Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires, Argentina

TESIS DE LICENCIATURA

Espacios Clasificantes y Atlas de Grupoides

Matías Luis del Hoyo

Director: Gabriel Minian

Marzo de 2005

Contenidos

Introducción **2**

1 Preliminares **5**
Límites y Colímites 6
Colímites Filtrantes 7
Adjunción 9
Lema de Yoneda 10

2 Conjuntos Simpliciales **12**
Nervio de una categoría 14
Nervio de un grupo 15
Realización Geométrica 18
Compatibilidad de $|\cdot|$ con $\times$ 23

3 Espacios Clasificantes **26**
Cálculo algebraico de $\pi_1(C, X)$ 28
El funtor $C \mapsto BC$ 35
Teorema A de Quillen 38
Fibraciones y el teorema A 42

4 Espacios asociados a un cubrimiento **47**

5 Atlas de Grupoides **53**
Acciones globales 53
Atlas de grupoides 58
Definiciones para el nervio de un atlas de grupoides 59

Introducción

Esta tesis se desarrolla en torno al estudio de los espacios clasificantes de categorías pequeñas, basándose en los distintos trabajos que se han realizado en el tema. Se exponen aquí varios de los resultados más conocidos, muchos de ellos con demostraciones más detalladas y alternativas a las originales. Se analizan las herramientas comúnmente utilizadas y también se exponen resultados nuevos y originales.

En la década del 50, J. Milnor introduce la noción de espacio clasificante BG de un grupo topológico G, para "clasificar" los G-fibrados principales [Mil]. Es sabido que, si G es un grupo discreto, entonces BG resulta ser un espacio de Eilenberg-MacLane del tipo (G,1).

A fines de los años 60 y principios de los 70, G. Segal generaliza la construcción de Milnor e introduce el concepto de espacio clasificante de una categoría C, que se obtiene tomando la realización geométrica del nervio de C [Se1].

Esta construcción, que es usada comúnmente en topología algebraica, fue utilizada por D. Quillen para caracterizar los grupos de K-teoría algebraica de orden superior de ciertas categorías pequeñas como grupos de homotopía de sus espacios clasificantes [Q]. También es usada por Thomason, entre otros autores, para relacionar las teorías homotópicas de categorías pequeñas, conjuntos simpliciales y espacios topológicos [Min], [T].

Veremos varias aplicaciones de esta construcción. Entre ellas, un resultado conocido de Quillen, que permite calcular el grupo fundamental del espacio clasificante BC de una categoría en forma puramente algebraica, a partir de C, sin necesidad de pasar por la topología de BC (pág. 34).

Otra de las aplicaciones que veremos es el llamado Teorema A de Quillen, que describe condiciones suficientes para que una función continua entre espacios clasificantes sea una equivalencia homotópica (pág. 40). Utilizamos el Teorema A para probar varios resultados y también lo relacionaremos con las fibraciones y pre-fibraciones de Grothendieck.

Remarcamos que todo CW-complejo es equivalente homotópico al espacio clasificante de alguna categoría (pág. 27), por lo tanto estos resultados son de vasta utilidad .

También utilizaremos estos resultados para relacionar los distintos complejos simpliciales (y los poliedros correspondientes) que se le pueden asignar a un cubrimiento de un espacio topológico (pág. 47), siguiendo las ideas que Abels y Holz desarrollan en un trabajo de los años 90 ([A-H]).

A fines de los 90, A. Bak introdujo el concepto de acción global para describir y analizar en forma puramente algebraica los grupos de K-teoría de un anillo R, sin necesidad de toda la maquinaria topológica que se usa comúnmente. Unos años después, Bak, Brown, Minian y Porter generalizaron la idea original de Bak e introdujeron los atlas de grupoides. La teoría de homotopía para atlas de grupoides tiene aplicaciones a la teoría de homotopía clásica, a los complejos simpliciales, a la K-teoría e incluso, en los últimos tiempos, comenzó a ser utilizada para modelar problemas provenientes de la computación.

Mostraremos en esta tesis cómo se relacionan los espacios clasificantes con los atlas de grupoides y los nervios de los cubrimientos de espacios topológicos. Introducimos aquí la idea de nervios y espacios clasificantes de atlas (pág. 59). Estas ideas son utilizadas en un trabajo en preparación sobre complejos simpliciales, atlas y homología [dH-M].

La tesis está organizada de la siguiente forma.

La primera sección es introductoria y sirve más que nada para fijar las notaciones que utilizaremos a lo largo del trabajo.

La sección 2 trata sobre conjuntos simpliciales. Estudiamos aquí las nociones, ejemplos y resultados más conocidos sobre este tema, y damos algunas demostraciones más detalladas y otras alternativas de las que se se encuentran habitualmente en la bibliografía (pág. 20 y 21). Al final de esta sección estudiamos los espacios de Kelley para probar la relación entre la realización geométrica de conjuntos simpliciales y el producto (pág. 23).

La sección 3 es, quizás, la más importante de esta tesis. Estudiamos la noción de espacios clasificantes y probaremos dos de los teoremas más importantes al respecto: el primero de éstos relaciona el grupo fundamental del espacio clasificante de una categoría con el grupo de automorfismos del grupoide que se obtiene invirtiendo formalmente todas las flechas de la categoría. Este resultado se encuentra originalmente en el paper [Q]. La demostración que ahí se expone tiene algunos puntos un tanto oscuros, y varias de las excelentes ideas que se proponen en ese paper no están del todo desarrolladas. La demostración que damos aquí intenta llenar todos los huecos que deja la demostración original, utilizando para esto varios resultados de Gabriel y Zisman [G-Z]. El otro resultado importante que probamos en detalle en esta sección es el famoso Teorema A de Quillen. Veremos algunas aplicaciones de este teorema y mostraremos al final cómo se relaciona este resultado con las fibraciones de Grothendieck.

En la sección 4 analizaremos los poliedros asociados a un cubrimiento de un espacio. Nos basamos principalemente en un paper de Abels y Holz [A-H] pero las demostraciones que aquí exponemos son distintas y en algunos casos más generales que las que se encuentran en ese trabajo.

En la última sección trabajaremos con las acciones globales y los atlas de grupoides introducidos por Bak, Brown, Minian y Porter. Veremos cómo poder definir el grupo fundamental de un atlas y su relación con los complejos simpliciales. Al final de esta sección introducimos las nociones de nervios y espacios clasificantes de atlas. Las construcciones y resultados que introducimos aquí se utilizarán para calcular la homología de estos objetos y compararla con las teoría clásica de homología simplicial [dH-M].

Quiero decir gracias.

A Luis del Hoyo y Graciela Juno, mi papá y mi mamá, los principales culpables de que hoy esté acá.

A Valeria, Facundo y Rocío. A Analía. A mis amigos. La vida es más agradable con ellos cerca.

A quienes se esforzaron por transmitirme algo de lo mucho que saben. Roberto García Simón, Cristina Roserau, Flora Gutierrez, Patricia Fauring, Martín Avendaño, Svetoslav Savchev, Carlos Sánchez, Eduardo Dubuc. (in order of apearance)

A los que me estoy olvidando de nombrar.

A toda la gente de la Olimpíada Matemática Argentina. Allí formé el gusto que hoy siento por hacer matemática.

A la Fundación Bernardo Houssay. A la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. A Francisco Martinez Lloydi, en representación del CGPQ.

Un especial agradecimiento a Gabriel Minian. Por haberme guiado en la preparación de esta tesis, por haber puesto paciencia en enseñarme tanto como he podido aprender, y porque su entusiasmo, dedicación y compromiso han sabido contagiarme de las ganas necesarias para seguir "contando agujeros" por mucho tiempo más.

Matías

1 Preliminares

En esta sección haré una revisión de conceptos básicos sobre teoría de categorías que utilizaré durante el trabajo, con el doble propósito de fijar notación y como referencia para las próximas secciones si fuera necesario.

Recordemos que una categoría C consiste en una clase de objetos $Obj\ C$ y para cada par de objetos X, Y un conjunto de flechas o morfismos $[X, Y]$ (también denotado $Hom(X, Y)$), junto con una regla de composición $[X, Y] \times [Y, Z] \xrightarrow{\circ} [X, Z]$ que es asociativa y tiene elemento neutro $id_X \in [X, X]$ para todo X en C.

Otra forma de pensar o definir una categoría es considerando $Obj\ C$ y $Fl\ C$ como conjuntos o tipos de variables dotados de una operacion binaria parcial $\circ : Fl \times Fl \to Fl$ y operaciones unarias $\partial_0, \partial_1 : Fl \to Obj$ (codominio y dominio), $id : Obj \to Fl$ que satisfacen las relaciones esperadas.

$$Fl \widetilde{\times} Fl \xrightarrow{\circ} Fl \underset{\underset{id}{\curvearrowleft}}{\overset{\partial_1}{\rightrightarrows}} Obj \quad \partial_0$$

La composición $\circ$ está definida sobre el pull-back $Fl \widetilde{\times} Fl$ entre ∂_0 y ∂_1, como se ve en la demostración de la proposición 1.3.

Observemos que toda la información de C esta contenida en el diagrama anterior.

Algunas de las categorías con las que trabajaré son

- $(\mathcal{S}et)$ la categoría de conjuntos y funciones,
- $(\mathcal{T}op)$ la de espacios topológicos y funciones continuas,
- $(\mathcal{P}oSet)$ la de conjuntos parcialmente ordenados y morfismos de orden,
- $(\mathcal{G}r)$ grupos y morfismos de grupos,
- $(\mathcal{A}b)$ la categoría de grupos abelianos,
- $(\mathcal{C}at)$ la categoría de categorías pequeñas (aquellas cuyos objetos forman un conjunto) y funtores, y
- $(\mathcal{SS}et)$ la de conjuntos simpliciales y morfismos simpliciales, que definiré en la próxima sección.

Dado $(I, \leqslant)$ conjunto parcialmente ordenado, podemos pensar a I como una categoría cuyos objetos son los elementos de I, y dados $x, y \in I$ definimos $[x, y] = \begin{cases} * & \text{si } x \leqslant y \\ \emptyset & \text{si } x \not\leqslant y \end{cases}$. Las identidades y las composiciones existen y funcionan por las propiedades reflexiva y transitiva de $\leqslant$.

Notamos con C^{op} la categoría opuesta a C, que tiene los mismos objetos y las flechas en sentido inverso.

Dadas C y D categorías, recordemos que un **funtor** $F : C \to D$ es una asignación que a cada objeto X en C le hace corresponder un objeto $F(X)$ en D, y a cada flecha $f : X \to Y$ otra $F(f) : F(X) \to F(Y)$ respetando las identidades y las composiciones. Si F manda morfismos $f : X \to Y$ a morfismos $F(f) : F(Y) \to F(X)$ el funtor se dice **contravariante**. Observemos que $F : C \to D$ contravariante se puede ver como un funtor (covariante) $F : C^{op} \to D$.

Una **transformación natural** es un "morfismo entre funtores". Dados $F, G : C \to D$ funtores, una transformación natural $\eta : F \Rightarrow G$ da una flecha $F(X) \xrightarrow{\eta_X} G(X)$ para cada X en C de forma tal que si $f \in Fl\ C$, $X \xrightarrow{f} Y$, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_X} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Y} \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Las transformaciones naturales se componen de forma canónica. Si $F, G, H : C \to D$, $\eta : F \Rightarrow G$ y $\epsilon : G \Rightarrow H$, entonces $\epsilon \circ \eta : F \Rightarrow H$ donde $(\epsilon \circ \eta)_X := \epsilon_X \circ \eta_X$. Además, $id : F \Rightarrow F$ es una transformación natural. Luego se tiene una nueva categoría cuyos objetos son los funtores $F : C \to D$ y cuyas flechas son las transformaciones naturales. A esta categoría la notaremos $\mathbf{D^C}$.

1.1 Observación. Según nuestra definición de categoría, el hecho de que D^C sea una categoría queda sujeto a la condición de que para cada par de funtores $F, G : C \to D$, las transformaciones naturales $\eta : F \Rightarrow G$ formen un conjunto. Esto sucede, por ejemplo, si C es una categoría pequeña. En esta tesis siempre trabajaremos bajo estas condiciones.

Los casos en los que estas transformaciones naturales formen una clase (y no un conjunto) deben ser tratados con más detalle.

Límites y Colímites

Los límites y colímites son construcciones universales dentro de una categoría, con las cuales se trabaja comunmente. Por ejemplo, la topología producto es un límite; los cocientes, la unión disjunta de conjuntos o la suma directa de módulos sobre un anillo son colímites. Para fijar notación, formalizar la idea e identificar los conceptos es que reveemos la siguiente

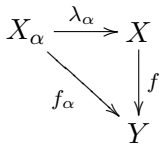
Definición. Un **sistema** es la imagen de un funtor $\Gamma \to C$, donde Γ es la categoría de índices del sistema.

Un **cono** del sistema $\Gamma \to C$, $\alpha \mapsto X_\alpha$ es un objeto $Y \in C$ y flechas $f_\alpha : X(\alpha) = X_\alpha \to Y$ $(\alpha \in \Gamma)$ tal que $\forall\ \alpha \xrightarrow{\varphi} \beta \in \Gamma,\ f_\beta \circ X_\varphi = f_\alpha$.

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & Y \\ {\scriptstyle X_\varphi}\downarrow & \nearrow_{f_\beta} & \\ X_\beta & & \end{array}$$

Un cono es un objeto coherente con el sistema.

El **colímite** del sistema $\Gamma \to C$ es un cono $(\{\lambda_\alpha\}, X)$ con la siguiente propiedad universal.
Para todo $(\{f_\alpha\}, Y)$ cono, $\exists!\ f : X \to Y$ tal que $f_\alpha = f \circ \lambda_\alpha$.



Llamamos $\underset{\Gamma}{colim}\ X_\alpha$ a X.

El colímite es el objeto inicial de la categoría de conos. Observemos que el colímite de un sistema dado puede no existir.

Observación importante: En $\mathcal{S}et$ todos los colímites existen, y se calculan como un cociente de la unión disjunta de los conjuntos del sistema.

En el sigiente cuadro se pueden ver qué categoría de índices corresponden a los colímites usuales

coproducto	$* \ *$
objeto inicial	$\emptyset$
push out	$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$
coegalizador	$* \rightrightarrows *$

Las definiciones para límites son todas análogas: Dado un sistema $\Gamma \xrightarrow{X} C$, consideramos ahora los conos $(\{g_\alpha\}, Y)$ con $g_\alpha : Y \to X_\alpha$. El **límite** $(\{\pi_\alpha\}, X)$ es el cono que satisface
Para todo $(\{g_\alpha\}, Y)$ cono, $\exists!\ g : Y \to X$ tal que $g_\alpha = \pi_\alpha \circ g$.

Observación importante dual: En $\mathcal{S}et$ todos los límites existen, y se calculan como un subconjunto del producto cartesiano de los objetos del sistema.

Colímites Filtrantes

Dado $I \in \mathcal{P}oSet$, se dice que I es **dirigido** si $\forall\ \alpha, \beta \in I\ \exists\ \gamma \in I\ /\ \alpha \leqslant \gamma, \beta \leqslant \gamma$. La noción de categoría filtrante en algún modo generaliza este concepto:

Definición. Una categoría I es **filtrante** si

(a) Para todo par de objetos $\alpha, \beta \in I$ existen $\gamma \in I, \varphi : \alpha \to \gamma, \psi : \beta \to \gamma$.

(b) Dados φ, ψ, $\alpha \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} \beta$, existen $\gamma \in I,\ \tau : \beta \to \gamma$ tales que $\tau \circ \varphi = \tau \circ \psi$

Un colímite se dirá filtrante si su categoría de índices lo es.
Una propiedad interesante que tienen los colímites filtrantes (pero no en general los arbitrarios) es que preservan las estructuras algebraicas de los objetos del sistema. El motivo es que un colímite filtrante de conjuntos $X = \underset{\Gamma}{colim}\ X_\alpha$, está caracterizado por las siguientes propiedades.

i) Todo elemento de X está representado en algún X_α pues, como dijimos antes, un colímite en $\mathcal{S}et$ cumple que $X = \coprod X_\alpha\ /\sim$.

ii) Dos elementos son iguales en el colímite sólo si ya lo eran en algún X_γ. Notando con (f, α) un elemento cualquiera de X_α,

$$(f,\alpha) \sim (g,\beta) \Rightarrow \exists\ \gamma,\ \alpha \xrightarrow{\varphi} \gamma, \beta \xrightarrow{\psi} \gamma \text{ tales que } (X_\varphi(f),\gamma) = (X_\psi(g),\gamma)$$

Quizás el ejemplo de colímite filtrante más significativo sea el de los gérmenes de funciones continuas en un punto. Dado X espacio topológico, p un punto en X, los entornos abiertos de p con el orden inverso al que da la inclusión forman un conjunto dirigido (por lo tanto inducen una categoría filtrante). Para cada U entorno abierto de p consideramos el conjunto $C(U,\mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R}\ /\ f \text{ es continua}\}$. El funtor $U \mapsto C(U,\mathbb{R})$ es un sistema filtrante. El colímite $\mathcal{F}_p = \underset{U}{colim}\ C(U,\mathbb{R})$ es el **germen de funciones continuas** en p.

Como es bien sabido, $\mathcal{F}_p$ hereda estructura de anillo de los $C(U,\mathbb{R})$, que son anillos con la suma y producto de funciones punto a punto. Para sumar o multiplicar dos clases (f,α), (g,β) basta con tomar un γ "mayor" que α y β y operar en $C(U_\gamma,\mathbb{R})$.

Observemos que al agrandar el índice γ lo que se está haciendo en realidad es probar que el colímite filtrante conmuta con productos. Así, la suma y el producto de los anillos $C(U_\alpha,\mathbb{R})$, que tienen dominio en $C(U_\alpha,\mathbb{R}) \times C(U_\alpha,\mathbb{R})$, inducen operaciones

$$\mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_p = \underset{U}{colim}\ C(U,\mathbb{R}) \times \underset{U}{colim}\ C(U,\mathbb{R}) \to \mathcal{F}_p$$

Agrandando el índice γ en forma similar se prueba la siguiente proposición.

1.2 Proposición. *En $\mathcal{S}et$, los colímites filtrantes conmutan con los límites finitos.*

La siguiente proposición no sólo nos garantiza la existencia de colímites filtrantes en $\mathcal{C}at$. En su demostración construiremos el colímite de un sistema dado, obteniendo una caracterización que nos será de utilidad en las próximas secciones

1.3 Proposición. *Sea $\Gamma \to \mathcal{C}at$ sistema filtrante. Entonces existe el colímite $\underset{\Gamma}{colim}\ C_\alpha$.*

Demostración. Dado $\Gamma \to \mathcal{C}at$, $\alpha \mapsto C_\alpha$ sistema filtrante, construyamos la categoría colímite C definiendo cuáles son sus objetos, flechas y composición.

Sea $Obj\ C = \underset{\Gamma}{colim}\ Obj\ C_\alpha$ y $Fl\ C = \underset{\Gamma}{colim}\ Fl\ C_\alpha$ (existen por ser colímites en $\mathcal{S}et$). Sean λ_α las inclusiones $Obj\ C_\alpha \to Obj\ C$. Por propiedad universal quedan definidas

$Fl\ C \underset{\partial_0}{\overset{\partial_1}{\rightrightarrows}} Obj\ C$ como las funciones que factorizan los conos $(\{\lambda_\alpha \circ (\partial_0)_\alpha\}, Obj\ C)$ y $(\{\lambda_\alpha \circ (\partial_1)_\alpha\}, Obj\ C)$.

Análogamente se tiene $id : Obj\ C \to Fl\ C$.

La composición tiene dominio en el producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} Fl \widetilde{\times} Fl & \xrightarrow{\pi_1} & Fl \\ {\scriptstyle \pi_2}\downarrow & \text{PULL} & \downarrow{\scriptstyle \partial_0} \\ Fl & \xrightarrow[\partial_1]{} & Obj \end{array}$$

pues dos flechas se componen sólo si la primera termina donde empieza la segunda.

Luego, por la proposición 1.2 el pull-back $Fl\ C \widetilde{\times} Fl\ C$ es el colímite de los $Fl\ C_\alpha \widetilde{\times} Fl\ C_\alpha$, y las composiciones $\{\circ_\alpha\}_\alpha$ inducen entonces una composición $\circ$ en C compatible con ∂_0, ∂_1 e id. □

Adjunción

Dados F, G funtores entre C y D, $C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$, notaré $F \dashv G$ si F es **adjunto** a izquierda de G, es decir, cuando se tenga una biyección natural

$$[F(X), Y]_D \xrightarrow{\varphi_X^Y} [X, G(Y)]_C$$

para cada $X \in C$, $Y \in D$. En este caso G será adjunto a derecha de F.
Recordemos que $F \dashv G$ equivale a que existan $\eta : id_C \Rightarrow GF$, $\epsilon : FG \Rightarrow id_D$ tales que

$$\epsilon_{FX} \circ F(\eta_X) = id_{FX},\ G(\epsilon_Y) \circ \eta_{GY} = id_{GY}$$

pues las biyecciones φ_X^Y, al ser naturales en las dos variables, quedan definidas por el valor que toma φ_X^{FX} en id_{FX}.

1.4 Ejemplo. Como ejemplo particular podemos nombrar la adjunción

$$(-) \times [0,1] \dashv (-)^{[0,1]}$$

que existe entre el funtor "cilindro" y el funtor "espacio de caminos" en $\mathcal{T}op$, o más en general, cambiando el espacio $[0,1]$ por otro localmente compacto y Hausdorff (condiciones suficientes para que la topología compacto-abierta satisfaga la ley exponencial).

Si bien los funtores adjuntos no brindan una equivalencia entre las categorías, preservan mucha de la información. El siguiente es un resultado conocido, que se puede leer en [ML], del cual no daré demostración.

1.5 Teorema. *Sean $C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$, con $F \dashv G$. Entonces F preserva colímites y G preserva límites.*

Lema de Yoneda

$Hom : C^{op} \times C \to \mathcal{S}et$ es un bifuntor, es decir, un funtor de dos variables. Fijando la segunda coordenada se puede relacionar a cada objeto X de C con el funtor

$$\begin{aligned}[-, X] : C^{op} &\to \mathcal{S}et \\ Y &\mapsto [Y, X] \\ f &\mapsto f^*\end{aligned}$$

donde $f^*(g) = g \circ f$.

El funtor $[-, X]$ es el funtor representado por X. Se dice que un funtor $F : C^{op} \to \mathcal{S}et$ es **representable** si existe $X \in C$ tal que $F = [-, X]$.

Si la categoría C tiene coproductos, dado X en C, para cada conjunto B llamamos $\coprod_B X$ al coproducto de tantas copias de X como elementos tenga B. Esta construcción es funtorial en B: a la función de conjuntos $B \xrightarrow{\varphi} B'$ le corresponde el morfismo $\coprod_{b \in B} inc_{\varphi(b)}$ que incluye la copia b-ésima de X en el lugar $\varphi(b)$. Llamemos $\coprod_{(-)} X$ a este funtor.

1.6 Proposición. *Si C tiene coproductos, los funtores representables transforman colímites en límites.*

Demostración. Que $\coprod_{(-)} X \dashv [X, -]$ vale pues dado $B \in \mathcal{S}et$, $Y \in C$, una función f en $[B, [X, Y]_C]_{\mathcal{S}et}$ es lo mismo que elegir un elemento $f(b)$ de $[X, Y]_C$ por cada elemento $b \in B$. Esto a su vez equivale a tener un morfismo $\coprod_{b \in B} f(b) \in [\coprod_B X, Y]_C$ por la propiedad universal del coproducto.

