas últimas a los elementos de $I_m \in \mathcal{T}_h$ cuya unión es la curva Λ . Denotaremos $\{\widehat{\psi}_i\}$ a la base de funciones de \widehat{V}_h , $i = 1, \dots, \widehat{N}_h$ y llamaremos $\widehat{\mathbf{x}}_i$ a los nodos de la malla 1D. Siendo entonces los nodos de la malla 1D un subconjunto de los nodos de la malla tridimensional existe una aplicación, g_Λ , que relaciona el subíndice de cada uno de los nodos de la malla 1D con el correspondiente subíndice en la malla 3D. Es decir:

$$g_\Lambda : [1, \dots, \widehat{N}_h] \rightarrow [1, \dots, N_h], \quad i \rightarrow g_\Lambda(i)$$

de modo que

$$\forall 1 \leq i \leq \widehat{N}_h : \quad \mathbf{x}_{g_\Lambda(i)} = \widehat{\mathbf{x}}(i) \quad y \quad \widehat{\psi}_i = \psi_{g_\Lambda(i)}$$

Definimos la matriz $G_\Lambda \in \mathbb{R}^{N_h \times \widehat{N}_h}$ como

$$(G_\Lambda)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = g_\Lambda(j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.2)$$

con $i = 1, \dots, N_h$ $j = 1, \dots, \hat{N}_h$. La matriz G_Λ tiene la siguiente propiedad: si $\hat{\mathbf{u}}$ son las coordenadas de una función $\hat{u} \in \hat{V}_h$ con respecto a la base $\{\hat{\psi}_i\}$, entonces $\mathbf{u} = G_\Lambda \hat{\mathbf{u}}$ son las coordenadas, con respecto a la base $\{\psi_i\}$ de una función $u \in V_h$ tal que $u = \hat{u}$ sobre la curva Λ y $u = 0$ sobre aquellos elementos de la triangulación de Ω que no comparten nodos ni aristas con Λ .

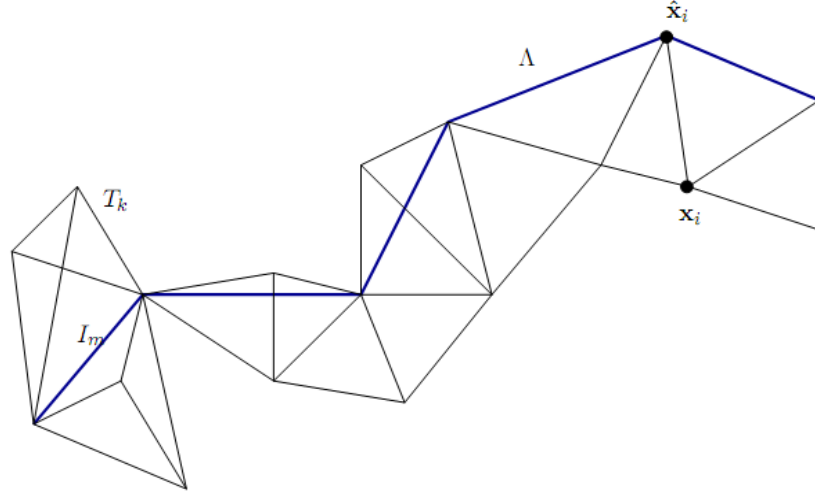


Figura 5.1: El dominio Λ está compuesto por las aristas I_m de los tetraedros de la malla 3D

Recordemos que el problema acoplado que queremos resolver es el siguiente: *Encontrar $\mathbf{u} = (u, \hat{u}) \in H_\alpha^1 \times \hat{V}$ tal que para toda función $\mathbf{v} = (v, \hat{v}) \in H_{-\alpha}^1 \times \hat{V}$ se verifique*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(u, v) + \hat{A}(\hat{u}, \hat{v}) + \int_\Lambda \beta(\Pi u - \hat{u})(v - \hat{v}) \, ds = F(v)$$

siendo

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \int_\Omega k \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \gamma u v d\mathbf{x} \\ \hat{A}(\hat{u}, \hat{v}) &= \int_\Lambda \hat{k} \frac{d\hat{u}}{ds} \frac{d\hat{v}}{ds} \, ds \\ F(\hat{v}) &= Q\hat{v}(0) \end{aligned}$$

con k, γ, Q constantes positivas y Πu el promedio de u sobre círculos de radio R .

Supongamos que $\{U_j\}$, $j = 1, \dots, N_h$ son las coordenadas de u_h en la base $\{\psi_j\}$, es decir, $u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_h} U_j \psi_j(\mathbf{x})$ y sea $\{\hat{U}_i\}$, $i = 1, \dots, \hat{N}_h$ las coordenadas de \hat{u}_h en la base dada por

$\{\widehat{\psi}_i\}, i = 1, \dots, \widehat{N}_h$. El problema discreto que queremos resolver es: *Encontrar* $(u_h, \widehat{u}_h) \in V_h \times \widehat{V}_h$ tal que

$$a((u_h, \widehat{u}_h), (\psi, \widehat{\psi})) = F(\psi, \widehat{\psi}) \quad \forall (\psi, \widehat{\psi}) \in V_h \times \widehat{V}_h$$

Es decir, si consideramos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} A(u_h, \psi_i) &= \sum_{j=1}^{N_h} \left(k U_j \int_{\Omega} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, d\mathbf{x} \right) + \sum_{j=1}^{N_h} \left(\gamma U_j \int_{\Omega} \psi_j \psi_i \, d\mathbf{x} \right) \quad i = 1, \dots, N_h \\ \widehat{A}(\widehat{u}_h, \widehat{\psi}_i) &= \sum_{j=1}^{\widehat{N}_h} \widehat{k} \widehat{U}_j \int_{\Lambda} \widehat{\psi}'_j(s) \widehat{\psi}'_i(s) \, ds \quad i = 1, \dots, \widehat{N}_h \end{aligned} \quad (5.3)$$

y

$$\int_{\Lambda} \beta (\Pi u_h - \widehat{u}_h) (\psi_i - \widehat{\psi}_i) \, ds = \int_{\Lambda} \beta \left(\sum_{j=1}^{N_h} U_j \bar{\psi}_j - \sum_{j=1}^{\widehat{N}_h} \widehat{U}_j \widehat{\psi}_j \right) (\psi_i - \widehat{\psi}_i) \, ds \quad (5.4)$$

donde Πu_h es un operador lineal continuo y $\bar{\psi}_j$ representa el promedio de la función ψ_j sobre círculos de radio R , entonces el problema acoplado discreto se traduce en: *encontrar* $\{U_j\} j = 1, \dots, N_h, \{\widehat{U}_j\} j = 1, \dots, \widehat{N}_h$ tales que se verifique

$$A(u_h, \psi_j) + \widehat{A}(\widehat{u}_h, \widehat{\psi}_i) + \int_{\Lambda} \beta (\bar{u}_h - \widehat{u}) (\psi_j - \widehat{\psi}_i) \, ds = Q \widehat{\psi}_i(0) \quad \forall j = 1, \dots, N_h, i = 1, \dots, \widehat{N}_h$$

