UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Elementos Finitos Lineales en Dominios Curvos.

Analia Verónica Lagorio

Director: Gabriel Acosta Rodríguez

Índice general

1. Consideraciones Generales **4**
1.1. Espacios de Sobolev 4
1.2. El método de Galerkin 7
1.3. Formulación variacional de poblemas de contorno 9

2. Elementos finitos **11**
2.1. Elementos finitos de Lagrange 11
2.2. Espacios de elementos finitos 15

3. Análisis del método de elementos finitos en dominios suaves en $\mathbb{R}^2$ **20**
3.1. Mallas en Dominios Regulares 20
3.2. Dominios convexos 27
3.3. Resultados preliminares para dominios regulares generales 33
3.4. Problema de Dirichlet no homogéneo en dominio regular 41
3.5. Ejemplo Numérico 49

Introducción

El método de elementos finitos es uno de los más utilizados en problemas provenientes de diferentes disciplinas que involucren ecuaciones en derivadas parciales. Parte de su versatilidad se basa entre otras cosas en la capacidad que tiene, al menos en teoría, de incorporar de un modo computacional sencillo condiciones de contorno en dominios Ω con bordes arbitrarios. Esto último es particularmente cierto en el caso en que Ω pueda representarse con exactitud por el dominio discreto Ω_h generado por la malla de elementos finitos. En efecto, en ese caso y considerando problemas elípticos lineales la teoría de convergencia se reduce prácticamente al estudio de errores de interpolación o de proyección. Sin embargo, es importante observar que en la práctica la representación exacta del dominio por la malla discreta es generalmente imposible. Por ejemplo, en dimensión dos y en el caso de elementos lineales, de gran importancia y uso en las aplicaciones, eso sólo es factible en dominios poligonales. Estas cuestiones conducen a la pregunta de cómo afecta la diferencia $\Omega \setminus \Omega_h \cup \Omega_h \setminus \Omega$ al error de aproximación. Este trabajo repasa algunos resultados teóricos en esa dirección.

En el Capítulo 1 se recuerdan resultados esenciales de espacios de Sobolev y ecuaciones diferenciales lineales elípticas, abarcando en el primer caso normas fraccionarias, negativas, y desigualdades clásicas, así como teoremas de existencia, regularidad y unicidad de soluciones en el segundo.

El Capítulo 2 está dedicado a resumir y comentar la teoría básica de elementos finitos discutiendo los resultados clásicos de aproximación y en particular la convergencia en el caso $\Omega = \Omega_h$ para problemas homogéneos.

En el Capítulo 3 discutimos las distintas complicaciones que aparecen para el problema de Dirichlet en dominios suaves Ω donde $\Omega \neq \Omega_h$ al utilizar elementos lineales. El caso de Dirichlet homogéneo en dominios convexos admite un tratamiento sencillo que es discutido en particular (donde también se consideran elementos subparamétricos de grado más alto) siguiendo el texto clásico [5]. El problema general no homogéneo presenta varias dificultades y a ellos se dedica buena parte del capítulo siguiendo el enfoque de [1] aunque presentando una versión simplificada para mayor comprensión del tema ya que en el caso general no se visualizan con facilidad las ideas principales.

Capítulo 1

Consideraciones Generales

El método de elementos finitos es un método numérico que permite resolver problemas que involucran ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Sus orígenes o ideas germinales pueden rastrearse hasta el propio Leibnitz aunque el desarrollo moderno de esta técnica comienza mayormente en el campo de la ingeniería estructural a mediados del siglo XX impulsado por la evolución de las computadoras. Hoy en día es considerado como una de las herramientas más poderosas que se emplean para la resolución numérica de multitud de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales en diferentes áreas de la ingeniería y la ciencia.

Las ecuaciones en derivadas parciales tienen una gran importancia dentro de la física debido a la gran variedad de situaciones reales que modelizan. La determinación de soluciones explícitas no siempre es posible por lo que se recurre a los métodos numéricos, los cuales proporcionan una solución aproximada.

El problema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones elípticas lineales puede plantearse [3] en un marco apropiado de análisis utilizando la formulación variacional o débil de las ecuaciones en cuestión. En esa dirección, las herramientas teóricas que permiten un tratamiento adecuado del problema brindan además las bases de potenciales técnicas de aproximación numérica de soluciones. Comencemos recordando algunos aspectos básicos de la teoría subyacente a este enfoque.

1.1. Espacios de Sobolev

En esta sección se definirá los espacios de Sobolev y se enunciarán diferentes resultados que serán utilizados posteriormente.

De ahora en mas consideraremos Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.1 *Para $1 \leq p < \infty$ se designa por $W^{r,p}(\Omega)$ al espacio de todas las funciones $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$, tales que*

(a) $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para $|\alpha| \leq k$, cuando $r = k$ es un entero no negativo,

(b) $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *y*

$$\int\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx\, dy < +\infty$$

para $|\alpha| = k$, *cuando* $r = k + \sigma$ *es no negativo y no es entero, siendo* $0 < \sigma < 1$.

En donde $D^\alpha u$ *debe entenderse en el sentido de las distribuciones. Asimismo definimos la norma en* $W^{r,p}(\Omega)$ *como*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\, dx \right\}^{1/p}$$

en el caso (a), *y como*

$$\|u\|_{W^{r,p}(\Omega)} = \left\{ \|u\|^p_{W^{k,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \int\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx\, dy \right\}^{1/p}$$

en el caso (b).

Observación 1.1.1 *En este trabajo nos enfocaremos en el caso* $p = 2$, *por lo que utilizaremos la notación usual*

$$H^r(\Omega) := W^{r,2}(\Omega)$$

y

$$\|u\|_{W^{r,2}(\Omega)} = \|u\|_{r,\Omega}.$$

Con esta notación $H^0 \equiv L^2$.
La seminorma en $H^k(\Omega)$, *con* $k \in \mathbb{N}$, *viene dada por*

$$|u|_{k,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2},$$

en $H^r(\Omega)$, *con* $r = k + \sigma$ *no negativo y no entero, por*

$$|u|_{r,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=k} \int\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+\sigma 2}}\, dx\, dy \right\}^{1/2}.$$

Recordemos que para $r \in \mathbb{R}$, $H^r(\Omega)$ *y* $H^r_0(\Omega)$ *son espacios de Hilbert [6].*

Observación 1.1.2 *Si* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *se puede definir* $H^r(\mathbb{R}^n)$, *para todo* $0 \le r$, *de forma alternativa [9], utilizando la transformada de Fourier, como*

$$H^r(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) / \hat{u}(\xi)(1 + |\xi|^2)^{r/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

donde

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi x} u(x)\, dx$$

Definición 1.1.2 *Denotamos con $W_0^{r,p}(\Omega)$ a la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{r,p}(\Omega)$, donde $C_0^\infty(\Omega)$ es el espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en Ω.*

Luego consideramos la notación $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$.

La Definición 1.1.1 se puede extender de la siguiente manera.

Definición 1.1.3 *Para $r < 0$, denotamos $W^{r,p}(\Omega)$ como el espacio dual de $W_0^{-r,q}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En particular para el caso $p = 2$ escribimos consitentemente $W^{r,2}(\Omega) = H^r(\Omega)$, como en el caso $0 \leq r$.*

Un caso de interés para nosotros es $H^{-1/2}(\Omega)$. En particular se tiene

$$|u|_{-1/2,\Omega} = \sup_{\psi \in H^{1/2}(\Omega)} \frac{\langle u, \psi \rangle}{|\psi|_{1/2,\Omega}}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualidad $H^{1/2}$, $H^{-1/2}$ y cuando $u, \psi \in L^2(\Omega)$

$$\langle u, \psi \rangle = \int_\Omega u\psi \, ds.$$

El siguiente teorema, dice que las funciones regulares son densas en $H^1(\Omega)$ y da un sentido a los valores de las funciones de $H^1(\Omega)$ sobre la frontera $\Gamma = \partial\Omega$.

Teorema 1.1.1 *Sea Ω un abierto con frontera Lipschitz. Entonces*

1. *$C^\infty(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$.*
2. *La aplicación $\gamma_0 : v \mapsto \gamma_0 v = v|_\Gamma$ de $C^\infty(\bar{\Omega})$ en $C^0(\Gamma)$ se prolonga por continuidad a una aplicación lineal y continua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$. En particular existe una constante $C > 0$, tal que*
$$\forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad \|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} \leq C \|v\|_{1,\Omega}.$$

Observación 1.1.3 *Los espacios de Sobolev definidos sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ pueden generalizarse a variedades. Un caso que nos va a interesar es el dado por la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Considerando que la misma es de clase C^2, podemos decir que una función $g \in H^s(\Gamma)$ con $0 \leq s \leq 2$ sí y solo sí $g \circ X : I \to \mathbb{R}$ está en H^s como función del parámetro, siendo X una parametrización C^2. Como la curva es cerrada, es necesario considerar la función periódica, es decir que goX es la restricción de una función periódica definida en $\mathbb{R}$. Análogamente se definen las normas negativas, solo que por ser periódicas las funciones la dualidad se toma sobre el espacio H^s, es decir $H^{-s} = (H^s)'$. En este caso, la norma se notará $|\cdot|_{s,\Gamma}$.*

Observación 1.1.4 *Como mencionamos en la Definición 1.1.3, es de interés el caso $r = \frac{1}{2}$. Puede verse que para dominios suficientemente regulares $H^{1/2}(\Gamma)$ coincide con el espacio de trazas de $H^1(\Omega)$. Más en general se tiene que si $r = k - \frac{1}{2}$ con $k = 1, 2, ...$, entonces $H^r(\Gamma)$ coincide con el espacio de trazas de $H^k(\Omega)$.*

Teorema 1.1.2 *(Desigualdad de Poincaré) Sea Ω un abierto acotado, existe una constante $C(\Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega)|u|_{1,\Omega} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Observación 1.1.5 *Gracias a la desigualdad anterior se puede definir $|\cdot|_{1,\Omega}$ como una norma, en $H_0^1(\Omega)$. Por lo que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|\cdot|_{1,\Omega}$ resultan normas equivalentes.*

Los siguientes teoremas son utilizados en los próximos capítulos.

Teorema 1.1.3 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, con frontera Γ Lipschitz, C^1 a trozos. Entonces la inyección canónica de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, es decir, cada conjunto acotado de $H^1(\Omega)$ es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$.*

Teorema 1.1.4 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ, Lipschitz. Entonces, si $m > \frac{n}{2}$, el espacio $H^m(\Omega)$ es un subespacio de $C(\bar{\Omega})$ y la inyección canónica de $H^m(\Omega)$ en $C(\bar{\Omega})$ es continua.*

El siguiente teorema [9] será de suma importancia en el último capítulo.

Teorema 1.1.5 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz. Luego, para cada $r > 0$, existe un operador lineal y continuo $E : H^r(\Omega) \mapsto H^r(\mathbb{R}^n)$, tal que $E\phi|_\Omega = \phi$ y*

$$\|E\phi\|_{r,\mathbb{R}^n} \leq C\|\phi\|_{r,\Omega}$$

donde C es una constante que depende de Ω.

1.2. El método de Galerkin

Sea V un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ con norma $\|\cdot\|$, y denotemos con V' a su dual (que no necesariamente identificamos con V). En este contexto, sea $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua (i.e. $a(u,v) \leq C_1\|u\|\|v\| \quad \forall\, u, v \in V$) y $L : V \to \mathbb{R}$, $L \in V'$.

Definición 1.2.1 *Llamamos problema variacional general, también llamado problema $(\mathcal{P})$, a encontrar $u \in V$ tal que*

$$(\mathcal{P}) \qquad \forall\, v \in V,\ a(u,v) = L(v). \tag{1.2.1}$$

Existen criterios que caracterizan las condiciones para las cuales existe y es única la solución para el problema $(\mathcal{P})$. Por otro lado, una condición suficiente se denominada coercividad de a, esto es: existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$\forall\, v \in V,\ a(v,v) \geq C_2\|v\|^2.$$

En efecto, es bien conocido el siguiente resultado [3]:

Teorema 1.2.1 (Lax-Milgram) *Sea V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva y $L : V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo sobre V, entonces el problema $(\mathcal{P})$ admite solución única y además*

$$\|u\|_V \leq C\|L\|_{V'}.$$

El teorema de Lax-Milgram proporciona una herramienta clave en el tratamiento adecuado de problemas de contorno como recordaremos en breve. Por otro lado, dentro del planteo abstracto del problema $(\mathcal{P})$ puede proponerse un método sistemático de aproximación para la solución u. En efecto, consideremos $V_h \subset V$ un subespacio cerrado de V (en las aplicaciones suele ser de dimensión finita). El parámetro h cobra sentido en un contexto posterior y se relaciona con la precisión de la aproximación buscada. Planteamos ahora la siguiente variante de $(\mathcal{P})$:

Definición 1.2.2 *Dado un subespacio cerrado $V_h \subset V$ se define el problema $(\mathcal{P}_h)$ como: hallar $u_h \in V_h$ tal que*

$$(\mathcal{P}_h) \qquad \forall\, v_h \in V_h,\ a(u_h, v_h) = L(v_h). \tag{1.2.2}$$

Cuando V_h es de dimensión finita, $(\mathcal{P}_h)$ se denomina problema discreto y la solución u_h se llama solución discreta.

Observación 1.2.1 *El método propuesto en la formulación $\mathcal{P}_h$, se denomina Método de Galerkin.*

Observación 1.2.2 *En caso en que la forma bilineal sea simétrica, la solución discreta es caracterizada tambien por la propiedad*

$$J(u_h) = \min_{v_h \in V_h} J(v_h)$$

donde el funcional J viene dado por $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$. Esta definición alternativa de la solución discreta es conocida como el método de Ritz.

Notemos que desde $(\mathcal{P})$ y $(\mathcal{P}_h)$ utilizando el hecho de que $V_h \subset V$ se tiene que

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \qquad \forall v_h \in V_h \tag{1.2.3}$$

identidad denominada ecuación del error y que dice que el error de aproximación $e = u - u_h$ guarda cierta ortogonalidad con V_h (en particular si $a(u, v)$ definiera un producto interno). Gracias a ello, es de esperar que u_h se comporte como la mejor aproximación. En efecto, el lema siguiente [8, 4, 5] confirma esta sospecha.

Lema 1.2.1 (Lema de Cea) *Sea V un espacio de Hilbert, a una forma bilineal continua y coerciva y $L \in V'$. Sean u y u_h las soluciones de $(\mathcal{P})$ y de $(\mathcal{P}_h)$ respectivamente (que existen gracias al Teorema 1.2.1), entonces:*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{C_1}{C_2} inf_{v_h \in V} \|u - v_h\|$$

Demostración. Usando la coercividad y continuidad de a junto con la ecuación del error se tiene

$$C_2\|u-u_h\|^2 \leq a(u-u_h,u-u_h) \leq a(u-u_h,u-v_h) \leq C_1\|u-u_h\|\|u-v_h\|$$

de donde se sigue el lema. □

1.3. Formulación variacional de poblemas de contorno

Este trabajo se basa en la aproximación de soluciones de un problema elíptico clásico en un dominio regular Ω de $\mathbb{R}^n$, abierto y acotado. El procedimiento estandar consiste en llevar la ecuación diferencial a una forma variacional conveniente que en general adopta la forma del problema $(\mathcal{P})$.

En primer lugar comenzaremos analizando el problema de Dirichlet homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u &=& f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u &=& 0 \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{array}\right. \tag{1.3.1}$$

donde Γ es la frontera de Ω.
En este caso, si $f \in L^2(\Omega)$ y Γ es de clase C^2 el problema tiene solución única en $H^2(\Omega)$ y verifica $\|u\|_{2,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\Omega}$.
Este problema puede escribirse de manera estándar en la forma $(\mathcal{P})$. En efecto, multiplicando a ambos miembros de la primera ecuación (1.3.1) por una función test $v \in C_0^\infty(\Omega)$, integrando por partes sobre Ω y usando la densidad de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ se obtiene que toda u solución clásica de (1.3.1) verifica lo que se denomina formulación débil:

Dada $f \in L^2(\Omega)$, hallar una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifique

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad y \quad \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.3.2}$$

Como hemos observado, si u es solución de (1.3.1) entonces es solución de (1.3.2), pero recíprocamente, es fácil probar que si una función u verifica (1.3.2) y además $u \in H^2(\Omega)$ entonces es solución de (1.3.1).