Luego, por el teorema 1.5, $[X, -]$ preserva límites y, como $[-, X]_C = [X, -]_{C^{op}}$, los funtores representables transforman colímites (i.e. límites de C^{op}) en límites. □

Asignando a cada X su representable se tiene un funtor

$$\begin{aligned}C &\to \mathcal{S}et^{C^{op}} \\ X &\mapsto [-, X] \\ g &\mapsto g_*\end{aligned}$$

donde $g_*(h) = g \circ h$.

El **Lema de Yoneda** en su versión débil nos dice que dado $F : C^{op} \to \mathcal{S}et$ y X en C, existe una biyección natural entre las transformaciones naturales de $[-, X]$ a F y el conjunto $F(X)$.

$\eta : [-, X] \Rightarrow F$ puede asociarse con $x = \eta_X(id_X) \in FX$. Así, a cada $x \in FX$ le corresponde la transformación natural $\eta^x : [-, X] \Rightarrow F$ definida por la fórmula
$\eta^x_Y(g) = F(g)(x)$ para cada $Y \in C,\ g \in [Y, X]$.

$$\boxed{[-, X] \xrightarrow{\eta} F \leftrightsquigarrow x \in FX}$$

Ver que estas aplicaciones son mutuamente inversas no requiere más que una simple verificación.

1.7 Definición. Se define Γ_F el **diagrama** de F como la categoría de pares (X, x) con $X \in C$ y $x \in FX$, donde las flechas estan dadas por

$$Hom_{\Gamma_F}((X,x),(Y,y)) = \{g \ / \ g \in Hom_C(X,Y),\ F(g)(y) = x\}$$

Enunciemos entonces el lema de Yoneda.

1.8 Teorema. $F = \underset{\Gamma_F}{colim}\ [-, X]$

Demostración. Para su demostración basta con observar que F es el cono universal. Esto sucede porque Γ_F ya contiene todos los datos de F. Definir un cono $(\{\eta_{(X,x)}\}_{(X,x)\in\Gamma_F}, G)$ del sistema equivale tautológicamente a tomar $y \in G(X)$ para cada $(X, x) \in \Gamma_F$, por lo que se tiene $\eta : F \to G$ transformación natural definida de forma única para que el diagrama conmute (η manda $x \in FX$ a $y = y(X, x) \in GX$). □

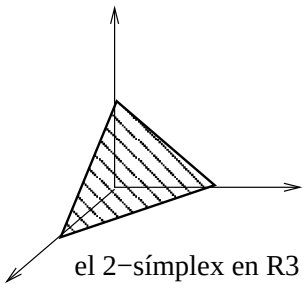
En algún sentido el lema de Yoneda nos dice que C es denso en $\mathcal{S}et^{C^{op}}$, pues cualquier objeto de esta categoría se puede obtener como colímite de representables. Se puede pensar a $\mathcal{S}et^{C^{op}}$ como una completación de C: tiene todos los límites y colímites (se calculan lugar a lugar).

2 Conjuntos Simpliciales

En esta sección desarrollaremos un estudio detallado sobre las propiedades básicas de los conjuntos simpliciales. Además, explicaremos las construcciones para el nervio de un grupo y de una categoría, y comentaremos la realización geométrica de un conjunto simplicial en general. Con el fin de complementar este estudio, también repasaremos brevemente las definiciones y principales características de los complejos simpliciales, los CW-complejos y los espacios de Kelley.

Los conjuntos simpliciales modelan ciertos espacios topológicos que se pueden formar pegando símplices de distintas dimensiones. El n-símplex topológico Δ^n es el subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \ x_i \geq 0 \ \forall \ i, \ \sum x_i = 1\}$$



Estos símplices se relacionan por las siguientes inclusiones en las caras y proyecciones sobre ellas.

$$\partial_i : \Delta^n \to \Delta^{n+1} \qquad \partial_i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, \underset{i}{0}, \ldots, x_n)$$
$$\sigma_j : \Delta^n \to \Delta^{n-1} \qquad \sigma_j(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_j + x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

Todo ésto motiva la siguiente definición.

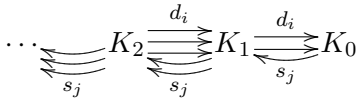
2.1 Definición. Un **conjunto simplicial** es una familia de conjuntos $\{K_n\}_{n \geqslant 0}$ y aplicaciones

$$d_i : K_n \to K_{n-1} \quad \text{(caras)}$$
$$s_j : K_n \to K_{n+1} \quad \text{(degeneraciones)}$$

para todo $0 \leqslant i, j \leqslant n$, que satisfacen las siguientes identidades simpliciales (duales a las que satisfacen las ∂_i y las σ_j):

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_i s_j = id & \text{si } i = j, j+1 \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & \text{si } i > j+1 \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \text{si } i \leqslant j \end{cases}$$

Esquemáticamente, K lo vemos así



Los elementos de K_n se llaman **n-símplices**. Un símplex se dice **degenerado** si está en la imagen de algún s_j. Si K, L son dos conjuntos simpliciales, un **morfismo simplicial** $f : K \to L$ es una familia de funciones $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ tales que $f_n : K_n \to L_n$ y conmutan con los d_i y con los s_j. Es decir

$$f_n \circ d_i = d_i \circ f_{n+1}$$

$$f_n \circ s_j = s_j \circ f_{n-1}$$

LLamaremos $\mathcal{SS}et$ a la categoría de conjuntos simpliciales y morfismos simpliciales.

2.2 Ejemplo. Dado un espacio topológico X, se define el conjunto simplicial $S(X)$ de la siguiente forma:

$$S_n(X) = \{\ \Delta^n \xrightarrow{f} X\ /\ f \text{ continua}\}$$

Luego se definen $d_i = \partial_i^*$ y $s_j = \sigma_j^*$.
Es fácil ver que se satisfacen las identidades simpliciales. $(S(X), d_i, s_j)$ es el **conjunto simplicial singular** de X.

Otro ejemplo importante de $\mathcal{SS}et$ es el inducido por un complejo simplicial. Repasemos primero algunos aspectos básicos al respecto. Un estudio bien detallado de los complejos simpliciales y poliedros se puede leer en [Sp].

Recordemos que un **complejo simplicial** K consta de un conjunto de **vértices** V_K, y de S_K una colección de subconjuntos finitos de V_K, cuyos elementos se llaman **símplices**, tales que

(a) Si $x \in V_K,\ \{x\} \in S_K$.

(b) Si $\sigma \in S_K$ y $\tau \subset \sigma$ entonces $\tau \in S_K$.

Una función $f : V_K \to V_L$ es un **morfismo simplicial** entre K y L si $f(\sigma)$ es un símplex en L para todo símplex $\sigma \in K$.

Cada complejo simplicial K tiene asociado un espacio topológico $|K|$, llamado **realización geométrica** de K.

$|K|$ es el conjunto de funciones $\alpha : V_K \to [0,1]$ tales que $\{v \mid \alpha(v) \neq 0\}$ es un símplex de K y $\sum_{v\in V_K} \alpha(v) = 1$. Observemos que, en particular, el soporte de α es finito.
Si s es un símplex de K, definimos el conjunto $|s| \subset |K|$ como

$$|s| = \{\alpha \in |K|,\ \alpha(v) = 0\ \forall\ v \notin s\}.$$

Se le da a $|s|$ la topología inducida por la métrica $d(\alpha,\beta)=\sqrt{\sum_v(\alpha(v)-\beta(v))^2}$, con lo cual $|s|$ queda homeomorfo a Δ^n. Y a $|K|$ se le da la topología coherente (final) respecto a todos sus símplices. Explícitamente,

$$A\subset|K| \text{ es abierto (resp. cerrado) } \Leftrightarrow A\cap|s| \text{ es abierto (resp. cerrado) en } |s|\ \forall\ s\in K.$$

Una **triangulación** de un espacio X es un par (K,f) con K complejo simplicial y $f:|K|\to X$ un homeomorfismo. Un **poliedro** es un espacio X que admite alguna triangulación. Observar que un poliedro puede admitir varias triangulaciones diferentes.

Las esferas, los discos, el toro, $\mathbb{R}^n$ y los espacios proyectivos son ejemplos de poliedros.

Pasemos entonces al ejemplo antes mencionado.

2.3 Ejemplo. Dado un complejo simplicial K, sea $\leqslant$ un orden total entre los vértices de K. Definimos

$$\widetilde{K}_n=\{(x_0,\dots,x_n)/\ x_i \text{ vértice de } K,\ x_i\leqslant x_j \text{ si } i\leqslant j \text{ y } \{x_0,\dots,x_n\} \text{ símplex en } K\}$$

y

$$\begin{aligned} d_i&:\widetilde{K}_n\to\widetilde{K}_{n-1} & d_i(x_0,\dots,x_n)&=(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)\\ s_j&:\widetilde{K}_n\to\widetilde{K}_{n+1} & s_j(x_0,\dots,x_n)&=(x_0,\dots,x_j,x_j,\dots,x_n)\end{aligned}$$

$\widetilde{K}=(\{\widetilde{K}_n\},d_i,s_j)$ es un conjunto simplicial con exactamente un n-símplex no degenerado por cada n-símplex de K.

Observemos que para la construcción de $\widetilde{K}$ no es necesario un orden total entre los vértices de K: alcanza con tener un orden total $\leqslant_\sigma$ entre los vértices de σ para cada símplex σ, de forma coherente (i.e. si $\sigma\subset\tau$ entonces $\leqslant_\tau|_\sigma=\leqslant_\sigma$).

2.4 Observación. Las dos construcciones anteriores son funtoriales.

Nervio de una categoría

Dada una categoría C, definimos NC, el nervio de C, como el conjunto simplicial cuyos símplices son

$$NC_n=\{X_0\xrightarrow{f_1}\dots\xrightarrow{f_n}X_n=(f_1,\dots,f_n)\ \text{ cadenas de } n \text{ flechas componibles en } C\}$$

y donde las caras y degeneraciones están definidas como sigue:

$$d_i(f_1,\dots,f_n)=\begin{cases}(f_2,\dots,f_n) & \text{si } i=0\\ (f_1,\dots,f_{i+1}\circ f_i,\dots,f_n) & \text{si } 0<i<n\\ (f_1,\dots,f_{n-1}) & \text{si } i=n\end{cases}$$
$$s_j(f_1,\dots,f_n)=(f_1,\dots,id_{X_i},\dots,f_n)$$

La cara d_i quita el objeto X_i (componiendo $f_{i+1}\circ f_i$) y la degeneración s_j repite el X_j.

Se tiene $Obj\ C = NC_0$ y $Fl\ C = NC_1$.
Además, la identidad, la composición y las funciones de dominio y codominio aparecen entre los morfismos d_i y s_j de NC. Luego se puede reconstruir C a partir de su nervio, pues éste contiene todos los datos de la categoría.

2.5 Observación. $NC_n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(\underline{\mathbf{n}}, C)$ donde $\underline{\mathbf{n}}$ es la categoría asociada al conjunto totalmente ordenado de n elementos, es decir,

$$\underline{\mathbf{n}} = \{0 \to 1 \to 2 \to \ldots \to n\}$$

Nervio de un grupo

Dado un grupo G, vemos a G como una categoría (grupoide) con un único objeto $*$ y con $\mathrm{Hom}(*,*) = G$. Al nervio de esta categoría se lo llama NG y haremos referencia a él como el **nervio del grupo** G. Más adelante veremos se tiene una asignación funtorial $K \to |K|$ que a cada conjunto simplicial le da su realización geométrica ($\in \mathcal{T}op$). NG será entonces un espacio de Eilenberg - Mac Lane del tipo $(G, 1)$, es decir, un $K(G, 1)$.

A partir de la observación 2.5 sigue otra forma de definir conjuntos simpliciales, de mucha utilidad en la práctica:

2.6 Definición Equivalente. Se define Δ como la categoría de los ordinales finitos y morfismos de orden.

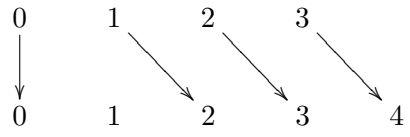
$$Obj\ \Delta = \{\ \underline{\mathbf{n}} = \{0 < \cdots < n\},\ n \geqslant 0\}$$
$$Fl\ \Delta = \{\ \underline{\mathbf{m}} \xrightarrow{f} \underline{\mathbf{n}}\ /\ i \leqslant j \Rightarrow fi \leqslant fj\}$$

Un **conjunto simplicial** es un funtor $K : \Delta^{op} \to \mathcal{S}et$.

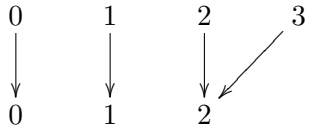
Notar que esto equivale a tomar un conjunto para cada $\underline{\mathbf{n}}$ y funciones que vienen inducidas por los morfismos en Δ.

No es difícil ver que todo morfismo de Δ se puede obtener como composición de los siguientes dos tipos de morfismos [Ma1]:

(a) $\partial_i : \underline{\mathbf{n-1}} \to \underline{\mathbf{n}}$ saltea el $i \in \underline{\mathbf{n}}$.
Ejemplo: $n = 4, i = 1$



(b) $\sigma_j : \underline{\mathbf{n+1}} \to \underline{\mathbf{n}}$ repite el $j \in \underline{\mathbf{n}}$.
Ejemplo: $n = 2, j = 2$



Por lo tanto para definir un funtor $\Delta^{op} \xrightarrow{K} \mathcal{S}et$ basta con definir $K_n = K(\underline{\mathbf{n}})$, $d_i = K(\partial_i)$ y $s_j = K(\sigma_j)$, donde d_i y s_j satisfacen propiedades duales a las de ∂_i y σ_j (i.e. satisfacen las identidades simpliciales).

Bajo esta definición, un morfismo simplicial entre K y L equivale a una transformación natural $\eta : K \Rightarrow L$. Luego, $\mathcal{SS}et = \mathcal{S}et^{\Delta^{op}}$.

Esta nueva definición permite generalizar la noción de conjunto simplicial a la de un objeto simplicial cualquiera, donde cambiamos $\mathcal{S}et$ por otra categoría.

2.7 Ejemplo/Definición. Un **espacio simplicial** es un funtor $\Delta^{op} \to \mathcal{T}op$.

Dado un conjunto simplicial K uno puede construir un grupo abeliano simplicial $\mathbb{Z}K$ donde $\mathbb{Z}K_n$ es el grupo abeliano libre generado por K_n. $\mathbb{Z}K$ tiene asociado un complejo de cadenas, llamado **complejo de Moore** y también notado $\mathbb{Z}K$, donde el morfismo de borde ∂ viene dado por $\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$.

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}K_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}K_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}K_0$$

Notar que los grupos de homología singular $H_*(X, \mathbb{Z})$ de un espacio topológico X están definidos como los grupos de homología del complejo de cadenas $\mathbb{Z}S(X)$, donde $S(X)$ es el complejo simplicial singular del espacio X.

A continuación presentaré algunas construcciones básicas en $\mathcal{SS}et$:

2.8 Definición.

1) El n-símplex estándar $\Delta[n]$ en $\mathcal{SS}et$ es el funtor representable

$$\Delta^{op} \xrightarrow{[-,\underline{\mathbf{n}}]} \mathcal{S}et$$

El lema de Yoneda dice que tener un morfismo simplicial entre $\Delta[n]$ y K es lo mismo que elegir un n-símplex de K, i. e. existe una biyección natural

$$Hom_{\mathcal{SS}et}(\Delta[n], K) \cong K_n$$

Visto de otro modo, $\Delta[n]$ es el conjunto simplicial generado por un único n-símplex no degenerado, $x = id_{\underline{\mathbf{n}}}$. El diagrama muestra algunos símpices de $\Delta[n]$ ordenados según la dimensión.

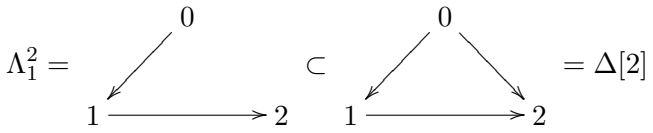
$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & s_j\, x & & x & d_i\, x & d_i d_k\, x & \ldots \\ & & & d_i s_j\, x & & & \end{array}$$

2) $\partial\Delta[n]$ (o borde de $\Delta[n]$) es el menor subconjunto simplicial de $\Delta[n]$ que contiene las caras $d_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$, donde x es el generador, $x = id_{\underline{\mathbf{n}}}$. Así,

$$\partial\Delta[n]_j = \begin{cases} \Delta[n]_j & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant n-1 \\ \textit{degeneraciones iteradas de} & \\ \textit{elementos de } \Delta[n]_{n-1} & \text{si } j \geqslant n \end{cases}$$

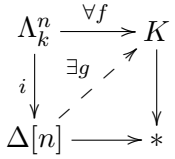
Por convención, $\partial\Delta[0] = \emptyset$.

3) El k-ésimo cuerno $\Lambda^n_k \subset \Delta[n]$ ($n \leqslant 1$) es el subconjunto de $\Delta[n]$ generado por todas las caras de $x = id_{\underline{\mathbf{n}}}$ excepto la k-ésima.
Ejemplo:



2.9 Definición. Un conjunto simplicial K es un **complejo de Kan** si satisface la condición de extensión
"Para toda colección de $n+1$ n-símplices $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}$ que satisfacen la condición de compatibilidad $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i),\ i < j,\ i \neq k, j \neq k$, existe un $(n+1)$-símplex x tal que $d_i(x) = x_i,\ i \neq k$".

Por el lema de Yoneda, ésto es equivalente a que para toda $f : \Lambda^n_k \to K$ exista $g : \Delta[n] \to K$ con $gi = f$.



Observemos que la g no es necesariamente única.

2.10 Lema. *Dado X espacio topológico, SX es complejo de Kan.*

Demostración. La demostración de este lema sigue del hecho de que la unión de n caras del n-símplex topológico Δ^n es un retracto de Δ^n. □

En general, si C es una categoría cualquiera, el nervio NC no es un complejo de Kan. Por ejemplo, si $n = 1$ y $k = 0$, la condión de Kan equivale a que para cada par de flechas $X \xrightarrow{f} Y$ y $X \xrightarrow{g} Y'$, exista (h_1, h_2) 2-símplex en NC tal que $d_1(h_1, h_2) = h_2 \circ h_1 = f$ y $d_2(h_1, h_2) = h_2 = g$. O sea, f se debe factorizar como $g \circ h_1$. Del caso particular en que $Y = X$ y $f = id_X$, sigue que si NC es un complejo de Kan, entonces toda flecha g admite inversa a derecha.
Razonando de la misma forma cuando $n = 1$ y $k = 2$ se llega a que también deben tener inversa a izquierda, por lo tanto toda flecha es inversible y C es un grupoide. Es fácil ver que esta condición, además de necesaria, es suficiente, pues conociendo sólo las caras i y j de un n-símplex $(f_0, \ldots, f_n)$ ya se tienen todas las f_k, salvo quizá f_j (si $j = i+1$), que se puede escribir como $(f_j \circ f_{j-1}) \circ (f_{j-1})^{-1}$. Las condiciones de compatibilidad siguen fácil, teniéndose el siguiente resultado.

2.11 Proposición. *Dada $C \in \mathcal{C}at$, su nervio NC es un complejo de Kan si y sólo si C es un grupoide.*

Es interesante notar que, realizando un razonamiento como en el párrafo anterior para $n = 1$ y $k = 1$, la condición se satisface trivialmente: basta tomar como 2-símplex al par (f, g). En general, aunque C no sea un grupoide, la condición de extensión es válida para $n \geqslant 4$ y k cualquiera, y para $n = 2, 3$ y k distinto de 0 y de n.

El siguiente teorema será usado repetidas veces en lo sucesivo.

2.12 Teorema. *Todo $X \in \mathcal{SS}et$ es el colímite de sus n-símplices*

$$X = \operatorname*{colim}_{\Gamma_X} \Delta[n]$$

donde Γ_X es el diagrama del funtor X (ver 1.7).

Demostración. Es el lema de Yoneda. Recordemos que $X : \Delta^{op} \to \mathcal{S}et$ y que los n-símplices $\Delta[n] : \Delta^{op} \to \mathcal{S}et$ son los funtores representables $[-, \underline{\mathbf{n}}]$. □

Realización Geométrica

Dado K conjunto simplicial, asociamos a él un espacio topológico $|K|$. Lo llamaremos realización geométrica de K y lo definimos de la siguiente manera:

$$|K| = \coprod_{n \geqslant 0} K_n \times \Delta^n \ / \ \sim$$

donde tomamos K_n como espacio topológico discreto, y donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por:

$$\begin{aligned} (d_i k_n, u_{n-1}) &\sim (k_n, \partial_i u_{n-1}) & k_n \in K_n,\ u_{n-1} \in \Delta^{n-1} \\ (s_j k_n, u_{n+1}) &\sim (k_n, \sigma_j u_{n+1}) & k_n \in K_n,\ u_{n+1} \in \Delta^{n+1} \end{aligned}$$

Notamos la clase del elemento (k_n, u_n) como $|k_n, u_n|$.

2.13 Observación. Por definición resulta $|K| = \operatorname*{colim}_{\Gamma_K} \Delta^n$.

2.14 Observación. Esta asignación es funtorial. Dada $f : K \to L$ en $\mathcal{SS}et$, $|f| : |K| \to |L|$ está dada por

$$|f|(|k_n, u_n|) = |f(k_n), u_n|$$

2.15 Observación/Resultado. Volvamos a la construcción hecha en 2.3.
Dado un complejo simplicial K, $|\widetilde{K}|$ es el poliedro inducido por K. Ésto sigue de las definiciones: $|\widetilde{K}| = \coprod_{n \geqslant 0} \widetilde{K_n} \times \Delta^n \ / \sim$ tiene la topología final respecto de las inclusiones de sus símplices $\{k_n\} \times \Delta^n$ pues es un cociente de la unión disjunta, y composición de familias finales es final. Luego, sólo resta por observar que si $s = \{x_0, \ldots, x_n\}$ y $k_n = (x_0, \ldots, x_n)$, los homeomorfismos

$$|s| \to \{k_n\} \times \Delta^n$$

se pegan bien en las intersecciones, por lo que determinan un homeomorfismo $|K| \to |\widetilde{K}|$.

$|K|$ es el espacio que se obtiene de pegar n-símplices, tantos como indiquen los K_n, de acuerdo a como lo indiquen las d_i y las s_j. Pensado de esta forma, un conjunto simplicial no es más que un "modelo para armar" de un espacio topológico, más flexible que los complejos simpliciales.

Veremos que $|K|$ no es cualquier espacio topológico, sino que es un CW-complejo.

Recordemos que un **CW-complejo** X es un espacio con estructura celular, que satisface la propiedad de clausura finita de sus celdas, y tiene la topología débil respecto de ellas (ver [Sw]).
Su n-esqueleto X^n se obtiene a partir de X^{n-1} adjuntándole n-celdas. Es decir, se tiene un push-out de espacios topológicos

$$\begin{array}{ccc} \coprod S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod f_\alpha} & X^{n-1} \\ \downarrow & \text{PUSH} & \downarrow \\ \coprod D^n & \xrightarrow[\coprod g_\alpha]{} & X^n \end{array}$$

Empezando con $X^{-1} = \emptyset$, X es la unión $X = \bigcup_{n \geqslant 0} X^n$ y tiene la topología final respecto de las inclusiones $X^n \hookrightarrow X$.

