UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Estudio de medidas capacitarias asociadas a espacios de Sobolev con exponente variable.

Carla Antonella Baroncini

Director: Julián Fernández Bonder

Marzo, 2013

Índice general

Agradecimientos.

A Gaby por haberme ayudado tanto. Gracias por tu paciencia, tu tiempo y tu generosidad. A mamá y papá, por acompañarme y apoyarme siempre. Este camino habría sido imposible para mí sin el amor incondicional de ustedes tres.

A mis abuelas por estar al pendiente de cada uno de mis pasos deseando siempre lo mejor para mí.

A Julián, por haber confiado en mí, por enseñarme tanto, por brindarme tan lindas oportunidades, por estar presente en cada momento en que lo necesité. No podría haber tenido un mejor director.

A Maru Chaher y Maris Verón por ser mis amigas del alma.

A Lucho Fages por estar conmigo, literalmente desde el primer día :), y por tantas sonrisas que siempre me regala.

A Caro Naudeau, Sol Scelza, Flor Statti y Maga Klinger por haber sido siempre tan cariñosas conmigo. Las quiero!

A Anto Ritorto, Ro Balderrama, Cari Tastzian, Migue Monserrat, Lore Correa.

A Lore Stockdale por ser mi compañera indispensable en este último tramo.

A Marie Fiorenzo por sus apuntes indispensables!

A Nino Cafure y Adrián Soria por haber sido ejemplos de tenacidad y fortaleza.

A Ani Silva por toda su ayuda y alegría. A Pablo Groisman, Gabriel Acosta, Ariel Lombardi, Juan Pablo Pinasco, Joana Terra, Pablo Amster y Mariana Prieto por haber sido tan buenos conmigo.

A Lu Salvagni por haberme ayudado tan generosamente en mi primera experiencia como docente.

A toda la gente hermosa que conocí en estos años.

Estudio de medidas capacitarias asociadas a espacios de Sobolev con exponente variable.

(Resumen)

En esta tesis estudiamos las medidas capacitarias asociadas a espacios de Sobolev con exponente variable. Esas medidas permiten obtener información puntual de las funciones de Sobolev de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ que, a priori, se encuentran definidas en casi todo punto con respecto de la medida de Lebesgue.

Como consecuencia de dicho estudio, damos algunas aplicaciones a la resolución de ciertos problemas de diseño óptimo cuando la ecuación de estado viene modelada por el operador $p(x)-$Laplaciano.

Palabras Claves: Espacios de exponente variable, medidas capacitarias, problemas de optimización .

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Motivaciones.

El propósito de esta tesis es el estudio de ciertas medidas capacitarias que aparecen de manera natural al intentar describir ciertas propiedades puntuales de funciones de Sobolev que, a priori, se encuentran definidas en casi todo punto de acuerdo a la medida de Lebesgue.

En particular, nos interesa el estudio de aquellas funciones de Sobolev definidas a partir de los espacios de Lebesgue de exponente variable.

El estudio de estos espacios se ha visto revitalizado en los últimos a nos debido a novedosas aplicaciones en problemas concretos. Entre ellas se destacan dos: el modelado matemático de los *fluidos electroreholégicos* y el procesamiento de imágenes.

Los fluidos electroreholégicos son fluidos que cambian drásticamente sus propiedades mecánicas ante la presencia de un campo magnético. Luego de ciertas simplificaciones, el problema puede reducirse al estudio de las soluciones de la ecuación

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(x) & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Una descripción detallada de este modelo puede encontrarse en [19]. Es fácil ver que las soluciones de esta ecuación se obtienen como mínimos del funcional

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}\,dx - \int_\Omega f(x)u\,dx$$

de donde la existencia de exponentes variables surge naturalmente.

Por otro lado, en el artículo [3] los autores proponen un modelo para el procesamiento de imágenes que consiste en minimizar el siguiente funcional

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + f(|u - I(x)|)\,dx \to \text{mín}$$

donde $p(x)$ es una función que varia entre 1 y 2 y f es una función convexa. En su aplicación, ellos elijieron $p(x)$ cerca de 1 en los lugares donde presuponen que hay bordes y $p(x)$ cerca de 2 en los lugares donde presuponen que no hay bordes. De esta manera los autores pueden remover el ruido de la imágen preservando los bordes.

Vamos a comenzar dando algunas definiciones básicas.

En el transcurso de esta tesis llamaremos a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo y acotado y consideramos el conjunto

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{p\colon \Omega \to (1, +\infty) \text{ medibles}\},$$

que es el conjunto de los exponentes finitos.

Asociado a cada exponente $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ se define el espacio de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ como

$$L^{p(x)}(\Omega) := \Big\{f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)\colon \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\,dx < \infty\Big\}.$$

Este espacio tiene una norma natural asociada que lo convierte en un espacio de Banach. Dicha norma es la llamada *norma de Luxemburg* y está definida como

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \|f\|_{p(x),\Omega} = \|f\|_{p(x)} := \sup\Big\{\lambda > 0\colon \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx < 1\Big\}.$$

Los espacios de Sobolev se definen luego como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) := \Big\{f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)\colon f \in L^{p(x)}(\Omega) \text{ y } \partial_i f \in L^{p(x)}(\Omega)\ i = 1, \dots, N\Big\},$$

donde $\partial_i f$ representa la i−ésima derivada parcial débil de f. Estos espacios poseen una norma dada por

$$\|f\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|f\|_{1,p(x),\Omega} = \|f\|_{1,p(x)} := \|f\|_{p(x)} + \|\nabla f\|_{p(x)}.$$

En el capítulo 2 damos una breve reseña de estos espacios junto a sus principales propiedades.

Al intentar dar propiedades puntuales de las funciones de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ la elección del representante es crucial, dado que *a priori* estas funciones están definidas en casi todo punto.

Para funciones de $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ es bien sabido, ver por ejemplo [10], que es posible hallar un representante, llamado el *representante preciso*, para cada elemento de $H^1(\Omega)$ de manera tal que dicho representante sea continuo salvo un conjunto arbitrariamente pequeño medido de acuerdo a la medida capacitaria. Estos resultados son luego extendidos a los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ de manera natural. Ver el libro [5]. La medida p−capacitaria para un conjunto compacto $K \subset \Omega$ se define como

$$\operatorname{cap}_p(K, \Omega) := \inf\Big\{\int_\Omega |\nabla f|^p + |f|^p\,dx\colon f \in C^\infty_c(\Omega) \text{ tal que } f \geq 1 \text{ en un entorno de } K\Big\}$$

y luego se extiende de manera usual a conjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$. Ver el capítulo 3.

Luego, el objetivo de esta tesis, es la extensión de estos conceptos a espacios de exponente variable. En particular, poder definir el concepto de representante preciso para una función de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ y poder estudiar propiedades puntuales de dicho representante.

Estos resultados se encuentran, básicamente, el la excelente monografía [4]. Algunos resultados son tomados del artículo [11].

Finalmente, como aplicación de los resultados descriptos damos algunos resultados de continuidad de la solución de (1.1) con respecto a perturbaciones en el dominio y, posteriormente, una generalización de un Teorema de Šverák a nuestro contexto.

1.2. Descripción de la Tesis.

Luego de esta introducción, el resto de la tesis se compone de seis capítulos que describimos brevemente.

En el capítulo 2 damos un repaso sobre los espacios $L^{p(x)}(\Omega)$ y $W^{1,p(x)}(\Omega)$ donde se prueban sus propiedades funcionales y algunos resultados generales que serán de de suma importancia en el resto del trabajo.

En el capítulo 3 presentamos algunos resultados sobre densidad de los espacios $L^{p(x)}(\Omega)$ y $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

En el capítulo 4 se define la $p(x)-$capacidad y se dan sus principales propiedades.

En el capítulo 5, se utiliza la $p(x)-$capacidad para definir el representante preciso de funciones en $W^{1,p(x)}(\Omega)$ y se da una caracterización puntual del espacio $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

En el capítulo 6 damos unos resultados de existencia y unicidad para (1.1) y luego probamos un resultado de continuidad para dichas soluciones bajo perturbaciones del dominio. Los resultados de este capítulo son originales de esta tesis. Resultados análogos para los exponentes constantes se encuentran, por ejemplo, en [12].

En el capítulo 7 damos la extensión de un teorema de Šverák que da la existencia de dominios optimales en la clase de dominios cuyo complemento tiene una cantidad acotada de componentes conexas. Para la validez de estos resultados es necesario un teorema de Wiener sobre la continuidad hasta la frontera para las soluciones de (1.1). Este tipo de resultados, según sabemos, son válidos para exponentes constantes (ver [16]) y el problema continúna abierto para exponentes variables. En esta tesis, hemos decidido probar la extensión del teorema de Šverák para exponentes variables, asumiendo la validez de las condiciones de Wiener para exponentes variables. La extensión del teorema de Šverák para exponentes constantes (el teorema original de Šverák era para $p(x) \equiv 2$) se encuentra en [2] y la extensión a exponentes variables es original de este trabajo.

Finalmente, en el capítulo 8 presentamos algunos ejemplos de aplicación de los resultados obtenidos en los capítulos 6 y 7. Damos además una aplicación a un problema de optimización donde suponemos que el dominio Ω está ocupado con dos materiales cada uno con una conductividad diferente y se determina cómo deben ser distribuidos dichos materiales para minimizar el funcional asociado. Estas aplicaciones son también originales de esta tesis.

Capítulo 2

Preliminares.

Para el desarrollo de este capítulo seguiremos las referencias [4, 7, 13, 18].

2.1. Espacios de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$.

Definición 2.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, definimos $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto de las funciones $p\colon \Omega \to (1,\infty)$ medibles para la medida de Lebesgue $N-$dimensional.

Llamaremos *exponentes variables* en Ω a las funciones $p \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Definición 2.2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, definimos el *espacio de Lebesgue con exponente variable* como

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \colon \rho_{p(x)}(u) := \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}.$$

Observación 2.3. Notemos que $\rho_{p(x)}$ resulta convexo y, por lo tanto,

$$\rho_{p(x)}(tu + (1-t)v) \le t\rho_{p(x)}(u) + (1-t)\rho_{p(x)}(v), \quad 0 < t < 1, \ \ u, v \ \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Notaremos por $p_- = \inf_{x\in\Omega} p(x)$ y $p_+ = \sup_{x\in\Omega} p(x)$. Tanto acá, como en el resto de la tesis, por ínf y sup nos referiremos al ínfimo y supremos *esencial* con respecto a la medida de Lebesgue.

Definición 2.4. Definimos el *exponente conjugado* de $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ como la función $p' \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ para todo $x \in \Omega$.

Notemos que $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ para todo $x \in \Omega$.

Proposición 2.5. *La aplicación*

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x),\Omega} = \|u\|_{p(x)} := \inf \left\{ \lambda > 0 \colon \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \le 1 \right\}.$$

define una norma en $L^{p(x)}(\Omega)$.

Demostración. Sea α un escalar,

$$\|\alpha u\|_{p(x)} = \text{ínf}\Big\{\lambda > 0\colon \rho_{p(x)}\Big(\frac{\alpha u}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\} = |\alpha|\,\text{ínf}\Big\{\lambda > 0\colon \rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\} = |\alpha|\|u\|_{p(x)}.$$

Veamos ahora que vale la desigualdad triangular. En efecto, sean u, $v \in L^{p(x)}(\Omega)$ y a, $b > 0$ tales que $\rho_{p(x)}(\frac{u}{a}) \leq 1$ y $\rho_{p(x)}(\frac{v}{b}) \leq 1$. Entonces, dado que $\rho_{p(x)}$ es convexa,

$$\rho_{p(x)}\Big(\frac{u+v}{a+b}\Big) = \rho_{p(x)}\Big(\frac{a}{a+b}\frac{u}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{v}{b}\Big) \leq \frac{a}{a+b}\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{a}\Big) + \frac{b}{a+b}\rho_{p(x)}\Big(\frac{v}{b}\Big) \leq 1$$

Luego, $a + b \in \{\lambda > 0\colon \rho_{p(x)}(\frac{u+v}{\lambda}) \leq 1\}$. Por lo tanto,

$$\|u+v\|_{p(x)} = \text{ínf}\{\lambda > 0\colon \rho_{p(x)}(\frac{u+v}{\lambda}) \leq 1\} \leq a + b$$

de donde tomando ínfimo sobre todos los $a, b > 0$ resulta la desigualdad triangular.

$$\|u+v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)}$$

Claramente $\|0\|_{p(x)} = 0$. Para terminar, sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $\|u\|_{p(x)} = 0$. Luego, existe $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\lambda > 0\colon \rho_{p(x)}(\frac{u}{\lambda}) \leq 1\}$ tal que $\lambda_n \to 0$. Luego, dado $\alpha > 0$, existe n_0 tal que $\alpha \leq \frac{1}{\lambda_n}$ para todo $n \geq n_0$ y por lo tanto $\rho_{p(x)}(\alpha u) \leq \rho_{p(x)}(\frac{u}{\lambda_{n_0}}) \leq 1$.

Concluimos así que $\rho_{p(x)}(\alpha u) \leq 1$ para todo $\alpha > 0$.

Sea $0 < \beta \leq 1$,

$$\rho_{p(x)}(\lambda u) = \rho_{p(x)}\Big(\frac{\lambda\beta}{\beta}u\Big) = \int_\Omega \Big|\frac{\lambda\beta u(x)}{\beta}\Big|^{p(x)} dx = \int_\Omega |\beta|^{p(x)}\Big|\frac{\lambda u(x)}{\beta}\Big|^{p(x)} dx \leq \beta\rho_{p(x)}(\frac{\lambda}{\beta}u) \leq \beta$$

Luego, $\rho_{p(x)}(\lambda u) \leq \beta$ para todo $0 < \beta \leq 1$ y $\lambda > 0$.

Por lo tanto $\rho_{p(x)}(\lambda u) = \int_\Omega |\lambda u(x)|^{p(x)} dx = 0$ para todo $\lambda > 0$. Tenemos entonces que $u = 0$, como queríamos probar. □

La siguiente proposición, resulta .

Proposición 2.6 (Propiedad de la bola unitaria.)**.** *Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Entonces,*

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1 \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u) \leq 1.$$

Demostración. Supongamos $\rho_{p(x)}(u) \leq 1$. Entonces $1 \in \{\lambda > 0\colon \rho_{p(x)}(\frac{u}{\lambda}) \leq 1\}$ y por lo tanto $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \text{ínf}\{\lambda > 0\colon \rho_{p(x)}(\frac{u}{\lambda}) \leq 1\} \leq 1$.

Recíprocamente, supongamos que $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \text{ínf}\{\lambda > 0\colon \rho_{p(x)}(\frac{u}{\lambda}) \leq 1\} \leq 1$. Luego, $\rho_{p(x)}(\frac{u}{\lambda}) \leq 1$ para todo $\lambda > 1$. Concluimos entonces que $\rho_{p(x)}(u) = \lim_{\lambda\to 1^+}\rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leq 1$. Queda probada así la equivalencia. □

Para la demostración de la siguiente proposición nos guiamos por la prueba de [6, Teorema 1.3, página 427].

Proposición 2.7. *Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Entonces,*

1. *Si $\|u\|_{p(x)} > 1$, entonces $\|u\|_{p(x)}^{p_-} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p_+}$.*
2. *Si $\|u\|_{p(x)} < 1$, entonces $\|u\|_{p(x)}^{p_+} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p_-}$.*

Demostración. Probaremos 1 La demostración de 2 es completamente análoga.

Llamemos $a = \|u\|_{p(x)}$. Como $a > 1$, sabemos que $\frac{1}{a^{p+}} \leq \frac{1}{a^{p(x)}} \leq \frac{1}{a^{p-}}$ para todo $x \in \Omega$. Luego,

$$\frac{1}{a^{p_+}}\rho_{p(x)}(u) = \frac{1}{a^{p_+}}\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx \leq \int_\Omega \Big|\frac{u(x)}{a}\Big|^{p(x)}dx \leq \frac{1}{a^{p_-}}\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx = \frac{1}{a^{p_-}}\rho_{p(x)}(u).$$

Como $\|u\|_{p(x)} = a$, entonces $\displaystyle\int_\Omega \Big|\frac{u(x)}{a}\Big|^{p(x)}dx = \rho_{p(x)}\Big(\frac{u}{a}\Big) = 1.$

Obtenemos así que $\frac{1}{a^{p+}}\rho_{p(x)}(u) \leq 1$ y $1 \leq \frac{1}{a^{p-}}\rho_{p(x)}(u)$, como queríamos probar. □

Proposición 2.8. *Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Entonces,*

1. *$\rho_{p(x)}(|\lambda|u) \leq |\lambda|\rho_{p(x)}(u)$ para todo $|\lambda| < 1$.*
2. *$\rho_{p(x)}(|\lambda|u) \geq |\lambda|\rho_{p(x)}(u)$ para todo $|\lambda| \geq 1$.*

Demostración. 1. Sea $|\lambda| < 1$. Como $0 < 1 - |\lambda| < 1$, por la convexidad del modular, resulta

$$\rho_{p(x)}(|\lambda|u) \leq (1 - |\lambda|)\rho_{p(x)}(0) + |\lambda|\rho_{p(x)}(u) = |\lambda|\rho_{p(x)}(u).$$

2. Supongamos $|\lambda| \geq 1$. Aplicando el punto 1 a $\frac{1}{|\lambda|}$, obtenemos que

$$\rho_{p(x)}\Big(\frac{1}{|\lambda|}\tilde{u}\Big) \leq \frac{1}{|\lambda|}\rho_{p(x)}(\tilde{u}) \text{ para todo } \tilde{u} \in L^{p(x)}(\Omega).$$

En particular, para $\tilde{u} = |\lambda|u$ obtenemos

$$\rho_{p(x)}(u) \leq \frac{1}{|\lambda|}\rho_{p(x)}(|\lambda|u),$$

como queríamos probar.

□

Corolario 2.9. *Sean $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ y $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^{p(x)}(\Omega)$, entonces*

$$\|u_k - u\|_{p(x)} \to 0 \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u_k - u) \to 0$$

Demostración. Basta notar que, por la Proposición 2.7, tenemos que

$$\text{mín}\{\|u\|_{p(x)}^{p_+}, \|u\|_{p(x)}^{p_-}\} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \text{máx}\{\|u\|_{p(x)}^{p_+}, \|u\|_{p(x)}^{p_-}\},$$

de donde se deduce el corolario. □

Observación 2.10. Por la Proposición 2.7, resulta también la siguiente relación:

$$\text{mín}\{(\rho_{p(x)}(u))^{\frac{1}{p_-}}, (\rho_{p(x)}(u))^{\frac{1}{p_+}}\} \leq \|u\|_{p(x)} \leq \text{máx}\{(\rho_{p(x)}(u))^{\frac{1}{p_-}}, (\rho_{p(x)}(u))^{\frac{1}{p_+}}\}.$$

El siguiente teorema nos da la completitud de $L^{p(x)}(\Omega)$ con respecto a su norma. Para su prueba nos guiamos por la demostración presentada en [4, Teorema 3.2.7, página 72].

Teorema 2.11. *La norma $\|\cdot\|_{p(x)}$ hace de $L^{p(x)}(\Omega)$ un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^{p(x)}(\Omega)$. Luego, es una sucesión de Cauchy en medida sobre Ω y, por lo tanto, existe $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ medible y una subsucesión $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_j} \to u$ ctp Ω.

Tenemos entonces que $|u_{n_j}(x) - u(x)|^{p(x)} \to 0$ ctp Ω.

Sean $\lambda > 0$ y $0 < \varepsilon < 1$. Por ser $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, podemos afirmar que existe $N = N(\lambda, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|\lambda(u_m - u_n)\|_{p(x)} < \varepsilon$ para todo $m, n \geq N$.

Por la Proposicin 2.6, obtenemos que $\rho_{p(x)}(\lambda(u_m - u_n)) \leq \varepsilon$.

Por el Lema de Fatou, resulta

$$\begin{aligned}
\rho_{p(x)}(\lambda(u_m - u)) &= \int_\Omega |\lambda(u_m(x) - u(x))|^{p(x)} dx \\
&= \int_\Omega \lim_{j\to\infty} |\lambda(u_m(x) - u_{n_j}(x))|^{p(x)} dx \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega |\lambda(u_m(x) - u_{n_j}(x))|^{p(x)} dx \\
&= \liminf_{j\to\infty} \rho_{p(x)}(\lambda(u_m - u_{n_j})) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Concluimos así que $\rho_{p(x)}(\lambda(u_m - u)) \to 0$ cuando $m \to \infty$ para todo $\lambda > 0$.

Por el Corolario 2.9, $\|\lambda(u_m - u)\|_{p(x)} \to 0$ y entonces resulta que $\|u_m - u\|_{p(x)} \to 0$, como queríamos probar. □

Proposición 2.12 (Desigualdad de Hölder.)**.** *Sean $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ y $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$. Entonces,*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq 2\|u\|_{p(x)}\|v\|_{p'(x)}$$

Demostración. Supongamos primero que $\|u\|_{p(x)} = \|v\|_{p'(x)} = 1$.

Por la Proposición 2.6, $\rho_{p(x)}(u) \leq 1$ *y* $\rho_{p'(x)}(v) \leq 1$. Luego,

$$\rho_1(\frac{uv}{2}) = \int_\Omega |\frac{u(x)v(x)}{2}|\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx = \frac{1}{2}\rho_1(uv) \leq \frac{1}{2}(\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p'(x)}(v)) \leq 1$$

Aplicando nuevamente la Proposición 2.6, resulta $\left\|\frac{uv}{2}\right\|_1 \leq 1$ y concluimos que $\|uv\|_1 \leq 2$.

Sean ahora $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ y $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$. Consideramos $\tilde{u} = \frac{u}{\|u\|_{p(x)}}$ y $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|_{p'(x)}}$.

Como $\|\tilde{u}\|_{p(x)} = \|\tilde{v}\|_{p'(x)} = 1$, tenemos que $\|uv\|_1 \leq 2$. Por lo tanto $\left\|\frac{u}{\|u\|_{p(x)}}\frac{v}{\|v\|_{p'(x)}}\right\|_1 \leq 2$.

Concluimos así que $\|uv\|_1 \leq 2\|u\|_{p(x)}\|v\|_{p'(x)}$, como queríamos demostrar. □

El objetivo en lo que resta de la seccin es demostrar que los espacios de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ son espacios reflexivos. Para esto probaremos que son *uniformemente convexos* de donde, por un resultado conocido del Análisis Funcional, se deduce la reflexividad de los mismo. Ver [1, Teorema III.29].

Lema 2.13. *Sea* $\varepsilon > 0$. *Entonces, existe* $\delta = \delta(\varepsilon, p_-, p_+) > 0$ *tal que para todo* $a, b \geq 0$ *vale que*

$$|a - b| \leq \varepsilon \max\{a, b\} \quad \textit{o bien} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq (1-\delta)\frac{a^p + b^p}{2}$$

Demostración. Sean $0 \leq a \leq b$. Debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale la siguiente implicación

$$b - a > \varepsilon b \quad \text{entonces} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq (1-\delta)\frac{a^p + b^p}{2}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 < \varepsilon < 1$. Si llamamos $t = \frac{a}{b}$, entonces alcanza con probar que

$$(t+1)^p \leq (1-\delta)2^{1-p}(t^p + 1),$$

para $0 \leq t < 1 - \varepsilon$. Definimos entonces

$$f_p(t) = 2^{1-p}\frac{(1+t)^p}{1+t^p}.$$

Es fácil ver que $f_p(t)$ resulta monótona creciente, luego $f_p(t) \leq f_p(1-\varepsilon)$ para todo $0 \leq t < 1-\varepsilon$. Luego, si llamamos $\delta_p(\varepsilon) = 1 - f_p(1-\varepsilon) > 0$ se verifica lo pedido.

Falta ver que se puede tomar δ independiente de $p \in [p_-, p_+]$. Pero esto es consecuencia del hecho de que $\delta_p(\varepsilon)$ es una función continua en $[p_-, p_+]$ y positiva. Luego

$$\delta(\varepsilon, p_-, p_+) := \min_{p \in [p_-, p_+]} \delta_p(\varepsilon) > 0.$$

El lema queda entonces demostrado. □

Lema 2.14. *Sea* $\varepsilon_2 > 0$. *Entonces, existe* $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2, p_-, p_+)$ *tal que para todo* $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|a - b| \leq \varepsilon_2 \max\{|a|, |b|\} \quad \textit{o bien} \quad \left|\frac{a+b}{2}\right|^p \leq (1-\delta_2)\frac{|a|^p + |b|^p}{2}$$

Demostración. Sea $\varepsilon_2 > 0$. Para $\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{2}$, consideramos $\delta > 0$ como en el Lema 2.13.

Supongamos que $|a-b| > \varepsilon_2 \max\{|a|, |b|\}$. Si $||a| - |b|| > \varepsilon \max\{|a|, |b|\}$, basta tomar $\delta_2 = \delta$.

Supongamos entonces que $||a| - |b|| \leq \varepsilon \max\{|a|, |b|\}$.

Tenemos que $|a-b| > \varepsilon_2 \ \max\{|a|, |b|\} = 2\varepsilon \ \max\{|a|, |b|\} \geq 2\,||a| - |b||$. Luego,

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{a+b}{2}\Big|^2 &= \frac{|a|^2}{2} + \frac{|b|^2}{2} - \Big|\frac{a-b}{2}\Big|^2 \\
&= \frac{|a|^2}{2} + \frac{|b|^2}{2} - \frac{3}{4}\Big|\frac{a-b}{2}\Big|^2 - \frac{1}{4}\Big|\frac{a-b}{2}\Big|^2 \\
&\leq \frac{|a|^2}{2} + \frac{|b|^2}{2} - \frac{3}{4}\Big|\frac{a-b}{2}\Big|^2 - \Big(\frac{|a|-|b|}{2}\Big)^2 \\
&= \Big(\frac{|a|+|b|}{2}\Big)^2 - \frac{3}{4}\Big|\frac{a-b}{2}\Big|^2.
\end{aligned}$$

donde para afirmar la desigualdad tuvimos en cuenta que $|a-b| > 2\,||a| - |b||$.

Como $|a-b| > \varepsilon_2 \ \max\{|a|, |b|\} \geq \varepsilon_2 \frac{|a|+|b|}{2}$, tenemos que $-\frac{3}{4}\Big|\frac{a-b}{2}\Big|^2 < -\frac{3}{16}\varepsilon_2^2\Big(\frac{|a|+|b|}{2}\Big)^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{a+b}{2}\Big|^2 &\leq \Big(\frac{|a|+|b|}{2}\Big)^2 - \frac{3}{4}\Big|\frac{a-b}{2}\Big|^2 \\
&\leq \Big(\frac{|a|+|b|}{2}\Big)^2 - \frac{3}{16}\varepsilon_2^2\Big(\frac{|a|+|b|}{2}\Big)^2 \\
&= \left(1 - \frac{3\varepsilon_2^2}{16}\right)\Big(\frac{|a|+|b|}{2}\Big)^2
\end{aligned}$$

Considero $\delta_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{3\varepsilon_2^2}{16}} > 0$. Entonces, $\left|\frac{a+b}{2}\right| \leq (1-\delta_2)\,\frac{|a|+|b|}{2}$. Y así,

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p \leq (1-\delta_2)^p \left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^p \leq (1-\delta_2)\frac{|a|^p + |b|^p}{2},$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado la convexidad de la función x^p. □

Observación 2.15. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $|a-b| \leq \varepsilon_2 \max\{|a|, |b|\}$ con $0 < \varepsilon_2 < 1$.

Si se verifica que, $|a-b| \leq \varepsilon_2 \max\{|a|, |b|\}$ entonces se tiene que $|a-b| \leq \varepsilon_2(|a| + |b|)$, de donde

$$\left|\frac{a-b}{2}\right| \leq \varepsilon_2 \frac{|a|+|b|}{2}.$$

Luego, usando la convexidad de la función x^p, se sigue que

$$\left(\frac{|a-b|}{2}\right)^p \leq \varepsilon_2 \frac{|a|^p + |b|^p}{2}.$$

Luego, en el lema anterior podemos reemplazar la primera alternativa por esta última desigualdad.

Lema 2.16. *El modular $\rho_{p(x)}$ es uniformemente convexo, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ vale que*

$$\rho_{p(x)}(\tfrac{u-v}{2}) \leq \varepsilon \frac{\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(v)}{2} \quad \textit{o bien} \quad \rho_{p(x)}(\tfrac{u+v}{2}) \leq (1-\delta)\frac{\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(v)}{2}$$

Demostración. Sean $\varepsilon_2, \delta_2 > 0$ como en el Lema 2.14. Considero $\varepsilon = 2\varepsilon_2$.

Si $\rho_{p(x)}(u) = \infty$ o $\rho_{p(x)}(v) = \infty$, no hay nada que probar.

Supongamos entonces que $\rho_{p(x)}(u) < \infty$ y $\rho_{p(x)}(v) < \infty$. Luego, por la convexidad del modular, Observación 2.3, $\rho_{p(x)}(\frac{u+v}{2}) < \infty$ y $\rho_{p(x)}(\frac{u-v}{2}) < \infty$.

Supongamos además que

$$\rho_{p(x)}(\frac{u-v}{2}) > \varepsilon \frac{\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(v)}{2}. \tag{2.1}$$

Definimos

$$E = \Big\{ y \in \Omega \colon |u(y) - v(y)| > \frac{\varepsilon}{2} \text{máx}\{|u(y)|, |v(y)|\} \Big\}.$$

De la Observación 2.15, resulta

$$\left(\frac{|u(y) - v(y)|}{2} \right)^{p(x)} \leq \varepsilon_2 \frac{|u(y)|^{p(x)} + |v(y)|^{p(x)}}{2} \quad \text{c.t.p. } \Omega \setminus E.$$

En particular,

$$\rho_{p(x)}(\chi_{\Omega\setminus E}\tfrac{u-v}{2}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{\rho_{p(x)}(\chi_{\Omega\setminus E}u) + \rho_{p(x)}(\chi_{\Omega\setminus E}v)}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(v)}{2}. \tag{2.2}$$

Por (2.1) y (2.2), tenemos que

$$\rho_{p(x)}(\chi_E \frac{u-v}{2}) = \rho_{p(x)}(\frac{u-v}{2}) - \rho_{p(x)}(\chi_{\Omega\setminus E}\frac{u-v}{2}) > \frac{\varepsilon}{2} \frac{\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(v)}{2}.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la definición de E y la elección de δ_2, resulta

$$\rho_{p(x)}(\chi_E \frac{u+v}{2}) \leq (1-\delta_2) \frac{\rho_{p(x)}(\chi_E u) + \rho_{p(x)}(\chi_E v)}{2}. \tag{2.3}$$

Dividiendo la región de integración en E y $\Omega\setminus E$, como $\frac{1}{2}(|u|^{p(x)} + |v|^{p(x)}) - \left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} \geq 0$, obtenemos

$$\frac{\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(v)}{2} - \rho_{p(x)}\Big(\frac{u+v}{2}\Big) \geq \frac{\rho_{p(x)}(\chi_E u) + \rho_{p(x)}(\chi_E v)}{2} - \rho_{p(x)}\Big(\chi_E \frac{u+v}{2}\Big). \tag{2.4}$$

Combinando (2.3), (2.4) junto con la convexidad de la función x^p, concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(v)}{2} - \rho_{p(x)}\Big(\frac{u+v}{2}\Big) &\geq \delta_2 \frac{\rho_{p(x)}(\chi_E u) + \rho_{p(x)}(\chi_E v)}{2} \\
&\geq \delta_2 \rho_{p(x)}\Big(\chi_E \frac{u+v}{2}\Big) \\
&\geq \frac{\delta_2 \varepsilon}{2} \frac{\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(v)}{2}.
\end{aligned}$$

Y así, $\rho_{p(x)}(\frac{u+v}{2}) \leq (1 - \frac{\delta_2\varepsilon}{2})\frac{\rho_{p(x)}(u)+\rho_{p(x)}(v)}{2}$, como queríamos ver. □

Observación 2.17. Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$,

$$\rho_{p(x)}(2u) = \int_\Omega |2u(x)|^{p(x)}\,dx \leq 2^{p_+}\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\,dx = 2^{p_+}\rho_{p(x)}(u)$$

Por lo tanto, existe $c \geq 2$ tal que $\rho_{p(x)}(2u) \leq c\rho_{p(x)}(u)$ para todo $u \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Lema 2.18. *Sea K la menor constante que cumple la condición de la Observación 2.17. Entonces,*

1. *Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ tal que si $\rho_{p(x)}(u) \leq \delta$ entonces $\|u\|_{p(x)} < \varepsilon$.*

2. *Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ tal que si $\rho_{p(x)}(u) \leq 1-\varepsilon$ entonces $\|u\|_{p(x)} < 1-\delta$ para toda $u \in L^{p(x)}(\Omega)$.*

Demostración. 1. Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $j \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-j} \leq \varepsilon$ y $\delta = K^{-j}$.

Supongamos que $\rho_{p(x)}(u) \leq \delta$. Sucesivamente, $\rho_{p(x)}(2u) \leq K\rho_{p(x)}(u)$, $\rho_{p(x)}(2^2u) \leq K\rho_{p(x)}(2u) \leq K^2\rho_{p(x)}(u) \ldots$ Luego, $\rho_{p(x)}(2^ju) \leq K^j\rho_{p(x)}(u) \leq 1$.

Por la Proposición 2.6, como $\|2^ju\|_{p(x)} \leq 1$, resulta $\|u\|_{p(x)} \leq 2^{-j} \leq \varepsilon$.

2. Sea $\varepsilon > 0$ y $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $\rho_{p(x)}(u) \leq 1-\varepsilon$. Fijemos $a = a(K,\varepsilon) \in (1,2)$ tal $\rho_{p(x)}(au) \leq 1$. Por la Proposición 2.6, como $\|au\|_{p(x)} \leq 1$, resulta $\|u\|_{p(x)} \leq \frac{1}{a}$. Basta entonces tomar $1-\delta = \frac{1}{a}$ para obtener el resultado.

□

Con todos estos resultados preliminares estamos en condiciones de probar la uniforme convexidad de los espacios $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 2.19. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces el espacio $L^{p(x)}(\Omega)$ es uniformemente convexo y, en consecuencia, $L^{p(x)}(\Omega)$ resulta reflexivo.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ tales que $\|u\|_{p(x)}, \|v\|_{p(x)} \leq 1$ y $\|u-v\|_{p(x)} > \varepsilon$. Por la Proposición 2.6, $\rho_{p(x)}(u), \rho_{p(x)}(v) \leq 1$. Por otro lado, $\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{p(x)} > \frac{\varepsilon}{2}$.

Por el punto 1 del Lema 2.18, existe $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ tal que $\rho_{p(x)}\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq \alpha$.

Concluimos entonces que $\rho_{p(x)}\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq \alpha\frac{\rho_{p(x)}(u)+\rho_{p(x)}(v)}{2}$.

Por el Lema 2.16, existe $\beta = \beta(\alpha) > 0$ tal que

$$\rho_{p(x)}\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq (1-\beta)\frac{\rho_{p(x)}(u)+\rho_{p(x)}(v)}{2} \leq 1-\beta.$$

Por el punto 2 del Lema 2.18, existe $\delta = \delta(K,\beta) > 0$ tal que $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{p(x)} \leq 1-\delta$.