En el marco de la teoría de la sección anterior y tomado $n = 2$ observemos que el espacio V natural para este problema es $H_0^1(\Omega)$, la forma bilineal involucrada

$$a(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\,dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx$$

y el funcional lineal

$$L(v) = \int_\Omega fv\,dx.$$

Por lo tanto, el problema $(\mathcal{P})$ en este caso corresponde a: *encontrar* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ a(u,v) = L(v). \tag{1.3.3}$$

De forma elemental se prueba que $a(\cdot,\cdot)$ y $L(\cdot)$ son continuos, en efecto por la desigualdad de Schwartz,

$$a(u,v) \leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla v|\, dx \leq C\|\nabla u\|_{0,\Omega}\|\nabla v\|_{0,\Omega} = C|u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega},$$

$$|L(v)| \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \leq C|v|_{1,\Omega}.$$

Además $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva gracias a la Observación 1.1.5, pues

$$a(u,u) = |u|^2_{1,\Omega} \geq C\|u\|^2_{1,\Omega}.$$

Por lo tanto, podemos concluir, por Lax-Milgram, que el problema (1.3.3) tiene solución única.

Consideremos ahora el siguiente problema general,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u & = & g & \text{en } \Gamma \end{array} \right. , \tag{1.3.4}$$

que será objeto de estudio en este trabajo, donde Γ es de clase C^2.

De forma análoga, aquí puede definirse una variante del problema $(\mathcal{P})$ (no coincide estrictamente con este) que es equivalente para funciones suficientemente regulares al problema (1.3.4):

Dada $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{r-1/2}(\Gamma)$, $1 \leq r \leq 2$ encontrar una función $u \in H^r(\Omega)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} a(u,v) & = & L(v) & \text{para todo } v \in H^1_0(\Omega) \\ u & = & g & \text{en } \Gamma. \end{array} \right. \tag{1.3.5}$$

Utilizando la Observación 1.1.4 se puede restar una función $w \in H^r(\Omega)$ de traza g a u y pasar el problema (1.3.5) a la forma estándar $(\mathcal{P})$ de donde se prueba existencia y unicidad de soluciones en Ω para (1.3.5) gracias a Lax-Milgram.

Se puede observar [7], que si $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{r-1/2}(\Gamma)$, $1 \leq r \leq 2$ el problema (1.3.4) tiene solución única débil en $H^r(\Omega)$ y satisface

$$\|u\|_{r,\Omega} \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + |g|_{r-1/2,\Gamma}), \quad 1 \leq r \leq 2. \tag{1.3.6}$$

Es importante mencionar que en dominios menos regulares como los polígonos en dimensión 2 [6] y poliedros en dimensión 3 los teoremas de regularidad se modifican pues las soluciones son en general menos regulares.

Capítulo 2

Elementos finitos

En este capítulo damos una breve descripción de los espacios de elementos finitos. Principalmente nos concentramos en elementos triangulares en dimensión dos, dado que son los utilizados en el problema que estudiaremos mas adelante. De todos modos muchos resultados están enunciados con mayor generalidad, sobre todo cuando el costo de la escritura era equivalente al caso particular. Para esta presentación hemos seguido el enfoque dado en [5].

2.1. Elementos finitos de Lagrange

Consideremos el problema (1.2.1), donde el espacio V, la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ y L satisfacen los supuestos del teorema del Lax-Milgram. El método de elementos finitos, en su forma más simple, es un proceso específico en la construcción de los subespacios V_h propuestos en el método $\mathcal{P}_h$ (1.2.2).

Consideremos la terna (K, P, Σ) donde:

- K es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, convexo y de interior no vacío;
- P es un espacio vectorial de dimensión finita de funciones con valores reales definidas sobre K, y
- Σ es una base de P', el espacio dual de P.

Observación 2.1.1 *Notar que todas las normas son equivalentes en P, puesto que tiene dimensión finita. En ese sentido no se especifica la norma en la que se trabaja. Asimismo, como veremos, Σ debe estar incluido en el dual de ciertos espacios de Sobolev apropiados. Como notaremos más adelante, eso se consigue a través de teoremas de inmersión apropiados.*

Definición 2.1.1 *Decimos que una terna (K, P, Σ) que cumple lo enunciado anteriormente es un elemento finito. Las funciones del espacio P se denominan funciones de forma, y los elementos de Σ variables nodales.*

En los elementos finitos de Lagrange el conjunto Σ está formado por evaluaciones en N puntos distintos $\{a_1, a_2, ..., a_N\} \subset K$. Por abuso de notación escribimos $\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$.

Definición 2.1.2 *Decimos que el conjunto $\Sigma \subset P'$ es $P-$unisolvente si y sólo si dados N números reales α_j, $1 \leq j \leq N$, existe una única función $p \in P$ tal que*

$$p(a_j) = \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Observación 2.1.2 *Σ es $P-$unisolvente si y sólo si la terna (K, P, Σ) es un elemento finito de Lagrange.*

Gracias a la observación anterior, dado un elemento finito de Lagrange (K, P, Σ), tenemos que para cualquier función continua v definida sobre K a valores reales, existe una única función $p \in P$ que interpola a v sobre K, es decir:

$$p(a_j) = v(a_j), \quad 1 \leq j \leq N. \tag{2.1.1}$$

Definición 2.1.3 *Dado un elemento finito de Lagrange (K, P, Σ), llamamos funciones base o funciones nodales a las N funciones p_i definidas como $p_i(a_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq j \leq N$. Llamamos P-interpolador de Lagrange sobre Σ al operador que a cada función contínua v definida sobre K le asocia la función Πv definida por*

$$\Pi v = \sum_{i=1}^{N} v(a_i) p_i. \tag{2.1.2}$$

Si bien K es un compacto general convexo, en la práctica se utilizan elementos particulares. Para este trabajo nos restringiremos a triángulos en $\mathbb{R}^2$, que son un caso particular de los llamados elementos simpliciales.

Definición 2.1.4 *Consideremos 3 puntos $a_j = (a_j^1, a_j^2), 1 \leq j \leq 3$, no colineales en $\mathbb{R}^2$ y sea A la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Llamamos 2-simplex K al triángulo de vértices a_j.

Para observar que esta matriz es inversible, observemos que el determinante a la matriz A es equivalente a calcular el determinante de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 - a_1^1 & a_3^1 - a_1^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - a_1^2 & a_3^2 - a_1^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el cual es distinto de cero debido a que los puntos a_j no son colineales.

Cualquier punto $x \in \mathbb{R}^2$, de coordenadas cartesianas (x_1, x_2), está caracterizado por 3 escalares $\lambda_j = \lambda_j(x), 1 \leq j \leq 3$, definidos como la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} a_j^i \lambda_j &= x_i, \quad 1 \leq i \leq 2 \\ \sum_{j=1}^{3} \lambda_j &= 1 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

cuya matriz es precisamente A. Estos escalares $\lambda_j(x)$ son llamados las *coordenadas baricéntricas* del punto x con respecto a los 3 puntos $a_j, 1 \leq j \leq 3$. Las funciones

$$x = (x_1, x_2) \to \lambda_j(x), \quad 1 \leq j \leq 3$$

son funciones de coordenadas baricéntricas en relación con los puntos a_j. Se puede observar de (2.1.3), que cada una de las funciones de coordenadas baricéntricas es una función afín de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2,\ x = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j(x) a_j.$$

Utilizando las coordenadas baricéntricas asociadas a los puntos a_j, el triángulo K de vértices a_j, está caracterizado por

$$K = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1, \quad 1 \leq j \leq 3\}.$$

Por otra parte, para cada entero $k \geq 0$, designaremos $\mathcal{P}_k$ al espacio de funciones polinómicas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, de grado menor o igual que k, es decir,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2, \quad p(x) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, i_2 \geq 0 \\ i_1 + i_2 \leq k}} \alpha_{i_1, i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$$

donde α_{i_1, i_2} son números reales.

En este trabajo, nos ocuparemos del análisis de elementos finitos mediante 2-simplex de tipo (k), fundamentalmente elementos de tipo (1) y tipo (2). Veamos entonces la siguiente

Definición 2.1.5 *Un 2-simplex K de vértices a_1, a_2 y a_3 se dice de tipo (1) cuando se considera el elemento finito de Lagrange dado por $(K, \mathcal{P}_1, \Sigma_1)$, con $\Sigma_1 = \{a_i\}_{1\leq i\leq 3}$ y de tipo (2) cuando se considera $(K, \mathcal{P}_2, \Sigma_2)$, siendo $\Sigma_2 = \{a_i\}_{1\leq i\leq 3} \cup \{a_{ij}\}_{1\leq i<j\leq 3}$ donde a_{ij} es el punto medio del lado $[a_i, a_j]$.*

Observación 2.1.3 *Para los elementos de tipo (1) y (2) es fácil ver que las funciones base son*

$$p_i = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

para el primer caso, y

$$p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \leq i \leq 3$$
$$p_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j, \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

para el segundo.

Si (K, P, Σ) es un elemento finito de Lagrange, a cada función v de K se le asocia la función Πv, el P-interpolador de Lagrange de v sobre Σ. Es de interés acotar el error de interpolación $v - \Pi v$ en la norma $H^m(K)$.

El siguiente es un resultado clásico de aproximación [4, 5] para operadores que dejan invariantes a los polinomios.

Teorema 2.1.1 *Sea K un $2-$simplex y sea Π un operador lineal y continuo de $H^{k+1}(K)$ en $H^m(K)$, $0 \leq m \leq k+1$, tal que*

$$\forall\, p \in \mathcal{P}_k, \quad \Pi p = p. \tag{2.1.4}$$

Entonces existe una constante $c = c(K, \Pi)$ tal que

$$\forall\, v \in H^{k+1}(K),\ \|v - \Pi v\|_{m,K} \leq c|v|_{k+1,K}. \tag{2.1.5}$$

A fin de explicitar la dependencia de la constante c en función de las características geométricas de K, la teoría clásica introduce lo siguiente:

$$h_K = \text{ diámetro de K}$$

$$\rho_K = \text{diámetro interior de K}$$

donde el diámetro de K es la máxima distancia euclideana entre dos puntos de K y el diámetro interior de K es el diámetro máximo de círculos contenidos en K.
Usando (2.1.5) en un dominio de referencia fijo y cambiando variables se prueba

Corolario 2.1.1 *Sea (K, P, Σ) un 2-simplex de tipo (k). Existe una constante C que sólo depende de k tal que para cada entero m, $0 \leq m \leq k+1$, se cumple*

$$\forall\, v \in H^{k+1}(K) \quad |v - \Pi v|_{m,K} \leq C\frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m}|v|_{k+1,K}$$

donde Π, denota el interpolador de Lagrange correspondiente.

2.2. Espacios de elementos finitos

Los elementos finitos que hemos definido se ensamblan para construir *espacios de elementos finitos* generando aproximaciones de funciones definidas en principio en dominios arbitrarios. Estos espacios finalmente son los utilizados como los aproximantes en el método de Galerkin descripto en el Capítulo 1.

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^2$, con frontera Γ, y supongamos que Ω admite la siguiente descomposición en elementos:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \tag{2.2.1}$$

donde

1. Cada elemento K de $\mathcal{T}_h$ es un $2 - simplex$ de tipo (k).
2. El interior de dos elementos de $\mathcal{T}_h$ distintos es disjunto, es decir, $\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset$.
3. Cada lado de un $K_j \in \mathcal{T}_h$ corresponde al lado de otro $K_i \in \mathcal{T}_h$ (salvo que el lado se encuentre en la frontera Γ de Ω). En este caso K_j y K_i se denominan adyacentes.

Definición 2.2.1 *Cada descomposición $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ que verifica las tres propiedades anteriores se denomina triangulación de $\bar{\Omega}$. El parámetro h se define como*

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \tag{2.2.2}$$

donde h_K es el diámetro del elemento K.

Consideramos los siguientes espacios de dimensión finita

$$X_h = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}); \forall\, K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_K\} \tag{2.2.3}$$

y

$$X_{oh} = \{v \in X_h; v|_\Gamma = 0\}. \tag{2.2.4}$$

X_h es un subespacio de $H^1(\Omega)$ y por lo tanto X_{oh} es un subespacio de $H_0^1(\Omega)$.

Como hemos visto, la teoría de aproximación propuesta se basa en buscar una solución aproximada u_h en V_h del problema original, donde

$$V_h = X_h \;\text{ si }\; V = H^1(\Omega) \;\text{ o }\; V_h = X_{oh} \;\text{ si }\; V = H_0^1(\Omega) \tag{2.2.5}$$

Para acotar la mejor aproximación $inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}$, que interviene en el error de $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$, se introduce el operador Π_h que a cada función v continua sobre $\bar{\Omega}$ le hace corresponder la función $\Pi_h v$ de $L^2(\Omega)$ definida por

$$\forall\, K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall\, x \in \overset{\circ}{K}, \quad \Pi_h v(x) = \Pi_K v(x) \tag{2.2.6}$$

donde Π_K es el operador de P_K-interpolación sobre Σ_K.

Sin hipótesis suplementarias sobre los elementos finitos, la función $\Pi_h v$ generalmente no es continua sobre $\bar{\Omega}$ y por lo tanto no pertenece a V_h de modo que no se podría elegir $u_h = \Pi_h u$. Sin embargo si tomamos en cada polígono K elementos finitos simpliciales del mismo grado (algo que supondremos de ahora en mas) esto se verifica. Luego el operador de interpolación Π_h, definido en (2.2.6) de $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ en $L^2(\Omega)$, toma valores en $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ y naturalmente

$$X_h = \{\Pi_h v; v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})\} \tag{2.2.7}$$

y

$$X_{oh} = \{\Pi_h v; v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), v|_\Gamma = 0\} \tag{2.2.8}$$

donde X_h y X_{oh} son los subespacios de $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ introducidos en (2.2.3) y (2.2.4).
Se introduce el conjunto de *nodos* de elementos finitos

$$\Sigma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K$$

con el fin de clasificar a los últimos puntos distinguiremos aquellos que pertenecen a la frontera Γ de Ω

$$\Sigma_h = \{a_i\}_{1 \le i \le I} \text{ donde } card(\Sigma_h) = I$$

y reordenando adecuadamente

$$\Sigma_{oh} \stackrel{def}{=} \Sigma_K \cap \Omega = \{a_i\}_{1 \le i \le I_0} \text{ donde } card(\Sigma_{oh}) = I_0 < I.$$

Para cada entero i, $1 \le i \le I$, sea φ_i la función de X_h tal que

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij},\ 1 \le j \le I. \tag{2.2.9}$$

Si v es una función continua sobre $\bar{\Omega}$, se cumple

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^{I} v(a_i)\varphi_i.$$

Por lo tanto

Observación 2.2.1 *El conjunto de funciones φ_i, $1 \le i \le I$, definidas en (2.2.9) constituyen una base del espacio X_h y cada función v de X_h se escribe como*

$$v = \sum_{i=1}^{I} v(a_i)\varphi_i.$$

De manera similar, el conjunto de funciones φ_i, $1 \le i \le I_0$, constituye una base del espacio X_{oh} y cada función v de X_{oh} se escribe como

$$v = \sum_{i=1}^{I_0} v(a_i)\varphi_i.$$

Cabe señalar que las funciones φ_i tienen una ventaja práctica fundamental en el método de elementos finitos y es la de tener un soporte pequeño, que resulta ser el conjunto de elementos $K \in \mathcal{T}_h$ en los que pertenece el nodo a_i. Esto conduce finalmente a la resolución de sistemas ralos. Notemos además que la restricción de φ_i a cada elemento K es una función de la base del elemento finito (K, P_K, Σ_K).

Definición 2.2.2 *Decimos que $\mathcal{T}_h$ es una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$ si existe una constante $\eta \geq 1$ tal que*

$$\forall\, h, \forall\, K \in \mathcal{T}_h, \frac{h_K}{\rho_K} \leq \eta \tag{2.2.10}$$

Para 2-simplex esta condición equivale a la existencia de un ángulo $\theta_0 > 0$ tal que

$$\forall\, h, \forall\, K \in \mathcal{T}_h, \theta_K \geq \theta_0$$

donde θ_K es el ángulo menor del triángulo K.

El siguiente teorema brinda un criterio para determinar si un método obtenido por elementos finitos es convergente. El mismo vale para elementos finitos generales (incluyendo elementos curvos que no son considerados en este trabajo) y un $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto arbitrario que verifique (2.2.1), ya que en este caso se tiene que los espacios discretos están incluídos en los correspondientes espacios continuos. En la demostración de teorema, la constante C puede cambiar línea a línea.