Si “desacoplamos” las ecuaciones, nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h} U_j \int_{\Omega} (k \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i + \gamma \psi_j \psi_i) \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_h} \beta U_j \int_{\Lambda} \bar{\psi}_j \psi_i \, ds - \beta \sum_{j=1}^{\widehat{N}_h} \widehat{U}_j \int_{\Lambda} \widehat{\psi}_j \psi_i \, ds &= 0 \\ \sum_{j=1}^{\widehat{N}_h} \widehat{U}_j \int_{\Lambda} (\widehat{k} \widehat{\psi}'_j(s) \widehat{\psi}'_i(s) + \beta \widehat{\psi}_j(s) \widehat{\psi}_i(s)) \, ds - \beta \sum_{j=1}^{N_h} U_j \int_{\Lambda} \bar{\psi}_j(s) \widehat{\psi}_i(s) \, ds &= Q \widehat{\psi}_i(0) \end{aligned}$$

El sistema anterior lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h} U_j \left[\int_{\Omega} \left(k \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i + \int_{\Omega} \gamma \psi_j \psi_i \right) + \beta \int_{\Lambda} \bar{\psi}_j \psi_i \right] + \sum_{j=1}^{\widehat{N}_h} \widehat{U}_j \int_{\Lambda} \widehat{\psi}_j \psi_i &= 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, N_h \\ \sum_{j=1}^{\widehat{N}_h} \widehat{U}_j \left[\int_{\Lambda} (\widehat{k} \widehat{\psi}'_j \widehat{\psi}'_i + \beta \widehat{\psi}_j \widehat{\psi}_i) \, ds \right] - \beta \sum_{j=1}^{N_h} U_j \int_{\Lambda} \bar{\psi}_j \widehat{\psi}_i &= Q \widehat{\psi}_i(0) \quad \text{para } i = 1, \dots, \widehat{N}_h \end{aligned}$$

Estas ecuaciones determinan un sistema lineal puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \widehat{B} & \widehat{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \widehat{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \widehat{b} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

siendo $\mathbf{u} = (u, \widehat{u})$ con $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N_h})$, $\widehat{u} = (\widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_{\widehat{N}_h})$, $\mathbf{b} = (b, \widehat{b})$ con $b_i = 0$, $i = 1, \dots, N_h$ y $\widehat{b}_i = Q\widehat{\psi}_i(0)$, $i = 1, \dots, \widehat{N}_h$.

A fin de estudiar los bloques que integran la matriz del sistema anterior necesitamos las matrices de rigidez K , \widehat{K} en el dominio 3D y 1D respectivamente así como también las matrices de masa M (definida en Ω) y \widehat{M} (definida en la curva Λ). Los elementos que determinan las matrices de rigidez del sistema están dados por

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{\Omega} k \nabla \psi_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad i, j = 1, \dots, N_h \\ \widehat{K}_{ij} &= \int_{\Lambda} \widehat{k} \frac{d\widehat{\psi}_i(s)}{ds} \frac{d\widehat{\psi}_j(s)}{ds} \, ds \quad i, j = 1, \dots, \widehat{N}_h \end{aligned} \quad (5.6)$$

mientras que los elementos de las correspondientes matrices de masa son

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Omega} \gamma \psi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad i, j = 1, \dots, N_h \\ \widehat{M}_{ij} &= \int_{\Lambda} \beta \widehat{\psi}_i(s) \widehat{\psi}_j(s) \, ds \quad i, j = 1, \dots, \widehat{N}_h \end{aligned} \quad (5.7)$$

Sea $\bar{M} \in \mathbb{R}^{\widehat{N}_h \times N_h}$ la matriz definida por

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij} &= \beta \int_{\Lambda} \widehat{\psi}_i(s) \bar{\psi}_j(s) \, ds \quad i = 1, \dots, \widehat{N}_h \\ & \quad j = 1, \dots, N_h \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta la definición de la función g_{Λ}

$$\beta \int_{\Lambda} \bar{\psi}_j(s) \psi_i(s) \, ds = \begin{cases} \bar{M}_{kj} & \text{si } i = g_{\Lambda}(k) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\beta \int_{\Lambda} \widehat{\psi}_j(s) \psi_i(s) \, ds = \begin{cases} \widehat{M}_{kj} & \text{si } i = g_{\Lambda}(k) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

o sea

$$\begin{aligned}\beta \int_{\Lambda} \bar{\psi}_j(s) \psi_i(s) \, ds &= \sum_{k=1}^{\hat{N}_h} (G_{\Lambda})_{ik} \bar{M}_{kj} \\ \beta \int_{\Lambda} \hat{\psi}_j(s) \psi_i(s) \, ds &= \sum_{k=1}^{\hat{N}_h} (G_{\Lambda})_{ik} \widehat{M}_{kj}\end{aligned}$$

De este modo, obtenemos la siguiente expresión para la matriz definida por bloques en (5.5)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \widehat{B} & \widehat{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K + M + G_{\Lambda} \bar{M} & -G_{\Lambda} \widehat{M} \\ -\bar{M} & \widehat{K} + \widehat{M} \end{pmatrix}$$

Desde un punto de vista computacional, esto implica que la únicas matrices que tenemos que calcular son las matrices de masa y de rigidez tanto en el dominio unidimensional como en el tridimensional así como también la matriz \bar{M} cuyos elementos son promedios sobre círculos de radio R .

$$\begin{aligned}\bar{M}_{ij} &= \beta \int_{\Lambda} \hat{\psi}_i(s) \bar{\psi}_j(s) \, ds \\ &= \beta \sum_{I_m} \int_{I_m} \hat{\psi}_i(s) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_j(s, R, \theta) d\theta \right) ds\end{aligned}$$

El término dentro del paréntesis es una función que depende de s la cual necesitamos conocer para calcular \bar{M}_{ij} . Si bien esto puede hacerse mediante integración numérica, requiere interpolación sobre el dominio Ω ; es decir, necesitamos calcular los valores de las funciones base en un punto $\mathbf{x} \in \Omega$ cuyas coordenadas están dadas por $\mathbf{x} = (s, R, \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. En este sentido, y a fin de evitar el costo computacional que implica este cálculo, vamos a trabajar con el supuesto de que si el radio R es mucho más pequeño que el diámetro h de los tetraedros que conforman la triangulación del dominio Ω , entonces $\bar{\psi}_j(s) \simeq \psi_j(s)$. Es decir, que si tomamos $\psi_j(s)$ como una aproximación de $\bar{\psi}_j(s)$ obtenemos la siguiente expresión para la matriz \bar{M}

$$\bar{M} \simeq \widehat{M} G_{\Lambda}^T \quad (5.8)$$

y, de esta manera, la matriz definida en (5.5) se expresa como

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \widehat{B} & \widehat{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K + M + G_{\Lambda} \widehat{M} G_{\Lambda}^T & -G_{\Lambda} \widehat{M} \\ -\widehat{M} G_{\Lambda}^T & \widehat{K} + \widehat{M} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

En particular, esta matriz es siempre simétrica y definida positiva por lo que es sistema admite una única solución.

