UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

DEFORMACIONES DE ÁLGEBRAS ENVOLVENTES DE ÁLGEBRAS DE LIE DE DIMENSIÓN 3

Sergio Nicolás Chouhy

Director: Andrea Solotar

21/03/2012

Agradecimientos

- Principalmente, y mas que a nadie, quiero agradecer a mi vieja, mi viejo y a mis dos hermanos, por bancarme siempre y por apoyarme en la decisión de estudiar matemática.
- A Andrea, por sus miles de consejos y porque todas las oportunidades que tuve y tengo se las debo a ella.
- A Mariano, Quimey y Pablo, por toda la buena onda que tuvieron desde siempre.
- A Fondo de tabla y su banda, la mas grande de todas: Denise, Agus, Dani, Fede, Maxi, Tute, Nano, Santo, Dami, Garyu y Tin, por las alegrías, los campeonatos, los ascensos, los trapos, las banderas, los bombos y la fiesta.
- Especialmente quiero agradecer a Javi y a Tom, dos amigos con todas las letras con quienes tuve la suerte de compartir la carrera entera, desde el primer parcial hasta el último final.
- A Miguel, por contagiarme su forma de ver la matemática.
- A Juan y Analía, por sus consejos.
- A la UBA, por la beca estímulo.

Índice

Capítulo 1

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es estudiar las deformaciones de las álgebras envolventes de álgebras de Lie complejas de dimensión tres. Estas deformaciones se dividen en dos clases:

1. las que provienen de deformar la estructura de Lie,
2. las que provienen de deformar la estructura asociativa, sin variar el corchete.

Las deformaciones de la primera clase y las relaciones entre las mismas han sido completamente estudiadas en los ultimos años. Nos proponemos en particular estudiar deformaciones de la segunda clase de las álgebras de Lie de dimensión tres del tipo $\mathfrak{r}_\alpha$, usando métodos homológicos.

Las deformaciones de objetos algebraicos y analíticos son estudiadas desde hace muchos años tanto en matemática como en física. El conjunto de clases de equivalencia de estructuras de álgebra de Lie sobre un espacio vectorial fijo es llamado el espacio de moduli de álgebras de Lie sobre ese espacio vectorial El espacio de moduli ha sido estudiado completamente en el caso de un espacio vectorial complejo de dimensión tres ([A], [TU]). La estructura de este espacio de moduli es bastante simple: consiste de una familia 1-paramétrica de álgebras de Lie resolubles, y de tres álgebras de Lie especiales. Sin embargo no se ha realizado una descripción de la familia de deformaciones de las álgebras envolventes de álgebras de Lie complejas de dimensiï£¡n tres que se obtienen al deformar la estructura asociativa. Las deformaciones infinitesimales de un álgebra asociativa están parametrizadas por el segundo grupo de cohomología de Hochschild del álgebra, a coeficientes en el álgebra considerada como bimóodulo sobre si misma de la manera natural. Asimismo, las posibles obstrucciones para continuar esta deformación infinitesimal en una verdadera deformación están parametrizadas por el tercer grupo de cohomología de Hochschild del álgebra a coeficientes en ella misma.

En el Capítulo 2 se recuerdan algunas definiciones básicas sobre álgebras de Lie, sobre álgebras envolventes y también sobre homología y cohomología de álgebras de Lie. Luego de describir las álgebras de Lie complejas de dimensiones 1, 2 y 3, calculamos sus cohomologías.

El Capítulo 3 comienza con un resumen de resultados sobre cohomología de Hochschild de álgebras asociativas y en particular de álgebras envolventes de álgebras de Lie. Nos interesa especialmente el producto cup y la estructura de álgebra de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild. Luego calculamos como ejemplo la cohomología de Hochschild del álgebra envolvente del álgebra de Heisenberg, recuperando el resultado obtenido por P. Nuss en [N] y posteriormente en [HS]. En la última parte de este capítulo estudiamos el concepto de deformación de una k-álgebra asociativa y de una k-álgebra de Lie en términos cohomológicos.

En el Capítulo 4 comenzamos recordando material relacionado con el lema del diamante de Bergman [Ber], que es una herramienta para encontrar bases de módulos dados por generadores y relaciones. El lema del diamante es usado en el resto del capítulo para calcular de forma efectiva una familia de deformaciones de las álgebras envolventes de las álgebras de Lie del tipo $\mathfrak{r}_\alpha$. Para ello es necesario calcular primero su cohomología de Hochschild, y también algunos de los morfismos de comparación entre la resolución Bar y la resolución de Chevalley-Eilenberg.

Capítulo 2

Álgebras de Lie

En este capítulo desarrollaremos las nociones básicas de (co)homología de álgebras de Lie. Seguiremos la presentación del tema hecha en [W].

2.1 Resultados generales

A lo largo de esta sección, k será un anillo conmutativo.

2.1.1 Definiciones básicas

Definición 2.1.1. Una estructura de álgebra de Lie sobre un k-módulo $\mathfrak{g}$ es un morfismo de k-módulos $[-,-] : \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, llamado *corchete*, que satisface

1. $[x, y] = -[y, x] \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g} \qquad$ (Antisimetría),
2. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g} \qquad$ (Identidad de Jacobi).

Ejemplos 2.1.2.

1. Si k es un cuerpo y V un k-espacio vectorial, el corchete dado por $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in V$ da a V una estructura de álgebra de Lie. En este caso $[-,-]$ se llama la estructura de álgebra de Lie *abeliana* sobre V.

2. Dada una k-álgebra asociativa A es fácil darle una estructura de álgebra de Lie definiendo el corchete como su conmutador, es decir: dados $a, b \in A$, $[a, b] := ab - ba$. Notamos con $\mathrm{Lie}(A)$ al álgebra de Lie que tiene como k-módulo vectorial subyacente A y corchete antes descripto.

3. Sea A una k-álgebra arbitraria. Consideremos $\mathrm{Der}(A) := \{\phi \in \mathrm{End}_k(A) : \phi(ab) = a\phi(b) + \phi(a)b,\ \forall\, a, b \in A\}$. El corchete está definido como en el ejemplo anterior por el conmutador y da a $\mathrm{Der}(A)$ una estrucutra de subálgebra de Lie de $\mathrm{Lie}(\mathrm{End}_k(A))$.

4. Si G es un grupo de Lie, entonces el espacio de campos $X : C^\infty(G) \longrightarrow C^\infty(G)$ invariantes a izquierda, es un álgebra de Lie con el corchete dado por $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$, para $f \in C^\infty(G)$. Mas aún, las clases de difeomorfismo de grupos de Lie conexos y simplemente conexos quedan determinadas por su álgebra de Lie de campos invariantes a izquierda.

Definición 2.1.3. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ dos k-álgebras de Lie y sea $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un morfismo de k-módulos. Se dice que f es un *morfismo de álgebras de Lie* si preserva el corchete, es decir, si $f([x,y]) = [f(x), f(y)], \ \forall\, x, y \in \mathfrak{g}$.

Definición 2.1.4. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea $\mathfrak{h}$ un k-submódulo de $\mathfrak{g}$. Se dice que $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ si $[g,h] \in \mathfrak{h}$ para todo $g \in \mathfrak{g}$ y $h \in \mathfrak{h}$. Tanto $\mathfrak{h}$ como $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ heredan de forma natural una estructura de k-álgebra de Lie tal que los morfismos canónicos $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ son de álgebras de Lie.

Definición 2.1.5. Un $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda es un k-módulo M junto con un morfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{End}_k(M))$, o equivalentemente, una acción $\mathfrak{g} \otimes_k M \longrightarrow M$ que cumple $[x,y]m = x(ym) - y(x(m))$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$, $\forall m \in M$. Un morfismo de k-módulos $f : M \longrightarrow N$ entre dos $\mathfrak{g}$-módulos se dice un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos si $f(xm) = xf(m)$, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\forall m \in M$.

Ejemplos 2.1.6.

1. Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda, entonces M es un $\mathfrak{g}$-módulo a derecha mediante el morfismo $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{End}_k(M))^{op}$ definido por $m \cdot x := -xm$, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\forall m \in M$.

2. Sean M y N $\mathfrak{g}$-módulos a izquierda, entonces $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ tiene una estructura de $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda dada por $(x \cdot f)(m) := xf(m) - f(xm)$, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\forall m \in M$, $\forall f \in \mathrm{Hom}_k(M,N)$.

3. Sean M y N $\mathfrak{g}$-módulos a izquierda, entonces $M \otimes_k N$ tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda dada por $x \cdot (m \otimes n) := xm \otimes n + m \otimes xn$. De esta manera la categoría de g-módulos resulta una categoría monoidal.

4. Sea M un k-módulo, se define $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M) := \{D \in \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, M) : D([x,y]) = xD(y) - yD(x), \ \forall\, x, y \in \mathfrak{g}\}$. Se nota con $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ a $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Observemos que $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ resulta una k-subálgebra de Lie de $\mathrm{Lie}(\mathrm{End}_k(\mathfrak{g}))$.

5. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. Se puede definir el *producto semidirecto de* $\mathfrak{g}$ *y* M como la k-álgebra de Lie $M \rtimes \mathfrak{g}$ que tiene como espacio subyacente el k-módulo $M \oplus \mathfrak{g}$, y corchete dado por $[(m,g),(n,h)] = (g \cdot n - h \cdot m, [g,h]), \ \forall\, g, h \in \mathfrak{g}$, $\forall m \in M$.

6. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ k-álgebras de Lie y sea $\sigma : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ un morfismo. Se puede definir el *producto semidirecto de* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{h}$ *a través de* σ como la k-álgebra de Lie $\mathfrak{g} \rtimes_\sigma \mathfrak{h}$ que tiene como espacio subyacente el k-módulo $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, y corchete dado por $[(g,h),(g',h')] := ([g,g'] + \sigma(h)(g'), [h,h']), \ \forall\, g, g' \in \mathfrak{g}, \forall\, h, h' \in \mathfrak{h}$.

Proposición 2.1.7. *Dado un* $\mathfrak{g}$*-módulo a izquierda* M*, el funtor* $\mathrm{Hom}_k(M,-) : \mathfrak{g}$*-mod*$\longrightarrow \mathfrak{g}$*-mod es adjunto a derecha del funtor* $(-) \otimes_k M : \mathfrak{g}$*-mod*$\longrightarrow \mathfrak{g}$*-mod.*

Demostración. Basta chequear que los isomorfismos usuales de k-módulos que dan la adjunción entre los funtores $\mathrm{Hom}_k(M,-)$ y $(-) \otimes_k M$ quedan bien definidos para estas estructuras. $\square$

2.1.2 Álgebras nilpotentes y solubles

Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie.

Notación: Dados $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ ideales de $\mathfrak{g}$, vamos a notar con $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ al k-submódulo generado por los elementos $[h_1, h_2]$ tal que $h_1 \in \mathfrak{h}_1$ y $h_2 \in \mathfrak{h}_2$.

Lema 2.1.8. *Sean $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ ideales de $\mathfrak{g}$. Entonces $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Sean $x \in \mathfrak{g}$, $h_1 \in \mathfrak{h}_1$ y $h_2 \in \mathfrak{h}_2$. La identidad de Jacobi dice que $[x, [h_1, h_2]] = [h_1, [x, h_2]] + [[x, h_1], h_2] \in [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$. □

Definición 2.1.9. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie. Se define inductivamente la sucesión $\mathfrak{g}^n$ como $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ y si $n \geq 1$, entonces $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}]$. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *nilpotente* si la sucesión

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \mathfrak{g}^3 \supseteq \cdots$$

eventualmente se anula, es decir, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^n = 0$.

Por ejemplo, la k-álgebra libre de dimensión 3 generada por $\{x, y, z\}$, con corchete dado por $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$ es nilpotente pues $\mathfrak{g}^1 = \langle z \rangle$ y entonces $\mathfrak{g}^2 = 0$.

Definición 2.1.10. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie. Se define inductivamente la sucesión $\mathfrak{g}^{(n)}$ como $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ y si $n \geq 1$, entonces $\mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *soluble* si la sucesión

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \mathfrak{g}^{(2)} \supseteq \mathfrak{g}^{(3)} \supseteq \cdots$$

eventualmente se anula, es decir, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$.

Lema 2.1.11. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie, entonces $[\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}^m] \subseteq \mathfrak{g}^{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Para un n fijo haremos inducción en m. Si $m = 1$ la igualdad $[\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{n+1}$ vale por definición. El paso inductivo es

$$[\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}^{m+1}] = [\mathfrak{g}^n, [\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}]] \subseteq [[\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^m] + [[\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}^m], \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}^{n+1}, \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^{n+m}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}^{n+m+1},$$

donde la primera inclusión está dada por la identidad de Jacobi y las restantes por la hipótesis inductiva. □

Corolario 2.1.12. *Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.*

La vuelta no es cierta, por ejemplo el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de matrices triangulares superiores de 2×2 con coeficientes complejos es un álgebra de Lie soluble pero no nilpotente.

2.1.3 Invariantes y coinvariantes

Definición 2.1.13. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea M un $\mathfrak{g}$-módulo, se definen los invariantes y coinvariantes de la siguiente manera

- Invariantes: $M^{\mathfrak{g}} := \{m \in M : xm = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$,

- Coinvariantes: $M_{\mathfrak{g}} := M/\mathfrak{g}M$.

Observemos que si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos y $m \in M^{\mathfrak{g}}$, entonces $xf(m) = f(xm) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$; y si $n \in \mathfrak{g}M$, entonces $n = \sum x_i n'_i$ con $x_i \in \mathfrak{g}$ y $n'_i \in M$, y por lo tanto $f(n) = \sum x_i f(n'_i)$. Resumiendo, tenemos que $f|_{M^{\mathfrak{g}}} : M^{\mathfrak{g}} \longrightarrow N^{\mathfrak{g}}$ y que f induce $\bar{f} : M_{\mathfrak{g}} \longrightarrow N_{\mathfrak{g}}$. Es sencillo verificar que de esta manera $(-)^{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}\text{-mod} \longrightarrow k\text{-mod}$ y $(-)_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}\text{-mod} \longrightarrow k\text{-mod}$ son funtores.

En el otro sentido, contamos con el funtor trivial $k\text{-mod} \longrightarrow \mathfrak{g}\text{-mod}$, que a cada k-módulo M le asigna el $\mathfrak{g}$-módulo trivial: $x \cdot m = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$. Este funtor es exacto. El siguiente resultado es de fácil demostración:

Proposición 2.1.14. *Los funtores $(-)^{\mathfrak{g}}$ y $(-)_{\mathfrak{g}}$ son adjuntos a derecha y a izquierda respectivamente del funtor trivial. En particular $(-)^{\mathfrak{g}}$ es exacto a izquierda y $(-)_{\mathfrak{g}}$ es exacto a derecha.*

2.1.4 El álgebra envolvente universal

El álgebra envolvente universal de una k-álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una k-álgebra asociativa $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ que verifica cierta propiedad universal. En analogía con el álgebra de grupo kG asociada a un grupo G, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ servirá para traducir las nociones de $\mathfrak{g}$-módulos y morfismos $\mathfrak{g}$-módulos en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos y morfismos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos, y de esta manera se verá que la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos tiene suficientes inyectivos y suficientes proyectivos permitiendo definir la homología y cohomología como los funtores derivados de $(-)_{\mathfrak{g}}$ y $(-)^{\mathfrak{g}}$ respectivamente, de forma similar a la homología y cohomología de grupos.

Definición 2.1.15. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie, sea $T(\mathfrak{g})$ el álgebra tensorial y sea $\mathcal{I}$ el ideal de $T(\mathfrak{g})$ generado por $a \otimes b - b \otimes a - [a, b]$ para todo $a, b \in \mathfrak{g}$. El álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$ es

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/\mathcal{I}.$$

Notaremos con $x_1|\cdots|x_n$ a los elementos homogéneos de grado n (con respecto a la graduación evidente) de $T(\mathfrak{g})$ y con $x_1 \cdots x_n$ a su clase en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Intuitivamente, el álgebra envolvente consiste de sumas formales de palabras con letras en $\mathfrak{g}$ bajo la relación $xy - yx = [x, y]$ para $x, y \in \mathfrak{g}$.

Observemos que se tiene un morfismo de álgebras de Lie $i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ definido por la composición de los morfismos de k-módulos $\mathfrak{g} \longrightarrow T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Como corolario del siguiente teorema se obtiene que para álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ que son libres sobre k, este morfismo es inyectivo.

Teorema 2.1.16 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie libre como k-módulo y sea $\{e_i\}_{i \in J}$ una k-base ordenada. Entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un k-módulo libre con base $\{e_I : I = (i_1 \leq \cdots \leq i_n)$ sucesión finita y ordenada de $J\}$; donde $e_I := e_{i_1} \cdots e_{i_n}$.*

Para una demostración ver [CE].

Observación 2.1.17. 1. Si $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un morfismo de k-álgebras de Lie, entonces $\hat{f} : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ dada por la extensión lineal de $\hat{f}(x_1|\cdots|x_n) = f(x_1)\cdots f(x_n)$ se anula sobre $\mathcal{I}$ y por lo tanto pasa al cociente definiendo un morfismo de k-álgebras asociativas $\mathcal{U}(f) : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Por lo tanto $\mathcal{U}(-)$ resulta un funtor de la categoría de k-álgebras de Lie en la categoría de k-álgebras asociativas.

2. Si A es una k-álgebra asociativa y $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(A)$ es un morfismo de k-álgebras de Lie, entonces de forma similar al ítem anterior queda bien definida $\hat{f} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ dada por $\hat{f}(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$, donde ahora el producto de la derecha es el producto de A. Recíprocamente, si $h : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ es un morfismo de k-álgebras, $h \circ i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(A)$ cumple que $h \circ i([x, y]) = h([x, y]) = h(xy - yx) = h(x)h(y) - h(y)h(x) = [h(x), h(y)]$. Estas asignaciones son mutuamente inversas dando un isomorfismo de k-módulos que resulta natural.
$$\mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathrm{Lie}(A)) \cong \mathrm{Hom}_{k-alg}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), A),$$
es decir, el funtor $\mathrm{Lie}(-)$ es adjunto a izquierda del funtor $\mathcal{U}(-)$.

3. Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo, sea $m \in M$ y sea $x_1|x_2|\cdots|x_n$ un elemento homogéneo de grado n en $T(\mathfrak{g})$; podemos definir $(x_1|x_2|\cdots|x_n) \cdot m := x_1(x_2(\cdots(x_n m)\cdots))$ y extender linealmente esta acción a todo $T(\mathfrak{g})$; además, como M es $\mathfrak{g}$-módulo, vale que $x(ym) - y(xm) - [x, y]m = 0$, es decir, los elementos de $\mathcal{I}$ actúan trivialmente y por lo tanto podemos pasar al cociente obteniendo asi una estructura de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo sobre M. Recíprocamente, si M es un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo entonces resulta un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción dada por $x \cdot m := i(x)m$. Además, los morfismos de $\mathfrak{g}$-módulos entre dos $\mathfrak{g}$-módulos N y M resultan morfismos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos y viceversa.

De la última observación se desprende el siguiente resultado

Teorema 2.1.18. *La categoría de $\mathfrak{g}$-módulos es naturalmente isomorfa a la categoría de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos. En particular, la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos tiene suficientes inyectivos y suficientes proyectivos.*

Observación 2.1.19. Bajo estas identificaciones, el $\mathfrak{g}$-módulo trivial k resulta un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo, es decir, tenemos un morfismo de k-módulos, $\epsilon : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_k(k) = k$, llamado *aumentación.* Notaremos con $\mathcal{J}$ al núcleo de este morfismo. Este núcleo es llamado habitualmente *ideal de aumentación.* Observemos que $\mathcal{J}$ es el ideal bilátero generado por $\mathfrak{g}$, que además coincide con $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}$, y que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J} \cong k$.

Notaremos $\mathfrak{g}^{ab} := \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Utilizaremos el siguiente lema más adelante para caracterizar los grupos de (co)homología en grados bajos.

Lema 2.1.20. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea $\mathcal{J}$ el ideal de aumentación. Entonces se tienen los siguientes isomorfismos de k-módulos*

1. $\mathfrak{g}^{ab} \cong \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$.

2. *Para todo $\mathfrak{g}$-módulo trivial M,* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{ab}, M)$.

Demostración. 1) El isomorfismo es intuitivo ya que $\mathcal{J}$ es el ideal generado por $\mathfrak{g}$, luego $\mathcal{J}^2$ es el k-submódulo de $T(\mathfrak{g})$ generado por los elementos de grado mayor o igual a 2, por lo tanto en $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ se tiene la relación $[x, y] = xy - yx = 0$. Veamos la prueba.

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $\sigma_n : \mathfrak{g}^{\times n} \longrightarrow \mathfrak{g}^{ab}$ por $\sigma_n(x_1, \cdots, x_n) := 0$ para $n \neq 1$ y $\sigma_1(x) = \bar{x}$. Pasando al producto tensorial para cada n y luego al álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$, construimos un morfismo $T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}^{ab}$ que además se anula sobre $\mathcal{I}$ y por lo tanto se factoriza por el álgebra envolvente. Obtenemos asi un morfismo $\sigma : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}^{ab}$ que cumple que $\sigma(x) = \bar{x}$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $\sigma|_{\mathcal{J}^2} = 0$. De esta manera construimos $\bar{\sigma} : \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow \mathfrak{g}^{ab}$ de k-módulos cuya inversa es $\bar{i} : \mathfrak{g}^{ab} \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ inducida por la inclusión $i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

2) Sea $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, M)$, como f es k-lineal y $f([x,y]) = xf(y) = 0$, f pasa al cociente e induce $\bar{f} : \mathfrak{g}^{ab} \longrightarrow M$. Recíprocamente, sea $f : \mathfrak{g}^{ab} \longrightarrow M$ un morfismo de k-módulos, entonces $f \circ \pi([x,y]) = 0 = x(f \circ \pi(y))$, luego $f \circ \pi \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, M)$. □

2.2 Homología y cohomología de álgebras de Lie

El teorema 2.1.18 nos permite hablar de funtores derivados a derecha y a izquierda en la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos.

Definición 2.2.1. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea M un $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda. Se define la homología y cohomología de álgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ con coeficientes en M como

$$H_\bullet^{Lie}(\mathfrak{g}, M) := L_\bullet(-_{\mathfrak{g}})(M), \qquad H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, M) := R^\bullet(-^{\mathfrak{g}})(M).$$

La homología y cohomología pueden calcularse también en la categoría de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos como funtores derivados conocidos, como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y M un $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda. Entonces*

$$H_\bullet^{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong \operatorname{Tor}_\bullet^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, M), \qquad H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong \operatorname{Ext}^\bullet_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, M).$$

Demostración. Como todo funtor derivado es un δ-funtor universal, basta probar que hay un isomorfismo natural entre los funtores en grado 0. Estos isomorfismos están dados por

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{g}} &= M/\mathfrak{g}M \cong (U(\mathfrak{g})/\mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M \cong k \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M, \\ M^{\mathfrak{g}} &= \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(k, M) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, M). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.3. *Para todo $n \geq 1$, $H^n_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{U}(\mathfrak{g})) = 0$ y $H_n^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{U}(\mathfrak{g})) = 0$.*

Demostración. Se sigue del hecho de que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo libre. □

Corolario 2.2.4. *Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. Las siguientes sucesiones son exactas, donde los morfismos son los naturales*

$$0 \longrightarrow H_1^{Lie}(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M \longrightarrow M \longrightarrow M_{\mathfrak{g}} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow M^{\mathfrak{g}} \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M) \longrightarrow H^1_{Lie}(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow 0.$$

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0\,.$$

Los primeros términos de la sucesión exacta larga en homología de los funtores $(-) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(-, M)$ devuelven las sucesiones exactas buscadas. $\square$

Observación 2.2.5. Es interesante observar que este corolario, que brinda cierta información sobre el $\mathfrak{g}$-módulo M y que usaremos mas adelante, se obtiene de pasar a la categoría de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos, utilizar un resultado y luego volver a la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos, consiguiendo asi descripciones del primer grupo de (co)homología en términos del $\mathfrak{g}$-módulo $\mathcal{J}$; el cual si bien surge naturalmente en la categoría de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos, no lo hace en la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos. Mas interesante aún es la observación de que la sucesión exacta larga en homología correspondiente al funtor $(-)^{\mathfrak{g}}$ no nos devuelve este corolario (ya que el $\mathfrak{g}$-módulo M no aparece involucrado de ninguna manera) y que a simple vista no habría manera natural de obtenerlo sin pasar por los $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos.

En resumen, pasar de los $\mathfrak{g}$-módulos a los $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ módulos aporta mucha información ya que nos permite utilizar maquinaria de los módulos sobre álgebras asociativas. Por ejemplo, en este corolario se utilizó el hecho no trivial de que $R^\bullet(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(M, -))(k) \cong R^\bullet(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(-, k))(M)$, poniendo los grupos de cohomología en términos de dos funtores distintos cuyas sucesiones exactas largas son diferentes, una de ellas es la que se usó en la demostración, la otra es la que se obtiene a partir del funtor $(-)^{\mathfrak{g}}$.

Veamos ahora una generalización del Teorema 2.2.2.

Consideremos M y N dos $\mathfrak{g}$-módulos tal que M es playo como k-módulo. Tenemos en $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo definida en el ejemplo 2.1.6, para la cual existe un isomorfismo natural $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_k(M, N)^{\mathfrak{g}}$. Por otro lado, sabemos que hay un isomorfismo natural $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N)$ obteniendo, mediante la composición de los dos, un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(M, -) \cong \mathrm{Hom}_k(M, -)^{\mathfrak{g}},$$

que se integra a un isomorfismo de δ-funtores entre los funtores derivados, es decir

$$\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(M, N) \cong R^\bullet(\mathrm{Hom}_k(M, -)^{\mathfrak{g}})(N).$$

Además, el funtor $\mathrm{Hom}_k(M, -)$ es adjunto a derecha de $(-) \otimes_k M$ que resulta exacto por ser M un k-módulo playo, implicando que $\mathrm{Hom}_k(M, I)$ es un $\mathfrak{g}$-módulo inyectivo para todo $\mathfrak{g}$-módulo inyectivo I. Luego se tiene

$$R^\bullet(\mathrm{Hom}_k(M, -)^{\mathfrak{g}})(N) \cong R^\bullet(-^{\mathfrak{g}})(\mathrm{Hom}_k(M, N)).$$

Resumiendo obtenemos la siguiente generalización del Teorema 2.2.2

Teorema 2.2.6. *Sea k un cuerpo. Sean M y N dos $\mathfrak{g}$-módulos, entonces se tienen isomorfismos naturales*

$$H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(M, N), \qquad H_\bullet^{Lie}(\mathfrak{g}, M \otimes_k N) \cong \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(M, N).$$

Para la homología el razonamiento es análogo, utilizando la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo definida en el ejemplo 2.1.6.

2.2.1 Caracterización de los grupos de (co)homología en grados bajos

Observación 2.2.7. Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo, entonces $H^0_{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong M^{\mathfrak{g}}$ y $H_0^{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong M_{\mathfrak{g}}$. En efecto $H^{\bullet}_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ y $H_{\bullet}^{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ son los funtores derivados de $(-)^{\mathfrak{g}}$ y $(-)_{\mathfrak{g}}$ respectivamente, y por lo tanto en grado 0 coinciden con el funtor aplicado a M.

Daremos ahora una descripción de $H^1_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ como cociente de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$, para ello necesitamos una definición y un lema.

Definición 2.2.8. Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. A cada $m \in M$ le podemos asignar el morfismo $D_m \in \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, M)$ definido por $D_m(x) := xm$, que resulta ser una derivación de $\mathfrak{g}$ en M, es decir, $D_m \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$. Notamos con $\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g}, M)$ al submódulo de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$ formado por este tipo de derivaciones, que son llamadas *derivaciones interiores.*

Lema 2.2.9. *Hay un isomorfismo natural de k-módulos* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M) \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$.

Demostración. Dada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M)$, definamos $D_f \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$ como: $D_f(x) := f(i(x))$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Tenemos que $D_f([x, y]) = f(i([x, y])) = f(xy - yx) = xf(y) - yf(x) = xf(i(y)) - yf(i(x))$, y por lo tanto $D_f \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$ definiendo un morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$.

Recíprocamente, sea $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$. Consideremos $\hat{f} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_k \mathfrak{g} \longrightarrow M$ definido por $\hat{f}(u \otimes_k x) = uD(x)$. Como D es derivación, $f(u \otimes [x, y] - ux \otimes y - uy \otimes x) = 0$. Luego $\hat{f}$ induce un morfismo $f : \mathcal{J} \longrightarrow M$, dado por $f(x_0 \cdots x_n) := x_0 \cdots x_{n-1}D(x_n)$. Además para $y \in \mathfrak{g}$, $f(y \cdot (x_0 \cdots x_n)) = f(yx_0 \cdots x_n) = yx_0 \cdots x_{n-1}D(x_n) = yf(x_0 \cdots x_n)$, es decir, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M)$; obteniendo de esta manera un morfismo $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M)$.

Los dos morfismos son de k-módulos y son mutuamente inversos. □

Teorema 2.2.10. *Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. Entonces* $H^1_{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)/\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g}, M)$.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta de la cohomología del Corolario 2.2.4, de donde se sigue que $H^1_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ es isomorfo al cociente de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M)$ por la imagen del morfismo $M \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathcal{J}, M)$. Siguiendo la demostración de este corolario se ve que el isomorfismo corresponde a la composición $M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M)$, donde la primera flecha asigna a cada m el único $\mathfrak{g}$-morfismo ϕ_m que cumple $\phi_m(1) = m$ y la segunda flecha asigna a cada morfismo su restricción a $\mathcal{J}$. Bajo el isomorfismo del lema anterior, la imagen de M en $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M)$ son las derivaciones interiores $\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g}, M)$: en efecto, ϕ_m se corresponde con D_{ϕ_m} ya que por definición $D_{\phi_m}(x) = \phi(i(x)) = xm = D_m(x)$. □

Corolario 2.2.11. *Si M es un $\mathfrak{g}$-módulo trivial, entonces* $H^1_{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{ab}, M)$.

Demostración. Como M es $\mathfrak{g}$-módulo trivial, entonces $\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g}, M) = 0$, y $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$ si y solo si $D \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, M)$ pues en ambos casos $D([x, y]) = 0 = xD(y)$. Luego $H^1_{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, M)$ y por el Lema 2.1.20, existe un isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{ab}, M)$. □

Por último veremos una caracterización de H_1^{Lie} para los $\mathfrak{g}$-módulos triviales.

Teorema 2.2.12. *Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo trivial. Entonces* $H_1^{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathfrak{g}^{ab} \otimes_k M$.

Demostración. Como $M = M_{\mathfrak{g}}$, la sucesión exacta de la homología del Corolario 2.2.4 dice que $H^1_{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M$. Por otro lado

$$\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M \cong (\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} k) \otimes_k M \cong \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes_k M, \tag{2.2.1}$$

y por el Lema 2.1.20 este último es isomorfo a $\mathfrak{g}^{ab} \otimes_k M$. □

2.2.2 La resolución de Chevalley-Eilenberg

Para realizar cálculos de la homología y cohomología de álgebras de Lie libres sobre k, contamos con la resolución de Chevalley-Eilenberg, que es una resolución de k como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo trivial, y tiene la ventaja de ser una resolución finita para aquellas álgebras de Lie de dimensión finita sobre k.

A partir de ahora $\mathfrak{g}$ será libre como k-módulo.

Definición 2.2.13. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define la *potencia exterior n-ésima* de $\mathfrak{g}$ como $\wedge^n \mathfrak{g} := \mathfrak{g}^{\otimes n}/J$, donde J es el submódulo generado por los elementos de la forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - (-1)^{sg(\sigma)} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$, con $x_i \in \mathfrak{g}$ y $\sigma \in S_n$. Notaremos con $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ a la clase de $x_1 | \cdots | x_n$ y por convención $\wedge^0 \mathfrak{g} = k$.

Observación 2.2.14. Es un hecho conocido que si $\{e_i\}_{i \in I}$ es una base ordenada de $\mathfrak{g}$ como k-módulo, entonces $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} : i_1, \cdots, i_n \in I\}$ es una k-base de de $\mathfrak{g}^{\otimes n}$. En la potencia exterior n-ésima los elementos con coordenadas repetidas se anulan y además, las relaciones permiten ordenar los elementos y de esta manera se prueba que $\wedge^n \mathfrak{g}$ es libre con base $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : (i_1 < \cdots < i_n), \text{ con } i_j \in I\}$.

Definición 2.2.15. El complejo de Chevalley-Eilenberg se define como

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^3 \mathfrak{g} \xrightarrow{d_2} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^2 \mathfrak{g} \xrightarrow{d_1} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \xrightarrow{d_0} \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \tag{$C_\bullet$}$$

con diferenciales dados por

$$d_n(u \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge x_n) = \theta_1 + \theta_2,$$

donde

$$\theta_1 := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i u x_i \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n,$$
$$\theta_2 := \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x_i} \wedge \cdots \wedge \hat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n.$$

Proposición 2.2.16. *El complejo de Chevalley-Eilenberg es un complejo de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos libres.*

Demostración. Veamos primero que es un complejo, es decir que $d \circ d(u \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge x_n) = 0$ para x_i en $\mathfrak{g}$. Para simplificar la escritura, si $i < j$, llamamos $\hat{x}_i : \hat{x}_j$ a $x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge$

$\hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n$. Definimos análogamente $\hat{x}_i : \hat{x}_j : \hat{x}_k$ para $i < j < k$. Para ordenar la cuenta vamos a notar

$$\begin{aligned} d(\theta_1) &= \theta_{1,1} + \theta_{1,2}, \\ d(\theta_2) &= \theta_{2,1} + \theta_{2,2}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$d \circ d(u \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge x_n) = \theta_{1,1} + \theta_{1,2} + \theta_{2,1} + \theta_{2,2}.$$

Desarrollemos cada término

$$\begin{aligned} \theta_{1,1} &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k u x_i x_k \otimes \hat{x}_k : \hat{x}_i + \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{k-1} u x_i x_k \otimes \hat{x}_i : \hat{x}_k) \\ &= \sum_{k<i} (-1)^{i+k} u x_i x_k \otimes \hat{x}_k : \hat{x}_i + \sum_{i<k} (-1)^{i+k-1} u x_i x_k \otimes \hat{x}_i : \hat{x}_k \\ &= \sum_{i<k} (-1)^{i+k} u [x_k, x_i] \otimes \hat{x}_i : \hat{x}_k = -\sum_{i<k} (-1)^{i+k} u [x_i, x_k] \otimes \hat{x}_i : \hat{x}_k \\ \theta_{1,2} &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} (-1)^{j+k} u x_i \otimes [x_j, x_k] \wedge (\hat{x}_j : \hat{x}_k : \hat{x}_i) + \\ &\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{j+k-1} u x_i \otimes [x_j, x_k] \wedge (\hat{x}_j : \hat{x}_i : \hat{x}_k) + \\ &\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{j+k} u x_i \otimes [x_j, x_k] \wedge (\hat{x}_i : \hat{x}_j : \hat{x}_k). \\ \theta_{2,1} &= -\theta_{1,1} - \theta_{1,2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\theta_{1,1} + \theta_{1,2} + \theta_{2,1} = 0$. Falta ver que $\theta_{2,2} = 0$. Es fácil ver que utilizando la identidad de Jacobi, los primeros términos, es decir los términos que involucran a $[[x_i, x_j], x_k]$, se cancelan entre sí. Los términos restantes son

$$\begin{aligned} \theta_{2,2} = &\sum_{k<l<i<j} (-1)^{i+j} (-1)^{k+l} u | [x_k, x_l] \wedge [x_i, x_j] \wedge (\hat{x}_k : \hat{x}_l : \hat{x}_i : \hat{x}_j) + \\ &\sum_{k<i<l<j} (-1)^{i+j} (-1)^{k+l-1} u | [x_k, x_l] \wedge [x_i, x_j] \wedge (\hat{x}_k : \hat{x}_i : \hat{x}_l : \hat{x}_j) + \\ &\sum_{k<i<j<l} (-1)^{i+j} (-1)^{k+l} u | [x_k, x_l] \wedge [x_i, x_j] \wedge (\hat{x}_k : \hat{x}_i : \hat{x}_j : \hat{x}_l) + \\ &\sum_{i<k<l<j} (-1)^{i+j} (-1)^{k+l} u | [x_k, x_l] \wedge [x_i, x_j] \wedge (\hat{x}_i : \hat{x}_k : \hat{x}_l : \hat{x}_j) + \\ &\sum_{i<k<j<l} (-1)^{i+j} (-1)^{k+l-1} u | [x_k, x_l] \wedge [x_i, x_j] \wedge (\hat{x}_i : \hat{x}_k : \hat{x}_j : \hat{x}_l) + \\ &\sum_{i<j<k<j} (-1)^{i+j} (-1)^{k+l} u | [x_k, x_l] \wedge [x_i, x_j] \wedge (\hat{x}_i : \hat{x}_j : \hat{x}_k : \hat{x}_l). \end{aligned}$$

Reordenando los índices de las sumatorias para que en todas ellas sea $k < l < i < j$, y usando las antisimetría de $\wedge^n \mathfrak{g}$, se puede verificar que la primera línea se cancela con la sexta, la segunda con la quinta y la tercera con la cuarta.