Esto concluye la demostración. □

Observación 2.20. A veces precisaremos utilizar extensiones del exponente p a todo $\mathbb{R}^N$. En estos casos consideraremos $\bar{p}$ que coincida con p en Ω y valga p_- en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

Teorema 2.21. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces el espacio $L^{p(x)}(\Omega)$ es separable.*

Demostración. Supongamos primero que $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{D} := \Big\{ \sum_{i=1}^{m} q_i \chi_{Q_i} : m \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q} \text{ y } Q_i \text{ cubo diádico} \Big\}.$$

Notemos que $\mathcal{D}$ es numerable. Veamos que además resulta denso. Sea $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

1. Si $f = \chi_G$ con G abierto, podemos escribir $G = \cup_{i=1}^{\infty} Q_i$ con Q_i cubos diádicos no solapados y, en consecuencia,
$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{Q_i}.$$
Notemos que $|G| < \infty$ (de lo contrario, f no pertenecería a $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$).
Consideremos $f_m = \sum_{i=1}^{m} \chi_{Q_i} \in \mathcal{D}$. Luego, por la Observación 2.10, existe α tal que
$$\begin{aligned} \|f - f_m\|_{p(x)} &= \|\sum_{i=m+1}^{\infty} \chi_{Q_i}\|_{p(x)} \\ &= \|\chi_{\cup_{i=m+1}^{\infty} Q_i}\|_{p(x)} \\ &\leq (\rho_{p(x)}(\chi_{\cup_{i=m+1}^{\infty} Q_i}))^{\alpha} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^N} (\chi_{\cup_{i=m+1}^{\infty} Q_i}(x))^{p(x)} \Big)^{\alpha} \\ &= \Big| \cup_{i=m+1}^{\infty} Q_i \Big|^{\alpha} \\ &\leq \Big(\sum_{i=m+1}^{\infty} |Q_i| \Big)^{\alpha} \to 0 \end{aligned}$$

2. Si $f = \chi_A$ con A medible.
Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $G \subset \mathbb{R}^N$ abierto tal que $A \subset G$ y $|G \setminus A| < \varepsilon$.
Por el punto 1, sabemos que $\chi_G \in \bar{\mathcal{D}}$ y, en consecuencia, existe $g \in \mathcal{D}$ tal que $\|\chi_G - g\|_{p(x)} < \varepsilon$. Luego,
$$\|f - g\|_{p(x)} = \|\chi_A - g\|_{p(x)} \leq \|\chi_A - \chi_G\|_{p(x)} + \|\chi_G - g\|_{p(x)}.$$

Notemos que el primer término puede acotarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\|\chi_A - \chi_G\|_{p(x)} &= \|\chi_{G\setminus A}\|_{p(x)}\\ &\leq (\rho_{p(x)}(\chi_{G\setminus A}))^{\beta}\\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\chi_{G\setminus A}(x)|^{p(x)} dx\Big)^{\beta}\\ &= |G\setminus A|^{\beta} < \varepsilon^{\beta}.\end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$\|f - g\|_{p(x)} \leq \varepsilon^{\beta} + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitario, concluimos que $f \in \bar{\mathcal{D}}$.

3. Si $f = \sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i}$ con $a_i \in \mathbb{R}$ y A_i de medida finita.

   Recordemos que, por la Observación 2.10, existe α tal que

   $$\|\chi_{A_i}\|_{p(x)} \leq (\rho_{p(x)}(\chi_{A_i}))^{\alpha} = |A_i|^{\alpha}.$$

   Consideremos $q_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|a_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2|A_i|^{\alpha} m}$.

   Por el punto 2, sabemos que existe además $g_i \in \mathcal{D}$ tal que $\|\chi_{A_i} - g_i\|_{p(x)} < \frac{\varepsilon}{2|q_i|m}$.

   Sea $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} q_i g_i \in D$. Luego,

   $$\begin{aligned}\|f - f_\varepsilon\|_{p(x)} &= \Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i} - \sum_{i=1}^{m} q_i g_i\Big\|_{p(x)}\\ &= \Big\|\sum_{i=1}^{m}(a_i - q_i)\chi_{A_i} - \sum_{i=1}^{m} q_i(g_i - \chi_{A_i})\Big\|_{p(x)}\\ &\leq \Big\|\sum_{i=1}^{m}(a_i - q_i)\chi_{A_i}\Big\|_{p(x)} + \Big\|\sum_{i=1}^{m} q_i(g_i - \chi_{A_i})\Big\|_{p(x)}.\end{aligned}$$

   Estudiando el primer término obtenemos que

   $$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^{m}(a_i - q_i)\chi_{A_i}\Big\|_{p(x)} &\leq \sum_{i=1}^{m} |a_i - q_i|\|\chi_{A_i}\|_{p(x)}\\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2|A_i|^{\alpha} m}|A_i|^{\alpha} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

   Y para el segundo,

   $$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^{m} q_i(g_i - \chi_{A_i})\Big\|_{p(x)} &\leq \sum_{i=1}^{m} |q_i|\|g_i - \chi_{A_i}\|_{p(x)}\\ &\leq \sum_{i=1}^{m} |q_i|\frac{\varepsilon}{2|q_i|m} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\|f - f_\varepsilon\|_{p(x)} < \varepsilon$ y, en consecuencia, $f \in \bar{\mathcal{D}}$.

4. Si $f \geq 0$, consideremos $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ simples positivas tales que $\varphi_n \nearrow f$.

   Nuevamente por la Observación 2.10, existe α tal que
$$\|f - \varphi_n\|_{p(x)} \leq (\rho_{p(x)}(f - \varphi_n))^\alpha = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - \varphi_n(x)|^{p(x)}dx\Big)^\alpha$$
   Notemos que, como $|\varphi_n| \leq |f|$,
$$|f - \varphi_n|^{p(x)} \leq 2^{p(x)}(|f|^{p(x)} + |\varphi_n|^{p(x)}) \leq 2^{p_+ +1}|f|^{p(x)}$$
   Obtuvimos entonces un mayorante integrable. Luego, por el Teorema de Convergencia Dominada,
$$\lim \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - \varphi_n(x)|^{p(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim |f(x) - \varphi_n(x)|^{p(x)}dx = 0$$
   Como, por el punto 3 sabemos que las funciones simples pertenecen a $\bar{\mathcal{D}}$, resulta que $f \in \bar{\mathcal{D}}$.

5. Si $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ arbitraria. Notemos que $f = f^+ - f^-$ con f^+ y f^- positivas. Además, por el punto 4, ambas pertenecen a $\bar{\mathcal{D}}$. Luego, existen g_1 y g_2 en $\mathcal{D}$ tales que
$$\|f^+ - g_1\|_{p(x)} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \|f^- - g_2\|_{p(x)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Consideremos $g = g_1 - g_2 \in \mathcal{D}$. Tenemos que
$$\begin{aligned}\|f - g\|_{p(x)} &= \|(f^+ - f^-) - (g_1 - g_2)\|_{p(x)}\\ &= \|(f^+ - g_1) - (g_2 - f^-)\|_{p(x)}\\ &\leq \|f^+ - g_1\|_{p(x)} + \|g_2 - f^-\|_{p(x)} < \varepsilon.\end{aligned}$$
   Concluimos así que $f \in \bar{\mathcal{D}}$.

Supongamos ahora que Ω es arbitrario. Dada $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, consideremos $\bar{f}$ que coincida con f en Ω y se anule en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Luego, $\bar{f} \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Por lo visto en la primera parte de la demostración, sabemos entonces que dado $\varepsilon > 0$ existe $f_\varepsilon \in \mathcal{D}$ tal que
$$\|\bar{f} - f_\varepsilon\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$
Por la Observación 2.10, existe α tal que
$$\begin{aligned}\|f - f_\varepsilon|_\Omega\|_{L^{p(x)}(\Omega)} &\leq (\rho_{L^{p(x)}(\Omega)}(f - f_\varepsilon|_\Omega))^\alpha\\ &= \Big(\int_\Omega |f(x) - f_\varepsilon(x)|^{p(x)}dx\Big)^\alpha\\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x) - f_\varepsilon(x)|^{p(x)}dx\Big)^\alpha\\ &= \|\bar{f} - f_\varepsilon\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.\end{aligned}$$
Resulta entonces que $f \in \bar{\mathcal{D}}$, como queríamos probar. $\square$

Observación 2.22. Notemos que con la demostración previa hemos probado también que las funciones simples son densas en $L^{p(x)}(\Omega)$.

Proposición 2.23. *Sean $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$ tales que $1 < p \leq q$ c.t.p. Ω. Supongamos que Ω tiene medida finita. Entonces,*

$$L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega).$$

Más aún, las inclusiones son continuas.

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder. En efecto, si $u \in L^{q(x)}(\Omega)$, por la Proposición 2.12 y la Observación 2.10,

$$\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \leq 2 \| |u|^{p(x)} \|_{\frac{q(x)}{p(x)}} \|1\|_{\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right)'} \leq c \Big(\int_\Omega |u(x)|^{q(x)} dx \Big)^{\alpha_{p,q}}.$$

Como $u \in L^{q(x)}(\Omega)$, obtenemos que $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. □

Enunciamos, sin demostración, el siguiente lema necesario para la siguiente proposición. Su prueba puede hallarse en [4, Proposición 4.6.3, página 125]

Lema 2.24. *Sean K el núcleo regularizante standard y $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^N)$. Entonces, para toda $u \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ vale que*

$$\|u * K_\varepsilon\|_{p(x)} \leq c \|u\|_{p(x)} \|K\|_1.$$

Proposición 2.25. *Sean K el núcleo regularizante standard, $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^N)$ y $u \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Entonces, $u * K_\varepsilon \to u$ en $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sea $\delta > 0$ arbitrario. Por la densidad de las funciones simples en $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$, existe una función simple v tal que $\|u - v\|_{p(x)} \leq \delta$. Luego,

$$\|u * K_\varepsilon - u\|_{p(x)} \leq \|v * K_\varepsilon - v\|_{p(x)} + \|(u - v) * K_\varepsilon - (u - v)\|_{p(x)}.$$

Como g es simple, sabemos que $g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_+}(\mathbb{R}^N)$ y, en consecuencia, $v * K_\varepsilon \to v$ en $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_+}(\mathbb{R}^N)$.

Por la Proposición 2.23, obtenemos que $v * K_\varepsilon \to v$ en $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Por otra parte, por el Lema 2.24,

$$\|(u - v) * K_\varepsilon - (u - v)\|_{p(x)} \leq c \|u - v\|_{p(x)} \leq c\delta.$$

Concluimos entonces que

$$\limsup \|u * K_\varepsilon - u\|_{p(x)} \leq c\delta.$$

Como $\delta > 0$ era arbitrario, resulta que $\|u * K_\varepsilon - u\|_{p(x)} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, como queríamos probar. □

Observación 2.26. El obstáculo que hallamos en la proposición anterior para replicar para p variable la demostración standard para p constante (Ver [21]) es que $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ no resulta invariante por traslaciones. Se puede probar que el operador τ_h definido por $(\tau_h f)(y) := f(y-h)$ resulta continuo de $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ en $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si p es constante (Ver [4, Proposición 3.6.1, página 92]).

Veamos a continuación que si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ no es constante, podemos construir $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\tau_h f \notin L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Ejemplo 2.27. *Consideremos $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tal que τ_h no es acotada de $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ en $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $f_j \geq 0$, $\|f_j\|_{p(x)} \leq \frac{1}{2^j}$ y $\|\tau_h f_j\|_{p(x)} \geq 2^j$. Definiendo $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$, resulta*

$$\|f\|_{p(x)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{p(x)} \leq 1 \text{ y } \|\tau_h f\|_{p(x)} \geq \text{lím}\, \|\tau_h f_j\|_{p(x)} = \infty.$$

Para finalizar esta sección daremos la caracterización del espacio dual de $L^{p(x)}(\Omega)$. La prueba de este teorema es análoga al caso p constante.

Definición 2.28. Se define el espacio dual de $L^{p(x)}(\Omega)$, notado por $(L^{p(x)}(\Omega))'$, como

$$(L^{p(x)}(\Omega))' := \{F : L^{p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ lineales y continuas}\}.$$

Observación 2.29. Notemos que, para cada $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, F definida por $F(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$ para todo $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ es claramente lineal y, como consecuencia inmediata de la Proposición 2.12, continuo.

Teorema 2.30. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces, dado $F \in (L^{p(x)}(\Omega))'$, existe un único $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ tal que*

$$F(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx,$$

para todo $u \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Demostración. Sea $F \in (L^{p(x)}(\Omega))'$. Dado un conjunto A, consideremos $\nu(A) = F(\chi_A)$.

Notemos que si $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ unión disjunta, entonces $\chi_A = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}$.

Como $|\chi_{\cup_{i=1}^n A_i}(x) - \chi_A(x)|^{p(x)} \leq |\chi_A(x)|^{p(x)}$ para todo $x \in \Omega$, por el Teorema de Convergencia Dominada, resulta:

$$\rho_{p(x)}\Big(\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} - \chi_A\Big) = \int_\Omega |\chi_{\cup_{i=1}^n A_i}(x) - \chi_A(x)|^{p(x)} dx \to 0.$$

Como F es continua, $F(\chi_{\cup_{i=1}^n A_i}) \to F(\chi_A) = \nu(A)$. Por otra parte, como F es lineal,

$$F(\chi_{\cup_{i=1}^n A_i}) = F\Big(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} F(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i).$$

Concluimos entonces que

$$\sum_{i=1}^{n} \nu(A_i) = \nu\Big(\cup_{i=1}^{\infty} A_i \Big).$$

Por otro lado, si $|A| = 0$, $\chi_A = 0$ en $L^{p(x)}(\Omega)$. Luego, por la linealidad de F, $\nu(A) = F(\chi_A) = F(0) = 0$ y, en consecuencia, ν es absolutamente continua respecto de la medida de Lebegue.

Por el Teorema de Radon Nikodym, existe una única (en el siguiente sentido: si existiera otra, coincidirían ctp) $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(\chi_A) = \int_\Omega v(x)\chi_A(x)\,dx.$$

Empleando nuevamente la linealidad de F obtenemos que, para toda ϕ simple resulta

$$F(\phi) = \int_\Omega v(x)\phi(x)\,dx.$$

Por otro lado, dada ϕ simple,

$$\Big|\int_\Omega v(x)\phi(x)\,dx\Big| = |F(\phi)| \leq \|F\|_{(L^{p(x)}(\Omega))'}\|\phi\|_{p(x)}.$$

Notando $M = \|F\|_{(L^{p(x)}(\Omega))'}$, para toda ϕ simple podemos afirmar que

$$\Big|\int_\Omega v(x)\phi(x)\,dx\Big| \leq M\|\phi\|_{p(x)}.$$

Considerando, en particular, $\phi = \operatorname{sgn}(v)$, obtenemos

$$\int_\Omega |v(x)|\,dx = \Big|\int_\Omega v(x)\operatorname{sgn}(x)\,dx\Big| \leq M\|\operatorname{sgn}(v)\|_{p(x)}.$$

Por lo tanto, $v \in L^1(\Omega)$. Luego, dada $g \in L^\infty(\Omega)$, existe $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones simples tales que $|\phi_n| \leq |g|$ y $\phi_n \to g$ c.t.p. Luego, $\phi_n \to g$ en $L^{p(x)}(\Omega)$. Por la continuidad de F, $F(\phi_n) \to F(g)$.

Por otra parte, como $|v\phi_n| \leq |v|\|g\|_\infty \in L^1(\Omega)$, por el Teorema de Convergencia Dominada,

$$F(g) = \lim F(\phi_n) = \lim \int_\Omega v(x)\phi_n(x)\,dx = \int_\Omega v(x)g(x)\,dx.$$

Dada $g \in L^\infty(\Omega)$ tenemos entonces que

$$\Big|\int_\Omega v(x)g(x)\,dx\Big| = |F(g)| \leq M\|g\|_{p(x)}. \tag{2.5}$$

Veamos que $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$. Consideremos $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones simples tales que $\phi_n \to v$ c.t.p. y $|\phi_n| \leq |v|$.

Sea $g_n = \text{sgn}(v)\Big(\frac{|\phi_n|}{\|\phi_n\|_{p'(x)}}\Big)^{\frac{p'(x)}{p(x)}}$. Notemos que $g_n \in L^\infty(\Omega)$ y, por la propiedad de la bola unitaria, $\|g_n\|_{p(x)} = 1$.

Luego,

$$\int_\Omega \frac{|\phi_n|^{p'(x)}}{\|\phi_n\|_{p'(x)}^{\frac{p'(x)}{p(x)}}}\, dx = \int_\Omega \phi_n g_n\, dx \leq \int_\Omega |v||g_n|\, dx \leq M.$$

Por otro lado, si $\|\phi_n\|_{p'(x)} \geq 1$, se tiene

$$\|\phi_n\|_{p'(x)}^{\frac{p'(x)}{p(x)}} \leq \|\phi_n\|_{p'(x)}^{\frac{p'_-}{p_-}} \quad \text{y} \quad \int_\Omega |\phi_n|^{p'(x)}\, dx \geq \|\phi_n\|_{p'(x)}^{p_-}.$$

Por ende,

$$\|\phi_n\|_{p'(x)} \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ de donde se concluye lo pedido. □

2.2. Espacios de Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Definición 2.31. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, definimos el *espacio de Sobolev con exponente variable* como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)\colon u \in L^{p(x)}(\Omega) \text{ y } |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}.$$

Los elementos de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ se denominan *funciones de Sobolev*.

En este espacio, definimos el semimódulo

$$\rho_{W^{1,p(x)}(\Omega)}(u) = \rho_{1,p(x)}(u) := \rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(\nabla u)$$

que induce la norma

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{1,p(x)} := \text{ínf}\{\lambda > 0\colon \rho_{1,p(x)}(\frac{u}{\lambda}) \leq 1\}.$$

Observación 2.32. Equivalentemente, se puede considerar la siguiente norma:

$$\|u\| := \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Ambas resultan ser equivalentes, se tiene

$$\frac{1}{2}\|u\|_{1,p(x)} \leq \|u\| \leq 2\|u\|_{1,p(x)}.$$

De hecho, como $\rho_{1,p(x)}(u) = \rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(|\nabla u|)$, sigue que

$$\|u\|_{1,p(x)} \geq \|u\|_{p(x)} \quad \text{y} \quad \|u\|_{1,p(x)} \geq \|\nabla u\|_{p(x)},$$

de donde

$$\|u\| \leq 2\|u\|_{1,p(x)}.$$

Para la otra desigualdad, si tomamos $\lambda = \|u\|$, entonces

$$\rho_{1,p(x)}(\tfrac{u}{\lambda}) \leq \rho(\tfrac{u}{\|u\|_{p(x)}}) + \rho(\tfrac{\nabla u}{\|\nabla u\|_{p(x)}}) \leq 2,$$

luego, como $2 < 2^{p(x)}$, se obtiene

$$\rho_{1,p(x)}(\tfrac{u}{2\lambda}) \leq 1,$$

es decir

$$\|u\|_{1,p(x)} \leq 2\lambda = 2\|u\|.$$

Veamos que, dotado de esta norma, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Teorema 2.33. *El espacio de Sobolev* $(W^{1,p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p(x)})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p(x)}(\Omega)$. En particular, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\partial_j u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(j = 1,\ldots,N)$ son sucesiones de Cauchy en $L^{p(x)}(\Omega)$, que es un espacio de Banach por el Teorema 2.11. Por lo tanto, existen $u, g_1,\ldots,g_N \in L^{p(x)}(\Omega)$ tales que $u_n \to u$ y $\partial_j u_n \to g_j$ $(j = 1,\ldots,N)$ en $L^{p(x)}(\Omega)$.

Luego, si $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega u\partial_j\psi\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\partial_j\psi\, dx = -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \partial_j u_n\psi\, dx = -\int_\Omega g_j\psi\, dx$$

Por lo tanto, como $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, y $\partial_j u = g_j$.

Concluimos así que $u_n \to u$ en $W^{1,p(x)}(\Omega)$, como queríamos demostrar. □

Observación 2.34. Por el Teorema 2.21, $L^{p(x)}(\Omega)$ es separable y, por el Teorema 2.19, es reflexivo. Por otra parte, $W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega) \times (L^{p(x)}(\Omega))^N$ es cerrado (la inclusión viene dada por la aplicación $u \mapsto (u, \nabla u)$). Concluimos entonces que $W^{1,p(x)}(\Omega)$ es también separable y reflexivo. Ver [1, Proposición III.17].

Observación 2.35. Dada $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$\rho_{1,p(x)}(2u) = \rho_{p(x)}(2u) + \rho_{p(x)}(\nabla(2u))$$

Como $2u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, sabemos que $2u \in L^{p(x)}(\Omega)$ y $\nabla(2u) \in L^{p(x)}(\Omega)$. Por lo tanto, por la Observación 2.17, existe $c \geq 2$ tal que

$$\rho_{p(x)}(2u) \leq c\rho_{p(x)}(u)$$

y

$$\rho_{p(x)}(|\nabla(2u)|) = \rho_{p(x)}(2|\nabla u|) \leq c\rho_{p(x)}(|\nabla u|)$$

de donde

$$\rho_{1,p(x)}(2u) \leq c(\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(|\nabla u|)) = c\rho_{1,p(x)}(u).$$

Hemos obtenido entonces para $W^{1,p(x)}(\Omega)$ un resultado análogo al probado en la Observación 2.17 para $L^{p(x)}(\Omega)$. Notemos además que $\rho_{1,p(x)}$ es uniformemente convexo por ser suma de modulares uniformemente convexos. Luego, podemos replicar el Lema 2.18 y el Teorema 2.19, ahora para $W^{1,p(x)}(\Omega)$, concluyendo así que éste es también uniformemente convexo y, por lo tanto, reflexivo si $p \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Como consecuencia inmediata de la convexidad uniforme de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ (Ver [14]), damos el siguiente corolario que nos será de utilidad más adelante.

Corolario 2.36. *El espacio de Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$ cumple la condición de Banach-Saks, es decir, dada $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $u_i \rightharpoonup u$, se verifica que*

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_i \to u.$$

Teorema 2.37 (Teorema de Rellich Kondrachov para exponente variable.)**.** *Sean $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$ exponentes continuos tales que $p^+ < N$ y $q(x) < \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ para todo $x \in \bar{\Omega}$.*

Entonces, se tiene la inclusión $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ que resulta continua y compacta.

Demostración. Sea $1 < r < N$ y llamamos $r^* = \frac{Nr}{N-r}$.

Dado $x \in \bar{\Omega}$, existe un entorno $x \in U_x \subset \bar{\Omega}$ tal que

$$q^+(U_x) = \sup\{q(y) : y \in U_x\} < (p_-(U_x))^* = \text{ínf}\{p(y) : y \in U_x\}.$$

Sea $\{U_x : x \in \bar{\Omega}\}$ un cubrimiento por abiertos del compacto $\bar{\Omega}$ y consideremos un subcubrimiento finito $\{U_i : 1 \leq i \leq s\}$. Llamemos $p^-{}_i = p_-(U_i)$ y $q_i^+ = p_+(U_i)$.

Si $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, claramente $u \in W^{1,p(x)}(U_i)$. Luego, tenemos que $u \in W^{1,p_i^-}(U_i)$.

Por el Teorema de Rellich Kondrachov, ver [1, Teorema IX.16], se tiene que $W^{1,p_i^-}(U_i) \hookrightarrow L^{q_i^+}(U_i)$ con inclusión continua y compacta.

Más aún, se tiene que $L^{q_i^+}(U_i) \hookrightarrow L^{q(x)}(U_i)$ con inclusión continua.

Por lo tanto, $u \in L^{q(x)}(U_i)$ para todo $1 \leq i \leq s$. Concluimos así que $u \in L^{q(x)}(\Omega)$, como queríamos probar. $\square$

En muchas aplicaciones es importante considerar el espacio de funciones de Sobolev que se anulan en $\partial\Omega$. Si bien a priori esto puede no tener sentido, dado que una función de Sobolev está definida en casi todo punto y $|\partial\Omega| = 0$, es posible dar un sentido a este hecho de la siguiente manera:

Definición 2.38. Llamamos $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ a la clausura de las funciones Sobolev de soporte compacto en $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Notemos que, por ser cerrado en $W^{1,p(x)}(\Omega)$ que es Banach reflexivo, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ resulta del mismo modo Banach reflexivo.

Observación 2.39. Esta definición no es la que usualmente se presenta para p constante. Sin embargo, en la Proposición 3.8 del Capítulo 3 veremos que, bajo ciertas hipótesis, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ coincide con la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma de $W^{1,p(x)}(\Omega)$..

Para funciones en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ se tiene la siguiente desigualdad de Poincaré.

Teorema 2.40 (Desigualdad de Poincaré.). *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ un exponente continuo. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_{p(x)} \leq c\|\nabla u\|_{p(x)}, \quad u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Demostración. Supongamos que para cada n existe $u_n \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $\|u_n\|_{p(x)} > n\|\nabla u_n\|_{p(x)}$.

Consideremos $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{p(x)}}$. Luego,

$$\|\nabla v_n\|_{p(x)} = \frac{\|\nabla u_n\|_{p(x)}}{\|u_n\|_{p(x)}} < \frac{1}{n}. \tag{2.6}$$

Luego, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ y, en consecuencia, por el Teorema 2.37, existe una subsucesión, que seguiremos notando $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $v \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ y además

$$v_n \to v \text{ en } L^{p(x)}(\Omega) \tag{2.7}$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, por la Proposición 2.12 y, teniendo en cuenta (2.6) y (2.7), resulta

$$\begin{aligned}\int_\Omega v(x)\varphi_{x_i}(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega v_n(x)\varphi_{x_i}(x)\,dx\\ &= -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (v_n)_{x_i}(x)\varphi(x)\,dx = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\nabla v = 0$ y, entonces, v es constante. Como $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, concluimos que $v = 0$, lo cual es un absurdo ya que $\|v\|_{p(x)} = 1$ (basta notar que $\|v_n\|_{p(x)} = 1$ por definición).

Obtenemos así el resultado. □

De manera análoga, podemos obtener el siguiente resultado:

Proposición 2.41. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ un exponente continuo. Entonces, existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{p(x)} \leq c\|\nabla u\|_{p(x)}, \quad u \in W^{1,p(x)}(\Omega).$$

donde notamos $(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx$.

Demostración. Supongamos que para cada n existe $u_n \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $\|u_n - (u_n)_\Omega\|_{p(x)} > n\|\nabla u_n\|_{p(x)}$.

Consideremos $v_n = \frac{u_n-(u_n)_\Omega}{\|u_n-(u_n)_\Omega\|_{p(x)}}$. Notemos que $\|\nabla v_n\|_{p(x)} < \frac{1}{n}$.

Luego, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W^{1,p(x)}(\Omega)$ y, en consecuencia, por el Teorema 2.37, existe una subsucesión, que seguiremos notando $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $v \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ en $W^{1,p(x)}(\Omega)$ y además $v_n \to v$ en $L^{p(x)}(\Omega)$.

Como en la demostración anterior, podemos probar entonces que $\nabla v = 0$ y, por lo tanto, v resulta constante.

Por otra parte, por la Proposición 2.12, obtenemos

$$\int_\Omega v(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} |\Omega|(v_n)_\Omega = 0$$

Concluimos entonces que $v = 0$, arribando a un absurdo pues $\|v\|_{p(x)} = 1$.

Queda así probada la proposición. $\square$

Por último, presentamos un resultado que nos será de gran utilidad más adelante.

Proposición 2.42. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces, $W_0^{1,p_+}(\Omega) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega) \subset W_0^{1,p_-}(\Omega)$ con inclusiones continuas.*

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p_-}(\Omega)$, por la Proposición 2.12, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{p_-}^{p_-} &= \int_\Omega |u(x)|^{p_-}dx \\
&\le 2\|u^{p_-}\|_{\frac{p(x)}{p_-}}\|1\|_{(\frac{p(x)}{p_-})'} \\
&\le 2\,\text{máx}\{\left(\rho_{\frac{p(x)}{p_-}}(|u|^{p_-})\right)^{\frac{1}{p_-}}, \left(\rho_{\frac{p(x)}{p_-}}(|u|^{p_-})\right)^{\frac{1}{p_+}}\}|\Omega|^{\alpha_{p_+,p_-}} \\
&\le C_{p_+,p_-}\left(\rho_{\frac{p(x)}{p_-}}(|u|^{p_-})\right)^{\beta_{p_+,p_-}} \\
&= C_{p_+,p_-}\Big(\int_D |u(x)|^{p(x)}\Big)^{\beta_{p_+,p_-}} \\
&= C_{p_+,p_-}(\rho_{p(x)}(u))^{\beta_{p_+,p_-}}.
\end{aligned}$$

Como $\rho_{p(x)}(u) \le \text{máx}\{\|u\|_{p(x)}^{p_+}, \|u\|_{p(x)}^{p_-}\}$, resulta que $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ y la inclusión $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \subset W_0^{1,p_-}(\Omega)$ es continua.

La inclusión continua $W_0^{1,p_+}(\Omega) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ se prueba análogamente. $\square$

2.3. El espacio $W^{-1,p(x)}(\Omega)$.

De suma utilidad resulta el estudio del espacio dual de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. estos espacios se definen de la siguiente manera

Definición 2.43. Se define el espacio dual de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, notado por $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ como

$$W^{-1,p'(x)}(\Omega) := \{f\colon W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ lineales y continuas}\}.$$

El producto de dualidad se nota como $\langle f, u\rangle$ con $f \in W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ y $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Observación 2.44. Observemos que si $f \in L^{p'(x)}(\Omega)$, entonces f induce una aplicación en $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ de la forma

$$\langle f, u\rangle = \int_\Omega fu\, dx.$$

En efecto, la linealidad de la aplicación es evidente y la desigualdad de Hölder, Proposición 2.12, implica la continuidad. Haremos abuso de notación y escribiremos $L^{p'(x)}(\Omega) \subset W^{-1,p'(x)}(\Omega)$.

Observación 2.45. Más generalmente, dadas $f_0, f_1, \dots, f_N \in L^{p'(x)}(\Omega)$ estas inducen la aplicación

$$\langle f, u\rangle := \int_\Omega f_0 u + \sum_{i=1}^N f_i \partial_i u\, dx.$$

Al igual que en la observación anterior, esta aplicación es lineal y la continuidad es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder.

El siguiente teorema da una caracterización de los elementos de $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$. En efecto, se muestra que todo elemento $f \in W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ admite una representación como la dada en la observación 2.45.

Teorema 2.46. *Sea $f \in W^{-1,p'(x)}(\Omega)$. Entonces existen $g_0, \dots, g_N \in L^{p'(x)}(\Omega)$ tales que*

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega g_0 v_0 + \sum_{i=1}^N g_i \partial_i v\, dx,$$

para toda $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demostración. Consideremos $i\colon W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (L^{p(x)}(\Omega))^{N+1}$ dada por $i(u) = (u, \partial_1 u, \dots, \partial_N u)$.

Sea $\hat{f}\colon i(W_0^{1,p(x)}(\Omega)) \to \mathbb{R}$ dada por $\langle \hat{f}, i(u)\rangle = \langle f, u\rangle$ para toda $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Notemos que, gracias a la inyectividad de i, $\hat{f}$ está bien definida. Basta notar que, si $i(u) = i(v)$, entonces $u = v$ y, en consecuencia, $\langle \hat{f}, i(u)\rangle = \langle f, u\rangle = \langle f, v\rangle = \langle \hat{f}, i(v)\rangle$.

Por otra parte, como $i(W_0^{1,p(x)}(\Omega)) \subset (L^{p(x)}(\Omega))^{N+1}$ cerrado, por el Teorema de Hahn-Banach, [1, Corolario 1.2], existe $\tilde{f}$ extensión de $\hat{f}$ a $(L^{p(x)}(\Omega))^{N+1}$.

Luego $\tilde{f} \in ((L^{p(x)}(\Omega))^{N+1})' = (L^{p(x)}(\Omega))' \times \cdots \times (L^{p(x)}(\Omega))'$. Por el teorema 2.30, existen entonces $g_0, \dots, g_N \in L^{p'(x)}(\Omega)$ tales que

$$\langle \tilde{f}, v\rangle = \int_\Omega g_0 v_0 + g_1 v_1 + \cdots + g_N v_N\, dx$$

para toda $v = (v_0, \dots, v_N) \in (L^{p(x)}(\Omega))^{N+1}$.

Sea ahora $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, resulta entonces que

$$\begin{aligned}\langle f, u\rangle &= \langle \hat{f}, i(u)\rangle = \langle \tilde{f}, i(u)\rangle = \langle \tilde{f}, (u, \partial_1 u, \dots, \partial_N u)\rangle \\ &= \int_\Omega g_0 u + g_1 \partial_1 u + \cdots + g_N \partial_N u \, dx,\end{aligned}$$

como queríamos probar. $\square$

Capítulo 3

Resultados sobre densidad.

En este capítulo daremos los resultados más básicos sobre densidad de los espacios de Lebesgue y de Sobolev con exponente variable, un tema delicado y aún no cerrado. Para un estudio más detallado ver [4].

Definición 3.1. Decimos que $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es *localmente log-Hölder continua* en Ω si existe una constante $c_1 > 0$ tal que

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq \frac{c_1}{\log(e + \frac{1}{|x-y|})}, \qquad x, y \in \Omega.$$

Decimos que α satisface la *condición de decaimiento log-Hölder* si existen $\alpha_\infty \in \mathbb{R}$ y $c_2 > 0$ tales que

$$|\alpha(x) - \alpha_\infty| \leq \frac{c_2}{\log(e + |x|)}, \qquad x \in \Omega.$$

Si α cumple ambas condiciones se dice que es *globalmente log-Hölder continua* en Ω.

Notamos $\mathcal{P}^{log}(\Omega) = \{p \in \mathcal{P}(\Omega)\colon \frac{1}{p}$ es globalmente log-Hölder continua en $\Omega\}$.

3.1. Densidad de $C_c^\infty(\Omega)$ en $L^{p(x)}(\Omega)$.

Proposición 3.2. *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^N)$. Entonces, $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sea $u \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $u_n(x) = u(x)\chi_{B(0,n)}(x)$. Observemos que u_n es de soporte compacto.

Notemos que, por el Teorema de la Convergencia Dominada, es fácil ver que $u_n \to u$ en $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Luego, dado $\delta > 0$, existe n_0 tal que

$$\|u_{n_0} - u\|_{p(x)} < \frac{\delta}{2}. \tag{3.1}$$

Sea ρ el núcleo regularizante standard. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, $u_{n_0} * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y además, por la Proposición 2.25, vale que

$$\|u_{n_0} * \rho_\varepsilon - u_{n_0}\|_{p(x)} \to 0$$

Por lo tanto, existe ε_0 tal que

$$\|u_{n_0} * \rho_{\varepsilon_0} - u_{n_0}\|_{p(x)} < \frac{\delta}{2} \tag{3.2}$$

Por(3.1) y (3.2), concluimos entonces que

$$\|u_{n_0} * \rho_{\varepsilon_0} - u\|_{p(x)} \leq \|u_{n_0} * \rho_{\varepsilon_0} - u_{n_0}\|_{p(x)} + \|u_{n_0} - u\|_{p(x)} < \delta,$$

como queríamos probar. □

Proposición 3.3. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces, $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Demostración. Por la Observación 2.22, las funciones simples son densas en $L^{p(x)}(\Omega)$.

Como una función simple pertenece a $L^{p_-}(\Omega) \cap L^{p_+}(\Omega)$, puede ser aproximada por una sucesión de funciones $C_c^\infty(\Omega)$ en el mismo espacio.