Teorema 2.2.1 *Sea Ω un abierto poligonal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{T}_h$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$ por $2-$simplex de tipo (k). Consideremos los problemas $(\mathcal{P}_h)$ y $(\mathcal{P})$, donde los espacios asociados están dados respectivamente por $V_h = X_{oh}$, $V = H_0^1(\Omega)$. Entonces el método de elementos finitos es convergente, es decir, u_h del problema converge a u en $H^1(\Omega)$:*

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0.$$

Más aún, si la solución $u \in H^{k+1}(\Omega)$, este método es por lo menos de orden k. Es decir, existe una constante C independiente de h tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^k |u|_{k+1,\Omega}.$$

Demostración. Supongamos primero que la solución $u \in H^{k+1}(\Omega)$, entonces, por el Teorema 1.1.4, es continua sobre $\bar{\Omega}$ y podemos construir la función $\Pi_h u$. Luego, debido a que consideramos elementos finitos simpliciales, $\Pi_h u$ pertenece al subespacio V_h de V.
Debido al Lema 1.2.1 se deduce

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}.$$

Como la restricción de $\Pi_h u$ a cada $K \in \mathcal{T}_h$ es, por definición el P_k-interpolador $\Pi_K u$ de u sobre Σ_K, se cumple

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \Pi_K u\|_{1,K}^2 \right)^{1/2}$$

Por el Corolario 2.1.1

$$|u - \Pi_K u|_{1,K} \leq C h_K^k |u|_{k+1,K}$$

y

$$\|u - \Pi_K u\|_{0,K} \leq C h_K^{k+1} |u|_{k+1,K},$$

Donde la constante depende de la regularidad (2.2.10) de la malla η. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_K u\|_{1,K} &= \left(\|u - \Pi_K u\|_{0,K}^2 + |u - \Pi_K u|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left\{ 1 + h_K \right\}^{1/2} h_K^k |u|_{k+1,K} \\ &\leq C \left\{ 1 + diam(\Omega) \right\}^{1/2} h_K^k |u|_{k+1,K}. \end{aligned}$$

Luego

$$\|u - \Pi_K u\|_{1,K} \leq C h^k |u|_{k+1,K}.$$

Entonces,

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \leq C h^k \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u|_{k+1,K}^2 \right)^{1/2} = C h^k |u|_{k+1,\Omega}. \tag{2.2.11}$$

Por lo tanto

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \leq h^k |u|_{k+1,\Omega}.$$

Veamos ahora que el método converge aunque la solución este solo en el espacio $H^1(\Omega)$: Consideremos el subespacio denso de V, dado por $\mathcal{V} = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Claramente Π_h es una aplicación de $\mathcal{V}$ en V_h que verifica

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq C h^k |v|_{k+1,\Omega} \ \text{ para cada } v \in \mathcal{V}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} = 0.$$

Sea $\epsilon > 0$, como $\mathcal{V}$ es denso en V, existe $v \in \mathcal{V}$ tal que

$$\|u - v\|_{1,\Omega} \leq \frac{\epsilon}{2C}$$

donde C es la constante del lema de Cea.

Por otro lado, como $\lim_{h \to 0} \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} = 0$ existe $h(\epsilon) > 0$ tal que

$$\forall\, h \leq h(\epsilon),\ \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq \frac{\epsilon}{2C}.$$

Por el lema de Cea

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C\|u - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq C(\|u - v\|_{1,\Omega} + \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega}) \quad \forall\, h \leq h(\epsilon)$$

Por lo que concluimos que

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0.$$

□

Capítulo 3

Análisis del método de elementos finitos en dominios suaves en $\mathbb{R}^2$

En el análisis de convergencia clásico desarrollado previamente se utiliza fuertemente el hecho de que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

Esto naturalmente no es cierto en numerosas aplicaciones. Por un lado los elementos mas simples poseen bordes rectos lo que implica que con ellos solo podrán representarse con exactitud bordes poligonales en $\mathbb{R}^2$ o poliedrales en $\mathbb{R}^3$. Este limitante puede rebajarse admitiendo elementos finitos con bordes curvos al costo de incrementar la complejidad computacional y de programación del método final.

Este capítulo es el núcleo central de este trabajo y en él discutimos las distintas complicaciones que aparecen en dominios suaves generales al utilizar elementos lineales. Comenzaremos el análisis en dominios convexos siguiendo una vez más [5] (en este caso extenderemos el análisis a elementos subparamétricos de grado mayor)y luego sobre bordes generales siguiendo el trabajo [1]. Para el primer caso nos centramos en el problema homogéneo de Dirichlet, mientras que el segundo abarca el caso general no homogéneo. En todos los casos trabajamos en $\mathbb{R}^2$ que presenta básicamente las dificultades intrínsecas del problema.

De ahora en más, C denotará a una constante que puede cambiar línea a línea e independiente de h y de las funciones involucradas. Finalmente, la notación $x \sim y$ significa, como es usual, $x \leq Cy$ e $y \leq Cx$.

3.1. Mallas en Dominios Regulares

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto con frontera Γ de clase $\mathcal{C}^2$. Sean $x^{(0)}$,..., $x^{(N-1)}$, N puntos de Γ e identifiquemos los índices módulo N, en particular $x^{(N)} = x^{(0)}$. Sea Ω_h el dominio poligonal con vértices $x^{(0)}$,..., $x^{(N-1)}$. Con $\Gamma_h^{(j)}$ denotamos el segmento delimitado por $x^{(j)}$ y $x^{(j+1)}$ y con Γ_h la frontera de Ω_h (ver Figura 3.1). De forma análoga, $\Gamma^{(j)}$ corresponde a la parte de Γ entre $x^{(j)}$ y $x^{(j+1)}$.

La siguiente es una hipótesis general que llamaremos (HA):

Consideramos que la triangulación $\mathcal{T}_h$ correspondiente a Ω_h es regular y uniforme.

Llamamos $h_j = |\Gamma_h^{(j)}|$ y $h = max_{0\leq j\leq N-1}\{h_j\}$. Por lo tanto, gracias a (HA) $h \sim h_j$, para $0 \leq j \leq N-1$.

Observación 3.1.1 *Debido a considerar triangulaciones $\mathcal{T}_h$ regulares y uniformes la definición de h presentada previamente y la dada en (2.2.2) son equivalentes.*

Para el estudio del caso no homogéneo hace falta la siguiente hipótesis suplementaria que denominaremos (HB):

Consideramos que la triangulación $\mathcal{T}_h$ correspondiente a Ω_h verifica que, si observamos aquellos triángulos $K \in \mathcal{T}_h$ que tienen por lo menos un vértice sobre Γ_h , entonces esos vértices son necesariamente algún $x^{(j)}$ con $0 \leq j \leq N-1$.

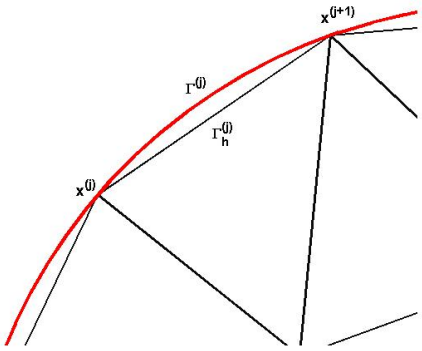

Figura 3.1: Detalle Malla

Comenzamos por transferir de manera natural el dato de Dirichlet de Γ a Γ_h. Para ello necesitaremos parametrizar Γ_h^j y Γ^j para $0 \leq j \leq N-1$:

Notemos que podemos construir una aplicación $x_h : [a;b] \to \Gamma_h$ asociada a una partición $\{[t_j, t_{j+1}]\}_{0\leq j\leq N-1}$, del intervalo $[a,b]$ (es decir $(t_j, t_{j+1}) \cap (t_i, t_{i+1}) = \emptyset \quad si \quad i \neq j \quad y \quad \bigcup_{j=0}^{N-1}[t_j, t_{j+1}] = [a,b]$) de modo tal que x_h sea continua, lineal en cada $(t_i; t_{i+1})$, biyectiva en (a,b) y tal que $x_h(a) = x_h(b)$. Más aún podemos suponer que x_h está parametrizada por longitud de arco, es decir $\|x_h'\| = 1$. A partir de dicha x_h se considera para cada $0 \leq j \leq N-1$ la función $x_h^j : [t_j, t_{j+1}] \to \Gamma_h^j$ tal que $x_h^j = x_h|_{[t_j,t_{j+1}]}$ (que es lineal por construcción) y parametriza a cada Γ_h^j. Notemos en particular que $x_h^j(t_j) = x^{(j)}$ y $x_h^j(t_{j+1}) = x^{(j+1)}$.

Considerando $\nu^{(j)}$ la normal unitaria exterior a $\Gamma_h^{(j)}$ se induce la siguiente parametrización en $\Gamma^{(j)}$:

$$X_h(t) = x_h(t) + \delta_{x_h(t)}\nu^{(j)}, \tag{3.1.1}$$

donde $|\delta_{x_h(t)}|$ es la distancia entre $x_h(t)$ y Γ a lo largo de $\nu^{(j)}$. Asumimos que h es suficientemente chico de manera que $X_h(t)$ esté bien definido. Además $\delta_{x_h(t)} \in C^2$ por ser de clase C^2 la frontera Γ. Por otra parte $|\delta_{x_h(t)}| \leq Ch^2$, en efecto $\delta_{x_h(t)}$ se anula en los extremos de cada $[t_j, t_{j+1}]$ y su derivada allí tiene orden h, ya que $\delta'_{x_h(\tilde{t}_j)} = 0$ en cierto $\tilde{t}_j \in (t_j, t_{j+1})$, lo que implica $|\delta_{x_h(t)}| \leq Ch^2$.
Notemos que como Γ es de clase $\mathcal{C}^2$ se tiene que para h suficientemente chico, la distancia máxima entre Γ y Γ_h satisface

$$dist(\Gamma, \Gamma_h) \leq Ch^2 \tag{3.1.2}$$

donde

$$dist(\Gamma, \Gamma_h) = max_{x\in\Gamma_h}\{|x + tv| : x + tv \in \Gamma\}$$

y v denota la normal unitaria exterior a Γ_h.
Vamos a asociar funciones definidas en Γ y en Γ_h: dada g en Γ consideramos $\tilde{g}$ en Γ_h del siguiente modo

$$\tilde{g}(x_h(t)) = g(X_h(t)), \quad x_h(t) \in \Gamma_h^{(j)}. \tag{3.1.3}$$

Observemos que $\tilde{g}(x) = g(x)$ para $x = x^{(j)}$ o $x = x^{(j+1)}$ y que la asignación inversa también está bien definida.

Lema 3.1.1 *Existen dos constantes c y C, independientes de h, tal que*

$$c|g|_{0,\Gamma} \leq |\tilde{g}|_{0,\Gamma_h} \leq C|g|_{0,\Gamma}. \tag{3.1.4}$$

Demostración. De (3.1.1) se sigue que existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tal que $C_1 \leq \|X_h'\| \leq C_2$. Notemos que esto equivale a $C_1\|x_h'\| \leq \|X_h'\| \leq C_2\|x_h'\|$ pues x_h parametriza por longitud de arco. Entonces

$$\int_{\Gamma^j} g(s)^2\,ds = \int_{x^{(j)}}^{x^{(j+1)}} g(X_h(t))^2\|X_h'(t)\|\,dt \leq \int_{x^{(j)}}^{x^{(j+1)}} \tilde{g}(x_h(t))^2 C_2\|x_h'(t)\|\,dt = C_2\int_{\Gamma_h^j} \tilde{g}(s)^2\,ds$$

y sumando sobre j obtenemos que $\frac{1}{C_2}|g|_{0,\Gamma} \leq |\tilde{g}|_{0,\Gamma_h}$, lo cual indica que $c|g|_{0,\Gamma} \leq |\tilde{g}|_{0,\Gamma_h}$. La otra desigualdad se sigue análogamente. □

Para una función arbitraria $w \in H^r(\Omega)$ con $1 \leq r \leq 2$ denotaremos también con w a la función extendida a $\mathbb{R}^2$ por el operador E definido en el Teorema 1.1.5.

Se precisarán estimaciones para funciones definidas en la región encerrada entre Ω y Ω_h. Sea $\Omega_h^{(j)}$ la región delimitada por $\Gamma^{(j)}$ y $\Gamma_h^{(j)}$ (ver Figura 3.2). En los cálculos que siguen

asumiremos sin pérdida de generalidad que $\Gamma_h^{(j)}$ tiene su extremo izquierdo en el origen y que puede escribirse como

$$\Gamma_h^{(j)} = \{(x,y)|\ \ y = 0,\ 0 \leq x \leq C_1 h\}$$

y análogamente

$$\Gamma^{(j)} = \{(x,y)|\ \ y = \delta_x \geq 0,\ 0 \leq x \leq C_1 h\}$$

con $|\delta_x| \leq C_2 h^2$ y $|\delta_x^{'}| \leq C_3 h$.

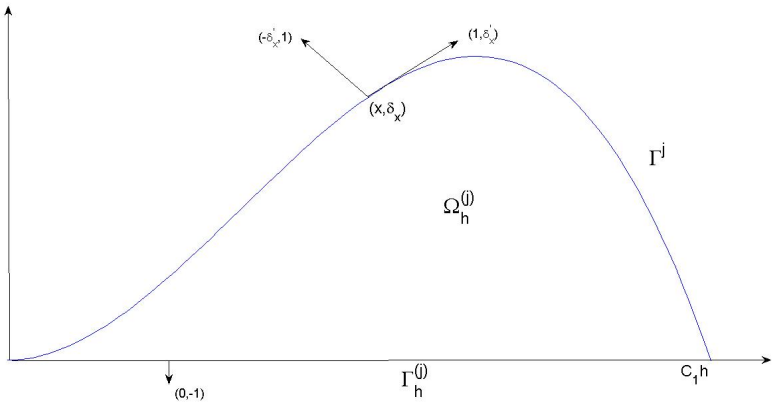

Figura 3.2: Región $\Omega_h^{(j)}$

Lema 3.1.2 *Sea $\varphi \in H^1(\Omega_h^{(j)})$. Luego se verifican las siguientes desigualdades*

$$\|\varphi\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}} \leq C\left(h^2|\varphi|^2_{0,\Gamma^{(j)}} + h^4\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}}\right). \tag{3.1.5}$$

$$\|\varphi\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}} \leq C\left(h^2|\varphi|^2_{0,\Gamma_h^{(j)}} + h^4\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}}\right). \tag{3.1.6}$$

$$|\varphi|^2_{0,\Gamma^{(j)}} \leq Ch^2\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}} \quad si \quad \varphi = 0 \quad en \quad \Gamma_h^{(j)} \tag{3.1.7}$$

y

$$|\varphi|^2_{0,\Gamma_h^{(j)}} \leq Ch^2\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}} \quad si \quad \varphi = 0 \quad en \quad \Gamma^{(j)} \tag{3.1.8}$$

Demostración. Sea $\varphi \in H^1(\Omega_h^{(j)})$. Entonces

$$\int_{\Omega_h^{(j)}} div(0, y\varphi^2)\,dx\,dy = \int_{\Omega_h^{(j)}} \frac{\partial y\varphi^2}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\Omega_h^{(j)}} \varphi^2\,dx\,dy + 2\int_{\Omega_h^{(j)}} y\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx\,dy$$

y por teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega_h^{(j)}} div(0, y\varphi^2)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega_h^{(j)}} (0, y\varphi^2)\eta\, ds = -\int_{\Gamma_h^{(j)}} y\varphi^2\, dx + \int_{\Gamma^{(j)}} \frac{y\varphi^2}{\sqrt{1+\delta_x'^{\,2}}}\, ds.$$

Luego, como $\int_{\Gamma_h^{(j)}} y\varphi^2\, dx = 0$ ya que $y = 0$ en $\Gamma_h^{(j)}$, obtenemos

$$\int_{\Omega_h^{(j)}} \varphi^2\, dx\, dy = \int_{\Gamma^{(j)}} y\varphi^2(1+\delta_x'^{\,2})^{-1/2}\, ds - 2\int_{\Omega_h^{(j)}} y\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dx\, dy. \tag{3.1.9}$$

Utilizando la desigualdad de Schwarz, la de Young y sabiendo que $y \le Ch^2$ en $\Omega_h^{(j)}$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_h^{(j)}} |y\varphi|\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|\, dx\, dy &\le \left(\int_{\Omega_h^{(j)}} y^2\varphi^2\, dx\, dy\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_h^{(j)}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 dx\, dy\right)^{1/2} \\
&\le \frac{Ch^2}{\varepsilon}\varepsilon\left(\int_{\Omega_h^{(j)}} \varphi^2\, dx\, dy\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_h^{(j)}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 dx\, dy\right)^{1/2} \\
&= C\left[\varepsilon\left(\int_{\Omega_h^{(j)}} \varphi^2\, dx\, dy\right)^{1/2}\right]\left[\frac{h^2}{\varepsilon}\left(\int_{\Omega_h^{(j)}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 dx\, dy\right)^{1/2}\right] \\
&\le \frac{C}{2}\left[\varepsilon^2\int_{\Omega_h^{(j)}} \varphi^2\, dx\, dy + \frac{h^4}{\varepsilon^2}\int_{\Omega_h^{(j)}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 dx\, dy\right]
\end{aligned}$$

y por lo tanto, usando (3.1.9) y tomando ε talque $C\varepsilon^2 < 1/4$,tenemos que

$$\|\varphi\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}} \le C\left(h^2|\varphi|^2_{0,\Gamma^{(j)}} + h^4\Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}}\right)$$

por lo que se verifica (3.1.5).