Como $\wedge^n \mathfrak{g}$ es un k-módulo libre, se tiene que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^n \mathfrak{g} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes k^{(I)} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{(I)}$, donde los últimos isomorfismos son de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos. Por lo tanto $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^n \mathfrak{g}$ es un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo libre.

□

Teorema 2.2.17. *El complejo $C_\bullet \xrightarrow{\epsilon} k$ es una resolución libre de k como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo.*

Demostración. Es claro que es exacta en el último término, luego, basta probar que $H_n(C) = 0$ para todo $n \neq 0$. Sea $\{e_i\}_{i\in\Gamma}$ una k-base ordenada de $\mathfrak{g}$ como k-módulo. Por el teorema de PBW, el conjunto $\{e_I : I = (i_1 \leq \cdots \leq i_m),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ es una k-base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Entonces el conjunto formado por los elementos $e_I \otimes e_{j_0} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-1}}$ donde $I = (i_1 \leq \cdots \leq i_m)$ con $m \geq 0$ es una base de C_n.

Dado $p \in \mathbb{N}$, denotemos por $F_p(C_n)$ al k-submódulo de C_n generado por los elementos $e_I \otimes e_{j_0} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-1}}$ tales que $I = (i_1 \leq \cdots \leq i_m)$ y $m + n \leq p$. Es claro que, llamando por d al diferencial de $C_\bullet$ restringido a $F_p(C_\bullet)$, resulta que $(F_p(C_\bullet), d)$ es un subcomplejo de $C_\bullet$.

Sea $W_{p,\bullet} := F_p(C_\bullet)/F_{p-1}(C_\bullet)$. Los diferenciales se factorizan por $W_{p,\bullet}$ y resulta que, módulo $F_{p-1}(C_\bullet)$,

$$d(e_I \otimes e_{j_0} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-1}}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e_I e_{j_i} \otimes e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{j_i} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-1}}.$$

Si consideramos $V_\bullet := \sum_p W_p$, resulta que $V_\bullet = k[e_i : i \in \Gamma] \otimes \wedge^\bullet \mathfrak{g}$, que es una resolución proyectiva de k como $k[e_i : i \in \Gamma]$-módulo (ver [CE]). Luego, $H_q(V_\bullet) = 0$ para todo $q > 0$ y por lo tanto $H_q(W_{p,\bullet}) = 0$ para todo $q > 0$.

Por otro lado, para todo $q > 0$ y todo $p \geq 0$ contamos con la sucesión exacta

$$H_q(F_{p-1}(C_\bullet)) \longrightarrow H_q(F_p(C_\bullet)) \longrightarrow H_q(W_{p,\bullet}) = 0,$$

y entonces $H_q(F_{p-1}(C_\bullet)) \longrightarrow H_q(F_p(C_\bullet))$ es un epimorfismo. Como $F_{-1}(C_\bullet) = 0$ obtenemos que $H_q(F_p(C_\bullet)) = 0$ para todo $p \geq 0$ y $q > 0$ y por lo tanto, $H_q(C_\bullet) = H_q(\cup_p F_p(C_\bullet)) = 0$ para todo $q > 0$, como queríamos demostrar.

□

Corolario 2.2.18. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie de dimensión n. Entonces $H^m_{Lie}(\mathfrak{g}, -) = H_m^{Lie}(\mathfrak{g}, -) = 0$ para todo $m > n$.*

Demostración. Basta observar que $\wedge^m \mathfrak{g} = 0$ para todo $m > n$ y por lo tanto la resolución de Chevalley-Eilenberg es nula a partir del término n-ésimo. □

Corolario 2.2.19. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. Entonces $H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ es la cohomología del complejo*

$$\cdots \longleftarrow \operatorname{Hom}_k(\wedge^2 \mathfrak{g}, M) \xleftarrow{\delta_1} \operatorname{Hom}_k(\mathfrak{g}, M) \xleftarrow{\delta_0} M \longleftarrow 0, \tag{2.2.2}$$

con diferenciales dados por

$$\begin{aligned}\delta_n f(x_0 \wedge \cdots \wedge x_n) = &\sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \cdot f(x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n) + \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n).\end{aligned}$$

Demostración. Como $H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, M)$, basta aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(-, M)$ a la resolución de Chevalley-Eilenberg e identificar de forma canónica $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^\bullet \mathfrak{g}, M)$ con $\mathrm{Hom}_k(\wedge^\bullet \mathfrak{g}, M)$. □

2.2.3 Extensiones y cohomología en grado 2

En esta sección $\mathfrak{g}$ será una k-álgebra de Lie libre.

Estamos ahora en condiciones de dar una caracterización de $H^2_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$. Para ello necesitaremos algunas definiciones.

Definición 2.2.20. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie, y sea M una k-álgebra de Lie abeliana. Una *extensión de* $\mathfrak{g}$ *por* M es una sucesión exacta corta de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0.$$

Definición 2.2.21. Sean $0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{e}_1 \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{e}_2 \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ dos extensiones de $\mathfrak{g}$ por M. Decimos que son *equivalentes* si existe un isomorfismo $\mathfrak{e}_1 \cong \mathfrak{e}_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{e}_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\cong"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_2"] & \mathfrak{e}_2 \arrow[r, "\pi_2"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Observación 2.2.22. Una extensión de $\mathfrak{g}$ por M permite definir en M una estructura de $\mathfrak{g}$-módulo de la siguiente manera. Sean $m \in M$, $x \in \mathfrak{g}$, y sea $y \in \mathfrak{e}$ tal que $\pi(y) = x$. Como $\pi([y, i(m)]) = [\pi(y), 0] = 0$, entonces $[y, i(m)] \in \mathrm{Ker}\, \pi = \mathrm{Im}(i)$. Por otro lado, si $y_1, y_2 \in \mathfrak{e}$ son tales que $\pi(y_1) = \pi(y_2) = x$, entonces $\pi(y_1 - y_2) = 0$. Luego $y_1 - y_2 \in \mathrm{Im}(i)$ y por lo tanto, como M es abeliana, $[y_1 - y_2, i(m)] = 0$, lo que implica que $[y_1, i(m)] = [y_2, i(m)]$. De esta manera, queda bien definida la acción $x * m := i^{-1}([y, i(m)])$.

Definición 2.2.23. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. Decimos que una extensión de $\mathfrak{g}$ por M, considerando a M como una k-álgebra de Lie abeliana, es *compatible con* M si la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo que induce la extensión coincide con la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo de M.

Lema 2.2.24. *Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. Entonces* $0 \longrightarrow M \longrightarrow M \rtimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ *es una extensión compatible de $\mathfrak{g}$ por M.*

Demostración. Sean $m \in M$ y $x \in \mathfrak{g}$. Como $[(0, x), (m, 0)] = (x \cdot m, 0)$, resulta que $x * m = x \cdot m$. □

Llamemos *extensión trivial* a la extensión del lema anterior.

Proposición 2.2.25. *Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. Sea $E = \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ una extensión compatible de $\mathfrak{g}$ por M. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) existe un morfismo de álgebras de Lie $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{e}$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$,

ii) E es equivalente a la extensión trivial $0 \longrightarrow M \longrightarrow M \rtimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$.

Demostración. Supongamos que existe σ como en i).

Sea $\varphi : M \rtimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{e}$ definida por $\varphi(m,x) = i(m) + \sigma(x)$. Veamos que φ es morfismo de álgebras de Lie. Sean $(m,x),(n,y) \in M \rtimes \mathfrak{g}$. Como $\pi(\sigma(x)) = x$, entonces $x * n = i^{-1}([\sigma(x), i(n)])$ y $y * m = i^{-1}([\sigma(y), i(m)])$. Luego

$$\begin{aligned}\varphi([(m,x),(n,y)]) &= i(x*n - y*m) + \sigma([x,y]) \\ &= [\sigma(x), i(n)] - [\sigma(y), i(m)] + [\sigma(x), \sigma(y)] \\ &= [\sigma(x), i(n)] + [m, \sigma(y)] + [\sigma(x), \sigma(y)] \\ &= [i(m) + \sigma(x), i(n) + \sigma(y)] = [\varphi(m,x), \varphi(n,y)].\end{aligned}$$

Además, φ tiene una inversa dada por $\varphi^{-1}(e) = (i^{-1}(e - \sigma \circ \pi(e)), \pi(e))$. Por lo tanto es un isomorfismo y entonces E es equivalente a la extensión trivial, ya que es evidente que los diagramas correspondientes conmutan.

Recíprocamente, supongamos ahora que E es equivalente a la extensión trivial. Sea $\varphi : M \rtimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{e}$ el isomorfismo, que cumple $\pi \circ \phi(m,x) = x$ por la conmutatividad del diagrama. Sea $j : \mathfrak{g} \longrightarrow M \rtimes \mathfrak{g}$ el morfismo definido por $j(x) = (0,x)$, que resulta morfismo de álgebras de Lie. Podemos definir $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{e}$ como $\sigma = \varphi \circ j$. Se verifica que $\pi \circ \sigma(x) = \pi \circ \phi(0,x) = x$. □

Observación 2.2.26. Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo y sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ una extensión compatible. Sea $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{e}$ un morfismo k-lineal tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Notar que un morfismo σ con esas propiedades necesariamente existe ya que estamos suponiendo que $\mathfrak{g}$ es libre como k-módulo.

Si $x, y \in \mathfrak{g}$, sabemos que $\pi([\sigma(x), \sigma(y)]) = [x,y] = \pi(\sigma([x,y]))$, entonces $[\sigma(x), \sigma(y)] - \sigma([x,y]) \in \mathrm{Im}(i)$.

Sea $\chi_\sigma : \wedge^2 \mathfrak{g} \longrightarrow M$ definido por $\chi_\sigma(x,y) = i^{-1}([\sigma(x), \sigma(y)] - \sigma([x,y]))$.

Lema 2.2.27. *Sean σ y χ_σ como en la observación anterior. Sean δ_1 y δ_2 los diferenciales del complejo del Corolario 2.2.19. Entonces*

1. *$\chi_\sigma \in \mathrm{Ker}\, \delta_2$,*

2. *si σ' es otro morfismo k-lineal tal que $\pi \circ \sigma' = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, entonces $\chi_\sigma - \chi_{\sigma'} \in \mathrm{Im}\, \delta_1$.*

Demostración. • 1) Sean $x, y, z \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\begin{aligned} i(\delta_2(\chi_\sigma)(x,y,z)) &= i(x * \chi_\sigma(y,z) - y * \chi_\sigma(x,z) + z * \chi_\sigma(x,y) - \\ &\chi([x,y],z) + \chi([x,z],y) - \chi([y,z],x)) \\ &= [\sigma(x),[\sigma(y),\sigma(z)]] - [\sigma(x),\sigma([y,z])] - \\ &[\sigma(y),[\sigma(x),\sigma(z)]] + [\sigma(y),\sigma([x,z])] + \\ &[\sigma(z),[\sigma(x),\sigma(y)]] - [\sigma(z),\sigma([x,y])] - \\ &[\sigma([x,y]),\sigma(z)] + \sigma([[x,y],z]) + \\ &[\sigma([x,z]),\sigma(y)] - \sigma([[x,z],y]) - \\ &[\sigma([y,z],\sigma(x)] + \sigma([[y,z],x]) \\ &= [\sigma(x),[\sigma(y),\sigma(z)]] - [\sigma(y),[\sigma(x),\sigma(z)]] + \\ &[\sigma(z),[\sigma(x),\sigma(y)]] + \sigma([[x,y],z] - [[x,z],y] + [[y,z],x]). \end{aligned}$$

Usando la identidad de Jacobi, vemos que $i(\delta_2(\chi_\sigma))(x,y,z) = 0$ y como i es un monomorfismo, resulta que $\chi_\sigma \in \operatorname{Ker}\delta_2$.

- 2) Sea $x \in \mathfrak{g}$. Como $\pi(\sigma(x)) = \pi(\sigma'(x))$, existe $\beta(x) \in M$ tal que $\sigma'(x) = \sigma(x) + i(\beta(x))$. El morfismo $\beta : \mathfrak{g} \longrightarrow M$ asi definido resulta k-lineal.

  Sean $x, y \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$\begin{aligned} \chi_\sigma(x,y) - \chi_{\sigma'}(x,y) &= i^{-1}([\sigma(x),\sigma(y)] - \sigma([x,y]) - [\sigma'(x),\sigma'(y)] + \sigma'([x,y])) \\ &= -i^{-1}([\sigma(x), i(\beta(y))]) - i^{-1}([i(\beta(x)),\sigma(y)]) + \beta([x,y]) \\ &= -x * \beta(y) + y * \beta(x) + \beta([x,y]) \\ &= -\delta_1(\beta)(x,y). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.28. *Existe una aplicación*

$$\Psi : \{\textit{Extensiones compatibles de } \mathfrak{g} \textit{ por } M\} \longrightarrow H^2_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$$

que asigna a cada extensión la clase de χ_σ en $H^2_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$, para algún $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{e}$, k-lineal, tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

Esta asignación es la que nos dará la biyección entre ambos. Para poder ver que Ψ es inyectiva necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.2.29. *Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. Sean $E_i = 0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{e}_i \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$, $i = 1, 2$, dos extensiones compatibles. Sean $\sigma_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{e}_i$ funciones k-lineales tales que $\pi_i \circ \sigma_i = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, para $i = 1, 2$ y tales que $\chi_{\sigma_1} = \chi_{\sigma_2}$. Entonces E_1 es equivalente a E_2.*

Demostración. Sea $\chi = \chi_{\sigma_1} = \chi_{\sigma_2}$.

Sea $\psi_1 : \mathfrak{e}_1 \longrightarrow M \oplus \mathfrak{g}$ el isomorfismo k-lineal dado por

$$\psi_1(e) = (i_1^{-1}(e - \sigma_1 \circ \pi_1(e)), \pi_1(e)),$$

con inversa dada por

$$\psi_1^{-1}(m,x) = i_1(m) + \sigma_1(x).$$

Consideremos en $M \oplus \mathfrak{g}$ la estructura de álgebra de Lie inducida por ψ, es decir

$$\begin{aligned}
[(m,x),(n,y)] :=& \psi_1([\psi_1^{-1}(m,x), \psi_1^{-1}(n,y)]) \\
=& \psi_1([i_1(m) + \sigma_1(x), i_1(n) + \sigma_1(y)]) \\
=& \psi_1(i_1(x \cdot n) - i_1(y \cdot m) + [\sigma_1(x), \sigma_1(y)]) \\
=& (x \cdot n - y \cdot m, 0) + \psi_1([\sigma_1(x), \sigma_1(y)]) \\
=& (x \cdot n - y \cdot m + \chi(x,y), [x,y]).
\end{aligned}$$

Entonces $\mathfrak{e}_1 \cong M \oplus \mathfrak{g}$ como k-álgebras de Lie. Análogamente $\mathfrak{e}_2 \cong M \oplus \mathfrak{g}$, luego $\mathfrak{e}_1 \cong \mathfrak{e}_2$.

Además si $e \in \mathfrak{e}_1$,

$$\pi_2 \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_1(e) = \pi_1(e),$$

y si $m \in M$,

$$\psi_2^{-1} \circ \psi_1 \circ i_1(m) = i_2(m).$$

Por lo tanto E_1 es equivalente a E_2. □

Corolario 2.2.30. *La asignación Ψ del Corolario 2.2.28 es inyectiva.*

Demostración. Sean $E_i = \; 0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{e}_i \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$, $i = 1, 2$, dos extensiones compatibles tales que $\Psi(E_1) = \Psi(E_2)$. Sean $\sigma_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{e}_i$, $i = 1, 2$, tales que $\pi_i \circ \sigma_i = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

La condición $\Psi(E_1) = \Psi(E_2)$ se traduce en que existe $\beta : \mathfrak{g} \longrightarrow M$ tal que

$$\chi_{\sigma_2} = \chi_{\sigma_1} + \delta_1(\beta).$$

Sea $\tilde{\sigma}_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{e}$ definido por $\tilde{\sigma}_1 := \sigma_1 + i_1 \circ \beta$ que verifica las igualdades $\pi_1 \circ \tilde{\sigma}_1 = \pi_1 \sigma_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Cálculos inmediatos muestran que $\chi_{\tilde{\sigma}_1} = \chi_{\sigma_1} + \delta_1(\beta) = \chi_{\sigma_2}$. Luego, por el lema anterior, obtenemos que E_1 es equivalente a E_2. □

Lema 2.2.31. *La asignación Ψ del Corolario 2.2.28 es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $\chi \in \mathrm{Ker}\,(\delta_2)$. Consideremos en $M \oplus \mathfrak{g}$ el corchete dado por

$$[(m,x),(n,y)] := (x \cdot n - y \cdot m + \chi(x,y), [x,y]), \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}, \forall m, n \in M,$$

que es claramente antisimétrico y que cumple la identidad de Jacobi. Sea $i : M \longrightarrow M \oplus \mathfrak{g}$ la inclusión y $\pi : M \oplus \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ la proyección a la segunda coordenada. Sea $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow M \oplus \mathfrak{g}$ el morfismo definido por $\sigma(x) = (0, x)$. Como

$$\chi_\sigma(x,y) = i^{-1}([(0,x),(0,y)] - (0,[x,y])) = i^{-1}(\chi(x,y), 0) = \chi(x,y),$$

resulta que $\chi = \Psi(\; 0 \longrightarrow M \longrightarrow M \oplus \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0 \;)$. □

Los resultados anteriores pueden resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.32. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie, libre como k-módulo, y sea M un k-módulo. Entonces el grupo $H^2_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ está en biyección con las clases de equivalencia de extensiones compatibles de $\mathfrak{g}$ por M.*

Observación 2.2.33. El teorema vale en general para cualquier álgebra de Lie sobre k, pero su demostración es mas complicada e involucra la sucesión espectral de Hochschild-Serre.

2.3 Clasificación de álgebras de Lie complejas de dimensiones 1, 2 y 3

En esta sección trabajaremos con álgebras de Lie sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Empecemos con una definición en la cual nos basaremos para la clasificación.