5.2. IMPLEMENTACIÓN DEL PROGRAMA. SOLUCIÓN APROXIMADA DEL PROBLEMA

Describiremos en esta sección el algoritmo utilizado tanto para el mallado del dominio Ω y obtendremos una solución aproximada del problema acoplado por el método de elementos finitos. Finalmente, mostraremos gráficamente la solución obtenida.

5.2.1. CONSTRUCCIÓN DE LAS MATRICES DE MASA Y DE RIGIDEZ

Para obtener la solución aproximada del problema, adaptamos el programa en Matlab dado en [13] para la resolución de problemas elípticos con condiciones de borde mixtas. Para implementar este algoritmo, necesitamos como input la lista con las coordenadas de los nodos obtenidos de la triangulación del dominio Ω así como también la matriz con los índices de los vértices de cada uno de los tetraedros del mallado. Ambos datos son obtenidos gracias al DistMesh de Persson y Strang [15]. A fin de acoplar las ecuaciones, tenemos que distinguir aquellos nodos de la triangulación que a la vez forman parte del capilar así como también los tetraedros de la frontera del dominio en los que hay que imponer las condiciones de borde de tipo Neumann dadas en (2.6).

MATRIZ DE RIGIDEZ EN Ω

Describiremos brevemente cómo funciona el programa dado en [13]. La matriz de rigidez en Ω queda determinada por los vértices de cada uno de los tetraedros que conforman la triangulación. Dado un elemento T de ésta, sean $(\mathbf{x}_i; \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ $i = 1, 2, 3, 4$ sus vértices y sean $\{\psi_i\}$ $i = 1, 2, 3, 4$ las correspondientes funciones nodales del espacio V_h . Es decir:

$$\psi_i(\mathbf{x}_j; \mathbf{y}_j; \mathbf{z}_j) = \delta_{ij}$$

Las funciones ψ_i quedan definidas de la siguiente manera:

$$\psi_i(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ 1 & \mathbf{x}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{z}_{i+1} \\ 1 & \mathbf{x}_{i+2} & \mathbf{y}_{i+2} & \mathbf{z}_{i+2} \\ 1 & \mathbf{x}_{i+3} & \mathbf{y}_{i+3} & \mathbf{z}_{i+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{x}_i & \mathbf{y}_i & \mathbf{z}_i \\ 1 & \mathbf{x}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{z}_{i+1} \\ 1 & \mathbf{x}_{i+2} & \mathbf{y}_{i+2} & \mathbf{z}_{i+2} \\ 1 & \mathbf{x}_{i+3} & \mathbf{y}_{i+3} & \mathbf{z}_{i+3} \end{vmatrix}}$$

En efecto, la anterior es una función lineal que toma el valor uno en el i -ésimo nodo y vale cero en los restantes. Los índices se entienden módulo cuatro. La matriz de rigidez en el tejido, dada en (5.6) tienen como elementos

$$K_{ij} = \int_{\Omega} k \nabla \psi_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad i, j = 1, \dots, N_h$$

Esta integral puede calcularse como suma de integrales sobre cada uno de los elementos T de la triangulación de Ω .

$$K_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T k \nabla \psi_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

A partir de la definición de la función ψ_i obtenemos que

$$\nabla \psi_i(x; y; z) = \frac{1}{6|T|} \begin{pmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y_{i+1} & z_{i+1} \\ 1 & y_{i+2} & z_{i+2} \\ 1 & y_{i+3} & z_{i+3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & x_{i+1} & z_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & z_{i+2} \\ 1 & x_{i+3} & z_{i+3} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \\ 1 & x_{i+3} & y_{i+3} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

donde $|T|$ indica el área del tetraedro

$$6|T| = \begin{vmatrix} x_{i+1} - x_i & y_{i+1} - y_i & z_{i+1} - z_i \\ x_{i+2} - x_i & y_{i+2} - y_i & z_{i+2} - z_i \\ x_{i+3} - x_i & y_{i+3} - y_i & z_{i+3} - z_i \end{vmatrix}$$

De lo anterior resulta que

$$\int_T \nabla \psi_k(\mathbf{x}) \cdot (\nabla \psi_i(\mathbf{x}))^T \, d\mathbf{x} = \frac{|T|}{(6|T|)^2} \begin{pmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y_{i+1} & z_{i+1} \\ 1 & y_{i+2} & z_{i+2} \\ 1 & y_{i+3} & z_{i+3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & x_{i+1} & z_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & z_{i+2} \\ 1 & x_{i+3} & z_{i+3} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \\ 1 & x_{i+3} & y_{i+3} \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y_{k+1} & z_{k+1} \\ 1 & y_{k+2} & z_{k+2} \\ 1 & y_{k+3} & z_{k+3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & x_{k+1} & z_{k+1} \\ 1 & x_{k+2} & z_{k+2} \\ 1 & x_{k+3} & z_{k+3} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & x_{k+1} & y_{k+1} \\ 1 & x_{k+2} & y_{k+2} \\ 1 & x_{k+3} & y_{k+3} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Definimos la matriz A como sigue

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_j & x_{j+1} & x_{j+2} & x_{j+3} \\ y_j & y_{j+1} & y_{j+2} & y_{j+3} \\ z_j & z_{j+1} & z_{j+2} & z_{j+3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para programar en Matlab el código correspondiente a la matriz K , tenemos que escribimos de manera explícita la matriz A y consideramos la constante k que aparece en el planteo del problema, la matriz de rigidez K escrita simultáneamente para todos los índices es la siguiente

$$K = k|T|.A.A^T$$

MATRIZ DE MASA EN Ω

Los elementos de la matriz de masa M en Ω están dados por

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \gamma \psi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad i, j = 1, \dots, N_h$$

Como hicimos anteriormente, podemos calcular esta integral a partir de la suma de las integrales sobre cada tetraedro

$$M_{ij} = \sum_{T \in T_h} \int_T \gamma \psi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad i, j = 1, \dots, N_h$$

Para calcular este integral, recurrimos a la fórmula de cuadratura dada en [18]

$$\int_T \psi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} & x_{i+3} \\ y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & y_{i+3} \\ z_i & z_{i+1} & z_{i+2} & z_{i+3} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRICES DE MASA Y DE RIGIDEZ EN EL CAPILAR