Luego, como por la Proposición 2.23 sabemos que $L^{p_-}(\Omega) \cap L^{p_+}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, obtenemos el resultado. □

3.2. Densidad de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Lema 3.4. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces, las funciones de Sobolev acotadas son densas en $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Definamos $u_m \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ para $m \geq 1$ como

$$u_m := \text{máx}\{\text{mín}\{u(x), m\}, -m\}.$$

Notemos que para todo $m \geq 1$ vale la siguiente desigualdad:

$$|\{x \in \Omega \colon |u(x)| \geq m\}| \leq |\{x \in \Omega \colon |u(x)|^{p(x)} \geq m\}|.$$

Por otra parte, como $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, por la desigualdad de Tchebycheff, este último término converge a 0 cuando m tiende a ∞. Luego,

$$\begin{aligned}
\rho_{1,p(x)}(u - u_m) &= \int_\Omega |u(x) - u_m(x)|^{p(x)} dx + \int_\Omega |\nabla u(x) - \nabla u_m(x)|^{p(x)} dx \\
&= \int_{|u|<m} |u(x) - u_m(x)|^{p(x)} dx + \int_{|u|<m} |\nabla u(x) - \nabla u_m(x)|^{p(x)} dx \\
&\quad + \int_{|u|\geq m} |u(x) - u_m(x)|^{p(x)} dx + \int_{|u|\geq m} |\nabla u(x) - \nabla u_m(x)|^{p(x)} dx
\end{aligned}$$

Como $u_m = u$ en $\{|u| < m\}$, $u_m = m$ en $\{u \geq m\}$ y $u_m = -m$ en $\{u \leq -m\}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\rho_{1,p(x)}(u - u_m) &= \int_{u\geq m} |u(x) - m|^{p(x)}dx + \int_{u\leq -m} |u(x) + m|^{p(x)}dx + \int_{|u|\geq m} |\nabla u(x)|^{p(x)}dx \\ &\leq \int_{|u|\geq m} |u(x)|^{p(x)}dx + \int_{|u|\geq m} |\nabla u(x)|^{p(x)}dx \\ &= \int_{|u|\geq m} |u(x)|^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)}dx \to 0\end{aligned}$$

Concuimos entonces, por el Corolario 2.9, que $\|u - u_m\|_{1,p(x)} \to 0$, como queríamos probar. □

Teorema 3.5. *Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Entonces las funciones de Sobolev de soporte compacto en $\mathbb{R}^N$ son densas en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sea $B_r := B(0, r)$ con $r \geq 1$ y $\psi_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ una función de corte tal que $\psi_r = 1$ en B_r, $\psi_r = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus B_{r+1}$, $0 \leq \psi_r(x) \leq 1$ y $|\psi_r|, |\nabla\psi_r| \leq c$.

Notemos que

$$\|u - u\psi_r\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N\setminus B_{r+1})} + \|u - u\psi_r\|_{W^{1,p(x)}(B_{r+1}\setminus B_r)} .$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada, $\rho_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N\setminus B_{r+1})}(u) \to 0$ cuando $r \to \infty$. Luego, por el Corolario 2.9, $\|u\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N\setminus B_{r+1})} \to 0$ cuando $r \to \infty$.

Por otra parte,

$$|u - u\psi_r| = |u|(1 - \psi_r) \leq c|u|$$

y

$$|\nabla u - \nabla(u\psi_r)| \leq |\nabla u|(1 - \psi_r) + |u||\nabla\psi_r| \leq c(|u| + |\nabla u|).$$

Luego, una vez más gracias al Teorema de la Convergencia Dominada, tenemos que

$$\rho_{W^{1,p(x)}(B_{r+1}\setminus B_r)}(u - u\psi_r) \leq \tilde{c}\rho_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)}(u) \to 0 \text{ cuando } r \to \infty.$$

Por lo tanto, por el Corolario 2.9, $\|u - u\psi_r\|_{W^{1,p(x)}(B_{r+1}\setminus B_r)} \to 0$ cuando $r \to \infty$.

Concluimos entonces que $u\psi_r$ converge a u en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. □

Damos ahora una consecuencia inmediata del Lema 3.4 y el Teorema 3.5.

Corolario 3.6. *Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, entonces las funciones de Sobolev acotadas de soporte compacto en $\mathbb{R}^N$ son densas en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema 3.7. *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$. Entonces $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p(x)}(\Omega)$ es denso en $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Fijado $\varepsilon > 0$, definimos $\Omega_0 = \emptyset$ y para $m = 1, 2, \ldots$ y $x_0 \in \Omega$ fijo llamamos

$$\Omega_m := \{x \in \Omega\colon\ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m}\} \cap B(x_0, m).$$

Notemos $U_m := \Omega_{m+1} \setminus \overline{\Omega}_{m-1}$ para $m = 1, 2, \ldots$.

Consideremos $\{\xi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $C_c^\infty(U_m)$ tal que $\sum_{m=1}^\infty \xi_m(x) = 1$ para cada $x \in \Omega$.

Sea K el núcleo regularizante standard. Luego, para cada m existe δ_m tal que

$$\mathrm{sop}((\xi_m u) * K_{\delta_m}) \subset U_m.$$

Por otro lado, por la Proposición 2.25, eligiendo un δ_m más pequeo si fuese necesario, obtenemos que

$$\|\xi_m u - (\xi_m u) * K_{\delta_m}\|_{1,p(x)} \leq \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Llamemos

$$u_\varepsilon := \sum_{m=1}^\infty (\xi_m u) * K_{\delta_m}. \tag{3.3}$$

Como $x \in \Omega$ tiene un entorno tal que la suma 3.3 tiene solamente finitos términos no nulos y, por lo tanto, $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\|u - u_\varepsilon\|_{1,p(x)} &= \|u - \sum_{m=1}^\infty (\xi_m u) * K_{\delta_m}\|_{1,p(x)} \\
&= \|u \sum_{m=1}^\infty \xi_m - \sum_{m=1}^\infty (\xi_m u) * K_{\delta_m}\|_{1,p(x)} \\
&= \|\sum_{m=1}^\infty u\xi_m - (\xi_m u) * K_{\delta_m}\|_{1,p(x)} \\
&\leq \sum_{m=1}^\infty \|u\xi_m - (\xi_m u) * K_{\delta_m}\|_{1,p(x)} \\
&\leq \sum_{m=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^m} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Queda así probado el resultado. □

Un corolario sumamente importante del teorema anterior es la siguiente proposición.

Proposición 3.8. *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$. Entonces, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ coincide con la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma de $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Demostración. Claramente cualquier elemento de la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ pertenece a $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Sea $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Por el Teorema 3.7, podemos considerar $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que u_i converge a u en $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Sea $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \le \psi \le 1$ y $\psi = 1$ en el soporte de u. Como $u_i - \psi u_i = 0$ en el soporte de u, resulta

$$\begin{aligned} \|u_i - \psi u_i\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} &= \|u_i - \psi u_i\|_{W^{1,p(x)}(\Omega\setminus \mathrm{sop}(u))} \\ &\le c_\psi \, \|u_i\|_{W^{1,p(x)}(\Omega\setminus \mathrm{sop}(u))} \\ &= c_\psi \, \|u_i - u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega\setminus \mathrm{sop}(u))} \\ &\le c_\psi \, \|u_i - u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} \, . \end{aligned}$$

Luego,

$$\|u - \psi u_i\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} \le \|u - u_i\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} + \|u_i - \psi u_i\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} \le (1 + c_\psi)\, \|u - u_i\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} \, .$$

Por lo tanto, como $\|u_i - u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}$ converge a 0, concluimos que ψu_i converge a u en $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Como cada $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ se puede aproximar por funciones Sobolev de soporte compacto, podemos hallar una sucesión en $C_c^\infty(\Omega)$ que converge a u, como queríamos probar. □

Extendemos ahora para p variable el siguiente resultado presentado para $p = 2$ en [12, Corolario 3.1.13, página 69].

Dado la clase de funciones $X = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\}$, notaremos $X^+ := \{f \in X : f \ge 0 \text{ ctp}\}$.

Lema 3.9. *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$. Entonces, $\left(C_c^\infty(\Omega)\right)^+$ es denso en $\left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^+$.*

Sea $u \in \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^+ \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Por la Proposición 3.8, sabemos que es posible aproximarla por funciones $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$.

Notemos que u_n^+ converge a $u^+ = u$ en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Observemos que u_n^+ podría no pertenecer a $C_c^\infty(\Omega)$. Sin embargo, tiene soporte compacto, y, convolucionando con una sucesión regularizante podemos aproximar en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ por funciones positivas de $C_c^\infty(\Omega)$. De hecho,

$$\|u_n^+ * K_{j_n} - u\|_{1,p(x)} = \|u_n^+ * K_{j_n} - u_n^+\|_{1,p(x)} + \|u_n^+ - u\|_{1,p(x)}.$$

Eligiendo primero n tal que el segundo término sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ y, luego, j_n tal que el primero sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, obtenemos que

$$u_n^+ * K_{j_n} \to u \text{ en } W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Como además $u_n^+ * K_{j_n} \in \left(C_c^\infty(\Omega)\right)^+$, queda probado el resultado.

Finalmente, damos un resultado de densidad que será de gran utilidad más adelante.

Proposición 3.10. *El espacio $L^\infty(\Omega) \subset W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ es denso.*

Demostración. Por la Proposición 2.42 tenemos que $W_0^{1,p_+}(\Omega) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega) \subset W_0^{1,p_-}(\Omega)$ con inclusiones continuas. Como $C_c^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,p_+}(\Omega)$ y $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ tenemos que las inclusiones son densas.

Luego
$$W^{-1,(p_-)'}(\Omega) \subset W^{-1,p'(x)}(\Omega) \subset W^{-1,(p_+)'}(\Omega),$$
con inclusiones densas. Finalmente, como $L^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{-1,(p_-)'}(\Omega)$, resulta que $L^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$. $\square$

Capítulo 4

$p(x)-$capacidad de Sobolev.

En adelante consideraremos $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^N)$ para asegurar la densidad de las funciones regulares. Sin esta hipótesis, es necesario modificar levemente la definición de $p(x)-$capacidad. Sin embargo, los resultados pueden recuperarse análogamente.

Para el desarrollo del este capítulo seguiremos la referencia [4].

4.1. Propiedades.

Definición 4.1. Sea $E \subset \mathbb{R}^N$, consideramos el conjunto

$$S_{p(x)}(E) = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \colon u \geq 0 \text{ y } u \geq 1 \text{ en un conjunto abierto que contiene a } E\right\}.$$

Si $S_{p(x)}(E) \neq \emptyset$, definimos la $p(x)-$*capacidad de Sobolev* de E como

$$\text{cap}_{p(x)}(E) = \inf_{u \in S_{p(x)}(E)} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)} dx = \inf_{u \in S_{p(x)}(E)} \rho_{1,p(x)}(u).$$

Si $S_{p(x)}(E) = \emptyset$, establecemos que $\text{cap}_{p(x)}(E) = \infty$.

Observación 4.2. Si $u \in S_{p(x)}(E)$, entonces $\min\{1, u\} \in S_{p(x)}(E)$. Más aún, $\rho_{1,p(x)}(\min\{1, u\}) \leq \rho_{1,p(x)}(u)$. Luego, basta testear la $p(x)-$capacidad de Sobolev para $u \in S_{p(x)}(E)$ con $0 \leq u \leq 1$.

Teorema 4.3. *Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Entonces,*

1. $\text{cap}_{p(x)}(\emptyset) = 0$.
2. *Sea $E_1 \subset E_2$, entonces* $\text{cap}_{p(x)}(E_1) \leq \text{cap}_{p(x)}(E_2)$.
3. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$, entonces* $\text{cap}_{p(x)}(E) = \inf_{\substack{E \subset U \\ U abierto}} \text{cap}_{p(x)}(U)$.

4. *Sean $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$, entonces*

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(E_1 \cup E_2) + \operatorname{cap}_{p(x)}(E_1 \cap E_2) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E_1) + \operatorname{cap}_{p(x)}(E_2).$$

5. *Sean $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ compactos, entonces* $\operatorname{cap}_{p(x)}(K_i) \to \operatorname{cap}_{p(x)}(\cap_{i=1}^{\infty} K_i)$.

Demostración. 1. Es claro pues la función nula pertenece a $S_{p(x)}(\emptyset)$.

2. Como $E_1 \subset E_2$, resulta $S_{p(x)}(E_1) \supset S_{p(x)}(E_2)$ y, en consecuencia, $\operatorname{cap}_{p(x)}(E_1) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E_2)$.

3. Sea U abierto tal que $E \subset U$. Por 2., sabemos que $\operatorname{cap}_{p(x)}(E) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(U)$. Por lo tanto,

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(E) \leq \inf_{\substack{E \subset U \\ U \text{ abierto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(U).$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, como $\operatorname{cap}_{p(x)}(E) = \inf_{u \in S_{p(x)}(E)} \rho_{1,p(x)}(u)$, existe $u \in S_{p(x)}(E)$ tal que $\rho_{1,p(x)}(u) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E) + \varepsilon$.

Como $u \in S_{p(x)}(E)$, tenemos que $u \geq 1$ en un abierto $\tilde{U}$ que contiene a E.

En consecuencia,

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(\tilde{U}) = \inf_{u \in S_{p(x)}(\tilde{U})} \rho_{1,p(x)}(u) \leq \rho_{1,p(x)}(u) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E) + \varepsilon.$$

Como $\tilde{U}$ es abierto y $\tilde{U} \supset E$, resulta

$$\inf_{\substack{E \subset U \\ U \text{ abierto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(U) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(\tilde{U}).$$

Concluimos entonces que

$$\inf_{\substack{E \subset U \\ U \text{ abierto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(U) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(\tilde{U}) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E) + \varepsilon.$$

Tomando límite cuando ε tiende a 0, obtenemos $\operatorname{cap}_{p(x)}(E) \geq \inf_{\substack{E \subset U \\ U \text{ abierto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(U)$, como queríamos probar.

4. Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $u_1 \in S_{p(x)}(E_1)$ tal que $\rho_{1,p(x)}(u_1) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E_1) + \varepsilon$ y $u_2 \in S_{p(x)}(E_2)$ tal que $\rho_{1,p(x)}(u_2) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E_2) + \varepsilon$.

Notemos que

$$\rho_{1,p(x)}(u_1) + \rho_{1,p(x)}(u_2) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E_1) + \operatorname{cap}_{p(x)}(E_2) + 2\varepsilon.$$

Como $u_1 \in S_{p(x)}(E_1)$, tenemos que $u_1 \geq 1$ en un abierto U_1 que contiene a E_1. Análogamente, $u_2 \geq 1$ en un abierto U_2 que contiene a E_2.

Lo cual implica que $\max\{u_1, u_2\} \geq 1$ en $U_1 \cup U_2 \supset E_1 \cup E_2$ y, en consecuencia, $v_1 = \max\{u_1, u_2\} \in S_{p(x)}(E_1 \cup E_2)$.

Así también vale que $v_2 = \text{mín}\{u_1, u_2\} \in S_{p(x)}(E_1 \cap E_2)$.

Supongamos que $u_1 \geq u_2$ (sino, se procede de forma análoga).

Tenemos entonces que $\text{máx}\{u_1, u_2\} = u_1$ y $\text{mín}\{u_1, u_2\} = u_2$. Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_1(x)|^{p(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_2(x)|^{p(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_1(x)|^{p(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_2(x)|^{p(x)} dx$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_1(x)|^{p(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_2(x)|^{p(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1(x)|^{p(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2(x)|^{p(x)} dx.$$

Sumando ambos lados de las igualdades, obtenemos

$$\rho_{1,p(x)}(v_1) + \rho_{1,p(x)}(v_2) = \rho_{1,p(x)}(u_1) + \rho_{1,p(x)}(u_2).$$

Por otro lado, como $v_1 \in S_{p(x)}(E_1 \cup E_2)$ y $v_2 \in S_{p(x)}(E_1 \cap E_2)$, resulta

$$\text{cap}_{p(x)}(E_1 \cup E_2) + \text{cap}_{p(x)}(E_1 \cap E_2) \leq \rho_{1,p(x)}(v_1) + \rho_{1,p(x)}(v_2).$$

Concluimos entonces que

$$\text{cap}_{p(x)}(E_1 \cup E_2) + \text{cap}_{p(x)}(E_1 \cap E_2) \leq \rho_{1,p(x)}(u_1) + \rho_{1,p(x)}(u_2).$$

Finalmente, $\text{cap}_{p(x)}(E_1 \cup E_2) + \text{cap}_{p(x)}(E_1 \cap E_2) \leq \text{cap}_{p(x)}(E_1) + \text{cap}_{p(x)}(E_2) + 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

Haciendo tender ε a 0, queda probado el resultado.

5. Por 3, $\text{cap}_{p(x)}(\cap_{i=1}^{\infty} K_i) \leq \text{cap}_{p(x)}(K_j)$ para todo $j \geq 1$. Por lo tanto,

$$\text{cap}_{p(x)}(\cap_{i=1}^{\infty} K_i) \leq \lim_{j \to \infty} \text{cap}_{p(x)}(K_j).$$

Por otro lado, consideremos U abierto tal que $\cap_{i=1}^{\infty} K_i \subset U$.

Como $\cap_{i=1}^{\infty} K_i$ es compacto, existe $i_0 > 0$ tal que $K_i \subset U$ para todo $i \geq i_0$.

Por 3, $\text{cap}_{p(x)}(K_i) \leq \text{cap}_{p(x)}(U)$ para todo $i \geq i_0$. Luego,

$$\lim_{i \to \infty} \text{cap}_{p(x)}(K_i) \leq \text{cap}_{p(x)}(U).$$

Concluimos que

$$\lim_{i \to \infty} \text{cap}_{p(x)}(K_i) \leq \inf_{\substack{U \text{ abierto} \\ \cap_{i=1}^{\infty} K_i \subset U}} \text{cap}_{p(x)}(U) = \text{cap}_{p(x)}(\cap_{i=1}^{\infty} K_i),$$

como queríamos probar.

□

Teorema 4.4. *Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Entonces,*

1. *Sean $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^N$, entonces $\operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) \to \operatorname{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i)$.*
2. *Sea $E_i \subset \mathbb{R}^N$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\operatorname{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i)$.*

Demostración. 1. Llamando $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, por el punto 2 del Teorema 4.3, tenemos que $\operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E)$ para todo i. Por lo tanto $\lim_{i\to\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E)$.

Notemos que, si $\lim_{i\to\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) = \infty$, la otra desigualdad se cumple claramente. Supongamos entonces que $\lim_{i\to\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) < \infty$.

Consideremos $u_i \in S_{p(x)}(E_i)$ tal que $\rho_{1,p(x)}(u_i) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) + \frac{1}{2^i}$ para todo i.

Como $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ es acotada, sabemos que existe una subsucesión, que notamos nuevamente $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, que converge débil a una cierta $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Definiendo $v_j = \frac{1}{j(j-1)} \sum_{i=j+1}^{j^2} u_i$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{1}{j^2}\sum_{i=1}^{j^2} u_i - v_j\Big\|_{1,p(x)} &= \Big\|\frac{1}{j^2}\sum_{i=1}^{j^2} u_i - \frac{1}{j(j-1)}\sum_{i=j+1}^{j^2} u_i\Big\|_{1,p(x)} \\
&\leq \Big\|\frac{1}{j^2}\sum_{i=1}^{j} u_i\Big\|_{1,p(x)} + \Big\|\frac{1}{j^2(j-1)}\sum_{i=j+1}^{j^2} u_i\Big\|_{1,p(x)} \\
&\leq \frac{1}{j}\Big\|\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} u_i\Big\|_{1,p(x)} + \frac{1}{(j-1)}\Big\|\frac{1}{j^2}\sum_{i=j+1}^{j^2} u_i\Big\|_{1,p(x)}.
\end{aligned}$$

Este último término converge a 0 cuando j tiende a ∞ dado que, por el Corolario 2.36, $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_i \to u$ en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Concluimos entonces que $v_j \to u$ en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\rho_{1,p(x)}(v_j) &= \int_{\mathbb{R}^N} |v_j(x)|^{p(x)} + |\nabla v_j(x)|^{p(x)} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\frac{1}{j^2(j-1)}\sum_{i=j+1}^{j^2} u_i(x)\Big|^{p(x)} + \Big|\frac{1}{j^2(j-1)}\sum_{i=j+1}^{j^2} \nabla u_i(x)\Big|^{p(x)} dx \\
&\leq \frac{1}{j^2(j-1)}\int_{\mathbb{R}^N} \Big|\sum_{i=j+1}^{j^2} u_i(x)\Big|^{p(x)} + \Big|\sum_{i=j+1}^{j^2} \nabla u_i(x)\Big|^{p(x)} dx \\
&\leq \frac{1}{j^2(j-1)}\sum_{i=j+1}^{j^2}\int_{\mathbb{R}^N} |u_i(x)|^{p(x)} + |\nabla u_i(x)|^{p(x)} dx \\
&= \frac{1}{j^2(j-1)}\sum_{i=j+1}^{j^2} \rho_{1,p(x)}(u_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{j^2(j-1)} \sum_{i=j+1}^{j^2} \sup_{i\geq j+1} \rho_{1,p(x)}(u_i) \\
&= \frac{1}{j^2(j-1)}(j^2-(j-1)) \sup_{i\geq j+1} \rho_{1,p(x)}(u_i) \\
&\leq \sup_{i\geq j+1} \rho_{1,p(x)}(u_i).
\end{aligned}
$$

Como $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y $u_i \in S_{p(x)}(E_i)$ para cada i, concluimos que $u_i \geq 1$ en un abierto que contiene a E_j para todo $j \leq i$, podemos acotar este último término del siguiente modo:

$$
\sup_{i\geq j+1} \rho_{1,p(x)}(u_i) \leq \sup_{i\geq j+1} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) + \frac{1}{2^i} \leq \sup_{i\geq j+1} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) + \frac{1}{2^j}, \quad i \in \mathbb{N}
$$

Por lo tanto

$$
\rho_{1,p(x)}(v_j) \leq \sup_{i\geq j+1} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) + \frac{1}{2^j} \leq \lim_{i\to\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) + \frac{1}{2^j}. \tag{4.1}
$$

Consideremos ahora una subsucesión de $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que, de ser necesario, podemos suponer que verifica

$$
\|v_{j+1} - v_j\|_{1,p(x)} \leq \frac{1}{2^j}.
$$

Definimos $w_j = v_j + \sum_{i\geq j} |v_{i+1} - v_i| \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Dado que $w_j \geq \sup_{i\geq j} v_i$, tenemos que $w_j \geq 1$ en un abierto que contiene a E y, en consecuencia, $w_j \in S_{p(x)}(E)$.

Luego, para todo $j \geq 1$, tenemos que

$$
\operatorname{cap}_{p(x)}(E) = \inf_{u\in S_{p(x)}(E)} \rho_{1,p(x)}(u) \leq \rho_{1,p(x)}(w_j). \tag{4.2}
$$

Por otro lado, como $w_j - v_j = \sum_{i\geq j} |v_{i+1} - v_i|$, resulta

$$
\|w_j - v_j\|_{1,p(x)} \leq \sum_{i\geq j} \|v_{i+1} - v_i\|_{1,p(x)} \leq \sum_{i\geq j} \frac{1}{2^i} = 2^{1-j} \to 0
$$

Concluimos entonces que $\rho_{1,p(x)}(w_j - v_j) \xrightarrow{j} 0$.

Luego, por (4.1) y (4.2), tenemos que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cap}_{p(x)}(E) &\leq \lim_{j\to\infty} \rho_{1,p(x)}(w_j) \\
&= \lim_{j\to\infty} \rho_{1,p(x)}(v_j) \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \lim_{i\to\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) + \frac{1}{2^j} \\
&= \lim_{i\to\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i).
\end{aligned}
$$

Obtenemos así el resultado.

2. Aplicando el punto 4 del Teorema 4.3 inductivamente,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} E_i) &\le \operatorname{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} E_i) + \operatorname{cap}_{p(x)}(\cap_{i=1}^{k} E_i) \\
&\le \sum_{i=1}^{k} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i).
\end{aligned}$$

Aplicando el punto 1, dado que $\{\cup_{i=1}^{k} E_i\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, resulta

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} E_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(E_i),$$

como queríamos probar.

□

Observación 4.5. Notemos que, como consecuencia del punto 2 del Teorema 4.4, si $E_i \subset \mathbb{R}^N$ es tal que $\operatorname{cap}_{p(x)}(E_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\operatorname{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$.

Proposición 4.6. *Sean $E \subset \mathbb{R}^N$ y $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ tales que $p \ge q$. Si $\operatorname{cap}_{p(x)}(E) = 0$, entonces $\operatorname{cap}_{q(x)}(E) = 0$.*

Demostración. Sea $\eta \in C_c^\infty(B(0, R+1))$ una función de corte tal que $\eta = 1$ en $B(0, R)$, $0 \le \eta \le 1$ y $|\nabla\eta| \le 2$.

Observemos que, por la definición de $\operatorname{cap}_{p(x)}(E \cap B(0, R))$, podemos considerar $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $S_{p(x)}(E \cap B(0, R))$ tal que

$$\rho_{1,p(x)}(u_n) \to \operatorname{cap}_{p(x)}(E \cap B(0, R)).$$

Además, como $\operatorname{cap}_{p(x)}(E \cap B(0, R)) \le \operatorname{cap}_{p(x)}(E) = 0$, resulta que $\rho_{1,p(x)}(u_n) \to 0$ y, en consecuencia, $\|u_n\|_{1,p(x)} \to 0$.

Notemos que, por la Proposición 2.12,

$$\begin{aligned}
\|u_n\eta\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)} &= \|u_n\eta\|_{L^{q(x)}(B(0,R+1))} \\
&\le c\|u_n\|_{L^{p(x)}(B(0,R+1))} \\
&\le c\|u_n\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)} \\
&\le c\|u_n\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u_n\eta)\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)} &= \|\nabla(u_n\eta)\|_{L^{q(x)}(B(0,R+1))} \\
&= \|\eta\nabla u_n + u_n\nabla\eta\|_{L^{q(x)}(B(0,R+1))} \\
&\le \|\eta\nabla u_n\|_{L^{q(x)}(B(0,R+1))} + \|u_n\nabla\eta\|_{L^{q(x)}(B(0,R+1))} \\
&\le \tilde{c}\|u_n\|_{W^{1,q(x)}(B(0,R+1))} \\
&\le \bar{c}\|u_n\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Luego, como $u_n \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, tenemos que $u_n\eta \in W^{1,q(x)}(\mathbb{R}^N)$. Además, como $\eta = 1$ en $B(0,R)$, podemos afirmar que $u_n\eta \geq 1$ en un abierto U_n que contiene a $E \cap B(0,R)$. Por lo tanto, $u_n\eta \in S_{q(x)}(E \cap B(0,R))$.

Por la estimación que probamos tenemos que

$$\|u_n\eta\|_{1,q(x)} \leq M\|u_n\|_{1,p(x)} \to 0.$$

Por lo tanto, $\rho_{1,q(x)}(u_n\eta) \to 0$.

Concluimos entonces que

$$\mathrm{cap}_{q(x)}(E \cap B(0,R)) = \inf_{u \in S_{q(x)}(E\cap B(0,R))} \rho_{1,q(x)}(u) \leq \rho_{1,q(x)}(u_n\eta) \to 0.$$

Obtenemos así que $\mathrm{cap}_{q(x)}(E \cap B(0,R)) = 0$ para todo $R > 0$.

Como $E = \cup_{i=1}^{\infty}(E \cap B(0,i))$, por la Observación 4.5, queda probado el resultado. □

Lema 4.7. *Sean $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^N)$ y K compacto. Entonces,*

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(K) = \inf_{u \in S^{\infty}_{p(x)}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)}\, dx$$

donde $S^{\infty}_{p(x)}(K) = S_{p(x)}(K) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Sea $u \in S_{p(x)}(K)$ tal que $0 \leq u \leq 1$.

Por densidad, existe $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi_j \to u$ en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Consideramos un entorno abierto acotado U de K tal que $u = 1$ en U.

Sea $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ y ψ vale 1 en $\mathbb{R}^N \setminus U$ y 0 en un entorno abierto de K.

Notemos que, como $u - 1 = 0$ en U y $1 - \psi = 0$ fuera de U, vale que

$$u - \psi_j = (u - \varphi_j)\psi + (1 - \psi)(u - 1) = (u - \varphi_j)\psi \to 0$$

Luego,

$$\psi_j = 1 - (1 - \varphi_j)\psi \to u \text{ en } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Resulta entonces que $\psi_j \in S^{\infty}_{p(x)}(K)$ como queríamos probar. □

4.2. $p(x)-$capacidad relativa.

Definición 4.8. Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $K \subset \Omega$ compacto, definimos la $p(x)-$*capacidad relativa* como

$$\mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) = \inf_{u \in R_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x),\Omega}(\nabla u)$$

donde $R_{p(x)}(K,\Omega) = \{u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap C_0(\Omega) \colon u > 1 \text{ en } K \text{ y } u \geq 0\}$.

Si $U \subset \Omega$ es abierto, $\mathrm{cap}_{p(x)}(U,\Omega) = \sup_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compacto}}} \mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega)$.

Si $E \subset \Omega$, definifmos la $p(x)-$ capacidad relativa de E respecto de Ω como

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(E,\Omega) = \inf_{\substack{E\subset U\subset\Omega\\ U \text{ abierto}}} \mathrm{cap}_{p(x)}(U,\Omega).$$

Observación 4.9. Damos a continuación algunas consecuencias directas de la definición.

1. $\mathrm{cap}_{p(x)}(\emptyset,\Omega) = 0$.
2. Si $E_1 \subset E_2 \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$, entonces $\mathrm{cap}_{p(x)}(E_1,\Omega_1) \le \mathrm{cap}_{p(x)}(E_2,\Omega_2)$.

Proposición 4.10. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces,*

$$\mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) = \inf_{u\in\tilde{R}_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x),\Omega}(\nabla u)$$

donde $\tilde{R}_{p(x)}(K,\Omega) = \{u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap C_0(\Omega) \colon u \ge 1 \text{ en } K\}$.

Demostración. Como $R_{p(x)}(K,\Omega) \subset \tilde{R}_{p(x)}(K,\Omega)$, resulta

$$\inf_{u\in\tilde{R}_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x),\Omega}(\nabla u) \le \inf_{u\in R_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x),\Omega}(\nabla u) = \mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega).$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $u \in \tilde{R}_{p(x)}(K,\Omega)$ tal que

$$\rho_{p(x),\Omega}(\nabla u) \le \inf_{u\in\tilde{R}_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x),\Omega}(\nabla u) + \varepsilon.$$

Tomemos $v = (1+\varepsilon)u > 1$ en K. Notemos que $v \in R_{p(x)}(K,\Omega)$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) &= \inf_{u\in R_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x),\Omega}(\nabla u)\\
&\le \rho_{p(x),\Omega}(\nabla v) = \int_\Omega |\nabla v(x)|^{p(x)}\,dx\\
&= \int_\Omega (1+\varepsilon)^{p(x)} |\nabla u(x)|^{p(x)} dx\\
&\le (1+\varepsilon)^{p_+} \rho_{p(x),\Omega}(\nabla u).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, tenemos

$$\mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) \le (1+\varepsilon)^{p_+}\Big(\inf_{u\in\tilde{R}_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x),\Omega}(\nabla u) + \varepsilon\Big)$$

Concluimos entonces que

$$\mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) = \inf_{u\in\tilde{R}_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x),\Omega}(\nabla u),$$

como queríamos demostrar. □

Proposición 4.11. *Sean $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $K \subset \Omega$ compacto. Entonces,*

$$\mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) = \mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega).$$

Demostración. De la definición se desprende claramente que $\mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega)$.

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $u \in R_{p(x)}(K,\Omega)$ tal que

$$\rho_{p(x)}(\nabla u) \leq \mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) + \varepsilon.$$

Notemos que $u > 1$ en $U = u^{-1}(1,\infty)$, que es un abierto que contiene a K (pues $u \in R_{p(x)}(K,\Omega)$).

Por lo tanto $u > 1$ en todo compacto $\tilde{K} \subset U \subset \Omega$ y, en consecuencia, $u \in R_{p(x)}(\tilde{K},\Omega)$ para todo $\tilde{K} \subset U$ compacto. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{cap}_{p(x)}(U,\Omega) &= \sup_{\substack{\tilde{K}\subset U \\ \tilde{K} \text{ compacto}}} \mathrm{cap}^*_{p(x)}(\tilde{K},\Omega) \\
&= \sup_{\substack{\tilde{K}\subset U \\ \tilde{K} \text{ compacto}}} \Big(\inf_{v\in R_{p(x)}(\tilde{K},\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla v)\Big) \\
&\leq \sup_{\substack{\tilde{K}\subset U \\ \tilde{K} \text{ compacto}}} \rho_{p(x)}(\nabla u) \\
&= \rho_{p(x)}(\nabla u).
\end{aligned}$$

Concluimos así que, dado $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(U,\Omega) \leq \rho_{p(x)}(\nabla u) \leq \mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) + \varepsilon,$$

como queríamos ver. □

Estamos ahora en condiciones de verificar la consistencia de nuestras definiciones.

Observación 4.12. Sea K compacto, veamos que $\mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega) = \inf_{\substack{K\subset U \\ U \text{ abierto}}} \mathrm{cap}_{p(x)}(U,\Omega)$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ tal que $u \geq 1$ en K y $\rho_{p(x)}(\nabla u) \leq \varepsilon + \mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega)$.

Consideremos $U = \{(1+\varepsilon)u > 1\}$ abierto y $K_1 = \{(1+\varepsilon)u \geq 1\}$, que es compacto (es acotado pues u tiene soporte compacto y claramente es cerrado). Luego, $K \subset U \subset K_1$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\inf_{\substack{K\subset U \\ U \text{ abierto}}} \mathrm{cap}_{p(x)}(U,\Omega) &\leq \mathrm{cap}_{p(x)}(U,\Omega) \\
&\leq \mathrm{cap}_{p(x)}(K_1,\Omega) \\
&\leq \rho_{p(x)}(\nabla((1+\varepsilon)u)) \\
&\leq (1+\varepsilon)^{p_+}\rho_{p(x)}(\nabla u) \\
&\leq (1+\varepsilon)^{p_+}(\varepsilon + \mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega))
\end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que $(1+\varepsilon)u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ y $(1+\varepsilon)u \geq 1$ en K_1.

Por lo tanto, haciendo tender $\varepsilon \to 0$, obtenemos que

$$\operatorname*{ínf}_{\substack{K\subset U\\ U \text{ abierto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(U,\Omega) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega).$$

La desigualdad opuesta es consecuencia directa de la monotonía de la $p(x)-$capacidad. De hecho, dado U abierto tal que $K \subset U$, entonces $\operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(U,\Omega)$. Luego,

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega) \leq \operatorname*{ínf}_{\substack{K\subset U\\ U \text{ abierto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(U,\Omega).$$

Presentaremos a continuación una definición equivalente de $p(x)-$capacidad relativa que resultará sumamente útil.

Proposición 4.13. *Sea $E \subset \Omega$. Entonces,*

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(E,\Omega) = \operatorname*{ínf}_{u\in \tilde{R}_{p(x)}(E,\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla u).$$

Demostración. Llamemos

$$\widetilde{\operatorname{cap}}_{p(x)}(E,\Omega) = \operatorname*{ínf}_{u\in \tilde{R}_{p(x)}(E,\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla u).$$

Notemos que $\widetilde{\operatorname{cap}}_{p(x)}(\cdot,\Omega)$ es monótona creciente. Basta observar que, dados $E \subset E'$, si $u \geq 1$ en E', entonces $u \geq 1$ en E. Por lo tanto,

$$\widetilde{\operatorname{cap}}_{p(x)}(E',\Omega) = \operatorname*{ínf}_{u\in \tilde{R}_{p(x)}(E',\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla u) \geq \operatorname*{ínf}_{u\in \tilde{R}_{p(x)}(E,\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla u) = \widetilde{\operatorname{cap}}_{p(x)}(E,\Omega).$$

Supongamos primero que $E = K$ compacto. Luego, por las Proposiciones 4.10 y 4.11, obtenemos que

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega) = \operatorname{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) = \operatorname*{ínf}_{u\in \tilde{R}_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla u) = \widetilde{\operatorname{cap}}_{p(x)}(K,\Omega).$$

Supongamos ahora que $E = W$ abierto.