Definición 2.3.1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja. Como el corchete es antisimétrico, la aplicación $[-,-] : \mathfrak{g}^{\otimes 2} \longrightarrow \mathfrak{g}$ se factoriza por el morfismo $\mathbb{C}$-lineal $[-,-] : \wedge^2\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Llamaremos *rango de* $\mathfrak{g}$ a la dimensión de su imagen, es decir $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}([-,-]))$.

2.3.1 Álgebras de Lie de dimensiones 1 y 2

La descripción de las $\mathbb{C}$-álgebras de Lie de dimensión 1 es muy fácil, como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2. *Si* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie de dimensión* 1*, entonces* $\mathfrak{g}$ *es abeliana.*

Demostración. Dado $x \in \mathfrak{g}$, $x \neq 0$, para todo $x' \in \mathfrak{g}$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x' = \lambda x$ y por lo tanto $[x, x'] = \lambda[x, x] = 0$. □

A continuación veremos la clasificación, salvo isomorfismo, de las álgebras de Lie complejas de dimensión 2.

Proposición 2.3.3. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie compleja de dimensión* 2*, sea* $\{x, y\}$ *una base de* $\mathfrak{g}$*. Entonces* $\mathfrak{g}$ *es isomorfa a* $\mathcal{L}_0$ *o* $\mathfrak{aff}(2)$*, donde* $\mathcal{L}_0$ *es abeliana y* $\mathfrak{aff}(2)$ *es tal que* $[x, y] = x$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{g}$ no es abeliana. Como $\dim_{\mathbb{C}}(\wedge^2\mathfrak{g}) = 1$, se sigue el rango de $[-,-]$ es 1, e $\mathrm{Im}([-,-]) = \langle [x, y] \rangle$. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $[x, y] = ax + by$ y supongamos que $a \neq 0$. Entonces $\{ax + by, a^{-1}y\}$ es una base de $\mathfrak{g}$ y cumple la igualdad $[ax + by, a^{-1}y] = ax + by$. Luego, el automorfismo $\mathbb{C}$-lineal definido por $\varphi(ax + by) = x$, $\varphi(a^{-1}y) = y$ resulta un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{aff}(2)$. Si $a = 0$ entonces $b \neq 0$ y el razonamiento es análogo. □

2.3.2 Álgebras de Lie de dimensión 3

Veremos a continuación la clasificación, salvo isomorfismo, de las álgebras de Lie de dimensión 3. Necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 2.3.4.

Sea V *un* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial de dimensión* 3 *y sea* $W \subset \wedge^2 V$ *un subespacio de dimensión* 2*. Entonces existe* $v_0 \in V$ *tal que* $W = \{v_0 \wedge u : u \in V\}$*.*

Demostración. Fijada una base $\{x, y, z\}$ de V, se tiene un isomorfismo $\varphi : V \longrightarrow \wedge^2 V$ definido por $\varphi(x) = y \wedge z$, $\varphi(y) = -x \wedge z$, $\varphi(z) = x \wedge y$. También se tiene un isomorfismo $\psi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow V$ que envía la base canónica a la base $\{x, y, z\}$. Llamemos $\Psi := \varphi \circ \psi$.

Dados dos elementos $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^3$, se puede verificar que el producto vectorial $v_1 \times v_2$ coincide con $\Psi^{-1}(\psi(v_1) \wedge \psi(v_2))$ (basta chequearlo para los elementos de la base canónica). Como W es de dimensión 2, entonces $\Psi^{-1}(W)$ es un plano y por lo tanto existe $w \in \mathbb{C}^3$ tal que $\Psi^{-1}(W) = \{w \times v : v \in \mathbb{C}^3\}$, luego $W = \{\psi(w) \wedge \psi(v) : v \in \mathbb{C}^3\} = \{\psi(w) \wedge u : u \in V\}$. □

Definición 2.3.5. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea $x \in \mathfrak{g}$. Se define $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ como el morfismo dado por $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$.

Lema 2.3.6.

Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie, entonces $\mathrm{ad}_{[x,y]} = \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x$. En particular si $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ se sigue que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$.

Demostración. Este resultado es consecuencia de la identidad de Jacobi. □

Proposición 2.3.7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja de dimensión 3, sea $\{x, y, z\}$ una base de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras de Lie.*

	Corchetes no nulos
L_0	
$(Heisenberg)\ \mathfrak{h}_3$	$[x, y] = z$
$\mathfrak{aff}(2) \times \mathbb{C}$	$[x, y] = x,$
$\mathfrak{r}$	$[x, y] = y, [x, z] = y + z$
$\mathfrak{r}_\alpha$	$[x, y] = y, [x, z] = \alpha z,\ (\alpha \in \mathbb{C}^\times)$
$\mathfrak{sl}(2)$	$[x, y] = y, [x, z] = -z, [y, z] = x$

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{g}$ no es abeliana y separemos en tres casos según el rango de $[-, -]$, observando que $\dim_{\mathbb{C}}(\wedge^2 \mathfrak{g}) = 3$.

Álgebras de rango 1: En estos casos $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}\,[-, -] = 2$. Por el Lema 2.3.4 existe $x \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{Ker}\,[-, -] = \{x \wedge y : y \in \mathfrak{g}\}$. Si completamos $\{x\}$ a una base de $\mathfrak{g}$, $\{x, y, z\}$, esta cumple que $[x, y] = [x, z] = 0$ e $[y, z] = ax + by + cz$, donde los coeficientes a, b, c no son todos nulos.

- Supongamos que $b \neq 0$. Luego $\{x, ax + by + cz, b^{-1}z\} = \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ es una base de $\mathfrak{g}$ que cumple $[\tilde{x}, \tilde{y}] = [\tilde{x}, \tilde{z}] = 0$, e $[\tilde{y}, \tilde{z}] = \tilde{y}$. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{aff}(2) \times \mathbb{C}$.

- Supongamos que $c \neq 0$. Cambiando z con y estamos en el caso anterior y entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{aff}(2) \times \mathbb{C}$.

- Supongamos que $b = c = 0$. Luego $a \neq 0$ y $\{ax, y, z\}$ es una base de $\mathfrak{g}$ que cumple $[ax, y] = [ax, z] = 0$ y $[y, z] = ax$. Entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{h}_3$.

Álgebras de rango 2: En este caso $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}\,[-, -] = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 2$. Sea $\{y, z\}$ una base de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, luego existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $[y, z] = ay + bz$. Si completamos a una base de $\mathfrak{g}$, $\{x, y, z\}$, como $\mathrm{ad}_y(x), \mathrm{ad}_z(x) \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ las matrices de ad_y y ad_z en esta base son:

$$\mathrm{ad}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & a \\ * & 0 & b \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & -a & 0 \\ * & -b & 0 \end{pmatrix},$$

de donde $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_y) = b$ y $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_z) = -a$. Por otro lado, por el Lema 2.3.6 sabemos que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_z) = 0$ y por lo tanto $a = b = 0$. Obtuvimos entonces que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es una subálgebra abeliana.

Como $y \wedge z \in \operatorname{Ker}[-,-]$ y este tiene dimensión 1, entonces $\operatorname{Ker}[-,-] = \langle y \wedge z \rangle$. Luego, como $\{x \wedge y, x \wedge z, y \wedge z\}$ es una base de $\wedge^2 \mathfrak{g}$ se sigue que para todo $u \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ no nulo, $x \wedge u \notin \operatorname{Ker}[-,-]$ implicando que $\operatorname{ad}_x|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ es un monomorfismo y por lo tanto un isomorfismo.

- Supongamos que $\operatorname{ad}_x|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ es diagonalizable. Sea $\{\tilde{y}, \tilde{z}\}$ una base de autovectores de autovalores respectivos λ_1, λ_2, que resultan no nulos por ser ad_x un isomorfismo. Luego, llamando $\tilde{x} := \lambda_1^{-1} x$ y $\alpha := \lambda_1^{-1}\lambda_2$, la base $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ cumple que $[\tilde{x}, \tilde{y}] = \tilde{y}$, $[\tilde{x}, \tilde{z}] = \alpha\tilde{z}$, $[\tilde{y}, \tilde{z}] = 0$. Tenemos entonces que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{r}_\alpha$.

- Supogamos que $\operatorname{ad}_x|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ no es diagonalizable. Entonces tomamos la base de Jordan $\{\tilde{y}, \tilde{z}\}$ en la cual se tiene $[x, \tilde{y}] = \lambda\tilde{y}$, y $[x, \tilde{z}] = \tilde{y} + \lambda\tilde{z}$. Llamando $\tilde{x} := \lambda^{-1} x$ e $\hat{y} := \lambda^{-1}\tilde{y}$, tenemos que $[\tilde{x}, \hat{y}] = \hat{y}$, $[\tilde{x}, \tilde{z}] = \hat{y} + \tilde{z}$, $[\hat{y}, \tilde{z}] = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{r}$.

Álgebras de rango 3: En este último caso sabemos que $[-,-] : \wedge^2\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es un isomorfismo, entonces para todo $x \in \mathfrak{g}$ no nulo, ad_x tiene rango 2. En efecto, dado $x \neq 0$, si completamos $\{x\}$ a una base de $\mathfrak{g}$, $\{x, y, z\}$, obtenemos $\operatorname{ad}_x(x) = 0$ y $\{\operatorname{ad}_x(y), \operatorname{ad}_x(z)\} = \{[x, y], [x, z]\}$ resulta un conjunto linealmente independiente por ser $[-,-]$ un monomorfismo. Veamos que existe $x \in \mathfrak{g}$, no nulo, con un autovector $y \in \mathfrak{g}$ de ad_x de autovalor no nulo.

Sea entonces $x \in \mathfrak{g}$, $x \neq 0$. Si x no es nilpotente entonces no hay nada que hacer. Supongamos que x es nilpotente. Como ad_x tiene rango 2, su núcleo tiene dimensión 1 y entonces $\operatorname{ad}_x^2 \neq 0$; por lo tanto obtenemos la inclusión de núcleos: $0 \subsetneq \operatorname{Ker}\operatorname{ad}_x \subsetneq \operatorname{Ker}\operatorname{ad}_x^2 \subsetneq \mathfrak{g}$. Sea $y \in \operatorname{Ker}\operatorname{ad}_x^2$ tal que $y \notin \operatorname{Ker}\operatorname{ad}_x$. Observemos que $x \in \operatorname{Ker}\operatorname{ad}_x$ y entonces $\langle x \rangle = \operatorname{Ker}\operatorname{ad}_x$; luego como $\operatorname{ad}_x(y) \in \operatorname{Ker}\operatorname{ad}_x$, y no es 0, $\operatorname{ad}_x(y) = \mu x$ para $\mu \neq 0$ y por lo tanto $\operatorname{ad}_y(x) = \mu x$.

Por otro lado, como $[-,-]$ es un epimorfismo, $y = [y_1, y_2]$ y por el Lema 2.3.4 obtenemos que $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_y) = 0$. Como la traza es la suma de los tres autovalores de los cuales dos son 0 y μ, obtenemos que el tercer autovalor es $-\mu$, que es distinto de los anteriores y por lo tanto existe $z \in \mathfrak{g}$ de autovalor $-\mu$, linealmente independiente con x e y.

Sabemos que $[x, y] = -\mu x$, $[y, z] = -\mu z$. De la identidad de Jacobi obtenemos que

$$[[x, z], y] = [[x, y], z] + [[y, z], x] = [-\mu x, z] + [-\mu z, x] = 0,$$

es decir, $\operatorname{ad}_y([x, z]) = 0$ y como $\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{Ker}\operatorname{ad}_y = 1$, y este núcleo está generado por y, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $[x, z] = \lambda y$, que cumple que $\lambda \neq 0$ por ser $[-,-]$ un monomorfismo.

Finalmente llamando $\tilde{x} := \lambda^{-1} x$, $\tilde{y} := \mu^{-1} y$, $\tilde{z} := \mu^{-1} z$, la base $\{\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z}\}$ cumple: $[\tilde{y}, \tilde{x}] = \tilde{x}$, $[\tilde{y}, \tilde{z}] = -\tilde{z}$, $[\tilde{x}, \tilde{z}] = \tilde{y}$. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$. □

2.3.3 Cálculo de la cohomología

En esta sección calcularemos la cohomología $H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ para toda álgebra de Lie compleja de dimensión 3. Por el Corolario 2.2.19, e identificando $\operatorname{Hom}_k(\wedge^\bullet\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ con $\wedge^\bullet\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$, $H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ es la cohomología del complejo

$$0 \longleftarrow \mathfrak{g} \xleftarrow{\delta_2} \wedge^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \xleftarrow{\delta_1} \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \xleftarrow{\delta_0} \mathfrak{g} \longleftarrow 0,$$

cuyos diferenciales daremos explícitamente en cada caso.

La siguiente definición nos servirá para finalizar la clasificación de las álgebras de Lie complejas de dimensión 3.

Definición 2.3.8. Sea k un cuerpo y sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie. Llamaremos *serie de Hilbert de* $\mathfrak{g}$ a la serie

$$h(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \dim_k(H^i_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))t^i.$$

Observación 2.3.9. Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son k-álgebras de Lie isomorfas, entonces tienen la misma serie de Hilbert.

Proposición 2.3.10. *Existen isomorfismos*

- $H^0_{Lie}(L_0, L_0) \cong L_0,$
- $H^1_{Lie}(L_0, L_0) \cong L_0^* \otimes L_0,$
- $H^2_{Lie}(L_0, L_0) \cong \wedge^2 L_0^* \otimes L_0.$
- $H^3_{Lie}(L_0, L_0) \cong L_0.$

y por lo tanto L_0 *tiene serie de Hilbert* $h(t) = 3 + 9t + 9t^2 + 3t^3 = 3(1+t)^3.$

Demostración. Basta observar que todos los diferenciales son nulos. □

Proposición 2.3.11. *Dado* $n \in \mathbb{N}$*, si* $n \geq 4$*,* $H^n_{Lie}(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_3) = 0$*, mientras que si* $0 \leq n \leq 3$*, entonces* $H^n_{Lie}(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_3)$ *tiene como base el conjunto de las clases de los elementos:*

- *si* $n = 0 : \{z\},$
- *si* $n = 1 : \{dx \otimes y, dy \otimes x, dx \otimes x - dy \otimes y\},$
- *si* $n = 2 : \{dx \wedge dy \otimes x, dx \wedge dy \otimes y, dx \wedge dz \otimes y, dy \wedge dz \otimes x, dx \wedge dz \otimes x - dy \wedge dz \otimes y\},$
- *si* $n = 3 : \{dx \wedge dy \wedge dz \otimes x, dx \wedge dy \wedge dz \otimes y\}.$

Por lo tanto $\mathfrak{h}_3$ *tiene serie de Hilbert* $h(t) = 1 + 3t + 5t^2 + 2t^3.$

Demostración. Los diferenciales del complejo son

$$\begin{aligned}
\delta_0(a) &= dx \otimes [a, x] + dy \otimes [a, y] + dz \otimes [a, z], \\
\delta_1(dx \otimes a_1 + dy \otimes a_2 + dz \otimes a_3) &= dx \wedge dy \otimes ([x, a_2] - [y, a_1] - a_3) + \\
&\quad + dx \wedge dz \otimes [x, a_3] + \\
&\quad + dy \wedge dz \otimes [y, a_3], \\
\delta_2(dx \wedge dy \otimes b_1 + dx \wedge dz \otimes b_2 + dy \wedge dz \otimes b_3) &= [x, b_3] - [y, b_2].
\end{aligned}$$

Luego, cálculos simples permiten describir los generadores (como k-espacios vectoriales) de núcleos e imágenes de los diferenciales como sigue:

- $\operatorname{Ker}(\delta_0) = \langle z \rangle,$

- $\mathrm{Im}(\delta_0) = \langle dy \otimes z, dx \otimes z \rangle$,
- $\mathrm{Ker}\,(\delta_1) = \langle dx \otimes y, dx \otimes z, dy \otimes x, dy \otimes z, dx \otimes x - dy \otimes y \rangle$,
- $\mathrm{Im}(\delta_1) = \langle dx \wedge dy \otimes z, dx \wedge dy \otimes x + dy \wedge dz \otimes z, dx \wedge dz \otimes z - dx \wedge dy \otimes y \rangle$,
- $\mathrm{Ker}\,(\delta_2) = \langle dx \wedge dy \otimes x, dx \wedge dy \otimes y, dx \wedge dy \otimes z, dx \wedge dz \otimes y, dx \wedge dz \otimes z, dy \wedge dz \otimes x, dy \wedge dz \otimes z, dx \wedge dz \otimes x - dy \wedge dz \otimes y \rangle$,
- $\mathrm{Im}(\delta_2) = \langle dx \wedge dy \wedge dz \otimes z \rangle$.

Cocientando estos espacios obtenemos el resultado. □

Obtenemos ahora los correspondientes resultados para las otras álgebras de Lie de dimensión 3.

Proposición 2.3.12. *Dado $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 3$, $H^n_{Lie}(\mathfrak{aff}(2) \times \mathbb{C}, \mathfrak{aff}(2) \times \mathbb{C}) = 0$, mientras que si $0 \leq n \leq 2$, $H^n_{Lie}(\mathfrak{aff}(2) \times \mathbb{C}, \mathfrak{aff}(2) \times \mathbb{C})$ tiene como base el conjunto de las clases de los elementos:*

- *si $n = 0 : \{z\}$,*
- *si $n = 1 : \{dy \otimes z, dz \otimes z\}$,*
- *si $n = 2 : \{dy \wedge dz \otimes z\}$.*

En consecuencia, la serie de Hilbert de $\mathfrak{aff}(2) \times \mathbb{C}$ es $h(t) = 1 + 2t + t^2$.

Demostración. Los diferenciales del complejo son

$$\begin{aligned}
\delta_0(a) =& dx \otimes [a, x] + dy \otimes [a, y] + dz \otimes [a, z],\\
\delta_1(dx \otimes a_1 + dy \otimes a_2 + dz \otimes a_3) =& dx \wedge dy \otimes ([x, a_2] - [y, a_1] - a_1)+\\
&+ dx \wedge dz \otimes ([x, a_3] - [z, a_1])+\\
&+ dy \wedge dz \otimes ([y, a_3] - [z, a_3]),\\
\delta_2(dx \wedge dy \otimes b_1 + dx \wedge dz \otimes b_2 + dy \wedge dz \otimes b_3) =& [x, b_3] - [y, b_2] + [z, b_1] - b_2.
\end{aligned}$$

Cálculos directos muestran que los núcleos e imágenes de los diferenciales están respectivamente generados como k-espacios vectoriales por

- $\mathrm{Ker}\,(\delta_0) = \langle z \rangle$,
- $\mathrm{Im}(\delta_0) = \langle dy \otimes x, dx \otimes x \rangle$,
- $\mathrm{Ker}\,(\delta_1) = \langle dx \otimes x, dy \otimes x, dy \otimes z, dz \otimes z \rangle$,
- $\mathrm{Im}(\delta_1) = \langle dx \wedge dy \otimes y, dx \wedge dy \otimes z, dx \wedge dy \otimes x, dx \wedge dz \otimes x, dy \wedge dz \otimes x \rangle$,
- $\mathrm{Ker}\,(\delta_2) = \langle dx \wedge dy \otimes x, dx \wedge dy \otimes y, dx \wedge dy \otimes z, dx \wedge dz \otimes x, dy \wedge dz \otimes x, dy \wedge dz \otimes z \rangle$.
- $\mathrm{Im}(\delta_2) = \langle dx \wedge dy \wedge dz \otimes x, dx \wedge dy \wedge dz \otimes y, dx \wedge dy \wedge dz \otimes z \rangle$.