Análogamente

$$\int_{\Omega_h^{(j)}} div(0,(y-\delta_x)\varphi^2)dx\, dy = \int_{\Omega_h^{(j)}} \frac{\partial(y-\delta_x)\varphi^2}{\partial y}dx\, dy = \int_{\Omega_h^{(j)}} \varphi^2 dx\, dy + 2\int_{\Omega_h^{(j)}} (y-\delta_x)\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\, dy$$

y aplicando nuevamente el teorema de la divergencia y observando que $y = \delta_x$ en $\Gamma^{(j)}$ obtenemos

$$\int_{\Omega_h^{(j)}} div(0,(y-\delta_x)\varphi^2)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega_h^{(j)}} (0,(y-\delta_x)\varphi^2)\eta\, ds = \int_{\Gamma_h^{(j)}} \delta_x\varphi^2\, dx$$

Luego

$$\int_{\Omega_h^{(j)}} \varphi^2\, dx\, dy = \int_{\Gamma_h^{(j)}} \delta_x\varphi^2\, dx - 2\int_{\Omega_h^{(j)}} (y-\delta_x)\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dx\, dy \tag{3.1.10}$$

Realizando un análisis análogo al anterior y observando que $|y-\delta_x| \leq Ch^2$ se obtiene

$$\int_{\Omega_h^{(j)}} |(y-\delta_x)\varphi| \Big|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big| \, dx\, dy \leq \frac{C}{2}\left[\varepsilon^2 \int_{\Omega_h^{(j)}} \varphi^2 \, dx\, dy + \frac{h^4}{\varepsilon^2}\int_{\Omega_h^{(j)}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 dx\, dy\right]$$

Podemos concluir, utilizando (3.1.10), tomando ε talque $C\varepsilon^2 < 1/4$ y recordando que $|\delta_x| \leq Ch^2$

$$\|\varphi\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}} \leq C\left(h^2|\varphi|^2_{0,\Gamma_h^{(j)}} + h^4\Big\|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}}\right),$$

que es precisamente (3.1.6).

Ahora, si consideramos $\varphi \in H^1(\Omega_h^{(j)})$ tal que $\varphi = 0$ en $\Gamma_h^{(j)}$,

$$\varphi(x,\delta_x) - \varphi(x,0) = \varphi(x,\delta_x) = \int_0^{\delta_x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,s)\, ds$$

utilizando la desigualdad de Hölder

$$\varphi^2(x,\delta_x) \leq |\delta_x| \int_0^{\delta_x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,s)\right)^2 ds$$

y multiplicando a ambos miembros por $\sqrt{1+\delta_x'^{\,2}}$ e integrando entre 0 y h tenemos,

$$|\varphi|^2_{0,\Gamma^{(j)}} \leq Ch^2\Big\|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}} \quad \text{si} \quad \varphi = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_h^{(j)}$$

por lo que se cumple (3.1.7).

Realizando un análisis análogo al anterior se obtiene (3.1.8) □

El próximo lema se obtiene inmediatamente de (3.1.5) y (3.1.6), sumando sobre j.

Lema 3.1.3 *Sea $w \in H^1(\Omega_h)$. Luego, existe una constante C tal que*

$$\|w\|_{0,\Omega_h\setminus\Omega} \leq C(h|w|_{0,\Gamma_h} + h^2|w|_{1,\Omega_h}).$$

Además si consideramos $w \in H^1(\Omega)$ (extendida por el operador E), existe también una constante C tal que

$$\|w\|_{0,(\Omega\setminus\Omega_h)\cup(\Omega_h\setminus\Omega)} \leq C(h|w|_{0,\Gamma} + h^2|w|_{1,\Omega}).$$

Lema 3.1.4 *Sea $w \in H_0^r(\Omega)$ con $1 \leq r \leq 2$. Luego, existe una constante C tal que*

$$|w|_{0,\Gamma_h} \leq Ch^r\|w\|_{r,\Omega}.$$

Demostración. Considerando $\Omega_h^{(j)}$ y utilizando (3.1.8) tenemos que

$$|w|^2_{0,\Gamma_h^{(j)}} \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial w}{\partial y} \right\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}}.$$

Por lo tanto, para $r = 1$, sumando sobre j en la desigualdad anterior y utilizando el Teorema 1.1.5, se concluye que

$$|w|_{0,\Gamma_h} \leq Ch\|w\|_{1,\Omega}.$$

Luego, aplicando (3.1.5) a $\frac{\partial w}{\partial y}$, el Teorema 1.1.1 y teniendo en cuenta la primera desigualdad de esta demostración se puede observar que,

$$|w|^2_{0,\Gamma_h^{(j)}} \leq Ch^4\|w\|^2_{2,\Omega_h^{(j)}}.$$

Entonces, para $r = 2$, sumando nuevamente sobre j y volviendo a utilizar el Teorema 1.1.5 observamos que

$$|w|_{0,\Gamma_h} \leq Ch^2\|w\|_{2,\Omega}.$$

El resultado en $1 \leq r \leq 2$ se consigue por interpolación. □

El siguiente lema generaliza al anterior.

Lema 3.1.5 *Sea $w \in H^r(\Omega)$ con $1 \leq r \leq 2$ y g la traza de w en Γ. Luego, existe una constante C tal que*

$$|w - \tilde{g}|_{0,\Gamma_h} \leq Ch^r\|w\|_{r,\Omega}.$$

donde $\tilde{g}$ corresponde a la transferencia de g a Γ_h.

Demostración. Considerando $\Omega_h^{(j)}$ y utilizando (3.1.8) para $\psi = w(x,y) - w(x,\delta(x))$ tenemos que

$$|w - \tilde{g}|^2_{0,\Gamma_h^{(j)}} = |\psi|^2_{0,\Gamma_h^{(j)}} \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}} = Ch^2 \left\| \frac{\partial w}{\partial y} \right\|^2_{0,\Omega_h^{(j)}}. \tag{3.1.11}$$

Por lo tanto, para $r = 1$, sumando sobre j en la desigualdad anterior y utilizando el Teorema 1.1.5, se concluye que

$$|w - \tilde{g}|_{0,\Gamma_h^{(j)}} \leq Ch\|w\|_{1,\Omega}$$

Luego, aplicando (3.1.5) a $\frac{\partial w}{\partial y}$, utilizando el Teorema 1.1.1, el Teorema 1.1.5 y (3.1.11) se puede observar que

$$|w - \tilde{g}|^2_{0,\Gamma_h^{(j)}} \leq h^4\|w\|^2_{2,\Omega}.$$

Luego, sumando sobre j, tenemos que

$$|w - \tilde{g}|_{0,\Gamma_h^{(j)}} \leq h^2\|w\|_{2,\Omega}.$$

El resultado en $1 \leq r \leq 2$ se obtiene por interpolación. □

Lema 3.1.6 *Existe una constante C tal que para cada función $u \in H^2(\Omega)$,*

$$|u|_{1,\Omega\setminus\Omega_h} \leq Ch\|u\|_{2,\Omega}. \tag{3.1.12}$$

Demostración. Debido al Lema 3.1.3

$$\forall\, v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{0,\Omega\setminus\Omega_h} \leq C(h\|v\|_{0,\Gamma} + h^2|v|_{1,\Omega\setminus\Omega_h}).$$

Tomando $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, con $i = 1, 2$, y usando el Teorema 1.1.1, se obtiene (3.1.12). □

Lema 3.1.7 *Sea $u \in H^1(\Omega_h)$. Luego existe una constante C tal que*

$$\|u\|_{1,\Omega_h} \leq C(|u|_{1,\Omega_h} + |u|_{0,\Gamma_h}).$$

Demostración. La demostración puede verse en [10]. Obviamente basta ver que

$$\|u\|_{0,\Omega_h} \leq C(|u|_{1,\Omega_h} + |u|_{0,\Gamma_h}).$$

Notemos, sin embargo, que para dominios cuyo borde pueden describirse como el gráfico de una función regular la demostración es idéntica a la del Lemma 3.1.2. □

3.2. Dominios convexos

Sea Ω es un abierto, convexo de $\mathbb{R}^2$, de frontera Γ de clase C^2. En esta sección analizaremos específicamente la aproximación al problema (1.3.1) donde como siempre supondremos que $f \in L^2(\Omega)$. El problema que interesa es el estudio del efecto producido por la diferencia entre el borde verdadero y el generado por la malla de elementos finitos (ver Figura 3.3).

Volvamos a la formulación variacional de (1.3.1), llamado problema $(\mathcal{P})$ donde

$$\begin{cases} a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \\ L(v) = \int_\Omega fv \, dx \\ V = H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.2.1}$$

En esta sección consideraremos las hipótesis denominadas (HA).

Como Ω es convexo, se tiene

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} K \subset \bar{\Omega} \tag{3.2.2}$$

Para la construcción de un método de elementos finitos que permita hallar una solución aproximada u_h, se considera, para cada entero $k \geq 1$ el siguiente espacio de dimensión finita

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}_h);\, v|_{\Gamma_h} = 0, \forall\, K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_k\}.$$

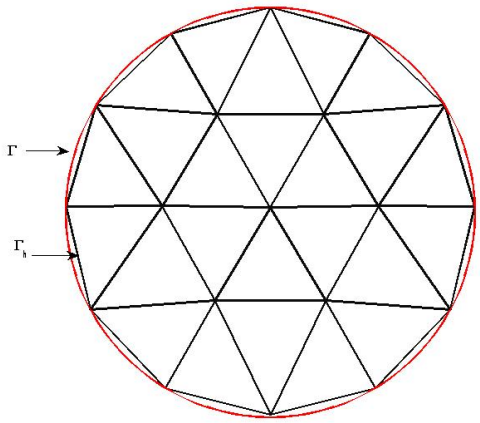

Figura 3.3: Mallado de un convexo

Notemos que 1) en sentido estricto $V_h \nsubseteq H_0^1(\Omega)$, ya que de hecho las funciones de v_h solo están definidas en Ω_h y 2) trabajar en este espacio es equivalente a asignar el dato de borde sobre Γ_h de acuerdo a (3.1.3).

Se define $u_h \in V_h$ como la solución del problema variacional

$$\forall\, v_h \in V_h,\ a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \tag{3.2.3}$$

donde

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \nabla u_h \nabla v_h \, dx$$

y

$$L_h(v_h) = \int_{\Omega_h} f v_h \, dx.$$

Como V_h es un subespacio cerrado de $H_0^1(\Omega_h)$ (3.2.3) tiene solución única en Ω_h .
Para analizar este método en Ω, se introduce un subespacio $\tilde{V}_h$ de $H_0^1(\Omega)$ formado por funciones continuas sobre $\bar{\Omega}$, nulas en $\Omega \setminus \Omega_h$ y cuya restricción a Ω_h pertenece al espacio V_h, es decir

$$\tilde{V}_h = \{\tilde{v} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}); \tilde{v}|_{\Omega\setminus\Omega_h} = 0, \tilde{v}|_{\Omega_h} \in V_h\}.$$

Las funciones $\tilde{v_h}$ son la prolongación por cero en $\Omega \setminus \Omega_h$ de v_h. Por lo tanto, si consideramos a $\tilde{u_h}$ como la extensión por cero en $\Omega \setminus \Omega_h$ de la solución u_h de (3.2.3), esta función es la solución en $\tilde{V}_h$ del problema variacional:

$$\forall\, \tilde{v_h} \in \tilde{V}_h, \quad a(\tilde{u_h}, \tilde{v_h}) = L(\tilde{v_h}) \tag{3.2.4}$$

donde $a(\cdot,\cdot)$ y $L(\cdot)$ son los definidos en (3.2.1).

Como $\tilde{V_h}$ es un subespacio de V, por el Lema 1.2.1

$$|u - \tilde{u_h}|_{1,\Omega} \leq C \inf_{\tilde{v_h} \in \tilde{V_h}} |u - \tilde{v_h}|_{1,\Omega} \tag{3.2.5}$$

Por otro lado, usando que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

y $\tilde{V_h} \subset H_0^1(\Omega)$ se tiene que

$$a(u, \tilde{v_h}) = L(\tilde{v_h}) \quad \forall\, \tilde{v_h} \in \tilde{V_h}$$

lo que implica

$$a_h(u, v_h) = L_h(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h.$$

De lo observado previamente y (3.2.3) se obtiene

$$a_h(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall\, v_h \in V_h$$

Luego podemos deducir

$$|u - u_h|_{1,\Omega_h} \leq C \inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{1,\Omega_h}. \tag{3.2.6}$$

Para analizar el orden de convergencia se introduce el operador de interpolación Π_h en Ω_h que a cada función u continua en $\overline{\Omega}$, le asocia la función $\Pi_h u$ continua en $\overline{\Omega}_h$ tal que $\Pi_h u|_{K \in \mathcal{T}_h}$ corresponde al interpolador de Lagrange de grado k.
Si la función u es nula en Γ, la función $\Pi_h u = 0$ en los vértices de Γ_h. Esto implica $\Pi_h u \equiv 0$ en Γ_h si $k = 1$, por lo tanto $\Pi_h u \in V_h$. Por el contrario, si $k \geq 2$, la función $\Pi_h u$ no necesariamente es nula en Γ_h, es decir, $\Pi_h u \notin V_h$. Esto nos lleva a distinguir el caso $k = 1$ del caso $k \geq 2$.

Lema 3.2.1 *Si $k = 1$ entonces existe una constante C, tal que, para cada función $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*

$$\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{1,\Omega_h} \leq Ch \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right) |u|_{2,\Omega}.$$

Demostración. Sea $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Dicha función es continua en $\overline{\Omega}$ ya que estamos en dimensión 2. Como $k = 1$ la función $\Pi_h u$ es continua en $\overline{\Omega}_h$. Por lo tanto

$$\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{1,\Omega_h} \leq |u - \Pi_h u|_{1,\Omega_h}$$

Por Corolario 2.1.1, tomando $m = k = 1$, se obtiene

$$\forall\, K \in \mathcal{T}_h, \quad |u - \Pi_h u|_{1,K} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |u|_{2,K}.$$

Por lo tanto

$$|u - \Pi_h u|_{1,\Omega_h} \leq Ch \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right) |u|_{2,\Omega_h} \leq Ch \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right) |u|_{2,\Omega}.$$

Luego

$$\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{1,\Omega_h} \leq |u - \Pi_h u|_{1,\Omega_h} \leq Ch \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right) |u|_{2,\Omega}$$

lo que demuestra el lema. □

Lema 3.2.2 *Sea $k \geq 2$, entonces existe una constante C, tal que, para cada función $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, tenemos que*

$$\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{3/2} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right) \|u\|_{3,\Omega}.$$

Demostración. Basta realizar la demostración para $k = 2$ ya que en ese caso se observa que el orden de convergencia no puede mejorarse independientemente de la regularidad de la función u.

Sea $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. La función $\Pi_h u$ es continua en $\overline{\Omega}_h$, cuadrática en cada triángulo $K \in \mathcal{T}_h$, e interpola a u en los vértices y puntos medios de cada K. Se puede observar que esta función no pertenece a V_h en general. Por lo tanto introducimos una nueva función $\Pi_h^0 u \in V_h$, que interpola a u en los puntos de Ω_h que son vértices y puntos medios de cada triángulo K salvo en los puntos medios ubicados en Γ_h donde $\Pi_h^0 u$ vale cero. Las funciones Π_h u y $\Pi_h^0 u$ sólo difieren en los triángulos $K \in \mathcal{T}_h$ que tienen algún lado sobre Γ_h.

Supongamos, que todos los triángulos $K \in \mathcal{T}_h$ tienen como máximo un lado que se encuentra en Γ_h. Y sea $\partial\mathcal{T}_h$ el conjunto de todos los triángulos $K \in \mathcal{T}_h$ con un lado que se encuentra en Γ_h (ver Figura 3.4).

La función $\Pi_h^0 u \in V_h$ por definición, por lo tanto

$$\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{1,\Omega_h} \leq |u - \Pi_h^0 u|_{1,\Omega_h} \leq |u - \Pi_h u|_{1,\Omega_h} + |\Pi_h u - \Pi_h^0 u|_{1,\Omega_h}. \tag{3.2.7}$$

El Corolario 2.1.1, con $m = k = 2$, nos proporciona la siguiente cota

$$|u - \Pi_h u|_{1,K} \leq C \frac{h_K^3}{\rho_K} |u|_{3,K}.$$

Por lo tanto

$$|u - \Pi_h u|_{1,\Omega_h} \leq Ch^2 \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right) |u|_{3,\Omega}. \tag{3.2.8}$$

Por otra parte la función $\Pi_h u - \Pi_h^0 u$ es no nula sólo para $K \in \partial\mathcal{T}_h$.