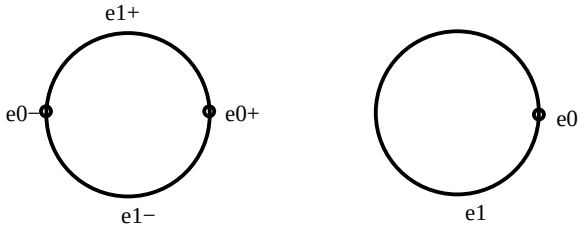
Para cada α, $e_\alpha = g_\alpha(D^n)$ es una **n-celda** de X. El interior de e_α es $e_\alpha^\circ = g_\alpha((D^n)^\circ)$, f_α es la función de adjunción de la celda, y g_α es su función característica, que brinda un homeomorfismo entre el interior de la celda y $(D^n)^\circ$.
Un CW-complejo X puede tener ninguna, finitas o infinitas n-celdas para cada $n \geqslant 0$.

Como ejemplos de CW-complejos mencionemos los siguientes.

2.16 Ejemplos.

(a) S^n es un CW-complejo. Dos estructuras comúnmente usadas son:

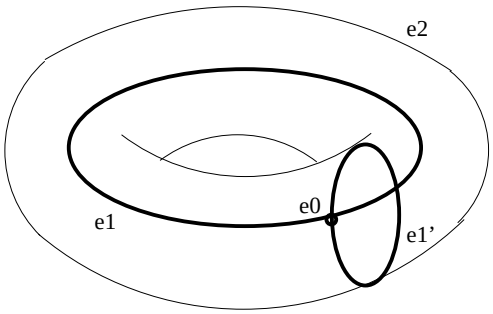
1. Una 0-celda e_0 y una n-celda con función de adjunción constante e igual a e_0.
2. Construímos inductivamente S^{k+1} $\forall\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$. Primero vemos a S^k como el ecuador de S^{k+1} y luego adjuntamos dos k-celdas: los hemisferios norte y sur. Como funciones de adjunción para estas celdas podemos elegir la identidad de S^k. Con esta estructura, S^n tiene dos m-celdas por cada $m \leq n$.



las dos estructuras en la circunferencia

(b) D^n es un CW-complejo, tomando como $(n-1)$-esqueleto S^{n-1} y adjuntando una n-celda via la identidad.

(c) Al toro podemos darle estructura de CW-complejo con una 0-celda (punto), adjuntando luego dos 1-celdas (obteniendo $S^1 \vee S^1$) y finalmente pegando una 2-celda del mismo modo en que comúnmente se construye un toro con una hoja de papel.



estructura celular para el toro

(d) En general, todo poliedro es un CW-complejo, con una n-celda por cada n-símplex.

Hemos definido $S : \mathcal{T}op \to \mathcal{SS}et$ y $|\cdot| : \mathcal{SS}et \to \mathcal{T}op$. Vale la siguiente proposición.

2.17 Proposición. *$|\cdot| \dashv S$, es decir, dado $X \in \mathcal{SS}et$ e $Y \in \mathcal{T}op$, existe una biyección natural*

$$Hom_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \cong Hom_{\mathcal{SS}et}(X, SY)$$

Demostración. Por definición, $|X| = \underset{\Gamma_X}{colim}\ \Delta^n$.
En virtud de 1.6 sigue que $Hom_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) = \underset{\Gamma_X}{lim}\ Hom_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$.
Como una función $\Delta^n \to Y$ en $\mathcal{T}op$ es por definición un elemento de SY_n,

$$Hom_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) = SY_n = Hom_{\mathcal{SS}et}(\Delta[n], SY)$$

Volviendo a aplicar 1.6 y por el teorema 2.12 (lema de Yoneda),

$$\underset{\Gamma_X}{lim}\ Hom_{\mathcal{SS}et}(\Delta[n], SY) \cong Hom_{\mathcal{SS}et}(\underset{\Gamma_X}{colim}\ \Delta[n], SY) = Hom_{\mathcal{SS}et}(X, SY)$$

Luego de una sencilla verificación queda probado que esta biyección es natural. El isomorfismo $Hom_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \xrightarrow{\varphi} Hom_{\mathcal{SS}et}(X, SY)$ está dado por la fórmula

$$\varphi(g)(k_n)(u_n) = g|k_n, u_n| \quad \forall\ k_n \in X_n,\ u_n \in \Delta^n$$

□

Definamos el **n-esqueleto** sk_nK de K como el subconjunto simplicial generado por los símplices de grado $\leqslant n$. Por ejemplo, el $(n-1)$-esqueleto de $\Delta[n]$ es $\partial\Delta[n]$. Se dice que K tiene dimensión d si tiene al menos un d-símplex no degenerado y todos sus n-símplices son degenerados para $n > d$. Así,

$$dim(K) \leqslant d \Leftrightarrow K = sk_dK.$$

Resulta $K = \bigcup_{n \geqslant 0} sk_nK$. Luego veremos que las realizaciones geométricas de los n-esqueletos son cerrados en $|K|$, y que generan su topología. Antes, enunciemos el siguiente lema, consecuencia de que en $\mathcal{S}et^{C^{op}}$ los colímites se calculan lugar a lugar.

2.18 Lema. *El siguiente diagrama es un push-out en $\mathcal{SS}et$:*

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\substack{x\in K_n \\ x \text{ no deg.}}} \partial\Delta[n] & \longrightarrow & sk_{n-1}K \\ \downarrow & \text{PUSH} & \downarrow \\ \coprod_{\substack{x\in K_n \\ x \text{ no deg.}}} \Delta[n] & \longrightarrow & sk_nK \end{array}$$

donde las flechas horizontales son los morfismos que inducen los símplices x (lema de Yoneda) y las verticales las inclusiones.

En general, los colímites en $\mathcal{SS}et$ se calculan grado a grado. El lema vale porque, para cada n, el diagrama en grado n es un push-out. A partir de ésto es fácil verificar la propiedad universal.

Veamos finalmente cómo es posible dar a $|K|$ estructura de CW-complejo.

2.19 Proposición. *$|K|$ es un CW-complejo para todo conjunto simplicial K.*

Demostración. Calculemos los valores que toma $|\cdot|$ en el n-símplex $\Delta[n]$ y en su borde $\partial\Delta[n]$.

(i) $|\mathbf{\Delta[n]}| = \mathbf{\Delta^n} \cong \mathbf{D^n}$.

Cada clase que determina la relación de equivalencia $\sim$ definida sobre $\coprod_{j\geqslant 0} \Delta[n]_j \times \Delta^j$ tiene un único elemento (x, u_n) con $x = id_{\underline{\mathbf{n}}}$ el n-símplex generador de $\Delta[n]$.
Dado $(k_m, u_m) \in \coprod_{j\geqslant 0} \Delta[n]_j \times \Delta^j$, tenemos que $k_m : \underline{\mathbf{m}} \to \underline{\mathbf{n}} \in \mathcal{SS}et$. Luego $(k_m, u_m) = (k_m \circ id_{\underline{\mathbf{n}}}, u_m) \sim (id_{\underline{\mathbf{n}}}, k_m^*(u_m))$. Al identificar los símplices, todos colapsan en $id_{\underline{\mathbf{n}}} \times \Delta^n$.

Otra forma de verlo es recordando que $|\Delta[n]| = \underset{\Gamma_{\Delta[n]}}{colim}\ \Delta^n$, y observando que el diagrama $\Gamma_{\Delta[n]}$ tiene objeto final $(\underline{\mathbf{n}}, id_{\underline{\mathbf{n}}})$. En un sistema $\Gamma \xrightarrow{X} C$, si Γ tiene objeto final α, entonces $\underset{\Gamma}{colim}\ X_i = X_\alpha$.

(ii) $|\partial\mathbf{\Delta[n]}| = \partial\mathbf{\Delta^n} \cong \mathbf{S^{n-1}}$.

El funtor $|\cdot|$ preserva colímites, en particular coegalizadores.

El diagrama

$$\coprod_{0\leqslant i<j\leqslant n} \Delta[n-2]^{ij} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leqslant k\leqslant n} \Delta[n-1]^k \xrightarrow{h} \partial\Delta[n]$$

es un coegalizador, donde $\Delta[n-1]^k$ es la copia k-ésima, $\Delta[n-2]^{ij}$ es la copia (ij)-ésima y

- $f = \coprod(\partial_i)_*$ con $(\partial_i)_* : \Delta[n-2]^{ij} \to \Delta[n-1]^j$, ∂_i definida en 2.6.
- $g = \coprod(\partial_{j-1})_*$ con $(\partial_{j-1})_* : \Delta[n-2]^{ij} \to \Delta[n-1]^i$.
- $h = \coprod(\partial_k)_*$ con $(\partial_k)_* : \Delta[n-1]^k \to \Delta[n]$.

Que $h \circ f = h \circ g$ vale pues $\partial_j \circ \partial_i = \partial_{j-1} \circ \partial_i$ si $i < j$. Ver que $(h, \partial\Delta[n])$ es el coegalizador sigue por propiedad universal.

Por lo tanto se tiene que el siguiente diagrama es un coegalizador de espacios topológicos

$$\coprod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} |\Delta[n-2]^{ij}| \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \coprod_{0 \leqslant k \leqslant n} |\Delta[n-1]^k| \xrightarrow{h} |\partial\Delta[n]|$$

En otras palabras, $|\partial\Delta[n]| = \partial\Delta^n$ se obtiene pegando las caras del n-símplex topológico por sus bordes.

Por el lema anterior, como $|\cdot|$ preserva colímites y teniendo en cuenta que $|\partial\Delta[n]| = S^{n-1}$ y $|\Delta[n]| = D^n$, se tiene un nuevo push-out, ahora de espacios topológicos.

$$\begin{array}{ccc} \coprod\limits_{x \text{ no deg.}}^{x \in K_n} S^{n-1} & \longrightarrow & |sk_{n-1}K| \\ \downarrow & \text{PUSH} & \downarrow \\ \coprod\limits_{x \text{ no deg.}}^{x \in K_n} D^n & \longrightarrow & |sk_nK| \end{array}$$

El par $(|sk_nK|, |sk_{n-1}K|)$ es, por lo tanto, una adjunción de n-celdas $\forall\ n$. Como $K = \underset{n \in \mathbb{N}}{colim}\ sk_nK$, se tiene $|K| = \underset{n \in \mathbb{N}}{colim}\ |sk_nK|$ de donde $|K|$ tiene la topología que inducen las inclusiones $|sk_nK| \hookrightarrow |K|$. Queda así probado que $|K|$ es un CW-complejo con una n-celda por cada n-símplex no degenerado de K. □

2.20 Nota importante. La definición de realización geométrica se puede extender a los espacios simpliciales definidos en 2.7.

Si K es un espacio simplicial, se construye $|K|$ como el espacio

$$|K| = \coprod_{n \geqslant 0} K_n \times \Delta^n \ / \ \sim$$

con $\sim$ definida de igual forma que antes, teniendo en cuenta que $K_n \times \Delta^n$ es el producto de espacios topológicos.

Es muy importante tener en cuenta que si K es un espacio simplicial, $|K|$ no necesariamente es un CW-complejo, ni aún cuando K_n se CW-complejo $\forall\ n$. El producto $K_n \times \Delta^n$ ya no es una unión disjunta de símplices.

En el apéndice A de [Se2], Graeme Segal introduce una nueva noción de realización geométrica de espacios simpliciales, $||\cdot||$, que satisface las siguientes dos proposiciones:

(1) Si K_n es CW-complejo $\forall\ n$, entonces $||K||$ es equivalente homotópico a un CW-complejo.

(2) Si $f : K \to K'$ es un morfismo de espacios simpliciales tal que $f_n : K_n \to K'_n$ es equivalencia homotópica $\forall\ n$, entonces $||f|| : ||K|| \to ||K'||$ es equivalencia homotópica.

Cuando K es un espacio simplicial "bueno" (en la terminología de Segal), ambas realizaciones coinciden. Utilizaremos este resultado para la demostración del teorema A de Quillen (teorema 3.26).

Compatibilidad de $|\cdot|$ con $\times$

En esta sección, con el propósito de estudiar bajo qué condiciones la realización geométrica de conjuntos simpliciales respeta los productos, repasaré brevemente resultados básicos sobre los espacios de Kelley.

Un **espacio de Kelley** es un espacio topológico Hausdorff X tal que un subconjunto F de X es cerrado cuando la intersección con cada subespacio compacto de X es cerrada. Dicho de otro modo, X es de Kelley sii tiene la topología que inducen las inclusiones de sus subespacios compactos.

$$X \text{ esp. de Kelley} \Leftrightarrow \{K \hookrightarrow X\}_{\substack{K \subset X \\ K \text{ compacto}}} \quad flia.\ final$$

Sigue de la definición que unión disjunta de espacios de Kelley es un espacio de Kelley; ídem para subespacios cerrados y cocientes Hausdorff de un espacio de Kelley. Es claro que todo espacio compacto y Hausdorff es de Kelley.

La siguiente proposición nos brinda toda una familia de ejemplos.

2.21 Proposición. *Un espacio localmente compacto y Hausdorff es un espacio de Kelley.*

Demostración. Sea X localmente compacto, $F \subset X$ tal que $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$, sea $x \in X \setminus F$. Como X es localmente compacto $\exists\ K_x \subset X$ entorno compacto de x. Sea U abierto, $x \in U \subset K_x$. Como $F \cap K_x$ es cerrado, $U \setminus (F \cap K_x)$ es un abierto, que contiene a x y no interseca a F. Luego F es cerrado. □

Los símplices topológicos Δ^n son compactos, luego son espacios de Kelley. Dado K conjunto simplicial, $|K|$ es un cociente Hausdorff de una unión disjunta de símplices, y por lo observado anteriormente, es un espacio de Kelley.

Veamos otro ejemplo.

2.22 Ejemplo. Llamemos $\mathbb{R}^\infty$ al espacio de las sucesiones reales que son finalmente cero, es decir,

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_n)_{n\geqslant 1} \ /\ x_n \in \mathbb{R},\ x_n = 0 \text{ salvo para } finitos\ n\}$$

Se tienen inclusiones $i_n : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Dotamos a $\mathbb{R}^\infty$ con la topología final respecto de la familia $\{\mathbb{R}^n \xrightarrow{i_n} \mathbb{R}^\infty\}_{n\geqslant 1}$. Dado $U \subset \mathbb{R}^\infty$, U es abierto si $U_n = i_n^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$ lo es $\forall\ n$.

Consideremos la esfera infinita $S^\infty = \{(x_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^\infty\ /\ \sum_{n\geqslant 1} x_n^2 = 1\}$. Restringiendo las inclusiones i_n a S^n, tenemos $\{S^n \xrightarrow{i_n} S^\infty\}_{n\geqslant 1}$ flia. final, donde cada S^n es un compacto de S^∞. Por lo tanto, S^∞ es un espacio de Kelley, pues su topología está generada por algunos (luego por todos) de sus compactos.

En la próxima sección veremos que S^∞ es la realización geométrica de un conjunto simplicial, lo que da otra forma de probar que es un espacio de Kelley.

Llamamos $\mathcal{K}e$ a la categoría de espacios de Kelley y funciones continuas.

Dado un espacio Hausdorff X, la topología inducida por las inclusiones de sus subespacios compactos es más fina que la de X. Notamos al espacio que resulta de asignarle esta topología al conjunto subyacente a X con $X_{\mathcal{K}e}$. Con estas notaciones, X es de Kelley sii $X = X_{\mathcal{K}e}$.

$X_{\mathcal{K}e}$ siempre es un espacio de Kelley pues, como antes, su topología es menos fina que la que inducen sus compactos y, al mismo tiempo, la que inducen sus compactos es menos fina que la que inducen los compactos de X (pues X y $X_{\mathcal{K}e}$ tienen los mismo compactos).

Es fácil ver que esta asignación es funtorial y satisface que toda función continua $f : Y \to X$, con Y espacio de Kelley, se factoriza por $X_{\mathcal{K}e}$. Luego, si $i : X_{\mathcal{K}e} \to X$ es la identidad, i_* es una biyección (natural) entre $[Y, X_{\mathcal{K}e}]$ y $[Y, X]$, por lo que se tiene la siguiente

2.23 Proposición. *El funtor $X \mapsto X_{\mathcal{K}e}$ es adjunto a derecha de la inclusión canónica $i : \mathcal{K}e \hookrightarrow \mathcal{T}op$.*

Ésto nos asegura, por la proposición 1.5, que i preserva colímites, o sea que dado un sistema $\Gamma \to \mathcal{K}e$, si su colímite en $\mathcal{T}op$ es Hausdorff entonces el colímite en $\mathcal{K}e$ existe y coincide con éste.

Sin embargo, no es cierto que un límite de espacios de Kelley coincida con el mismo límite en $\mathcal{T}op$. De la adjunción anterior se deduce que dado un sistema $\Gamma \xrightarrow{X} \mathcal{K}e$, el límite existe y es igual a $(\lim\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha)_{\mathcal{K}e}$, donde el límite $\lim\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ se calcula en $\mathcal{T}op$, donde es sabido que existen los límites. De todo esto concluímos que si $\lim\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ es un espacio de Kelley, entonces sí coinciden ambos límites.

Como dijimos antes, la realización geométrica de un conjunto simplicial es un espacio de Kelley. Por lo tanto, el funtor $|\cdot|$ toma valores en la categoría $\mathcal{K}e$. Vale el siguiente

2.24 Teorema. *El funtor realización geométrica $|\cdot| : \mathcal{SS}et \to \mathcal{K}e$ conmuta con límites finitos. En particular, preserva productos.*

Una demostración de este teorema se puede leer en [G-Z], III, 3.1.

Concluímos, pues, que dados X e Y conjuntos simpliciales,

$$|X \times Y| = |X| \times_{\mathcal{K}e} |Y| = (|X| \times |Y|)_{\mathcal{K}e}$$

En particular, si $|X| \times |Y|$ es de Kelley, entonces tendremos $|X \times Y| = |X| \times |Y|$.
Veamos que esto pasa si $|X|$ o $|Y|$ son localmente compactos.

2.25 Proposición. *Sea X un espacio de Kelley e Y localmente compacto y Hausdorff. Entonces $X \times Y$ es un espacio de Kelley.*

Demostración. ([H],A.15) Una función $f : X \times Y \to Z$ es continua sii $\widetilde{f} : X \to Z^Y$ lo es, pues Y es localmente compacto y Hausdorff. Como X es de Kelley, $\widetilde{f}$ es continua sii

$\widetilde{f} : K \to Z^Y$ es continua $\forall\ K \subset X$ compacto, y volviendo a aplicar la ley exponencial, esto pasa sii $f : K \times Y \to Z$ es continua $\forall\ K \subset X$ compacto.

Dado $K \subset X$ compacto, como X es Hausdorff resulta K localmente compacto, y $K \times Y \to Z$ continua sii $Y \to Z^K$ lo es. Como Y también es de Kelley (ver 2.21), ésto equivale a que $K' \to Z^K$ sea continua $\forall\ K' \subset Y$ compacto.

Por lo tanto, $f : X \times Y \to Z$ es continua sii $f : K \times K' \to Z$ lo es $\forall\ K \subset X,\ \forall\ K' \subset Y$ compactos.

Ahora bien: la topología de $(X \times Y)_{\mathcal{K}e}$ es más fina que la de $X \times Y$. Si probamos que $id : X \times Y \to (X \times Y)_{\mathcal{K}e}$ es continua tendremos que ambas topologías coinciden, y $X \times Y$ resultará espacio de Kelley.

Pero, por lo visto antes, basta con probar que, dados $K \subset X$, $K' \subset Y$ compactos, $f : K \times K' \to (X \times Y)_{\mathcal{K}e}$ es continua. Lo cual es evidente, pues $K \times K'$ es un compacto de $X \times Y$ y la topología en $(X \times Y)_{\mathcal{K}e}$ es la más fina que hace a las inclusiones de sus compactos continuas. □

2.26 Corolario. *Dados X e Y conjuntos simpliciales. Si $|X|$ ó $|Y|$ es localmente compacto, entonces $|X| \times |Y| = |X \times Y|$.*

3 Espacios Clasificantes

La topología algebraica se ocupa en sus inicios de asignar a un espacio distintas estructuras algebraicas como invariantes que permitan su clasificación. Se podría decir que en las próximas páginas recorreremos el camino inverso. Entenderemos al nervio de una categoría C como una forma de codificar su información, que nos permitirá construir un espacio con propiedades topológicas afines a las propiedades algebraicas de C.
No sólo nos servirá como invariante: dado un espacio X, eligiendo convenientemente C tendremos $X \cong BC$ y podremos, por lo tanto, estudiar X a partir de esta categoría.

3.1 Definición. Dada una categoría C, definimos el **espacio clasificante** BC como la realización geométrica del nervio de C.

$$BC = |NC|$$

BC es un CW-complejo. Sus 0-celdas están en biyección con los objetos de C, y sus n-celdas ($n \geqslant 1$) están en biyección con las tiras de n flechas componibles (donde ninguna es una identidad).

Como ejemplos de espacios clasificantes de categorías chicas, podemos nombrar los siguientes:

(a) $C = * \rightleftarrows * \rightsquigarrow BC = S^1$.

(b) $C = \underline{\mathbf{n}} \rightsquigarrow BC = \Delta^n$.

(c) $C = * \underset{\alpha^{-1}}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} * \rightsquigarrow BC = S^\infty$.

(b) se comprueba fácilmente. En (a) y en (c), NC sólo tiene dos 0-símplices y dos 1-símplices no degenerados, pues no hay otros objetos o flechas. Se tiene $|sk_1 NC| = S^1$ en ambos casos. En (a) no hay tiras de flechas componibles (que no contengan a la identidad) de largo 2 o más, de donde NC no tiene símplices no degenerados de dimensión 2 o más, y sigue que $BC = S^1$. En (c), en cambio, tenemos 2 n-símplices no degenerados por cada dimensión: $(\alpha, \alpha^{-1}, \alpha, \dots)$ y $(\alpha^{-1}, \alpha, \alpha^{-1}, \dots)$. Por la forma en que las celdas correspondientes se pegan tenemos $|sk_n NC| = S^n$ y $BC = S^\infty$.

A continuación veamos un ejemplo más general:

3.2 Ejemplo/Resultados. Sea I conjunto parcialmente ordenado. Definimos K_I complejo simplicial de la siguiente manera:

vértices: I.

símplices: $\{i_0, \dots, i_n\}$ / $i_0 < \cdots < i_n,\ n \geqslant 0$.

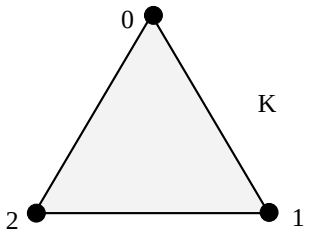
Considerando a I como una categoría construimos BI. BI es el poliedro inducido por K_I, pues por definición el nervio NI coinicide con $\widetilde{K_I}$ (ver ejemplo 2.3 y observación 2.15).