Cocientando estos espacios obtenemos el resultado. □

Proposición 2.3.13. *Dado $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 3$ o si $n = 0$, $H^n_{Lie}(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = 0$, mientras que para $n = 1$ y $n = 2$, $H^n_{Lie}(\mathfrak{r}, \mathfrak{r})$ tiene como base el conjunto de las clases de los elementos:*

- *si $n = 1 : \{dz \otimes y\}$,*
- *si $n = 2 : \{dx \wedge dy \otimes z\}$.*

Luego, la serie de Hilbert de $\mathfrak{r}$ es $h(t) = h = t + t^2$.

Demostración. Los diferenciales del complejo son

$$\begin{aligned} \delta_0(a) &= dx \otimes [a, x] + dy \otimes [a, y] + dz \otimes [a, z], \\ \delta_1(dx \otimes a_1 + dy \otimes a_2 + dz \otimes a_3) &= dx \wedge dy \otimes ([x, a_2] - [y, a_1] - a_2) + \\ &\quad + dx \wedge dz \otimes ([x, a_3] - [z, a_1] - a_2 - a_3) + \\ &\quad + dy \wedge dz \otimes ([y, a_3] - [z, a_3]), \\ \delta_2(dx \wedge dy \otimes b_1 + dx \wedge dz \otimes b_2 + dy \wedge dz \otimes b_3) &= [x, b_3] - [y, b_2] + [z, b_1] - 2b_3. \end{aligned}$$

Los núcleos e imágenes de los diferenciales están respectivamente generados como k-espacios vectoriales por

- $\mathrm{Ker}\,(\delta_0) = 0$,
- $\mathrm{Im}(\delta_0) = \langle dy \otimes y + dz \otimes (y + z), dx \otimes y, dx \otimes (y + z)\rangle$,
- $\mathrm{Ker}\,(\delta_1) = \langle dx \otimes y, dx \otimes z, dz \otimes y, dy \otimes y + dz \otimes z\rangle$,
- $\mathrm{Im}(\delta_1) = \langle dy \otimes y + dx \wedge dz \otimes (y+z), dx \wedge dy \otimes x + dx \wedge dz \otimes x - dy \wedge dz \otimes (y+z), dx \wedge dz \otimes y, dx \wedge dy \otimes y - dx \wedge dz \otimes z, dx \wedge dz \otimes x + dy \wedge dz \otimes y\rangle$,
- $\mathrm{Ker}\,(\delta_2) = \langle dx \wedge dy \otimes y, dx \wedge dy \otimes z, dx \wedge dz \otimes y, dx \wedge dz \otimes z, dx \wedge dz \otimes x + dy \wedge dz \otimes y, dx \wedge dy \otimes x + 2dx \wedge dz \otimes x - dy \wedge dz \otimes z\rangle$.
- $\mathrm{Im}(\delta_2) = \mathfrak{r}$.

Cocientando estos espacios obtenemos el resultado. □

Proposición 2.3.14. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}^\times$. La serie de Hilbert de $\mathfrak{r}_\alpha$ es*

$$h(t) = \begin{cases} t + t^2 & si\ \alpha \neq 1, -1, \\ 3t + 3t^2 & si\ \alpha = 1, \\ t + 2t^2 + t^3 & si\ \alpha = -1, \end{cases}$$

y si $1 \leq n \leq 3$, el k-espacio vectorial $H^n_{Lie}(\mathfrak{r}_\alpha, \mathfrak{r}_\alpha)$ tiene como base el conjunto de clases de los siguientes elementos:

- *Si $n = 1 : \begin{cases} \{dz \otimes z\} & si\ \alpha \neq 1, \\ \{dz \otimes z, dy \otimes z, dz \otimes y\} & si\ \alpha = 1. \end{cases}$*

- $Si\ n = 2 : \begin{cases} \{dx \wedge dz\} & si\ \alpha \neq 1, -1, \\ \{dx \wedge dz \otimes z, dx \wedge dy \otimes z, dx \wedge dz \otimes y\} & si\ \alpha = 1, \\ \{dx \wedge dz \otimes z, dy \wedge dz \otimes x\} & si\ \alpha = -1. \end{cases}$

- $Si\ n = 3 : \begin{cases} 0 & si\ \alpha \neq -1, \\ \{dx \wedge dy \wedge dz \otimes x\} & si\ \alpha = -1. \end{cases}$

Demostración. Los diferenciales del complejo son

$$\begin{aligned} \delta_0(a) &= dx \otimes [a,x] + dy \otimes [a,y] + dz \otimes [a,z], \\ \delta_1(dx \otimes a_1 + dy \otimes a_2 + dz \otimes a_3) &= dx \wedge dy \otimes ([x,a_2] - [y,a_1] - a_2) + \\ &\quad + dx \wedge dz \otimes ([x,a_3] - [z,a_1] - \alpha a_3) + \\ &\quad + dy \wedge dz \otimes ([y,a_3] - [z,a_3]), \\ \delta_2(dx \wedge dy \otimes b_1 + dx \wedge dz \otimes b_2 + dy \wedge dz \otimes b_3) &= [x,b_3] - [y,b_2] + [z,b_1] - (1+\alpha)b_3. \end{aligned}$$

Es fácil calcular que los núcleos e imágenes de los diferenciales están generados como k-espacios vectoriales por

- $\mathrm{Ker}\,(\delta_0) = 0$,
- $\mathrm{Im}(\delta_0) = \langle dy \otimes y + \alpha dz \otimes z, dx \otimes y, dx \otimes z \rangle$,
- $\mathrm{Ker}\,(\delta_1) = \begin{cases} \langle dx \otimes y, dx \otimes z, dy \otimes y, dz \otimes z \rangle & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \langle dx \otimes y, dx \otimes z, dy \otimes y, dz \otimes z, dy \otimes z, dz \otimes y \rangle & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$
- $\mathrm{Im}(\delta_1) = \langle dx \wedge dy \otimes y + \alpha dx \wedge dz \otimes z, dx \wedge dy \otimes -x + dy \wedge dz \otimes \alpha z, dx \wedge dy \otimes (\alpha - 1)z,$ $dx \wedge dz \otimes \alpha x + dy \wedge dz \otimes y, dx \wedge dz \otimes (1-\alpha)y \rangle$
- $\mathrm{Ker}\,(\delta_2) = \begin{cases} \langle dx \wedge dy \otimes x - dy \wedge dz \otimes \alpha z, dx \wedge dy \otimes y, dx \wedge dy \otimes z, & \text{si } \alpha \neq -1, \\ dx \wedge dz \otimes \alpha x + dy \wedge dz \otimes y, dx \wedge dz \otimes y, dx \wedge dz \otimes z \rangle & \\ \langle dx \wedge dy \otimes x - dy \wedge dz \otimes \alpha z, dx \wedge dy \otimes y, dx \wedge dy \otimes z, & \text{si } \alpha = -1, \\ dx \wedge dz \otimes \alpha x + dy \wedge dz \otimes y, dx \wedge dz \otimes y, dx \wedge dz \otimes z \rangle, dy \wedge dz \otimes x & \end{cases}$
- $\mathrm{Im}(\delta_2) = \langle dx \wedge dy \wedge dz \otimes z, dx \wedge dy \wedge dz \otimes y, dx \wedge dy \wedge dz \otimes (1+\alpha)x \rangle$.

Cocientando estos espacios obtenemos el resultado. □

Proposición 2.3.15. *La serie de Hilbert de* $\mathfrak{sl}(2)$ *es nula.*

Demostración. Los diferenciales del complejo correspondiente son

$$\begin{aligned} \delta_0(a) &= dx \otimes [a,x] + dy \otimes [a,y] + dz \otimes [a,z], \\ \delta_1(dx \otimes a_1 + dy \otimes a_2 + dz \otimes a_3) &= dx \wedge dy \otimes ([x,a_2] - [y,a_1] - a_2) + \\ &\quad + dx \wedge dz \otimes ([x,a_3] - [z,a_1]) + a_3) \\ &\quad + dy \wedge dz \otimes ([y,a_3] - [z,a_3] - a_1), \\ \delta_2(dx \wedge dy \otimes b_1 + dx \wedge dz \otimes b_2 + dy \wedge dz \otimes b_3) &= [x,b_3] - [y,b_2] + [z,b_1], \end{aligned}$$

de donde se obtiene haciendo cálculos simples que los núcleos e imágenes de los diferenciales están respectivamente generados como k-espacios vectoriales por

- $\mathrm{Ker}\,(\delta_0) = 0$,
- $\mathrm{Im}(\delta_0) = \langle dy \otimes y - dz \otimes z, dx \otimes y - dz \otimes x, dx \otimes z - dy \otimes x \rangle$,
- $\mathrm{Ker}\,(\delta_1) = \langle dx \otimes z - dy \otimes x, dx \otimes y - dz \otimes x, dy \otimes y - dz \otimes z \rangle$,
- $\mathrm{Im}(\delta_1) = \langle dx \wedge dz \otimes y - dx \wedge dz \otimes z, dx \wedge dy \otimes x + dy \wedge dz \otimes z, dx \wedge dy \otimes z, dx \wedge dz \otimes x + - dy \wedge dz \otimes y, dx \wedge dz \otimes y, dy \wedge dz \otimes x \rangle$,
- $\mathrm{Ker}\,(\delta_2) = \langle dx \wedge dy \otimes z, dx \wedge dz \otimes y, dx \wedge dy \otimes y - dx \wedge dz \otimes z, dy \wedge dz \otimes x, dx \wedge dz \otimes x + - dy \wedge dz \otimes y, dx \wedge dy \otimes x + dy \wedge dz \otimes z \rangle$.
- $\mathrm{Im}(\delta_2) = \mathfrak{sl}(2)$.

Cocientando estos espacios obtenemos el resultado. $\square$

Observación 2.3.16. Un lema, que se debe a Whitehead, dice que si $\mathfrak{g}$ es semisimple y M es un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita tal que $M^{\mathfrak{g}} = 0$ entonces $H^n_{Lie}(\mathfrak{g}, M) = H_n^{Lie}(\mathfrak{g}, M) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. El caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ y $M = \mathfrak{sl}(2)$ cae dentro de estas hipótesis y por lo tanto la proposición 2.3.15 es un caso particular del lema de Whitehead.

Capítulo 3

Deformaciones de álgebras

3.1 Homología y cohomología de Hochschild

3.1.1 Definiciones básicas

En este capítulo, k será un cuerpo y A una k-álgebra asociativa. De ahora en adelante notaremos con $|$ a $\otimes_k$.

Definición 3.1.1. El *álgebra envolvente de A* es la k-álgebra $A^e = A \otimes_k A^{op}$ con producto definido por $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes db$.

Una de las razones para considerar el álgebra A^e es que nos permite traducir las estructuras de A-bimódulo en estructuras de A^e-módulo por ejemplo a izquierda. En efecto: si M es un A-bimódulo, y $m \in M$, podemos definir $(a \otimes b) * m := a \cdot m \cdot b$ y extender linealmente a todo A^e. Es fácil ver que esta acción está bien definida y da a M una estructura de A^e-módulo a izquierda:

$$(a \otimes b) * ((c \otimes d) * m) = (a \otimes b) * (c \cdot m \cdot d) = ac \cdot m \cdot db = (ac \otimes db) * m = ((a \otimes b)(c \otimes d)) * m.$$

Recíprocamente, si M es un A^e-módulo a izquierda, definimos $a \cdot m := (a \otimes 1) * m$, y $m \cdot b := (1 \otimes b) * m$, dotando así a M de estructuras de A-módulo a izquierda y a derecha respectivamente. Veamos que con estas acciones M resulta un A-bimódulo:

$$\begin{aligned}(a \cdot m) \cdot b &= ((a \otimes 1) * m) \cdot b = (1 \otimes b)((a \otimes 1) * m) = ((1 \otimes b)(a \otimes 1)) * m = (a \otimes b) * m,\\ a \cdot (m \cdot b) &= a \cdot ((1 \otimes b) * m) = (a \otimes 1)((1 \otimes b) * m) = ((a \otimes 1)(1 \otimes b)) * m = (a \otimes b) * m.\end{aligned}$$

Definición 3.1.2. La homología y cohomología de Hochschild de un A-bimódulo M pueden definirse de la siguiente manera [CE].

$$\begin{aligned}H_\bullet(A, M) &:= \mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A, M),\\ H^\bullet(A, M) &:= \mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A, M).\end{aligned}$$

En el caso particular $M = A$ notamos la homología y cohomología de Hochschild con $HH_\bullet(A)$ y $HH^\bullet(A)$ respectivamente.

Contamos con una resolución proyectiva de A como A^e-módulo a izquierda, llamada resolución Bar, que si bien no es muy útil para realizar cálculos explícitos, sirve para tratar resultados generales, y jugará un papel principal en la teoría de deformaciones. Dicha resolución es la siguiente:

$$\cdots \longrightarrow A|A^{\otimes 3}|A \xrightarrow{b'_2} A|A^{\otimes 2}|A \xrightarrow{b'_1} A|A|A \xrightarrow{b'_0} A|A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0 \tag{3.1.1}$$

donde μ es la multiplicación de A y los diferenciales b_i son A^e-lineales y están definidos de la siguiente manera:

$$b'_n(1|a_0|a_1|\cdots|a_n|1) =$$
$$a_0|\cdots|a_n|1 + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}1|a_0|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|a_n|1 + (-1)^{n+1}1|a_0|\cdots|a_{n-1}|a_n.$$

Proposición 3.1.3. *El complejo 3.1.1 es una resolución libre de A como A^e-módulo a izquierda.*

Una demostración de este hecho puede encontrarse en [CE].

Usando el complejo Bar, calculemos los complejos cuya (co)homología es la de Hochschild.

Homología: Sea M un A^e-módulo. Para calcular $H_\bullet(A, M)$ debemos aplicar el funtor $(-) \otimes_{A^e} M$ a la resolución Bar, luego, identificando de manera canónica $A|A^{\otimes n}|A \otimes_{A^e} M$ con $A^{\otimes n}|A^e \otimes_{A^e} M$ y con $A^{\otimes n}|M$, obtenemos:

$$\cdots \longrightarrow A^{\otimes 3}|M \xrightarrow{b_2} A^{\otimes 2}|M \xrightarrow{b_1} A|M \xrightarrow{b_0} M \longrightarrow 0,$$

donde los diferenciales b_n están dados por:

$$b_n(a_0|\cdots|a_n|m) =$$
$$a_1|\cdots|a_n|ma_0 + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}a_0|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|a_n|m + (-1)^{n+1}a_0|\cdots|a_{n-1}|a_nm,$$
$$b_0(a|m) = ma - am.$$

Notación: A este complejo lo notaremos $A^{\otimes\bullet}|M$.

Cohomología: Sea M un A^e-módulo. Para calcular $H^\bullet(A, M)$ debemos aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, M)$ a la resolución Bar.

Identificando $\mathrm{Hom}_{A^e}(A|A^{\otimes n}|A, M)$ con $\mathrm{Hom}_{A^e}(A^e|A^{\otimes n}, M)$ y con $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$ obtenemos el complejo

$$\cdots \xleftarrow{\delta_2} \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes 2}, M) \xleftarrow{\delta_1} \mathrm{Hom}_k(A, M) \xleftarrow{\delta_0} M \longleftarrow 0,$$

con los diferenciales dados por:

$$\delta_n(f)(a_0|\cdots|a_n) =$$
$$a_0f(a_1|\cdots|a_n) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}f(a_0|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|a_n) + (-1)^{n+1}f(a_0|\cdots|a_{n-1})a_n,$$

por ejemplo

$$\delta_0(m)(a) = am - ma, \qquad \delta_1(f)(a|b) = af(b) - f(ab) + f(a)b,$$
$$\delta_2(f)(a|b|c) = af(b|c) - f(ab|c) + f(a|bc) - f(a|b)c.$$

Notación: A este complejo lo notaremos $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes\bullet}, M)$.

Cohomología relativa y álgebras separables

Definición 3.1.4. Sea A una k-álgebra, y sea $S \subset A$ una subálgebra. Sea M un A-bimódulo. Se define el *complejo de Hochschild S-relativo*, $C^\bullet(A, S; M)$ como sigue

$$C^0(A, S; M) = M^S = \{m \in M : sm = ms \, \forall \, s \in S\}$$

y para $n > 0$, $C^n(A, S; M)$ consiste en el k-módulo formado por los morfismos k-lineales $f : A^{\otimes n} \longrightarrow M$, que satisfacen, $\forall s \in S$, $\forall a_1, \cdots, a_n \in A$

$$f(sa_1|\cdots|a_n) = sf(a_1|\cdots|a_n),$$
$$f(a_1|\cdots|a_n s) = f(a_1|\cdots|a_n)s,$$
$$f(\cdots|a_i s|a_{i+1}|\cdots) = f(\cdots|a_i|sa_{i+1}|\cdots), \qquad \forall\, i = 1, \cdots, n-1.$$

Los diferenciales $\delta_n : C^n(A, S; M) \longrightarrow C^{n+1}(A, S; M)$ están dados por:

$$\delta_n(f)(a_0|\cdots|a_n) =$$
$$a_0 f(a_1|\cdots|a_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} f(a_0|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_n) + (-1)^{n+1} f(a_0|\cdots|a_{n-1})a_n,$$

La cohomología de este complejo se llama *cohomología de Hochschild S-relativa* y la notaremos $H^\bullet(A, S; M)$.

Observaciones 3.1.5.