Las funciones $\{\widehat{\psi}_i\}$ $i = 1, \dots, \widehat{N}_h$ que forman una base para el espacio \widehat{V}_h , dado en (5.1), son

$$\widehat{\psi}_i(s) = \begin{cases} \frac{s-s_{i-1}}{s_i-s_{i-1}} & \text{si } s \in [s_{i-1}, s_i] \\ \frac{s_{i+1}-s}{s_{i+1}-s_i} & \text{si } s \in [s_i, s_{i+1}] \\ 0 & \text{si } s \notin [s_{i-1}, s_{i+1}] \end{cases} \quad i = 2, \dots, \widehat{N}_h - 1$$

$$\widehat{\psi}_1(s) = \begin{cases} \frac{s-s_2}{s_1-s_2} & \text{si } s \in [s_1, s_2] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \widehat{\psi}_{\widehat{N}_h}(s) = \begin{cases} \frac{s-s_{\widehat{N}_h-1}}{s_{\widehat{N}_h}-s_{\widehat{N}_h-1}} & \text{si } s \in [s_{\widehat{N}_h-1}, s_{\widehat{N}_h}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La variables s_i representan las longitudes de arco en las que se encuentran los nodos de cada una las aristas (x_i, y_i, z_i) que forman el capilar. Si llamamos l_i a la longitud de cada arista:

$$l_j = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2 + (z_{j+1} - z_j)^2}$$

De acuerdo a las condiciones de borde, tenemos que $\widehat{\psi}_{\widehat{N}_h}(s) = 0$, ya que $\widehat{u}(L) = 0$. Los elementos de las matriz de rigidez son los siguientes:

$$\begin{aligned}\widehat{K}_{ij} &= \int_{\Lambda} \widehat{k} \frac{d\widehat{\psi}_i(s)}{ds} \frac{d\widehat{\psi}_j(s)}{ds} ds \\ \widehat{K}_{ii} &= \frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}, \quad \widehat{K}_{i-1,i} = -\frac{1}{l_{i-1}}, \quad \widehat{K}_{i,i+1} = -\frac{1}{l_i}, \quad i = 2, \dots, \widehat{N}_h - 1 \\ \widehat{K}_{11} &= \frac{1}{l_1}\end{aligned}$$

Los elementos que restan son iguales a cero. La matriz de masa en el capilar queda definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\widehat{M}_{ij} &= \int_{\Lambda} \beta \widehat{\psi}_i(s) \widehat{\psi}_j(s) ds \\ \widehat{M}_{ii} &= \frac{1}{3}(l_{i+1} + l_i), \quad \widehat{M}_{i-1,i} = \frac{l_{i-1}}{6}, \quad \widehat{M}_{i,i+1} = \frac{l_i}{6}, \quad i = 2, \dots, \widehat{N}_h - 1 \\ \widehat{M}_{11} &= \frac{l_1}{3}\end{aligned}$$

Al igual que antes, los restantes elementos son nulos.

5.3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA PLANTEADO

En esta sección mostraremos la solución gráfica del problema acoplado 1D - 3D. Para los cálculos consideramos las constantes k , \widehat{k} , β y Q de nuestro problema iguales a uno y que Ω era un cilindro de radio 1 de eje z , con caras superior e inferior delimitadas por los planos $z = 1$ y $z = -1$. Nuestra malla está compuesta por 52332 nodos y 335640 tetraedros.

En primer lugar, mostramos el dominio Ω mallado (cortado con el plano $y = 0$) Figura 5.2. En la Figura 5.3 vemos a la izquierda la solución en un corte con el plano $y = 0$ y a la derecha una vista inferior del dominio donde se impuso la condición de flujo entrante al capilar. La Figura 5.4 muestra a la izquierda un corte a la altura $z = 0$ y a la derecha puede verse el capilar construido sobre las aristas de tetraedros pertenecientes a la malla.

5.4. CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN NORMA $H_{\alpha}^1(\Omega)$

En esta sección demostraremos los resultados que nos posibilitan asegurar la convergencia del método de elementos finitos en norma $H_{\alpha}^1(\Omega)$. El primero de estos resultados es análogo al conocido lema de Cea, mientras que el segundo se refiere a la demostración de la existencia de una única solución al problema discreto.

LEMA 5.4.1 *Supongamos que estamos bajo las hipótesis del teorema de Nečas (4.2.1). Sean $M_1 \subset H_1$, $M_2 \subset H_2$ subespacios cerrados tales que se verifica:*

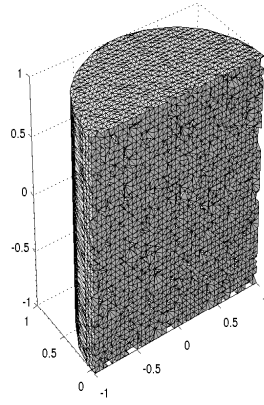


Figura 5.2: Detalle del dominio mallado (corte con el plano $y=0$).

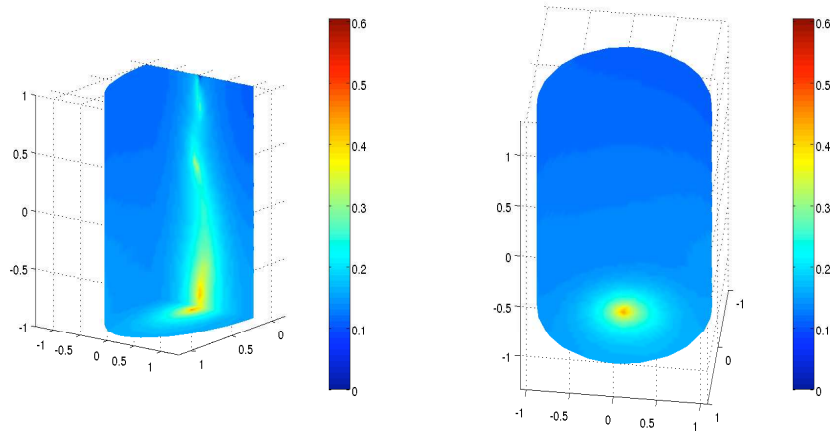


Figura 5.3: Corte con $y = 0$ a la izquierda y vista inferior (flujo entrante) a la derecha de la solución obtenida.

$$\sup_{u \in M_1} a(u, v) > 0 \quad \forall v \in M_2 \quad (5.10)$$

$$\sup_{v \in M_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} a(u, v) \geq \widehat{C}_2 \|u\|_{H_1} \quad \forall u \in M_1 \quad (5.11)$$

siendo $\widehat{C}_2 = \widehat{C}_2(M_1, M_2)$ una constante positiva. Consideremos $u \in H_1$, $\widehat{u} \in M_1$ tales que:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= F(v) \quad \forall v \in H_2 \\ a(\widehat{u}, v) &= F(v) \quad \forall v \in M_2 \end{aligned}$$