Dado K complejo simplicial, recordemos que la **subdivisión baricéntrica** $sd(K)$ es el complejo cuyos vértices son los baricentros $b(s)$ de los símplices s de K, y cuyos símplices son todos los conjuntos ordenados finitos $\{b(s_o), \ldots, b(s_n)\}$ con s_i cara propia de s_{i+1}. Es bien sabido que $|sd(K)| = |K|$.

Luego, si I_K es el conjunto de símplices de K ordenado parcialmente por la inclusión, como acabamos de ver vale $NI_K = \widetilde{K_{I_K}}$. Además, $K_{I_K} = sd(K)$ y como $|sd(K)| = |K|$, resulta que BI_K es el poliedro inducido por K.

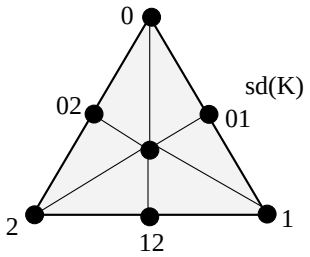
$$\boxed{BI_K = |K|}$$

Sigamos estas construcciones en un ejemplo concreto. Consideremos como complejo simplicial K el 2-símplex ($V_K = \{0, 1, 2\}$, $S_K = \{subconjuntos\ no\ vacios\ de\ V_K\}$).



I_K es el conjunto de los 7 símplices de K ordenados por la inclusión. El nervio NI_K en grado n consiste en las cadenas totalmente ordenadas de $n+1$ elementos de I_K, y los n símplices no degenerados son las cadenas donde todas las inclusiones son estrictas.

Así, tenemos un punto por cada símplex de K (7 en total), un segmento o 1-símplex por cada inclusión estricta, etcétera. El espacio clasificante BI_K resulta entonces



con siete 0-celdas, doce 1-celdas y seis 2-celdas. Como probamos antes coincide con $|K_{I_K}|$, que es a su vez es la realización geométrica de la subdivisión baricéntrica de K, pues comparando las definiciones se tiene $sd(K) = K_{I_K}$.

De estas observaciones sigue que el tipo homotópico de cualquier complejo simplicial se puede obtener como el espacio clasificante de un $I \in \mathcal{P}oSet$. Esto, sumado al hecho de que todo CW-complejo es equivalente homotópico a un complejo simplicial, implica que

Dado X un CW-complejo, siempre existe una categoría C tal que $BC \cong X$.

3.3 Observación. Dada una categoría C, entre los espacios BC y BC^{op} existe un isomorfismo celular evidente, que resulta de mandar la celda asociada al n-símplex $(f_0, \ldots, f_n)$ en NC_n con la correspondiente al n-símplex $(f_n, \ldots, f_0) \in NC_n^{op}$. Este isomorfismo en general no proviene de un funtor $C \to C^{op}$.

Cálculo algebraico de $\pi_1(C, X)$

Dada C una categoría, un objeto X de C es un 0-símplex en NC y una 0-celda en BC. Luego tiene sentido hablar del n-ésimo grupo de homotopía de BC con punto base X. Lo notaremos directamente $\pi_n(C, X)$.

Veremos cómo es posible calcular $\pi_1(C, X)$ sin necesidad de pasar por los espacios topológicos. Esto, a su vez, permitirá calcular en forma fácil el grupo fundamental de espacios que provienen de categorías.

Daremos una demostración más detallada de las ideas expuestas por Quillen en [Q] usando resultados que aparecen en el libro [G-Z] de Peter Gabriel y Michel Zisman.

Introduzcamos entonces algunas de las notaciones y definiciones que utilizaremos.

Recordemos que un **revestimiento** de espacios topológicos es una función continua $p : E \to B$ para la cual todo punto $b \in B$ admite un entorno abierto $U = U(b)$ parejamente cubierto. Es decir, $p^{-1}(U) = \coprod_\alpha V_\alpha$ y $p : V_\alpha \to U$ es homeomorfismo $\forall \alpha$.

3.4 Definición. Dado B espacio topológico se define la categoría de revestimientos sobre B, donde los objetos son los pares (E, p) tales que $E \xrightarrow{p} B$ es revestimiento, y donde una flecha $(E, p) \to (E', p')$ es una función continua $\varphi : E' \to E$ tal que $p \circ \varphi = p'$. Llamamos a esta categoría **Revest B**.

Un hecho importante en la teoría de revestimientos es la propiedad que satisfacen de levantar funciones continuas bajo ciertas condiciones. Si $p : E \to B$ es un revestimiento y $f : X \to B$ una función continua, decimos que $\widetilde{f}$ es un **levantamiento** de f si $p \circ \widetilde{f} = f$.

Dada $f : X \to B$ continua, tomando $x \in X$ y $U = U(f(x))$ entorno de $f(x)$ parejamente cubierto por p, tenemos levantamientos locales $\widetilde{f}_{x,\alpha}$ de f, definidos en un entorno de x, que resultan de componer f con las secciones locales $p_\alpha^{-1} : U \to V_\alpha$. Si es posible elegir para cada x un α de forma tal que los levantamientos locales se peguen bien (i.e. coincidan en las intersecciones de los dominios) entonces tendremos una función $\widetilde{f} : X \to E$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \overset{\widetilde{f}}{\nearrow} & \big\downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

En este sentido, el siguiente resultado nos da una condición necesaria y suficiente para la existencia de $\widetilde{f}$ ([Mu], § 79 y [Sp]).

3.5 Proposición. *Sea $p : E \to B$ revestimiento con E y B arcoconexos y localmente arcoconexos. Sean $e \in E$ y $b \in B$. Sea X un espacio arcoconexo y localmente arcoconexo, $f : X \to B$ continua, $x \in X$, $f(x) = b$. Entonces,*

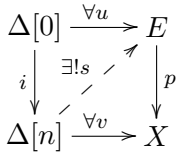
$$\exists \widetilde{f} : X \to E \text{ continua tal que } p \circ \widetilde{f} = f \text{ y } \widetilde{f}(x) = e \Leftrightarrow f_*(\pi_1(X, x)) \subset p_*(\pi_1(E, e))$$

Más aún, si $\widetilde{f}$ existe, es único.

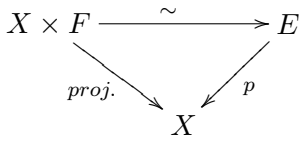
La noción de revestimiento es trasladada al lenguaje de los $\mathcal{SS}et$ de la siguiente forma.

3.6 Definición. Sea $i : \Delta[0] \to \Delta[n]$ la inclusión canónica.

Un morfismo $E \xrightarrow{p} X \in \mathcal{SS}et$ es un **revestimiento** si para toda $u : \Delta[0] \to E$, $v : \Delta[n] \to X$ tales que $p \circ u = v \circ i$, existe una única flecha $s : \Delta[n] \to E$ satisfaciendo $s \circ i = u,\ p \circ s = v$.



Recordemos que una función continua $p : E \to X$ entre espacios topológicos es **trivial con fibra** F si existe un homeomorfismo $X \times F \xrightarrow{\sim} E$ tal que el diagrama



conmuta.

Decimos que p es **localmente trivial con fibra** F si cada punto x de X tiene un entorno abierto U tal que la restricción $p|_{p^{-1}(U)}$ es trivial con fibra F.

3.7 Observación. $p : E \to B \in \mathcal{T}op$ es revestimiento si y sólo si es localmente trivial con fibra discreta.

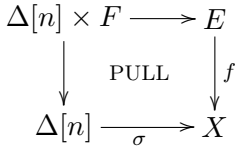
Definiciones equivalentes se tienen para morfismos triviales y localmente triviales en $\mathcal{K}e$, reemplazando los espacios y los productos topológicos por espacios y productos de Kelley.

3.8 Observación. Dados X e Y espacios de Kelley, $X \times_{\mathcal{K}e} Y$ no necesariamente coincide con $X \times Y$. Luego, una función continua puede ser localmente trivial vista como morfismo en $\mathcal{T}op$ y no serlo en $\mathcal{K}e$, y viceversa. Sin embargo, basta con que la fibra F sea localmente compacta para que ambas definiciones coincidan (ver 2.25).

Veamos por último los conceptos equivalentes en $\mathcal{SS}et$.

3.9 Definición. Un morfismo $f : E \to X$ en $\mathcal{SS}et$ es **trivial** si existe $F \in \mathcal{SS}et$ y un isomorfismo $X \times F \xrightarrow{\alpha} E$ tal que $f \circ \alpha$ coincide con la proyección $X \times F \to X$. Llamamos a F la **fibra** de f.

Decimos que $f : E \to X$ en $\mathcal{SS}et$ es **localmente trivial con fibra** F si, para cada simplex $\sigma : \Delta[n] \to X$, la proyección del pull-back $\Delta[n] \times_{\sigma,f} E$ sobre $\Delta[n]$ es trivial con fibra F.



A partir de las definiciones 3.6 y 3.9 no es difícil ver que, al igual que en $\mathcal{T}op$, un morfismo $p : E \to X \in \mathcal{SS}et$ es revestimiento sii es localmente trivial con fibra discreta.

Usaré el siguiente teorema, del cual se puede leer una demostración en ([G-Z], III, 4).

3.10 Teorema. *El funtor $|\cdot| : \mathcal{SS}et \to \mathcal{K}e$ transforma morfismos localmente triviales con fibra F en morfismos localmente triviales con fibra $|F|$.*

En lo que sigue, C denota una categoría pequeña. Probaremos que la categoría de revestimientos sobre BC es equivalente a la de funtores $C \to \mathcal{S}et$ que invierten morfismos. Luego concluiremos que $\pi_1(C, X)$ coincide con el grupo de automorfismos del objeto X en el grupoide que se obtiene al invertir todas las flechas de C.

3.11 Definición. Sean C y D categorías, $F : C \to D$ funtor. Decimos que F **invierte morfismos** si $F(\varphi)$ es isomorfismo para toda flecha $\varphi \in C$. Denotamos $D^C_{i.m.}$ a la *subcategoría plena* de D^C formada por los funtores que invierten morfismos.

Sea $E \xrightarrow{p} BC$ un revestimiento del espacio clasificante de C. Viendo cada objeto X como punto de BC, podemos asignarle el conjunto $F_E(X) = p^{-1}(X)$. Toda flecha $\varphi : X \to Y$ en C es un 1-símplex en NC y por lo tanto da un camino $X \xrightarrow{\omega_\varphi} Y$ en BC. Por las propiedades de levantamiento de caminos que tienen los revestimientos, ω_φ induce una biyección $F_E(\varphi)$ entre las fibras $p^{-1}(X)$ y $p^{-1}(Y)$ (tiene como inversa la función inducida por el camino $\overline{\omega_\varphi}(t) = \omega_\varphi(1-t)$). F_E definido de esta forma resulta un funtor $C \to \mathcal{S}et$ que invierte morfismos.

Recíprocamente, dado $F : C \to \mathcal{S}et$ funtor que invierte morfismos, consideremos la categoría C_F de pares (X, x) con $X \in C$ y $x \in F(X)$, donde una flecha $\widetilde{\varphi} : (X, x) \to (Y, y)$ es un morfismo $\varphi : X \to Y \in C$ tal que $F(\varphi)(x) = y$. Notar que C_F es el diagrama de $F^{op} : C^{op} \to \mathcal{S}et$ (ver 1.7).

Sea $pr : C_F \to C$ la proyección $(X, x) \mapsto X$.

3.12 Proposición. *$Npr : NC_F \to NC$ es un revestimiento de conjuntos simpliciales.*

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Delta[0] & \xrightarrow{u} & NC_F \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Npr} \\ \Delta[n] & \xrightarrow{v} & NC \end{array}$$

Por Yoneda v es un n-símplex de NC, es decir, $v = (X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} X_n)$. Como el diagrama conmuta, $u = (X_i, x_i)$ para algún x_i. Para cada j, como $F(f_j)$ es biyectiva existe $x_j \in F(X_j)$ tal que $F(f_j)(x_{j-1}) = x_j$ ó $(F(f_j))^{-1}(x_{j-1}) = x_j$. El elemento x_i está asociado entonces a una tira de x_j's.
Definamos $\widetilde{v} : \Delta[n] \to NC_F$ como el morfismo inducido por el n-símplex

$$(X_0, x_0) \xrightarrow{\widetilde{f_1}} (X_1, x_1) \xrightarrow{\widetilde{f_2}} \ldots \xrightarrow{\widetilde{f_n}} (X_n, x_n)$$

perteneciente a $(NC_F)_n$. $\widetilde{v}$ es un levantado de v pues al satisfacer $\widetilde{v} \circ i = u,\ Npr \circ \widetilde{v} = v$ hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta[0] & \xrightarrow{u} & NC_F \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{\widetilde{v}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle Npr} \\ \Delta[n] & \xrightarrow{v} & NC \end{array}$$

La unicidad $\widetilde{v}$ sigue de la unicidad en la construcción de los x_j. □

$NC_F \xrightarrow{Npr} NC$ es un revestimiento de conjuntos simpliales, o lo que es lo mismo, un morfismo localmente trivial con fibra discreta F. Por el teorema 3.10, $BC_F \xrightarrow{Bpr} BC$ también es localmente trivial con fibra discreta $|F|$ visto como morfismo en $\mathcal{K}e$. Como $|F|$ es un espacio discreto, es localmente compacto y, por lo observado en 3.8 tenemos que $BC_F \to BC$ es un revestimiento en $\mathcal{T}op$.

Notemos con E a un revestimiento sobre BC y con F un funtor de C a $\mathcal{S}et$ que invierte morfismos. Hemos descrito asignaciones $E \mapsto F_E$ y $F \mapsto BC_F$. Probemos que estas asignaciones son funtoriales:

Dado $p : E \to BC$, $p' : E' \to BC$ en $Revest\ BC$, recordemos que un morfismo φ es una función continua $B \to B'$ tal que $p' \circ \varphi = p$. La función φ induce una transformación natural entre F_E y $F_{E'}$. Dado $X \in C$,

$$\begin{aligned} \varphi_X : F_E(X) &\to F_{E'}(X) \\ p^{-1}(X) &\to p'^{-1}(X) \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

la naturalidad sigue fácil.

Por otro lado, dada $\eta : F \to F'$ una transformación natural en $\mathcal{S}et^C_{i.m.}$, se tiene

$$\begin{aligned} C_F &\xrightarrow{\widetilde{\eta}} C_{F'} \\ (X, x) &\mapsto (X, \eta_X(x)) \end{aligned}$$

donde $x \in F(X)$ y $\eta_X(x) \in F'(X)$. $\widetilde{\eta}$ definido así es un funtor, luego induce un morfismo entre los nervios que conmuta con pr, y por lo tanto induce un morfismo entre los revestimientos BC_F y $BC_{F'}$.

Estos dos funtores, $E \mapsto F_E$ y $F \mapsto BC_F$, son mutuamente inversos y dan una equivalencia entre las categorías $Revest\ BC$ y $\mathcal{S}et^C_{i.m.}$.

Que $F \to BC_F \to F_{BC_F} = F$ se chequea fácilmente. Con la información algebraica de F se construye un revestimiento del cual no es díficil volver a extraer los datos de F.

Dado $E \xrightarrow{p} BC$ revestimiento, construimos BC_{F_E}. Veamos ahora que $E = BC_{F_E}$. Sin perder generalidad, trabajando en cada componente de BC por separado, podemos

suponer que BC es conexo. Siendo BC conexo y localmente arcoconexo, también resulta arcoconexo. Tenemos

$$\begin{array}{ccc} BC_{F_E} & & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ BC & \overset{id}{=\!=} & BC \end{array}$$

Para ver que los revestimientos coinciden, veamos que en el diagrama anterior la identidad de BC se levanta para dar funciones continuas $\alpha : BC_{F_E} \to E$, $\beta : E \to BC_{F_E}$ mutuamente inversas. Para hallar α y β, por la proposición 3.5, no hay más que probar que dados $X \in C$ y $x \in p^{-1}(X)$, $p_*(\pi_1(E, x)) = p'_*(\pi_1(BC_{F_E}, (X, x)))$.

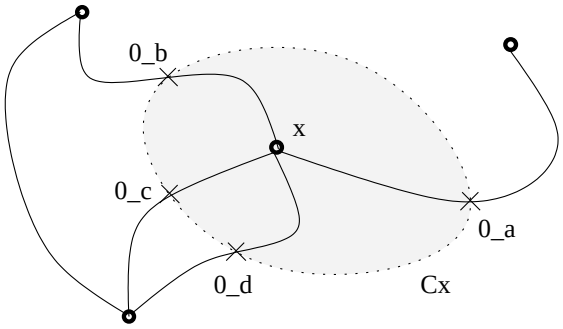
Sea $X \in C$, $[\omega] \in \pi_1(C, X)$. Demostraré que $[\omega]$ está en la imagen de p_* si y sólo si está en la imagen de p'_*. Para ello, demostremos primero un resultado que nos permitirá trabajar con lazos de $\pi_1(C, X)$ en una representación práctica.

3.13 Proposición. *Sea X un CW-complejo, x_0 una 0-celda en X y ω un lazo en x_0. Entonces existen $e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_N}$ 1-celdas tales que ω es homotópico como lazo a $e_{\alpha_1} * \cdots * e_{\alpha_N}$, donde consideramos cada 1-celda como un camino a partir de su función característica y $*$ es la concatenación usual de caminos.*

Demostración. Tenemos $\omega : I = [0, 1] \to X$ continua, $\omega(0) = \omega(1) = x_0$. Notamos con $[\omega]$ su clase homotópica en $\pi_1(X, x_0)$. Es sabido que la inclusión del 1-esqueleto $i : X^1 \hookrightarrow X$ induce un epimorfismo de grupos $i_* : \pi_1(X^1, x) \to \pi_1(X, x)$ (ver [Sw], teorema 6.11). Por lo tanto, existe ω' lazo sobre x_0 tal que su imagen está incluída en X^1 y $[\omega] = [\omega']$. Podemos trabajar entonces con X^1 en lugar de X.

Sean $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ las 1-celdas de X^1 y $\{x_j\}_{j\in J}$ las 0-celdas. Dada e_α una 1-celda, e_α es la imagen de la función característica $g_\alpha : D^1 = [-1, 1] \to X^1$. Definamos $0_\alpha = g_\alpha(0) \in e_\alpha$.

Sabemos que X^0 es discreto, pues es la unión disjunta de varias copias de D^0. Consideremos $A = X^1 \setminus \bigcup_\alpha \{0_\alpha\}$. El subespacio A tiene una componente conexa C_{x_j} por cada 0-celda x_j de X^1.



Cada C_{x_j} es un abierto en X^1. Luego, $\{C_{x_j}\}_j \cup \{e^\circ_\alpha\}_\alpha$ es un cubrimiento por abiertos de X^1, y como ω' es continua, $\{\omega'^{-1}(C_{x_j})\}_j \cup \{\omega'^{-1}(e^\circ_\alpha)\}_\alpha$ es un cubrimiento por abiertos de I. Al ser I compacto, por el lema del número de Lebesgue existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\omega'([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}])$ está incluído en algún C_{x_j} o en algún e°_α, $i = 1, \ldots, n$. Llamemos ω'_i al camino que define ω' en $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Claramente $[\omega'] = [\omega'_1] * \cdots * [\omega'_n]$.

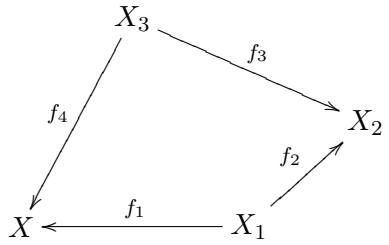
Para cada j, C_{x_j} es contráctil (se contrae a x_j). Además e°_α es homeomorfo al intervalo real $(-1, 1)$. Por lo tanto estos abiertos son simplemente conexos y el camino ω'_i resulta

homotópico a cualquier otro camino del abierto ω_i'' con los mismos puntos inicial y final. Elegimos ω_i'' como un segmento o como un par de segmentos según el caso, y llamamos $\omega'' = \omega_1'' * \cdots * \omega_n''$. Tenemos que $[\omega'] = [\omega'']$ y por construcción resulta $\omega''(t)$ una 0-celda sólo para finitos valores de $t \in [0,1]$. Sean $0 = t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m = 1$ estos valores. Sea ω_i'' el camino que induce ω'' en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Si $\omega''(t_{i-1}) = \omega''(t_i)$ entonces ese camino se puede suprimir. Si $\omega''(t_{i-1})$ y $\omega''(t_i)$ son distintos, existe α tal que $\omega''(t) \in e_\alpha^\circ$ $\forall\ t \in (t_{i-1}, t_i)$. ω_i'' puede ser reemplazado por el camino g_α o por su inverso. □

En nuestro caso recordemos que ω es un lazo en el espacio clasificante BC sobre la 0-celda que induce el objeto $X \in C$. En virtud de lo probado en la proposición anterior, ω se puede descomponer como producto de caminos de BC que provienen de morfismos en C. Sea $[\omega] = [\omega_1 * \omega_2 * \cdots * \omega_n]$ donde ω_i es una parametrización del 1-símplex asociado a $f_i \in Fl\ C$.

Los morfismos f_i no necesariamente son componibles, pero sí determinan una tira $X = X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n = X$ de objetos de C, donde X_j y X_{j+1} son en algún orden el dominio y el codominio de f_j.

Ejemplo. En el siguiente diagrama, los morfismos f_1, f_2, f_3 y f_4 inducen un lazo topológico aunque no se pueden componer.



Consideremos a (X, x) como 0-celda de BC_{F_E}. El camino ω_j se levanta en forma única y, por lo tanto, su levantado $\widetilde{\omega_j}$ es el camino que proviene del morfismo $\widetilde{f_j}$ (recordar cómo están definidas las flechas en C_F).

Pueden suceder dos cosas: $X_{j-1} \xrightarrow{f_j} X_j$ ó $X_j \xrightarrow{f_j} X_{j-1}$.

En cualquier caso, como F_E invierte morfismos $\widetilde{f_j}$ da una biyección $p^{-1}(X_{j-1}) \to p^{-1}(X_j)$, y notaremos directamente $\widetilde{f_j}(x_{j-1}) = x_j$.

$$\text{el levantado de } \omega \text{ en } BC_{F_E} \text{ es un lazo} \Leftrightarrow \widetilde{f_n} \circ \widetilde{f_{n-1}} \circ \cdots \circ \widetilde{f_1}(x) = x \qquad (1)$$

Pero $x_j \in p^{-1}(X_j) = F_E(X_j)$ y $\widetilde{f_j}(x_{j-1}) = F_E(f_j)(x_{j-1})$. Como $F_E(f_j)$ es la biyección inducida por el levantado de ω_j en $E \to BC$,

$$\widetilde{f_n} \circ \widetilde{f_{n-1}} \circ \cdots \circ \widetilde{f_1}(x) = x \Leftrightarrow f_n * f_{n-1} * \cdots * f_1 \text{ se levanta a un lazo en } E \qquad (2)$$

De (1) y (2) concluimos que $[\omega]$ está en la imagen de p_* si y sólo si está en la imagen de p'_*. Luego $p_*(\pi_1(E, x)) = p'_*(\pi_1(BC_{F_E}, (X, x)))$ y por lo tanto existen $\alpha : BC_{F_E} \to E$ y $\beta : E \to BC_{F_E}$ tales que $p \circ \alpha = p'$ y $p' \circ \beta = p$.

Por la unicidad de levantamiento en la proposición 3.5 tenemos que $\beta \circ \alpha = id_{BC_{F_E}}$ y que $\alpha \circ \beta = id_E$.