1. Si $S = k$ entonces la cohomología de Hochschild relativa coincide con la cohomología de Hochschild.
2. Las inclusiones $C^n(A, S; M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$ forman un morfismo de complejos y por lo tanto inducen morfismos $H^n(A, S; M) \longrightarrow H^n(A, M)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Proposición 3.1.6. *La cohomología relativa $H^\bullet(A, S; M)$ puede calcularse como la cohomología del subcomplejo $\bar{C}^\bullet(A, S; M)$ de $C^\bullet(A, S; M)$ tal que $\bar{C}^n(A, S; M)$ consiste de los elementos de $C^n(A, S; M)$ que cumplen $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ si algún $a_i \in S$.*

Demostración. Puede encontrarse en [CE]. □

Definición 3.1.7. Una k-álgebra A se dice *separable* si para toda extensión $k \subset l$, $R_l := R \otimes_k l$ es una l-álgebra semisimple.

Proposición 3.1.8. *Sea A una k-álgebra. Son equivalentes*

i) A es una k-álgebra de dimensión finita y separable.

ii) A es proyectivo como A^e-módulo a izquierda.

iii) $H_n(A, M) = 0$ para todo $n \neq 0$ y todo bimódulo M.

iv) $H^n(A, M) = 0$ para todo $n \neq 0$ y todo bimódulo M.

Demostración. Puede encontrarse en [W]. □

Proposición 3.1.9. *Sea $S \subset A$ una k-álgebra separable. Entonces los morfismos inducidos por la inclusión*

$$H^n(A, S; M) \longrightarrow H^n(A, M),$$

son isomorfismos.

Demostración. Ver [GS] para una demostración de esta proposición. □

Producto Cup

Se puede definir un producto en $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes i}, A)$ que da al complejo una estructura de álgebra diferencial graduada.

Definición 3.1.10. Dados elementos homogéneos, $\phi \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ y $\psi \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m}, A)$, el producto *cup de ϕ y ψ* es el elemento $\phi \smile \psi \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes(n+m)}, A)$ definido por:

$$\phi \smile \psi(a_1|\cdots|a_n|a_{n+1}|\cdots|a_{n+m}) = \phi(a_1|\cdots|a_n)\psi(a_{n+1}|\cdots|a_{n+m}).$$

Lema 3.1.11. *Sean ϕ y ψ elementos homogéneos de grados n y m respectivamente. El producto cup satisface $\delta_{n+m}(\phi \smile \psi) = \delta_n(\phi) \smile \psi + (-1)^{nm}\phi \smile \delta_m(\psi)$.*

Corchete de Gerstenhaber

También puede definirse en $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes i}, A)$ una estructura de superálgebra de Lie de la siguiente manera.

Definición 3.1.12. Dadas $f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ y $g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m}, A)$, se define el *asociador* de f y g, $f \circ g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m+n-1}, A)$ como

$$f \circ g(a_1|\cdots|a_{n+m-1}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{(i-1)(m-1)} f(a_1|\cdots|a_{i-1}|g(a_i|\cdots|a_{i+m-1})|a_{i+m}|\cdots|a_{n+m-1})$$

y *el corchete de Gerstenhaber* como

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f.$$

Lema 3.1.13. *Dadas $f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ y $g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m}, A)$, se tienen las siguientes identidades*

1. $\delta(f \circ g) = f \circ \delta(g) + (-1)^{m-1}\delta(f) \circ g + (-1)^{(m-1)}(g \smile f - (-1)^{nm} f \smile g)$,
2. $(f \circ g) \circ g = f \circ (g \circ g)$.

La demostración se obtiene por cálculo directo.

Observación 3.1.14. 1. La restricción del corchete de Gerstenhaber a $\mathrm{Hom}_k(A, A)$ da a este espacio una estructura de álgebra de Lie, que coincide con la usual en $\mathrm{Lie}(\mathrm{End}_k(A))$.

2. No necesariamente vale que $[f, f] = 0$.

Teorema 3.1.15. *Con las notaciones anteriores, sean f, g, h de grados n, m, p respectivamente, entonces:*

1. $[f, g] = (-1)^{(n-1)(m-1)}[g, f]$,

2. $(-1)^{(n-1)(p-1)}[[f, g], h] + (-1)^{(m-1)(n-1)}[[g, h], f] + (-1)^{(p-1)(m-1)}[[h, f], g] = 0$,

3. $\delta([f, g]) = [f, \delta(g)] + (-1)^{m-1}[\delta f, g]$.

Demostración. Una prueba puede encontrarse en [GS]. $\square$

3.1.2 Cohomología de Hochschild de álgebras de Lie

Veamos ahora un resultado que nos permitirá calcular de forma más efectiva la (co)homología de Hochschild en el caso en que A es el álgebra envolvente de un álgebra de Lie:

Proposición 3.1.16. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente, entonces existen isomorfismos naturales:*

$$HH^\bullet(A) \cong H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, A^{ad}), \qquad HH_\bullet(A) \cong H_\bullet^{Lie}(\mathfrak{g}, A^{ad}),$$

donde A^{ad} denota a A con la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo dada por la acción $g \cdot x = gx - xg$, llamada "acción adjunta".

Demostración. Daremos la prueba sólo para la cohomología, para la homología la demostración es análoga. Lo que queremos probar es que $\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, A) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_A(k, A^{ad})$.

Para calcular $\mathrm{Ext}^\bullet_A(k, A^{ad})$ debemos resolver proyectivamente a k como A-módulo trivial, para eso utilizamos la resolución de Chevalley-Eilenberg:

$$\cdots \longrightarrow A|\wedge^3\mathfrak{g} \xrightarrow{d_3} A|\wedge^2\mathfrak{g} \xrightarrow{d_2} A|\mathfrak{g} \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0, \tag{3.1.2}$$

aplicamos a la resolución el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, A^{ad})$ y obtenemos el complejo:

$$\cdots \longleftarrow \mathrm{Hom}_A(A|\wedge^2\mathfrak{g}, A^{ad}) \xleftarrow{\tilde{\delta}_2} \mathrm{Hom}_A(A|\mathfrak{g}, A^{ad}) \xleftarrow{\tilde{\delta}_1} \mathrm{Hom}_A(A, A^{ad}) \longleftarrow 0.$$

Usando el isomorfismo canónico $\mathrm{Hom}_A(A|\wedge^{\otimes n}, A^{ad}) \simeq \mathrm{Hom}_k(\wedge^{\otimes n}, A^{ad})$, queda:

$$\cdots \xleftarrow{\delta_3} \mathrm{Hom}_k(\wedge^2\mathfrak{g}, A^{ad}) \xleftarrow{\delta_2} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, A^{ad}) \xleftarrow{\delta_1} A^{ad} \longleftarrow 0 \tag{3.1.3}$$

y siguiendo las flechas se puede verificar que los diferenciales son:

$$\delta_n(f)(x_0 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i x_i \cdot f(x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x_i} \wedge \cdots \wedge \ x_n) + \\ + \sum_{i<j}(-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x_i} \wedge \cdots \wedge \hat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n)$$

donde la acción que figura en el primer sumando es la acción adjunta definida en el enunciado de la proposición. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^\bullet_A(k, A^{ad})$ es la homología del complejo 3.1.3. Lo que vamos a ver es que este complejo se puede obtener aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ a un complejo de A^e-módulos libres que es homotópicamente equivalente al complejo Bar, hecho que conducirá a los isomorfismos buscados en la proposición. Para la construcción de dicho complejo vamos a necesitar algunas definiciones.

Consideremos sobre A^e las siguientes estructuras de A^e-módulo a izquierda y A-módulo a derecha respectivamente:

$$x \otimes y \rightharpoonup a \otimes b = xa \otimes by \quad \text{(multiplicación usual en } A^e\text{)}, \\ a \otimes b \leftharpoondown z = \sum az_1 \otimes S(z_2)b \quad \text{(acción adjunta)}.$$

Veamos que estas acciones dan a A^e una estructura de A^e-A bimódulo:

$$(x \otimes y \rightharpoonup a \otimes b) \leftharpoondown z = xa \otimes by \leftharpoondown z = \sum xaz_1 \otimes S(z_2)by, \\ x \otimes y \rightharpoonup (a \otimes b \leftharpoondown z) = x \otimes y \rightharpoonup \sum az_1 \otimes S(z_2)b = \sum xaz_1 \otimes S(z_2)by.$$

Con esta estructura de A-módulo a derecha, A^e resulta un A-módulo libre. Ver [Wit] para una demostración.
Sea $K_\bullet$ la resolución de Chevalley-Eilenberg 3.1.2. Como A^e es proyectivo como A-módulo a derecha, entonces $A^e \otimes_A K_\bullet$ resulta una sucesión exacta. Identificando canónicamente a $A^e \otimes_A A| \wedge^\bullet \mathfrak{g}$ con $A^e| \wedge^\bullet \mathfrak{g}$ y con $A| \wedge^\bullet \mathfrak{g}|A$; y también a $A^e \otimes_A k$ con $A^e \otimes_A A/\mathrm{Ker}\,\epsilon$ y con $A^e/A^e \cdot \mathrm{Ker}\,\epsilon = A^e/\mathrm{Ker}\,\mu \cong A$, la sucesión $A^e \otimes_A K_\bullet$ se transforma en:

$$\cdots \longrightarrow A| \wedge^3 \mathfrak{g}|A \xrightarrow{d_2} A| \wedge^2 \mathfrak{g}|A \xrightarrow{d_1} A|\mathfrak{g}|A \xrightarrow{d_0} A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0,$$

con diferenciales dados por

$$d_n(1|x_0 \wedge \cdots \wedge x_n|1) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x_i|x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n|1 - 1|x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n|x_i) + \\ + \sum_{i<j}(-1)^{i+j} 1|[x_i, x_j] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n|1 \quad \text{si } n > 0,$$
$$d_0(1|x|1) = x|1 - 1|x.$$

Se puede verificar que al aplicarle el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ a esta resolución de A como A^e-módulo a izquierda, obtenemos el complejo 3.1.3, cuya homología es $\mathrm{Ext}^\bullet_A(k, A^{ad})$, como habíamos observamos anteriormente. Además, a esta resolución de A la podemos comparar con la resolución Bar levantando la identidad de A en ambos sentidos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A|\wedge^3\mathfrak{g}|A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A|\wedge^2\mathfrak{g}|A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A|\mathfrak{g}|A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A^e \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & A|A^{\otimes 3}|A \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A|A^{\otimes 2}|A \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A|A|A \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A^e \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Las composiciones $\varphi \circ \eta$ y $\eta \circ \varphi$ son homotópicas a las respectivas identidades por ser levantados de la identidad, por lo tanto, al aplicar $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ estos morfismos resultan mutuamente inversos a nivel homología, concluyendo la demostración. $\square$

Corolario 3.1.17. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y sea $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente, entonces $HH^i(A) = 0$ y $HH_i(A) = 0$, $\forall i > n$.*

Corolario 3.1.18. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente. Entonces existe un morfismo natural de k-espacios vectoriales inducido por la inclusión $i : \mathfrak{g} \longrightarrow A$*

$$H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow HH^\bullet(A).$$

Demostración. La inclusión $i : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ induce una transformación natural $i^* : F \longrightarrow G$ entre los funtores $F = \mathrm{Hom}_A(-, \mathfrak{g})$ y $G = \mathrm{Hom}_A(-, A)$. Luego, llamando como antes $K_\bullet$ a la resolución de Chevalley-Eilenberg, esta transformación natural induce un morfismo de complejos $\phi : F(K_\bullet) \longrightarrow G(K_\bullet)$ que pasa a la homología:

$$\mathrm{Ext}^\bullet_A(k, \mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^\bullet_A(k, A^{ad}).$$

$\square$

3.1.3 Un ejemplo: Cohomología de Hochschild del álgebra envolvente del álgebra de Heisenberg

Definiciones y notaciones previas

Sea k un cuerpo de característica 0.

Definición 3.1.19. El álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_3$ es el álgebra de Lie de dimensión 3 sobre k con base $\{x, y, z\}$ y corchete dado por: $[x, y] = z, [x, z] = [y, z] = 0$.

Observación 3.1.20. El álgebra envolvente de $\mathfrak{h}$ es:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{h}) = \frac{k < x, y, z >}{\langle xy - yx - z, xz - zx, yz - zy \rangle}.$$

Utilizaremos las siguientes notaciones:

1. Notaremos con $k_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(x, y)$ al $k-$subespacio vectorial de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ generado por los elementos de la forma $x^i y^j$ para $i, j \geq 0$ que, por el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, cumple: $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) = k_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(x, y) \oplus z\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Definimos análogamente $k_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(x, z)$ y $k_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(y, z)$.

2. Notaremos con $\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad}$ a $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ visto como $\mathfrak{h}$-módulo con la acción adjunta: $g{\cdot}p = gp - pg$.

3. Para $p \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$, $p = \sum_{(i,j,k)\in\mathbb{N}_0^3} \lambda_{i,j,k} x^i y^j z^k$, definimos:

$$\int_x p = \sum_{(i,j,k)\in\mathbb{N}_0^3} \lambda_{i,j,k}(i+1)^{-1}x^{i+1}y^j z^k \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{i\geq 1, j,k\geq 0} \lambda_{i,j,k} i x^{i-1} y^j z^k$$

y también damos definiciones análogas para $\int_y p$ y $\frac{\partial p}{\partial y}$.

Lema 3.1.21. *Sea $p \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad}$, entonces:*

$$x \cdot p = z\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.1.4}$$

$$y \cdot p = -z\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.1.5}$$

$$z \cdot p = 0 \tag{3.1.6}$$

Demostración. Primero veamos que $y^n x = xy^n - ny^{n-1}z$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 1$ se sigue de las relaciones del álgebra. Por inducción:

$$y^{n+1}x = yy^n x = y(xy^n - ny^{n-1}z) = yxy^n - ny^n z = (xy - z)y^n - ny^n z = xy^{n+1} - (n+1)y^n z.$$

Veamos 3.1.4. Basta probarlo para los monomios, sea entonces $p = x^m y^n z^r$. Si $n = 0$ el resultado se sigue trivialmente pues ambos lados de la igualdad son nulos, si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} x \cdot p = xp - px &= x^{m+1}y^n z^r - x^m y^n x z^r \\ &= x^{m+1}y^n z^r - x^m(xy^n - ny^{n-1}z)z^r \\ &= nx^m y^{n-1} z^{r+1}. \end{aligned}$$

Para probar 3.1.5, observemos primero que $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ tiene un automorfismo Ψ dado por $\Psi(x) = y$, $\Psi(y) = x$ y $\Psi(z) = -z$, aplicando Ψ a la igualdad $y^m x = xy^m - my^{m-1}z$ con $m \in \mathbb{N}$ obtenemos $x^m y = yx^m + mx^{m-1}z$, es decir, $yx^m = x^m y - mx^{m-1}z$; y para $p = x^m y^n z^r$ tenemos que

$$\begin{aligned} y \cdot p = yp - py &= yx^m y^n z^r - x^m y^{n+1} z^r \\ &= (x^m y - mx^{m-1}z)y^n z^r - x^m y^{n+1} z^r \\ &= -mx^{m-1}y^n z^{r+1}. \end{aligned}$$

Por último, para probar 3.1.6 basta observar que z está en el centro de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, luego $z \cdot p = zp - pz = 0$. $\square$

Cálculo de la cohomología

Utilizando la Proposición 3.1.16, calcularemos $H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad})$; y para esto usamos la resolución de Chevalley-Eilenberg:

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})|\wedge^3 \mathfrak{h} \xrightarrow{d_3} \mathcal{U}(\mathfrak{h})|\wedge^2 \mathfrak{h} \xrightarrow{d_2} \mathcal{U}(\mathfrak{h})|\mathfrak{h} \xrightarrow{d_1} \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0,$$

donde ϵ es la aumentación y

$$\begin{aligned}
d_1(u|g) &= ug,\\
d_2(u|g_1 \wedge g_2) &= ug_1|g_2 - ug_2|g_1 - u|[g_1, g_2],\\
d_3(u|g_1 \wedge g_2 \wedge g_3) &= ug_1|g_2 \wedge g_3 - ug_2|g_1 \wedge g_3 + ug_3|g_1 \wedge g_2 +\\
&\quad - u|[g_1, g_2] \wedge g_3 + u|[g_1, g_3] \wedge g_2 - u|[g_2, g_3] \wedge g_1.
\end{aligned}$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(-, \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad})$, identificando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(\mathcal{U}(\mathfrak{h})|\wedge^n \mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad})$ con $\mathrm{Hom}_k(\wedge^n \mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad})$ como k-espacios vectoriales y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad})$ con $\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad}$, resulta:

$$0 \longleftarrow \mathrm{Hom}_k(\wedge^3 \mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad}) \xleftarrow{\delta_2} \mathrm{Hom}_k(\wedge^2 \mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad}) \xleftarrow{\delta_1} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad}) \xleftarrow{\delta_0} \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{ad} \longleftarrow 0,$$

donde:

$$\begin{aligned}
\delta_0(u)(g) &= g \cdot u,\\
\delta_1(f)(g_1 \wedge g_2) &= g_1 \cdot f(g_2) - g_2 \cdot f(g_1) - f([g_1, g_2]),\\
\delta_2(h)(g_1 \wedge g_2 \wedge g_3) &= g_1 \cdot h(g_2 \wedge g_3) - g_2 \cdot h(g_1 \wedge g_3) + g_3 \cdot h(g_1 \wedge g_2) +\\
&\quad - h([g_1, g_2] \wedge g_3) + h([g_1, g_3] \wedge g_2]) - h([g_2, g_3], g_1).
\end{aligned}$$

Para obtener una descripción mas precisa de los núcleos de los diferenciales δ_i, evaluemos estas expresiones en bases adecuadas. Vamos a considerar para esto $\{x, y, z\}$, $\{x \wedge y,\, x \wedge z,\, y \wedge z\}$ y $\{x \wedge y \wedge z\}$ bases de $\mathfrak{h}$, $\wedge^2 \mathfrak{h}$ y $\wedge^3 \mathfrak{h}$ respectivamente. De esta manera vemos que $\mathrm{Ker}\, \delta_0$ es el centro de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. También vemos que $f \in \mathrm{Ker}\, \delta_1$ si y solo si $\delta_1(f)(x \wedge y) = \delta_1(f)(x \wedge z) = \delta_1(f)(y \wedge z) = 0$, lo que se traduce en :

$$\begin{aligned}
0 = \delta_1(f)(x \wedge y) &= x \cdot f(y) - y \cdot f(x) - f([x, y]) = z\frac{\partial f(y)}{\partial y} + z\frac{\partial f(x)}{\partial x} - f(z),\\
0 = \delta_1(f)(x \wedge z) &= x \cdot f(z) - z \cdot f(x) - f([x, z]) = z\frac{\partial f(z)}{\partial y},\\
0 = \delta_1(f)(y \wedge z) &= y \cdot f(z) - z \cdot f(y) - f([y, z]) = -z\frac{\partial f(z)}{\partial x},
\end{aligned}$$

es decir que $f \in \mathrm{Ker}\, \delta_1$ si y solo si:

$$f(z) = z\frac{\partial f(y)}{\partial y} + z\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \tag{3.1.7}$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial y} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = 0. \tag{3.1.8}$$