Entonces,

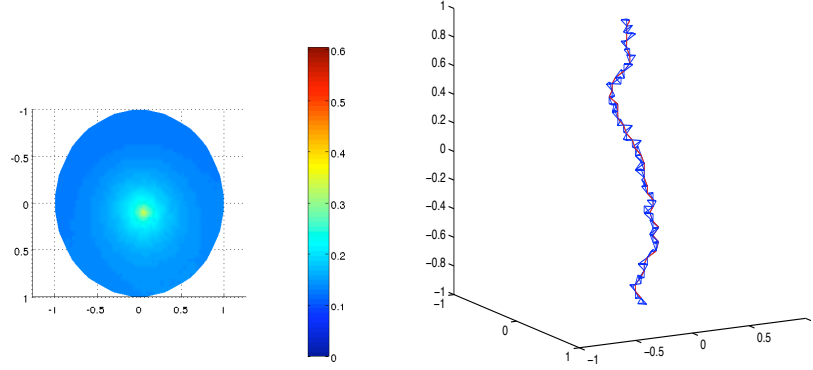


Figura 5.4: Corte con el plano $z = 0$ a la izquierda y detalle del capilar (en rojo) con tetraedros adyacentes (en azul) a la derecha.

$$\| u - \hat{u} \| \leq \left(1 + \frac{C_1}{\widehat{C}_2} \right) \inf_{\tilde{u} \in M_1} \| u - \tilde{u} \| \quad (5.12)$$

DEMOSTRACIÓN: De las hipótesis del teorema, teniendo en cuenta la bilinealidad de a , podemos deducir que

$$a(u - \hat{u}, v) = 0 \quad \forall v \in M_2$$

Sea $\tilde{u} \in M_1$. Entonces sumando y restando u y usando que a es una forma bilineal continua, tenemos que

$$\begin{aligned} a(\hat{u} - \tilde{u}, v) &= a(\hat{u} - u, v) + a(u - \tilde{u}, v) \\ &= a(u - \tilde{u}, v) \\ &\leq C_1 \| u - \tilde{u} \|_{H_1} \| v \|_{H_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (5.11):

$$\begin{aligned} \| u - \hat{u} \|_{H_1} &\leq \| u - \tilde{u} \|_{H_1} + \| \tilde{u} - \hat{u} \|_{H_1} \\ &\leq \| u - \tilde{u} \|_{H_1} + \frac{1}{\widehat{C}_2} \sup_{v \in M_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} a(\tilde{u} - \hat{u}, v) \\ &\leq \| u - \tilde{u} \|_{H_1} + \frac{C_1}{\widehat{C}_2} \| \tilde{u} - u \|_{H_1} \\ &= \left(1 + \frac{C_1}{\widehat{C}_2} \right) \| \tilde{u} - u \|_{H_1} \quad \forall \tilde{u} \in H_1 \end{aligned}$$

Hemos demostrado entonces que $\|u - \hat{u}\|_{H^1} \leq \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \inf_{\tilde{u} \in M_1} \|u - \tilde{u}\| \quad \square$

Usaremos el resultado anterior para demostrar la existencia de una única solución al problema discreto.

TEOREMA 5.4.1 *Supongamos que estamos bajo las hipótesis del Teorema 4.2.3. Entonces, para cada $h > 0$ existe una única $u_h \in V_h$ tal que $a(u_h, v_h) = F(v_h)$ para todo $v_h \in V_h$, siendo F y a definidas por (4.7) y (1.3).*

Mas aún, si $u \in H^1_\alpha(\Omega)$ es tal que $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H^1_\alpha(\Omega)$ entonces existe una constante positiva C tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1_\alpha} \leq C \inf_{\tilde{u} \in V_h} \|u - \tilde{u}\|_{H^1_\alpha} \quad (5.13)$$

DEMOSTRACIÓN La idea es utilizar el lema anterior (5.4.1) tomando $M_1 = M_2 = V_h \subseteq H^1_\alpha(\Omega) \subseteq H^1_\alpha(\Omega)$. Veamos entonces que estamos bajo las hipótesis de este teorema. En la demostración del Teorema 4.2.3 hemos mostrado que para toda $v \in H^1_\alpha, v \neq 0$, se verifica la siguiente desigualdad (tomando $u = v$)

$$\sup_{u \in V_h} a(u, v) \geq a(v, v) \geq c \|v\|_{H^1_\alpha}^2 > 0 \quad (5.14)$$

por la tanto, la misma desigualdad es válida para toda $v \in V_h, v \neq 0$, con $c = c(\alpha, \beta, A_0, R)$, por lo que se cumple (5.10).

El producto escalar en H^1_α , que denotaremos $(\cdot; \cdot)_{H^1_\alpha}$, es en particular un producto interno en el espacio discreto V_h . Dado que en espacios de dimensión finita todas las normas son equivalentes, $a(\cdot, \cdot)$ es continua en $V_h \times V_h$ dado que lo es en $(V_h, \|\cdot\|_{H^1_\alpha}) \times (V_h, \|\cdot\|_{H^1_\alpha})$. Luego, gracias al teorema de representación de Riesz, definimos el operador lineal $A : V_h \rightarrow V_h$ de modo que

$$(w_h, Av_h)_{H^1_\alpha} = a(w_h, v_h) \quad \forall w_h, v_h \in V_h \quad (5.15)$$

Por la desigualdad (5.14) aplicada a $w_h = v_h$ tenemos que

$$c \|v_h\|_{H^1_\alpha}^2 \leq a(v_h, v_h) = (v_h, Av_h)_{H^1_\alpha} \leq \|v_h\|_{H^1_\alpha} \|Av_h\|_{H^1_\alpha}$$

es decir,

$$\|Av_h\|_{H^1_\alpha} \geq c \|v_h\|_{H^1_\alpha} \quad (5.16)$$

por lo que A es un isomorfismo de V_h en V_h .