Hemos probado entonces que

$$\boxed{Revest\ BC \cong \mathcal{S}et^C_{i.m.}}.$$

Usaremos este resultado para describir $\pi_1(C, X)$ algebraicamente.

Sea G el grupoide que resulta de adjuntar a C todas las inversas formales de sus flechas (con las notaciones de [G-Z], $G = C[(Fl\ C)^{-1}]$). La inclusión canónica $C \hookrightarrow G$ induce una equivalencia entre las categorías

$$\mathcal{S}et^G \cong \mathcal{S}et^C_{i.m.}$$

Por último, notemos que dado $X \in C \subset G$, si llamamos G_X al grupoide con un solo objeto X y cuyos automorfismos son $Hom_G(X, X)$, se tiene una equivalencia $G_X \hookrightarrow G$ y por lo tanto otra

$$\mathcal{S}et^G \cong \mathcal{S}et^{G_X} = G_X - espacios$$

Componiendo todas las equivalencias que ya probamos, obtenemos que la categoría de revestimientos $Revest\ BC$ del espacio clasificante de C es equivalente a la categoría de conjuntos dotados con una acción de G_X (y morfismos de acciones). Esta equivalencia asocia al revestimiento $E \xrightarrow{p} BC$ el subconjunto $F_E(X) = p^{-1}(X)$ de E, junto con la acción de G_X, que resulta de escribir cada automorfismo de X en G como una yuxtaposición de morfismos de C (no necesariamente componibles) y levantar los caminos que parametrizan los 1-símplex para obtener una biyección en la fibra.

Finalmente se tiene un isomorfismo canónico

$$\boxed{\pi_1(C, X) = G_X}$$

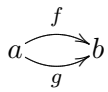
que resulta de observar un revestimiento universal. Todos los lazos dan, en ese caso, una biyección distinta.

3.14 Observación. De la equivalencia de categorías $G_X \hookrightarrow G$ sigue que BG_X y BG tienen el mismo tipo homotópico. O sea, dado, G un grupoide conexo, su espacio clasificante es un $K(G_X, 1)$, donde G_X es el grupo de automorfismos de X en G.

Veamos algunos ejemplos de cómo calcular el grupo fundamental del espacio clasificante de una categoría usando este isomorfismo.

3.15 Ejemplos. Volvamos a los ejemplos (a), (b) y (c) que comentamos al iniciar esta sección.

En el ejemplo (a), C es la categoría que tiene dos objetos $\{a, b\}$ y dos flechas $\{f, g\}$ de a a b.



El espacio clasificante BC es, como ya vimos, S^1. Adjuntamos las inversas formales de f y de g obteniendo el grupoide G. El grupo de automorfismos de a en G es el grupo generado por los morfismos $g^{-1} \circ f$ y $f^{-1} \circ g$. Como éstos son mutuamente inversos, concluimos que $Aut_G(a) =< g^{-1} \circ f > \cong \mathbb{Z}$. Como era esperado, obtenemos
$\pi_1(C, a) = \pi_1(S^1, a) = \mathbb{Z}$.

En (b), $C = \underline{\mathbf{n}}$ es la categoría de n objetos totalmente ordenados. Si G es el grupoide obtenido al invertir las flechas $\{(i-1) \to i\}$, $i = 1, \ldots, n$, es claro que en G no hay automorfismos no triviales. De aquí se deduce que $BC = \Delta^n$ es simplemente conexo mas al ser Δ^n un convexo en $\mathbb{R}^{n+1}$, la simple conexión es evidente a priori.

Hasta ahora hemos corroborado la validez de la fórmula $\pi_1(C, X) = G_X$ en dos casos en los que conocíamos $\pi_1(C, X)$ *a priori*. En cambio con el ejemplo (c), tenemos una forma sencilla de calcular el grupo fundamental de S^∞, sin recurrir a la teoría homotópica de CW-complejos (por ej. aproximación celular de funciones continuas).

$$a \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} b$$

Como C es un grupoide, $\pi_1(C, a) = Aut_C(a) = \{id_a\}$. Así probamos que S^∞ es simplemente conexo. Más adelante veremos incluso que S^∞ es contráctil.

El funtor $C \mapsto BC$

Sabemos que el funtor espacio clasificante $\mathcal{C}at \xrightarrow{B} \mathcal{T}op$ coincide con la composición $|\cdot| \circ N$. El funtor N preserva límites porque admite adjunto a izquierda (ver [T], p. 306, ver también [Min], [F-L]). Y en virtud de lo visto en 2.26, $|\cdot|$ preserva el producto $X \times Y$ siempre que $|X|$ ó $|Y|$ sean localmente compactos. Por lo tanto, vale la siguiente

3.16 Proposición. *Si BC o BD son localmente compactos, entonces*

$$B(C \times D) = BC \times BD$$

Diremos que una categoría C es **contráctil** si su espacio clasificante BC lo es. Diremos que un funtor $F : C \to D$ es **equivalencia homotópica** si la función continua BF lo es.

Recordemos que $\underline{\mathbf{1}} = \{0 \to 1\}$. su espacio clasificante es $B\underline{\mathbf{1}} = \Delta^1 = [0, 1]$, que es localmente compacto y así, dada C categoría pequeña,

$$B(C \times \underline{\mathbf{1}}) = BC \times [0, 1]$$

Tener funtores $F, G : C \to D$, y $\eta : F \Rightarrow G$ transformación natural, equivale a tener un funtor $H = (F, G, \eta) : C \times \underline{\mathbf{1}} \to D$ tal que $H \circ i_0 = F$, $H \circ i_1 = G$ con

$i_0 : C \to C \times \underline{\mathbf{1}}$ es la inclusión a altura 0 y

$i_1 : C \to C \times \underline{\mathbf{1}}$ es la inclusión a altura 1.

En los objetos, H se define como $H(X,0) = F(X)$, $H(X,1) = G(X)$.
En las flechas, $H(\varphi, id_0) = F(\varphi)$, $H(\psi, id_1) = G(\psi)$ y $H(id_X, 0 \to 1) = \eta_X$.

Concluimos pues que $BH : BC \times [0,1] \to BD$ es una homotopía entre BF y BG. Se tiene entonces el siguiente

3.17 Corolario. *B manda transformaciones naturales en homotopías.*

Si bien las homotopías determinan una relación de equivalencia y son fácilmente inversibles, las transformaciones naturales son dirigidas. La correspondencia funciona porque a nivel geométrico se pierden las direcciones.

Veamos una consecuencia inmediata de este hecho:

3.18 Proposición. *Sean $C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$, con $F \dashv G$. Entonces F y G son equivalencias homotópicas mutuamente inversas.*

Demostración. Basta con observar que la adjunción viene dada por transformaciones naturales $\eta : id_C \Rightarrow GF$, $\epsilon : FG \Rightarrow id_D$ que inducen homotopías $id_{BC} \simeq BG \circ BF$, $BF \circ BG \simeq id_{BD}$. □

3.19 Corolario. *Si C tiene objeto inicial o final, entonces C es contráctil.*

Demostración. Siendo $\underline{\mathbf{0}}$ la categoría con un solo objeto $*$ y una sola flecha id_*, si C tiene objeto inicial X_0 entonces el funtor canónico $C \to \underline{\mathbf{0}}$ admite adjunto a izquierda

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{0}} &\xrightarrow{i} C \\ * &\mapsto X_0 \end{aligned}$$

luego, BC tiene el mismo tipo homotópico que $B\underline{\mathbf{0}} = \Delta^0 = singleton \in \mathcal{T}op$.

Si en cambio C tiene objeto final, $C \to \underline{\mathbf{0}}$ admite adjunto a derecha. □

La categoría $a \circlearrowleft b$ tiene objeto final a, por lo tanto queda probado que S^∞ contráctil, como prometimos en 3.15. No obstante, la utilidad de este corolario va mucho más allá de esta aplicación, como veremos en las secciones posteriores.

En la proposición 1.3 se probó que dado $I \to \mathcal{C}at$ sistema filtrante, siempre existe $C = \underset{I}{colim}\ C_i$. De su construcción resulta $Obj\ C = \underset{I}{colim}\ Obj\ C_i$, $Fl\ C = \underset{I}{colim}\ Fl\ C_i$ y más en general $NC = \underset{I}{colim}\ NC_i$.

Consideremos $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia tal que X_i es un objeto de C_i, y si $i \xrightarrow{\phi} j$ en I, $F\phi(X_i) = X_j$ con $F\phi$ el funtor inducido por ϕ, $C_i \xrightarrow{F\phi} C_j$. Se tiene un nuevo sistema filtrante $\{\pi_n(C_i, X_i)\}_{i \in I}$, en $\mathcal{G}r$ para $n = 1$ y en $\mathcal{A}b$ para $n > 1$.

3.20 Proposición. *Si X es la imagen común de los X_i en C, entonces*

$$\underset{I}{colim}\ \pi_n(C_i, X_i) = \pi_n(C, X)$$

Demostración. Sea $C_i \xrightarrow{\lambda_i} C$ la inclusión en el colímite. Un elemento de $\pi_n(C_i, X_i)$ es la clase homotópica $[\sigma]$ de una función $\sigma : S^n \to BC_i$. Vemos a $[\sigma]$ en $\pi_n(C, X)$ mediante $(B\lambda_i)_*$.
Así mismo, si $[\tau] \in \pi_n(C, X)$, $\tau : S^n \to BC$, $\tau(S^n)$ es un compacto en el CW-complejo BC, por lo tanto interseca sólo finitas celdas. Luego $\tau(S^n)$ está incluido en la realización geométrica del subconjunto simplicial de NC generado por los símplices $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ correspondientes a las celdas que intersecan a $\tau(S^n)$.

Como $NC = \underset{I}{colim}\, NC_i$, cada α_k está en algún C_{i_k}. Como I es filtrante, podemos tomar un mismo índice $j = i_k$ para todo k. Luego $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\} \in NC_j$ y τ se levanta a una función $S^n \to BC_j$ para dar un elemento de $\pi_n(C_j, X_j)$.

Como las homotopías se levantan de igual modo ($S^n \times [0, 1]$ también es compacto!), concluímos que dos levantados de $[\tau]$ se igualan en algún j' suficientemente grande.

A partir de estas observaciones es fácil ver que $(\{(\lambda_i)_*\}, \pi_n(C, X))$ es cono universal. Dado $(\{f_i\}, G)$ otro cono del sistema, $f : \pi_n(C, X) \to G$ se define en $[\tau]$ como $f_i(\widetilde{[\tau]})$, donde $\widetilde{[\tau]}$ es un levantado de $[\tau]$ en $\pi_n(C_i, X_i)$. La buena definición, el hecho de que f sea morfismo de grupos factorizando los f_i y la unicidad de f siguen de lo anterior. □

Como aplicación de la proposición anterior Quillen menciona en [Q] el siguiente corolario.

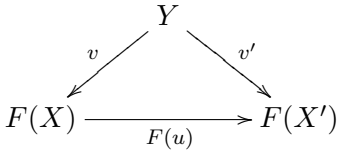
3.21 Corolario. *Si $I \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ satisface además que $\forall\ i \xrightarrow{\phi} j$, $C_i \xrightarrow{F\phi} C_j$ es equivalencia homotópica, entonces $C_i \xrightarrow{\lambda_i} C$ es equivalencia homotópica para todo i.*

Demostración. Como $C_i \xrightarrow{F\phi} C_j$ es una equivalencia homotópica, el morfismo inducido $\pi_n(C_i, X_i) \to \pi_n(C_j, X_j)$ es un isomorfismo de grupos si $n = 1$ o de grupos abelianos si $n \geqslant 2$. Luego $\pi_n(C_i, X_i) \xrightarrow{(\lambda_i)_*} \pi_n(C, X)$ también lo es y al valer ésto para todo n, se tiene que λ_i es una equivalencia débil entre CW-complejos.
Por el Teorema de Whitehead (ver, por ejemplo, [Sw]) λ_i resulta equivalencia homotópica. □

Vale la pena advertir que dado $I \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un sistema filtrante en $\mathcal{C}at$, no necesariamente podremos elegir una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ con X_i objeto de C_i, de forma coherente con los morfismos del sistema (i.e. si $i \xrightarrow{\phi} j$ en I, $F\phi(X_i) = X_j$). La existencia de una familia tal es, por lo tanto, una hipótesis significativa.

Para lo que sigue, necesitamos la siguiente definición.

3.22 Definición. Dado un funtor $F : C \to D$, $Y \in \text{Obj } D$, se define Y/F como la categoría cuyos objetos son los pares (X, v) con $X \in \text{Obj } C$ y $Y \xrightarrow{v} F(X)$.
Un morfismo $(X, v) \xrightarrow{u} (X', v')$ en Y/F es una flecha $X \xrightarrow{u} X' \in C$ tal que $F(u) \circ v = v'$.



De forma análoga se define F/Y con objetos (X, v) donde ahora $v : F(X) \to Y$ y con morfismos $(X, v) \xrightarrow{u} (X', v')$ con $u : X' \to X$ tal que $v \circ F(u) = v'$

Para $F = id_C : C \to C$ notamos Y/C en lugar de Y/F. Observemos que Y/C tiene objeto inicial (Y, id_Y).

Si I es una categoría filtrante, consideremos el sistema

$$\begin{aligned} I &\to \mathcal{C}at \\ i &\mapsto I/i \\ f &\mapsto f_* \end{aligned}$$

No es difícil ver que $I = \operatorname{colim}_I I/i$. Porque I/i tiene objeto final es contráctil, y en virtud de 3.21 obtenemos el siguiente resultado.

3.23 Proposición. *Toda categoría filtrante es contráctil.*

Teorema A de Quillen

A continuación enunciaré y daré una demostración del Teorema A de Quillen, que brinda condiciones suficientes para que un funtor sea equivalencia homotópica. Para su demostración haré uso de los siguientes hechos elementales sobre conjuntos bisimpliciales.

3.24 Definición. Un **conjunto bisimplicial** es un funtor T,

$$\begin{aligned} \Delta^{op} \times \Delta^{op} &\xrightarrow{T} \mathcal{S}et \\ (\underline{\mathbf{m}}, \underline{\mathbf{n}}) &\mapsto T_{m \times n} \end{aligned}$$

Observemos que si T es un conjunto bisimplicial, para cada $\underline{\mathbf{m}}$ se tiene el conjunto simplicial $T_{m\times -} : \Delta^{op} \to \mathcal{S}et$ que asigna a cada $\underline{\mathbf{n}}$ el conjunto $T_{m\times n}$.

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \xrightarrow{\underline{\mathbf{m}} \times id} & \Delta^{op} \times \Delta^{op} \\ & \searrow^{T_{m\times -}} & \downarrow T \\ & & \mathcal{S}et \end{array}$$

Ahora bien, si $\underline{\mathbf{m}} \xrightarrow{f} \underline{\mathbf{n}}$ en Δ, f induce un morfismo simplicial $T_{n\times -} \xrightarrow{\widetilde{f}} T_{m\times -}$ de forma canónica: dado $\underline{\mathbf{k}} \in \Delta,\ x \in T_{n\times -}(\underline{\mathbf{k}}) = T_{n\times k}$, se define

$$\widetilde{f}(x) = T(f \times id_{\underline{\mathbf{k}}})(x) \in T_{m\times k} = T_{m\times -}(\underline{\mathbf{k}})$$

por lo tanto esta asignacion $\Delta^{op} \to \mathcal{SS}et$, $\underline{\mathbf{n}} \mapsto T_{n\times -}$ es funtorial. Componiendo con la realización geométrica, tenemos el espacio simplicial

$$\Delta^{op} \to \mathcal{T}op,\ \underline{\mathbf{n}} \mapsto |T_{n\times -}|$$

Al momento de asignarle un espacio a T, bien se podría pensar en $|\underline{\mathbf{n}} \mapsto |T_{n\times -}||$. Pero esta construcción puede hacerse en orden inverso, teniendo que reparar entonces en $|\underline{\mathbf{n}} \mapsto |T_{-\times n}||$. A partir de T se tiene además el conjunto simplicial diagonal $T \circ diag$,

$$\Delta^{op} \xrightarrow{diag} \Delta^{op} \times \Delta^{op} \xrightarrow{T} \mathcal{S}et$$

Tenemos entonces un tercer espacio asociado a T, $|T \circ diag| = |\underline{\mathbf{n}} \mapsto T_{n\times n}|$.

No obstante, la siguiente proposición nos asegura que estas tres construcciones son equivalentes.

3.25 Proposición. *Dado T conjunto bisimplicial, se tienen isomorfismos naturales*

$$|\underline{\mathbf{n}} \mapsto T_{n\times n}| = |\underline{\mathbf{n}} \mapsto |T_{n\times -}|| = |\underline{\mathbf{n}} \mapsto |T_{-\times n}||$$

Demostración. Observemos en principio que las tres construcciones preservan colímites. Este hecho sigue de que $|\cdot|$ tiene adjunto a derecha, ya sea visto como funtor desde $\mathcal{S}et^{\Delta^{op}}$ o desde $\mathcal{T}op^{\Delta^{op}}$.

Tenemos $T \in \mathcal{S}et^{\Delta^{op}\times\Delta^{op}} = \mathcal{S}et^{(\Delta\times\Delta)^{op}}$. Por Yoneda, llamando h^{rs} al funtor representado por el objeto $(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{s}}) \in \Delta \times \Delta$, resulta $T = \underset{\Gamma_T}{colim}\, h^{rs}$. Por lo tanto, si probamos que $|\underline{\mathbf{n}} \mapsto h^{rs}_{n\times n}| = |\underline{\mathbf{n}} \mapsto |h^{rs}_{n\times -}|| = |\underline{\mathbf{n}} \mapsto |h^{rs}_{-\times n}||$ la proposición queda demostrada para todo T.

Observemos que

$$h^{rs}(\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{k}}) = Hom_{\Delta\times\Delta}((\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{k}}), (\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{s}})) = [\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{r}}] \times [\underline{\mathbf{k}}, \underline{\mathbf{s}}]$$

En $\mathcal{SS}et$ tenemos las siguientes igualdades de conjuntos simpliciales:

1) $\{\underline{\mathbf{n}} \mapsto h^{rs}_{n\times n}\} = \{\underline{\mathbf{n}} \mapsto [\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{r}}] \times [\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{s}}]\} = \Delta[r] \times \Delta[s]$.

2) $h^{rs}_{n\times -} = \{\underline{\mathbf{k}} \mapsto [\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{r}}] \times [\underline{\mathbf{k}}, \underline{\mathbf{s}}]\} = \{\underline{\mathbf{k}} \mapsto [\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{r}}]\} \times \Delta[s]$.

Como los símplices topológicos son localmente compactos, estos productos son respetados por el funtor realización geométrica y se tiene entonces

1) $|\underline{\mathbf{n}} \mapsto h^{rs}_{n\times n}| = |\Delta[r]| \times |\Delta[s]| = \Delta^r \times \Delta^s$, y

2) $|h^{rs}_{n\times -}| = |\{\underline{\mathbf{k}} \mapsto [\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{r}}]\}| \times |\Delta[s]| = [\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{r}}] \times \Delta^s$, con $[\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{r}}]$ espacio discreto.

Luego, a partir de 2) sigue que

$$|\underline{\mathbf{n}} \mapsto |h^{rs}_{n\times -}|| = |\underline{\mathbf{n}} \mapsto [\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{r}}] \times \Delta^s| = \coprod_n ([\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{r}}] \times \Delta^s) \times \Delta^n \;/\; \sim = \Delta^r \times \Delta^s$$

Procediendo similarmente para la doble realización en el otro orden queda demostrada la proposición para los conjuntos bisimpliciales representables $T = h^{rs}$. Como mencionamos antes, ésto alcanza para que la igualdad se mantenga válida para todo T. □

Pasemos entonces al teorema antes mencionado:

3.26 Teorema A de Quillen. *Sean dadas categorías C y D y un funtor $F : C \to D$. Si Y/F es contráctil para todo objeto $Y \in D$ entonces F es una equivalencia homotópica.*

Este teorema admite una versión dual en virtud de 3.3:

Si F/Y es contráctil $\forall\ Y \in D$ entonces F es eqivalencia homotópica.

La equivalencia entre ambos enunciados resulta de observar que $F : C \to D$ y $F^{op} : C^{op} \to D^{op}$ inducen en los espacios clasificantes la misma funcion celular (vía la identificacion 3.3).

3.27 Observación importante. Veamos que consecuencias tiene este teorema en el contexto de los complejos simpliciales.

Un morfismo entre complejos $f : K \to L$ induce una función continua entre los poliedros $|f| : |K| \to |L|$. Sabemos que $|f| = |sd(f)| = B\widetilde{f}$ donde $\widetilde{f} : I_K \to I_L \in \mathcal{P}oSet$, es la función entre los símplices de K y L ordenados por la inclusión $\subset$.

Por el Teorema A, el morfismo $B\widetilde{f}$ es equivalencia homotópica si $\widetilde{f}/\sigma$ es contráctil para todo $\sigma \in I_L$.

$$\widetilde{f}/\sigma = \{(\alpha, \phi)\ /\ \alpha \in I_K,\ \widetilde{f}\alpha \xrightarrow{\phi} \sigma \in I_L\}$$

Como las únicas flechas en I_L son las inclusiones,

$$\begin{aligned}\widetilde{f}/\sigma &= \{\alpha\ /\ \alpha \text{ es simplex de } K,\ f(\alpha) \subset \sigma\} \\ &= I_{f^{-1}(\sigma)}\end{aligned}$$

De donde $B(\widetilde{f}/\sigma) = B(I_{f^{-1}(\sigma)})$ es la subdivisión del subcomplejo pleno de K sobre el conjunto $f^{-1}(\sigma)$. Por lo tanto, el teorema A nos dice que f es equivalencia homotópica si la preimagen de cada símplex de $|L|$ es contráctil.

Es interesante notar como, a partir de la información de las fibras, se obtiene información global.

Con las propiedades antes mencionadas sobre conjuntos bisimpliciales paso a demostrar el teorema A:

Demostración de 3.26. Sea $F : C \to D$ tal que Y/F es contráctil para todo $Y \in D$. Consideremos $T : \Delta^{op} \times \Delta^{op} \to \mathcal{S}et$ donde un elemento de $T_{m\times n}$ es un par de diagramas

$$(Y_m \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 \to FX_0,\ X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n)$$

y donde las caras y degeneraciones consisten en quitar o repetir el objeto indicado.

Sea $S(F)$ la categoría definida por:

$$Obj = \{(X, Y, v)\ /\ X \in C,\ Y \in D \text{ y } Y \xrightarrow{v} FX\},$$

$$Fl = \{(X, Y, v) \xrightarrow{(\phi,\psi)} (X', Y', v')\ /\ Y' \xrightarrow{\phi} Y,\ X \xrightarrow{\psi} X' \text{ y } F\psi \circ v \circ \phi = v'\}.$$

Las proyecciones desde $S(F)$ en la primera y segunda coordenada son funtoriales. Se tiene así $C \xleftarrow{p_1} S(F) \xrightarrow{p_2} D^{op}$.