Sea $K \subset W$ compacto, sabemos ahora que

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega) = \widetilde{\operatorname{cap}}_{p(x)}(K,\Omega) \leq \widetilde{\operatorname{cap}}_{p(x)}(W,\Omega).$$

Luego,

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(W,\Omega) = \sup_{\substack{K\subset W\\ K \text{ compacto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega) \leq \widetilde{\operatorname{cap}}_{p(x)}(W,\Omega).$$

Resta probar la desigualdad opuesta. Si $\operatorname{cap}_{p(x)}(W,\Omega) = \infty$, es claro. Supongamos entonces que $\operatorname{cap}_{p(x)}(W,\Omega) < \infty$.

Como $\operatorname{cap}_{p(x)}(W,\Omega) = \sup\limits_{\substack{K\subset W\\ K \text{ compacto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega)$, podemos afirmar que existe $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de compactos de W tal que $\operatorname{cap}_{p(x)}(K_n,\Omega) \to \operatorname{cap}_{p(x)}(W,\Omega)$.

Supongamos, agrandando los K_n si fuera necesario, que $W = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Hemos probado ya que

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(K_n, \Omega) = \inf_{u \in \tilde{R}_{p(x)}(K_n,\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla u).$$

Luego, para cada n, existe $u_n \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ tal que $u_n \geq 1$ en K_n y

$$\rho_{p(x)}(\nabla u_n) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(K_n, \Omega) + \frac{1}{n} \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(W, \Omega) + \frac{1}{n}.$$

Por la Observación 2.10, tenemos entonces que $\{\|\nabla u_n\|_{p(x)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y, en consecuencia, como $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, $\{\|u_n\|_{1,p(x)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta también acotada.

Por lo tanto, como $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ es reflexivo, existe una subsucesión, que seguiremos notando $\{\|u_n\|_{1,p(x)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ y ctp.

Notemos además que, como $u_n \geq 1$ en K_n, entonces $u_n \geq 1$ en $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = W$. Luego,

$$\widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(W, \Omega) = \inf_{u \in \tilde{R}_{p(x)}(W,\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla u) \leq \rho_{p(x)}(\nabla u_n) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(W, \Omega) + \frac{1}{n}.$$

Haciendo tender n a ∞, concluimos así que $\widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(W, \Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(W, \Omega)$, como queríamos probar.

Consideremos, por último, $E \subset \Omega$ arbitrario.

Como $\mathrm{cap}_{p(x)}(E, \Omega) = \inf_{\substack{E\subset W \\ W \text{ abierto}}} \mathrm{cap}_{p(x)}(W, \Omega)$, podemos considerar $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de abiertos que contienen a E tal que $\mathrm{cap}_{p(x)}(W_n, \Omega) \to \mathrm{cap}_{p(x)}(E, \Omega)$.

Como $E \subset W_n$, y teniendo en cuenta que ya hemos probado el resultado para abiertos, tenemos que

$$\widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(E, \Omega) \leq \widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(W_n, \Omega) = \mathrm{cap}_{p(x)}(W_n, \Omega).$$

Concluimos entonces que $\widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(E, \Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(E, \Omega)$.

Resta probar la otra desigualdad. Si $\widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(E, \Omega) = \infty$, es clara. Supongamos entonces que $\widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(E, \Omega) < \infty$.

Por la definición de $\widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(E, \Omega)$, sabemos que existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $W^{1,p(x)}(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ tal que $u_n \geq 1$ en E y $\rho_{p(x)}(\nabla u_n) \to \widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(E, \Omega)$.

Notemos que

$$\rho_{p(x)}(\nabla u_n) \geq \inf_{u \in S_{p(x)}(E,\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla u) = \widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(W_n, \Omega) = \mathrm{cap}_{p(x)}(W_n, \Omega) \geq \mathrm{cap}_{p(x)}(E, \Omega).$$

Concluimos entonces que $\widetilde{\mathrm{cap}}_{p(x)}(E, \Omega) \geq \mathrm{cap}_{p(x)}(E, \Omega)$, como queríamos probar. □

Observación 4.14. Análogamente a lo probado para la $p(x)-$capacidad, se puede demostrar que dado $p \in \mathcal{P}(\Omega)$,

1. Sean $K_1, K_2 \subset \Omega$ compactos,

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(K_1 \cup K_2, \Omega) + \mathrm{cap}_{p(x)}(K_1 \cap K_2, \Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(K_1, \Omega) + \mathrm{cap}_{p(x)}(K_2, \Omega).$$

2. Sean $\Omega \supset K_1 \supset K_2 \supset ...$ compactos, entonces

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{cap}_{p(x)}(K_i, \Omega) = \mathrm{cap}_{p(x)}(\cap_{i=1}^{\infty} K_i, \Omega).$$

Lema 4.15. *Sean $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, $E_1, \ldots, E_k \subset \Omega$, $A_i \subset E_i$ para todo $1 \leq i \leq k$ y $\mathrm{cap}_{p(x)}(\cap_{i=1}^{k} E_i, \Omega) < \infty$. Entonces,*

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} E_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} A_i, \Omega) \leq \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(A_i, \Omega)).$$

Demostración. Supongamos primero que cada E_i y cada A_i son compactos.

Sean $K' \subset K$ y F compactos de Ω, por el punto 1 de la Observación 4.14 obtenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}_{p(x)}(K \cup F, \Omega) + \mathrm{cap}_{p(x)}(K', \Omega) &\leq \mathrm{cap}_{p(x)}(K \cup (K' \cup F), \Omega) + \mathrm{cap}_{p(x)}(K \cap (K' \cup F), \Omega) \\ &\leq \mathrm{cap}_{p(x)}(K, \Omega) + \mathrm{cap}_{p(x)}(K' \cup F, \Omega).\end{aligned}$$

Concluimos así que

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(K \cup F, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(K' \cup F, \Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(K, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(K', \Omega). \tag{4.3}$$

Procedamos ahora por inducción.

Si $k = 1$, el resultado es claro.

Si $k \geq 2$, supongamos que la propiedad vale para $k - 1$ y veamos que vale para k.

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} E_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} A_i, \Omega) &= \mathrm{cap}_{p(x)}((\cup_{i=1}^{k-1} E_i) \cup E_k, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(A_k \cup (\cup_{i=1}^{k-1} A_i), \Omega) \\ &= \mathrm{cap}_{p(x)}((\cup_{i=1}^{k-1} E_i) \cup E_k, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}((\cup_{i=1}^{k-1} A_i) \cup E_k, \Omega) \\ &\quad + \mathrm{cap}_{p(x)}(E_k \cup (\cup_{i=1}^{k-1} A_i), \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(A_k \cup (\cup_{i=1}^{k-1} A_i), \Omega) \\ &\leq \mathrm{cap}_{p(x)}((\cup_{i=1}^{k-1} E_i), \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}((\cup_{i=1}^{k-1} A_i), \Omega) \\ &\quad + \mathrm{cap}_{p(x)}(E_k, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(A_k, \Omega),\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad (4.3) dos veces.

Usando la hipótesis inductiva, se concluye el resultado deseado en el caso en que los conjuntos $\{E_i\}_{i=1}^{k}$ y $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ son compactos.

Supongamos ahora que cada E_i y cada A_i son abiertos. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $F_i \subset A_i$ compactos tales que

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(F_i, \Omega) \geq \mathrm{cap}_{p(x)}(A_i, \Omega) - \varepsilon \tag{4.4}$$

y $K \subset \cup_{i=1}^k E_i$ compacto tal que $F_i \subset K$ para todo $1 \leq i \leq k$ y vale que

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(K, \Omega) \geq \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k E_i, \Omega) - \varepsilon. \tag{4.5}$$

Sea $\alpha = \min\{\mathrm{dist}(K, \mathbb{R}^N - \cup_{i=1}^k E_i), \mathrm{dist}(F_1, \partial A_1), \ldots, \mathrm{dist}(F_k, \partial A_k)\}$.

Consideremos $K_i = \{x \in K \cap E_i \colon \mathrm{dist}(x, \partial E_i) \geq \alpha\}$.

Observemos que, por definición, se tiene que $K_i \subset E_i$. Notemos que además $F_i \subset K_i$ y $K = \cup_{i=1}^k K_i$.

Por (4.5), tenemos que

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k E_i, \Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(K, \Omega) + \varepsilon = \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k K_i, \Omega) + \varepsilon.$$

Por otro lado, como $F_i \subset A_i$, resulta $\cup_{i=1}^k F_i \subset \cup_{i=1}^k A_i$. Luego,

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k F_i, \Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k A_i, \Omega).$$

Resulta así que

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k E_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k A_i, \Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k K_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k F_i, \Omega) + \varepsilon.$$

Por lo visto para el caso anterior, podemos acotar esta última desigualdad por

$$\sum_{i=1}^k (\mathrm{cap}_{p(x)}(K_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(F_i, \Omega)) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^k (\mathrm{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(A_i, \Omega)) + (k+1)\varepsilon.$$

donde para el último paso tuvimos en cuenta (4.4).

Finalmente hacemos tender ε a 0, obtenemos la prueba del resultado para E_i y A_i abiertos.

Supongamos ahora que E_i y A_i son cualesquiera.

Sea $\varepsilon > 0$, consideramos U_i abierto tal que $E_i \subset U_i$ y $\mathrm{cap}_{p(x)}(U_i, \Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) + \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq k$ y V_i abierto tales que $A_i \subset V_i \subset U_i$ y $\mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k V_i, \Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k A_i, \Omega) + \varepsilon$.

Tenemos que

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k E_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k A_i, \Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k U_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^k V_i, \Omega) + \varepsilon.$$

Por lo visto para el caso anterior, podemos acotar esta última desigualdad para todo $\varepsilon > 0$ por

$$\sum_{i=1}^k (\mathrm{cap}_{p(x)}(U_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(V_i, \Omega)) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^k (\mathrm{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) - \mathrm{cap}_{p(x)}(A_i, \Omega)) + \varepsilon.$$

Queda demostrado así el resultado para E_i y A_i conjuntos arbitrarios. □

Teorema 4.16. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces,*

1. *Sean $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \Omega$, entonces* $\lim_{i\to\infty} \mathrm{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) = \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^\infty E_i, \Omega)$.

2. *Sean* $E_i \subset \Omega$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$*, entonces* $\text{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i, \Omega) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega)$.

Demostración. 1. Llamemos $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$. Luego, $\text{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) \leq \text{cap}_{p(x)}(E, \Omega)$ para todo i y por lo tanto $\lim_{i\to\infty} \text{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) \leq \text{cap}_{p(x)}(E, \Omega)$.

Por otro lado, si $\text{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) = \infty$, claramente $\lim_{i\to\infty} \text{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) \geq \text{cap}_{p(x)}(E, \Omega)$.

Asumamos entonces que $\lim_{i\to\infty} \text{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) < \infty$. Supongamos además que existe E_{i_0} tal que $\text{cap}_{p(x)}(E_{i_0}, \Omega) = \infty$.

Como $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, sabemos que $E_{i_0} \subset E_j$ y, en consecuencia, para todo $i_0 \leq j$ vale que

$$\text{cap}_{p(x)}(E_{i_0}, \Omega) \leq \text{cap}_{p(x)}(E_j, \Omega).$$

Concluimos así que $\text{cap}_{p(x)}(E_j, \Omega) = \infty$ para todo $i_0 \leq j$. Probamos entonces que $\text{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) < \infty$ para todo i.

Por otra parte, como $\text{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) = \inf_{\substack{E_i\subset U\subset\Omega \\ U \text{ abierto}}} \text{cap}_{p(x)}(U, \Omega)$, dado $\varepsilon > 0$ existe U_i abierto tal que $E_i \subset U_i \subset \Omega$ y $\text{cap}_{p(x)}(U_i, \Omega) \leq \text{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Por el Lema 4.15,

$$\begin{aligned}
\text{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} U_i, \Omega) - \text{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} E_i, \Omega) &\leq \sum_{i=1}^{k} (\text{cap}_{p(x)}(U_i, \Omega) - \text{cap}_{p(x)}(E_i, \Omega)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sea $K \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ compacto, entonces $K \subset \cup_{i=1}^{k} U_i$ para algún k. Como $\cup_{i=1}^{k} U_i \subset \Omega$ es abierto,

$$\begin{aligned}
\text{cap}_{p(x)}(K, \Omega) &= \inf_{\substack{K\subset U\subset\Omega \\ U abierto}} \text{cap}_{p(x)}(U, \Omega) \\
&\leq \text{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} U_i, \Omega) \\
&\leq \text{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{k} E_i, \Omega) + \varepsilon \\
&= \text{cap}_{p(x)}(E_k, \Omega) + \varepsilon \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \text{cap}_{p(x)}(E_j, \Omega) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Notemos que para la última desigualdad tuvimos en cuenta que, como $E_k \subset E_j$ para todo $j \geq k$, tenemos que $\text{cap}_{p(x)}(E_k, \Omega) \leq \text{cap}_{p(x)}(E_j, \Omega)$ para todo $j \geq k$.

Por último, observando que, como $E_i \subset U_i$ para todo i, resulta que $\cup_{i=1}^{\infty} U_i \subset \Omega$ es un abierto que contiene a E, y, como K es compacto, $\mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega) = \mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{cap}_{p(x)}(E,\Omega) &= \inf_{\substack{E\subset U\subset\Omega \\ U \text{ abierto}}} \mathrm{cap}_{p(x)}(U,\Omega) \\
&\leq \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^{\infty} U_i,\Omega) \\
&= \sup_{\substack{K\subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i \\ K \text{ compacto}}} \mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \mathrm{cap}_{p(x)}(E_j,\Omega) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Queda así probado el resultado.

2. Se demuestra del mismo modo para la $p(x)-$capacidad relativa que como lo probamos para la $p(x)-$capacidad.

□

4.3. Relación entre la $p(x)-$capacidad y la $p(x)-$capacidad relativa.

Lema 4.17. *Sean $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, Ω acotado y $K \subset \Omega$ compacto. Entonces, existe una constante c que depende sólo de N y de diam(Ω) tal que*

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(K) \leq c\, \mathrm{máx}\{(\mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega))^{\frac{1}{p_+}}, \mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega)\}.$$

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega) < \infty$ (sino, el resultado es claro).

Como K es compacto,

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega) = \mathrm{cap}^*_{p(x)}(K,\Omega) = \inf_{u\in R_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla u).$$

Luego, existe $u \in R_{p(x)}(K,\Omega)$ tal que $\rho_{p(x)}(\nabla u) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega) + \varepsilon$.

Extendemos u considerando $\tilde{u}$ que valga u en Ω y 0 fuera de Ω. Para facilitar la notación, seguimos llamando u a $\tilde{u}$.

Sea $v = \mathrm{mín}\{1, u\}$. Como $u \geq 1$ en un abierto que contiene a K, tenemos que $v \in S_{p(x)}(K)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{cap}_{p(x)}(K) &= \inf_{u\in S_{p(x)}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)}\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{p(x)} + |\nabla v(x)|^{p(x)}\, dx \\
&\leq \int_{\Omega} |v(x)|^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)}\, dx.
\end{aligned}$$

Por otra parte, empleando el Teorema 2.40,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\, dx &\leq \int_\Omega |v(x)|\, dx\\ &\leq \int_\Omega |u(x)|\, dx\\ &= \|u\|_{L^1(\Omega)}\\ &\leq \tilde{c}\ \operatorname{diam}(\Omega)\, \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Por la inmersión $L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, aplicando la Proposición 2.7 podemos acotar del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\tilde{c}\ \operatorname{diam}(\Omega)\, \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} &\leq \tilde{c}\ \operatorname{diam}(\Omega)(1+|\Omega|)\, \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\\ &\leq \bar{c}\, \text{máx}\{(\rho_{p(x)}(|\nabla u|))^{\frac{1}{p_+}}, (\rho_{p(x)}(|\nabla u|))^{\frac{1}{p_-}}\}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p(x)}(K) &\leq \int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\, dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)}\, dx\\ &\leq \bar{c}\, \text{máx}\{(\rho_{p(x)}(|\nabla u|))^{\frac{1}{p_+}}, (\rho_{p(x)}(|\nabla u|))^{\frac{1}{p_-}}\} + \rho_{p(x)}(|\nabla u|).\end{aligned}$$

Llamando $a = \rho_{p(x)}(|\nabla u|)$, estudiando el crecimiento de la función $g(x) = a^x$ para $a \leq 1$ y $a > 1$, podemos observar que $\text{máx}\{a^{\frac{1}{p_+}}, a^{\frac{1}{p_-}}\} + a \leq 2\, \text{máx}\{a, a^{\frac{1}{p_+}}\}$.

Concluimos entonces que para cualquier $\varepsilon > 0$ vale que

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p(x)}(K) &\leq \bar{c}\, \text{máx}\{(\rho_{p(x)}(|\nabla u|))^{\frac{1}{p_+}}, (\rho_{p(x)}(|\nabla u|))^{\frac{1}{p_-}}\} + \rho_{p(x)}(|\nabla u|)\\ &\leq 2\bar{c}\, \text{máx}\{(\rho_{p(x)}(|\nabla u|)), (\rho_{p(x)}(|\nabla u|))^{\frac{1}{p_+}}\}\\ &\leq c\, \text{máx}\{\operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega) + \varepsilon, (\operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega)+\varepsilon)^{\frac{1}{p_+}}\}.\end{aligned}$$

Finalmente así resulta $\operatorname{cap}_{p(x)}(K) \leq c\, \text{máx}\{\operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega), (\operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega))^{\frac{1}{p_+}}\}$, como queríamos probar. □

Definición 4.18. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ se dice *capacitable* si

$$\sup_{\substack{K\subset E\\ K \text{ compacto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(K,\Omega) = \operatorname{cap}_{p(x)}(E,\Omega) = \inf_{\substack{E\subset U\subset\Omega\\ U \text{ abierto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(U,\Omega)$$

Observación 4.19. Todo conjunto de Borel $E \subset \Omega$ es capacitable. (Ver **CREAR REFERENCIA** G. Choquet. Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 5:131295, 1953)

Teorema 4.20. *Sean $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, Ω acotado y $E \subset \Omega$. Entonces existe una constante c que depende solamente de N y de diam(Ω) tal que*

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(E) \leq c\, \text{máx}\{(\operatorname{cap}_{p(x)}(E,\Omega))^{\frac{1}{p_+}}, \operatorname{cap}_{p(x)}(E,\Omega)\}.$$

Demostración. Si $\text{cap}_{p(x)}(E,\Omega)=\infty$, no hay nada que probar.

Supongamos entonces que $\text{cap}_{p(x)}(E,\Omega)<\infty$.

Como $\text{cap}_{p(x)}(E,\Omega) = \inf_{\substack{E\subset U\subset\Omega\\ U \text{ abierto}}} \text{cap}_{p(x)}(U,\Omega)$, existen U_i abiertos tales que $E\subset U_i\subset\Omega$ y además $\lim_{i\to\infty} \text{cap}_{p(x)}(U_i,\Omega)=\text{cap}_{p(x)}(E,\Omega)$.

Llamamos $U=\cap_{i=1}^{\infty} U_i$. Como U es un conjunto de Borel, resulta capacitable.

Como $E\subset \cap_{i=1}^{\infty} U_i$, tenemos que

$$\text{cap}_{p(x)}(E)\leq \text{cap}_{p(x)}(U) = \sup_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compacto}}} \text{cap}_{p(x)}(K).$$

Por el Lema 4.17, $\text{cap}_{p(x)}(K)\leq c\,\text{máx}\{(\text{cap}_{p(x)}(K,\Omega))^{\frac{1}{p+}}, \text{cap}_{p(x)}(K,\Omega)\}$. Así,

$$\begin{aligned}
\text{cap}_{p(x)}(E) &\leq \sup_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compacto}}} \text{cap}_{p(x)}(K)\\
&\leq c \sup_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compacto}}} \text{máx}\{(\text{cap}_{p(x)}(K,\Omega))^{\frac{1}{p+}}, \text{cap}_{p(x)}(K,\Omega)\}\\
&\leq c\,\text{máx}\Big\{ \sup_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compacto}}} (\text{cap}_{p(x)}(K,\Omega))^{\frac{1}{p+}}, \sup_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compacto}}} \text{cap}_{p(x)}(K,\Omega)\Big\}.
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando i tiende a ∞, resulta

$$\text{cap}_{p(x)}(E)\leq c\ \text{máx}\{(\text{cap}_{p(x)}(E,\Omega))^{\frac{1}{p+}}, \text{cap}_{p(x)}(E,\Omega)\},$$

como queríamos ver. □

Proposición 4.21. *Sea $p\in\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^N)$. Si $E\subset\Omega$ es tal que* $\text{cap}_{p(x)}(E)=0$*, entonces* $\text{cap}_{p(x)}(E,\Omega)=0$.

Demostración. Supongamos primero que $K\subset\Omega$ compacto tal que $\text{cap}_{p(x)}(K)=0$.

Por la densidad de las funciones continuas, podemos, análogamente a lo hecho en el Lema 4.7, reemplazar el conjunto de las funciones admisibles en la definición de $p(x)-$capacidad de Sobolev por el subconjunto $S^0_{p(x)}(K) := S_{p(x)}(K)\cap C(\mathbb{R}^N)$:

$$\text{cap}_{p(x)}(K) = \inf_{u\in S^0_{p(x)}(K)} \|u\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)}$$

Luego, como $\text{cap}_{p(x)}(K)=0$, existe una sucesión $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset S^0_{p(x)}(K)$ tal que $\|u\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)}\to 0$.

Consideramos $\eta\in C_c^{\infty}(\Omega)$ una función de corte que valga 1 en K.

Notemos que $\nabla(\eta u_i)=\nabla\eta u_i+\eta\nabla u_i$. Por lo tanto,

$$|\nabla(\eta u_i)|\leq |\nabla\eta|\,|u_i|+|\eta|\,|\nabla u_i|\leq c(|u_i|+|\nabla u_i|).$$

Luego,

$$|\nabla(\eta u_i)|^{p(x)} \leq \tilde{c}^{p(x)}(|u_i|^{p(x)} + |\nabla u_i|^{p(x)}).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega) &= \inf_{u\in R_{p(x)}(K,\Omega)} \rho_{p(x)}(\nabla u)\\
&\leq \rho_{p(x)}(\nabla(\eta u_i))\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\eta(x)u_i(x))|^{p(x)}\,dx\\
&= \int_{\mathrm{sop}(\eta)} |\nabla(\eta(x)u_i(x))|^{p(x)}\,dx.
\end{aligned}$$

Llamando B al soporte de η, podemos acotar del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\int_B |\nabla(\eta(x)u_i(x))|^{p(x)}\,dx &\leq \int_B \tilde{c}^{p(x)}(|u_i|^{p(x)} + |\nabla u_i|^{p(x)})dx\\
&\leq \max\{\tilde{c}^{p_B^+}, \tilde{c}^{p_B^-}\} \int_{\mathbb{R}^N} |u_i(x)|^{p(x)} + |\nabla u_i(x)|^{p(x)}\,dx\\
&= \max\{\tilde{c}^{p_B^+}, \tilde{c}^{p_B^-}\}\, \|u_i\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)}\,.
\end{aligned}$$

Y este último término converge a 0. Concluimos entonces que $\mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega) = 0$.

Consideremos ahora $E \subset \Omega$ tal que $\mathrm{cap}_{p(x)}(E) = \inf_{\substack{E\subset U\\ U \text{ abierto}}} \mathrm{cap}_{p(x)}(U) = 0$. Entonces, existe una sucesión de abiertos U_i tales que $E \subset U_i$ y $\lim_{i\to\infty} \mathrm{cap}_{p(x)}(U_i) = 0$.

Llamamos $U = \cap_{i=1}^{\infty} U_i \cap \Omega$. Notemos que U es un conjunto de Borel y $U \supset E$.

Además $\mathrm{cap}_{p(x)}(U) = 0$ dado que, como $U = \cap_{i=1}^{\infty} U_i \subset U_i$ para todo i, resulta $\mathrm{cap}_{p(x)}(U) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(U_i)$ para todo i y, en consecuencia, $\mathrm{cap}_{p(x)}(U) \leq \lim_{i\to\infty} \mathrm{cap}_{p(x)}(U_i) = 0$.

Como $E \subset U_i$ para todo i, resulta $E \subset U$. Luego, por lo visto en la primera parte de la demostración,

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(E,\Omega) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(U,\Omega) = \sup_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compacto}}} \mathrm{cap}_{p(x)}(K,\Omega) = 0.$$

Obtenemos así el resultado que queríamos probar. □

Teorema 4.22. *Sean $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^N)$, B una bola y $E \subset B$. Entonces existe una constante c que depende solamente de p_+ tal que*

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(E, 2B) \leq c(1 + \max\{(diam(B))^{-p_{+2B}}, (diam(B))^{-p_{-2B}})\}\mathrm{cap}_{p(x)}(E).$$

Demostración. Sea $K \subset B$ compacto.

Como $\mathrm{cap}_{p(x)}(K) = \inf_{u\in S^0_{p(x)}(K)} \|u\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)}$, podemos asegurar que existe $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset S^0_{p(x)}(K)$ tal que $\|u\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)} \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(K) + \varepsilon$.

Sea $\eta \in C_c^\infty(2B)$ una función de corte que valga 1 en K y tal que $|\nabla u| \leq \frac{c}{\mathrm{diam}(B)}$.

Como en la demostración anterior, suponiendo ahora $c \geq 1$ (para así asegurar que $c^{p_{2B}^+} \geq c^{p_{2B}^-}, c$), obtenemos que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\begin{aligned}
\int_{2B} |\nabla u(x)\eta(x))|^{p(x)}\,dx &\leq \int_{2B} |\eta(x)\nabla u(x)|^{p(x)}dx + \int_{2B} |\nabla\eta(x)u(x)|^{p(x)}dx\\
&\leq \int_{2B} |\nabla u(x)|^{p(x)} + \int_{2B} \Big(|u(x)|\frac{c}{\mathrm{diam}(B)}\Big)^{p(x)}dx\\
&\leq \int_{2B} |\nabla u(x)|^{p(x)}dx + \text{máx}\Big\{\Big(\frac{c}{\mathrm{diam}(B)}\Big)^{p_{2B}^+}, \Big(\frac{c}{\mathrm{diam}(B)}\Big)^{p_{2B}^-}\Big\}\int_{2B} |u(x)|^{p(x)}dx\\
&\leq c\int_{2B} |\nabla u(x)|^{p(x)}dx + c^{p_{2B}^+}\,\text{máx}\{(\mathrm{diam}(B))^{-p_{2B}^+}, (\mathrm{diam}(B))^{-p_{2B}^-}\}\int_{2B} |u(x)|^{p(x)}dx\\
&\leq c^{p_{2B}^+}(1 + \text{máx}\{(\mathrm{diam}(B))^{-p_{2B}^+}, (\mathrm{diam}(B))^{-p_{2B}^-}\})\Big(\int_{2B} |\nabla u(x)|^{p(x)}dx + \int_{2B} |u(x)|^{p(x)}dx\Big)\\
&\leq c^{p_+}(1 + \text{máx}\{(\mathrm{diam}(B))^{-p_{2B}^+}, (\mathrm{diam}(B))^{-p_{2B}^-}\})\|u\|_{W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)}\\
&\leq c^{p_+}(1 + \text{máx}\{(\mathrm{diam}(B))^{-p_{2B}^+}, (\mathrm{diam}(B))^{-p_{2B}^-}\})(\mathrm{cap}_{p(x)}(K) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Consideremos ahora $E \subset B$.

Como $\mathrm{cap}_{p(x)}(E) = \inf\limits_{\substack{E\subset U\\ U \text{ abierto}}} \mathrm{cap}_{p(x)}(U)$, existe una sucesión de abiertos $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $E \subset U_i$ y $\lim\limits_{i\to\infty}\mathrm{cap}_{p(x)}(U_i) = \mathrm{cap}_{p(x)}(E)$.

Llamamos $U = \cap_{i=1}^\infty U_i$. Luego U es un conjunto de Borel y, por lo tanto, es capacitable. Además, $\mathrm{cap}_{p(x)}(U) = \mathrm{cap}_{p(x)}(E)$ dado que

Por un lado, como $E \subset U_i$ para todo i, resulta $E \subset U$ y, en consecuencia, $\mathrm{cap}_{p(x)}(E) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(U)$.

Por otra parte, para todo i tenemos

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(U) = \inf_{\substack{U\subset\tilde{U}\\ \tilde{U} \text{ abierto}}} \mathrm{cap}_{p(x)}(\tilde{U}) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(U_i).$$

Como $\lim\limits_{i\to\infty}\mathrm{cap}_{p(x)}(U_i) = \mathrm{cap}_{p(x)}(E)$, resulta

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(U) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(E).$$

Finalmente, como $E \subset U$,

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(E, 2B) \leq \mathrm{cap}_{p(x)}(U, 2B) = \sup_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compacto}}} \mathrm{cap}_{p(x)}(K, 2B).$$

Por lo visto en la primera parte de la demostración, podemos acotar este último término del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}_{p(x)}(U,2B) &= \sup_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compacto}}} \operatorname{cap}_{p(x)}(K,2B)\\
&\leq \sup_{\substack{K\subset U\\ K \text{ compacto}}} c\,(1+\text{máx}\{(\operatorname{diam}(B))^{-p_{2B}^{+}},(\operatorname{diam}(B))^{-p_{2B}^{-}}\})\operatorname{cap}_{p(x)}(K)\\
&\leq c\,(1+\text{máx}\{(\operatorname{diam}(B))^{-p_{2B}^{+}},(\operatorname{diam}(B))^{-p_{2B}^{-}}\})\operatorname{cap}_{p(x)}(U)\\
&= c\,(1+\text{máx}\{(\operatorname{diam}(B))^{-p_{2B}^{+}},(\operatorname{diam}(B))^{-p_{2B}^{-}}\})\operatorname{cap}_{p(x)}(E).
\end{aligned}$$

Queda así demostrado el resultado. □

Capítulo 5

Propiedades finas de las funciones Sobolev.

Para el desarrollo de este capítulo seguiremos la referencia [4].

Definición 5.1. Una afirmación se cumple $p(x)-$*cuasi todo punto* (y notamos $p(x)-$ctp) si no se cumple en un conjunto de $p(x)-$capacidad de Sobolev nula.

5.1. $p(x)-$cuasiabiertos y $p(x)-$cuasicontinuidad.

Definición 5.2. Sea $D \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado, $\Omega \subset D$ se dice $p(x)-$*cuasiabierto* si existe $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión decreciente de abiertos tal que $\text{cap}_{p(x)}(W_n, D)$ converge a 0 y $\Omega \cup W_n$ es abierto para todo n.

Proposición 5.3. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces,*

1. *Si Ω es abierto, entonces Ω es $p(x)-$cuasiabierto.*
2. *Sea Ω abierto tal que $\text{cap}_{p(x)}(E, D) = 0$, entonces $\Omega \setminus E$ es $p(x)-$cuasiabierto.*
3. *Sean $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $p(x)-$cuasiabiertos, entonces $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ es $p(x)-$cuasiabierto.*

Demostración.

1. Basta tomar $W_n = \emptyset$.
2. Como $0 = \text{cap}_{p(x)}(E, D) = \inf_{\substack{E\subset U\subset D \\ U \text{ abierto}}} \text{cap}_{p(x)}(U, D)$, existe $(W_n)_n$ sucesión decreciente de abiertos tales que $\text{cap}_{p(x)}(W_n, D)$ tiende a 0 y $E \subset W_n \subset D$. Además, $(\Omega\setminus E)\cup W_n = \Omega\cup W_n$ es abierto por ser unión de abiertos.
3. Como Ω_n es $p(x)-$cuasiabierto para todo n, existen $\{W_j^n\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesiones decrecientes de abiertos tales que $\text{cap}_{p(x)}(W_j^n, D)$ tiende a 0 y $\Omega_n \cap W_j^n$ son abiertos para todo j.

Consideramos $\tilde{W}_j = \cup_{n=1}^{\infty} W_j^n$. Luego, $\{\tilde{W}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ resulta una sucesión decreciente de abiertos tal que $\Omega \cap \tilde{W}_j = \cup_{n=1}^{\infty}(\Omega_n \cup W_j^n)$ es abierto.

Por otra parte,

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(\tilde{W}_j, D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(W_j^n, D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+n}} \leq \frac{1}{2^j} \to 0.$$

Luego, $\operatorname{cap}_{p(x)}(\tilde{W}_j) \to 0$, como queríamos probar.

□

Definición 5.4. Una función $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es $p(x)-$*cuasicontinua* si para todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto U tal que $\operatorname{cap}_{p(x)}(U) < \varepsilon$ y $u|_{\Omega\setminus U}$ es continua.

Observación 5.5. Notemos que si u y v son $p(x)-$cuasicontinuas, entonces $u + v$, au con $a \in \mathbb{R}$, $\min\{u, v\}$ y $\max\{u, v\}$ también lo son.

Lema 5.6. *Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Entonces, para cada sucesión de Cauchy con respecto a la norma $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ de funciones de $C(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, existe una subsucesión que converge puntualmente $p(x)-$ctp en $\mathbb{R}^N$.*

Más aún, la convergencia es uniforme fuera de un conjunto de $p(x)-$capcidad arbitrariamente pequeña.

Demostración. Sea $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Considerando una subsucesión si fuera necesario, podemos suponer que para todo $i \in \mathbb{N}$ vale

$$\|u_i - u_{i+1}\|_{1,p(x)} \leq \frac{1}{4^i}.$$

Llamamos $U_i = \{x \in \mathbb{R}^N\colon\ |u_i(x) - u_{i+1}(x)| > \frac{1}{2^i}\}$ y $V_j = \cup_{i\geq j} U_i$.

Sea $v = 2^i\,|u_i - u_{i+1}|$, entonces $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ y $\|v\|_{1,p(x)} = 2^i\,\|u_i - u_{i+1}\|_{1,p(x)} \leq \frac{1}{2^i}$.

Luego, por la Proposición 2.6, $\rho_{1,p(x)}(v) \leq \frac{1}{2^i}$.

Por lo tanto

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(V_j) = \operatorname{cap}_{p(x)}(\cup_{i\geq j} U_i) \leq \sum_{i\geq j} \operatorname{cap}_{p(x)}(U_i) \leq \sum_{i\geq j} \rho_{1,p(x)}(v) \leq \sum_{i\geq j} \frac{1}{2^i} \leq 2^{1-j} \to 0$$

Concluimos así que $\lim_{j\to\infty} \operatorname{cap}_{p(x)}(V_j) = 0$.

Llamando $V = \cap_{j=1}^{\infty} V_j$, resulta $\operatorname{cap}_{p(x)}(V) \leq \operatorname{cap}_{p(x)}(V_j) \to 0$.

Entonces, $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^N \setminus V$ y $\operatorname{cap}_{p(x)}(V) = 0$.

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$ consideremos j_0 tal que $\operatorname{cap}_{p(x)}(V_{j_0}) < \varepsilon$.