Sea $u_h \in V_h$ dada y consideremos la función Ψ asociada a u_h definida en (4.19) y dada por

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}; u_h) = \begin{cases} \Psi(r, y; u_h) = \int_r^R t^{2\alpha+1} A^0(t, y) dt & \text{en } \Omega^R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.17)$$

donde

$$A_0^k(r, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_h(s, r, \theta) e^{ik\theta} d\theta$$

Como hicimos en la demostración del teorema (4.2.3), introducimos la siguiente función:

$$\tilde{v} = \tilde{d}^{2\alpha} u_h + 2\alpha \Psi \quad (5.18)$$

siendo \tilde{d} la función distancia modificada con la que trabajamos anteriormente, dada en (4.38). Ya vimos que existe una constante positiva m tal que $\|\tilde{v}\|_{H_{-\alpha}^1} \leq m \|u_h\|_{H_{\alpha}^1}$, o sea, $\tilde{v} \in H_{-\alpha}^1$. En general, $\tilde{v} \notin V_h$ pero por el teorema de representación de Riesz dado que $a(w_h, \tilde{v}) : V_h \rightarrow V_h$ es un funcional lineal continuo, existe una única $v_h \in V_h$ tal que

$$(w_h, v_h)_{H_{-\alpha}^1} = a(w_h, \tilde{v}) \quad \forall w_h \in V_h \quad (5.19)$$

Si llamamos c_1 a la constante de continuidad de la forma bilineal a y c_2 a la norma de la inclusión continua $H_{-\alpha}^1 \hookrightarrow H_{\alpha}^1$ y tomando $w_h = v_h$ en (5.19) tenemos que:

$$c_2 \|v_h\|_{H_{\alpha}^1} \|v_h\|_{H_{-\alpha}^1} \leq \|v_h\|_{H_{-\alpha}^1}^2 = a(v_h, \tilde{v}) \leq c_1 \|v_h\|_{H_{\alpha}^1} \|\tilde{v}\|_{H_{-\alpha}^1} \quad (5.20)$$

o sea, si llamamos $c_3 = \frac{c_1}{c_2}$:

$$\|v_h\|_{H_{-\alpha}^1} \leq c_3 \|\tilde{v}\|_{H_{-\alpha}^1} \quad (5.21)$$

Dado que A es un isomorfismo, usando la igualdad (5.15) y (5.19) y las desigualdades (5.16) y (5.21) deducimos que

$$\begin{aligned} \sup_{v \in V_h, \|v\|_{H_{-\alpha}^1} \leq 1} a(u_h, v) &\geq \frac{1}{\|A^{-1}v_h\|_{H_{-\alpha}^1}} a(u_h, A^{-1}v_h) \\ &= \frac{(u_h, v_h)_{H_{-\alpha}^1}}{\|A^{-1}v_h\|_{H_{-\alpha}^1}} \\ &= \frac{a(u_h, \tilde{v})}{\|A^{-1}v_h\|_{H_{-\alpha}^1}} \\ &\geq c \frac{a(u_h, \tilde{v})}{\|v_h\|_{H_{-\alpha}^1}} \geq cc_3 \frac{a(u_h, \tilde{v})}{\|\tilde{v}\|_{H_{-\alpha}^1}} \end{aligned}$$

En la demostración de (4.2.3) vimos que existe una constante $c_4 = c_4(\alpha, \beta, A_{\min}, R)$ tal que

$$a(u_h, \tilde{v}) \geq c_4 \|u_h\|_{H_\alpha^1}$$

por lo que, debido a la estimación $\|\tilde{v}\|_{H_{-\alpha}^1} \leq m \|u_h\|_{H_\alpha^1}$ tenemos que

$$\sup_{v \in V_h, \|v\|_{H_\alpha^1}} a(u_h, v) \geq \frac{cc_4}{c_3m} \|u_h\|_{H_\alpha^1}$$

Luego, al verificarse las hipótesis del teorema de Nečas concluimos que existe una única solución u_h tal que $a(u_h, v_h) = F(v_h)$ para todo $v_h \in V_h$. Además, por (5.11) si llamamos $C = 1 + \frac{c_1c_3m}{cc_4}$

$$\|u - u_h\|_{H_\alpha^1} \leq C \inf_{\tilde{u} \in V_h} \|u - \tilde{u}\|_{H_\alpha^1} \quad (5.22)$$

con lo cual finaliza la demostración. \square

La propiedad anterior nos permite asegurar la convergencia del método de elementos finitos en la norma de H_α^1 . En efecto, sabemos que bajo las hipótesis que hicimos acerca de la triangulación \mathcal{T}_h para toda función suficientemente regular, p. ej. $u \in C^\infty$ vale que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\tilde{u} \in V_h} \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Dado que la inmersión $H^1(\Omega) \hookrightarrow H_\alpha^1(\Omega)$ es continua vale que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\tilde{u} \in V_h} \|u - \tilde{u}\|_{H_\alpha^1(\Omega)} = 0$$

Y, debido a la densidad de las funciones de clase $C^\infty(\Omega)$ podemos extender este resultado a toda $u \in H_\alpha^1(\Omega)$.

CAPÍTULO 6

APÉNDICE

LEMA 6.0.2 Sea $\delta \in (0, 1)$ y $u \in H_\alpha^1(\Omega)$, con $0 < \alpha \leq \delta$. Consideremos las siguientes expansiones en series de Fourier de la función u respecto de la coordenada local θ :

$$u(s, r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_0^k(r, s) e^{ik\theta} \quad \text{en } \Omega_0^R, \quad (6.1)$$

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_1^k(r, \phi) e^{ik\theta} \quad \text{en } \Omega_1^r \setminus \Omega_0^R, \quad (6.2)$$

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_2^k(r, \phi) e^{ik\theta} \quad \text{en } \Omega_2^r \setminus \Omega_0^R \quad (6.3)$$

Consideremos la función a valores reales definida por:

$$\mathbf{A}^0(\mathbf{x}) = \begin{cases} A_0^0(r, s) & \text{en } \Omega_0^R \\ A_1^0(r, \phi) & \text{en } \Omega_1^r \setminus \Omega_0^R \\ A_2^0(r, \phi) & \text{en } \Omega_2^r \setminus \Omega_0^R \end{cases}$$

definida en Ω^R . Asimismo, definimos

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}; u) = \begin{cases} \Psi(r, y; u) = \int_r^R t^{2\alpha+1} A^0(t, y) dt & \text{en } \Omega^R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.4)$$

Mediante la variable y indicamos cualesquiera de las variables s o ϕ , dependiendo del subdominio de Ω^R al cual pertenece \mathbf{x} (como se observa en la Figura 6.1). En particular, notemos que Ψ es independiente de θ .

Entonces existen constantes positivas C_1, C_2 y C_3 , que dependen únicamente de δ y R tales que $\forall \alpha \in (0, \delta]$ se verifican las siguientes desigualdades :

$$\| u - A^0 \|_{L_{\alpha-1}^2(\Omega^R)} \leq C_1 \| \nabla u \|_{L_\alpha^2(\Omega)} \quad (6.5)$$

$$\| \Psi \|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)} \leq C_2 \| u \|_{L_\alpha^2(\Omega)} \quad (6.6)$$

$$\| d^{2\alpha-1} u \nabla d + \nabla \Psi \|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)} \leq C_3 \| \nabla u \|_{L_\alpha^2(\Omega)} \quad (6.7)$$

donde, como convenimos, $d = \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)$.