Observemos que el nervio $NS(F)$ coincide con $\{\underline{\mathbf{n}} \mapsto T_{n\times n}\}$, el conjunto simplicial diagonal de T, bajo la identificación

$$\begin{array}{ccccc} Y_0 & & Y_1 & \cdots & Y_n \\ \downarrow & \xrightarrow{(\phi_1,\psi_1)} & \downarrow & \xrightarrow{(\phi_2,\psi_2)} \cdots \xrightarrow{(\phi_n,\psi_n)} & \downarrow \\ FX_0 & & FX_1 & \cdots & FX_n \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} Y_0 \xleftarrow{\phi_1} Y_1 \xleftarrow{\phi_2} \cdots \xleftarrow{\phi_n} Y_n \\ {\scriptstyle v_0}\downarrow \\ FX_0 \xrightarrow{F\psi_1} FX_1 \xrightarrow{F\psi_2} \cdots \xrightarrow{F\psi_n} FX_n \end{array}$$

por lo tanto $|T| = |\underline{\mathbf{n}} \mapsto T_{n\times n}| = BS(F)$.
De aquí que Bp_1 sea la realización geométrica del morfismo $T \xrightarrow{\pi_2} NC$.

Se puede ver $T \xrightarrow{\pi_2} NC$ como morfismo entre conjuntos bisimpliciales, tomando $NC_{m\times n} = NC_n$ para cada m, y considerando las caras y degeneraciones en la dirección m iguales a la identidad. Este morfismo, al realizar respecto a la primer coordenada, induce otro de espacios simpliciales $\{\underline{\mathbf{n}} \mapsto |T_{-\times n}|\} \xrightarrow{\lambda} \{\underline{\mathbf{n}} \mapsto NC_n\}$.

Como

$$|T_{-\times n}| = \coprod_{X_0\to\cdots\to X_n} B(D/FX_0)^{op}$$

y como cada $B(D/FX_0)^{op}$ tiene objeto final y por lo tanto es contráctil, concluimos que

$$\coprod_{X_0\to\cdots\to X_n} B(D/FX_0)^{op} \xrightarrow{\lambda_n} \coprod_{X_0\to\cdots\to X_n} singleton = NC_n$$

es una equivalencia homotópica para cada n.

Sigue de un resultado de May y Tornehave ([Ma2]. Ver también [Se2], ap. A y nuestra nota 2.20) que $|\lambda|$ es equivalencia homotópica, y por lo tanto p_1 lo es.

Notemos que p_1 siempre resulta equivalencia homotópica. Usando la hipótesis de que Y/F es contráctil para todo objeto $Y \in D$, probaremos que p_2 también es equivalencia homotópica.

De forma similar a lo hecho con p_1, se tiene un morfismo de espacios bisimpliciales $T \xrightarrow{\pi_1} ND^{op}$ dejando constante ND^{op} respecto a la coordenada n, cuya realización es Bp_2. Realizando respecto de la segunda coordenada, obtenemos el morfismo de espacios simpliciales

$$\coprod_{Y_0\leftarrow\cdots\leftarrow Y_m} B(Y_0/F) \xrightarrow{\lambda_m} \coprod_{Y_0\leftarrow\cdots\leftarrow Y_m} singleton = (ND^{op})_m$$

que es una equivalencia homotópica para cada m, pues las categorías Y/F son contráctiles por hipótesis. Sigue que p_2 es equivalencia homotópica.

Las flechas horizontales del siguiente diagrama conmutativo son equivalencias homotópicas

$$\begin{array}{ccccc} D^{op} & \xleftarrow{p_2} & S(F) & \xrightarrow{p_1} & C \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle F'} & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ D^{op} & \xleftarrow{p_2'} & S(id_D) & \xrightarrow{p_1'} & D \end{array}$$

donde $F'(X,Y,v) = (FX,Y,v)$. Que p_1, p_2 y p_1' lo son ya lo hemos probado. El funtor p_2' también es equivalencia homotópica pues, como obsevamos en 3.22, $Y/id_D = Y/D$ tiene objeto inicial (Y, id_Y) y por lo tanto es contráctil y seguimos en las condiciones del análisis anterior.

Como $p_2 = F' \circ p_2'$, BF' también tiene inversa homotópica y F' es equivalencia. Por último, basta notar que $p_1' \circ F' = F \circ p_1$ y del mismo modo resulta F equivalencia, lo que termina la demostración. □

Fibraciones y el teorema A

En el SGA 1, Alexander Grothendieck da una definición para fibraciones y cofibraciones entre categorías. Una pre-fibración $F : C \to D$ satisface que, dado $Y \in D$, la inclusión $F^{-1}(Y) \hookrightarrow Y/F$ admite un adjunto a derecha. Dualmente, si $F : C \to D$ es un pre-cofibración entonces los funtores $F^{-1}(Y) \hookrightarrow F/Y$ tienen adjunto a izquierda. La existencia de funtores adjuntos entre categorías da una equivalencia homotópica entre los espacios clasificantes (3.18). En estos casos es, por lo tanto, mayor el alcance del teorema A de Quillen, pues la hipótesis $F^{-1}(Y)$ contráctil $\forall\, Y \in D$ ya asegura que F sea una equivalencia homotópica.

Pasemos entonces a definir estos conceptos. Sea $C \xrightarrow{F} D$ un funtor. Dado $S \in D$, notamos con $F^{-1}(S)$ la fibra sobre S, i.e., la categoría formada por los objetos cuya imagen común es S y las flechas cuya imagen es id_S.

3.28 Definición. Decimos que $X \xrightarrow{f} Y$ es **cartesiana** si $X \in F^{-1}(S)$, $Y \in F^{-1}(T)$, $F(f) = \phi : S \to T$ y cumple que, para todo $X' \in F^{-1}(S)$, $X' \xrightarrow{g} Y$ tal que $F(g) = \phi$, existe una única $\widetilde{g} \in F^{-1}(S)$, $X' \xrightarrow{\widetilde{g}} X$ tal que $f \circ \widetilde{g} = g$.

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ {\scriptstyle \exists!\ \widetilde{g}}\ \downarrow & \searrow^{g} & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$$S \xrightarrow{\phi} T$$

En general, una composición de flechas cartesianas no tiene por qué serlo. En tal sentido, se tiene la siguiente definición.

3.29 Definición. El funtor $C \xrightarrow{F} D$ es una **fibración** si cumple estas condiciones.

i) Dada una flecha $S \xrightarrow{\phi} T$ y un objeto $Y \in F^{-1}(T)$, existen $X \in F^{-1}(S)$ y $X \xrightarrow{f} Y$ tal que $F(f) = \phi$ y f es cartesiana.

ii) Morfismos cartesianos componen.

Si F satisface sólo i) recibe el nombre de **pre-fibración**.

3.30 Ejemplo. Sea D una categoría con pull-backs. Sea C la categoría cuyos objetos son las flechas de D, y donde un morfismo $(X \xrightarrow{g} Y) \to (X' \xrightarrow{g'} Y')$ es un par (η_1, η_2) de flechas de D tal que $\eta_2 \circ g = g' \circ \eta_1$. Sea $F : C \to D$ el funtor que a cada flecha le da su codominio. Entonces F es una fibración, donde la flecha cartesiana sobre ϕ con codominio g está dada por el pull-back entre ϕ y g.

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \text{PULL} & \downarrow g \\ S & \xrightarrow{\phi} & T \end{array}$$

Consideremos una pre-fibración $F : C \to D$ y S un objeto de D. Si Y es un objeto de C y $\phi : S \to T = F(Y)$ una flecha en D, la existencia de un morfismo cartesiano $f : X \to Y$ sobre cada flecha $S \to T$ de D nos permite relacionar al par $(Y, \phi) \in S/F$ con el objeto $X \in F^{-1}(S)$. Notaremos $X = X(Y, \phi)$ y $f = f(Y, \phi)$.

La elección de f (y por lo tanto la de X) es arbitraria para cada Y. No obstante, vale lo siguiente.

3.31 Proposición. *Elijamos para cada Y una f como antes. La asignación $(Y, \phi) \mapsto X$ no sólo resulta funtorial, si no que, además, el funtor inducido es adjunto a derecha de la inclusión $X \in F^{-1}(S) \mapsto (X, id_S) \in S/F$.*

Demostración. Sean (Y, ϕ), (Y', ϕ') objetos de S/F y sean $X = X(Y, \phi)$ y $X' = X(Y', \phi')$ sus imágenes. Una flecha $h : (Y, \phi) \to (Y', \phi') \in S/F$ es un morfismo $h : Y \to Y'$ de C tal que $F(h) \circ \phi = \phi'$. Debemos asociar a h otra flecha $g : X \to X' \in F^{-1}(S)$ respetando composiciones e identidades.

Si $f = f(Y, \phi)$ y $f' = f(Y', \phi')$, se tiene el siguiente diagrama.

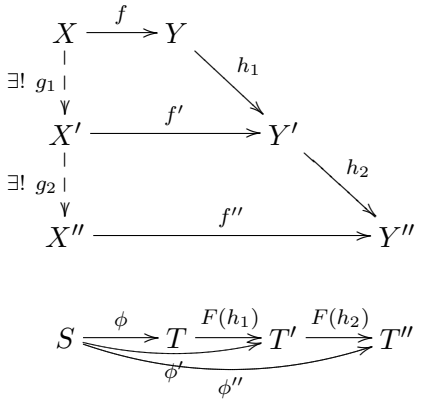
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \exists!\ g}\ \downarrow & & \searrow^{h} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

$$S \xrightarrow{\phi} T \xrightarrow{F(h)} T', \qquad S \xrightarrow{\phi'} T'$$

Como f' es cartesiana, existe una única $g = \widetilde{h \circ f} : X \to X'$ en $F^{-1}(S)$ tal que $f' \circ g = h \circ f$.

(i) Si $Y = Y'$ y $h = id_Y$, entonces id_X hace conmutar el diagrama anterior y, por unicidad de g, resulta $g = id_y$. Luego se respetan las identidades.

(ii) Si $h_1 : (Y, \phi) \to (Y', \phi')$ y $h_2 : (Y', \phi') \to (Y'', \phi'')$ son flechas en S/F, tenemos el diagrama



Como f'' es cartesiana y $f'' \circ (g_2 \circ g_1) = h_2 \circ h_1 \circ f$, concluimos que nuestra asignación también respeta composiciones y por lo tanto es funtorial.

Resta probar que $\{X \mapsto (X, id_S)\} \dashv \{(Y, \phi) \mapsto X(Y, \phi)\}$. Pero esto es inmediato: la función natural

$$Hom_{F^{-1}(S)}(X, X(Y,\phi)) \xrightarrow{f_*} Hom_{S/F}((X, id_S), (Y, \phi))$$
$$u \mapsto f \circ u$$

es una biyección por propiedad universal del morfismo cartesiano $f = f(Y, \phi)$.

□

Denotando con $\phi^*(Y)$ a $X(Y, \phi)$, tenemos para cada morfismo $\phi : S \to T$ un funtor $\phi^* : F^{-1}(T) \to F^{-1}(S)$, determinado salvo isomorfismos canónicos, y llamado **cambio de base respecto a** ϕ. Es inmediato que F es una fibración si y sólo si para cada par de flechas componibles ϕ, ϕ' en D,

$$\phi^* \circ \phi'^* \to (\phi' \circ \phi)^*$$

es un isomorfismo de funtores.

Definiciones duales se tienen para cofibraciones y pre-cofibraciones, obteniéndose un adjunto ahora para la inclusión $F^{-1}(S) \hookrightarrow F/S$.

En virtud de lo probado anteriormente, tenemos la siguiente extensión del teorema A de Quillen.

3.32 Teorema. *Sea $F : C \to D$ una pre-fibración o una pre-cofibración. Si $F^{-1}(S)$ es contráctil para todo objeto S de D, entonces F es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Sea F una pre-fibración. Según lo comentado al iniciar la sección, basta con observar que la adjunción probada antes implica que $B(S/F)$ es equivalente homotópico a $B(F^{-1}(S))$, y aplicar el teorema A.

Si F una pre-cofibración, la demostración es análoga. □

Como ejemplo, Quillen propone en [Q] el siguiente.

3.33 Ejemplo. Sea $S(C)$ la categoría cuyos objetos son las flechas de C y los morfismos están dados por

$$Hom_{S(C)}(X \xrightarrow{u} Y, X' \xrightarrow{u'} Y') = \{(v,w) \ / \ v : X' \to X,\ w : Y \to Y' \text{ y } u' = wuv\}.$$

Tomar dominio y codominio induce funtores $\partial_1 : S(C) \to C^{op}$, $\partial_0 : S(C) \to C$ respectivamente. Es fácil ver que ambos son cofibraciones. Las categorías $\partial_1^{-1}(X) = X/C$ y $\partial_0^{-1}(Y) = (C/Y)^{op}$ tienen objeto inicial, luego son contráctiles (ver 3.19) y por lo tanto ∂_0 y ∂_1 son equivalencias homotópicas entre las categorías. Componiendo estas equivalencias se obtiene una representación via funtores de la equivalencia homotópica entre C y C^{op}, mencionada en 3.3.

Esta extensión del teorema A de Quillen se ve favorecida por la abundante existencia de fibraciones.

Como mencionamos antes, dada una pre-fibración $F : C \to D$, cada flecha $S \to T$ induce el funtor de cambio de base entre las fibras $F^{-1}(T) \xrightarrow{\phi^*} F^{-1}(S)$. Además, si F es fibración, componer dos cambios de base es el cambio de base de la composición, por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : D^{op} &\to \mathcal{C}at \\ S &\mapsto F^{-1}(S) \\ \phi &\mapsto \phi^* \end{aligned}$$

es un funtor contravariante entre D y $\mathcal{C}at$.

Y viceversa: Dado un funtor $\mathcal{F} : D^{op} \to \mathcal{C}at$, construimos una categoría C y una fibración $F : C \to D$. Definamos

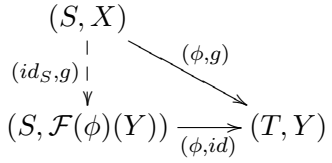
$Obj\ C = \{(S,X) \ / \ S \in Obj\ D, X \in Obj\ \mathcal{F}^{-1}(S)\}$, y

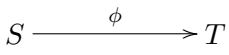
$Fl\ C = \{(S,X) \xrightarrow{(\phi,g)} (T,Y) \ / \ \phi : S \to T \text{ y } g : X \to \mathcal{F}(\phi)(Y)\}$.

Sea $F : C \to D$ dado por $F(S,X) = S$ y $F(\phi, g) = \phi$. Cada flecha

$$(S, \mathcal{F}(\phi)(Y)) \xrightarrow{(\phi,id)} (T,Y)$$

es cartesiana pues, si (ϕ, g) es otra flecha sobre ϕ, (id_S, g) es el único morfismo en la fibra de S que hace conmutar el diagrama.





Luego F es una pre-fibración. Como además los cambios de base componen trivialmente, F es fibración.

Estas construcciones son mutuamente inversas, dando lugar al siguiente resultado.

3.34 Proposición. *Dada $D \in \mathcal{C}at$, existe una correspondencia natural entre fibraciones $F : C \to D$ y funtores $\mathcal{F} : D^{op} \to \mathcal{C}at$.*

En el caso particular en que $\mathcal{F} : D^{op} \to \mathcal{S}et$, se puede ver $\mathcal{F}(S)$ como una categoría discreta para cada $S \in D$. Esta construcción da entonces el diagrama $\Gamma_{\mathcal{F}}$ del funtor $\mathcal{F}$, introducido en 1.7. La proyección en la primera coordenada $\Gamma_{\mathcal{F}} \to D$ recibe recibe entonces el nombre de **fibración discreta** de $\mathcal{F}$.

Observemos que en el ejemplo 3.33, Quillen está considerando la fibración discreta sobre el funtor $Hom : (C \times C^{op})^{op} \to \mathcal{S}et$.

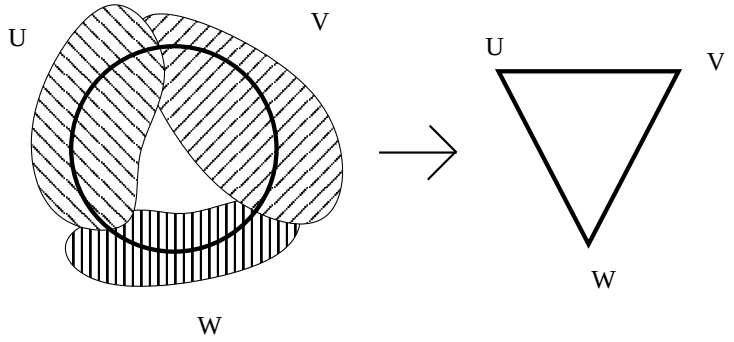
4 Espacios asociados a un cubrimiento

4.1 Definición. Dado un conjunto X y una colección $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X que satisfacen $\bigcup_{i\in I} U_i = X$, se definen los siguientes complejos simpliciales.

- $N\mathcal{U}$ es el **nervio** del cubrimiento $\mathcal{U}$. Sus vértices son los subconjuntos U_i, es decir, $V_{N\mathcal{U}} = \mathcal{U}$. Los símplices se definen como sigue.

$$\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\} \text{ es } n\text{-símplex} \Leftrightarrow \bigcap_{j=1}^{n} U_{i_j} \neq \emptyset, \ i.e. \ \exists\ x \in X \ / \ x \in \bigcap_{j=1}^{n} U_{i_j}$$

  Por ejemplo, si $X = S^1$ y $\mathcal{U}$ está dado como en el dibujo, $N\mathcal{U} = \partial\Delta[2]$ que "casualmente" tiene el mismo tipo homotópico.



- $V\mathcal{U}$ es el **complejo de Vietoris** asociado a $\mathcal{U}$. El conjunto de vértices de $V\mathcal{U}$ coincide con X, y dado $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$,

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \text{ es n-símplex } \Leftrightarrow \exists\ U \in \mathcal{U} \ / \ \{x_1, \ldots, x_n\} \subset U$$

- A $F\mathcal{U}$ lo llamaré **complejo de banderas** de $\mathcal{U}$. Tiene como vértices los elementos de $\mathcal{U}$ y sus n-símplices $\{U_0 \subset \cdots \subset U_n\}$ son los subconjuntos totalmente ordenados (o banderas) de longitud $n+1$ incluídas en $(\mathcal{U}, \subset)$.

A partir de estas definiciones podemos asignarle al par $(X, \mathcal{U})$ tres espacios topológicos, tomando la realización geométrica de alguno de los complejos anteriores. Sin embargo, como veremos a continuación, los espacios $|N\mathcal{U}|$ y $|V\mathcal{U}|$ siempre tienen el mismo tipo homotópico, y bajo ciertas condiciones $|F\mathcal{U}|$ será homotópico a cualquiera de los dos anteriores. Con todo, las propiedades topológicas de estos espacios nos dan información sobre la estructura del cubrimiento $\mathcal{U}$. En esta sección estudiaré las propiedades elementales de estos complejos, basándome en lo publicado por Herbert Abels y Stephan Holz en ([A-H],I), y exponiendo demostraciones alternativas a las que allí aparecen.

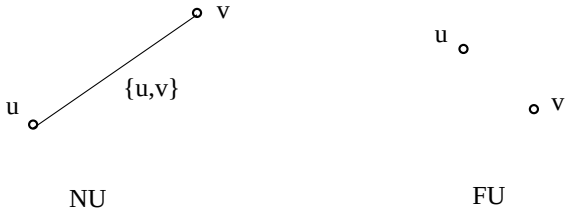
Pasemos entonces a enunciar el primero de estos resultados. Para su demostración usaré el Teorema A de Quillen (3.26) tratado en la sección anterior.

4.2 Teorema. *Dado X un conjunto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento, si $\mathcal{U}$ satisface que*

$$\forall\ U,V \in \mathcal{U},\ U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}$$

entonces existe una equivalencia homotópica natural $|N\mathcal{U}| \cong |F\mathcal{U}|$.

Observemos que en general $|N\mathcal{U}|$ no es homotópico a $|F\mathcal{U}|$. Por ejemplo, consideremos el caso en que $\mathcal{U} = \{U, V\}$ con $X = U \cup V$ y $U \cap V$ distinto de U, de V y de $\emptyset$. La realización geométrica del nervio es el 1-símplex, pero en cambio $|F\mathcal{U}|$ consta de 2 puntos aislados al no haber en $\mathcal{U}$ banderas no triviales.



Demostración. Sea $I_{N\mathcal{U}}$ el poset de los símplices de $N\mathcal{U}$ ordenados por la inclusión. La función $f : I_{N\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ definida por $f(\tau) = U_\tau = \bigcap_{i\in\tau} U_i$ invierte el orden pues, cuanto más grande es τ, más subconjuntos de X intersecamos al aplicar f. Podemos ver entonces a f como un funtor $I_{N\mathcal{U}} \to \mathcal{U}^{op}$.

Dado $U \in \mathcal{U}^{op}$, $f/U = \{\tau \in N\mathcal{U} \ /\ U_\tau \supset U\}$ es un conjunto dirigido. Por lo tanto induce una categoría filtrante y resulta contráctil por 3.23. Luego, por el teorema A,

$$Bf : BI_{N\mathcal{U}} \to B(\mathcal{U}^{op}, \subset)$$

es una equivalencia homotópica. Como $BI_{N\mathcal{U}} \cong |N\mathcal{U}|$ y $N(\mathcal{U}^{op}, \subset) = \widetilde{F\mathcal{U}}$ (ver 3.2), queda probado el teorema.

□

Compararemos ahora el complejo de Vietoris con el nervio de un cubrimiento. En este sentido, es válido el siguiente teorema.

4.3 Teorema. *Dado X un conjunto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento, existe una equivalencia homotópica*

$$|N\mathcal{U}| \cong |V\mathcal{U}|$$

Este teorema es consecuencia de un enunciado más general, que se aplica a partir de la dualidad que existe entre ambas construcciones: mientras $N\mathcal{U}$ tiene como símplices aquellos conjuntos $\{U_1, \ldots, U_n\}$ para los que existe $x \in X$ con $x \in U_i\ \forall\ i$, los símplices de $V\mathcal{U}$ son del tipo $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $x_i \in U\ \forall\ i$ para un $U \in \mathcal{U}$.

En general, dados X e Y dos conjuntos y R una relación entre ellos ($R \subset X \times Y$), escribamos xRy si el par (x, y) está en R.

4.4 Definición. Definimos dos complejos simpliciales asociados a R como sigue.

(a) $K = K_R$ tiene por vértices al conjunto X, y $\{x_0, \ldots, x_p\} \subset X$ es p-símplex sii $\exists\ y \in Y\ /\ x_i R y\ \forall\ i$.

(b) $L = L_R$ tiene por vértices al conjunto Y, y $\{y_0, \ldots, y_q\} \subset Y$ es q-símplex sii $\exists\ x \in X\ /\ x R y_i\ \forall\ i$.

4.5 Teorema. *Existe una equivalencia homotópica natural* $|K| \cong |L|$.

En particular, cuando $Y = \mathcal{U}$ y $(xRU \Leftrightarrow x \in U)$, resulta $K = V\mathcal{U}$, $L = N\mathcal{U}$. Este resultado se prueba en [B-B-M-P] usando la noción de morfismos simpliciales **contiguos**. Propongo aquí otra demostración.

Demostración. Llamemos T al conjunto

$$T = \{(\alpha, \beta)\ /\ \alpha \subset X,\ \beta \subset Y,\ \alpha, \beta \text{ finitos y } xRy\ \forall\ x \in \alpha,\ y \in \beta\}$$

Definamos en T el orden $(\alpha, \beta) \leqslant (\alpha', \beta')$ si $\alpha \subset \alpha'$ y $\beta \subset \beta'$. Siendo I_K e I_L los símplices de K y L respectivamente ordenados por la inclusión, las proyecciones $T \xrightarrow{p_1} I_K$, $T \xrightarrow{p_2} I_L$ preservan el orden.