Sea $x \in \mathbb{R}^N \setminus V_{j_0}$, entonces $x \in (V_{j_0})^c = (\cup_{i \geq j_0} U_i)^c = \cap_{i \geq j_0} U_i^c$. Podemos afirmar entonces que, para todo $i \geq j_0$,

$$|u_i(x) - u_{i+1}(x)| \leq \frac{1}{2^i}.$$

Luego, dados $k \geq l \geq j_0$,

$$|u_l(x) - u_k(x)| \leq \sum_{i=l}^{k-1} |u_i(x) - u_{i+1}(x)| \leq \sum_{i=l}^{k-1} \frac{1}{2^i} < 2^{1-l}.$$

Por lo tanto, la convergencia en $\mathbb{R}^N \setminus V_{j_0}$ es uniforme. □

Corolario 5.7. *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^N)$. Entonces, para cada $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, existe $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ $p(x)-$cuasicontinua tal que $u = v$ ctp en $\mathbb{R}^N$.*

Demostración. Sea $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, por densidad podemos considerar una sucesión $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_i \to u$ en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Por el Lema 5.6, existe una subsucesión de $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente fuera de un conjunto de capacidad arbitrariamente pequeña. Como la convergencia uniforme implica la continuidad de la función límite, obtenemos una función continua fuera de un conjunto de capacidad arbitrariamente pequeña. □

La siguiente proposición es la extensión para p variable de la propiedad presentada en [4, Corolario 11.1.5, página 335] para p=2. Aunque la demostración es análoga, la incluimos por completitud.

Proposición 5.8. *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$. Entonces, dada $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, existe $v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ $p(x)-$cuasicontinua tal que $u = v$ ctp Ω.*

Demostración. Sea $z \in \Omega$. Definimos

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\} \cap B(z, i).$$

Consideremos $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_i = 1$ en Ω_i. Luego, $u\psi_i \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ y $u\psi_i = u$ en Ω_i.

Como $u\psi_i \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, por el Corolario 5.7, existe $v_i \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ $p(x)-$cuasicontinua tal que $v_i = u\psi_i$ ctp $\mathbb{R}^N$.

Sea $j > i$. Como $u\psi_i = u$ en Ω_i, resulta $v_i = v_j$ ctp Ω_i. Luego, $v_i = v_j$ $p(x)-$ctp Ω_i.

Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $V_i \subset \mathbb{R}^N$ tal que $v_i|_{\mathbb{R}^N \setminus V_i}$ es continua, $v_i = v_{i-1}$ en $\Omega_{i-1} \setminus V_i$ y $\operatorname{cap}_{p(x)}(V_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Llamemos $\tilde{u}(x) = v_i(x)$ donde i es el menor natural tal que $x \in B(z, i)$ y $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}$.

Tenemos que $\tilde{u} = u$ ctp Ω, $\tilde{u}|_{\Omega \setminus \cup_{i=1}^\infty V_i}$ es continua y verifica

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(\cup_{i=1}^\infty V_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \operatorname{cap}_{p(x)}(V_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \varepsilon.$$

Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, queda demostrado el resultado. □

Proposición 5.9. *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$. Entonces, para cada $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, existe $\tilde{u} \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ $p(x)-$cuasicontinua tal que $\tilde{u} = u$ ctp Ω y $\tilde{u} = 0$ $p(x)-$ctp $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.*

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Consideramos $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que v_i converge a u en $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Por lo tanto, $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Por el Lema 5.6, $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge puntualmente $p(x)$-ctp y uniformemente fuera de un conjunto de capacidad arbitrariamente pequeña.

Luego, la función límite $\tilde{u}$ es $p(x)-$cuasicontinua y $\tilde{u} = 0$ $p(x)-$ctp $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. □

Teorema 5.10. *Sean $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ $p(x)-$cuasicontinua y $u = 0$ $p(x)-$ctp $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Entonces $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Demostración. Veamos que u se puede aproximar por funciones en $W^{1,p(x)}(\Omega)$ de soporte compacto en Ω.

Supongamos que $u \geq 0$ (sino, basta efectuar la prueba para $\max\{u, 0\}$ obteniendo así el resultado para $u = \max\{u, 0\} + \min\{u, 0\}$). También podemos asumir, en virtud del Corolario 3.6, que u es acotada y de soporte compacto en $\mathbb{R}^N$.

Sea $\delta > 0$. Como u es $p(x)-$cuasicontinua, podemos considerar U abierto tal que $u|_{\mathbb{R}^N\setminus U}$ es continua y $\mathrm{cap}_{p(x)}(U) < \delta$.

Llamemos $E = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega : u(x) \neq 0\}$. Notemos que, como $u = 0$ $p(x)-$ctp $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, resulta $\mathrm{cap}_{p(x)}(E) = 0$.

Consideremos ahora $w_\delta \in S_{p(x)}(U \cup E)$ tal que $0 \leq w_\delta \leq 1$ y $\rho_{1,p(x)}(w_\delta) < \delta$.

Como $w_\delta \in S_{p(x)}(U \cup E)$, sabemos que $w_\delta \geq 1$ en un abierto $V \supset U \cup E$. Luego, como $w_\delta \leq 1$, obtenemos que $w_\delta = 1$ en el abierto $V \supset U \cup E$.

Sea $0 < \varepsilon < 1$, definimos

$$u_\varepsilon(x) = \max\{u(x) - \varepsilon, 0\}.$$

Como $u = 0$ en $x \in \partial\Omega \setminus V$ y $u|_{\mathbb{R}^N\setminus V}$ es continua, existe $r_x > 0$ tal que $u < \varepsilon$ en $B(x, r_x) \setminus V$ y por ende $u_\varepsilon = 0$ en $B(x, r_x) \setminus V$.

Luego, $(1 - w_\delta)u_\varepsilon = 0$ en $B(x, r_x) \cup V$ para cada $x \in \partial\Omega \setminus V$. Así, $(1 - w_\delta)u_\varepsilon = 0$ en un entorno de $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

Por otro lado,

$$\rho_{1,p(x)}(w_\delta u_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} |w_\delta(x)u_\varepsilon(x)|^{p(x)} + |\nabla(w_\delta(x)u_\varepsilon(x))|^{p(x)}\, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |w_\delta(x)u_\varepsilon(x)|^{p(x)}\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} 2^{p(x)}(w_\delta(x))^{p(x)} |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p(x)}\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} 2^{p(x)} |\nabla w_\delta(x)|^{p(x)} |u_\varepsilon(x)|^{p(x)}\, dx.$$

Notemos que podemos acotar la suma del primer y el tercer término del siguiente modo:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_\delta(x)u_\varepsilon(x)|^{p(x)}\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} 2^{p(x)}\,|\nabla w_\delta(x)|^{p(x)}\,|u_\varepsilon(x)|^{p(x)}\,dx \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^{p(x)} \int_{\mathbb{R}^N} |w_\delta(x)|^{p(x)} + 2^{p_+}\,|\nabla(w_\delta(x))|^{p(x)}\,dx <$$

$$< \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^{p(x)}\,2^{p_+}\rho_{1,p(x)}(w_\delta) < \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^{p(x)}\,2^{p_+}\delta.$$

Concluimos entonces que

$$\rho_{1,p(x)}(w_\delta u_\varepsilon) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^{p(x)}\,2^{p_+}\delta + 2^{p_+} \int_{\mathbb{R}^N} (w_\delta(x))^{p(x)}\,|\nabla u_\varepsilon(x)|^{p(x)}\,dx.$$

Como w_δ converge a 0 en $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ cuando δ tiende a 0, podemos elegir una subsucesión $w_{\delta'}$ que converja a 0 ctp.

Como además, $w_{\delta'}^{p(x)}\,|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} \leq |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}$, por convergencia mayorada, $\int_{\mathbb{R}^N} w_{\delta'}^{p(x)}\,|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}$ converge a 0.

Finalmente entonces $\rho_{1,p(x)}(w_{\delta'}u_\varepsilon)$ converge a 0 cuando δ' tiende a 0 y por lo tanto $||w_{\delta'}u_\varepsilon||_{1,p(x)}$ converge a 0 cuando δ' tiende a 0.

Luego, haciendo tender ε y δ' a 0,

$$||u - (1 - w_{\delta'})u_\varepsilon||_{1,p(x)} \leq ||u - u_\varepsilon||_{1,p(x)} + ||w_{\delta'}u_\varepsilon||_{1,p(x)} \to 0,$$

como queríamos probar. □

Proposición 5.11. *Supongamos $v_j \to v$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$. Entonces, existe $\{v_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\tilde{v}_{j_k} \to \tilde{v}$ $p(x)-$ctp.*

Demostración. Consideremos $\{v_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión tal que $\left\|v_{j_{k+1}} - v_{j_k}\right\|^{p_-}_{W_0^{1,p(x)}(D)} \leq 4^{-kp_+}$.

Llamemos $\Omega_k = \{|\tilde{v}_{j_{k+1}} - \tilde{v}_{j_k}| > 2^{-k}\}$ y $W_n = \cup_{k\geq n}\Omega_k$.

Como $\text{cap}_{p(x)}(W_n, D) = \inf_{\substack{W_n\subset W\\ W \text{ abierto}}} \text{cap}_{p(x)}(W, D)$, existen $\tilde{W}_n$ abiertos tales que $W_n \subset \tilde{W}_n$ y además

$$\text{cap}_{p(x)}(\tilde{W}_n, D) \leq \text{cap}_{p(x)}(W_n, D) + \frac{1}{2^n}. \tag{5.1}$$

Asumimos que $\tilde{W}_n \subset \tilde{W}_{n+1}$ (sino, basta reemplazarlo por $\tilde{W}_n \cap \tilde{W}_{n+1}$).

Notemos que, como $2^k|\tilde{v}_{j_{k+1}} - \tilde{v}_{j_k}| > 1$ en Ω_k abierto, tenemos que

Empleando la Proposición 4.13, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{cap}_{p(x)}(\Omega_k, D) &\leq \int_D |\nabla(2^k|v_{j_{k+1}}(x) - v_{j_k}(x)|)|^{p(x)} dx \\
&\leq 2^{kp_+} \rho_{p(x)}(\nabla(v_{j_{k+1}} - v_{j_k})) \\
&\leq 2^{kp_+} \rho_{1,p(x)}(v_{j_{k+1}} - v_{j_k}) \\
&\leq 2^{kp_+} \left\| v_{j_{k+1}} - v_{j_k} \right\|^{p_-}_{W_0^{1,p(x)}(D)} \leq 2^{kp_+} 4^{-kp_+} = 2^{-kp_+}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(W_n, D) = \mathrm{cap}_{p(x)}(\cup_{k\geq n} \Omega_k, D) \leq \sum_{k\geq n} \mathrm{cap}_{p(x)}(\Omega_k, D) \leq \sum_{k\geq n} 2^{-kp_+} \to 0$$

De (5.1), resulta entonces que $\mathrm{cap}_{p(x)}(\tilde{W}_n, D) \to 0$ y, en consecuencia,

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(\cap_{n=1}^{\infty} \tilde{W}_n, D) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{cap}_{p(x)}(\tilde{W}_n, D) = 0.$$

Luego, $\tilde{v}_{j_k} \to \tilde{v}$ en $D - \cap_{n=1}^{\infty} \tilde{W}_n$, como queríamos probar. □

5.2. Potencial capacitario.

En esta sección extendemos para p variable las definiciones y propiedades dadas para $p = 2$ en [12].

Definición 5.12. Sea $A \subset D$. Llamamos

$\Gamma_A = \{v \in W_0^{1,p(x)}(D) \colon \exists \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p(x)}(D), v_n \to v$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$ y $v_n \geq 1$ ctp en un entorno de $A\}$.

Definimos el potencial capacitario de A como el u_A que verifica

$$\int_D |\nabla u_A(x)|^{p(x)}\, dx = \inf_{v\in\Gamma_A} \int_D |\nabla v(x)|^{p(x)}\, dx.$$

Observación 5.13. Notemos que Γ_A es la clausura de $\{v \in W_0^{1,p(x)}(D) \colon v \geq 1$ ctp en un entorno de $A\}$ con respecto a la norma de $W_0^{1,p(x)}(D)$. Por lo tanto Γ_A resulta cerrado.

Proposición 5.14. *Γ_A es un conjunto convexo.*

Demostración. Sean $0 < t < 1$ y $u, v \in \Gamma_A$. Entonces, u_n converge a u en $W_0^{1,p(x)}(D)$ y $u_n \geq 1$ en un entorno U de A. Del mismo modo, v_n converge a v en $W_0^{1,p(x)}(D)$ y $v_n \geq 1$ en un entorno V de A. Veamos que $tu + (1-t)v \in \Gamma_A$.

$$\|tu_n + (1-t)v_n - (tu + (1-t)v)\|_{W_0^{1,p(x)}(D)} \leq \|u_n - u\|_{W_0^{1,p(x)}(D)} + \|v_n - v\|_{W_0^{1,p(x)}(D)} \to 0$$

Por lo tanto, $tu_n + (1-t)v_n$ converge a $tu + (1-t)v$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$.

Además, $tu_n + (1-t)v_n \geq t + (1-t) = 1$ en $U \cup V$ entorno de A. Queda concluida así la prueba. □

Proposición 5.15. *Si $\Gamma_A \neq \emptyset$, entonces existe un único $u_A \in \Gamma_A$ tal que*

$$\mathrm{cap}_{p(x)}(A, D) = \int_D |\nabla u_A(x)|^{p(x)}\, dx.$$

Demostración. Comencemos probando la existencia.

Por la definición de $p(x)-$capacidad, sabemos que existe $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p(x)}(D)$ tal que $v_n \geq 1$ ctp en un entorno de A y $\displaystyle\int_D |\nabla v_n(x)|^{p(x)}\, dx \to \mathrm{cap}_{p(x)}(A, D)$. Luego, por ser convergente, $\{\rho_{p(x)}(\nabla v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta una sucesión acotada.

Por lo tanto, por el Teorema 2.40 y teniendo en cuenta la Proposición 2.7, tenemos que

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{W_0^{1,p(x)}(D)} &= \|\nabla v_n\|_{L^{p(x)}(D)} \\ &\leq \tilde{c}\, \mathrm{máx}\{(\rho_{p(x)}(\nabla v_n))^{\frac{1}{p+}}, (\rho_{p(x)}(\nabla v_n))^{\frac{1}{p-}}\}. \end{aligned}$$

Luego, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p(x)}(D)$, que es reflexivo. Por el Teorema de Alaoglu existe entonces una subsucesión débil convergente: $v_{n_j} \rightharpoonup v_\infty$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$.

Como Γ_A es cerrado en $W_0^{1,p(x)}(D)$ y convexo, resulta cerrado débil y, por lo tanto, $v_\infty \in \Gamma_A$.

Por otra parte,

$$\int_D |\nabla v_\infty(x)|^{p(x)}\, dx \leq \liminf \int_D \left|\nabla v_{n_j}(x)\right|^{p(x)} dx = \mathrm{cap}_{p(x)}(A, D).$$

Además claramente tenemos que $\displaystyle\int_D |\nabla v_\infty(x)|^{p(x)}\, dx \geq \mathrm{cap}_{p(x)}(A, D)$. Concluimos así que vale la igualdad.

La unicidad es consecuencia inmediata de la estricta convexidad de $\int_D |\nabla v(x)|^{p(x)}\, dx$, que asegura que no es posible la existencia de más de un mínimo. Basta notar que, si hubieran dos mínimos u_1 y u_2, entonces

$$\int_D \left|\nabla\Big(\frac{u_1(x) + u_2(x)}{2}\Big)\right|^{p(x)} dx \leq \frac{1}{2}\int_D |\nabla u_1(x)|^{p(x)}\, dx + \frac{1}{2}\int_D |\nabla u_2(x)|^{p(x)}\, dx = \int_D |\nabla u_1(x)|^{p(x)}\, dx$$

lo cual es un absurdo ya que u_1 era mínimo. □

Proposición 5.16. *Sea u_A el potencial capacitario de A, entonces $0 \leq u_A \leq 1$.*

Demostración. Como $u_A \in \Gamma_A$, entonces $u_A \in W_0^{1,p(x)}(D)$ y existe $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a u_A en

$W_0^{1,p(x)}(D)$ tal que $v_n \geq 1$ ctp en un entorno de A.

$$\begin{aligned}
\int_D |\nabla \operatorname{ínf}\{u_A(x), 1\}|^{p(x)}\, dx &= \int_{u_A<1} |\nabla \operatorname{ínf}\{u_A(x), 1\}|^{p(x)}\, dx + \int_{u_A(x)\geq 1} |\nabla \operatorname{ínf}\{u_A, 1\}|^{p(x)}\, dx \\
&= \int_{u_A<1} |\nabla u_A(x)|^{p(x)}\, dx + \int_{u_A\geq 1} |\nabla 1|^{p(x)}\, dx \\
&= \int_{u_A<1} |\nabla u_A(x)|^{p(x)}\, dx \\
&\leq \int_D |\nabla u_A(x)|^{p(x)}\, dx \\
&= \operatorname*{ínf}_{v\in\Gamma_A} \int_D |\nabla v(x)|^{p(x)} dx.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $u_A \in W_0^{1,p(x)}(D)$, sabemos que $\operatorname{ínf}\{u_A, 1\} \in W_0^{1,p(x)}(D)$. Como $v_n \geq 1$ ctp en un entorno de A, podemos asegurar que $\operatorname{ínf}\{u_A, 1\} \geq 1$ ctp en un entorno de A. Además, dado que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u_A en $W_0^{1,p(x)}(D)$, $\operatorname{ínf}\{v_n, 1\}$ converge a $\operatorname{ínf}\{u_A, 1\}$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$.

Por lo tanto, $\operatorname{ínf}\{u_A, 1\} \in \Gamma_A$ y, en consencuencia,

$$\operatorname*{ínf}_{v\in\Gamma_A} \int_D |\nabla v(x)|^{p(x)} dx \leq \int_D |\nabla \operatorname{ínf}\{u_A(x), 1\}|^{p(x)}\, dx.$$

Luego,

$$\operatorname*{ínf}_{v\in\Gamma_A} \int_D |\nabla v(x)|^{p(x)}\, dx = \int_D |\nabla \operatorname{ínf}\{u_A(x), 1\}|^{p(x)}\, dx.$$

Por la unicidad de u_A, resulta que $\operatorname{ínf}\{u_A, 1\} = u_A$. Concluimos así que $u_A \leq 1$.

Análogamente, considerando $\sup\{u_A, 0\}$, resulta $u_A \geq 0$, como queríamos probar. □

En lo que sigue nos dedicaremos al estudio de $\hat{\Delta}_{p(x)} u_A := \operatorname{div}(p(x)|\nabla u_A|^{p(x)-2}\nabla u)$ que es, en principio, una distribución. Veremos que esta distribución define en realidad una medida soportada en $\bar{A}$ y que esta medida codifica las propiedades fundamentales del conjunto A.

Proposición 5.17. *Sea $A \subset D$, entonces $-\hat{\Delta}_{p(x)} u_A \geq 0$ en D.*

Demostración. Dados $\varphi \in C_c^\infty(D)$ tal que $\varphi \geq 0$ y $t > 0$, claramente vale que $u_A + t\varphi \in \Gamma_A$. Luego,

$$\int_D |\nabla u_A(x)|^{p(x)} dx \leq \int_D |\nabla(u_A(x) + t\varphi(x))|^{p(x)} dx.$$

Considerando la función $r(t) = \int_D |\nabla(u_A(x) + t\varphi(x))|^{p(x)} dx$, resulta entonces que $r(0) \leq r(t)$.

Concluimos así que $r(0) \leq r(t)$ para todo $t > 0$. Por lo tanto,

$$r'(0) = \int_D p(x)|\nabla u_A(x)|^{p(x)-2}\nabla u_A(x)\nabla\varphi(x)\, dx \geq 0$$

Es decir, dada $\varphi \in C_c^\infty(D)$ tal que $\varphi \geq 0$, vale que

$$\int_D p(x)|\nabla u_A(x)|^{p(x)-2}\nabla u_A(x)\nabla\varphi(x)\,dx \geq 0.$$

Luego, $-\hat{\Delta}_{p(x)}u_A \geq 0$ en D, como queríamos probar. □

Proposición 5.18. *El soporte de $-\hat{\Delta}_{p(x)}u_A$ está incluido en $\bar{A}$.*

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^\infty(D \setminus \bar{A})$. Luego, como φ se anula en un entorno de A, sabemos que $u_A + t\varphi \in \Gamma_A$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Considerando la función $r(t) = \int_D |\nabla(u_A(x) + t\varphi(x))|^{p(x)}dx$, tenemos que $r(0) \leq r(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, r tiene un mínimo en $t = 0$ y así podemos asegurar que

$$r'(0) = \int_D p(x)|\nabla u_A(x)|^{p(x)-2}\nabla u_A(x)\nabla\varphi(x)\,dx = 0.$$

Queda así demostrado el resultado. □

Observación 5.19. Notemos que, como el soporte de $-\hat{\Delta}_{p(x)}u_A$ está incluido en $\bar{A}$, sabemos que $\hat{\Delta}_{p(x)}u_A = 0$ en $D \setminus \bar{A}$. Además, dado que $u_A \in W_0^{1,p(x)}(D)$, podemos afirmar que $u_A = 0$ en ∂D. Finalmente resulta claro que $u_A = 1$ en A.

A continuación, probamos algunos resultados que serán de utilidad en el capítulo 8. Si bien se podrían extender al caso de exponente variable, elegimos demostrarlos para exponentes constantes dado que los usaremos de esa forma.

Proposición 5.20. *Sea $r > 0$. Si $p(x) = p$ es constante, entonces $u_{B(0,r)}(rx) = u_{B(0,1)}(x)$.*

Demostración. Sea $x \in B(0,2) \setminus \overline{B(0,1)}$, definimos $v(x) = u_{B(0,1)}(rx)$.

Notemos que $\nabla v(x) = r\nabla u_{B(0,1)}(rx)$. Por lo tanto

$$\hat{\Delta}_p v(x) = \operatorname{div}(p|\nabla v(x)|^{p-2}\nabla v(x)) = r^{p-1}p\operatorname{div}(|\nabla u_{B(0,1)}(rx)|^{p-2}\nabla u_{B(0,1)}(rx)) = r^{p-1}p\hat{\Delta}_p u_{B(0,1)}(rx) = 0.$$

donde, para establacer la última igualdad, tuvimos en cuenta que $rx \in B(0,2r) \setminus \overline{B(0,r)}$ y en este conjunto sabemos que $\hat{\Delta}_p u_{B(0,1)} = 0$.

Además, claramente $v = 0$ en $\partial B(0,2)$ y $v = 1$ en $B(0,1)$ pues $u_{B(0,1)}$ verifica ambas propiedades.

Concluimos así que $u_{B(0,r)}(rx) = u_{B(0,1)}(x)$, como queríamos probar. □

Lema 5.21. *Sea $t > 0$. Si $p(x) = p$ es constante, entonces*

$$\operatorname{cap}_p(B(x,t), B(x,2t)) = t^{N-p}\operatorname{cap}_p(B(x,1), B(x,2)).$$

Demostración. Por simplicidad, asumiremos $x = 0$. Por el Lema 5.20, sabemos que

$$u_{B(0,t)}(x) = u_{B(0,1)}\Big(\frac{x}{t}\Big).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,2t)\setminus B(0,t)} |\nabla u_{B(0,t)}(x)|^{p(x)} dx &= \int_{B(0,2t)\setminus B(0,t)} |\nabla u_{B(0,1)}\Big(\frac{x}{t}\Big)|^p dx \\
&= \int_{B(0,2t)\setminus B(0,t)} |\nabla u_{B(0,1)}\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{1}{t}|^p dx \\
&= \frac{1}{t^p}\int_{B(0,2t)\setminus B(0,t)} |\nabla u_{B(0,1)}\Big(\frac{x}{t}\Big)|^p dx \\
&= \frac{1}{t^p}\int_{B(0,2)\setminus B(0,1)} |\nabla u_{B(0,1)}(y)|^p t^N dy \\
&= t^{N-p}\int_{B(0,2)\setminus B(0,1)} |\nabla u_{B(0,1)}(y)|^p dy.
\end{aligned}$$

Como $u_{B(0,t)} = 1$ en $B(0,t)$ (y, en consecuencia, $\nabla u_{B(0,t)} = 0$ en $B(0,t)$) y $u_{B(0,1)} = 1$ en $B(0,1)$ (y, en consecuencia, $\nabla u_{B(0,1)} = 0$ en $B(0,1)$), obtuvimos que

$$\int_{B(0,2t)} |\nabla u_{B(0,t)}(x)|^p dx = t^{N-p}\int_{B(0,2)} |\nabla u_{B(0,1)}(y)|^p dy.$$

Es decir,

$$\operatorname{cap}_p(B(0,t), B(0,2t) = t^{N-p}\operatorname{cap}_p(B(0,1), B(0,2)).$$

Queda así probado el resultado si $x = 0$. En el caso contrario se procede análogamente. □

Veremos a continuación que es posible dar una generalización del lema previo a p variable.

Lema 5.22. *Sean $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $0 < r < 1$. Entonces,*

$$\operatorname{cap}_{p(\frac{\cdot}{r})}(B(0,r), B(0,2r)) \le r^{N-p_+}\operatorname{cap}_{p(\cdot)}(B(0,1), B(0,2))$$

y

$$\operatorname{cap}_{p(r\ \cdot)}(B(0,1), B(0,2)) \le r^{p_- - N}\operatorname{cap}_{p(\cdot)}(B(0,r), B(0,2r))$$

Demostración. Consideremos $v(x) = u_{B(0,1)}(\frac{x}{r})$. Notemos que, como $u \in W^{1,p(x)}(B(0,2))$, entonces $v \in W^{1,p(\frac{x}{r})}(B(0,2r))$. Además, como $u = 1$ en $B(0,1)$, tenemos que $v = 1$ en $B(0,r)$. Luego, por la Proposición 4.13, definiendo $p_r(\cdot) := p(\frac{\cdot}{r})$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}_{p_r(\cdot)}(B(0,r),B(0,2r)) &\leq \int_{B(0,2r)} |\nabla v(x)|^{p_r(x)}dx \\
&= \int_{B(0,2r)} \Big(\frac{1}{r}\Big)^{p(\frac{x}{r})}\Big|\nabla u_{B(0,1)}\Big(\frac{x}{r}\Big)\Big|^{p(\frac{x}{r})} dx \\
&= \int_{B(0,2)} \Big(\frac{1}{r}\Big)^{p(y)}|\nabla u_{B(0,1)}(y)|^{p(y)} r^N dy \\
&\leq \int_{B(0,2)} \frac{1}{r^{p_+}}|\nabla u_{B(0,1)}(y)|^{p(y)} r^N dy \\
&= r^{N-p_+}\int_{B(0,2)} |\nabla u_{B(0,1)}(y)|^{p(y)} dy \\
&= r^{N-p_+}\operatorname{cap}_{p(\cdot)}(B(0,1),B(0,2)).
\end{aligned}$$

La prueba de la otra desigualdad es completamente análoga, considerando ahora $u(x) = v_{B(0,r)}(rx)$ y definiendo $p_r(\cdot) := p(r\,\cdot)$. Queda así probado el lema. □

Observación 5.23. Notemos que, si p es constante, el Lema 5.22 nos permite afirmar que, si $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $0 < r < 1$, entonces

$$\operatorname{cap}_p(B(0,r),B(0,2r)) \leq r^{N-p}\operatorname{cap}_p(B(0,1),B(0,2))$$

y

$$\operatorname{cap}_p(B(0,1),B(0,2)) \leq r^{p-N}\operatorname{cap}_p(B(0,r),B(0,2r))$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{cap}_p(B(0,r),B(0,2r)) = r^{N-p}\operatorname{cap}_p(B(0,1),B(0,2)).$$

5.3. Teorema de caracterización de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

En esta sección extendemos para p variable las definiciones y propiedades dadas para $p = 2$ en [12].

Teorema 5.24 (Teorema de caracterización)**.** *Sean $D \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $\Omega \subset D$ abierto y $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$. Entonces,*

$$u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \Leftrightarrow u \in W_0^{1,p(x)}(D) \text{ y } \tilde{u} = 0 \ p(x)-ctp\ D \setminus \Omega.$$

Demostración. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^\infty(D)$ tal que φ_n converge a u en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ y, por lo tanto, en $W_0^{1,p(x)}(D)$. Luego, $u \in W_0^{1,p(x)}(D)$.

Sea $\{\varphi_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converge a $\tilde{u}$ $p(x)$−ctp. Luego, como $\varphi_{n_j} = 0$ en $D \setminus \Omega$, resulta $\tilde{u} = 0$ *ctp* $D \setminus \Omega$.

Recíprocamente, supongamos que $D = \mathbb{R}^N$ (sino, extendemos por cero).

Descomponiendo $u = u^+ - u^-$, podemos suponer también que $u \geq 0$.

Como $\text{mín}\{u, n\} \in W_0^{1,p(x)}(D)$, que es cerrado en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, y converge a u en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, podemos suponer que u es acotada.

Consideremos $\xi \in C_c^\infty(B(0,2))$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$ y $\xi \equiv 1$ en $B(0,1)$.

Llamemos $\xi_n(x) = \xi(\frac{x}{n})$. Luego, $\xi_n u$ converge a u en $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Podemos entonces suponer que $u(x) = 0$ para todo $x \in (B(0,R))^c$ para R grande.

Como u es $p(x)-$cuasicontinua, existe $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión decreciente de abiertos tales que $\text{cap}_{p(x)}(W_n, D)$ tiende a 0 y $\tilde{u}|_{\mathbb{R}^N\setminus W_n}$ es continua.

Supongamos que W_n contiene al conjunto de capacidad nula de $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ donde $\tilde{u} \neq 0$. Por lo tanto, $\tilde{u} = 0$ en $(\Omega \cup W_n)^c = \Omega^c \cap W_n^c$.

Sea $\delta > 0$, llamamos $V_n = \{x\colon \tilde{u}(x) < \delta\} \cup W_n$. Como $\tilde{u}$ es continua en $\mathbb{R}^N \setminus W_n$, V_n resulta abierto. Por lo tanto, V_n^c es cerrado. Además, es acotado pues $V_n^c \subset B(0,R)$. Luego, V_n^c es compacto.

Sea u_{W_n} el potencial capacitario de W_n, resulta entonces que $(u-\delta)^+(1-u_{W_n}) = 0$ ctp $\Omega \setminus V_n^c$.

Consideramos $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión regularizante. Luego, para j grande tenemos que

$$K_j * [(u-\delta)^+(1-u_{W_n})] \in C^\infty(\Omega).$$

Notemos que

$$\rho_{p(x)}(\nabla u_{W_n}) = \text{cap}_{p(x)}(W_n, D) \to 0.$$

Por el Corolario 2.9, resulta entonces que $\left\|\nabla u_{W_n}\right\|_{L^{p(x)}(D)} \to 0$.

Por otro lado, por el Teorema 2.40,

$$\left\|u_{W_n}\right\|_{L^{p(x)}(D)} \leq c \ \left\|\nabla u_{W_n}\right\|_{L^{p(x)}(D)} .$$

Luego,

$$\left\|u_{W_n}\right\|_{W^{1,p(x)}(D)} = \left\|u_{W_n}\right\|_{L^{p(x)}(D)} + \left\|\nabla u_{W_n}\right\|_{L^{p(x)}(D)} \to 0.$$

Por lo tanto, $1 - u_{W_n}$ converge a 1 en $W^{1,p(x)}(D)$ cuando n tiende a $+\infty$.

Por otra parte, empleando la Proposición 2.7,

$$\begin{aligned}
\|(u-\delta) - u\|_{W^{1,p(x)}(D)} &= \delta\,\|1\|_{W^{1,p(x)}(D)} \\
&= \delta(\|1\|_{L^{p(x)}(D)} + \|\nabla 1\|_{L^{p(x)}(D)}) \\
&= \delta\,\|1\|_{L^{p(x)}(D)} \\
&\leq \delta\,\text{máx}\{(\rho_{p(x)}(1))^{\frac{1}{p+}}, (\rho_{p(x)}(1))^{\frac{1}{p-}}\} \\
&= \delta\,\text{máx}\{|D|^{\frac{1}{p+}}, |D|^{\frac{1}{p-}}\}.
\end{aligned}$$

Cuando δ tiende a 0^+, este último término tiende a 0 y, en consecuencia, $u - \delta$ converge a u en $W^{1,p(x)}(D)$. Por lo tanto, $(u-\delta)^+$ converge a $u^+ = u$ en $W^{1,p(x)}(D)$ cuando δ tiende a 0^+.

Además, como $0 \leq 1 - u_{W_n} \leq 1$, obtenemos

$$\left\|1 - u_{W_n}\right\|_{W^{1,p(x)}(D)} = \left\|1 - u_{W_n}\right\|_{L^{p(x)}(D)} + \left\|\nabla u_{W_n}\right\|_{L^{p(x)}(D)}$$

$$\leq \text{máx}\{(\rho_{p(x)}(1 - u_{W_n}))^{\frac{1}{p+}}, (\rho_{p(x)}(1 - u_{W_n}))^{\frac{1}{p-}}\} + \text{máx}\{(\rho_{p(x)}(\nabla u_{W_n}))^{\frac{1}{p+}}, (\rho_{p(x)}(\nabla u_{W_n}))^{\frac{1}{p-}}\}$$

$$\leq \text{máx}\{|D|^{\frac{1}{p+}}, |D|^{\frac{1}{p-}}\} + \text{máx}\{(\text{cap}_{p(x)}(W_n, D))^{\frac{1}{p+}}, (\text{cap}_{p(x)}(W_n, D))^{\frac{1}{p-}}\}.$$

Como $\text{cap}_{p(x)}(W_n, D)$ tiende a 0, la sucesión $\{\left\|1 - u_{W_n}\right\|_{W^{1,p(x)}(D)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta acotada.

Notemos que

$$\left\|(u - \delta)^+(1 - u_{W_n}) - u\right\|_{W^{1,p(x)}(D)}$$

$$\leq \left\|1 - u_{W_n}\right\|_{W^{1,p(x)}(D)} \left\|(u - \delta)^+ - u\right\|_{W^{1,p(x)}(D)} + \|u\|_{W^{1,p(x)}(D)} \left\|u_{W_n}\right\|_{W^{1,p(x)}(D)}.$$

Finalmente entonces, haciendo tender j a $+\infty$, n a $+\infty$ y δ a 0^+, concluimos que

$$K_j * [(u - \delta)^+(1 - u_{W_n})] \to u,$$

como queríamos probar. □

Nuestro objetivo para finalizar esta sección será dar una extensión a todo subconjunto de D de la caracterización presentada en el teorema anterior para abiertos.

Definición 5.25. Dado $A \subset D$, definimos

$$W_0^{1,p(x)}(A) = \{v \in W_0^{1,p(x)}(D) \colon \tilde{v} = 0 \ p(x) - ctp \ D \setminus A\}.$$

Lema 5.26. *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset D$ $p(x)$–cuasiabiertos y $W_0^{1,p(x)}(\Omega_1) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega_2)$. Entonces, $\Omega_1 \subset \Omega_2$ $p(x)$–ctp.*

Demostración. Supongamos que $\text{cap}_{p(x)}(\Omega_1 \setminus \Omega_2) > 0$. Consideremos $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de abiertos tales que $\text{cap}_{p(x)}(W_n) \to 0$ y $\Omega_1 \cup W_n$ es abierto.