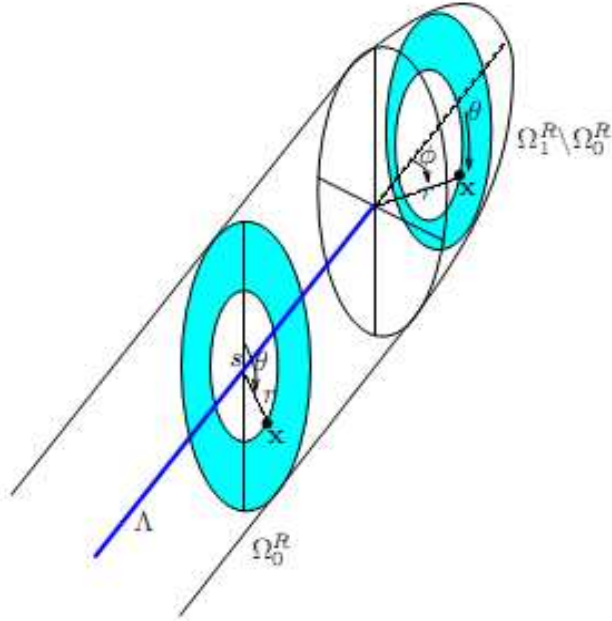


Figura 6.1: Coordenadas locales en los subdominios de Ω^R

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, aclaramos que los coeficientes en las expansiones en series de Fourier están dados mediante las fórmulas habituales. En este sentido, por ejemplo, en Ω_0^R tenemos que:

$$A_0^k(r, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s, r, \theta) e^{-ik\theta} d\theta$$

Puesto que $A_0^{-k}(r, s) = \overline{A_0^k(r, s)}$, A_0^0 es, en particular, una función real al igual que lo son A_1^0 y A_2^0 . Mas aún, la función $A^0(\mathbf{x})$ es el promedio de u sobre los círculos descritos cuando θ varía entre 0 y 2π , manteniendo las dos coordenadas restantes constantes e iguales a aquellas que toma el punto $\mathbf{x} \in \Omega^R$. A su vez, este hecho nos posibilita obtener una interpretación geométrica de la aplicación Ψ : dado que estos círculos varían continuamente con respecto a \mathbf{x} , Ψ resulta la integral de la función $\frac{1}{2\pi} \text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda)^{2\alpha-1} u(\mathbf{x})$ sobre las áreas sombreadas que se observan en la Figura 4.2.

Habíamos descrito a Ω^R mediante un conjunto de tres aplicaciones de las cuales $\mathbf{x}_0(s, r, \theta)$ (la que caracteriza a los puntos de Ω_0^R) está expresada en coordenadas cilíndricas mientras que las dos restantes $\mathbf{x}_1(r, \theta, \phi)$ y $\mathbf{x}_2(r, \theta, \phi)$, que describen a los puntos de Ω_1^R y Ω_2^R respectivamente, utilizan coordenadas esféricas. A fin de simplificar la demostración, y dado que los cálculos son similares para las regiones esféricas, consideraremos únicamente el caso del subdominio Ω_0^R . Recordemos que en Ω_0^R se verifica (4.4) y que $\text{dist}(\mathbf{x}, \Lambda) = r$.

De ahora en adelante, para no sobrecargar la notación, omitiremos los intervalos de integración. Se entiende que $r \in (0, R)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $s \in (s_1, s_2)$ y $\phi \in (0, \pi/2)$.

Gracias a la igualdad de Parseval:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |A_0^k(r, s)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2(s, r, \theta) \, d\theta$$

y a la ortogonalidad de los coeficientes de Fourier, tenemos que:

$$\int_0^{2\pi} (u(s, r, \theta) - A_0^0(r, s))^2 \, d\theta = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |A_0^k(r, s)|^2, \quad (6.8)$$

De modo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} \|u - A^0\|_{L^2_{\alpha-1}(\Omega_0^R)}^2 &= \int r^{2\alpha-2} [u(s, r, \theta) - A_0^0(r, s)]^2 r \, dr ds d\theta \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int r^{2\alpha-1} |A_0^k(r, s)|^2 \, dr ds \end{aligned} \quad (6.9)$$

Por otro lado, puesto que $u(s, r, \theta) = u(\mathbf{x}_0(s, r, \theta))$ en Ω_0^R y gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2 &= \left| \nabla u \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \theta}(s, r, \theta) \right|^2 \\ &\leq \| \nabla u \|^2 r^2 \end{aligned}$$

por lo que $|\nabla u|^2 \geq \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2$. Utilizando la igualdad de Parseval aplicada a la derivada de la función u respecto de θ obtenemos que:

$$\begin{aligned} \| \nabla u \|^2_{L^2_{\alpha}(\Omega)} &\geq \int r^{2\alpha} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 r \, ds dr d\theta \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int r^{2\alpha-1} k^2 |A_0^k(r, s)|^2 \, ds dr \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int r^{2\alpha-1} k^2 |A_0^k(r, s)|^2 \, ds dr, \end{aligned}$$

Dado que en el último término de la expresión anterior $k^2 \geq 1$ y comparando con (6.9) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\| u - A^0 \|_{L^2_{\alpha-1}(\Omega_0^R)}^2 &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int r^{2\alpha-1} |A_0^k(r, s)|^2 dr ds \\
&\leq 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int r^{2\alpha-1} k^2 |A_0^k(r, s)|^2 dr ds \\
&\leq \| \nabla u \|_{L^2_{\alpha}(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Análogamente, podemos estimar $\| u - A^0 \|_{L^2_{\alpha-1}}^2$ en $\Omega_1^R \setminus \Omega_0^R$ y $\Omega_2^R \setminus \Omega_0^R$ demostrando así la desigualdad dada en (6.5).

Veamos ahora que se cumple (6.6). Para ello, notemos que la norma $L^2_{-\alpha}$ de la función Ψ en Ω_0^R está dada por

$$\| \Psi \|_{L^2_{-\alpha}(\Omega_0^R)}^2 = 2\pi \int r^{-2\alpha} \left(\int_r^R t^{2\alpha-1} A_0^0(t, s) dt \right)^2 r ds dr$$

Haremos uso de la siguiente desigualdad con pesos debida a Hardy, la cual enunciaremos sin demostración

$$\int_0^R r^{-\beta} \left(\int_r^R t^{\beta-1} f(t) dt \right)^2 dr \leq \left(\frac{2}{1-\beta} \right)^2 \int_0^R r^{\beta} f(r)^2 dr, \quad \beta < 1 \quad (6.10)$$

Si tomamos $f(t) = t A_0^0(t, s)$, $\beta = 2\alpha - 1$ (que es menor que uno puesto que $0 < \alpha \leq \delta < 1$) y aplicamos la desigualdad anterior junto con la igualdad de Parseval obtenemos:

$$\begin{aligned}
\| \Psi \|_{L^2_{-\alpha}(\Omega_0^R)} &\leq 2\pi \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^2 \int A_0^0(r, s)^2 r^{2\alpha+1} dr ds \\
&\leq \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^2 \int u(s, r, \theta)^2 r^{2\alpha+1} dr ds d\theta \\
&\leq \left(\frac{1}{1-\delta} \right) \| u \|_{L^2_{\alpha}(\Omega_0^R)}^2
\end{aligned} \quad (6.11)$$

Podemos realizar estimaciones similares tanto en $\Omega_1^R \setminus \Omega_0^R$ como en $\Omega_2^R \setminus \Omega_0^R$: haciendo uso de (6.10) con $f(t) = A_i^0(t, \phi) t^2$ con $i = 1, 2$ y $\beta = 2\alpha - 2$ ya que nos aparece el término r^2 en lugar de r debido a la fórmula de integración en coordenadas esféricas. Dado que definimos $\Psi = 0$ fuera de Ω^R , (6.6) ha sido probada.