Por último, vemos que $h \in \mathrm{Ker}\, \delta_2$ si y solo si

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_2(h)(x \wedge y \wedge z)\\
&= x \cdot h(y \wedge z) - y \cdot h(x \wedge z) + z \cdot h(x \wedge y) - h([x, y] \wedge z) + h([x, z] \wedge y]) - h([y, z], x)\\
&= x \cdot h(y \wedge z) - y \cdot h(x \wedge z) + z \cdot h(x \wedge y) - h(z \wedge z)\\
&= z\frac{\partial h(y \wedge z)}{\partial y} + z\frac{\partial h(x \wedge z)}{\partial x},
\end{aligned}$$

como z no es divisor de 0 en $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, esto quiere decir que $h \in \operatorname{Ker} \delta_2$ si y solo si:

$$-\frac{\partial h(y \wedge z)}{\partial y} = \frac{\partial h(x \wedge z)}{\partial x}. \tag{3.1.9}$$

Observación 3.1.22. Para trabajar mas cómodamente, vamos a identificar a $\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ con $\mathfrak{h}^*|\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ y notar con $\{dx, dy, dz\}$ a la base dual de $\{x, y, z\}$, también vamos a identificar a $\operatorname{Hom}_k(\wedge^2\mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ con $\wedge^2\mathfrak{h}^*|\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ y notar con $\{d_{x\wedge y}, d_{x\wedge z}, d_{y\wedge z}\}$ a la base dual de $\{x \wedge y, x \wedge z, y \wedge z\}$. Usando esta notación, y teniendo en cuenta las cuentas hechas anteriormente, los diferenciales δ_0 y δ_1 y δ_2 quedan

$$\delta_0(u) = dx|z\frac{\partial u}{\partial y} - dy|z\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.1.10}$$

$$\delta_1(dx|u_1 + dy|u_2 + dz|u_3) = d_{x\wedge y}|(z\frac{\partial u_2}{\partial y} + z\frac{\partial u_1}{\partial x} - u_3) + \tag{3.1.11}$$

$$d_{x\wedge z}|z\frac{\partial u_3}{\partial y} - d_{y\wedge z}|z\frac{\partial u_3}{\partial x}$$

$$\delta_2(d_{x\wedge y}|v_1 + d_{x\wedge z}|v_2 + d_{y\wedge z}|v_3) = z\frac{\partial v_3}{\partial y} + z\frac{\partial v_2}{\partial x} \tag{3.1.12}$$

Proposición 3.1.23. *El centro de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, es decir $HH^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$, es igual a $k[z]$.*

Demostración. $HH^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h})) = \operatorname{Ker} \delta_0 = \{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}) : g \cdot u = 0 \, \forall \, g \in \mathfrak{h}\} = \{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}) : x \cdot u = 0,\ y \cdot u = 0,\ z \cdot u = 0\}$. Por el Lema 3.1.21, $u \in HH^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ si y solo si $z\frac{\partial u}{\partial x} = z\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. El teorema de Poincaré - Birkhoff - Witt garantiza que z no es divisor de 0, luego $u \in HH^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ si y solo si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, es decir, si y solo si $u \in k[z]$.

□

Proposición 3.1.24. *Una base del espacio vectorial $HH^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ está dada por el conjunto formado por las clases de los elementos:*

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &:= dx|x^i y^j - dy|i(j+1)^{-1}x^{i-1}y^{j+1} \quad \textit{con } i, j \geq 0, \\
b_i &:= dy|x^i \quad \textit{con } i \geq 0, \\
c_i &:= dy|yz^i + dz|z^{i+1} \quad \textit{con } i \geq 0.
\end{aligned}$$

Demostración. Sea $f = dx|u_1 + dy|u_2 + dz|u_3 \in \operatorname{Ker} \delta_1$. Veamos primero que existe $\hat{u} \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ tal que $f - \delta_0(\hat{u})$ está generado por los elementos del tipo a, b, c del enunciado.

Como $f \in \operatorname{Ker} \delta_1$ (3.1.7, 3.1.8):

$$\begin{aligned}
u_3 = z\frac{\partial u_2}{\partial y} + z\frac{\partial u_1}{\partial x}, &\quad \text{de donde} \quad u_3 \in z\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \\
\frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0, &\quad \text{de donde} \quad u_3 \in k[z],
\end{aligned}$$

entonces $u_3 \in zk[z]$, por lo tanto, $u_3 = \sum \lambda_i z^{i+1}$ con $\lambda_i \in k$, $i \geq 0$. Luego $\hat{f} := f - \sum \lambda_i c_i = dx|\hat{u}_1 + dy|\hat{u}_2$ para ciertos $\hat{u}_1$ y $\hat{u}_2$. De esta forma, podemos suponer que $u_3 = 0$.

Como $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) = k_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(x,y) \oplus z\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, existen $v \in k_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(x,y)$ y $w \in z\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ tales que $u_1 = v + w$. Llamemos $u = \int_y \frac{w}{z}$, entonces

$$\begin{aligned} f - \delta_0(u) &= dx|(v + w - z\frac{\partial u}{\partial y}) + dy|(u_2 + z\frac{\partial u}{\partial x}) \\ &= dx|v + dy|\hat{u}_2. \end{aligned}$$

Escribimos $v = \sum_{i,j\in\mathbb{N}_0} \lambda_{i,j} x^i y^j$ y llamamos $a = \sum_{i,j\in\mathbb{N}_0} \lambda_{i,j} a_{i,j}$. Entonces

$$f - \delta_0(u) - a = dy|w_2 \qquad \in \operatorname{Ker}\delta_1 \tag{3.1.13}$$

y por lo tanto $\frac{\partial w_2}{\partial y} = 0$. Escribimos entonces:

$$w_2 = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \mu_i x^i + r \qquad \text{con } r \in zk_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(x,z) \tag{3.1.14}$$

Definimos $b = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \mu_i b_i$ y $\hat{u} = \int_x \frac{r}{z}$, entonces $\delta_0(\hat{u}) = -dy|r$ y de 3.1.13 y 3.1.14 obtenemos

$$\begin{aligned} &f - \delta_0(u) - a = b - \delta_0(\hat{u}) \qquad \text{es decir,} \\ &f - \delta_0(u - \hat{u}) = a + b. \end{aligned}$$

Para ver que el conjunto dado es linealmente independiente, sea

$$\sum_{i,j\geq 0} \lambda_{i,j} a_{i,j} + \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \eta_i b_i + \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \theta_i c_i = \delta_0 u \quad \text{para ciertos } \lambda_{i,j}, \eta_i, \theta_i \in k, u \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}).$$

Evaluando en z obtenemos:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \theta_i z^{i+1} = 0 \qquad \text{entonces } \theta_i = 0\, \forall i \geq 0.$$

Evaluando en x obtenemos:

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_0^2} \lambda_{i,j} x^i y^j = z\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{entonces por PBW } \lambda_{i,j} = 0\, \forall i,j \geq 0.$$

Evaluando en y obtenemos:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \eta_i x^i = -z\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{entonces por PBW } \eta_i = 0\, \forall i \geq 0.$$

□

Observación 3.1.25. La estructura de módulo sobre el centro está determinada por:

$$z \cdot a_{i,j} = 0, \qquad z \cdot b_i = 0, \qquad z \cdot c_i = c_{i+1}.$$

Proposición 3.1.26. *El conjunto de las clases de los elementos que siguen es una base de $HH^2(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$:*

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j,k} &:= d_{x\wedge z}|x^i y^j z^k - d_{y\wedge z}|i(j+1)^{-1}x^{i-1}y^{j+1}z^k \quad \textit{con } i \geq 0, j \geq 0,\ k \in \{0,1\}, \\ \beta_{i,k} &:= d_{y\wedge z}|x^i z^k \quad \textit{con } i \geq 0,\ k \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $h = d_{x\wedge y}|v_1 + d_{x\wedge z}|v_2 + d_{y\wedge z}|v_3 \in \operatorname{Ker}\delta_2$. Es inmediato ver que

$$h + \delta_1(dz|v_1) = d_{x\wedge z}|(v_2 + z\frac{\partial v_1}{\partial y}) + d_{y\wedge z}|(v_3 - z\frac{\partial v_1}{\partial x}).$$

Es decir que reduciendo módulo bordes, podemos suponer que $h = d_{x\wedge z}|v_2 + d_{y\wedge z}|v_3$. En lo que sigue, vamos a seguir reduciendo módulo bordes para escribir a h como combinación lineal de elementos del tipo α, β. Para ello buscamos $f \in \mathfrak{h}^*|\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ tal que

$$h - \delta_1(f) = \sum \lambda_{i,j,k}\alpha_{i,j,k} + \sum \mu_{i,k}\beta_{i,k}.$$

Sean $p \in k_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(x,y) \oplus zk_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(x,y)$, $r \in z^2\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $v_2 = p + r$. Llamamos $u_2 = \int_y \int_y \frac{r}{z^2}$, $u_3 = \int_y \frac{r}{z}$ y consideramos $f = dy|u_2 + dz|u_3$. Entonces:

$$h - \delta_1(f) = d_{x\wedge z}|p + d_{y\wedge z}|\hat{v}_3.$$

Escribimos $p = \sum_{i,j\in\mathbb{N}_0,k\in\{0,1\}} \lambda_{i,j,k}x^i y^j z^k$ y consideramos $\alpha = \sum_{i,j\in\mathbb{N}_0,k\in\{0,1\}} \lambda_{i,j,k}\alpha_{i,j,k}$. De esta manera se obtiene que

$$h - \delta_1(f) - \alpha = d_{y\wedge z}|w_3, \tag{3.1.15}$$

donde

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} = 0,$$

por lo tanto,

$$w_3 = \sum_{(i,k)\in\mathbb{N}_0^2} \mu_{i,k}x^i z^k = \sum_{i\in\mathbb{N}_0,k\in\{0,1\}} \mu_{i,k}x^i z^k + \sum_{i\in\mathbb{N}_0,k\geq 2} \mu_{i,k}x^i z^k. \tag{3.1.16}$$

Si llamamos $\hat{r} = \sum_{k\geq 2} \mu_{i,k}x^i z^k$, y definimos $\hat{u}_1 = \int_x \int_x \frac{\hat{r}}{z^2}$, $\hat{u}_3 = \int_x \frac{\hat{r}}{z}$ y $\hat{f} = dx|\hat{u}_1 + dz|\hat{u}_3$ se tiene que

$$\delta_1(\hat{f}) = -d_{y\wedge z}|\hat{r}$$

y llamando $\beta = \sum_{i\in\mathbb{N}_0,k\in\{0,1\}} \mu_{i,k}\beta_{i,k}$, obtenemos de 3.1.15 y de 3.1.16:

$$h - \delta_1(f - \hat{f}) = \alpha + \beta.$$

Veamos la independencia lineal. Supongamos que

$$\delta_1(f) = \sum \lambda_{i,j,k}\alpha_{i,j,k} + \sum \mu_{i,k}\beta_{i,k}. \tag{3.1.17}$$

De esta igualdad se ve que $\delta_1(f)$ debe tener coordenada $d_{x\wedge y}$ nula. Si $f = dx|u_1 + dy|u_2 + dz|u_3$, por 3.1.11 se tiene que

$$u_3 = z\frac{\partial u_2}{\partial y} + z\frac{\partial u_1}{\partial x} \in z\mathcal{U}(\mathfrak{h}),$$

entonces

$$\delta_1(f) = d_{x\wedge z}|z\frac{\partial u_3}{\partial y} - d_{y\wedge z}|z\frac{\partial u_3}{\partial x},$$

con $z\frac{\partial u_3}{\partial y}, z\frac{\partial u_3}{\partial x} \in z^2\mathcal{U}(\mathfrak{h})$.

Luego, evaluando (3.1.17) en $x \wedge z$ se obtiene que

$$z\frac{\partial u_3}{\partial y} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_0^2, k\in\{0,1\}} \lambda_{i,j,k} x^i y^j z^k, \quad \text{que por PBW dice que } \lambda_{i,j,k} = 0 \,\forall\, i,j,k.$$

evaluando (3.1.17) en $y \wedge z$ se obtiene que

$$z\frac{\partial u_3}{\partial x} = \sum_{i\in\mathbb{N}_0, k\in\{0,1\}} \mu_{i,k} x^i z^k \quad \text{que por PBW significa que } \mu_{i,k} = 0 \,\forall\, i,k.$$

□

Observación 3.1.27. La estructura de módulo sobre el centro queda determinada por

$$z\cdot\alpha_{i,j,0} = \alpha_{i,j,1}, \quad z\cdot\beta_{i,0} = \beta_{i,1}, \quad z\cdot\alpha_{i,j,1} = 0, \quad z\cdot\beta_{i,1} = 0.$$

Proposición 3.1.28. *Una base de $HH^3(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ está dada por el conjunto formado por las clases de los elementos $p_{i,j} = dx \wedge dy \wedge dz \otimes x^i y^j$ con $i, j \geq 0$.*

Demostración. Comenzamos identificando a $\mathrm{Hom}_k(\wedge^3\mathfrak{h}, \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ con $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Sea $p \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$, $p = v + w$ con $v \in k_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(x,y)$ y $w \in z\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Sea $r = \int_x \frac{w}{z}$ y sea $h = d_{x\wedge z}|r$. Entonces $p - \delta_2(h) = v + w - w = v \in k_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}(x,y)$. Para ver que son linealmente independientes, supongamos que

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_0^2} \lambda_{i,j} x^i y^j = \delta_2(h),$$

entonces

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_0^2} \lambda_{i,j} x^i y^j = z\frac{\partial h(x\wedge y)}{\partial x} + z\frac{\partial h(y\wedge z)}{\partial y}.$$

Usando el teorema de PBW resulta que $\lambda_{i,j} = 0$ para todo $(i,j) \in \mathbb{N}_0^2$. □

Observación 3.1.29. La estructura de módulo sobre el centro de $HH^3(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ queda determinada por $z\cdot\varphi = 0$ para todo $\varphi \in HH^3(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$.

3.2 Deformaciones de Gerstenhaber de álgebras asociativas

A lo largo de esta sección seguiremos el artículo [GS].

3.2.1 Motivación

Empezaremos esta sección con un ejemplo que servirá a modo de motivación para las definiciones posteriores.

Sea $k = \mathbb{C}$ y sea $V = kx \oplus ky$ un k-espacio vectorial de dimensión 2. Para dar una estructura de k-álgebra asociativa a V, basta definir la multiplicación por x y por y de manera asociativa. Tanto la multiplicación por x como la multiplicación por y son transformaciones k-lineales, por lo tanto cada una de ellas queda determinada por una matriz de $M_2(\mathbb{C})$, $m_x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $m_y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$; y la asociatividad se traduce en ecuaciones polinomiales en los coeficientes de las matrices, por ejemplo

$$\begin{aligned} x(xx) &= x(a_1x + c_1y) = a_1(a_1x + c_1y) + c_1(b_1x + d_1y) = (a_1^2 + c_1b_1)x + (a_1c_1 + c_1d_1)y, \\ (xx)x &= (a_1x + c_1y)x = a_1(a_1x + c_1y) + c_1(a_2x + c_2y) = (a_1^2 + c_1a_2)x + (a_1c_1 + c_1c_2)y. \end{aligned}$$

por lo tanto, $x(xx) = (xx)x$ si y solo si $c_1b_1 - c_1a_2 = 0$ y $c_1d_1 - c_1c_2 = 0$.

De esta manera, podemos pensar las estructuras de k-álgebra sobre V como una variedad algebraica en k^8, que llamaremos *Assoc*.

Sea $A \in Assoc$. Estudiemos un poco el comportamiento local. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un entorno del 0 con la topología usual de $\mathbb{C}$. Sea $\gamma : U \longrightarrow Assoc$ una curva que en 0 pasa por A y supongamos además que γ es analítica, es decir, que para cada $t_0 \in U$ hay un entorno en el que γ es, en cada coordenada, una serie de potencias, escribimos a γ de la siguiente manera para t cercano a 0:

$$\gamma_t = (\begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) \\ c_1(t) & d_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2(t) & b_2(t) \\ c_2(t) & d_2(t) \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} \sum a_{1,i}t^i & \sum b_{1,i}t^i \\ \sum c_{1,i}t^i & \sum d_{1,i}t^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum a_{2,i}t^i & \sum b_{2,i}t^i \\ \sum c_{2,i}t^i & \sum d_{2,i}t^i \end{pmatrix}),$$

luego, el producto de $\gamma(t)$ está dado por:

$$\begin{aligned} \gamma_t(x,x) &= (a_{1,0}x + c_{1,0}y) + (a_{1,1}x + c_{1,1}y)t + (a_{1,2}x + c_{1,2}y)t^2 + \cdots, \\ \gamma_t(x,y) &= (b_{1,0}x + d_{1,0}y) + (b_{1,1}x + d_{1,1}y)t + (b_{1,2}x + d_{1,2}y)t^2 + \cdots, \\ \gamma_t(y,x) &= (a_{2,0}x + c_{2,0}y) + (a_{2,1}x + c_{2,1}y)t + (a_{2,2}x + c_{2,2}y)t^2 + \cdots, \\ \gamma_t(y,y) &= (b_{2,0}x + d_{2,0}y) + (b_{2,1}x + d_{2,1}y)t + (b_{2,2}x + d_{2,2}y)t^2 + \cdots. \end{aligned}$$

En general, para $a, b \in V$, el producto es:

$$\gamma_t(a,b) = a \cdot_A b + f_1(a,b)t + f_2(a,b)t^2 + f_3(a,b)t^3 + \cdots,$$

para ciertas $f_i : A \times A \longrightarrow A$ que son k-bilineales. Observamos que esta familia de morfismos $\{f_i\}_{i \geq 1}$ depende sólo de cómo se escribe γ para algún entorno del 0 arbitrariamente chico, es decir, depende sólo del germen de γ en el 0.