Notemos u_{W_n} al potencial capacitario de W_n relativo a D. Entonces,

$$0 < \text{cap}_{p(x)}(\Omega_1 \setminus \Omega_2) = \text{cap}_{p(x)}([\{u_{W_n} < 1\} \cap (\Omega_1 \setminus \Omega_2)] \cup [\{u_{W_n} = 1\} \cap (\Omega_1 \setminus \Omega_2)])$$

$$\leq \text{cap}_{p(x)}(\{u_{W_n} < 1\} \cap (\Omega_1 \setminus \Omega_2)]) + \text{cap}_{p(x)}(W_n \cap (\Omega_1 \setminus \Omega_2)).$$

Como $\text{cap}_{p(x)}(W_n \cap (\Omega_1 \setminus \Omega_2)) \leq \text{cap}_{p(x)}(W_n) \to 0$, para n suficientemente grande podemos asegurar que

$$\text{cap}_{p(x)}([\{u_{W_n} < 1\} \cap (\Omega_1 \setminus \Omega_2)] > 0.$$

Consideremos ahora $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de compactos tal que $\Omega_1 \cup W_n = \cup_{n=1}^{\infty} K_j$ y notemos que u_{K_j} al potencial capacitario de K_j relativo a $\Omega_1 \cup W_n$.

Como $u_{K_j} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_1 \cup W_n)$, resulta que $u_{K_j}(1 - u_{W_n})$ pertenece a $W_0^{1,p(x)}(\Omega_1)$ y no pertenece a $W_0^{1,p(x)}(\Omega_2)$, lo cual es absurdo. □

Proposición 5.27. *Dado $A \subset D$, existe un único (salvo $p(x)-$capacidad nula) $\Omega \subset D$ $p(x)-$cuasiabierto tal que $W_0^{1,p(x)}(A) = W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Demostración. Notemos que $W_0^{1,p(x)}(A)$ resulta separable por ser subespacio de $W_0^{1,p(x)}(D)$, que es separable.

Consideremos $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $W_0^{1,p(x)}(A)$ denso y definamos $\Omega := \cup_{n=1}^{\infty}\{\tilde{u}_n \neq 0\}$, que resulta $p(x)-$cuasiabierto por ser unión de $p(x)-$cuasiabiertos.

Como $\tilde{u}_n = 0$ en $D \setminus A$, sabemos que $\{\tilde{u}_n \neq 0\} \subset A$ $p(x)-$ctp para todo n. Luego, $\Omega \subset A$ $p(x)-$ctp.

Por lo tanto, $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \subset W_0^{1,p(x)}(A)$.

Recíprocamente, dada $u \in W_0^{1,p(x)}(A)$, por densidad sabemos que existe $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_j} \to u$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$ y $\tilde{u}_{n_j} \to \tilde{u}$ $p(x)-$ctp.

Como $\tilde{u}_{n_j} = 0$ $p(x)-$ctp $D \setminus \Omega$ para todo j, resulta que $\tilde{u} = 0$ $p(x)-$ctp $D \setminus \Omega$.

Concluimos entonces que $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que existen $\Omega_1, \Omega_2 \subset D$ $p(x)-$cuasiabiertos tales que $W_0^{1,p(x)}(A) = W_0^{1,p(x)}(\Omega_1) = W_0^{1,p(x)}(\Omega_2)$.

Por el Lema 5.26, resulta entonces que $\Omega_1 = \Omega_2$ $p(x)-$ctp, como queríamos probar. □

Capítulo 6

Continuidad del Problema de Dirichlet para el $p(x)-$laplaciano con respecto a perturbaciones en el dominio.

En este capítulo extendemos para p variable las definiciones y propiedades dadas para $p = 2$ en [12].

Definimos el $p(x)-$laplaciano como $\Delta_{p(x)}u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$.

El problema de Dirichlet para el $p(x)-$laplaciano consiste en hallar $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f & \text{en } \Omega, \\ \quad\quad u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

donde $f \in L^{p'(x)}(\Omega)$ o, más generalmente, $f \in W^{-1,p'(x)}(\Omega)$.

En su formulación débil, el problema de Dirichlet se escribe como hallar $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \text{ para todo } v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Si definimos

$$I(v) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla v(x)|^{p(x)}\,dx - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx,$$

el problema puede nuevamente reformularse como hallar $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$I(u) = \min\{I(v)\colon v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\}.$$

6.1. Existencia y unicidad.

Lema 6.1. *Sea $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Entonces, u es minimizante de I si y sólo si es solución de 6.1.*

Demostración. Sea $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Como $-\Delta_{p(x)}u = f$, tenemos que

$$\int_\Omega (-\Delta_{p(x)}u(x) - f(x))(u(x) - w(x))\,dx$$
$$= \int_\Omega (-\Delta_{p(x)}u(x))(u(x) - w(x))\,dx - \int_\Omega f(x)(u(x) - w(x))\,dx = 0.$$

Teniendo en cuenta la definición del $p(x)-$laplaciano, obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\nabla(u - w) - \int_\Omega f(u - w) = 0.$$

Por lo tanto, aplicando la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)} - f(x)u(x)\,dx &= \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)-2}\,\nabla u(x)\nabla w(x)\,dx - \int_\Omega f(x)w(x)\,dx\\ &\le \int_\Omega \frac{\left||\nabla u(x)|^{p(x)-2}\,\nabla u(x)\right|^{p'(x)}}{p'(x)}dx + \int_\Omega \frac{|\nabla w(x)|^{p(x)}}{p(x)} - \int_\Omega f(x)w(x)\,dx\\ &= \int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^{p(x)}}{p'(x)}dx + \int_\Omega \frac{|\nabla w(x)|^{p(x)}}{p(x)} - \int_\Omega f(x)w(x)\,dx.\end{aligned}$$

Concluimos entonces

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\,|\nabla u(x)|^{p(x)} - f(x)u(x)\,dx \le \int_\Omega \frac{|\nabla w(x)|^{p(x)}}{p(x)} - \int_\Omega f(x)w(x)\,dx.$$

Finalmente $I(u) \le I(w)$ y, en consecuencia, u es minimizante.

Sea u minimizante, veamos que entonces resulta solución.

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, consideremos $h(t) := I(u + t\varphi)$. Luego,

$$h'(0) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\nabla\varphi(x) - f(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Como $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ era arbitraria, por densidad se sigue el resultado para toda función en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, como queríamos probar. □

Lema 6.2. *Existe un único minimizante de I.*

Demostración. Veamos que existe $\bar{u} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $I(\bar{u}) \le I(v)$ para todo $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Sea $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, por la desigualdad de Young, tenemos que

$$\langle f, u\rangle \le \|f\|_{-1,p'(x)}\|u\|_{1,p(x)} \le \varepsilon\|u\|_{1,p(x)}^{p_-} + c_\varepsilon\|f\|_{-1,p'(x)}^{p_-'}.$$

Luego,

$$-\langle f, u\rangle \ge -\varepsilon\|u\|_{1,p(x)}^{p_-} - c_\varepsilon\|f\|_{-1,p'(x)}^{p_-'}.$$

Supongamos $\|\nabla u\|_{p(x)} > 1$. Luego, por la Proposición 2.7, $\|\nabla u\|_{p(x)}^{p_-} \leq \rho_{p(x)}(\nabla u)$. Observemos que, si $\|\nabla u\|_{p(x)} < 1$, basta reemplazar p_- por p_+ en la demostración.

Llamando $K = c_\varepsilon \|f\|_{-1,p'(x)}^{p'_-}$ y tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{1}{p_+} - \varepsilon \geq \alpha > 0$, por el Teorema 2.40, obtenemos

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u(x)|^{p(x)} dx - \langle f, u \rangle \\
&\geq \frac{1}{p_+} \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)} dx - \varepsilon \|u\|_{1,p(x)}^{p_-} - c_\varepsilon \|f\|_{-1,p'(x)}^{p'_-} \\
&= \frac{1}{p_+} \rho_{p(x)}(\nabla u) - \varepsilon \|\nabla u\|_{p(x)}^{p_-} - K \\
&\geq \frac{1}{p_+} \|\nabla u\|_{p(x)}^{p_-} - \varepsilon \|\nabla u\|_{p(x)}^{p_-} - K \\
&= \alpha \|\nabla u\|_{p(x)}^{p_-} - K \\
&\geq \alpha c \|u\|_{p(x)}^{p_-} - K.
\end{aligned}$$

Luego, I resulta coerciva y acotada inferiormente.

Consideremos ahora $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $I(u_n)$ tiende a $\inf\{I(v) \colon v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\} > -\infty$.

Por lo visto antes, sabemos que $I(u_n) \geq \alpha \|\nabla u_n\|_{p(x)}^{p_-} - K$. Luego, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta acotada en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, que es un Banach reflexivo. Luego, por el Teorema de Alaoglu, existe una subsucesión, que volvemos a llamar $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Recordemos que

$$I(u_n) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n(x)|^{p(x)}\, dx - \int_\Omega f(x) u_n(x)\, dx.$$

Luego, por la semicontinuidad inferior (consecuencia de la convexidad), obtenemos que

$$I(\bar{u}) \leq \liminf I(u_n) = \inf\{I(v) \colon v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\}.$$

Por otra parte, gracias a la uniforme convexidad de I, el minimizante obtenido resulta único. Basta notar que, si existieran dos mínimos u_1 y u_2, entonces

$$I\Big(\frac{u_1 + u_2}{2}\Big) \leq \frac{1}{2} I(u_1) + \frac{1}{2} I(u_2) = I(u_1),$$

lo cual es un absurdo ya que u_1 era mínimo. □

De los Lemas 6.1 y 6.2, se deduce el siguiente resultado.

Corolario 6.3. *Existe una única $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (que notaremos u_Ω^f) solución de* (6.1).

6.2. Principio del máximo.

Lema 6.4 (Principio del máximo para exponente variable)**.** *Sean $u, v \in W_0^{1,p(x)}(D)$ tales que*

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u \leq -\Delta_{p(x)}v & \text{en } D, \\ u \leq v & \text{en } \partial D \end{cases}$$

Entonces, $u \leq v$ en D.

Demostración. Llamemos $-\Delta_{p(x)}u = g$ y $-\Delta_{p(x)}v = f$. Luego, dada $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(D)$, vale

$$\int_D |\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_D g(x)\varphi(x)\,dx$$

y

$$\int_D |\nabla v(x)|^{p(x)-2}\nabla v(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_D f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Restando a ambos lados, obtenemos que, dado, $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(D)$,

$$\int_D (|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x) - |\nabla v(x)|^{p(x)-2}\nabla v(x))\nabla\varphi(x)\,dx = \int_D (g(x) - f(x))\varphi(x)\,dx.$$

En particular, tomando $\varphi = (u-v)^+ \in W_0^{1,p(x)}(D)$, como $g \leq f$ resulta

$$\int_D (|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x) - |\nabla v(x)|^{p(x)-2}\nabla v(x)\,dx)\nabla(u(x) - v(x))^+$$

$$= \int_D (g(x) - f(x))(u(x) - v(x))^+ dx \leq 0.$$

Teniendo en cuenta que $\nabla(u-v)^+ = (\nabla u - \nabla v)\chi_{u>v}$, concluimos entonces que

$$\int_{u>v} (|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x) - |\nabla v(x)|^{p(x)-2}\nabla v(x))(\nabla u(x) - \nabla v(x))\,dx \leq 0.$$

Por otro lado, por el Lema 6.13, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\int_{u>v} (|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x) - |\nabla v(x)|^{p(x)-2}\nabla v(x))(\nabla u(x) - \nabla v(x))\,dx$$

$$\geq \begin{cases} c\displaystyle\int_{u>v} |\nabla u(x) - \nabla v(x)|^{p(x)} dx & \text{si } p(x) \geq 2, \\ c\displaystyle\int_{u>v} \frac{|\nabla u(x) - \nabla v(x)|^2}{(|\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|)^{2-p(x)}} dx & \text{si } p(x) \leq 2. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$0 \geq \begin{cases} \displaystyle\int_D |\nabla(u(x) - v(x))^+|^{p(x)} dx & \text{si } p(x) \geq 2, \\ \displaystyle\int_D \frac{|\nabla(u(x) - v(x))^+|^2}{(|\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|)^{2-p(x)}} dx & \text{si } p(x) \leq 2. \end{cases}$$

Luego, $\nabla(u-v)^+ = 0$ en D. Así, $(u-v)^+$ es constante en D. Pero como $(u-v)^+ \in W_0^{1,p(x)}(D)$, tenemos que $(u-v)^+ = 0$. Resulta entonces que $u - v \leq 0$, como queríamos probar. □

Una consecuencia inmediata del lema anterior es el siguiente corolario.

Corolario 6.5 (Propiedad de la monotonía respecto del segundo miembro.)**.** *Si $f \leq g$ en D, entonces $u_D^f \leq u_D^g$.*

Observación 6.6. Sea $M \geq 0$, entonces $v_\Omega^M \geq 0$ en Ω pues $-\Delta_{p(x)} v = M \geq 0$ en Ω y $v = 0$ en $\partial\Omega$.

6.3. Propiedad de monotonía respecto del dominio.

En esta sección extendemos para p variable los resultados dados en [12] para $p = 2$.

Lema 6.7. *Sean $v \in W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ y $w \in W_0^{1,p(x)}(D)$ tales que $|v| \leq w$ ctp D. Entonces, $v \in W_0^{1,p(x)}(D)$.*

Demostración. Basta ver que $v^+ \in W_0^{1,p(x)}(D)$ (para v^- se prodece análogamente y una vez probado el resultado para v^+ y v^-, sabemos que vale para $v = v^+ - v^-$).

Como $w \geq 0$, por el Lema 3.9 podemos considerar $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(D)^+$ tal que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a w en $W^{1,p(x)}(D)$.

Por lo tanto, $\inf\{w_n, v^+\}$, que tiene soporte compacto en D (pues cada w_n lo tiene) converge a $\inf\{w, v^+\}$ que coincide con v^+ ya que, por hipótesis, $|v| \leq w$ ctp D.

Luego, tomando una sucesión regularizante adecuada, obtenemos una sucesión de $C_c^\infty(D)$ convergente a v^+, como queríamos probar. □

Proposición 6.8 (Propiedad de monotonía respecto del dominio.)**.** *Sean $\Omega_1 \subset \Omega_2$ y $f \geq 0$. Entonces, $u_{\Omega_1}^f \leq u_{\Omega_2}^f$.*

Demostración. Para facilitar la notación llamaremos $u_1 = u_{\Omega_1}^f$ y $u_2 = u_{\Omega_2}^f$.

Sabemos que, dado $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_1)$,

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u_1(x)|^{p(x)-2} \nabla u_1(x) \nabla v(x)\, dx = \int_{\Omega_1} f(x) v(x)\, dx \tag{6.2}$$

y, dado, $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_2)$,

$$\int_{\Omega_2} |\nabla u_2(x)|^{p(x)-2} \nabla u_2(x) \nabla v(x)\, dx = \int_{\Omega_2} f(x) v(x)\, dx.$$

Dado $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_1)$, como $\Omega_1 \subset \Omega_2$, extendiendo por 0 resulta que $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_2)$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} |\nabla u_2(x)|^{p(x)-2}\nabla u_2(x)\nabla v(x)\,dx &= \int_{\Omega_2} |\nabla u_2(x)|^{p(x)-2}\nabla u_2(x)\nabla v(x)\,dx \\ &= \int_{\Omega_2} f(x)v(x)\,dx \\ &= \int_{\Omega_1} f(x)v(x)\,dx.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Restando (6.2) con (6.3), obtenemos que, dado $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_1)$,

$$\int_{\Omega_1} (|\nabla u_1(x)|^{p(x)-2}\nabla u_1(x) - |\nabla u_2(x)|^{p(x)-2}\nabla u_2(x))\nabla v(x)\,dx = 0.$$

Como $f \geq 0$, tenemos que $u_2 \geq 0$. Luego, $(u_1 - u_2)^+ \leq u_1^+ \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_1)$ y por lo tanto, por el Lema 6.7, $(u_1 - u_2)^+ \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_1)$. Por lo tanto

$$\int_{\Omega_1} (|\nabla u_1(x)|^{p(x)-2}\nabla u_1(x) - |\nabla u_2(x)|^{p(x)-2}\nabla u_2(x))\nabla(u_1(x) - u_2(x))^+dx = 0.$$

Por otro lado, por el Lema 6.13, existe una constante $c > 0$ tal que

$$0 = \int_{\{u_1 \geq u_2\}\cap\Omega_1} (|\nabla u_1(x)|^{p(x)-2}\nabla u_1(x) - |\nabla u_2(x)|^{p(x)-2}\nabla u_2(x))(\nabla u_1(x) - \nabla u_2(x))\,dx \geq$$

$$\geq \begin{cases} c\displaystyle\int_{\{u_1 \geq u_2\}\cap\Omega_1} |\nabla u(x) - \nabla v(x)|^{p(x)}dx & \text{si } p(x) \geq 2, \\ c\displaystyle\int_{\{u_1 \geq u_2\}\cap\Omega_1} \frac{|\nabla u(x) - \nabla v(x)|^2}{(|\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|)^{2-p(x)}}dx & \text{si } p(x) \leq 2. \end{cases}$$

Por lo tanto, como$\nabla(u - v)^+ = (\nabla u - \nabla v)\chi_{u>v}$, concluimos que

$$0 \geq \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_1} |\nabla(u(x) - v(x))^+|^{p(x)}dx & \text{si } p(x) \geq 2, \\ \displaystyle\int_{\Omega_1} \frac{|\nabla(u(x) - v(x))^+|^2}{(|\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|)^{2-p(x)}}dx & \text{si } p(x) \leq 2. \end{cases}$$

Luego, $\nabla(u_1 - u_2)^+ = 0$ en Ω_1. Así, $(u_1 - u_2)^+$ es constante en Ω_1. Pero como $(u_1 - u_2)^+ \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_1)$, tenemos que $(u_1 - u_2)^+ = 0$. Resulta entonces que $u_1 - u_2 \leq 0$, como queríamos probar. □

6.4. Teorema de independencia respecto del segundo miembro.

En esta sección extendemos para p variable los resultados dados en [12] para $p = 2$. El principal obstáculo que se presentó en el desarrollo de esta extensión fue la pérdida de la linealidad de la solución.

Proposición 6.9. *Sea $D \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado tal que $\Omega_n, \Omega \subset D$ para todo n. Sea $p \in P(\Omega)$. Entonces, $\{u_n^f\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta acotada en la norma de $W_0^{1,p(x)}(D)$.*

Demostración. Notemos que, como $u_n^f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_n)$, tenemos que

$$\left\|u_n^f\right\|_{W^{1,p(x)}(\Omega_n)} = \left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)}.$$

Por otra parte, como el soporte de u_n^f está incluido en $\Omega_n \subset D$, resulta

$$\left\|u_n^f\right\|_{W_0^{1,p(x)}(D)} = \left\|u_n^f\right\|_{W^{1,p(x)}(D)} = \left\|u_n^f\right\|_{W^{1,p(x)}(\Omega_n)}.$$

Luego, basta acotar la sucesión $\left\{\left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Para cada n, si $\left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)} \le 1$, no hay nada que probar. Supongamos $\left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)} > 1$.

Como u_n^f es solución, sabemos que $u_n^f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_n)$ y dado $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_n)$, tenemos

$$\int_{\Omega_n} \left|\nabla u_n^f(x)\right|^{p(x)-2} \nabla u_n^f(x) \nabla v(x)\, dx = \int_{\Omega_n} f(x)v(x)\, dx.$$

En particular, para $v = u_n^f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_n)$, resulta

$$\rho_{p(x)}(\nabla u_n^f) = \int_{\Omega_n} \left|\nabla u_n^f(x)\right|^{p(x)} dx = \int_{\Omega_n} f(x)u_n^f(x)\, dx.$$

Aplicando la Proposición 2.12 y luego el Teorema 2.40, obtenemos

$$\rho_{p(x)}(\nabla u_n^f) \le c_{p'} \|f\|_{L^{p'(x)}(\Omega_n)} \left\|u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)} \le c_{p'} \|f\|_{L^{p'(x)}(D)}\, c \left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)}.$$

Como $\left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)} > 1$, por la Proposición 2.7, sabemos que $\left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)}^{p_-} \le \rho_{p(x)}(\nabla u_n^f)$.

Por lo tanto,

$$\left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)}^{p_-} \le c_{p'} \|f\|_{L^{p'(x)}(D)}\, c \left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)}.$$

Concluimos entonces que

$$\left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)}^{p_- -1} \le c_{p'} \|f\|_{L^{p'(x)}(D)}.$$

y, en consecuencia,

$$\left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)} \le c_{p'}^{\frac{1}{p_- -1}} \|f\|_{L^{p'(x)}(D)}^{\frac{1}{p_- -1}}.$$

Concluimos así que la sucesión $\left\{\left\|\nabla u_n^f\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por una constante que depende solamente de f y D, como queríamos probar. □

Teorema 6.10 (Teorema de Independencia.)**.** *Sean $\Omega_n, \Omega \subset D$ abiertos tales que $u^1_{\Omega_n} \to u^1_\Omega$ en $L^{p'(x)}(D)$. Entonces $u^f_{\Omega_n} \rightharpoonup u^f_\Omega$ en $W^{1,p(x)}_0(D)$ para todo $f \in W^{-1,p'(x)}(D)$.*

Demostración. Supongamos primero que $f \in L^\infty(D)$. Luego, existe una constante $M > 0$ tal que $-M \leq f \leq M$ ctp. Podemos asumir que $M > 1$ (sino, consideramos un M aún más grande).

Una vez más, para facilitar la notación, llamaremos $u^f_n = u^f_{\Omega_n}$ y $u^f = u^f_\Omega$.

Sea $k > 1$, como u^1_n es solución de la ecuación con $f \equiv 1$, sabemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(ku^1_n(x))|^{p(x)-2}\nabla(ku^1_n(x))\nabla\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega k^{p(x)-1}|\nabla u^1_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u^1_n(x)\nabla\varphi(x)\,dx \\ &\geq k^{p_- -1}\int_\Omega |\nabla u^1_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u^1_n(x)\nabla\varphi(x)\,dx \\ &= k^{p_- -1}\int_\Omega \varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto, ku^1_n resulta supersolución: $-\Delta_{p(x)}(ku^1_n) \geq k^{p_- -1}$ para todo $k > 1$.

Considerando $k = M^{\frac{1}{p_- -1}}$, tenemos que $f \leq M = k^{p_- -1} \leq -\Delta_{p(x)}(ku^1_n)$. Como además $0 = u^f_n|_{\partial D} \leq ku^1_n|_{\partial D} = 0$, por la Proposición 6.8, resulta $u^f_n \leq ku^1_n$.

Por otro lado, como $-\Delta_{p(x)}(-ku^1_n) = \Delta_{p(x)}(ku^1_n) \leq -k^{p_- -1} = -M \leq f$, obtenemos $-ku^1_n \leq u^f_n$.

Concluimos entonces que

$$-ku^1_n \leq u^f_n \leq ku^1_n. \tag{6.4}$$

Por la Proposición 6.9, $\{u^f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en la norma de $W^{1,p(x)}_0(D)$, que es Banach reflexivo. Por lo tanto, por el Teorema de Alaoglu, existe una subsucesión, que volvemos a notar $\{u^f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u^f_n \rightharpoonup u^*$ en $W^{1,p(x)}_0(D)$.

Como, por el Teorema 2.37, sabemos que $W^{1,p(x)}_0(D)$ está compactamente incluido en $L^{p'(x)}(D)$, tenemos que $u^f_n \to u^*$ en $L^{p'(x)}(D)$.

Luego, tomando límite para la convergencia en $L^{p'(x)}(D)$ en (6.4), resulta

$$-ku^1 \leq u^* \leq ku^1.$$

Por lo tanto, $|u^*| \leq ku^1$ y, como $u^1 \in W^{1,p(x)}_0(\Omega)$ por ser solución, por el Lema 6.7, concluimos que $u^* \in W^{1,p(x)}_0(\Omega)$.

Supongamos ahora que $f \in W^{-1,p'(x)}(D)$. Por la Proposición 3.10, existe $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $L^\infty(D)$ tal que $f_j \to f$ en $W^{-1,p'(x)}(D)$. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe j_0 tal que $\left\|f - f_j\right\|_{-1,p'(x)} < \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$.

Sea $\varphi \in W^{-1,p'(x)}(D)$,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \varphi(x)(u^f_n(x) - u^f(x))\,dx \\ &= \int_\Omega \varphi(x)(u^f_n(x) - u^{f_{j_0}}_n(x))\,dx + \int_\Omega \varphi(x)(u^{f_{j_0}}_n(x) - u^{f_{j_0}}(x))\,dx + \int_\Omega \varphi(x)(u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))\,dx.\end{aligned}$$

Por lo visto en la primera parte de la demostración, el segundo término de la igualdad tiende a 0 cuando n tiende a ∞. Estudiemos ahora los otros dos términos.

Como $-\Delta_{p(x)} u_{j_0} = f_{j_0}$,

$$\int_\Omega |\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)-2} \nabla u^{f_{j_0}}(x) \nabla \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f_{j_0}(x)\varphi(x)\, dx. \tag{6.5}$$

Como $-\Delta_{p(x)} u = f$,

$$\int_\Omega |\nabla u^f(x)|^{p(x)-2} \nabla u^f(x) \nabla \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx. \tag{6.6}$$

Notemos que, por densidad, ambas afirmaciones valen también para todo $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

En particular, considerando $\varphi = u^{f_{j_0}} - u^f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ y restando (6.5) y (6.6), obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)-2} \nabla u^{f_{j_0}}(x) \nabla (u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x)) - |\nabla u^f(x)|^{p(x)-2} \nabla u^f(x) \nabla (u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))\, dx$$

$$= \int_\Omega (f_{j_0}(x) - f(x))(u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))\, dx \le \left\| f - f_{j_0} \right\|_{(W_0^{1,p(x)}(D))'} \left\| u^{f_{j_0}} - u^f \right\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} \le$$

$$\le \left\| f - f_{j_0} \right\|_{(W_0^{1,p(x)}(D))'} (\left\| u^{f_{j_0}} \right\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} + \left\| u^f \right\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)}).$$

Notemos que, por ser soluciones, $\left\| u^{f_{j_0}} \right\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} + \left\| u^f \right\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)}$ está acotado. Tenemos entonces que

$$\int_\Omega |\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)-2} \nabla u^{f_{j_0}}(x) \nabla (u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x)) - |\nabla u^f(x)|^{p(x)-2} \nabla u^f(x) \nabla (u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))\, dx$$

$$\le C \left\| f - f_{j_0} \right\|_{(W_0^{1,p(x)}(D))'}.$$

Por otro lado, llamando $\Omega_1 = \Omega \cap \{p(x) \ge 2\}$ y $\Omega_2 = \Omega \cap \{p(x) < 2\}$, podemos escribir

$$\int_\Omega (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)-2} \nabla u^{f_{j_0}}(x) - |\nabla u^f(x)|^{p(x)-2} \nabla u^f(x))(\nabla u^{f_{j_0}}(x) - \nabla u^f(x))\, dx =$$

$$= \int_{\Omega_1} (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)-2} \nabla u^{f_{j_0}}(x) - |\nabla u^f(x)|^{p(x)-2} \nabla u^f(x))(\nabla u^{f_{j_0}}(x) - \nabla u^f(x))\, dx$$

$$+ \int_{\Omega_2} (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)-2} \nabla u^{f_{j_0}}(x) - |\nabla u^f(x)|^{p(x)-2} \nabla u^f(x))(\nabla u^{f_{j_0}}(x) - \nabla u^f(x))\, dx.$$

Estudiemos cada una de estas dos integrales por separado. Por el Lema 6.13,

$$\int_{\Omega_1} (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)-2} \nabla u^{f_{j_0}}(x) - |\nabla u^f(x)|^{p(x)-2} \nabla u^f(x))(\nabla u^{f_{j_0}}(x) - \nabla u^f(x))\, dx$$

$$\ge c \int_{\Omega_1} |\nabla (u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))|^{p(x)} dx = c\rho_{L^{p(x)}(\Omega_1)}(\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)).$$

Analicemos ahora la integral sobre Ω_2.

$$\rho_{L^{p(x)}(\Omega_2)}(\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)) = \int_{\Omega_2} |\nabla(u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))|^{p(x)} dx$$

$$= \int_{\Omega_2} (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{(\frac{2-p(x)}{2}).p(x)} \Big(\frac{|\nabla(u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))|}{(|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{(\frac{2-p(x)}{2})}} \Big)^{p(x)} dx$$

$$\leq 2 \Big\| (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{(\frac{2-p(x)}{2}).p(x)} \Big\|_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}(\Omega_2)} \Big\| \Big(\frac{|\nabla(u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))|}{(|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{(\frac{2-p(x)}{2})}} \Big)^{p(x)} \Big\|_{L^{\frac{2}{p(x)}}(\Omega_2)}$$

$$\leq 2(\rho_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}(\Omega_2)}((|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{(\frac{2-p(x)}{2}).p(x)}))^{\alpha} \Big(\rho_{L^{\frac{2}{p(x)}}(\Omega_2)} \Big(\Big(\frac{|\nabla(u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))|}{(|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{(\frac{2-p(x)}{2})}} \Big)^{p(x)} \Big) \Big)^{\beta}$$

$$= 2 \Big(\int_{\Omega_2} (((|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{(\frac{2-p(x)}{2}).p(x)}))^{\frac{2}{2-p(x)}} \Big)^{\alpha} \Big(\int_{\Omega_2} \Big(\Big(\frac{|\nabla(u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))|}{(|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{(\frac{2-p(x)}{2})}} \Big)^{p(x)} \Big)^{\frac{2}{p(x)}} \Big)^{\beta}$$

$$= 2 \Big(\int_{\Omega_2} (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{p(x)} dx \Big)^{\alpha} \Big(\int_{\Omega_2} \frac{|\nabla(u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))|^2}{(|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{2-p(x)}} dx \Big)^{\beta}.$$

para ciertas constantes α y β. Notemos que, para la primera desigualdad, tuvimos en cuenta la Proposición 2.12, y, para la segunda, la Observación 2.10.

Acotemos ahora el primer factor.

$$\begin{aligned} 2 \Big(\int_{\Omega_2} (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{p(x)} dx \Big)^{\alpha} &\leq 2 \Big(\int_{\Omega_2} 2^{p(x)} (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)} + |\nabla u^f(x)|^{p(x)}) dx \Big)^{\alpha} \\ &\leq 2 2^{\alpha p_+} \Big(\int_{\Omega} |\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u^f(x)|^{p(x)}) dx \Big)^{\alpha} \\ &= 2^{\alpha p_+ + 1} (\rho_{L^{p(x)}(\Omega)}(\nabla u^{f_{j_0}}) + \rho_{L^{p(x)}(\Omega)}(\nabla u^f))^{\alpha}. \end{aligned}$$

Como $u^{f_{j_0}}, u^f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, sabemos que sus normas correspondientes son finitas y por lo tanto, por la Proposición 2.7, resulta $2^{\alpha p_+ + 1} (\rho_{L^{p(x)}(\Omega)}(\nabla u^{f_{j_0}}) + \rho_{L^{p(x)}(\Omega)}(\nabla u^f))^{\alpha} \leq M$.

Notemos ahora que, gracias al Lema 6.13, podemos acotar el segundo término del siguiente modo:

$$\Big(\int_{\Omega_2} \frac{|\nabla(u^{f_{j_0}}(x) - u^f(x))|^2}{(|\nabla u^{f_{j_0}}(x)| + |\nabla u^f(x)|)^{2-p(x)}} dx \Big)^{\beta} \leq$$

$$\leq C \Big(\int_{\Omega_2} (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)-2} \nabla u^{f_{j_0}}(x) - |\nabla u^f(x)|^{p(x)-2} \nabla u^f(x))(\nabla u^{f_{j_0}}(x) - \nabla u^f(x)) \, dx \Big)^{\beta}.$$

Luego,

$$\frac{1}{CM} \rho_{L^{p(x)}(\Omega_2)}(\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)) \leq$$

$$\leq \Big(\int_{\Omega_2} (|\nabla u^{f_{j_0}}(x)|^{p(x)-2} \nabla u^{f_{j_0}}(x) - |\nabla u^f(x)|^{p(x)-2} \nabla u^f(x))(\nabla u^{f_{j_0}}(x) - \nabla u^f(x)) \, dx \Big)^{\beta}.$$

Concluimos así que

$$c_1\rho_{L^{p(x)}(\Omega_1)}(\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)) + c_2(\rho_{L^{p(x)}(\Omega_2)}(\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)))^{\frac{1}{\beta}} \leq \left\| f - f_{j_0} \right\|_{-1,p'(x)} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\rho_{L^{p(x)}(\Omega)}(\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)) = \rho_{L^{p(x)}(\Omega_1)}(\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)) + \rho_{L^{p(x)}(\Omega_2)}(\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)) < c_3(\varepsilon + \varepsilon^{\beta}).$$

Por otro lado, por el Teorema 2.40,

$$\begin{aligned}\rho_{L^{p(x)}(\Omega)}(\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)) &\geq \text{mín}\{\left\|\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)\right\|^{p_+}_{L^{p(x)}(\Omega)}, \left\|\nabla(u^{f_{j_0}} - u^f)\right\|^{p_-}_{L^{p(x)}(\Omega)}\} \\ &\geq \tilde{c}\,\text{mín}\{\left\|u^{f_{j_0}} - u^f\right\|^{p_+}_{L^{p(x)}(\Omega)}, \left\|u^{f_{j_0}} - u^f\right\|^{p_-}_{L^{p(x)}(\Omega)}\}.\end{aligned}$$

Finalmente existe algún r tal que para todo $\varepsilon > 0$ vale que

$$\left\|u^{f_{j_0}} - u^f\right\|^{r}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq c_5(\varepsilon + \varepsilon^{\beta}).$$

Notemos que, gracias a la Proposición 6.9, se puede obtener el resultado para $\left\|u_n^f - u_n^{f_{j_0}}\right\|_{p(x)}$.

Luego, al primer término, que por la Proposición 2.12 podemos acotar por $2\,\|\varphi\|_{p'(x)} \left\|u_n^f - u_n^{f_{j_0}}\right\|_{p(x)}$ y al tercero, al que podemos acotar por $2\,\|\varphi\|_{p'(x)} \left\|u^f - u^{f_{j_0}}\right\|_{p(x)}$, los podemos hacer tan pequeños como se quiera, quedando así demostrado el resultado. □

6.5. Continuidad del Problema de Dirichlet para el $p(x)-$laplaciano con respecto a perturbaciones en el dominio.

El objetivo de esta sección será estudiar si, asumiendo que Ω_n converge en algún sentido a Ω, podemos obtener alguna convergencia de $u^f_{\Omega_n}$ (que notaremos u_n) a u^f_{Ω} (que notaremos u).

Lema 6.11. *Sea $D \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado tal que $\Omega_n, \Omega \subset D$ para todo n. Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces, $\{|\nabla u_n|^{p(x)-2}\,\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^{p'(x)}(D)$.*

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}\int_D \left||\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\,\nabla u_n(x)\right|^{p'(x)} dx &= \int_D |\nabla u_n(x)|^{(p(x)-1)p'(x)}\,dx \\ &= \int_D |\nabla u_n(x)|^{p(x)}\,dx \\ &= \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(D)} \\ &\leq \|u_n\|_{W^{1,p(x)}(D)}.\end{aligned}$$

Y esta norma resulta acotada por la Proposición 6.9. □

Presentamos a continuación dos lemas que resultarán de gran utilidad. Si bien el primero de ellos puede refinarse, como mostraremos en el Lema 6.13(Ver página 210 de [20]), su prueba es más sencilla y para la mayoría de las aplicaciones es suficiente.