Pensamos p_1 y p_2 como funtores entre las categorías inducidas por estos posets. Si vemos que son equivalencias homotópicas, resultarán BI_K y BI_L del mismo tipo homotópico y por 3.2 quedaría probado el teorema.

Para ver que p_1 es una equivalencia homotópica usemos el teorema A. Dado $\sigma \in I_K$, σ es un símplex de K y

$$\sigma/p_1 = \{(\alpha, \beta)\ /\ \sigma \subset \alpha\}$$

Para ver que esta categoría es contráctil usamos de nuevo el teorema A, esta vez con $p_2 : \sigma/p_1 \to \{\beta\ /\ (\sigma, \beta) \in T\}$. Dado $\tau \in \{\beta\ /\ (\sigma, \beta) \in T\}$,

$$\begin{aligned} \tau/p_2 &= \{(\alpha, \beta) \in T\ /\ \sigma \subset \alpha,\ \tau \subset \beta\} \\ &= \{(\alpha, \beta) \in T\ /\ (\sigma, \tau) \leqslant (\alpha, \beta)\} \end{aligned}$$

Vale que τ/p_2 es contráctil pues tiene objeto inicial (σ, τ), por lo que σ/p_1 es equivalente homotópico a $\{\beta\ /\ (\sigma, \beta) \in T\}$.

Dados (σ, β), (σ, β') en T, por definición resulta $xRy\ \forall x \in \sigma,\ y \in \beta$ y $xRy\ \forall x \in \sigma$, $y \in \beta'$. Por lo tanto $(\sigma, \beta \cup \beta') \in T$ y $\{\beta\ /\ (\sigma, \beta) \in T\}$ es dirigido, luego contráctil.

Finalmente, σ/p_1 también es contráctil para todo $\sigma \in I_K$ y por el teorema A p_1 es equivalencia homotópica.

De la misma forma se prueba que p_2 es equivalencia homotópica y se concluye que

$$|K| = BI_K \cong BT \cong BI_L = |L|$$

□

Sean dados X un conjunto, $\mathcal{U}$ un cubrimiento y $\mathcal{B}$ un refinamiento de éste.
Si $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ y $\mathcal{B} = \{V_j \mid j \in J\}$, existe una función $\rho : J \to I$ tal que $V_j \subset U_{\rho(j)}$.

Construimos $T\mathcal{U}$ como en la demostración de 4.5. Las equivalencias homotópicas $T\mathcal{U} \to N\mathcal{U}$ y $T\mathcal{U} \to V\mathcal{U}$ son naturales respecto a ρ.

Se tienen una inclusión canónica $V\mathcal{B} \hookrightarrow V\mathcal{U}$ y un morfismo entre complejos simpliciales inducido por ρ, $N\mathcal{B} \xrightarrow{\phi} N\mathcal{U}$, dado por $\phi(V_j) = U_{\rho(j)}$.

Del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V\mathcal{B} & \xleftarrow{p_2} & T\mathcal{B} & \xrightarrow{p_1} & N\mathcal{B} \\ \downarrow & & & & \downarrow \phi \\ V\mathcal{U} & \xleftarrow{p_2'} & T\mathcal{U} & \xrightarrow{p_1'} & N\mathcal{U} \end{array}$$

sigue que ϕ no depende de ρ salvo equivalencias homotópicas.

Cada vez que tenemos un conjunto X y un cubrimiento $\mathcal{U}$, podemos cerrar $\mathcal{U}$ por intersecciones finitas no vacías, obteniendo un nuevo cubrimiento $\widetilde{\mathcal{U}}$. Según lo anterior. la inclusión $V\widetilde{\mathcal{U}} \hookrightarrow V\mathcal{U}$ es en este caso una igualdad, $\widetilde{\mathcal{U}}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ y la función ρ se puede elegir de forma tal que sea una retracción para la inclusión $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{U}}$ (basta tomar ρ' cualquiera y definir $\rho(V) = \begin{cases} \rho'(V) & \text{si } V \notin \mathcal{U} \\ V & \text{si } V \in \mathcal{U} \end{cases}$).

Por lo tanto $N\mathcal{U}$ es un retracto de $N\widetilde{\mathcal{U}}$ y la inclusión

$$N\mathcal{U} \hookrightarrow N\widetilde{\mathcal{U}}$$

es una equivalencia homotópica ya que $\phi : N\widetilde{\mathcal{U}} \to N\mathcal{U}$ lo es. Si recordamos que $|F\widetilde{\mathcal{U}}| \cong |N\widetilde{\mathcal{U}}|$, tenemos

4.6 Proposición. *El nervio de un cubrimiento $\mathcal{U}$ es equivalente homotópico al complejo de banderas de su cerramiento $\widetilde{\mathcal{U}}$.*

En [A-H] se definen también algunos conjuntos simpliciales asociados a un cubrimiento $\mathcal{U}$ de X, de forma similar a lo hecho con los complejos $N\mathcal{U}$, $V\mathcal{U}$ y $F\mathcal{U}$.

4.7 Definición.

- $N^{simp}\mathcal{U}$ es el conjunto simplicial cuyos k-símplices son las tiras $(U_0, \dots, U_k)$ de elementos de $\mathcal{U}$ tales que $U_0 \cap \cdots \cap U_k \neq \emptyset$ con las caras y degeneraciones usuales (d_i quita el elemento i y s_j repite el j).
- $V^{simp}\mathcal{U}$ es el conjunto simplicial cuyos k-símplices son las tiras $(x_0, \dots, x_k)$ de elementos de X tales que existe $U \in \mathcal{U}$ con $x_j \in U \ \forall\ j$.
- El conjunto simplicial $F^{simp}\mathcal{U}$ tiene como k-símplices los subconjuntos totalmente ordenados (o banderas) de longitud k incluídas en $(\mathcal{U}, \subset)$. O sea, $F^{simp}\mathcal{U} = NI_{F\mathcal{U}}$.

Que $|F^{simp}\mathcal{U}| = |F\mathcal{U}|$ es claro pues $|F^{simp}\mathcal{U}| = BI_{F\mathcal{U}}$ y por lo visto en 3.2. También se tienen equivalencias homotópicas naturales

$$|V^{simp}\mathcal{U}| \to |V\mathcal{U}|$$
$$|N^{simp}\mathcal{U}| \to |N\mathcal{U}|$$

como probaremos a continuación.

La forma en que se obtienen los conjuntos simpliciales $V^{simp}\mathcal{U}$ y $N^{simp}\mathcal{U}$ a partir de $V\mathcal{U}$ y $N\mathcal{U}$ pueden ser comprendidas como una misma forma de construir un conjunto simplicial a partir de un complejo K, distinta a la asignación $K \mapsto \widetilde{K}$ descrita en 2.3.

4.8 Definición. Dado K complejo simplicial, definimos $\widehat{K}$ conjunto simplicial de la siguiente forma.

$$\widehat{K}_n = \{(x_0, \ldots, x_n)/\ x_i \text{ vértice de } K, \{x_0, \ldots, x_n\} \text{ símplex en } K\}$$
$$d_i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \text{ quita } x_i$$
$$s_j(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_j, x_j, \ldots, x_n)$$

4.9 Observación. La asignación $K \mapsto \widehat{K}$ es funtorial.

El siguiente teorema garantiza entonces las igualdades anteriores, además de resultar de interés por sí mismo.

4.10 Teorema. *Sea K un complejo simplicial. Se tienen $\widetilde{K}$ y $\widehat{K}$ construidos como antes. Existe una equivalencia homotópica natural $|\widehat{K}| = |\widetilde{K}|$.*

Demostración. Dado Y conjunto simplicial, recordemos que Y es un funtor $\Delta^{op} \to \mathcal{S}et$. Sea Γ_Y el diagrama de este funtor y $N\Gamma_Y$ su nervio. De acuerdo a las notaciones usadas en [Se2] y [A-H], se tiene $simp(Y) = \Gamma_Y$.

Construyamos a continuación un morfismo simplicial $f : N\Gamma_Y \to Y$. A partir de los isomorfismos naturales

$$N\Gamma_Y \cong \operatorname*{colim}_{\Gamma_Y} N\Gamma_{\Delta[n]}$$

y

$$Y \cong \operatorname*{colim}_{\Gamma_Y} \Delta[n]$$

(ver [W]) el morfismo queda unívocamente determinado por los valores que toma en los símplices $\Delta[n]$.

Un m-símplex s de $N\Gamma_{\Delta[n]}$ es un par $(\underline{\mathbf{n}}_0 \xrightarrow{a_0} \underline{\mathbf{n}}_1 \xrightarrow{a_1} \ldots \xrightarrow{a_{m-1}} \underline{\mathbf{n}}_m, y)$. Como y es un elemento de $\Delta[n](\underline{\mathbf{n}}_m) = Hom_\Delta(\underline{\mathbf{n}}_m, \underline{\mathbf{n}})$, notamos $a_m = y$ y asociamos a s el m-símplex $b_s : \underline{\mathbf{m}} \to \underline{\mathbf{n}} \in \Delta[n]$ dado por los últimos vértices de cada símplex $\underline{\mathbf{n}}_i$, es decir,

$$b_s(i) = a_m a_{m-1} \ldots a_i(n_i).$$

$N\Gamma_{\Delta[n]}$ es contráctil pues $\Gamma_{\Delta[n]}$ tiene objeto final. Luego el morfismo $N\Gamma_{\Delta[n]} \to \Gamma_{\Delta[n]}$ es una equivalencia homotópica. En virtud del "lema de pegado" ([Se2], ap. A) resulta en general $f : N\Gamma_Y \to Y$ equivalencia homotópica. Sea entonces $f : N\Gamma_{\widehat{K}} \to \widehat{K}$ esta equivalencia.

Tenemos por otro lado el funtor

$$g : N\Gamma_{\widehat{K}} \to I_K$$
$$(\underline{\mathbf{n}}, (x_0, \ldots, x_n)) \mapsto \{x_0, \ldots, x_n\}$$

Dado $\sigma \in I_K$, g/σ es el diagrama del nervio de la categoría C, cuyos objetos son los elementos de σ y donde hay un único morfismo de x a x' para cada par de elementos x, x' de σ. El espacio clasificante $B(g/\sigma)$ tiene el mismo tipo homotópico que BC por la equivalencia anterior, y resulta contráctil pues cualquier objeto de C es un objeto final. Por teorema A, g es una equivalencia homotópica.

Finalmente, componiendo las equivalencias dadas por f y por g resulta

$$|\widehat{K}| \underset{f}{\cong} B\Gamma_{\widehat{K}} \underset{g}{\cong} BI_K = |K| = |\widetilde{K}|$$

□

Esta nueva construcción $K \mapsto \widehat{K}$ presenta la ventaja sobre la anterior $K \mapsto \widetilde{K}$ de no necesitar de un orden entre los vértices del complejo simplicial K.

Para cerrar esta sección mencionaré algunos resultados clásicos que relacionan el nervio de un cubrimiento $\mathcal{U}$ de X con el mismo X, en el caso en que éste ya sea un espacio topológico y que los elementos de $\mathcal{U}$ satisfagan ciertas condiciones.

El siguiente teorema es presentado por T. tom Dieck. Ver como referencias [tD] y [V].

4.11 Teorema (tom Dieck). *Sean $\{U_i\}_{i\in J}$ y $\{V_i\}_{i\in J}$ cubrimientos abiertos numerables (i.e. admiten partición de la unidad localmente finita subordinada al cubrimiento) de X e Y respectivamente. Para cada subconjunto finito a de J notamos $U_a = \bigcap_{i\in a} U_i$. Idem con V_a. Si $f : X \to Y$ es una función continua que manda cada U_a en V_a, y tal que la restricción $f : U_a \to V_a$ es equivalencia homotópica para cada a, entonces f es equivalencia homotópica.*

Para el caso $Y = |N\mathcal{U}|$ y $V_i = st(U_i)$, a partir de este teorema se pueden obtener condiciones suficientes para que X y $|N\mathcal{U}|$ sean equivalentes homotópicos. Donde

$$st(U_i) = \{\alpha \in |N\mathcal{U}|, \alpha(U_i) \neq 0\}$$

(ver página 13).

Otros resultados que involucran el nervio de un cubrimiento, particiones de la unidad y cohomología de Cech se pueden encontrar en [D] y [B-T].

5 Atlas de Grupoides

Acciones globales

Las acciones globales fueron introducidas por A. Bak en [B], con la motivación de proveer un soporte algebraico que permita realizar las operaciones homotópicas necesarias en K-teoría algebraica sin pasar por la topología.

5.1 Definición. Una **acción global** A consiste en un conjunto X_A y una colección de subconjuntos de él sobre los cuales actúan grupos locales. Estas acciones, a su vez, se relacionan mediante ciertos morfismos que "pegan" en forma coherente las distintas acciones.

Más exactamente, $A = (X_A, \Phi_A, \{X_\alpha\}_\alpha, \{G_\alpha\}_\alpha)$ donde

(a) X_A es un conjunto,

(b) $\Phi_A = (\Phi_A, \leqslant)$ es un conjunto de índices con una relación reflexiva,

(c) para cada $\alpha \in \Phi$, X_α es un subconjunto de X_A sobre el cual actúa un grupo G_α, y

(d) si $\alpha \leqslant \beta$, existe $\varphi_\alpha^\beta : G_\alpha \to G_\beta$ morfismo de grupos tal que $g.x = \varphi_\alpha^\beta(g).x$ para todo $X \in X_\alpha \cap X_\beta$, $g \in G_\alpha$.

Además, $\varphi_\alpha^\alpha = id_{G_\alpha}$ y donde tengan sentido las composiciones, $\varphi_\gamma^\beta \circ \varphi_\alpha^\gamma = \varphi_\alpha^\beta$.

Sigue de la definición que $G_\alpha(X_\alpha \cap X_\beta) \subset X_\alpha \cap X_\beta$, es decir, las α-órbitas de los elementos de la intersección están incluidas en la intersección.

Cuando estemos en las condiciones $X_A = X_\alpha$ para todo α, diremos que la acción tiene **dominio simple**.

Veamos los principales ejemplos, mencionados en [B-B-M-P].

5.2 Ejemplos.

(1) El principal ejemplo es $GL(n, R)$, la **acción global general lineal** de orden n a coeficientes en el anillo R.

Un subconjunto de $\Lambda = \{(i, j) \ / \ i \neq j, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ es cerrado por transitividad (o simplemente *cerrado*) si cada vez que contiene los pares (i, j) y (j, k), también contiene el par (i, k). Consideremos Φ ordenado parcialmente por la inclusión

$$\Phi = \{\alpha \in \Lambda \ / \ \alpha \ cerrado, \ (i, i) \notin \alpha \ \forall \ i\}.$$

Sea $G_\alpha = GL(n, R)_\alpha$ el subgrupo de $GL(n, R)$ generado por las matrices

$$\{E_{ij}(r) | r \in R, (i, j) \in \alpha\},$$

donde $E_{ij}(r)$ es la matriz con 1 en la diagonal, r en el lugar (ij) y 0 en el resto.

No es difícil ver que una matriz $A \in GL(n, R)_\alpha$ si y sólo si $A_{ij} = 1$ si $i = j$ y $A_{ij} = 0$ si $(i, j) \notin \alpha$.

Demostración. Las matrices que cumplen estas condiciones son claramente cerradas por multiplicación y, como nuestros generadores las satisfacen, se tiene una inclusión. Por otro lado, si $A_{ij} = 1$ para $i = j$ y $A_{ij} = 0$ para $(i, j) \notin \alpha$, al transformar esta matriz en la identidad mediante operaciones de fila, siempre multiplicamos a izquierda por matrices elementales $E_{ij}(r)$, con $(i, j) \in \alpha$. Luego A^{-1} está en el subgrupo $GL(n, R)_\alpha$, y por lo tanto también lo está A. □

Si $\alpha \subset \beta$, tenemos un morfismo de grupos $GL(n, R)_\alpha \hookrightarrow GL(n, R)_\beta$, llamemos φ_α^β a esta inclusión.

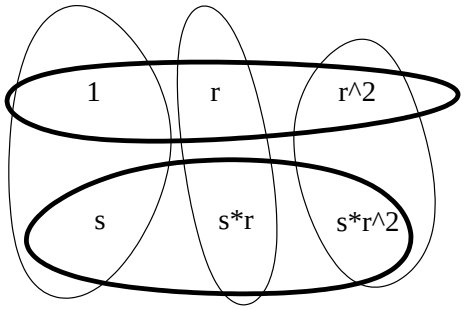
Definamos $X_\alpha = GL(n, R)$. $GL(n, R)_\alpha$ actúa sobre $GL(n, R)$ por multiplicación a izquierda.

(2) Dado G un grupo, $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in \Phi}$ una familia de subgrupos de G, Φ discreto.

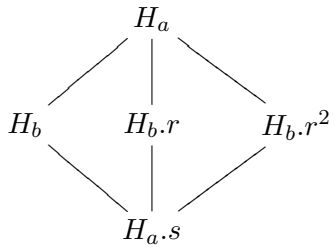
Llamamos $\mathcal{A}(G, \mathcal{H})$ a la acción global indexada por Φ donde $X_A = X_\alpha = G$ para todo $\alpha \in \Phi$, y donde cada H_α actúa por multiplicación a izquierda sobre G.

(3) En el siguiente ejemplo X_A tiene sólo seis elementos. Sea $A = \mathcal{A}(D^3, \mathcal{H})$ donde $\Phi = \{a, b\}$, $H_a =< r >$ y $H_b =< s >$.

La acción de cada G_α divide a G en órbitas. Estas órbitas determinan un cubrimiento de X_A.



Si llamamos $\mathcal{U}$ a este cubrimiento, su nervio $N\mathcal{U}$ (construido en 4.1) es



Se tiene, como veremos más adelante, una definición para el grupo fundamental de una acción lineal. Como podemos conjeturar, $\pi_1(A)$ resultará en este caso isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Observemos que el elemento $1 \in D^3$, al ser multiplicado alternadamente por elementos de H_a y de H_b, recorre el circuito

$$1 \xrightarrow{s\times} s \xrightarrow{r\times} rs \xrightarrow{s\times} srs \xrightarrow{r\times} rsrs = 1$$

Si bien no necesariamente los subconjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ determinan un cubrimiento, esto vale en la mayoría de los ejemplos con los que trabajaremos. De todas formas, cuando esto no suceda podremos agregar un nuevo índice 0, con $0 \leqslant \alpha$ para todo $\alpha \in \Phi$, $X_0 = X_A$ y $G_0 = \{0\}$ actuando trivialmente.

Como pudimos ver, las acciones de los grupos G_α interactúan en las intersecciones de los conjuntos locales X_α, generando una dinámica global en A. Un elemento de X_A va, por lo tanto, recorriendo este conjunto por la acción sucesiva de distintos grupos locales.

Esta idea sugiere definiciones para caminos y lazos en A. Éstas, a su vez, nos brindan una noción de arcoconexión y simple conexión.

5.3 Definiciones.

Dada A una acción global, una **α-tira** es un subconjunto finito $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset X_A$ tal que existe para cada i un $g_i \in G_\alpha$ tal que $g_i.x_{i-1} = x_i$.

Un **camino débil** en A es una sucesión $(x_0, \ldots, x_n)$ de finitos elementos de X_A tales que para cada i, $1 \leqslant i \leqslant n$, existe un $\alpha \in \Phi$ y $g \in G_\alpha$ tal que $\{x_{i-1}, x_i\} \in X_\alpha$ y $g.x_{i-1} = x_i$, es decir, $\{x_{i-1}, x_i\}$ es una α-tira.

Una acción global A es **arcoconexa** si dados x e y dos elementos de X_A, siempre existe un camino débil $(x_0, \ldots, x_n)$ con $x_0 = x$ y $x_1 = y$.

Más en general, diremos que $x, y \in X_A$ están en la misma **componente** arcoconexa si existe $(x_0, \ldots, x_n)$ camino débil entre x e y. Luego, A es arcoconexo sii tiene una sola componente. Llamamos $\pi_0(A)$ al conjunto de componentes de A.

Calculemos $\pi_0(A)$ en los ejemplos presentados en 5.2.

(i) Si $A = GL(n, R)$ y $(x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y)$ es un camino entre x e y, para cada i existen $\alpha \in \Phi$ y $E_i \in GL(n, R)_\alpha$ una matriz tal que $E_i.x_{i-1} = x_i$. Esta E_i no tiene por qué ser única. De todos modos, notemos con E_i a alguna de ellas. Tenemos entonces

$$E_n E_{n-1} \ldots E_1 x = y.$$

Si $E_n(R)$ es el subgrupo de matrices elementales de $GL_n(R)$, éste es el subgrupo generado por todos los $GL_n(R)_\alpha$ y por lo tanto, si x e y están en la misma componente, $y \in E_n(R)x$, es decir, x e y están en la misma co-clase determinada por $E_n(R)$.

Recíprocamente, si $y \in E_n(R)x$ existe $E \in E_n(R)$ tal que $y = Ex$. La matriz E puede ser escrita como producto de matrices elementales

$$E = E_n E_{n-1} \ldots E_1$$

con E_i en algún $GL_n(R)_{\alpha_i}$. Definiendo $x_k = E_k E_{k-1} \dots E_1 x$, tenemos que $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ es un camino entre x e y.

Por lo tanto,

$$\boxed{\pi_0(GL_n(R)) = GL_n(R)/E_n(R)}.$$

Este es, si R es un anillo conmutativo, el K-grupo algebraico $K_1(n, R)$.

(ii) Si $A = \mathcal{A}(G, \mathcal{H})$, un argumento similar al de antes nos permite mostrar que si $x, y \in X_A = G$, entonces están en la misma componente arcoconexa si y sólo si existen $h_{\alpha_i} \in H_{\alpha_i}$ tales que

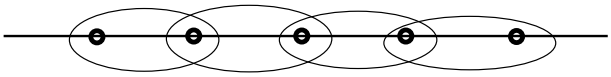
$$h_{\alpha_n} \dots h_{\alpha_1} x = y$$

para algún n. Notando $< \mathcal{H} >=< H_i \ / \ i \in \Phi >$ para el subgrupo de G generado por todos los H_i, tenemos

$$\boxed{\pi_0(\mathcal{A}(G, \mathcal{H})) = G/\mathcal{H}}.$$

En general, dadas acciones globales A y B, un **morfismo débil** $f : A \to B$ entre acciones globales es una función de conjuntos $f : X_A \to X_B$ tal que si $\{x_0, \dots, x_n\}$ es una α-tira, entonces existe $\beta \in \Phi_B$ tal que $\{f(x_0), \dots, f(x_n)\}$ es una β-tira. Notar que no necesariamente se tiene una asignación $\alpha \mapsto \beta$: el índice β pude variar cuando se toman distintas α-tiras para un mismo α.

Si llamamos L a la acción global con $X_A = \mathbb{Z}$, $\Phi = \mathbb{Z}$, $X_n = \{n, n+1\}$ y $G_n = \mathbb{Z}_2$ actuando transitivamente,



una **curva débil** en A es un morfismo débil $L \to A$, i. e. una sucesión infinita $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ de elementos de A tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe α_n de forma que $\{x_n, x_{n+1}\}$ es una α_n-tira. Según nuestra definición, un camino resulta una curva que se estabiliza en ambas direcciones.