Para cada triángulo $K \in \partial\mathcal{T}_h$ valen las siguientes observaciones:

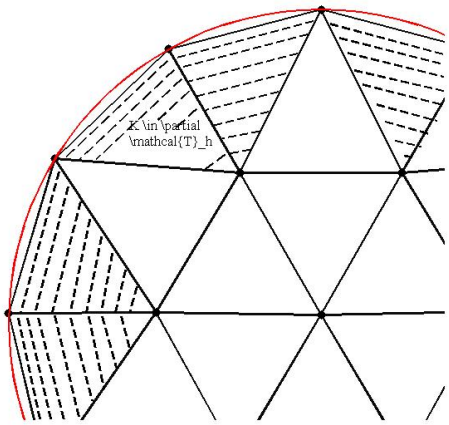

Figura 3.4: Triángulos del borde

C1) Notaremos $a_{i,K}$, con $1 \leq i \leq 3$, a los vértices del triángulo K de modo tal que el lado $[a_{1,K}; a_{2,K}]$ se encuentre sobre Γ_h.

C2) Notaremos $a_{i+3,K}$ al punto medio de cada lado del triángulo K opuesto al vértice $a_{i,K}$ con $1 \leq i \leq 3$.

C3) $p_{i,K} \in P_2$ corresponde a la función de base del triángulo K asociado al nodo $a_{i,K}$ con $1 \leq i \leq 6$.

C4) $a^*_{6,K}$ es la intersección entre la mediatriz del segmento $[a_{1,K}; a_{2,K}]$ y el arco correspondiente a Γ subyacente a este segmento.

C5) $\mathscr{O}_K$ es el abierto delimitado por el lado $[a_{1,K}; a_{2,K}]$ y el arco $\overbrace{a_{1,K}a^*_{6,K}a_{2,K}}$ de Γ y $(a_{6,K}, \xi_K, \eta_K)$ es el eje ortonormal $a_{6,K}a_{2,K}$ y $a_{6,K}a^*_{6,K}$.

Sin riesgo a confusión se omitirá el índice K, y en la Figura 3.5 mostramos la notación descripta.

La restricción de $\Pi_h u - \Pi^0_h u$ al triángulo $K \in \partial\mathcal{T}_h$ es la función cuadrática definida por:

$$\begin{cases} (\Pi_h u - \Pi^0_h u)(a_i) &= 0 \qquad \text{para } \ 1 \leq i \leq 5 \\ (\Pi_h u - \Pi^0_h u)(a_6) &= u(a_6) \end{cases}$$

Es decir,

$$(\Pi_h u - \Pi^0_h u)|_K = u(a_6)p_6$$

Debido a que u es nula en a^*_6, punto de la frontera Γ de Ω, y al teorema del valor medio

$$|u(a_6)| \leq |a_6 a^*_6| \sup_{x \in [a_6 a^*_6]} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\right|.$$

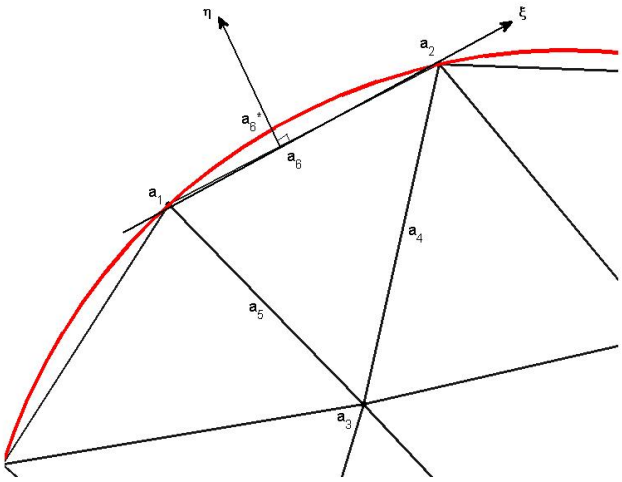

Figura 3.5: Detalle notación.

Por (3.1.2) y Teorema 1.1.4,

$$|u(a_6)| \leq Ch_K^2 \|\frac{\partial u}{\partial \eta}\|_{2,\Omega} \leq Ch_K^2 \|u\|_{3,\Omega}.$$

Por otra parte, como p_6 es una función de base sobre el triángulo K de tipo (2), se deduce de las características geométricas de K y cambio de variables

$$|p_6|_{1,K} \leq C\frac{h_K}{\rho_K}.$$

Resumiendo, obtenemos

$$\forall\, K \in \partial\mathcal{T}_h \quad |\Pi_h u - \Pi_h^0 u|_{1,K} \leq C\frac{h_K^3}{\rho_K}\|u\|_{3,\Omega}.$$

Entonces

$$|\Pi_h u - \Pi_h^0 u|_{1,\Omega_h} = \left(\sum_{K\in\partial\mathcal{T}_h} |\Pi_h u - \Pi_h^0 u|_{1,K}^2\right)^{1/2} \leq C\left(\sum_{K\in\partial\mathcal{T}_h} h_K^4\right)^{1/2} \max_{K\in\partial\mathcal{T}_h}\left(\frac{h_K}{\rho_K}\right)\|u\|_{3,\Omega}.$$

Además

$$\left(\sum_{K\in\partial\mathcal{T}_h} h_K^4\right)^{1/2} \leq h^{3/2}\left(\sum_{K\in\partial\mathcal{T}_h} h_K\right)^{1/2} \leq Ch^{3/2}|\Gamma_h|^{1/2} \leq Ch^{3/2}|\Gamma|^{1/2}.$$

Por lo tanto, para una constante C independiente de h

$$|\Pi_h u - \Pi_h^0 u|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{3/2} \max_{K \in \partial \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right) \|u\|_{3,\Omega}. \tag{3.2.9}$$

Luego, el lema se deduce de (3.2.7), (3.2.8) y (3.2.9). □

Teorema 3.2.1 *Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{R}^2$ con frontera C^2. Sea u la solución del problema $(\mathcal{P})$ asociado a (3.2.1) y $\tilde{u}_h$ la solución de (3.2.4). Supongamos que la familia de triangulaciones $\mathcal{T}_h$ es regular. Entonces existen constantes C independientes de h tales que para $k = 1$*

$$|u - \tilde{u}_h|_{1,\Omega} \leq Ch\|u\|_{2,\Omega} \quad si \quad u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.2.10}$$

y para $k \geq 2$

$$|u - u_h|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{3/2}\|u\|_{3,\Omega} \quad si \quad u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \tag{3.2.11}$$

Demostración. Utilizando el Lema 3.2.1 y teniendo en cuenta que la familia de triangulaciones $\mathcal{T}_h$ es regular podemos observar que, para $k = 1$,

$$\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{1,\Omega_h} \leq Ch|u|_{2,\Omega}.$$

Considerando las características de $\tilde{u}_h$,(3.2.6), el Lema 3.1.6 y el Lema 3.2.1 se obtiene

$$|u - \tilde{u_h}|_{1,\Omega}^2 = |u - u_h|_{1,\Omega_h}^2 + |u|_{1,\Omega \setminus \Omega_h}^2 \leq Ch^2|u|_{2,\Omega}^2 + Ch^2\|u\|_{2,\Omega}^2 \leq Ch^2\|u\|_{2,\Omega}^2.$$

Entonces obtenemos (3.2.10)

$$|u - \tilde{u_h}|_{1,\Omega} \leq Ch\|u\|_{2,\Omega} \quad \text{con} \quad u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Para $k \geq 2$, (3.2.11) se deduce inmediatamente de (3.2.6) y del Lema 3.2.2. □

Se concluye que, para $k = 1$ el error de aproximar a u, solución del problema $(\mathcal{P})$ por $\tilde{u}_h$, solución de (3.2.4) es el mismo que en el capítulo anterior, donde Ω es un abierto poligonal. Sin embargo para $k \geq 2$ no se logra mantener la cota del error.

3.3. Resultados preliminares para dominios regulares generales

En lo que resta del trabajo, al igual que en la sección anterior, interesa estudiar el efecto producido por la diferencia entre el borde verdadero de Ω y el generado por la malla de

elementos finitos. Sin embargo analizaremos acá el caso general en el que Ω es un dominio abierto de $\mathbb{R}^2$ con frontera regular y además trabajaremos con el problema general de Dirichlet no homogéneo descripto en (1.3.4) y con su variante del probema $(\mathcal{P})$ descripto también en (1.3.5).

En esta sección surge la necesidad de utilizar las hipótesis denominadas HB.

Con el fin de definir y analizar nuestro método de elementos finitos se necesitará definir ciertos espacios de funciones polinómicas a trozos en Γ y Γ_h.
Sea

$$S_h(\Gamma_h) = \{f : \Gamma_h \to \mathbb{R} / f \in C(\Gamma_h), f \circ x_h^j(t) \in P_1[t], \quad t \in [t_j, t_{j+1}], 0 \leq j \leq N-1\}.$$

Veamos que $S_h(\Gamma_h)$ es un espacio vectorial de $dim S_h(\Gamma_h) = N$ donde N corresponde al número de nodos en el borde del dominio.
Por propiedades elementales de álgebra se puede observar $S_h(\Gamma_h)$ es cerrado bajo combinaciones lineales.
Recordemos que x_h es biyectiva: en particular para todo $p \in \Gamma_h$ existe un único $t \in [t_0, t_N)$ tal que $x_h(t) = p$.

Consideremos para $0 \leq j \leq N-1$ las funciones $\varphi_j : \Gamma_h \to \mathbb{R}$ definidas del siguiente modo:

$$\text{Para cada } \; p = x_h(t) \; \text{ definimos } \; \varphi_j(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin \Gamma_h^{(j-1)} \cup \Gamma_h^{(j)} \\ \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} & \text{si } t \in [t_{j-1}, t_j] \\ \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} & \text{si } t \in [t_j, t_{j+1}] \end{cases} \tag{3.3.1}$$

donde el índice j se entiende módulo N. Notar que en particular $\varphi_i(x^{(j)}) = \delta_j^i$.

Se puede observar que las funciones $\varphi_j \in S_h(\Gamma_h)$ para cada $0 \leq j \leq N-1$ y forman una base de $S_h(\Gamma_h)$. En efecto, por construcción son linealmente independientes y si además tomamos una función cualquiera $f \in S_h(\Gamma_h)$, entonces $f(x_h(t))$ restringida al intervalo $[t_j; t_{j+1}]$ se puede escribir como

$$f(x_h^j(t)) = f(x_h^j(t_j))\varphi_{j-1}(x_h^j(t)) + f(x_h^j(t_{j+1}))\varphi_j(x_h^j(t)),$$

ya que es lineal en ese intervalo. Llamando $x_h^j(t) = p \in \Gamma_h^{(j)} \subset \Gamma_h$ se tiene entonces

$$f(p) = f(x^{(j)})\varphi_{j-1}(p) + f(x^{(j+1)})\varphi_j(p).$$

Análogamente definimos el espacio $S_h(\Gamma)$ de la siguiente manera

$$S_h(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \mathbb{R} / f \in C(\Gamma), f \circ X_h^j(t) \in P_1[t], \quad t \in [t_j, t_{j+1}], 0 \leq j \leq N-1\},$$

y realizando un análisis similar al anterior se concluye que $S_h(\Gamma)$ es un espacio vectorial de de $dim S_h(\Gamma_h) = N$.

Más aún, si $f \in S_h(\Gamma)$, se verifica que

$$f(X_h(t)) = \tilde{f}(x_h(t))$$

con cierta única $\tilde{f} \in S_h(\Gamma_h)$: dicho de otro modo la asignación $\tilde{}$ es una biyección entre los espacios $S_h(\Gamma)$ y $S_h(\Gamma_h)$.

Observación 3.3.1 *Observemos un detalle técnico que es cómodo para estudiar propiedades de aproximación en el espacio $H^s(\Gamma)$ por funciones de $S_h(\Gamma)$: si trabajamos con la parametrización X_h, en vez de utilizar una parametrización $X : I \to \Gamma$ de clase C^2, notemos que solo puede esperarse que sus componentes estén en H^s con $s < 3/2$ (esto verifica la función módulo en la recta real), pero lo importante es que $X_h|_{[t_i,t_{i+1}]} \in C^2$ como ya se ha hecho notar. Ese hecho nos permite utilizar X_h en vez de X para efectuar los cálculos que aparecen a continuación.*

Definimos las proyecciones ortogonales

$$Q_h : L^2(\Gamma_h) \mapsto S_h(\Gamma_h) \subset L^2(\Gamma_h)$$

y

$$\hat{Q}_h : L^2(\Gamma) \mapsto S_h(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$$

como sigue:

$$\langle Q_h g, \chi \rangle_h = \langle g, \chi \rangle_h \quad \forall\, \chi \in S_h(\Gamma_h)$$

y

$$\left\langle \hat{Q}_h g, \chi \right\rangle = \langle g, \chi \rangle \quad \forall\, \chi \in S_h(\Gamma)$$

donde

$$\langle f, g \rangle = \int_\Gamma fg\, ds \quad \text{y} \quad \langle f, g \rangle_h = \int_{\Gamma_h} fg\, ds.$$

Observación 3.3.2 *Considerando la construcción del espacio $S_h(\Gamma)$ y la Observación 1.1.3, resulta claro que las propiedades de aproximacion de los espacios polinomiales sobre un intervalo (en particular en el intervalo donde se mueve el parámetro de la curva) se heredan al espacio $S_h(\Gamma)$. Más específicamente vale lo siguiente: Para $\rho \in H^r(\Gamma)$*

$$\inf_{\varphi \in S_h(\Gamma)} \{|\rho - \varphi|_{0,\Gamma} + h|\rho - \varphi|_{1,\Gamma}\} \leq Ch^r |\rho|_{r,\Gamma} \quad 1 \leq r \leq 2. \tag{3.3.2}$$

De (3.3.2) tenemos que

$$|(I - \hat{Q}_h)\rho|_{0,\Gamma} = \inf_{\varphi \in S_h(\Gamma)} |\rho - \varphi|_{0,\Gamma} \leq Ch^2 |\rho|_{2,\Gamma}. \tag{3.3.3}$$

Además, por propiedades de proyección tenemos la siguiente estimación

$$|(I - \hat{Q}_h)\rho|_{0,\Gamma} \leq |\rho|_{0,\Gamma}. \tag{3.3.4}$$

Se sigue, por interpolación entre (3.3.3) y (3.3.4), que

$$|(I-\hat{Q}_h)\rho|_{0,\Gamma} \leq Ch^s|\rho|_{s,\Gamma} \quad 0 \leq s \leq 2. \tag{3.3.5}$$

Por otra parte, podemos ver que, utilizando la Observación 1.1.2 y la desigualdad de Schwarz

$$\|w\|_{1/2,\mathbb{R}^n} \leq C\|w\|_{0,\mathbb{R}^n}^{1/2}\|w\|_{1,\mathbb{R}^n}^{1/2}$$

con $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$: en lo que sigue haremos uso de la generalización de lo anterior a los espacios de Sobolev definidos sobre la curva Γ, esto es

$$|w|_{1/2,\Gamma} \leq C|w|_{0,\Gamma}^{1/2}|w|_{1,\Gamma}^{1/2}$$

con $w \in H^1(\Gamma)$ (ver p.ej. [9]). Gracias a esto, (3.3.2) y Young se observa que

$$\inf_{\varphi \in S_h(\Gamma)} \{|\rho-\varphi|_{0,\Gamma} + h^{1/2}|\rho-\varphi|_{1/2,\Gamma}\} \leq Ch^r|\rho|_{r,\Gamma} \quad 1 \leq r \leq 2. \tag{3.3.6}$$

El siguiente lema presenta estimaciones inversas para funciones de $S_h(\Gamma)$.

Lema 3.3.1 *(a) Sea $P \in P_k[x]$ con k fijo. Luego*

$$|P|_{1,[0,h]} \leq Ch^{-1}|P|_{0,[0,h]}$$

donde C=C(k).