Lema 6.12. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^N$. Entonces,*

$$(|a|^{p-2}\, a - |b|^{p-2}\, b)(a - b) \geq 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(|a|^{p-2}\, a - |b|^{p-2}\, b)(a - b) &= |a|^p - |b|^{p-2}ab - |a|^{p-2}ab + |b|^p \\ &\geq |a|^p - |b|^{p-1}|a| - |a|^{p-1}|b| + |b|^p \\ &= (|a|^{p-1} - |b|^{p-1})(|a| - |b|).\end{aligned}$$

Basta entonces notar que si $|a| \geq |b|$, ambos factores son positivos. Y si $|a| \leq |b|$, ambos son negativos. □

Lema 6.13. *Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en $\mathbb{R}^N$. Entonces, existe una constante $c_1 > 0$ tal que para todo $t, t' \in \mathbb{R}^N$ vale la siguiente desigualdad:*

$$\langle |t'|^{p-2}t' - |t|^{p-2}t, t' - t\rangle \geq \begin{cases} c_1|t' - t|^p & si\ p \geq 2, \\ c_1 \frac{|t'-t|^2}{(|t'|+|t|)^{2-p}} & si\ p \leq 2. \end{cases}$$

Demostración. Por homogeneidad y simetría, podemos suponer $|t'| = 1$ y $|t| \leq 1$. Elegimos un sistema de coordenadas tales que $t' = (1, 0, ..., 0)$ y $t = (t_1, t_2, 0, ..., 0)$.

Estudiemos el caso $p \leq 2$ (si $p \geq 2$, la demostración es análoga). Notemos que

$$\begin{aligned}\langle |t'|^{p-2}t' - |t|^{p-2}t, t' - t\rangle &= \langle (1 - t_1(\sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{p-2}, -t_2(\sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{p-2}, 0, ..., 0), (1 - t_1, -t_2, 0..., 0)\rangle \\ &= (1 - t_1)(1 - t_1(\sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{p-2}) + t_2^2(\sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{p-2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la desigualdad que deseamos probar es equivalente a

$$(1 - t_1)(1 - t_1(\sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{p-2}) + t_2^2(\sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{p-2} \geq c_1 t \frac{|t' - t|^2}{(|t'| + |t|)^{2-p}} = c_1 t \frac{(1 - t_1)^2 + t_2^2}{(1 + \sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{2-p}}.$$

Veamos entonces que para todo $t = (t_1, t_2) \neq (1, 0)$ tal que $t_1^2 + t_2^2 \leq 1$ vale la siguiente desigualdad:

$$\Big[\Big(1 - \frac{t_1}{(\sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{2-p}}\Big)(1 - t_1) + \frac{t_2^2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{2-p}}\Big]\frac{(1 + \sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{2-p}}{(1 - t_1)^2 + t_2^2} \geq c_1$$

Como estamos bajo la hipótesis $p \leq 2$, podemos afirmar que

$$1 - \frac{t_1}{(\sqrt{t_1^2 + t_2^2})^{2-p}} \geq \begin{cases} 1 - \frac{t_1}{|t_1|^{2-p}} \geq (p - 1)(1 - t_1) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1, \\ 1 - t_1 \geq (p - 1)(1 - t_1) & \text{si } t_1 \leq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, como $\frac{1}{(\sqrt{t_1^2+t_2^2})^{2-p}} \geq 1 \geq p-1$ y $(1+\sqrt{t_1^2+t_2^2})^{2-p} \geq 1$, resulta

$$\Big[\Big(1-\frac{t_1}{(\sqrt{t_1^2+t_2^2})^{2-p}}\Big)(1-t_1)+\frac{t_2^2}{\sqrt{t_1^2+t_2^2})^{2-p}}\Big]\frac{(1+\sqrt{t_1^2+t_2^2})^{2-p}}{(1-t_1)^2+t_2^2} \geq p-1.$$

Concluimos así que basta tomar $c_1 = p-1$. □

Definición 6.14 (Convergencia en el sentido Hausdorff.)**.** Sea B una caja compacta de $\mathbb{R}^N$. Dados $K_1, K_2 \subset B$ compactos, definimos

$$d_H(K_1,K_2) = \text{máx}\{\sup_{x\in K_1}\inf_{y\in K_2}\|x-y\|, \sup_{x\in K_2}\inf_{y\in K_1}\|x-y\|\}.$$

Sean $\Omega_n, \Omega \subset B$ abiertos, decimos que Ω_n converge a Ω en el sentido de Hausdorff (y notamos $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$) si $d_H(B\setminus\Omega_n, B\setminus\Omega) \to 0$.

Proposición 6.15. *Sea $K \subset \Omega$ compacto. Si $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$, entonces $K \subset \Omega_n$ para todo $n \geq n_0$.*

Demostración. Como $K \subset \Omega$, sabemos que $0 < \inf_{x\in K} d(x, B\setminus\Omega)$. Notemos η a este valor positivo.

Sea $x \in K$, tomando $y \in B\setminus\Omega$ y $z \in B\setminus\Omega_n$, por la desigualdad triangular obtenemos

$$0 < \eta \leq d(x, B\setminus\Omega) \leq d(x, B\setminus\Omega_n) + d_H(B\setminus\Omega_n, B\setminus\Omega).$$

Como $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$, existe n_0 tal que $d_H(B\setminus\Omega_n, B\setminus\Omega) < \frac{\eta}{2}$ para todo $n \geq n_0$.

Luego, $d(x, B\setminus\Omega_n) \geq \frac{\eta}{2} > 0$ para todo $x \in K$ y para todo $n \geq n_0$. □

Para la demostración del siguiente teorema extenderemos a p variable la prueba de la Proposición 3.7 presentada en [2] para p constante.

Teorema 6.16. *Sea $u_n \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_n)$ para cada n solución de*

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u_n = f & en\ \Omega_n, \\ \quad\quad u_n = 0 & en\ \partial\Omega_n, \end{cases} \tag{6.7}$$

Supongamos además que $u_n \rightharpoonup u^*$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$. Sea $\Omega \subset D$ tal que para todo $K \subset \Omega$ compacto, existe n_0 tal que $K \subset \Omega_n$ para todo $n \geq n_0$. Entonces,

$$-\Delta_{p(x)}u^* = f \ en\ \Omega.$$

Demostración. Veamos primero que, dado $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, vale la siguiente igualdad:

$$\int_\Omega |\nabla u^*(x)|^{p(x)-2}\nabla u^*(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Como $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ es la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma de $W^{1,p(x)}(\Omega)$, basta ver que, dado $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u^*(x)|^{p(x)-2}\nabla u^*(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como $\mathrm{sop}(\varphi) \subset \Omega$ es compacto, existe n_0 tal que $\mathrm{sop}(\varphi) \subset \Omega_n$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_n)$ para todo $n \geq n_0$.

Llamemos $K = \mathrm{sop}(\varphi)$ y notemos $K^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x,K) < \varepsilon\}$ con ε suficientemente pequeño para asegurar que $K^\varepsilon \subset\subset \Omega_n \cap \Omega$ para todo $n \geq n_1$.

Trabajaremos desde ahora con $n \geq \max\{n_0, n_1\}$.

Sea $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\eta = 1$ en $K^{\frac{\varepsilon}{2}}$, $\eta = 0$ en $(K^\varepsilon)^c$ y $0 \leq \eta \leq 1$.

Consideremos $\phi_n = \eta(u_n - u^*)$.

Como u_n es solución para Ω_n, dado $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_n)$, tenemos

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)\nabla v(x)\,dx = \int_{\Omega_n} f(x)v(x)\,dx.$$

En particular esta igualdad vale para $\phi_n \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_n)$:

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)\nabla\phi_n(x)\,dx = \int_{\Omega_n} f(x)\phi_n(x)\,dx$$

Como $\mathrm{sop}(\nabla u_n) \subset \Omega_n \subset D$,

$$\int_D |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)\nabla\phi_n(x)\,dx = \int_{\Omega_n} f(x)\phi_n(x)\,dx.$$

Recordando que $\phi_n = \eta(u_n - u^*)$ obtenemos

$$\int_D |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)(\nabla\eta(x)(u_n(x)-u^*(x))+\eta(x)\nabla(u_n(x)-u^*(x)))\,dx = \int_{\Omega_n} f(x)\eta(x)(u_n(x)-u^*(x))\,dx.$$

Es decir, como $\eta \leq 1$,

$$\int_D |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)\nabla\eta(x)(u_n(x)-u^*(x))\,dx + \int_D |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)\eta(x)\nabla(u_n(x)-u^*(x))\,dx$$
$$\leq \int_D |f(x)||u_n(x)-u^*(x)|\,dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_D |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)\eta(x)\nabla(u_n(x)-u^*(x))\,dx$$
$$\leq \int_D |f(x)||u_n(x)-u^*(x)|\,dx - \int_D |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)\nabla\eta(x)(u_n(x)-u^*(x))\,dx.$$

Como $u_n \rightharpoonup u^*$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$, por la Proposición 6.9, sabemos que $u_n \to u^*$ en $L^{p(x)}(D)$. Luego, por la Proposición 2.12, sabemos que

$$\int_D |f(x)||u_n(x) - u^*(x)|\, dx \to 0$$

Por otro lado, como $u_n \to u^*$ en $L^{p(x)}(D)$, resulta

$$\int_D |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2} \nabla u_n(x) \nabla \eta(x)(u_n(x) - u^*(x))\, dx \to 0$$

Concluimos entonces que

$$\limsup \int_D |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2} \nabla u_n(x) \eta(x) \nabla(u_n(x) - u^*(x))\, dx \leq 0.$$

Como $\eta = 0$ en $(K^\varepsilon)^c$,

$$\limsup \int_{K^\varepsilon} |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2} \nabla u_n(x) \eta(x) \nabla(u_n(x) - u^*(x))\, dx \leq 0 \tag{6.8}$$

Por otra parte, como $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u^*$ en $L^{p'(x)}(K^\varepsilon)$,

$$\int_{K^\varepsilon} |\nabla u^*(x)|^{p(x)-2} \nabla u^*(x) \eta(x) \nabla(u_n(x) - u^*(x))\, dx \to 0 \tag{6.9}$$

De 6.8 y 6.9 concluimos

$$\limsup \int_{K^\varepsilon} (|\nabla u_n(x)|^{p(x)-2} \nabla u_n(x) - |\nabla u^*(x)|^{p(x)-2} \nabla u^*(x)) \eta(x) \nabla(u_n(x) - u^*(x))\, dx \leq 0.$$

Como $K^{\frac{\varepsilon}{2}} \subset K^\varepsilon$ y, por el Lema 6.12, resulta

$$0 \leq \limsup \int_{K^{\frac{\varepsilon}{2}}} (|\nabla u_n(x)|^{p(x)-2} \nabla u_n(x) - |\nabla u^*(x)|^{p(x)-2} \nabla u^*(x)) \eta(x) \nabla(u_n(x) - u^*(x))\, dx \leq 0.$$

Como $\eta = 1$ en $K^{\frac{\varepsilon}{2}}$,

$$\lim \int_{K^{\frac{\varepsilon}{2}}} (|\nabla u_n(x)|^{p(x)-2} \nabla u_n(x) - |\nabla u^*(x)|^{p(x)-2} \nabla u^*(x)) \nabla(u_n(x) - u^*(x))\, dx = 0.$$

Luego, $(|\nabla u_n(x)|^{p(x)-2} \nabla u_n(x) - |\nabla u^*(x)|^{p(x)-2} \nabla u^*(x)) \nabla(u_n(x) - u^*(x))$ tiende a 0 en $L^1(K^{\frac{\varepsilon}{2}})$ y, por lo tanto, tiende a 0 ctp $K^{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Observemos que dados $x_n, x \in \mathbb{R}^N$ y $p > 1$ tales que $(|x_n|^{p-2} x_n - |x|^{p-2} x)(x_n - x)$ tiende a 0, entonces x_n tiende a x. Así, en nuestro caso, $\nabla u_n \to \nabla u^*$ ctp $K^{\frac{\varepsilon}{2}}$. Luego,

$$|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \to |\nabla u^*|^{p(x)-2} \nabla u^* \ ctp\ K^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Por otro lado, por el Lema 6.11, $\{|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $L^{p'(x)}(D)$, y por lo tanto, en $L^{p'(x)}(K^{\frac{\varepsilon}{2}})$, que es Banach reflexivo. Por el Teorema de Alaoglu, $|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \rightharpoonup \xi$ en $L^{p'(x)}(K^{\frac{\varepsilon}{2}})$.

Concluimos así que $\xi = |\nabla u^*|^{p(x)-2}\nabla u^*$ en $K^{\frac{\varepsilon}{2}}$ y tenemos que

$$|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u^*|^{p(x)-2}\nabla u^* \; en \; L^{p'(x)}(K^{\frac{\varepsilon}{2}}).$$

Como $\text{sop}(\varphi) = K$, sabemos que $\text{sop}(\nabla\varphi) \subset K \subset K^{\frac{\varepsilon}{2}}$ y, por lo tanto, $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(K^{\frac{\varepsilon}{2}})$. Luego, podemos afirmar que

$$\int_{K^{\frac{\varepsilon}{2}}} |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)\,dx \to \int_{K^{\frac{\varepsilon}{2}}} |\nabla u^*(x)|^{p(x)-2}\nabla u^*(x)\nabla\varphi(x)\,dx.$$

Como $\text{sop}(\nabla\varphi) \subset K \subset K^{\frac{\varepsilon}{2}} \subset K^{\varepsilon} \subset \Omega_n \cap \Omega$,

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)\,dx \to \int_{\Omega} |\nabla u^*(x)|^{p(x)-2}\nabla u^*(x)\nabla\varphi(x)\,dx.$$

Como u_n es solución para Ω_n,

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega_n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

donde para la última igualdad tuvimos en cuenta que $\text{sop}(\varphi) \subset \Omega$.

Finalmente entonces

$$\int_{\Omega} |\nabla u^*(x)|^{p(x)-2}\nabla u^*(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Como $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ era arbitraria, la igualdad queda probada para toda $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Queda así demostrado el resultado. □

Para obtener el resultado de continuidad, será necesario por tanto garantizar que $u^* \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Para ello introduciremos una condición capacitaria.

Teorema 6.17. *Sean $D \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado tal que $\Omega_n, \Omega \subset D$ para todo n y $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$. Si Ω_n converge a Ω en el sentido de Hausdorff y $\text{cap}_{p(x)}(\Omega_n \setminus \Omega, D)$ tiende a cero, entonces existe una subsucesión de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge débil a u en $W_0^{1,p(x)}(D)$.*

Demostración. Por la Proposición 6.9, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en la norma de $W_0^{1,p(x)}(D)$, que es Banach reflexivo. Por lo tanto, por el Teorema de Alaoglu, existe una subsucesión que, para facilitar notación, volvemos a llamar $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_n \rightharpoonup u^*$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$.

Notemos que la convegencia de Ω_n a Ω en el sentido de Hausdorff asegura, gracias a la Proposición 6.15, que dado $K \subset \Omega$ compacto, existe n_0 tal que $K \subset \Omega_n$ para todo $n \geq n_0$.

Por lo tanto, por el Teorema 6.16, si logramos probar que $u^* \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, por unicidad de solución, habremos demostrado que $u^* = u$. Por el Teorema 5.24, para ver que $u^* \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, es suficiente asegurar que $u^* \in W_0^{1,p(x)}(D)$ y que $\tilde{u^*} = 0$ $p(x)$−ctp Ω^c. La primera condición es consecuencia inmediata de la convergencia $u_n \rightharpoonup u^*$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$. Veamos que también se cumple la segunda condición.

Como $u^* \in W_0^{1,p(x)}(D)$ y $\Omega \subset D$, sabemos que $u^* \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Luego, por la Proposición 5.8, existe $\tilde{u^*} \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ $p(x)-$cuasicontinua tal que $\tilde{u^*} = u^*$ ctp.

Consideramos $\tilde{\Omega}_j = \cup_{n\geq j}\Omega_n$ y $E = \cap_{j\geq 1}\tilde{\Omega}_j$.

Como $u_n \rightharpoonup u^*$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$ que es Banach, por el Lema de Mazur, existe $v_j = \sum_{n=j}^{k_j} a_{n_j}u_n$ tal que $a_{n_j} \geq 0$, $\sum_{n=j}^{k_j} a_{n_j} = 1$ y $v_j \to u^*$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$.

Como $u_n \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_n)$, por la Proposición 5.9, $\tilde{u}_n = 0$ $p(x)-$ctp Ω_n^c.

Luego, $\tilde{v_j} = \sum_{n=j}^{k_j} a_{n_j}\tilde{u}_n = 0$ $p(x)-$ctp $\cap_{n=j}^{k_j}\Omega_n^c \supset \tilde{\Omega}_j^{\,c}$ para todo $j \geq 1$. Por lo tanto, $\tilde{v_j} = 0$ $p(x)-$ctp $\tilde{\Omega}_j^{\,c}$ para todo $j \geq 1$. Como consecuencia, $\tilde{v_j} = 0$ $p(x)-$ctp $\cup_{j\geq 1}\tilde{\Omega}_j^{\,c} = E^c$.

Por otra parte, como $v_j \to u^*$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$, por la Proposición 5.11 $\tilde{v_{j_k}} \to \tilde{u^*}$ $p(x)-$ctp. Concluimos así que $\tilde{u^*} = 0$ $p(x)-$ctp E^c.

Como $\text{cap}_{p(x)}(\Omega_n \setminus \Omega, D)$ tiende a cero, pasando por una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $\text{cap}_{p(x)}(\Omega_n \setminus \Omega, D) \leq \frac{1}{2^n}$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\text{cap}_{p(x)}(\tilde{\Omega}_j \setminus \Omega, D) &= \text{cap}_{p(x)}(\cup_{n\geq j}\Omega_n \setminus \Omega, D) \\
&\leq \sum_{n\geq j} \text{cap}_{p(x)}(\Omega_n \setminus \Omega, D) \\
&\leq \sum_{n\geq j} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{j-1}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $E \subset \tilde{\Omega}_j$, resulta que $E \setminus \Omega \subset \tilde{\Omega}_j \setminus \Omega$ para todo $j \geq 1$.

Por lo tanto,

$$\text{cap}_{p(x)}(E \setminus \Omega, D) \leq \text{cap}_{p(x)}(\tilde{\Omega}_j \setminus \Omega, D) \leq \frac{1}{2^{j-1}} \text{ para todo } j \geq 1.$$

Haciendo tender j a ∞, obtenemos que $\text{cap}_{p(x)}(E \setminus \Omega, D) = \text{cap}_{p(x)}(\Omega^c \setminus E^c, D) = 0$. Concluimos así que $\tilde{u^*} = 0$ $p(x)-$ctp Ω^c, como queríamos probar. □

Corolario 6.18. *Sea $D \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado tal que $\Omega_n, \Omega \subset D$ para todo n. Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$. Si Ω_n converge a Ω en el sentido de Hausdorff y $\text{cap}_{p(x)}(\Omega_n \setminus \Omega, D)$ tiende a cero, entonces $u_n \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$.*

Demostración. Sea $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Aplicando el Teorema 6.17 a $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, sabemos que existe una subsucesón $\{u_{n_{j_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_{j_k}} \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$.

Por lo tanto, como toda subsucesión de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene a su vez una subsucesión convergente débil a u en $W_0^{1,p(x)}(D)$, podemos concluir que $u_n \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$, como queríamos probar. □

El resultado del corolario anterior no vale en general, sin pedir ninguna hipótesis extra (en nuestro caso, la capacitaria). Un contraejemplo famoso de este hecho se debe a Murat-Cionanescu (Ver [12, Sección 3.2.6, página 80]).

Capítulo 7

Extensión de un Teorema de Šverák.

Estudiaremos ahora la extensión para dimensión arbitraria N y $p \in (N-1, N]$ del resultado de continuidad dado por Šverák para el caso bidimensional lineal. La razón de esta elección de p se debe a que en $\mathbb{R}^N$ las curvas tienen $p-$capacidad positiva si $p > N-1$ (Ver [5, Proposición 4.7.2, página 156]). El caso $p > N$ es trivial ya que en ese caso las funciones de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ son continuas.

Observación 7.1. Si $p > N$, $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$ implica que para toda $f \in W^{-1,p'}(D)$ vale que $u^f_{\Omega_n} \to u^f_\Omega$ en $W^{1,p}_0(D)$ (gracias a la inmersión $W^{1,p}_0(D) \subset C^\alpha(D)$ donde $\alpha = 1 - \frac{p}{N}$).

7.1. Estimaciones capacitarias.

Presentaremos los siguientes dos lemas guiados por [2].

Definición 7.2. Sea $N \geq 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ medible. Notaremos Ω' a la proyección de Ω sobre $\mathbb{R}^{N-1}$ dada por

$$\Omega' := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} \colon \text{ existe } x_N \text{ tal que } (x', x_N) \in \Omega\}.$$

Para $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, notaremos $\Omega(x')$ a la intersección de Ω con $\{x'\} \times \mathbb{R}$ dada por

$$\Omega(x') := \{x_N \in \mathbb{R} \colon (x', x_N) \in \Omega\}, \ x' \in \Omega'.$$

Se define la simetrización de Steiner de Ω relativa al hiperplano $x_N = 0$ como el conjunto

$$\Omega^* := \{x = (x', x_N) \colon -\frac{1}{2}|\Omega(x')| < x_N < \frac{1}{2}|\Omega(x')|, \ x' \in \Omega'\}.$$

Presentamos a continuación dos lemas que se verifican en el caso p constante.

Lema 7.3. *Notemos $[x, \xi]$ al segmento con extremos x y ξ, $r = |x - \xi|$. Sea $\gamma \colon [0,1] \to B(x, r)$ una curva continua tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = \xi \in \partial B(x, r)$. Entonces,*

$$\mathrm{cap}_p(\gamma([0,1]), B(x, 2r)) \geq \mathrm{cap}_p([x, \xi], B(x, 2r)).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, consideremos $\varphi \in C_c^\infty(B(x,2r),\mathbb{R}^+)$ tal que $\varphi \geq 1$ en un entorno U de $\gamma([0,1])$ y verifica

$$\int_{B(x,2r)} |\nabla\varphi(x)|^p dx \leq \operatorname{cap}_p(\gamma([0,1]), B(x,2r)) + \varepsilon.$$

Notemos φ^* a la simetrización de Steiner de φ con respecto a la recta que pasa por x y ξ. Luego, $\varphi^* \in W_0^{1,p}(B(x,2r))$, $\varphi^* \geq 1$ en $U^* \supset [x,\xi]$ y cumple

$$\int_{B(x,2r)} |\nabla\varphi^*(x)|^p dx \leq \int_{B(x,2r)} |\nabla\varphi(x)|^p dx.$$

Por otro lado, $\operatorname{cap}_p([x,\xi], B(x,2r)) \leq \int_{B(x,2r)} |\nabla\varphi^*(x)|^p dx$. En consecuencia, haciendo tender ε a 0, el resultado queda demostrado. □

Lema 7.4. *Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y conexo. Entonces, para todo $x \in K$ y $r < \frac{\operatorname{diam} K}{2}$, vale la siguiente desigualdad:*

$$\frac{\operatorname{cap}_p(K \cap \overline{B(x,r)}, B(x,2r))}{\operatorname{cap}_p(\overline{B(x,r)}, B(x,2r))} \geq \frac{\operatorname{cap}_p([0,1]\times\{0\}^{N-1}, B(0,2))}{\operatorname{cap}_p(\overline{B(0,1)}, B(0,2))}.$$

Demostración. Consideremos $x \in K$ y el conjunto $K^\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x,K) < \delta\}$.

Notemos que $\overline{K^\delta} \subset K^{\delta+\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego, gracias a la monotonía de la $p-$capacidad y su comportamiento con las sucesiones decrecientes de compactos, obtenemos que

$$\operatorname{cap}_p(K \cap \overline{B(x,r)}, B(x,2r)) = \lim_{\delta\to 0} \operatorname{cap}_p(K^\delta \cap \overline{B(x,r)}, B(x,2r)).$$

El conjunto K^δ es abierto, contiene a K y por tanto es arco conexo.

Como $r < \frac{\operatorname{diam} K}{2}$, sabemos que K^δ no está contenido en $\overline{B(x,r)}$ y, en consecuencia, existe $\xi \in \partial B(x,r) \cap K^\delta$ y una curva continua $\gamma\colon [0,1] \to \overline{B(x,r)} \cap K^\delta$ que une x con ξ.

Empleando el Lema 7.3, tenemos

$$\operatorname{cap}_p(\overline{B(x,r)} \cap K^\delta, B(x,2r)) \geq \operatorname{cap}_p(\overline{B(x,r)} \cap \gamma([0,1]), B(x,2r)) \geq \operatorname{cap}_p(\overline{B(x,r)} \cap [x,\xi], B(x,2r)).$$

Tomando límite en ambos lados de la desigualdad obtenida cuando δ tiende a 0, resulta

$$\operatorname{cap}_p(K \cap \overline{B(x,r)}, B(x,2r)) \geq \operatorname{cap}_p(\overline{B(x,r)} \cap [x,\xi], B(x,2r)).$$

Dividiendo a ambos lados por $\operatorname{cap}_p(\overline{B(x,r)}, B(x,2r))$,

$$\frac{\operatorname{cap}_p(K \cap \overline{B(x,r)}, B(x,2r))}{\operatorname{cap}_p(\overline{B(x,r)}, B(x,2r))} \geq \frac{\operatorname{cap}_p(\overline{B(x,r)} \cap [x,\xi], B(x,2r))}{\operatorname{cap}_p(\overline{B(x,r)}, B(x,2r))} = \frac{\operatorname{cap}_p([0,1]\times\{0\}^{N-1}, B(0,2))}{\operatorname{cap}_p(\overline{B(0,1)}, B(0,2))}.$$

donde para la última igualdad tuvimos en cuenta la homogeneidad de la $p-$capacidad y su invariancia por traslaciones y rotaciones. □

Definición 7.5. Una función $u \in W^{1,p(x)}(r,R)$ es un $p(x)-$minimizante para los valores de borde a y b si $u(r) = a$ y $u(R) = b$ y

$$\int_r^R |u'(y)|^{p(y)} dy \leq \int_r^R |v'(y)|^{p(y)} dy$$

para todo v tal que $u - v \in W_0^{1,p(x)}(r,R)$.

Los siguientes dos lemas pueden hallarse en [4, Lema 13.1.3, página 397] y [4, Proposición 10.2.10, página 322].

Lema 7.6. *Sea $p \in \mathcal{P}^(r,R)$ tal que $p > 1$ ctp. Si $u \in W^{1,p(x)}(r,R)$ es un $p(x)-$minimizante. Entonces, $p(x)(u'(x))^{p(x)-1}$ es constante ctp.*

Demostración. Supongamos que $p(x)(u'(x))^{p(x)-1}$ no es constante ctp. Sean $d_1 < d_2$ tales que

$$A_1 := \{x \in (r,R) \colon\ p(x)|u'(x)|^{p(x)-1} < d_1\},$$

$$A_2 := \{x \in (r,R) \colon\ p(x)|u'(x)|^{p(x)-1} > d_2\}$$

tienen medida positiva. Sean $A_1' \subset A_1$ y $A_2' \subset A_2$ tales que $|A_1'| = |A_2'| > 0$. Definimos $\xi := \chi_{A_1'} - \chi_{A_2'}$.

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Teniendo en cuenta que $||x+h|^p - |x|^p| \leq p||x+h| - |x||(|x+h|^{p-1} - |x|^{p-1})$ y $||u' + \varepsilon\xi| - |u'|| \leq \frac{c}{\varepsilon}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{|u'(x) + \varepsilon\xi(x)|^{p(x)} - |u'(x)|^{p(x)}}{\varepsilon}\right| \\
\leq\ & \frac{p(x)||u'(x) + \varepsilon\xi(x)| - |u'(x)||(|u'(x) + \varepsilon\xi(x)|^{p(x)-1} + |u'(x)|^{p(x)-1})}{\varepsilon} \\
&\leq c(|u'(x)|^{p(x)-1} + \varepsilon^{p(x)-1}) \leq c(|u'(x)|^{p(x)} + \varepsilon + 1).
\end{aligned}$$

Como $|u'|^{p(x)} \in L^1(r,R)$, por el Teorema de Convergencia Dominada,

$$\text{lím} \int_r^R \frac{|u'(x) + \varepsilon\xi(x)|^{p(x)} - |u'(x)|^{p(x)}}{\varepsilon} dx = \int_r^R p(x)|u'(x)|^{p(x)-1}\xi(x)\, dx \leq (d_1 - d_2)|A_1'| < 0.$$

Notemos que ξ es la derivada clásica de $v(x) := \int_r^x \chi_{A_1'}(y) - \chi_{A_2'}(y)\, dy$. Como v' es acotada y $v(r) = v(R) = 0$, resulta que $v \in W_0^{1,p(x)}(r,R)$, llegando así a un absurdo. □

Lema 7.7. *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(B(x,R))$. Si $\overline{B(x,r)} \subset B(x,R)$ y $p(x) \neq N$. Entonces, existe una constante c dependiente sólo de N, p y R tal que*

$$\text{cap}_{p(x)}(\overline{B(x,r)}, B(x,R)) \geq c\left|\frac{p(x)-1}{N-p(x)}\right|^{1-p(x)} \left|R^{\frac{p(x)-N}{p(x)-1}} - r^{\frac{p(x)-N}{p(x)-1}}\right|^{1-p(x)}.$$

Si $p(x) = N$, entonces $\text{cap}_{p(x)}(\overline{B(x,r)}, B(x,R)) \geq c\log(\frac{R}{r})^{1-N}$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$. Utilizaremos coordenadas esféricas $z = (\rho, \omega)$ tal que $|\omega| = 1$. Por la Proposición 4.13, tenemos que

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(\overline{B(0,r)}, B(0,R)) \geq \inf \int_{\partial B(0,1)} \int_r^R \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^{p(\rho)} \rho^{N-1} d\rho d\omega,$$

donde el ínfimo lo tomamos sobre todas las funciones Sobolev u continuas de soporte compacto en $B(0,R)$ que valgan 1 en $\overline{B(0,r)}$. Nos interesa entonces minimizar la integral

$$\int_r^R |\psi'(\rho)|^{p(\rho)} \rho^{N-1} d\rho$$

sobre las funciones $\psi \in W^{1,p(x)}(r,R)$ con $\psi(r) = 1$ y $\psi(R) = 0$. Supongamos que $\psi' \leq 0$.

Sea $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante. Por lo tanto, es acotada en $W^{1,p(x)}(r,R)$, que es reflexivo. Luego, existe una subsucesión, que seguiremos notando $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, que converge débil a $\psi \in W^{1,p(x)}(r,R)$. Por la semicontinuidad inferior del modular,

$$\int_r^R |\psi'(\rho)|^{p(\rho)} \rho^{N-1} d\rho \leq \lim \int_r^R |\psi_i'(\rho)|^{p(\rho)} \rho^{N-1} d\rho.$$

Por el Corolario 2.36, podemos considerar una sucesión $\{\Psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de combinaciones convexas de $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a ψ en $W^{1,p(x)}(r,R)$. Por lo tanto, $0 \leq \psi \leq 1$ y resulta

$$\int_r^R |\psi'(\rho)|^{p(\rho)} \rho^{N-1} d\rho \leq \lim \int_r^R |\Psi_i'(\rho)|^{p(\rho)} \rho^{N-1} d\rho.$$

Como cada Ψ_i es una combinación lineal, tenemos que $\int_r^R \Psi_i'(\rho) d\rho \geq 1$ y, en consecuencia, $\int_r^R \psi_i'(\rho) d\rho \geq 1$. Concluimos así que ψ es el minimizante.

Empleando $\rho^{N-1} d\rho$ como medida, por el Lema 7.6, obtenemos que $p(\rho)(\psi'(\rho))^{p(\rho)-1}$ es constante ctp. Luego, la derivada de cada minimizante radial es de la forma

$$\xi(\rho) := \Big(\frac{c}{p(\rho)}\Big)^{\frac{1}{p(\rho)-1}}$$

donde la constante c depende de la dirección.

Por otra parte, como $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ y $\int_r^R |\xi|\, d\rho = 1$, resulta

$$c \geq \min\Big\{1, \frac{1}{R^{p_+-1}}\Big\}.$$

Supongamos que esta cota inferior es la utilizada en la definición de ξ. Por la continuidad $log-$Hölder de p, resulta que $|\xi|^{p(\rho,\omega)} \geq c|\xi|^{p(0)}$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}_{p(x)}(\overline{B(0,r)}, B(0,R)) &\geq c \int_{\partial B(0,1)} \int_r^R |\xi(\rho)|^{p(0)} \rho^{N-1} d\rho d\omega \\ &\geq c \int_r^R |\xi(\rho)|^{p(0)} \rho^{N-1} d\rho d\omega. \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.12,

$$1 \leq \int_r^R |\xi|\, d\rho \leq \Big(\int_r^R |\xi|^{p(0)}\rho^{N-1} d\rho\Big)^{\frac{1}{p(0)}} \Big(\int_r^R \rho^{\frac{1-N}{p(0)-1}} d\rho\Big)^{\frac{1}{p'(0)}}.$$

Luego,

$$\Big(\int_r^R \rho^{\frac{1-N}{p(0)-1}} d\rho\Big)^{1-p(0)} \leq \int_r^R |\xi|^{p(0)}\rho^{N-1} d\rho.$$

Concluimos entonces que

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(\overline{B(0,r)}, B(0,R)) \geq c\Big(\int_r^R \rho^{\frac{1-N}{p(0)-1}} d\rho\Big)^{1-p(0)}.$$

Para concluir la prueba, basta notar que, si $p(0) \neq N$,

$$\int_r^R \rho^{\frac{1-N}{p(0)-1}} d\rho = \Big|\frac{p(0)-1}{p(0)-N}\Big|\Big|R^{\frac{p(0)-N}{p(0)-1}} - r^{\frac{p(0)-N}{p(0)-1}}\Big|$$

Y, si $p(0) = N$,

$$\int_r^R \rho^{\frac{1-N}{p(0)-1}} d\rho = \log\frac{R}{r}.$$

Queda así demostrado el resultado. □

Lema 7.8. *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(B(x,2r))$. Si $p(x) \leq N$ y $r \geq a$ para cierto a positivo. Entonces, existe una constante b independiente de r tal que*

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(\overline{B(x,r)}, B(x,2r)) \geq b.$$

Demostración. Emplearemos el Lema 7.7.

Si $p(x) \neq N$,

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(\overline{B(x,r)}, B(x,2r)) \geq c\Big|\frac{p(x)-1}{N-p(x)}\Big|^{1-p(x)}\Big|(2r)^{\frac{p(x)-N}{p(x)-1}} - r^{\frac{p(x)-N}{p(x)-1}}\Big|^{1-p(x)}.$$

Llamando $\xi(x) = \Big|\frac{p(x)-1}{N-p(x)}\Big|^{1-p(x)}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}_{p(x)}(\overline{B(x,r)}, B(x,2r)) &\geq c\xi(x)\Big|(2r)^{\frac{p(x)-N}{p(x)-1}} - r^{\frac{p(x)-N}{p(x)-1}}\Big|^{1-p(x)} \\
&= c\xi(x)\Big|r^{\frac{p(x)-N}{p(x)-1}}(2^{\frac{p(x)-N}{p(x)-1}} - 1)\Big|^{1-p(x)} \\
&= c\tilde{\xi}(x) r^{N-p(x)} \\
&\geq c\tilde{\xi}(x) a^{N-p(x)},
\end{aligned}$$

donde, para la última desigualdad tuvimos en cuenta que, como $p(x) \leq N$, la función $g(y) := y^{N-p(x)}$ resulta creciente en los positivos.