Se le da a $L \times L$ estructura de acción global de la forma evidente. Luego, podemos definir una **homotopía** entre dos caminos ω y ω' como una función $H : L \times L \to A$ que se estabiliza en todas direcciones, y que cumple que existen $N_0, N_1 \in \mathbb{Z}$, $N_0 < N_1$ tal que $H(-, N_0) = \omega$ y $H(-, N_1) = \omega'$.
Es fácil ver que "ser homotópico a" es una relación de equivalencia.

Un **lazo débil** es un camino con el mismo punto inicial y final. En [B-B-M-P] se presentan tres formas de definir el $\pi_1(A, a)$,

(a) Como el conjunto de lazos sobre a, módulo las homotopías definidas anteriormente,

(b) Construyendo la acción global ΩA de lazos sobre A, y calculando sus componentes $\pi_0(\Omega A, a) = \pi_1(A, a)$, y

(c) Dando una noción de revestimientos para acciones globales y tomando un revestimiento universal o simplemente conexo para hallar un grupo que clasifique los revestimientos conexos.

Los morfismos débiles sólo respetan la información de las órbitas locales. A este nivel, la acción global equivale a un conjunto con un cubrimiento.

Sea A una acción global, $X = X_A$ el conjunto subyacente y $\mathcal{U}$ el cubrimiento determinado por los conjuntos unipuntuales y las órbitas locales (si agregamos 0 a Φ como antes, entonces basta con tomar las órbitas locales).

$$\mathcal{U} = \{\{x\} |\ x \in X\} \cup \{\{G_\alpha.x\} |\ \alpha \in \Phi,\ x \in X\}$$

Llamemos $V(A)$ al complejo de Vietoris asociado al cubrimiento $\mathcal{U}$, y $N(A)$ su nervio. Fácilmente se prueban las siguientes igualdades.

$$\pi_0(A) = \pi_0(|VA|) = \pi_0(|NA|)$$

$$\pi_1(A) = \pi_1(|VA|) = \pi_1(|NA|)$$

Donde el $\pi_1(A)$ lo tomamos como en la primera de las tres definiciones anteriores. Basta con observar que una función es una función débil (en particular una curva o una homotopía) entre acciones globales si preserva α-tiras, y que una α-tira es exactamente un símplex en VA. De aquí que la asignación $A \mapsto VA$ entre la categoría débil de acciones globales y la categoría de complejos simpliciales no sólo es funtorial, si no que es una equivalencia entre ambas categorías.

En todo lo que hicimos hasta ahora, hemos tenido en cuenta sólo la estructura débil de una acción global A, es decir, hemos reparado en la forma en que se relacionan las órbitas locales, pero sin detenernos en las acciones en sí, ni en las relaciones entre estas acciones. Se tienen versiones fuertes para las definiciones anteriores, que preservan también esta información.

5.4 Definición. Un **morfismo fuerte** $f = (f_\Phi, f_G, f_X) : A \to B$ es una terna que satisface

(a) $f_\Phi : \Phi_A \to \Phi_B$ preseva $\leqslant$: si $\alpha \leqslant \beta$ entonces $f_\Phi(\alpha) \leqslant f_\Phi(\beta)$,

(b) $f_G(\alpha) : G_\alpha \to G_{f_\Phi(\alpha)}$ es un morfismo de grupos tal que si $\alpha \leqslant \beta$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \longrightarrow & G_{f_\Phi(\alpha)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_\beta & \longrightarrow & G_{f_\Phi(\beta)} \end{array}$$

conmuta,

(c) $f_X : X_A \to X_B$ es una función tal que $f_X(X_\alpha) \subset X_{f_\Phi(\alpha)}$ y

(d) para cada $\alpha \in \Phi_A$,

$$(f_G, f_X) : G_\alpha \curvearrowright X_\alpha \to G_{f_\Phi(\alpha)} \curvearrowright X_{f_\Phi(\alpha)}$$

es morfismo de acciones, i. e. $f_G(g).f_X(x) = f_X(g.x)\ \forall\ g \in G_\alpha,\ x \in X_\alpha$.

Esta definición nos permite trabajar con curvas, caminos, lazos y homotopías en sentido fuerte. De todas formas, la necesidad de tener un morfismo de grupos $G_\alpha \to G_{f_\Phi(\alpha)}$ para cada α vuelve muy rígidos a este tipo de morfismos.

5.5 Ejemplo. Sea $X_B = \{0, 1, 2\}$, $G_3 = \{1, b, b^2\}$ el grupo cíclico de orden 3, cuya acción sobre X_B está dada por $b.0 = 1$, $b.1 = 2$. Sea $X_A = \{0, 1\}$ y $G_2 = \{1, a\}$ el grupo cíclico de orden 2 actuando sobre X_A por $a.0 = 1$.

Consideremos estas dos acciones como acciones globales B y A, tomando Φ_A y Φ_B con un solo elemento.

Cualquier función $f : \{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$ es un morfismo débil, pues la única tira local no trivial es $\{0, 1\}$, y debe ser mapeada dentro de la G_3-órbita local $\{0, 1, 2\}$. Por otro lado, un morfismo fuerte $f : A \to B$ debe contar con un morfismo de grupos $G_2 \to G_3$ que, por su puesto, tiene que ser trivial. Por lo tanto los únicos morfismos fuertes de A a B resultan de mandar todo X_A a un punto de X_B. Hay 9 morfismos débiles de A a B, pero sólo 3 morfismos fuertes.

Atlas de grupoides

Dado un grupo G actuando sobre un conjunto X, a la acción $G \curvearrowright X$ podemos asociarle un grupoide $\mathcal{G} = G \ltimes X$, cuyos objetos son los elementos de X y donde (g, x) es una flecha de x a y sii $g \in G$ y $g.x = y$. La inversa de una flecha (g, x) es $(g^{-1}, g.x)$.

Esta asignación $(G \curvearrowright X) \mapsto \mathcal{G}$ aplicada a las acciones locales de una acción global nos sugiere el concepto de atlas de grupoide, presentado en [B-B-M-P] y definido como sigue.

5.6 Definición. Un **atlas de grupoides** $A = (X_A, \Phi_A, \{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha\in\Phi})$ consta de un conjunto X_A, un conjunto de índices Φ_A dotado con una relación reflexiva y, para cada $\alpha \in \Phi$, un grupoide $\mathcal{G}_\alpha$ tales que

- $X_\alpha = Obj\ \mathcal{G}_\alpha \subset X_A$,
- si $\alpha \leqslant \beta$ en Φ_A, $X_\alpha \cap X_\beta$ es unión de componentes conexas de $\mathcal{G}_\alpha$ y
- es dado $\varphi_\alpha^\beta : \mathcal{G}_\alpha|_{X_\alpha\cap X_\beta} \to \mathcal{G}_\beta|_{X_\alpha\cap X_\beta}$ funtor que es la identidad en los objetos.

Como mencionamos antes, toda acción global induce un atlas de grupoides. Sin embargo, no todo atlas de grupoides proviene de una acción global, como se puede comprobar fácilmente.

Un **morfismo débil** $f : A \to B$ entre atlas de grupoides es, al igual que antes, una función $f : X_A \to X_B$ que preserva tiras locales, donde una α-tira es ahora un subconjunto $\{x_0, \ldots, x_n\}$ de X_A incluído en una componente conexa del grupoide $\mathcal{G}_\alpha$.

La categoría resultante, con atlas de grupoides como objetos y morfismos débiles como flechas, resulta por lo tanto equivalente a las estudiadas en la subsección anterior.

Tenemos la siguiente definición para morfismos que también preservan la información de las flechas.

5.7 Definición. Un **morfismo** (o morfismo fuerte) entre atlas de grupoides $f : A \to B$ es un par $(f_\Phi, f_\mathcal{G})$ satisfaciendo

- $f_\Phi : \Phi_A \to \Phi_B$ es una función que preserva la relación.
- $f_\mathcal{G} : \mathcal{G}_A \to \mathcal{G}_B$ es una transformación natural (generalizada) de diagramas de grupoides sobre la función f_Φ. Es decir, se tiene un funtor $f_\mathcal{G} : \mathcal{G}_\alpha \to \mathcal{G}_{f_\Phi(\alpha)}$ para cada α, de forma tal que si $\alpha \leqslant \beta$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{G}_{f_\Phi(\alpha)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_\beta & \longrightarrow & \mathcal{G}_{f_\Phi(\beta)} \end{array}$$

  conmuta.

Observemos que existen funtores no triviales entre dos grupoides $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ a pesar de que éstos tengan cantidades coprimas de objetos. Ésto no sucede con los morfismos de grupos, y por lo tanto tampoco con los morfismos de acciones, siendo en tal sentido (y en muchos más!) los atlas de grupoides una construcción más flexible que la de acciones globales.

5.8 Ejemplo. Retomemos el ejemplo 5.5. Al considerar A y B como atlas de grupoides, un morfismo $f : A \to B$ quedará determinado por la imagen de la flecha

$$(a, 0) \in G_2 \ltimes X_A, \ (a, 0) : 0 \to 1,$$

pues su dominio 0, su codominio 1 y su inversa $(a, 1)$ deberán ir, respectivamente, al dominio, el codominio y la inversa de $f_\mathcal{G}(a, 0)$. Además, cualquier elección de $f_\mathcal{G}(a, 0)$ termina por determinar un morfismo, y por lo tanto concluímos que el hecho de que A use una acción de G_2 y B una de G_3 no inhibe la existencia de morfismos de A a B.

Hasta aquí fueron presentadas una breve introducción a los atlas de grupoides y a algunos conceptos relacionados que utilizaré en la próxima sección. Un estudio más completo y detallado sobre los atlas de grupoides puede leerse en [B-B-M-P].

Definiciones para el nervio de un atlas de grupoides

Llamemos $\mathcal{G}r\mathcal{A}tl$ a la categoría de atlas de grupoides y morfismos (fuertes). En lo que sigue propongo dos costrucciones funtoriales $\mathcal{G}r\mathcal{A}tl \to \mathcal{SS}et$ para el nervio de un atlas de grupoides A. La primera, $N_d(A)$, responde a la información de las "órbitas locales" de A, o sea, las componentes conexas de cada $\mathcal{G}_\alpha$. La segunda, NA, más compleja pero más interesante, también respeta la estructura de los grupoides locales.

5.9 Definición. Sea $N_d(A)$ el conjunto simplicial definido de la siguiente manera.

$$(N_dA)_k = \{(x_0, \ldots, x_k)/ \text{ existe } \alpha \text{ tal que } \{x_0, \ldots, x_k\} \text{ es una } \alpha\text{-tira}\}$$
$$d_i(x_0, \ldots, x_k) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) \text{ quita } x_i$$
$$s_j(x_0, \ldots, x_k) = (x_0, \ldots, x_j, x_j, \ldots, x_n)$$

Dado $f : A \to B$ morfismo débil entre atlas de grupoides, N_df está bien definido pues f preserva α-tiras.

Identifiquemos a $\underline{\mathbf{n}} = \{0 \to 1 \to 2 \to \ldots \to n\}$, el conjunto totalmente ordenado de $n+1$ elementos, con la categoría inducida, el grupoide asociado $\underline{\mathbf{n}}[(Fl\ \underline{\mathbf{n}})^{-1}]$ y el atlas de grupoide con $\Phi = *$ y $\mathcal{G}_* = \underline{\mathbf{n}}$.

Un morfismo débil $\underline{\mathbf{n}} \xrightarrow{f} A$ debe preservar tiras locales. Como $\{0, \ldots, n\}$ es una $*$-tira, $f(0), \ldots, f(n)$ deben estar en la misma órbita local, y por lo tanto $(f(0), \ldots, f(n)) \in N_dA$. Así se tiene

$$\boxed{(N_dA)_n = Hom_{\text{débil}}(\underline{\mathbf{n}}, A)}.$$

Si consideramos el complejo de Vietoris VA, tenemos que

$$N_dA = \widehat{VA}$$

según lo visto en 4.8, y se tiene una equivalencia homotópica

$$B_dA \to |VA|$$

por el teorema 4.10, llamando B_dA a la realización geométrica de N_dA.

Pasemos ahora a la definición de NA.

5.10 Definición. Con intenciones de preservar la información de las flechas, propongo la siguiente construcción:

$$(NA)_k = \coprod_{\alpha \in \Phi} \{x_0 \xrightarrow{g_1} x_1 \xrightarrow{g_2} \ldots \xrightarrow{g_k} x_k \ / \ g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{G}_\alpha\}/\sim$$

donde identificamos $(g_1, \ldots, g_k)$ con $(\varphi_\alpha^\beta(g_1), \ldots, \varphi_\alpha^\beta(g_k))$, su imagen a través de los morfismos de estructura φ_α^β . Con $\sim$ notamos a la relación de equivalencia generada por estas identificaciones. Las mismas caras y degeneraciones d_i y s_j definidas para N_dA respetan el cociente $\sim$, pues φ_α^β son funtores, por lo que preservan identidades y composiciones.

Observemos que si cada $\mathcal{G}_\alpha$ es conexo, los morfismos φ_α^β quedan definidos en todo $\mathcal{G}_\alpha$ y por lo tanto

$$(NA)_k = \underset{\Phi}{colim}\ (N\mathcal{G}_\alpha)_k$$

donde los nervios $N\mathcal{G}_\alpha$ se toman como en la sección 2.

Ahora bien: queremos identificar los objetos de cada $\mathcal{G}_\alpha$, o sea, considerar como 0-símplices los elementos de X_A sin repeticiones. Para ello, sea $\mathcal{G}_0$ el grupoide discreto cuyos objetos son los elementos de X_A y definamos $0 \leqslant \alpha$ para todo $\alpha \in \Phi$.

Resulta así $NA_0 = X_A$. La inclusión de $\mathcal{G}_0$ no sólo hace colapsar a un mismo elemento de X_A visto como 0-símplex en varios $\mathcal{G}_\alpha$ en un mismo 0-símplex vía $\sim$, si no que además permite considerar como símplices aquellos elementos de X_A que no estaban incluídos en ninguna órbita local.

Si $f : A \to B$ es un morfismo entre atlas de grupoides, f induce un morfismo entre los nervios de manera obvia.

En cierto sentido, el nervio NA es un colímite de los nervios locales $N\mathcal{G}_\alpha$. Con intención de formalizar esta idea, procedamos como sigue.

Cada vez que $\alpha \lneq \beta \in \Phi$, consideremos el grupoide auxiliar

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_\alpha|_{X_\alpha \cap X_\beta},$$

cuyos objetos y flechas son aquellos de $\mathcal{G}_\alpha$ incluidos en la intersección $X_\alpha \cap X_\beta$.

Sea $\widetilde{\Phi}$ es conjunto de índices aumentado $\widetilde{\Phi} = \Phi \cup \{(\alpha, \beta) \ / \ \alpha \leqslant \beta \in \Phi\}$ donde ya consideramos $0 \in \Phi$. En $\widetilde{\Phi}$, $x < y$ sii $x = (\alpha, \beta)$ e $y = \alpha$ ó $x = (\alpha, \beta)$ e $y = \beta$.

Los morfismos de estructura φ_α^β los reemplazamos por los siguientes dos: la inclusión $\widetilde{\varphi}^\alpha_{(\alpha,\beta)}$ y la composición $\widetilde{\varphi}^\beta_{(\alpha,\beta)} = (\varphi_\alpha^\beta \circ \ inc)$.

Los nuevos morfismos de estructura $\widetilde{\varphi}_x^y$ quedan definidos en todo el grupoide dominio, y por lo tanto la asignación $x \mapsto \mathcal{G}_x$ es funtorial. Notar que en $\widetilde{\Phi}$ no hay composiciones no triviales.

Con estas notaciones resulta $NA_k = \underset{\widetilde{\Phi}}{colim}\ (N\mathcal{G}_x)_k$, y como las d_i y s_j pueden ser vistas como las flechas universales por propiedad del colímite, tenemos

$$\boxed{NA = \underset{\widetilde{\Phi}}{colim}\ N\mathcal{G}_x}$$

Finalmente, como la realización geométrica $|\cdot| : \mathcal{SS}et \to \mathcal{T}op$ preserva colímites, tenemos

$$BA \underset{def}{=} |NA| = \underset{\widetilde{\Phi}}{colim}\ B\mathcal{G}_x = \coprod_{\Phi} B\mathcal{G}_\alpha \ / \sim$$

5.11 Ejemplos.

(1) $X_A = *$, $\Phi = *$, $\mathcal{G}_* = G$ un grupo. Luego $NA = NG$ en el sentido clásico, y BA es un $K(G, 1)$.

(2) Más en general, si $\Phi = *$,

$$NA = N\mathcal{G}_* \coprod_{x \in X_A \setminus \mathcal{G}_*} \Delta[0]$$

y BA es el espacio que se obtiene de adjuntar a $B\mathcal{G}$ puntos aislados.

(3) Si Φ es discreto, NA es la unión disjunta de los nervios $N\mathcal{G}_\alpha$, identificando sus 0-símplices con los elementos de X_A.

(4) Dado G grupo y $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos, $\mathcal{A}(G,\mathcal{H})$ pensado con Φ discreto es un ejemplo de lo anterior. Dado $H \in \mathcal{H}$, el grupoide asociado a H es igual a R_H, el grupoide dado por la relación de equivalencia/partición de G en H-coclases. Su tipo homotópico es

$$BR_H \cong \coprod_{G/H} *$$

Se puede pensar, salvo homotopías, a BA como un CW-complejo de dimensión 1.

Sea $\overline{\mathcal{H}}$ la clausura de $\mathcal{H}$ bajo intersecciones finitas, con el neutro de G en $\overline{\mathcal{H}}$. Si $\overline{A} = \mathcal{A}(G,\overline{\mathcal{H}})$, es fácil ver que

$$N\overline{A} = N_d\overline{A} = N_dA.$$

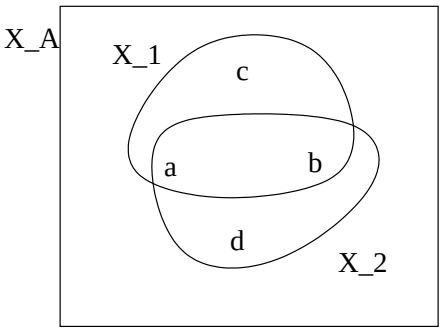
Veamos por último una relación entre estas dos construcciones.

5.12 Observación. Dado A un atlas de grupoides, se tiene una proyección canónica

$$p : NA \to N_dA$$
$$(x_0 \xrightarrow{g_1} x_1 \to \ldots \xrightarrow{g_n} x_n) \mapsto (x_0, \ldots, x_n)$$

Todo símplex de N_dA está en la imagen de p, de donde p es sobreyectiva. Sin embargo, p puede no aceptar ninguna sección.

5.13 Ejemplo. Sea $X_A = \{a,b,c,d\}$, $\Phi = \{1,2\}$ discreto. Sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ los grupoides con una sola flecha entre dos objetos, con objetos $\{a,b,c\}$ y $\{a,b,d\}$ respectivamente.



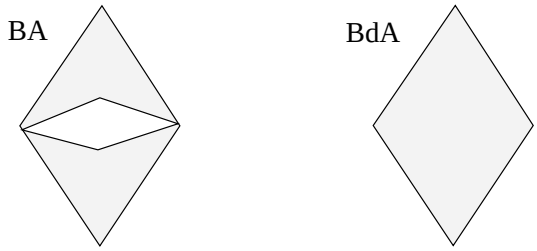
Tenemos $(a,b) \in (N_dA)_2$. Supongamos que exista $i : N_dA \to NA$ sección para p. Luego $p(i(a,b)) = (a,b)$, y $i(a,b) = a \xrightarrow{1} b$ ó $a \xrightarrow{2} b$.

Como $i(a,b,c) = a \xrightarrow{1} b \xrightarrow{1} c$, $i(a,b,d) = a \xrightarrow{2} b \xrightarrow{2} d$ y como i conmuta con las caras, resulta

$$a \xrightarrow{1} b = d_2 \circ i(a,b,c) = i \circ d_2(a,b,c) = i(a,b) = i \circ d_2(a,b,d) = d_2 \circ i(a,b,d) = a \xrightarrow{2} b$$

con lo que llegamos a un absurdo, proveniente de suponer que existía i.

En el siguiente gráfico se observan B_dA y BA:



Mientras BA advierte la existencia del lazo algebraico no trivial $a \xrightarrow{1} b \xrightarrow{2} a$, B_dA es simplemente conexo.

El estudio de los atlas de grupoides y su teoría de homotopía será retomado en [dH-M], donde veremos cómo definir los grupos de homología de un atlas A.

Referencias

[A-H] H. Abels, S. Holz. *Higher generation by subgroups.* J.Alg, **160,** (1993), 311-341.

[B] A. Bak. *Global Actions: The algebraic counterpart of a topological space.* Uspeki Mat. Nauk. , English translation: Russian Math. Surveys, **525** (1997), 955-996.

[B-B-M-P] A. Bak, R. Brown, E. G. Minian, T. Porter. *Global actions, groupoid atlases and related topics* . Bangor Preprints 99.27.

[B-T] R. Bott, L. Tu. *Differential forms in algebraic topology.* Springer Verlag (1982).

[dH-M] M. del Hoyo, E. G. Minian. *Groupoid atlases, simplicial complexes and homology.* En preparación.

[D] A. Dold. *Partitions of unity in the theory of fibrations.* Ann. of Math. **78** (1963), 223-255.

[F-L] R. Fritsch, D. Latch. *Homotopy Innverses for Nerve.* Mathematische Zeitschrift. Springer-Verlag, (1981).

[G-Z] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory.* Springer-Verlag, (1967).

[H] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, (2002).

[ML] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Springer-Verlag, (1971).

[Ma1] J. P. May. *Simplicial objects in algebraic topology.* Van Nostrand Company, Inc, (1967).

[Ma2] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces.* Springer Lecture Notes in Mathematics. Springer (1972).

[Mil] J. Milnor. *Construction of universal bundles I.* Ann. of Math. **63** (1956), 272-284.

[Min] E. G. Minian. *Cat as a lambda-cofibration category.* J. Pure Appl. Algebra **167** (2002), 301-314.

[Mu] J. R. Munkres. *Topology.* Prentice-Hall (1975).

[Q] D. Quillen. *Higher algebraic K-theory I.* Lectures Notes in Math **341** Springer (1973), 85-147.

[Se1] G. Segal. *Classifying spaces and spectral sequence.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **34** (1968). 105-112.

[Se2] G. Segal. *Categories and cohomology theories.* Topology **13** (1974), 293-312.

[Sp] E. Spanier. *Algebraic Topology.* Springer (1966).

[Sw] R. Switzer. *Algebraic Topology. Homotopy and Homology.* Springer-Verlag (1975).

[tD] T. tom Dieck. *Partitions of unity in homotopy theory*. Compositio math.**23** (1971) 159-167.

[T] R. W. Thomason. *Cat as a closed model category*. Cathiers Topologie Géom. Différentielle **21,** 305-324 (1980).

[V] R. M. Vogt. *Homotopy limits and colimits*. Math. Z. **134** (1973) 11-52.

[W] F. Waldhausen. *Algebraic K-theory of spaces*, en "Algebraic and Geometric Topology: Proc. Rutgers 1983". p. 348-419. Lecture Notes in Mathematics Vol. 1126, Springer-Verlag, Berlin/New York (1985).

e-mail: matiasdelhoyo@hotmail.com