(b) Sea $\varphi \in S_h(\Gamma)$. Luego

$$|\varphi|_{1,\Gamma} \leq Ch^{-1}|\varphi|_{0,\Gamma}$$

Demostración. Para demostrar el item (a) recordemos primero que por estar en un espacio vectorial de dimensión finita se cumple

$$|P|_{1,[0,1]} \leq C|P|_{0,[0,1]}$$

donde C=C(k). Ahora reescalamos a $[0,h]$. Consideremos $\tilde{P}(\tilde{x}) \in P_k[\tilde{x}]$ definido en $[0,h]$. Luego definimos $P(x) = \tilde{P}(\tilde{x})$ tal que $\tilde{x} = hx$. Por lo tanto, teniendo en cuenta que $P'(x) = \tilde{P}'(\tilde{x}).h$, utilizando cambio de variable y la desigualdad anterior,

$$|\tilde{P}|_{1,[0,h]}^2 = h^{-1}|P|_{1,[0,1]}^2 \leq Ch^{-1}|P|_{0,[0,1]}^2 = Ch^{-2}|\tilde{P}|_{0,[0,h]}^2$$

Entonces

$$|\tilde{P}|_{1,[0,h]} \leq Ch^{-1}|\tilde{P}|_{0,[0,h]}$$

donde $C = C(k)$.

Para analizar el item (b) observemos primero que $\varphi(X_h(t))|_{[t_j,t_{j+1}]} \in P_1([t_j,t_j+1])$, aplicando el item anterior y observando que $\|X_h'(t)\| \sim 1$, tenemos que

$$|\varphi|_{1,\Gamma_j} \leq Ch^{-1}|\varphi|_{0,\Gamma_j}.$$

Sumando sobre j se obtiene el resultado enunciado. □

Gracias al Lema anterior se obtiene por interpolación que, para $0 \leq s \leq 1$,

$$|\varphi|_{s,\Gamma} \leq Ch^{-s}|\varphi|_{0,\Gamma}, \quad \varphi \in S_h(\Gamma) \tag{3.3.7}$$

Finalmente, tomando $\varphi \in S_h(\Gamma)$ escribimos

$$h^{1/2}|(I-\hat{Q}_h)\rho|_{1/2,\Gamma} \leq C(h^{1/2}|\rho-\varphi|_{1/2,\Gamma} + h^{1/2}|\varphi-\hat{Q}_h\rho|_{1/2,\Gamma})$$

usando la desigualdad inversa (3.3.7) en el último término e intercalando ρ vemos que

$$h^{1/2}|(I-\hat{Q}_h)\rho|_{1/2,\Gamma} \leq C(h^{1/2}|\rho-\varphi|_{1/2,\Gamma} + |\rho-\varphi|_{0,\Gamma} + |(I-\hat{Q}_h)\rho|_{0,\Gamma})$$

usando (3.3.5) y (3.3.6) podemos observar que [1]

$$|(I-\hat{Q}_h)\rho|_{1/2,\Gamma} \leq Ch^{s-1/2}|\rho|_{s,\Gamma} \quad 1/2 \leq s \leq 2, \tag{3.3.8}$$

Por otro lado si llamamos $w = (I-\hat{Q}_h)\rho$ y considerando $\rho \in H^s(\Gamma)$ con $s \geq 0$ podemos observar que $w \in L^2(\Gamma)$ y $\int_\Gamma w\, ds = 0$. Teniendo en cuenta esto y utilizando la definición de $H^{-1/2}(\Gamma)$, vale

$$|w|_{-1/2,\Gamma} = \sup_{v\in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{\int_\Gamma wv\, ds}{|v|_{1/2,\Gamma}} = \sup_{v\in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{\int_\Gamma w(v-\bar{v})\, ds}{|v|_{1/2,\Gamma}}$$

donde $\bar{v} = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma v\, ds$. Por otro lado, debido a la desigualdad de Poincaré y utilizando interpolación, se tiene

$$|v-\bar{v}|_{0,\Gamma} \leq Ch^{1/2}|v|_{1/2,\Gamma}$$

Por lo tanto obtenemos

$$\frac{\int_\Gamma w(v-\bar{v})\, ds}{|v|_{1/2,\Gamma}} \leq \frac{|w|_{0,\Gamma}|v-\bar{v}|_{0,\Gamma}}{|v|_{1/2,\Gamma}} \leq \frac{Ch^{1/2}|w|_{0,\Gamma}|v|_{1/2,\Gamma}}{|v|_{1/2,\Gamma}} \quad \forall\, v \in H^{1/2}(\Gamma)$$

Luego, por (3.3.5) y la desigualdad anterior se puede observar

$$|(I-\hat{Q}_h)\rho|_{-1/2,\Gamma} \leq Ch^{s+1/2}|\rho|_{s,\Gamma} \quad 0 \leq s \leq 2.$$

La siguiente estimación será de importancia en nuestro análisis.

Lema 3.3.2 *Sea $g \in L^2(\Gamma)$. Luego existe una constante C tal que*

$$|Q_h\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}|_{0,\Gamma_h} \leq Ch^2|g|_{0,\Gamma}.$$

[1] De la deducción se observa que (3.3.8) solo vale en ppio. para $1 \leq s \leq 2$, nosotros no hemos podido reproducir la demostración en el rango $1/2 \leq s < 1$ según enuncia en [1].

Demostración. Con t el parámetro de longitud de arco en Γ_h y $J(t)$ el Jacobiano de la parametrización a trozos $t \mapsto X_h(t)$, para $\varphi \in \Gamma$,

$$\int_{\Gamma} \varphi \, ds = \int_{\Gamma_h} \tilde{\varphi} J \, dt.$$

Se puede observar que si $\varphi \in S_h(\Gamma)$, entonces $\tilde{\varphi} \in S_h(\Gamma_h)$, y si $\phi \in S_h(\Gamma_h)$, existe una función $\chi \in S_h(\Gamma)$ tal que $\phi = \tilde{\chi}$. Ahora sea $\tilde{\chi} = Q_h\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}$. Luego, $\chi \in S_h(\Gamma)$ y

$$\begin{aligned} |Q_h\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}|^2_{0,\Gamma_h} &= \int_{\Gamma_h} (Q_h\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g})\tilde{\chi} \, dt = \int_{\Gamma_h} \tilde{g}\tilde{\chi} \, dt - \int_{\Gamma_h} \widetilde{\hat{Q}_h g}\tilde{\chi} \, dt \\ &= \int_{\Gamma} g\chi \, ds - \int_{\Gamma} \hat{Q}_h g\chi \, ds + \int_{\Gamma_h} (\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g})\tilde{\chi}(1-J) \, dt \qquad (3.3.9) \\ &= \int_{\Gamma_h} (\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g})\tilde{\chi}(1-J) \, dt. \end{aligned}$$

Usando (3.3.9) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$|Q_h\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}|^2_{0,\Gamma_h} \leq C \left(\underset{t\in[0,l_h]}{max} |1 - J(t)| \right) |\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}|_{0,\Gamma_h} |Q_h\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}|_{0,\Gamma_h},$$

donde l_h es la longitud de Γ_h. Debido a la definición de Γ_h se puede observar que $max_{t\in[0,l_h]} |1 - J(t)| \leq Ch^2$ ya que, como $\|x_h'(t)\| = 1$ y además $x_h'(t)$ y ν son ortogonales $\|X_h'(t)\|^2 = 1 + |\delta_x^{'}|^2$. Por lo tanto obtenemos,

$$|Q_h\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}|_{0,\Gamma_h} \leq Ch^2 |\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}|_{0,\Gamma_h}$$

Utilizando (3.1.4) y (3.3.4)

$$|Q_h\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}|_{0,\Gamma_h} \leq Ch^2 |g - \hat{Q}_h g|_{0,\Gamma} \leq Ch^2 |g|_{0,\Gamma}$$

lo que demuestra el lema. □

Puesto que la regularidad de las funciones de $S_h(\Gamma)$ está limitada por construcción, necesitaremos introducir otro espacio de funciones para nuestro análisis. La idea es trabajar localmente con polinomios de mayor grado.

Sea

$$S_h^1(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \mathbb{R} / f \in C^1(\Gamma) \; y \; f \circ X_h^{(j)}(t), \in P_3[t] \;\; t \in [t_j, t_{j+1}], 0 \leq j \leq N-1 \}$$

Definimos la proyección ortogonal $Q_h^1 : L^2(\Gamma) \mapsto S_h^1(\Gamma)$ de la siguiente manera:

$$\left\langle Q_h^1 g, \chi \right\rangle = \langle g, \chi \rangle \quad \forall \, \chi \in S_h^1(\Gamma).$$

Se puede observar que $S_h^1(\Gamma)$ es un subespacio de $H^2(\Gamma)$, ya que dada $f \in S_h^1(\Gamma)$, $f \circ X_h^{(j)}(t) \in P_3[t], \quad t \in [t_j, t_{j+1}]$ y tiene derivada continua entre intervalos contiguos. Realizando un

análisis similar al hecho con $S_h(\Gamma)$ se prueba que cumple las siguientes propiedades para $0 \leq s \leq 2$ y $\varphi \in S_h^1(\Gamma)$: estimaciones inversas

$$|\varphi|_{s,\Gamma} \leq Ch^{-s}|\varphi|_{0,\Gamma},$$

$$|\varphi|_{s_1,\Gamma} \leq Ch^{-s_1+s_2}|\varphi|_{s_2,\Gamma}, \quad 0 \leq s_1, s_2 \leq 2$$

buena aproximación

$$|(I - Q_h^1)\varphi|_{-1/2,\Gamma} + h^{1/2}|(I - Q_h^1)\varphi|_{0,\Gamma} \leq Ch^{s+1/2}|\varphi|_{s,\Gamma}.$$

Por propiedades de proyección

$$|Q_h^1\varphi|_{0,\Gamma} \leq C|\varphi|_{0,\Gamma},$$

valiendo más aún la siguiente propiedad de estabilidad (ver [2])

$$|Q_h^1\varphi|_{s,\Gamma} \leq C|\varphi|_{s,\Gamma},$$

que usaremos repetidamente. en lo que sigue, y que implica

$$|(I - Q_h^1)\varphi|_{1/2,\Gamma} \leq C|\varphi|_{1/2,\Gamma}$$

Más aun, por interpolación

$$|(I - Q_h^1)\varphi|_{1/2,\Gamma} \leq Ch^{s-1/2}|\varphi|_{s,\Gamma}, \quad 1/2 \leq s \leq 2. \tag{3.3.10}$$

Con el fin de analizar el método de elementos finitos en este caso, consideraremos los siguientes espacios

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}_h); \forall\, K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_1\}$$

y

$$V_h^0 = V_h \cap H_0^1(\Omega_h)$$

Notar que la resticción de funciones de V_h a Γ_h coinciden con el espacio $S_h(\Gamma_h)$. En particular los datos de Dirichlet en $S_h(\Gamma_h)$ se pueden representar exactamente usando el espacio V_h. El problema $(\mathcal{P}_h)$ consiste en hallar una solución aproximada $u_h \in H^1(\Omega)$ de (1.3.5) definida de la siguiente manera: En Ω_h, $u_h \in V_h$ corresponde a la solución de

$$a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h), \quad v_h \in V_h^0 \ \text{ y } \ u_h = g_h \ \text{ en } \ \Gamma_h \tag{3.3.11}$$

donde $g_h = Q_h\tilde{g}$ y $f = 0$ fuera de Ω. Por otra parte definimos u_h en $\Omega \setminus \Omega_h$ de la siguiente manera: En $\Omega_h^{(j)} \nsubseteq \Omega_h$ con K_j el triángulo en Ω_h teniendo $\Gamma_h^{(j)}$ como uno de sus lados, u_h es la extensión lineal de K_j a $\Omega_h^{(j)}$.Dicha extensión cumple la desigualdad del Teorema 1.1.5.

Como consecuencia de la regularidad de la triangulación, puede verse en [8] que el espacio V_h cumple la siguiente propiedad de aproximación: Para $w \in H^r(\Omega_h)$, $1 \leq r \leq 2$, existe una función $w_h \in V_h$ tal que

$$\|w - w_h\|_{0,\Omega_h} + h\|w - w_h\|_{1,\Omega_h} \leq Ch^r\|w\|_{r,\Omega_h}, \tag{3.3.12}$$

donde C es una constante.

Lema 3.3.3 *(a) Sea $v \in H^1(\Omega)$. Luego, existe una constante C tal que*

$$|v|^2_{0,\Gamma} \leq C\|v\|_{0,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}.$$

(b) Sea $w \in H^2(\Omega)$ y $\phi_h \in V_h$. Luego

$$\inf_{\chi \in V_h^0} \{\|w - \phi_h - \chi\|_{0,\Omega_h} + h\|w - \phi_h - \chi\|_{1,\Omega_h}\} \leq C(h^2\|w\|_{2,\Omega_h} + h^{1/2}|w - \phi_h|_{0,\Gamma_h}).$$

Demostración. El item (a) se demostrará para funciones $v \in C^\infty(R)$ con $R = [a,b]\times[c,d]$ y $[c,d]$ fijo. La demostración general puede verse por ejemplo en [8].
Sea $v \in C^\infty(R)$ y $\Gamma^* = (a,b) \times \{c\}$ luego

$$v^2(x,y) - v^2(x,c) = \int_c^y \frac{\partial v^2}{\partial y}(x,s)\, ds = 2\int_c^y v(x,s)\frac{\partial v}{\partial y}(x,s)\, ds.$$

Entonces

$$v^2(x,c) = v^2(x,y) - 2\int_c^y v(x,s)\frac{\partial v}{\partial y}(x,s)\, ds.$$

Luego integrando en $[a,b]$,

$$\int_a^b v^2(x,c)\, dx = \int_a^b v^2(x,y)\, dx - 2\int_a^b\int_c^y v(x,s)\frac{\partial v}{\partial y}(x,s)\, ds$$

e integrando en $[c,d]$ en la igualdad anterior y utilizando Cauchy-Schwarz,

$$(d-c)|v|^2_{0,\Gamma^*} \leq \|v\|^2_{0,R} + (d-c)C\|v\|_{0,R}\|\frac{\partial v}{\partial y}\|_{0,R}$$

Por lo tanto

$$|v|^2_{0,\Gamma^*} \leq C\|v\|_{0,R}(\|v\|_{0,R} + \|\frac{\partial v}{\partial y}\|_{0,R}) = C\|v\|_{0,R}\|v\|_{1,R}$$

donde $C = C(c,d)$.
Luego, por densidad

$$|v|^2_{0,\Gamma^*} \leq C\|v\|_{0,R}\|v\|_{1,R} \quad \forall v \in H^1(R)$$

Para demostrar el item (b) sea $w_h \in V_h$ la función que satisface (3.3.12). Consideramos $\chi \in V_h^0$ tal que $\chi = w_h - \phi_h$ en los nodos interiores de Ω_h. Utilizando reglas de integración se puede observar,

$$\begin{aligned}\|w_h - \phi_h - \chi\|_{0,\Omega_h} + h\|w_h - \phi_h - \chi\|_{1,\Omega_h} &\leq Ch\left(\sum_{j=1}^N |w_h(x^{(j)}) - \phi_h(x^{(j)})|^2\right)^{1/2} \\ &\leq Ch^{1/2}|w_h - \phi_h|_{0,\Gamma_h}.\end{aligned}$$

Luego, utilizando desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned} \inf_{\chi\in V_h^0} \quad & \{ \quad \|w-\phi_h-\chi\|_{0,\Omega_h} + h\|w-\phi_h-\chi\|_{1,\Omega_h}\} \\ & \leq \quad \|w-w_h\|_{0,\Omega_h} + h\|w-w_h\|_{1,\Omega_h} + Ch^{1/2}|w_h-\phi_h|_{0,\Gamma_h}. \end{aligned}$$

Tomando $v = w - w_h$ en el ítem previamente demostrado y aplicando Young obtenemos

$$h|w-w_h|^2_{0,\Gamma_h} \leq Ch\|w-w_h\|_{0,\Omega_h}.\|w-w_h\|_{1,\Omega_h} \leq C(\|w-w_h\|^2_{0,\Omega_h} + h^2\|w-w_h\|^2_{1,\Omega_h})$$

entonces

$$h^{1/2}|w-w_h|_{0,\Gamma_h} \leq C(\|w-w_h\|_{0,\Omega_h} + h\|w-w_h\|_{1,\Omega_h}).$$

Por lo tanto, utilizando las dos desigualdades anteriores y la desigualdad triangular, se deduce

$$\begin{aligned} \inf_{\chi\in V_h^0} \quad & \{ \quad \|w-\phi_h-\chi\|_{0,\Omega_h} + h\|w-\phi_h-\chi\|_{1,\Omega_h}\} \\ & \leq \quad C(\|w-w_h\|_{0,\Omega_h} + h\|w-w_h\|_{1,\Omega_h} + h^{1/2}|w-\phi_h|_{0,\Gamma_h}). \end{aligned}$$

Concluimos el lema de lo observado previamente y de (3.3.12). □

Necesitamos observar que funciones en $H_0^1(\Omega)$ pueden ser aproximadas por funciones en V_h^0. Esto se expresa en el siguiente lema.