Si $p(x) = N$,

$$\operatorname{cap}_p(\overline{B(x,r)}, B(x,2r)) \geq -c\log 2.$$

Queda así probado el resultado. □

Observación 7.9. Por los Lemas 7.4 y 7.8, sean $p \in \mathcal{P}^{log}(B(x, 2r))$ tal que $p \leq N$ y $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y conexo, entonces para todo $x \in K$ y $a \leq r < \frac{\operatorname{diam} K}{2}$ para cierto a positivo, existe una constante universal k tal que

$$\operatorname{cap}_p(K \cap \overline{B(x, r)}, B(x, 2r)) \geq k.$$

Proposición 7.10. *Sea $p \in \mathcal{P}(D)$. Entonces,*

$$\operatorname{cap}_{p_-}(E, D) \leq C_{p_+,p_-}(\operatorname{cap}_{p(x)}(E, D))^{\beta_{p_+,p_-}}.$$

Demostración. Como en la demostración de la Proposición 2.42, tenemos que

$$\int_D |\nabla\varphi(x)|^{p_-} dx \leq C_{p_+,p_-}\Big(\int_D |\nabla\varphi(x)|^{p(x)}\Big)^{\beta_{p_+,p_-}}.$$

Por lo tanto,

$$\inf_{\varphi \in S_{p(x)}(E,D)} \int_D |\nabla\varphi(x)|^{p_-} dx \leq C_{p_+,p_-}\Big(\inf_{\varphi \in S_{p(x)}(E,D)} \int_D |\nabla\varphi(x)|^{p(x)}\Big)^{\beta_{p_+,p_-}}.$$

Por otra parte, como $W_0^{1,p(x)}(D) \subset W_0^{1,p_-}(D)$,

$$\inf_{\varphi \in S_{p_-}(E,D)} \int_D |\nabla\varphi(x)|^{p_-} dx \leq \inf_{\varphi \in S_{p(x)}(E,D)} \int_D |\nabla\varphi(x)|^{p_-} dx$$

Concluimos entonces que $\operatorname{cap}_{p_-}(E, D) \leq C_{p_+,p_-}(\operatorname{cap}_{p(x)}(E, D))^{\beta_{p_+,p_-}}$. □

Proposición 7.11. *Dados $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y conexo y $p \in \mathcal{P}^{log}(B(x, 2r))$ tal que $p_- \leq N$. Entonces, para todo $x \in K$ y $a \leq r < \frac{\operatorname{diam} K}{2}$ para cierto a positivo, vale que*

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(K \cap \overline{B(x, r)}, B(x, 2r)) \geq \tilde{C}_{p_+,p_-}.$$

Demostración. Por la Observación 7.9,

$$\operatorname{cap}_{p_-}(K \cap \overline{B(x, r)}, B(x, 2r)) \geq k.$$

Por la Proposición 7.10,

$$\operatorname{cap}_{p_-}(K \cap \overline{B(x, r)}, B(x, 2r)) \leq C_{p_+,p_-}(\operatorname{cap}_{p(x)}(K \cap \overline{B(x, r)}, B(x, 2r)))^{\beta_{p_+,p_-}}.$$

Concluimos entonces que

$$\operatorname{cap}_{p(x)}(K \cap \overline{B(x, r)}, B(x, 2r)) \geq \tilde{C}_{p_+,p_-},$$

como queríamos probar. □

Definición 7.12. Dados $l \in \mathbb{N}$ y $\Omega \subset D$, notamos $\#\Omega$ a la cantidad de componentes conexas de Ω^c.

Definimos $O_l(D) = \{\Omega \subset D \text{ abierto} : \#\Omega \leq l\}$.

En lo que sigue, vamos a precisar un resultado de continuidad uniforme con respecto a $\Omega \in \mathcal{O}_{\alpha,r_0}(D)$ para las soluciones de la ecuación

$$u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \qquad -\Delta_{p(x)} u = f \text{ in } \Omega,$$

con f suficientemente integrable.

Este resultado para $p(x) \equiv 2$ es clásico y puede encontrarse, por ejemplo, en [12, Lema 3.4.11 y Teorema 3.4.12, página 109]. El punto clave para su demostración consiste en obtener las llamadas *condiciones de Wiener*, ver [10].

La extensión para $1 < p < N$ constante fue hecha en los artículos [17, 9, 15]. Ver el libro [16], Teorema 4.22. El problema para $p(x)$ variable continúa abierto.

Enunciamos ahora, sin demostración, el teorema para p constante que usaremos en lo que sigue.

Lema 7.13. *Sean $\Omega \in \mathcal{O}_{\alpha,r_0}(D)$, $f \in L^r(D)$, $r > N$. Entonces, existen $M > 0$ y $0 < \delta < 1$ tal que $|u(x) - u(y)| \leq M|x-y|^\delta$ y $u(x) = 0$ para todo $x \notin \Omega$ donde $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ verifica $-\Delta_p u = f$ en Ω.*

Proposición 7.14. *Sea $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}_{\alpha,r_0}(D)$ tal que $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$. Entonces, $u^f_{\Omega_n} \rightharpoonup u^f_\Omega$ en $W_0^{1,p}(D)$.*

Demostración. Por el Teorema 6.10, podemos suponer que $f = 1$ y $u^1_{\Omega_n} \rightharpoonup u^*$ en $W_0^{1,p}(D)$.

Para ver que $u^* = u^1_\Omega$, por el Teorema 6.16, basta ver que $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Para ello, por el Teorema 5.24, es suficiente probar que $\tilde{u^*} = 0$ $p-$ctp Ω^c.

Notemos que, por la Observación 6.6, $u^1_D \geq 0$ y $u^1_{\Omega_n} \geq 0$.

Por el Lema 7.13, dado $y \in \partial D$, para todo $x \notin \Omega$ obtenemos que

$$u^1_D(x) = |u^1_D(x) - u^1_D(y)| \leq M|x-y|^\delta \leq M(\operatorname{diam} D)^\delta.$$

Por el Lema 6.4, resulta $0 \leq u^1_{\Omega_n} \leq u^1_D \leq M(\operatorname{diam} D)^\delta$. Luego, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equiacotada.

Además, por el Lema 7.13, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua. Por lo tanto, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a u^*.

Por otro lado, dado $x \in \Omega^c$, como $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$, existe $x_n \in \Omega_n^c$ tal que x_n tiende a x. Por la convergencia uniforme, tenemos que $u_n(x_n)$ tiende a $u^*(x)$. Como sop $u_n \subset \bar{\Omega}_n$, resulta $u_n(x_n) = 0$ para todo n y, en consecuencia, $u^*(x) = 0$, como queríamos probar. □

7.2. Extensión de un Teorema de Šverák.

Teorema 7.15. *Sean $p \in \mathcal{P}^{log}(D)$ tal que $N - 1 < p \leq N$ y $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}_l(D)$ tal que $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$. Entonces $u^f_{\Omega_n} \rightharpoonup u^f_\Omega$ en $W_0^{1,p}(D)$.*

Demostración. Por el Teorema 6.10, podemos suponer que $f = 1$ y $u_n = u^1_{\Omega_n} \rightharpoonup u^*$ en $W^{1,p}_0(D)$.

Para ver que $u^* = u^1_\Omega$, por el Teorema 6.16, basta ver que $u^* \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Podemos escribir $\bar{D} \setminus \Omega_n = F_n = F^1_n \cup F^2_n \cup ... \cup F^l_n$ donde los F^i_n son compactos y conexos. Supongamos además que $F^j_n \xrightarrow{H} F^j$ para todo $1 \leq j \leq l$.

Estudiemos las tres posibilidades. Veremos que podremos descartar las dos primeras.

1. Si $F^j = \emptyset$, entonces $F^j_n = \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.
   Llamamos $J_0 = \{j = 1, ..., l \colon F^j_n = \emptyset$ para j grande$\}$.
2. Si $F^j = \{x_j\}$, llamamos $J_1 = \{j = 1, ..., l \colon F^j = \{x_j\}\}$.
   Tomamos $\Omega^* = \Omega \setminus (\cup_{i \in J_1} x_i)$. Como $\text{cap}_p(x_i, D) = 0$, tenemos que $\text{cap}_p(\Omega^*, D) = \text{cap}_p(\Omega, D)$. Luego, por el Teorema 5.24, $W^{1,p}_0(\Omega^*) = W^{1,p}_0(\Omega)$. Basta ver entonces que $u^* \in W^{1,p}_0(\Omega^*)$.

   Sea $I = \{1, ..., l\} \setminus (J_0 \cup J_1)$, consideramos $\Omega^*_n = D \setminus \cup_{j \in I} F^j_n \xrightarrow{H} \Omega^*$.
3. Para $j \in I$, F^j contiene al menos dos puntos. Sea a_j la distancia entre ellos. Estos puntos son límites de puntos de F^j_n que podemos suponer a distancia menor que $\frac{a_j}{2}$ para n grande.

   Sea $x \in \partial\Omega^*_n$ y $j = j(x) \in I$ tal que $x \in F^j_n$, por la Proposición 7.11, dado $a \leq r < \frac{a_j}{4}$ para cierto a positivo, existe k una constante universal que verifica la siguiente desigualdad:

   $$\text{cap}_p((\Omega^*_n)^c \cap \overline{B(x, r)}, B(x, 2r)) \geq \text{cap}_p(F^j_n \cap \overline{B(x, r)}, B(x, 2r)) \geq k > 0.$$

   Esto demuestra que los abiertos Ω^*_n pertenecen a O_{α, r_0} con $\alpha = k$ y $r_0 = \frac{1}{4} \text{mín}\{a_j \colon j \in I\}$.

   Como $\Omega^*_n \xrightarrow{H} \Omega$, por la Propiedad 7.14, vale que $u^1_{\Omega^*_n} \rightharpoonup u^1_\Omega$ en $W^{1,p}_0(D)$.
   Por otra parte, como $\Omega_n \subset \Omega^*_n$, por la Observación 6.6 y la Propiedad 6.8, tenemos que $0 \leq u^1_{\Omega_n} \leq u^1_{\Omega^*_n}$. Pasando al límite, $0 \leq u^* \leq u^1_\Omega$. Concluimos entonces por el Lema 6.7 que $u^* \in W^{1,p}_0(\Omega)$, como queríamos probar.

□

Capítulo 8

Algunas aplicaciones a problemas de diseño óptimo.

8.1. Minimización de la energía de Dirichlet.

En esta capítulo estudiaremos la extensión a exponente variable de los resultados presentados en [12, Sección 4.5, página 148] para $p = 2$.

Teorema 8.1. *Sea* $\Lambda(D) = \{\Omega \subset D\colon \Omega$ *es p(x)-cuasiabierto*$\}$*. Entonces existe* $\Omega^* \in \Lambda(D)$ *tal que* $|\Omega^*| = m$ *(con* $0 < m < |D|$*) y* $J(\Omega^*) = \text{mín}\{J(\Omega)\colon \Omega \in \Lambda(D)$ *y* $|\Omega| \leq m\}$ *donde*

$$J(\Omega) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_\Omega(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega f(x) u_\Omega(x)\, dx$$

notando, una vez más, $u_\Omega = u_\Omega^f$ *es la solución del problema de Dirichlet en* Ω *asociado a* f*.*

Demostración. Definimos $\Omega_v = \{x \in D\colon \tilde{v}(x) \neq 0\}$ que es un $p(x)-$cuasi abierto. Consideremos el siguiente problema auxiliar:

$$\text{Hallar } u \in W_0^{1,p(x)}(D) \text{ tal que } I(u) = \text{mín}\{I(v)\colon v \in W_0^{1,p(x)}(D) \text{ y } |\Omega_v| \leq m\}$$

donde $I(v) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla v(x)|^{p(x)}\, dx - \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$.

Veamos que si el problema auxiliar tiene solución, entonces el problema original también.

Sea $u \in W_0^{1,p(x)}(D)$ solución del problema auxiliar. Sea $\Omega \in \Lambda(D)$ tal que $|\Omega| \leq m$.

Notemos que $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_u)$. Además, como $\Omega_{u_\Omega} \subset \Omega$, tenemos que $|\Omega_{u_\Omega}| \leq |\Omega| \leq m$. Por otra parte, por definición, $u = u_{\Omega_u}$. Luego,

$$J(\Omega) = I(u_\Omega) \geq \text{mín}\{I(v)\colon v \in W_0^{1,p(x)}(D) \text{ y } |\Omega_v| \leq m\} = I(u) = I(u_{\Omega_u}) = J(\Omega_u).$$

Por lo tanto, $\text{mín}\{J(\Omega)\colon \Omega \in \Lambda(D) \text{ y } |\Omega| \leq m\} \geq J(\Omega_u)$.

Si $|\Omega_u| = m$, tomamos $\Omega^* = \Omega_u$.

Si $|\Omega_u| < m$, tomamos Ω^* $p(x)-$cuasiabierto tal que $\Omega^* \supset \Omega_u$ y $|\Omega^*| = m$ (basta considerar $\Omega^* = \Omega_u \cup (B(0,r) \cap D)$ con $r > 0$ tal que $|\Omega^*| = m$).

Como $(\Omega^*)^c \subset (\Omega_u)^c$ y $\tilde{u} = 0$ en $(\Omega_u)^c$, tenemos que $\tilde{u} = 0$ en $(\Omega^*)^c$ y, por lo tanto, $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega^*)$.

Tenemos que $u = u_{\Omega^*}$ y empleando el mismo procedimiento que antes concluimos que Ω^* es solución del problema original.

Veamos que el problema auxiliar tiene solución.

Como vimos en la prueba de el Lema 6.2, I resulta acotado inferiormente. Luego,

$$l = \inf\{I(v) \colon v \in W_0^{1,p(x)}(D) \; y \; |\Omega_v| \leq m\} > -\infty.$$

Consideremos $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $W_0^{1,p(x)}(D)$ tal que $|\Omega_{v_n}| \leq m$ e $I(v_n) \to l$. Argumentando de igual forma que en la prueba del Lema 6.2, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta acotada en $W_0^{1,p(x)}(D)$, que es reflexivo. Por el Teorema de Alaoglu, existe una subsucesión, que volvemos a notar $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $v_n \rightharpoonup v$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$ y ctp.

Por la semicontinuidad de la medida, $|\Omega_v| \leq \liminf |\Omega_{v_n}| \leq m$. Luego, $I(v) \geq l$.

Por otra parte, como toda aplicación convexa resulta semicontinua inferior, tenemos que $I(v) \leq \liminf I(v_n) = l$.

Queda demostrado así el resultado. □

8.2. Una aplicación del Teorema de Šverák.

Definición 8.2. Decimos que Ω cumple la condición (α, r) si verifica la siguiente desigualdad:

$$\text{cap}_{p(x)}(\Omega^c \cap B(x,r), B(x,2r)) \geq \alpha \, \text{cap}_{p(x)}(B(x,r), B(x,2r)), \quad x \in \partial\Omega.$$

Definimos $O_{\alpha,r_0}(D) = \{\Omega \subset D \text{ abierto} : \Omega \text{ cumple la condición } (\alpha, r) \text{ para todo } 0 < r < r_0\}$.

Lema 8.3. *La clase $O_{\alpha,r_0}(D)$ es cerrada para la convergencia Hausdorff (y, por lo tanto, es compacta).*

Demostración. Sea $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset O_{\alpha,r_0}(D)$ tal que $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$, veamos que $\Omega \in O_{\alpha,r_0}(D)$.

Llamamos $F_n = D \setminus \Omega_n$ y $F = D \setminus \Omega$. Luego, $F_n \xrightarrow{H} F$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $F_n \subset F_\varepsilon = \cup_{x\in F}\overline{B(x,\varepsilon)}$ para todo $n \geq n_0$.

Sean $r < r_0$ y $x \in \partial\Omega$ fijo, existe $x_n \in \partial\Omega_n$ tal que x_n tiende a x.

Para $\varepsilon > 0$ fijo, elegimos n_0 tal que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $F_n \subset F_{\frac{\varepsilon}{2}}$ para todo $n \geq n_0$.

Considerando $\tau_n(y) = y + x_n - x$, resulta entonces que $\tau_n(B(x,r)) = B(x_n, r)$.

Como la $p-$capacidad es invariante por traslaciones,

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_p(F_\varepsilon \cap B(x,r), B(x,2r)) &= \operatorname{cap}_p(\tau_n(F_\varepsilon) \cap B(x_n,r), B(x_n,2r))\\ &\geq \operatorname{cap}_p(F_n \cap B(x_n,r), B(x_n,2r))\\ &\geq \alpha\operatorname{cap}_p(B(x_n,r), B(x_n,2r))\\ &= \alpha\operatorname{cap}_p(B(x,r), B(x,2r)).\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad tuvimos en cuenta que $F_n \subset \tau_n(F_\varepsilon)$ y en la segunda empleamos la condición (α, r). Tomando límite obtenemos

$$\text{lím}\operatorname{cap}_p(F_\varepsilon \cap B(x,r), B(x,2r)) \geq \alpha\operatorname{cap}_p(B(x,r), B(x,2r)).$$

Como la $p-$capacidad es continua para la unión de compactos,

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_p(\Omega^c \cap B(x,r), B(x,2r)) &= \operatorname{cap}_p(\text{lím}(F_\varepsilon \cap B(x,r), B(x,2r))\\ &\geq \alpha\operatorname{cap}_p(B(x,r), B(x,2r)).\end{aligned}$$

Queda así demostrado el resultado. □

Teorema 8.4. *Sea $p > N - 1$. Entonces, el problema de minimización $m = \text{mín}\{J(\Omega) \colon \Omega \in \mathcal{O}_l(D)\}$ tiene solución.*

Demostración. Sea $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante. Luego, existe una subsucesión $\{\Omega_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\Omega^* \subset D$ tal que $\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega^*$. Por lo tanto, por la Observación 7.1 y el Teorema 7.15, $u^f_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup u^f_{\Omega^*}$ en $W^{1,p}_0(D)$.

Recordemos que

$$I(u^f_{\Omega_{n_k}}) = \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u^f_{\Omega_{n_k}}(x)|^p dx - \int_\Omega f(x)u^f_{\Omega_{n_k}}(x)\,dx.$$

Por la semicontinuidad inferior, podemos afirmar que

$$m = \text{lím}\, J(\Omega_{n_k}) = \text{lím}\, I(u^f_{\Omega_{n_k}}) \geq \text{lím inf}\, I(u^f_{\Omega_{n_k}}) \geq I(u^f_{\Omega^*}) = J(\Omega^*).$$

Por otro lado, como $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es minimizante, $J(\Omega_{n_k}) \leq J(\Omega^*)$. Tomando límite resulta que $m \leq J(\Omega^*)$.

Tenemos así que $J(\Omega^*) = m$. Basta ver entonces que $\Omega^* \in \mathcal{O}_l(D)$.

Como $\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega^*$, existe $\tilde{\Omega}_{n_k} \supset \Omega_{n_k}$ tal que $\tilde{\Omega}_{n_k} \in \mathcal{O}_{\alpha,r_0}(D)$ para ciertos α y r_0 y $\tilde{\Omega}_{n_k} \xrightarrow{H} \tilde{\Omega}^* = \Omega^*$ $p(x)-$ctp. Por el Lema 8.3, $\Omega^* \in \mathcal{O}_{\alpha,r_0}(D)$, como queríamos probar. □

8.3. Restricciones de perímetro.

En esta sección daremos la extensión a exponente variable de los resultados presentados en [12, Sección 4.6, página 154] para $p = 2$.

Sean $\Omega \subset D$ y $\beta \geq \alpha \geq 0$, definimos la siguiente función sobre Ω:

$$\alpha_\Omega(x) = \alpha\chi_\Omega(x) + \beta\chi_{D\setminus\Omega}(x)$$

Dados $g_1, g_2 : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ semicontinuas inferiormente con respecto a la segunda variable (ctp x), definimos

$$g_\Omega(x, s) = \chi_\Omega(x)g_1(x, s) + \chi_{D\setminus\Omega}(x)g_2(x, s).$$

Notaremos $\lambda_1 = \displaystyle\inf_{u\in W_0^{1,p(x)}(D)} \frac{\int_D |\nabla u(x)|^{p(x)}dx}{\int_D |u(x)|^{p(x)}dx}$. Si bien λ_1 no es un autovalor como remarcan Franzina y Lindqvist (ver [8]), juega un rol importante en las PDEs. res Observemos que, a diferencia de lo que ocurre en el caso p constante, λ_1 puede ser nulo. Estudiaremos a continuación el ejemplo presentado en [6, página 445]. En este trabajo se demuestra también que $\lambda_1 > 0$ si p no tiene extremos locales interiores.

Ejemplo 8.5. *Sea $D = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$. Consideremos*

$$p(x) = \begin{cases} 3 & en\ 0 \leq |x| \leq 1, \\ 4 - |x| & en\ 1 \leq |x| \leq 2, \end{cases}$$

y

$$u(x) = \begin{cases} 1 & en\ 0 \leq |x| \leq 1, \\ 2 - |x| & en\ 1 \leq |x| \leq 2, \end{cases}$$

Notemos que $u \in W_0^{1,p(x)}(D)$. Además, dado $a > 0$,

$$\frac{\int_D |au'(x)|^{p(x)}dx}{\int_D |au(x)|^{p(x)}dx} \leq \frac{2\int_1^2 a^{4-x}dx}{2\int_0^1 a^3dx} \leq \frac{\frac{2a^2}{\log a}(a-1)}{2a^3} \to 0,$$

cuando a tiende a ∞. En este caso concluimos entonces que $\lambda_1 = 0$.

Sea $v \in W_0^{1,p(x)}(D)$, llamaremos

$$F(v) = \int_D \alpha_\Omega(x)|\nabla v(x)|^{p(x)} + g_\Omega(x, v)\, dx.$$

Lema 8.6. *Si $g_i(x, s) \geq \gamma(x) - k|s|^{p(x)}$ para $i = 1, 2$ con $\gamma \in L^1(D)$ y $k \leq 0$ si $\lambda_1 = 0$ o $k < \alpha\lambda_1$ si $\lambda_1 > 0$. Entonces, F está acotado inferiormente.*

Demostración. Observemos primero que, como $g_i(x,s) \geq \gamma(x) - k|s|^{p(x)}$ para $i = 1, 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} g_\Omega(x,s) &= \chi_\Omega(x) g_1(x,s) + \chi_{D\setminus\Omega}(x) g_2(x,s) \\ &\geq (\chi_\Omega(x) + \chi_{D\setminus\Omega}(x))(\gamma(x) - k|s|^{p(x)}) \\ &= \gamma(x) - k|s|^{p(x)} \end{aligned}$$

y, como $\alpha \leq \beta$,

$$\alpha_\Omega(x) = \alpha\chi_\Omega(x) + \beta\chi_{D\setminus\Omega}(x) \geq \alpha.$$

Por lo tanto, dado $v \in W_0^{1,p(x)}(D)$, concluimos

$$\begin{aligned} F(v) &= \int_D \alpha_\Omega(x)|\nabla v(x)|^{p(x)} + g_\Omega(x,v)\,dx \\ &\geq \int_D \alpha|\nabla v(x)|^{p(x)} + \gamma(x) - k|v(x)|^{p(x)}\,dx \end{aligned}$$

Si $\lambda_1 = 0$, entonces $k \leq 0$, de donde

$$F(v) \geq \alpha \int_D |\nabla v(x)|^{p(x)}\,dx - \|\gamma\|_1.$$

Por otro lado, si $\lambda_1 > 0$, entonces

$$\int_D |v(x)|^{p(x)}\,dx \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_D |\nabla v(x)|^{p(x)}\,dx$$

de donde se obtiene

$$F(v) \geq \left(\alpha - \frac{k}{\lambda_1}\right)\int_D |\nabla v(x)|^{p(x)}\,dx - \|\gamma\|_1.$$

Queda así concluida la prueba. □

Lema 8.7. *Bajo las mismas hipótesis del Lema 8.6, el siguiente problema de minimización:*

$$\text{mín}\left\{\int_D \alpha_\Omega(x)|\nabla u(x)|^{p(x)} + g_\Omega(x,u)\,dx \colon u \in W_0^{1,p(x)}(D)\right\} \tag{8.1}$$

tiene solución.

Demostración. Por el Lema 8.6, sabemos que F está acotado inferiormente. Podemos considerar entonces $m = \inf_{v \in W_0^{1,p(x)}(D)} F(v)$ y una sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p(x)}(D)$ tal que $F(v_n)$ tiende a m. Nuevamente por lo visto en la demostración del Lema 8.6, podemos afirmar que existe una constante $c > 0$ tal que para todo n vale que

$$F(v_n) \geq c\int_D |\nabla v_n(x)|^{p(x)} dx - \|\gamma\|_1.$$

Por otra parte, como $\{F(v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, resulta acotada. Luego, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_D |\nabla v_n(x)|^{p(x)} dx \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2.40, resulta entonces que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p(x)}(D)$. Luego, como el espacio es Banach reflexivo, sabemos que existe una subsucesión, que volvemos a notar $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$ y $v_n \to v$ en $L^{p(x)}(D)$. Por la semicontinuidad inferior del modular y de g_Ω, obtenemos

$$\int_D \alpha_\Omega(x)|\nabla v(x)|^{p(x)} + g_\Omega(x, v)\, dx \leq \liminf \int_D \alpha_\Omega(x)|\nabla v_n(x)|^{p(x)} + g_\Omega(x, v_n)\, dx.$$

Así resulta que $F(v) \leq \liminf F(v_n) = m$. Por otra parte, como $v \in W_0^{1,p(x)}(D)$, sabemos que $F(v) \geq m$ y, en consecuencia, $F(v) = \lim F(v_n) = m$. Obtenemos así el resultado. □

Definición 8.8. Dado $\Omega \subset D$, definimos el *perímetro relativo* de Ω respecto de D como el siguiente supremo:

$$P_D(\Omega) = \sup_{\substack{\varphi\in C_c^\infty(D,\mathbb{R}^N)\\ \|\varphi\|_\infty\leq 1}} \int_\Omega \operatorname{div}\varphi\, dx.$$

Las pruebas de las siguientes dos proposiciones pueden hallarse en [12, Proposición 2.3.6, página 47] y [12, Teorema 2.3.10, página 48].

Proposición 8.9. *Sea D abierto de $\mathbb{R}^N$ de medida finita y $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjutnos medibles de D tal que $|\Omega_n| + P_D(\Omega_n) \leq c$ independientemente de n, entonces existen $\Omega \subset D$ medible y una subsucesión $\{\Omega_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\chi_{\Omega_{n_k}} \to \chi_\Omega$ en $L^1(D)$.*

Proposición 8.10. *Sean $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y Ω subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$, si $\chi_{\Omega_{n_k}} \to \chi_\Omega$ en $L^1(D)$, entonces $|\Omega| = \lim |\Omega_n|$ y $P_D(\Omega) \leq \lim P_D(\Omega_n)$.*

Con estos preliminares podemos enunciar y probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 8.11. *Bajo las mismas hipótesis del Lema 8.6, el problema de minimización*

$$\min\{E(\Omega) + \sigma P_D(\Omega) \colon \Omega \subset D \text{ medible}\} \tag{8.2}$$

tiene solución, donde $\sigma > 0$ y $E(\Omega) = F(u_\Omega)$ con $u_\Omega \in W_0^{1,p(x)}(D)$ la solución débil de

$$\begin{cases} -div(\alpha_\Omega(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f & \text{en } D, \\ u = 0 & \text{en } \partial D, \end{cases} \tag{8.3}$$

Demostración. Sea $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante para (8.2). Llamemos m a su límite. Como $E(\Omega_n) + \sigma P_D(\Omega_n)$ es convergente, resulta acotada. Además, como $\Omega_n \subset D$ y D es acotado, tenemos que $|\Omega_n| < \infty$. Por lo tanto, $|\Omega_n| + P_D(\Omega_n)$ es acotado independientemente de n. Luego, por la Proposición 8.9, podemos extraer una subsucesión, que seguiremos notando $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\chi_{\Omega_n} \to \chi_\Omega$ en $L^1(D)$ donde $\Omega \subset D$ medible.

Veamos que Ω es solución del problema (8.2).

Del mismo modo que en la demostración del Lema 8.6, como $u_{\Omega_n} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_n) \subset W_0^{1,p(x)}(D)$,

$$F(u_{\Omega_n}) \geq \left(\alpha - \frac{k}{\lambda_1}\right) \int_D |\nabla u_{\Omega_n}(x)|^{p(x)}\, dx - \|\gamma\|_1.$$

Por otro lado, como $F(u_{\Omega_n}) = E(\Omega_n)$, que es acotada, resulta que $\{u_{\Omega_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p(x)}(D)$. Luego, como el espacio es Banach reflexivo, sabemos que existe una subsucesión, que volvemos a notar $\{u_{\Omega_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p(x)}(D)$ y $u_{\Omega_n} \to u$ en $L^{p(x)}(D)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F(u_{\Omega_n}) - F(u) &= \int_D \alpha_{\Omega_n}(x)|\nabla u_{\Omega_n}(x)|^{p(x)} + g_{\Omega_n}(x, u_{\Omega_n})\, dx - \int_D \alpha_\Omega(x)|\nabla u(x)|^{p(x)} + g_\Omega(x,u)\, dx \\ &= \int_D \alpha_{\Omega_n}(x)|\nabla u_{\Omega_n}(x)|^{p(x)} - \alpha_\Omega(x)|\nabla u(x)|^{p(x)} dx + \int_D g_{\Omega_n}(x, u_{\Omega_n}) - g_\Omega(x,u)\, dx. \end{aligned}$$

Estudiemos el segundo término. El primero se puede analizar análogamente.

$$\begin{aligned} \int_D g_{\Omega_n}(x, u_{\Omega_n}) - g_\Omega(x,u)\, dx = &\int_D (\chi_{\Omega_n}(x) - \chi_\Omega(x)) g_1(x, u_{\Omega_n})\, dx + \int_D (\chi_{D\setminus\Omega_n}(x) - \chi_{D\setminus\Omega}(x)) g_2(x, u_{\Omega_n})\, dx \\ &+ \int_D \chi_\Omega(x)(g_1(x, u_{\Omega_n}) - g_1(x,u))\, dx + \int_D \chi_{D\setminus\Omega}(x)(g_2(x, u_{\Omega_n}) - g_2(x,u))\, dx \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.12, podemos acotar los primeros dos términos del siguiente modo:

$$\int_D (\chi_{\Omega_n}(x) - \chi_\Omega(x)) g_1(x, u_{\Omega_n})\, dx \leq 2\|g_1(x, u_{\Omega_n})\|_{r(x)} \|\chi_{\Omega_n} - \chi_\Omega\|_{r'(x)} \leq c\|\chi_{\Omega_n} - \chi_\Omega\|_{r'(x)} \to 0$$

y

$$\int_D (\chi_{D\setminus\Omega_n}(x) - \chi_{D\setminus\Omega}(x)) g_2(x, u_{\Omega_n})\, dx \leq 2\|g_2(x, u_{\Omega_n})\|_{q(x)} \|\chi_{D\setminus\Omega_n} - \chi_{D\setminus\Omega}\|_{q'(x)} \leq c\|\chi_{D\setminus\Omega_n} - \chi_{D\setminus\Omega}\|_{q'(x)} \to 0$$

para ciertos exponentes r y q. Luego, por la semicontinuidad inferior de g_1 y g_2, obtenemos

$$\int_D g_\Omega(x,u)\, dx \leq \liminf \int_D g_{\Omega_n}(x, u_{\Omega_n})\, dx.$$

Procediendo análogamente para el término restante, podemos concluir que

$$\int_D \alpha_\Omega(x)|\nabla u(x)|^{p(x)} + g_\Omega(x,u)\, dx \leq \liminf \int_D \alpha_{\Omega_n}(x)|\nabla u_{\Omega_n}(x)|^{p(x)} + g_{\Omega_n}(x, u_{\Omega_n})\, dx.$$

Así resulta

$$F(u) \leq \liminf F(u_{\Omega_n}).$$

Luego,

$$E(\Omega) = F(u_\Omega) \leq F(u) \leq \liminf F(u_{\Omega_n}) = \liminf E(\Omega_n).$$

$$E(\Omega) \leq \liminf E(\Omega_n). \tag{8.4}$$

Por otro lado, como $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es minimizante con límite m, sabemos que

$$\lim E(\Omega_n) + \sigma P_D(\Omega_n) = m.$$

Por (8.4) y la Proposición 8.10, obtenemos entonces

$$E(\Omega) + \sigma P_D(\Omega) \leq \liminf E(\Omega_n) + \sigma \lim P_D(\Omega_n) = m$$

Además, como $\Omega \subset D$ es medible, resulta admisible y, en consecuencia, $E(\Omega) + \sigma P_D(\Omega) \geq m$.

Concluimos así que $E(\Omega) + \sigma P_D(\Omega) = m$, como queríamos probar. □

Bibliografía

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[2] Dorin Bucur and Paola Trebeschi. Shape optimisation problems governed by nonlinear state equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 128(5):945–963, 1998.

[3] Yunmei Chen, Stacey Levine, and Murali Rao. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math.*, 66(4):1383–1406 (electronic), 2006.

[4] Lars Diening, Petteri Harjulehto, Peter Hästö, and Michael Růžička. *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, volume 2017 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.

[5] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[6] Xianling Fan and Dun Zhao. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *J. Math. Anal. Appl.*, 263(2):424–446, 2001.

[7] Julián Fernández Bonder and Analía Silva. Concentration-compactness principle for variable exponent spaces and applications. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 141, 18, 2010.

[8] G. Franzina and P. Lindqvist. An eigenvalue problem with variable exponents. *arXiv preprint arXiv:1210.1397*, 2012.

[9] Ronald Gariepy and William P. Ziemer. A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 67(1):25–39, 1977.

[10] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[11] Petteri Harjulehto, Peter Hästö, Mika Koskenoja, and Susanna Varonen. The Dirichlet energy integral and variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values. *Potential Anal.*, 25(3):205–222, 2006.

[12] Antoine Henrot and Michel Pierre. *Variation et optimisation de formes*, volume 48 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2005. Une analyse géométrique. [A geometric analysis].

[13] Petri Juutinen, Teemu Lukkari, and Mikko Parviainen. Equivalence of viscosity and weak solutions for the $p(x)$-Laplacian. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 27(6):1471–1487, 2010.

[14] Shizuo Kakutani. Weak convergence in uniformly convex spaces. *Math. Inst. Osaka Imp. Univ.*, pages 165–167, 1938.

[15] Tero Kilpeläinen and Jan Malý. The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations. *Acta Math.*, 172(1):137–161, 1994.

[16] Jan Malý and William P. Ziemer. *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations*, volume 51 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[17] V. G. Maz′ja. The continuity at a boundary point of the solutions of quasi-linear elliptic equations. *Vestnik Leningrad. Univ.*, 25(13):42–55, 1970.

[18] Julian Musielak. *Orlicz spaces and modular spaces*, volume 1034 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[19] Michael Růžička. *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, volume 1748 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[20] Jacques Simon. Régularité de la solution d'une équation non linéaire dans $\mathbf{R}^N$. In *Journées d'Analyse Non Linéaire (Proc. Conf., Besançon, 1977)*, volume 665 of *Lecture Notes in Math.*, pages 205–227. Springer, Berlin, 1978.

[21] Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund. *Measure and integral*. Marcel Dekker Inc., New York, 1977. An introduction to real analysis, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43.