Por último, veamos (6.7). Para lo cual observemos que, debido a la convergencia de la serie de Fourier

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s, r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\partial A_0^0}{\partial s} e^{ik\theta}, \quad (6.12)$$

Además, si llamamos \mathbf{e}_r y \mathbf{e}_s a los versores asociados a las coordenadas locales s y r respectivamente:

$$\nabla\Psi = -\mathbf{e}_r r^{2\alpha-1} A_0^0(r, s) + \mathbf{e}_s \int_r^R t^{2\alpha-1} \frac{\partial A_0^0}{\partial s}(r, s) dt, \quad d^{2\alpha-1} \nabla d = r^{2\alpha-1} \mathbf{e}_r,$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \| d^{2\alpha-1} u \nabla d + \nabla\Psi \|_{L^2_{-\alpha}(\Omega_0^R)}^2 &= \| r^{2\alpha-1} u - r^{2\alpha-1} A_0^0(r, s) \|_{L^2_{-\alpha}(\Omega_0^R)}^2 \\ &+ \| \int_r^R t^{2\alpha-1} \frac{\partial A_0^0}{\partial s}(r, s) dt \|_{L^2_{-\alpha}(\Omega_0^R)}^2 \\ &= \int (r^{2\alpha-1} [u(s, r, \theta) - A_0^0])^2 r^{-2\alpha+1} ds dr d\theta \\ &+ 2\pi \int r^{-2\alpha} \left(\int_r^R t^{2\alpha-1} \frac{\partial A_0^0}{\partial s}(r, s) dt \right)^2 r ds dr \\ &= \| u - A^0 \|_{L^2_{\alpha-1}(\Omega_0^R)}^2 + 2\pi \int r^{-2\alpha} \left(\int_r^R t^{2\alpha-1} \frac{\partial A_0^0}{\partial s}(r, s) dt \right)^2 r ds dr \end{aligned}$$

El primer término lo podemos estimar por (6.5), por lo tanto vamos a acotar el segundo. Utilizaremos la desigualdad (6.10) con $f(t) = t \frac{\partial A_0^0}{\partial s}(t, s)$ y, como antes, $\beta = 2\alpha - 1 < 1$ y, nuevamente, la igualdad de Parseval. A partir de lo cual tenemos que:

$$\begin{aligned} 2\pi \int r^{-2\alpha} \left(\int_r^R t^{2\alpha-1} \frac{\partial A_0^0}{\partial s}(r, s) dt \right)^2 r ds dr &\leq 2\pi \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^2 \int \left(\frac{\partial A_0^0}{\partial s}(t, s) \right)^2 r^{2\alpha+1} dr ds \\ &\leq \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^2 \| \frac{\partial u}{\partial s} \|_{L^2_{\alpha}(\Omega_0^R)}^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{1-\delta} \right)^2 \| \nabla u \|_{L^2_{\alpha}(\Omega_0^R)}^2. \end{aligned}$$

Estimaciones análogas se tienen para los restantes subdominios de Ω^R . Luego, se cumple (6.7), lo cual completa la demostración. \square

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Quarteroni, C. D Angelo: *On the coupling of 1D and 3D diffusion- reaction equations. Applications to tissue perfusion problems.* Math. Mod. and Meth. in App. Sciences, 18, 2008, pp 1481-1504.
- [2] L. Formaggia, J.F. Gerbeua, F. Nobile y A. Quarteroni. *On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels .* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 191 (6-7):561-582, 2001.
- [3] A. Quarteroni and L. Formaggia. *Mathematical modelling and numerical simulation of the cardiovascular system.* En P.G Ciarlet and J.L. Lions, editores, Modelling of Living Systems, Handbook of Numerical Analysis, Amsterdam, 2004.
- [4] . Quarteroni y A. Valli. *Numerical Approximation of partial differential equations.* Volumen 23 de Springer Series in Computational Mathematics. Springer- Verlag, Berlin, 1994.
- [5] J.M. Huyghe, C. W. Oomens y K. H. Van Campen. *Low Reynolds number steady state flow through a branching network of rigid vessels: I. A mixture theory.* Biorheology, 26: 55-71, 1989.
- [6] J.M. Huyghe, C. W. Oomens y K. H. Van Campen. *Low Reynolds number steady state flow through a branching network of rigid vessels: II. A finite element mixture model.* Biorheology, 26: 73-84, 1989.
- [7] Y. C. Fung. *Biomechanics: Motion, Flow, Stress and Growth.* Springer- Verlag, 1990.
- [8] C. Alboin, J. Jaffré, J. E. Roberts y C. Serres. *Modelling fractures as interfaces for flow and transport in porous media.* En Z. Chen y R. E. Ewing editores, FLuid Flow and Transport in Porous Media: Methemata and Numerical Treatment, 13-24, New York, 2002.
- [9] A. Kufner. *Weighted Sobolev Spaces.* Wiley, 1985.
- [10] B. Opic y A. Kufner. *Hardy- type inequalities.* Pitman Res. Notes in Math. Longaman Scientific & technical, 1990.
- [11] R. Durán y F. López García. *Solutions of the divergence and analysis of the Stokes equations in planar Hölder- α domains,* Math. Mod. Meth. Appl. Sci.
- [12] C. D Angelo. *Multiscale modelling of metabolism and transport phenomena in living tissues.* Tesis Doctoral, These Nro. 3803, École Polytechnique Fédérale de Laussane, 2007.

- [13] J. Albery, C. Carstensen, S. A. Funken. *Remarks Around 50 Lines of Matlab: Short Finite Element Method Implementation*. Numer. Algorithms, 20, 1999.
- [14] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems* North-Holland, 1978.
- [15] P. Persson, G. Strang. *A Simple Mesh Generator in MATLAB*. SIAM Review, Vol. 46, No. 2. (2004), pp. 329-345.
- [16] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio. *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*. Oxford Science Publications, 1993.
- [17] T. Kilpeläinen, *Weighted Sobolev Spaces and Capacity*. Ann. Acad. Scient. Fenn., 19, 1994, pp 95-113.
- [18] G. Carey, J. Tinsley Oden, E. Becker. *Finite Elements. An introduction*. Prentice Hall, 1981.
- [19] E. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Univ. Press, 1970.