Lema 3.3.4 *Sea $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$(extendido por E). Luego*

$$\inf_{\chi\in V_h^0} \{\|w-\chi\|_{0,\Omega_h} + h\|w-\chi\|_{1,\Omega_h}\} \leq Ch^2\|w\|_{2,\Omega}.$$

Demostración. Tomando $\phi_h = 0$ y $w \in H_0^1(\Omega)$ en el item b del Lema 3.3.3 se tiene

$$\inf_{\chi\in V_h^0} \{\|w-\chi\|_{0,\Omega_h} + h\|w-\chi\|_{1,\Omega_h}\} \leq C(h^2\|w\|_{2,\Omega_h} + h^{1/2}|w|_{0,\Gamma_h}).$$

El Lema 3.1.5 nos dice que

$$|w|_{0,\Gamma_h} \leq Ch^2\|w\|_{2,\Omega}.$$

Combinando las dos últimas desigualdades se obtiene dicho lema. □

3.4. Problema de Dirichlet no homogéneo en dominio regular

El siguiente es el resultado general para el problema no homogéneo de Dirichlet con bordes curvos:

Teorema 3.4.1 *Sea u_h la aproximación de elementos finitos definido en (3.3.11) y u la solución de (1.3.4). Luego, existe una constante C tal que*

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq C(h\|f\|_{0,\Omega} + h^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}), \quad 1/2 \leq s \leq 3/2$$

Para demostrar este resultado consideraremos por separado los casos $f = 0$ y $g = 0$: tomando el caso $g = 0$, sea u_0 la solución de (1.3.4) y $u_{h,0}$ la solución de (3.3.11) con $g_h = 0$, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u_0 & = & f & \text{en } \Omega \\ u_0 & = & 0 & \text{en } \Gamma \end{array} \right. , \tag{3.4.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} a_h(u_{h,0}, v) & = & L_h(v) & \forall\, v \in V_h^0 \\ u_{h,0} & = & 0 & \text{en } \Gamma_h. \end{array} \right. \tag{3.4.2}$$

y considerando el caso $f = 0$ definimos análogamente

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u_H & = & 0 & \text{en } \Omega \\ u_H & = & g & \text{en } \Gamma \end{array} \right. \tag{3.4.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} a_h(u_{h,H}, v) & = & 0 & \forall\, v \in V_h^0 \\ u_{h,H} & = & g_h & \text{en } \Gamma_h. \end{array} \right. \tag{3.4.4}$$

donde recordemos que $g_h = Q_h\tilde{g}$.

Para probar el Teorema 3.4.1 se acota primero el error en el dominio Ω_h, es decir $|u - u_h|_{1,\Omega_h}$, ese es el propósito de la Proposición 3.4.4 que presentaremos más adelante. El plan general es el siguiente: ya que naturalmente $u = u_0 + u_H$ y $u_h = u_{h,0} + u_{h,H}$ corresponden a las soluciones de (1.3.4) y (3.3.11) respectivamente, se puede escribir

$$|u - u_h|_{1,\Omega_h} \leq |u_0 - u_{h,0}|_{1,\Omega_h} + |u_H - u_{h,H}|_{1,\Omega_h}$$

y acotar ambos términos de la derecha. Para eso será necesario considerar diversos problemas auxiliares que escribimos debajo: primero una nueva aproximación de elementos finitos $\mathtt{v}_h$ solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} a_h(\mathtt{v}_h, v) & = & \widetilde{0} & \forall v \in V_h^0 \\ \mathtt{v}_h & = & \hat{Q}_h g & \text{en } \Gamma_h. \end{array} \right.$$

Además definimos $\hat{u}^h$ y u^h soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta \hat{u}^h & = & 0 & \text{en } \Omega \\ \hat{u}^h & = & \hat{Q}_h g & \text{en } \Gamma \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u^h & = & 0 & \text{en } \Omega \\ u^h & = & Q_h^1 g & \text{en } \Gamma \end{array} \right.$$

Como, en particular $Q_h^1 g \in H^{3/2}(\Gamma)$, se sigue de (1.3.6) que $u^h \in H^2(\Omega)$.

Proposicion 3.4.1 *Existe una constante C tal que*

$$|u_0 - u_{h,0}|_{1,\Omega_h} \leq Ch\|f\|_{0,\Omega}. \tag{3.4.5}$$

Demostración. Notemos primero que $|\cdot|^2_{1,\Omega_h} = a_h(\cdot,\cdot)$. Para $\chi \in V_h^0$,

$$|u_0 - u_{h,0}|^2_{1,\Omega_h} = a_h(u_0 - u_{h,0}, u_0 - \chi) + a_h(u_0 - u_{h,0}, \chi - u_{h,0}). \tag{3.4.6}$$

Sabiendo que $\chi - u_{h,0} \in V_h^0$, $u_{h,0}$ es solución de (3.3.11) con $g_h = 0$ y utilizando el teorema de la divergencia, Hölder y el Teorema 1.1.5 tenemos que

$$\begin{aligned} a_h(u_0 - u_{h,0}, \chi - u_{h,0}) &= \int_{\Omega_h} -\Delta u_0(\chi - u_{h,0})\,dx - \int_{\Omega_h} f(\chi - u_{h,0})\,dx \\ &\leq \int_{\Omega_h \setminus \Omega} |\Delta u_0(\chi - u_{h,0})|\,dx \\ &\leq C\|u_0\|_{2,\Omega}\|\chi - u_{h,0}\|_{0,\Omega_h\setminus\Omega}. \end{aligned}$$

Por (1.3.6) y Lema 3.1.3

$$a_h(u_0 - u_{h,0}, \chi - u_{h,0}) \leq Ch^2\|f\|_{0,\Omega}|\chi - u_{h,0}|_{1,\Omega_h}.$$

Considerando $\varepsilon > 0$, aplicando Young y desigualdad triangular

$$\begin{aligned} Ch^2\|f\|_{0,\Omega}|\chi - u_{h,0}|_{1,\Omega_h} &\leq \frac{C}{\varepsilon^2}h^4\|f\|^2_{0,\Omega} + C\varepsilon^2|\chi - u_{h,0}|^2_{1,\Omega_h} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2}h^4\|f\|^2_{0,\Omega} + C\varepsilon^2|\chi - u_0|^2_{1,\Omega_h} + C\varepsilon^2|u_0 - u_{h,0}|^2_{1,\Omega_h}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a_h(u_0 - u_{h,0}, \chi - u_{h,0}) \leq \frac{C}{\varepsilon^2}h^4\|f\|^2_{0,\Omega} + C\varepsilon^2|\chi - u_0|^2_{1,\Omega_h} + C\varepsilon^2|u_0 - u_{h,0}|^2_{1,\Omega_h}.$$

Por otra parte, utilizando Hölder y Young observamos que

$$\begin{aligned} a_h(u_0 - u_{h,0}, u_0 - \chi) &\leq |u_0 - u_{h,0}|_{1,\Omega_h}.|\chi - u_0|_{1,\Omega_h} \\ &\leq \frac{1}{2}|u_0 - u_{h,0}|^2_{1,\Omega_h} + \frac{1}{2}|\chi - u_0|^2_{1,\Omega_h} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las dos últimas desigualdades junto con (3.4.6) nos proporcionan

$$|u_0 - u_{h,0}|^2_{1,\Omega_h} \leq \frac{C}{\varepsilon^2}h^4\|f\|^2_{0,\Omega} + (C\varepsilon^2 + \frac{1}{2})|\chi - u_0|^2_{1,\Omega_h} + (C\varepsilon^2 + \frac{1}{2})|u_0 - u_{h,0}|^2_{1,\Omega_h}.$$

Luego, tomando ε tal que $C\varepsilon^2 + \frac{1}{2} < 1$ obtenemos que, para cualquier $\chi \in V_h^0$,

$$|u_0 - u_{h,0}|_{1,\Omega_h} \leq C(h^2\|f\|_{0,\Omega} + |\chi - u_0|_{1,\Omega_h}).$$

Debido al Lema 3.3.4 y tomando un $\chi \in V_h^0$ adecuado

$$h\|\chi - u_0\|_{1,\Omega_h} \leq Ch^2\|u_0\|_{2,\Omega}.$$

Además, utilizando (1.3.6), se puede observar

$$|\chi - u_0|_{1,\Omega_h} \leq \|\chi - u_0\|_{1,\Omega_h} \leq Ch\|u_0\|_{2,\Omega} \leq Ch\|f\|_{0,\Omega}.$$

Por lo que podemos concluir (3.4.5). □
Observaremos primero que $\mathtt{v}_h$ es una aproximación óptima de $u - u_0$. Para ello necesitaremos la siguiente estimación.

Proposicion 3.4.2 *Existe una constante C tal que*

$$|\hat{u}^h - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}, \quad 1/2 \leq s \leq 3/2, \tag{3.4.7}$$

donde reiteramos que, por convención, $\hat{u}^h$ es definido en Ω_h por $E\hat{u}^h$.

Demostración. Notemos primero que es suficiente probar (3.4.7) con $\hat{u}^h$ reemplazado por u^h ya que debido al Teorema 1.1.5, (1.3.6) y a las propiedades de Q_h^1 y $\hat{Q}_h$,

$$|\hat{u}^h - u^h|_{1,\Omega_h} \leq \|\hat{u}^h - u^h\|_{1,\Omega_h} \leq \|E(\hat{u}^h - u^h)\|_{1,\mathbb{R}^2} \leq C\|\hat{u}^h - u^h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}$$

con $1/2 \leq s \leq 3/2$. En efecto

$$\begin{aligned} \|\hat{u}^h - u^h\|_{1,\Omega} &\leq C|\hat{Q}_h g - Q_h^1 g|_{1/2,\Gamma} \leq Ch^{-1/2}|\hat{Q}_h g - Q_h^1 g|_{0,\Gamma} \\ &\leq Ch^{-1/2}(|\hat{Q}_h g - g|_{0,\Gamma} + |Q_h^1 g - g|_{0,\Gamma}) \\ &\leq Ch^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma} \end{aligned}$$

desigualdad que vale para $0 \leq s \leq 2$ pero debido a las restricciones de g sólo consideramos $1/2 \leq s \leq 3/2$.
Para $\chi \in V_h^0$,

$$|u^h - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h}^2 = a_h(u^h - \mathtt{v}_h, u^h - \mathtt{v}_h - \chi) + a_h(u^h - \mathtt{v}_h, \chi). \tag{3.4.8}$$

Como $\chi \in V_h^0$, utilizando teorema de la divergencia y Hölder

$$|a_h(u^h - \mathtt{v}_h, \chi)| \leq |\int_{\Omega_h \setminus \Omega} \Delta u^h \chi \, dx| \leq C\|u^h\|_{2,\Omega}\|\chi\|_{0,\Omega_h \setminus \Omega}$$

Debido a (1.3.6) y al Lema 3.1.3,

$$\begin{aligned} \|u^h\|_{2,\Omega}\|\chi\|_{0,\Omega_h \setminus \Omega} &\leq Ch^2|Q_h^1 g|_{3/2,\Gamma}|\chi|_{1,\Omega_h} \\ &\leq Ch^2|Q_h^1 g|_{3/2,\Gamma}(|u^h - \mathtt{v}_h - \chi|_{1,\Omega_h} + |u^h - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h}). \end{aligned}$$

Aplicando Young a la desigualdad anterior con $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$a_h(u^h - \mathtt{v}_h, \chi) \leq \frac{Ch^4}{\varepsilon^2}|Q_h^1 g|^2_{3/2,\Gamma} + C\varepsilon^2|u^h - \mathtt{v}_h - \chi|^2_{1,\Omega_h} + C\varepsilon^2|u^h - \mathtt{v}_h|^2_{1,\Omega_h}$$

Por otra parte aplicando Cauchy-Schwarz y Young al término restante de (3.4.8),

$$a_h(u^h - \mathtt{v}_h, u^h - \mathtt{v}_h - \chi) \leq C\varepsilon^2|u^h - \mathtt{v}_h|^2_{1,\Omega_h} + \frac{C}{\varepsilon^2}|u^h - \mathtt{v}_h - \chi|^2_{1,\Omega_h}.$$

Entonces, por (3.4.8),

$$|u^h - \mathtt{v}_h|^2_{1,\Omega_h} \leq \frac{Ch^4}{\varepsilon^2}|Q_h^1 g|^2_{3/2,\Gamma} + 2C\varepsilon^2|u^h - \mathtt{v}_h|^2_{1,\Omega_h} + C(\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2})|u^h - \mathtt{v}_h - \chi|^2_{1,\Omega_h}.$$

Luego, tomando ε tal que $2C\varepsilon^2 < 1/2$ se obtiene

$$|u^h - \mathtt{v}_h|^2_{1,\Omega_h} \leq C(h^4|Q_h^1 g|^2_{3/2,\Gamma} + |u^h - \mathtt{v}_h - \chi|^2_{1,\Omega_h}).$$

Por lo tanto, para cualquier $\chi \in V_h^0$,

$$|u^h - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h} \leq C(h^2|Q_h^1 g|_{3/2,\Gamma} + |u^h - \mathtt{v}_h - \chi|_{1,\Omega_h}).$$

Por Lema 3.3.3 y (1.3.6),

$$|u^h - \mathtt{v}_h - \chi|_{1,\Omega_h} \leq C(h|Q_h^1 g|_{3/2,\Gamma} + h^{-1/2}|u^h - \mathtt{v}_h|_{0,\Gamma_h}).$$

De las dos últimas desigualdades se concluye,

$$|u^h - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h} \leq C(h|Q_h^1 g|_{3/2,\Gamma} + h^{-1/2}|u^h - \mathtt{v}_h|_{0,\Gamma_h}).$$

Por otra parte, debido a la definición de $\mathtt{v}_h$ y a la desigualdad triangular tenemos que,

$$|u^h - \mathtt{v}_h|_{0,\Gamma_h} \leq |u^h - \widetilde{Q_h^1 g}|_{0,\Gamma_h} + |\widetilde{Q_h^1 g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}|_{0,\Gamma_h}.$$

Utilizando el Lema 3.1.5 con respecto a u^h y considerando (1.3.6), se puede observar,

$$|u^h - \widetilde{Q_h^1 g}|_{0,\Gamma_h} \leq Ch^2|Q_h^1 g|_{3/2,\Gamma}.$$

Por otro lado, por (3.1.4),

$$|\widetilde{Q_h^1 g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}|_{0,\Gamma_h} \leq C|Q_h^1 g - \hat{Q}_h g|_{0,\Gamma}.$$

Por lo tanto,

$$|u^h - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h} \leq C(h|Q_h^1 g|_{3/2,\Gamma} + h^{-1/2}|Q_h^1 g - \hat{Q}_h g|_{0,\Gamma}).$$

Podemos concluir, usando una estimación inversa en S_h^1 y las propiedades de Q_h^1 y $\hat{Q}_h$ que

$$|u^h - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}, \quad 1/2 \leq s \leq 3/2,$$

de donde se sigue la proposición. □

Proposicion 3.4.3 *Sea u_H solución de*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u_H & = & 0 & en\ \ \Omega \\ u_H & = & g & en\ \ \Gamma \end{array} \right.$$

Luego existe una constante C tal que

$$|u_H - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}, \quad 1/2 \leq s \leq 3/2 \tag{3.4.9}$$

donde $\hat{u}_H$ es definido en Ω_h por $E\hat{u}_H$.

Demostración. Debido a la proposición anterior sólo es necesario estimar $|u_H - \hat{u}^h|_{1,\Omega_h}$, ya que

$$|u_H - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h} \leq |u_H - \hat{u}^h|_{1,\Omega_h} + |\hat{u}^h - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h}.$$

Por Teorema 1.1.5, (1.3.6) y (3.3.8),

$$\begin{array}{rcl} |u_H - \hat{u}^h|_{1,\Omega_h} & \leq & \|u_H - \hat{u}^h\|_{1,\Omega_h} \leq \|E(u_H - \hat{u}^h)\|_{1,\mathbb{R}^2} \leq C\|u_H - \hat{u}^h\|_{1,\Omega} \\ & \leq & C|g - \hat{Q}_h g|_{1/2,\Gamma} \leq Ch^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}, \quad 1/2 \leq s \leq 3/2. \end{array}$$

Esta desigualdad junto con la anterior y la Proposición 3.4.2 demuestra lo enunciado. □

Ahora, estamos en condiciones de probar una estimación de $u - u_h$.

Proposicion 3.4.4 *Existe una constante C, independiente de h, tal que*

$$|u - u_h|_{1,\Omega_h} \leq C(h\|f\|_{0,\Omega} + h^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}), \quad 1/2 \leq s \leq 3/2.$$

Demostración. Sea $u_{h,H} = u_h - u_{h,0}$. Debido a la definición de u_h y $u_{h,0}$, $u_{h,H}$ corresponde a la solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} a_h(u_{h,H}, v) & = & 0 & \forall\, v \in V_h^0 \\ u_{h,H} & = & g_h & \text{en}\ \ \Gamma_h. \end{array} \right.$$

La solución $u_{h,H}$ corresponde a la aproximación por elementos finitos de la solución u_H. Por un lado tenemos que,

$$|u_H - u_{h,H}|_{1,\Omega_h} \leq |u_H - \mathtt{v}_h|_{1,\Omega_h} + |\mathtt{v}_h - u_{h,H}|_{1,\Omega_h}. \tag{3.4.10}$$

Como $a_h(\mathtt{v}_h - u_{h,H}, v) = 0 \ \ \forall\, v \in V_h^0$, se sigue que

$$|\mathtt{v}_h - u_{h,H}|_{1,\Omega_h} \leq |\mathtt{v}_h - u_{h,H} - \chi|_{1,\Omega_h}$$

para cualquier $\chi \in V_h^0$. Aplicando el Lema 3.3.3 tomando $\phi_h = u_{h,H} - \mathtt{v}_h$ y $w = 0$, se puede observar que,

$$|\mathtt{v}_h - u_{h,H}|_{1,\Omega_h} \leq \inf_{\chi \in V_h^0} |\mathtt{v}_h - u_{h,H} - \chi|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{-1/2}|\mathtt{v}_h - u_{h,H}|_{0,\Gamma_h}. \tag{3.4.11}$$

Por definición de $u_{h,H}$ y $\mathtt{v}_h$, se tiene que $u_{h,H} - \mathtt{v}_h = Q_h\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}$ en Γ_h.
Además, por propiedades de proyección,

$$Q_h\widetilde{\hat{Q}_h g} = \widetilde{\hat{Q}_h g}$$

luego, si tomamos $G = g - \hat{Q}_h g$, se observa que

$$Q_h\tilde{G} = Q_h\tilde{g} - \widetilde{\hat{Q}_h g}$$

y

$$\widetilde{\hat{Q}_h G} = 0.$$

Por lo tanto utilizando el Lema 3.3.2 tenemos que

$$|\mathtt{v}_h - u_{h,H}|_{0,\Gamma_h} = |\widetilde{\hat{Q}_h G} - Q_h\tilde{G}|_{0,\Gamma_h} \leq Ch^2|G|_{0,\Gamma} = Ch^2|(I - \hat{Q}_h)g|_{0,\Gamma}. \tag{3.4.12}$$

Combinando (3.4.11), (3.4.12) y (3.3.5), podemos observar

$$|\mathtt{v}_h - u_{h,H}|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{s+3/2}|g|_{s,\Gamma} \quad 0 \leq s \leq 3/2.$$

Por esta desigualdad, (3.4.10) y la Proposición 3.4.3 se observa

$$|u_H - u_{h,H}|_{1,\Omega_h} \leq Ch^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma} \quad 1/2 \leq s \leq 3/2.$$

Para finalizar esta demostración notemos que considerando (3.4.5), la última desigualdad de esta demostración y desigualdad triangular se concluye

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{1,\Omega_h} &\leq |u_0 - u_{h,0}|_{1,\Omega_h} + |u_H - u_{h,H}|_{1,\Omega_h} \\ &\leq C(h\|f\|_{0,\Omega} + h^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}) \quad 1/2 \leq s \leq 3/2. \quad \square \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema 3.4.1.
Primero, observemos que,

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq |u - u_h|_{1,\Omega_h} + |u - u_h|_{1,\Omega\setminus\Omega_h} \tag{3.4.13}$$

Debido a la Proposición 3.4.4, es suficiente estimar $|u - u_h|_{1,\Omega\setminus\Omega_h}$.

Sea $w^h = u_0 + u^h$. Se observa que $w^h \in H^2(\Omega)$ y recordemos que con w^h denotamos también la extensión por E a $\mathbb{R}^2$. Ahora

$$|u - u_h|_{1,\Omega\setminus\Omega_h} \leq |u - w^h|_{1,\Omega} + |w^h - u_h|_{1,\Omega\setminus\Omega_h}. \tag{3.4.14}$$

Como $-\Delta(u - w^h) = 0$, por (1.3.6) y las propiedades de Q_h^1, observamos

$$|u - w^h|_{1,\Omega} \leq Ch^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}, \quad 1/2 \leq s \leq 3/2, \tag{3.4.15}$$

pues por (3.3.10)

$$|u-w^h|_{1,\Omega} \leq \|u-w^h\|_{1,\Omega} \leq C|g-Q_h^1 g|_{1/2,\Gamma} \leq Ch^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma} \quad 1/2 \leq s \leq 2. \tag{3.4.16}$$

Por lo que faltaría estimar $|w^h - u_h|_{1,\Omega\setminus\Omega_h}$. Para esto, aplicamos (3.1.6) a las derivadas de de $w^h - u_h$ y notando que u_h es lineal en $\Omega_h^{(j)}$, obtenemos

$$|w^h-u_h|^2_{1,\Omega_h^{(j)}} \leq C\left(h^2\sum_{i=1}^{2}|\frac{\partial(w^h-u_h)}{\partial x_i}|^2_{0,\Gamma_h^{(j)}} + h^4\|w^h\|^2_{2,\Omega_h^{(j)}}\right). \tag{3.4.17}$$

Por otro lado, debido al teorema de trazas en un triángulo de referencia y utilizando cambio de variables a un triángulo K_j se tiene

$$h|v|^2_{0,\Gamma_h^{(j)}} \leq C(\|v\|^2_{0,K_j} + h^2|v|^2_{1,K_j}) \quad \forall v \in H^1(\Omega_h) \tag{3.4.18}$$

Luego, aplicando (3.4.18) a las derivadas de $w^h - u_h$ en (3.4.17), se observa

$$|w^h-u_h|^2_{1,\Omega_h^{(j)}} \leq C(h|w^h-u_h|^2_{1,K_j} + h^3\|w^h\|^2_{2,\Omega_h^{(j)}\cup K_j}).$$

Sumando sobre los índices j tenemos que

$$|w^h-u_h|_{1,\Omega\setminus\Omega_h} \leq C(h^{1/2}|w^h-u_h|_{1,\Omega_h} + h^{3/2}\|w^h\|_{2,\Omega}). \tag{3.4.19}$$

Por lo tanto, aplicando desigualdad triangular en (3.4.19),

$$|w^h-u_h|_{1,\Omega\setminus\Omega_h} \leq C(h^{1/2}|w^h-u|_{1,\Omega_h} + h^{1/2}|u-u_h|_{1,\Omega_h} + h^{3/2}\|w^h\|_{2,\Omega})$$

para el primer término usamos el teorema de extensión y (3.4.15)

$$h^{1/2}|w^h-u|_{1,\Omega_h} \leq h^{1/2}|w^h-u|_{1,\Omega} \leq Ch^s|g|_{s,\Gamma} \quad 1/2 \leq s \leq 3/2.$$

el segundo término se acota usando la Proposición 3.4.4,

$$h^{1/2}|u-u_h|_{1,\Omega_h} \leq C(h^{3/2}\|f\|_{0,\Omega} + h^s|g|_{s,\Gamma}) \quad 1/2 \leq s \leq 3/2.$$

y para el tercer término usamos (1.3.6) desigualdad inversa y estabilidad en H^s para Q_h^1

$$h^{3/2}\|w^h\|_{2,\Omega} \leq Ch^{3/2}|Q_h^1 g|_{3/2,\Gamma} \leq h^s|Q_h^1 g|_{s,\Gamma} \leq h^s|g|_{s,\Gamma} \quad 1/2 \leq s \leq 2.$$

por lo tanto

$$|w^h-u_h|_{1,\Omega\setminus\Omega_h} \leq Ch^{1/2}(h\|f\|_{0,\Omega} + h^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}), \quad 1/2 \leq s \leq 3/2.$$

Por último, considerando (3.4.14), (3.4.15) y la desigualdad anterior, observamos que

$$|u-u_h|_{1,\Omega\setminus\Omega_h} \leq C(h\|f\|_{0,\Omega} + h^{s-1/2}|g|_{s,\Gamma}), \quad 1/2 \leq s \leq 3/2.$$

Concluimos el teorema de (3.4.13), la Proposición 3.4.4 y esta desigualdad. □

3.5. Ejemplo Numérico

En esta sección presentamos un ejemplo numérico. Consideramos el dominio definido por el anillo $\Omega = \{(x, y) : 1 \leq \|(x, y)\| \leq 3\}$ y la función $u(x, y) = \|(x - x_0, y - y_0)\|$, donde $(x_0, y_0) \in \Gamma$. Este ejemplo da un caso límite interesante ya que $g = u|\Gamma \in H^s$ para $s < 3/2$[2]. Derivando se observa que hay que tomar $f = -u^{-1}$. La malla se construyó para el caso: se creo una malla uniforme sobre un rectángulo $[1, 3] \times [0, 2 * \pi]$ y se tomo coordenadas polares sobre las coordenadas de los vértices de esos elementos para mallar el anillo. El caso de un anillo es particularmente sencillo para construir $\tilde{g}$ ya que la normal a los bordes (interior y exterior) es radial, y una vez trasladado el dato de borde a la malla, la proyección en L^2 se lleva a cabo de la siguiente manera:

1. Se consideran funciones básicas lineales ϕ_i, $0 \leq i \leq N - 1$ asociadas a los nodos del borde x_i. Estas dan una base de Γ_h.

2. Para establecer el algoritmo, y como la curva se parametriza por longitud de arco, se piensan las funciones ϕ_i definidas en un intervalo de longitud $|\Gamma_h|$, del modo descripto en (3.3.1).

3. Se calcula la matriz de masa asociada al borde $M_{i,j} = \int \phi_i \phi_j$, y el vector $b_j = \int \tilde{g} \phi_j$. En estos calculos se utiliza el hecho de que Γ_h es una curva cerrada y por ello, se trabaja en el contexto de funciones periódicas, de período $|\Gamma_h|$.

4. Se resuelve el sistema: $Mz = b$, y la proyección se escribe $Q_h(\tilde{g}) = \sum_i z_i \phi_i$.

Observemos que llamando $l_i = t_{i+1} - t_i$, tenemos $M_{i-1,i} = l_i/6$, $M_{i,i+1} = l_{i+1}/6$ y $M_{i,i} = \frac{l_{i+1}+l_i}{3}$, siendo nulos los demás elementos de M. Por su parte, si bien los b_i no pueden calcularse exactamente con facilidad, se pueden aproximar usando la regla de Simpson en cada $[t_i, t_{i+1}]$.

Para calcular el orden de convergencia utilizamos la solución exacta, y tomamos mallas de $2^k \times 2^k$ nodos con $3 \leq k \leq 6$. En las figuras mostramos la solución aproximada con la malla mas fina. El orden obtenido en este ejemplo es 0,995 $\sim$ 1 que coincide con lo predicho por la teoría. Tomamos en un ejemplo (x_0, y_0) como un punto de la malla para todas las graduaciones, es decir $(x_0, y_0) \in \Gamma_h$ para todo h, y en otro ejemplo $(x_0, y_0) \notin \Gamma_h$ no observándose diferencias notorias en el orden.

[2]De hecho en realidad $u \in H^s(\Omega)$ solo para $s < 2$. Se podría tomar $u_\epsilon = \|(x - x_0, y - y_0)\|^{1+\epsilon}$ para evitar este inconveniente ya que $u_\epsilon \in H^2(\Omega)$ para todo $\epsilon > 0$.

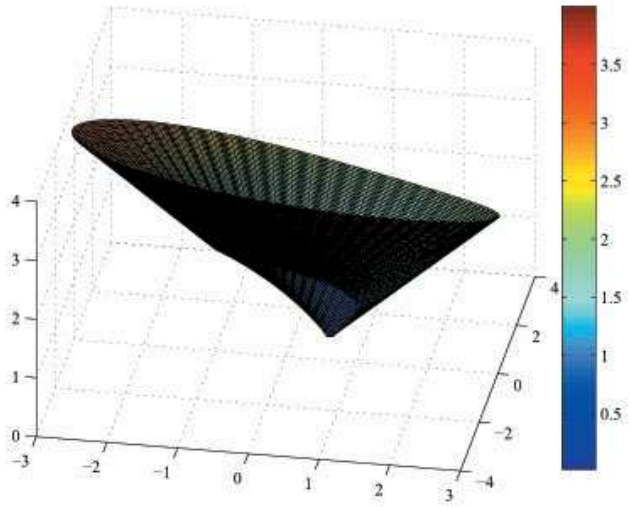

Figura 3.6: Solución numérica con 4225 nodos

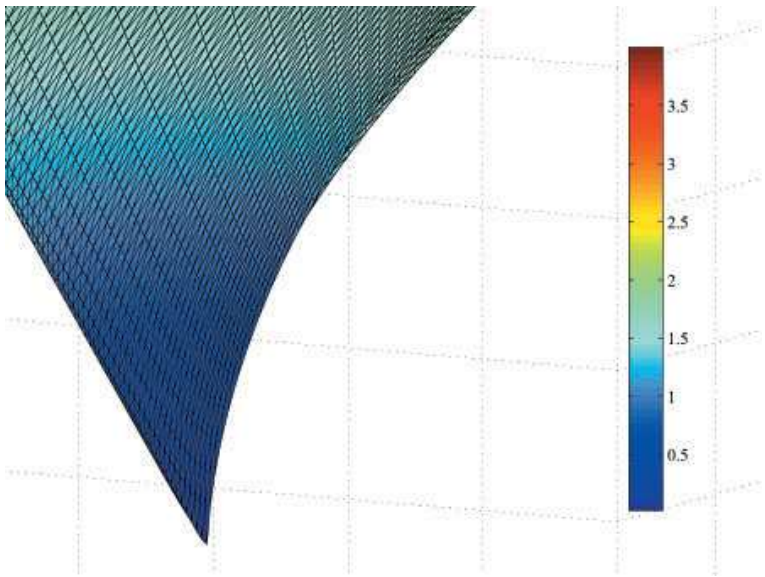

Figura 3.7: Detalle de la singularidad en el borde interno del anillo

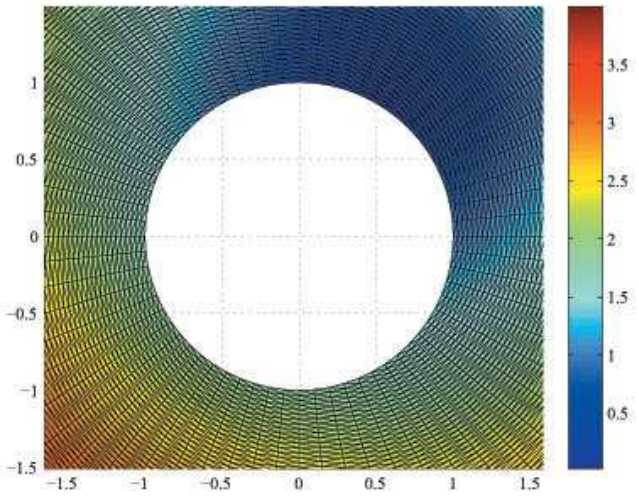

Figura 3.8: Detalle de la singularidad vista superior

Bibliografía

[1] J. H. Bramble, J. T. King *A Robust Finite Element Method for Nonhomogeneous Dirichlet Problems in Domains with Curved Boundaries* Math. Comp., Vol. 63, No. 207 (Jul., 1994), pp. 1-17

[2] J. H. Bramble, J. Xu, *Some estimatesfor a weighted L2 projection*,Math. Comp. 56 (1991), pp. 463-476.

[3] H. Brezis, *Análisis funcional, teoría y aplicaciones*, Masson, París, 1983.

[4] Ciarlet P. G., *The finite element method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its applications, vol 4, North-Holland Publishing Company, 1978.

[5] Pierre-Arnaud Raviart, Jean-Marie Thomas, *Introduction a l'analyse numérique des équations aux derivées partielles*, Dunod, París, 1998.

[6] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, London, 1985.

[7] J.L. Lions and E. Magenes, *Nonhomogeneous boundary value problems and applications. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[8] Susanne C. Brenner, L. Ridgway Scott, *The Mathematical theory of finite Element Finite*, Second Edition,2002.

[9] Robert A. Adams, John J.F. Fournier, *Sobolev spaces*, Second Edition,2003.

[10] T. Dupont, *L_2 error estimates for projecting methods for parabolic equations in approximating domains*, Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations (C. de Boor, ed.), Academic Press, Nex York, 1974, pp. 313-352.