La asociatividad de γ se puede traducir en una condición que involucra sólo a la familia $\{f_i\}_{i \geq 1}$, en efecto, la condición

$$\gamma_t(\gamma_t(a,b),c) = \gamma_t(a, \gamma_t(b,c)) \quad \forall\, t \in U,\ \forall\, a,b,c \in V,$$

se traduce en:

$$\sum_{s\geq 0}(\sum_{\substack{i+j=s\\ i,j\geq 0}} f_i(f_j(a,b),c) - f_i(a,f_j(b,c)))t^s = 0,$$

donde $f_0(a,b) = a \cdot_A b$; como esta igualdad vale para todo $t \in U$, es equivalente a:

$$\sum_{i+j=s} f_i(f_j(a,b),c) - f_i(a,f_j(b,c)) = 0 \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0. \tag{3.2.1}$$

De esta manera obtenemos la asignación

$$\{\text{Gérmenes de curvas analíticas}\} \longrightarrow \{\text{Familias } \{f_i\}_i \text{ que cumplen 3.2.1}\}\ .$$

Entonces podemos entender a las familias $\{f_i\}_{i\geq 1}$ que cumplen 3.2.1 como una generalización de los gérmenes de curvas analíticas que pasan por A. Por otro lado, a una familia $\{f_i\}_i$ que cumple 3.2.1 la podemos pensar como el álgebra de series formales en V con producto dado por:

$$a * b = a \cdot_A b + f_1(a,b)t + f_2(a,b)t^2 + \cdots$$

para $a, b \in V$ y extendiéndolo de manera $k[[t]]$-lineal a toda el álgebra.

3.2.2 Topologías t-ádicas

En las secciones siguientes trataremos con el anillo de series formales con coeficientes en una k-álgebra A, que notaremos con $A[[t]]$; el objetivo de esta sección es dar los ingredientes necesarios para construir dicho anillo a partir de uno mas manejable, mas precisamente a partir de $A \otimes_k k[[t]]$. Para mas información sobre topologías t-ádicas ver [K]. Notaremos $K := k[[t]]$ para simplificar la escritura.

Definición 3.2.1. Sea A una k-álgebra asociativa, se define $A_K := A \otimes_k K$.

Observación 3.2.2.
1. Si A es de dimensión finita sobre k, entonces A_K coincide con $A[[t]]$ vía la identificación $a \otimes (\sum_n \lambda_n t^n) \mapsto \sum_n \lambda_n a t^n$.
2. Si A es de dimensión infinita sobre k, entonces $A_K \subsetneq A[[t]]$ y se identifica con el subanillo de las series $\sum a_n t^n$ con $\dim_k \langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}_0} < \infty$.

Definición 3.2.3.
1. Sea $p = \sum a_n t^n \in A[[t]]$, definimos $\deg(p) = min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$ para $p \neq 0$, y $\deg(0) = \infty$.
2. Dados $p, q \in A[[t]]$, definimos $d(p,q) = 2^{-\deg(p-q)}$. Se puede verificar que d es una ultramétrica.

Intuitivamente $\deg(p)$ mide qué tan lejos está el primer coeficiente no nulo, y $d(p,q)$ está cerca de 0 si $\deg(p-q)$ es grande, es decir, si para $n \gg 0$, los primeros n coeficientes de p y q son iguales. Tenemos via d una noción de convergencia, precisamente $(p_k)_k$ converge a p si y solo si para todo $m \in \mathbb{N}$ existe m_0 tal que para $k \geq m_0$, el m-ésimo coeficiente de

p_k es igual al m-ésimo coeficiente de p; es decir, la convergencia es *coeficiente a coeficiente*. Observar que $A[[t]]$ es completo para esta métrica.

La topología que define esta métrica es la topología que tiene como familia de entornos del 0 a $\{A[[t]]t^n : n \geq 0\}$. Llamamos a esta topología, la *topología t-ádica* de $A[[t]]$.

La construcción de la ultramétrica y de la topología t-ádica son válidas si se toma V un k-espacio vectorial y $V[[t]]$ las series formales con coeficientes en V, notamos análogamente $V_K = V \otimes_k K$.

Proposición 3.2.4. *Sean V y W k-espacios vectoriales. Entonces*

i) *V_K es denso en $V[[t]]$ para la topología t-ádica,*

ii) *todo morfismo K-lineal de $V[[t]]$ en $W[[t]]$ es continuo,*

iii) $\mathrm{Hom}_K(V[[t]], W[[t]]) \cong \mathrm{Hom}_k(V, W[[t]])$ *como k-espacios vectoriales.*

Demostración. i) Si $p \in V[[t]]$, $p = \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$. Luego $p_k := \sum_{n=0}^{k} v_n t^n$ pertenece a V_K y converge a p.

ii) Sea $f : V[[t]] \longrightarrow W[[t]]$ K-lineal. Debido a la K-linealidad, $f(V[[t]]t^n) \subset W[[t]]t^n$, entonces f es continua.

iii) Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V[[t]], W[[t]])$, entonces $f|_V \in \mathrm{Hom}_k(V, W[[t]])$. Recíprocamente, sea $g \in \mathrm{Hom}_k(V, W[[t]])$, podemos definir $\hat{g} \in \mathrm{Hom}_K(V[[t]], W[[t]])$ como $\hat{g}(\sum v_n t^n) = \sum g(v_n) t^n$.

Las asignaciones anteriores resultan mutuamente inversas: claramente $\hat{g}|_V = g$; falta ver que $(\widehat{f|_V}) = f$. Por *i)* y *ii)* basta ver que coinciden sobre V_K. Sea $p \in V_K$. Como $V_K = V \otimes_k K$, existen $v_1, \cdots, v_n \in V$ y $h_1, \cdots, h_n \in K$ tal que $p = v_1 h_1 + \cdots v_n h_n$. Luego $(\widehat{f|_V})(p) = f|_V(v_1)h_1 + \cdots f|_V(v_n)h_n = f(p)$.

$\square$

Observación 3.2.5. 1. Observemos que de iii) se desprende que si $f : V[[t]] \longrightarrow W[[t]]$ es K-lineal, entonces $f(\sum v_n t^n) = \sum f(v_n) t^n$, es decir, es lineal en las series.

2. Utilizando iii) vemos que $\mathrm{End}_K(V[[t]]) \cong \mathrm{Hom}_k(V, V[[t]]) \cong \mathrm{Hom}_k(V, V)[[t]]$, por lo tanto tenemos una noción de convergencia en $\mathrm{End}_K(V[[t]])$, para la cual este espacio resulta completo.

Observación 3.2.6. Sea M un $k[[t]]$-módulo. La topología t-ádica en $k[[t]]$ induce una topología en M donde los entornos del 0 son $\{t^n M : n > 0\}$. En esta topología, una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset M$ converge a $x \in M$ si para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m_0$, $x_n - x \in t^m M$.

A dicha topología la llamamos *topología t-ádica de M*.

Proposición 3.2.7. *Sea M un $k[[t]]$-módulo. Entonces son equivalentes*

i) *M es isomorfo a $M_0[[t]]$ como $k[[t]]$-módulo, donde $M_0 = M/tM \cong M \otimes_{k[[t]]} k$.*

ii) *M es t-ádicamente completo y libre de torsión.*

Demostración. Si M es isomorfo a $M_0[[t]]$, entonces es claro que M es t-ádicamente completo y libre de torsión.

Supongamos ii). Sea $r : M_0 = M/tM \longrightarrow M$ tal que $\pi \circ r = \mathrm{id}_{M_0}$. Veamos que para todo $m \in M$ existen únicos $\{m_i\}_i \subset \mathrm{Im}(r)$ tales que $x_n := \sum_{i=1}^n m_i t^i$ converge a m; y que para todos $\{m_i\}_i \subset \mathrm{Im}(r)$, la sucesión $\{x_n := \sum_{i=1}^n m_i t^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $m \in M$.

Sea $m \in M$. Llamemos $m_0 := r \circ \pi(m)$, luego $m - m_0 \in \mathrm{Ker}\,\pi = tM$. Sea $n_0 \in M$ tal que $m - m_0 = tn_1$ y llamemos $m_1 := r \circ \pi(n_1)$, y tenemos que $n_1 - m_1 = tn_2$ para algún n_2. Entonces $m = m_0 + tm_1 + t^2 n_2$.

Supongamos construidos $m_0, \cdots, m_{k-1} \in \mathrm{Im}(r)$ y $n_1, \cdots, n_k \in M$ tales que $m_i - n_i = tn_{i+1}$ para todo $i = 1, \cdots, k-1$; y

$$m = m_0 + tm_1 + t^2 m_2 + \cdots + t^{k-1} m_{k-1} + t^k n_k.$$

Sea $m_k := r \circ \pi(n_k)$, luego $n_k - m_k \in \mathrm{Ker}\,(\pi)$ y por lo tanto existe $n_{k+1} \in M$ tal que $n_k - m_k = tn_{k+1}$.

De esta manera construimos una sucesión $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Im}(r)$ tal que $\{x_n := \sum_{i=1}^n m_i t^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a m.

Para demostrar la unicidad basta probar que si $x_n := \sum_{i=1}^n r(a_i) t^i$ converge a 0, entonces $a_i = 0$ para todo i. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in tM$. Entonces $\pi(x_N) = 0 = \pi(r(a_0)) = a_0$.

Supongamos que $a_0 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Dado que x_n converge a 0 existe $N \in \mathbb{N}$, $N > k$, tal que $x_N \in t^{k+1}M$. Entonces

$$r(a_k)t^k + r(a_{k+1})t^{k+1} + \cdots + r(a_N)t^N = t^{k+1}m.$$

Por otro lado, M es libre de torsión y por lo tanto

$$r(a_k) + r(a_{k+1})t + \cdots + r(a_N)t^{N-k} = tm.$$

Luego, aplicando π al miembro izquierdo obtenemos $a_k = 0$.

Sea ahora $\{m_i\}_i \subset \mathrm{Im}(r)$ una sucesión arbitraria de elementos de $\mathrm{Im}(r)$. Sea $x_n := \sum_{i=0}^n m_i t^i$. De manera análoga a la prueba de la unicidad se puede ver que $\{x_n\}_n$ es de Cauchy. Luego $\{x_n\}_n$ converge a algún $m \in M$.

Concluimos que $M = \mathrm{Im}(r)[[t]]$, isomorfo a $M_0[[t]]$. $\square$

3.2.3 Familias uniparamétricas de deformaciones

Sea A una k-álgebra asociativa.

Definición 3.2.8. Una *familia uniparamétrica de deformaciones de A* (para abreviar, una *deformación* de A) es un producto asociativo en $A[[t]]$ determinado por la extensión $k[[t]]$-bilineal de una función $f_t : A \times A \longrightarrow A[[t]]$ dada por:

$$f_t(a,b) = ab + F_1(a,b)t + F_2(a,b)t^2 + \cdots \qquad \text{con } a, b \in A,$$

donde $F_i : A \times A \longrightarrow A$ es k-bilineal para todo $i \in \mathbb{N}$. Cuando no haya ambigüedad notaremos A_t a $A[[t]]$ con el producto dado por f_t, de lo contrario lo notaremos con A_{f_t}.

Podemos observar que en el caso en el que $k = \mathbb{C}$ o $k = \mathbb{R}$, y A es de dimensión finita sobre k, una *familia uniparamétrica de deformaciones* coincide con lo se puede entender como una generalización de los gérmenes de curvas analíticas que pasan por A.

Ejemplo 3.2.9. Para cada $t \in \mathbb{R}$, consideremos la cúbica $y^2 - x^3 - tx^2 = 0$. Variaciones en $t \in [-1, 1]$ se corresponden con una deformación geométrica de la curva, pasando de ser un *rulo* para $t = 1$, que se desenlaza hasta tener un pico en $t = 0$, y se suaviza para $t < 0$. El álgebra de funciones regulares es $A_t = \mathbb{R}[x, y]/(y^2 - x^3 - tx^2)$. Una $\mathbb{R}$-base de A_t es $\{x^i, x^i y\}_{i \geq 0}$ y el producto es:

$$\begin{aligned}
&f_t(x^i, x^j) = x^{i+j},\\
&f_t(x^i, x^j y) = x^{i+j} y,\\
&f_t(x^i y, x^j y) = x^{i+j} y^2 = x^{i+j}(x^3 + tx^2) = x^{i+j+3} + x^{i+j+2} t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si en $A_0[[t]]$ definimos un nuevo producto como arriba, obtenemos una familia uniparamétrica de deformaciones de A_0.

Observación 3.2.10. Dada una k-álgebra A, toda deformación f_t de A induce un isomorfismo de k-álgebras $A_t \otimes_{k[[t]]} k \longrightarrow A$.

Recíprocamente, sea B una $k[[t]]$-álgebra, t-ádicamente completa, libre de torsión, con un isomorfismo de k-álgebras $B \otimes_{k[[t]]} k \longrightarrow A$. Por la Proposición 3.2.7, B es isomorfa como $k[[t]]$-módulo a $M_0[[t]]$, donde $M_0 \cong B \otimes_{k[[t]]} k \cong A$ como álgebras. Entonces $M \cong A[[t]]$ como $k[[t]]$-álgebra y el producto está dado por una deformación f_t.

Resumiendo, es equivalente tener una familia uniparamétrica de deformaciones que tener una $k[[t]]$-álgebra B, t-ádicamente completa, libre de torsión, junto con un isomorfismo de k-álgebras $B \otimes_{k[[t]]} k \longrightarrow A$.

Integrabilidad y obstrucciones

Sea A_t una deformación de A, la condición de asociatividad es

$$f_t(f_t(a, b), c) - f_t(a, f_t(b, c)) = 0 \quad \forall\, a, b, c \in A.$$

Desarrollando y utilizando la K-bilinealidad esta condición se traduce en:

$$\sum_{i+j=s} F_i(F_j(a, b), c) - F_i(a, F_j(b, c)) = 0 \quad \forall\, a, b, c \in A, \forall\, s \in \mathbb{N}_0,$$

donde tomamos $F_0(a, b) = ab$, el producto en A. Despejando los términos $(i, j) = (s, 0)$ e $(i, j) = (0, s)$, resulta

$$\sum_{\substack{i+j=s\\ i,j>0}} F_i \circ F_j = \delta_2(F_s) \quad \forall\, s \in \mathbb{N}_0,$$

donde $F_i \circ F_j$ es el asociador de F_i y F_j, y δ_2 es el diferencial en grado 2 del cocomplejo de Hochschild $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes \bullet}, A)$. Estas ecuaciones suelen llamarse *ecuaciones de deformación*; por lo tanto, f_t es asociativo si y solo si se verifican las ecuaciones de deformación.

Observamos que para $s = 0$ estas ecuaciones describen la asociatividad del producto de A y para $s = 1$ dicen que $\delta_2(f_1) = 0$, es decir, F_1 debe ser un 2-cociclo de Hochschild. Más generalmente:

Lema 3.2.11. *Sea f_t una familia uniparamétrica de deformaciones de A tal que $F_1 = \cdots = F_{n-1} = 0$. Entonces F_n es un 2-cociclo de Hochschild.*

Demostración. Las ecuaciones de deformación dicen que

$$\delta_2(F_n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} F_i \circ F_j = 0,$$

pues si $i + j = n$ y $i, j > 0$ entonces $i, j \leq n - 1$; entonces los términos de la suma son todos nulos. $\square$

Definición 3.2.12. Sea F_1 un 2-cociclo de Hochschild. Decimos que F_1 es *integrable* si existen $\{F_i\}_{i\geq 2}$ tales que se verifican las ecuaciones de deformación, es decir, si existe una familia uniparamétrica de deformaciones que empieza con F_1.

Tomemos $F_1 \in HH^2(A)$, llamemos también F_1 a un representante de esta clase y tratemos de integrarlo a una familia de deformaciones. Como A es asociativa y F_1 es un 2-cociclo, se cumplen las ecuaciones de deformación para $s = 0, 1$. Si F_1 fuera integrable, entonces la ecuación de deformación para $s = 2$ diría que $F_1 \circ F_1 = \delta_2(F_2)$. Por otro lado, $\delta(F_1 \circ F_1) = F_1 \circ \delta(F_1) - \delta(F_1) \circ F_1 + F_1 \smile F_1 - F_1 \smile F_1 = 0$, es decir que $F_1 \circ F_1$ es un 3-cociclo para todo $F_1 \in HH^2(A)$ y la primera obstrucción para que F_1 sea integrable es que $F_1 \circ F_1$ sea cohomólogo a 0. En general se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2.13. *Sea A una k-álgebra unitaria y $car(k) \neq 2$. Sean $F_1, \cdots, F_n \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes A, A)$ tales que*

$$\sum_{\substack{i+j=s \\ i,j>0}} F_i \circ F_j = \delta_2(F_s) \quad \textit{para } s = 1, ..., n.$$

Entonces

$$G := \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j>0}} F_i \circ F_j,$$

es un 3-cociclo de Hochschild.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\delta(G) &= \sum_{i=1}^{n} F_i \circ \delta(F_{n-i}) - \delta(F_i) \circ F_{n-i} + F_i \smile F_{n-i} - F_{n-i} \smile F_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} F_i \circ \delta(F_{n-i}) - \delta(F_i) \circ F_{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n-i-1} F_i \circ (F_k \circ F_{n-i-k}) - \sum_{k=1}^{i-1} (F_k \circ F_{i-k}) \circ F_{n-i}) \\
&= \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k>0}} F_i \circ (F_j \circ F_k) - (F_i \circ F_j) \circ F_k,
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
2\delta(G) &= \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k>0}} F_i \circ (F_j \circ F_k) - (F_i \circ F_j) \circ F_k + F_i \circ (F_k \circ F_j) - (F_i \circ F_k) \circ F_j \\
&= \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k>0}} F_i \circ ((F_j + F_k) \circ (F_j + F_k)) - (F_i \circ (F_j + F_k)) \circ (F_j + F_k) = 0.
\end{aligned}$$

□

De esta forma, puede interpretarse el tercer grupo de cohomología de Hochschild como el lugar donde viven las obstrucciones para poder integrar un 2-cociclo.

Deformaciones triviales y equivalencia de deformaciones

Definición 3.2.14. Dos familias de deformaciones, f_t y g_t se dicen equivalentes si existe un isomorfismo de K-álgebras $\Phi_t : A_{f_t} \longrightarrow A_{g_t}$, dado por la extensión K-lineal de

$$\Phi_t(a) = a + \phi_1(a)t + \phi_2(a)t^2 + \cdots ,$$

donde $\phi_i : A \times A \longrightarrow A$ es k-lineal para todo $i \in \mathbb{N}$. Decimos que una familia f_t es trivial si es equivalente al producto usual de $A[[t]]$.

Observación 3.2.15. Considerando la definición alternativa de deformación dada en la Observación 3.2.10, decimos que dos deformaciones B_1 y B_2, con isomorfismos respectivos $\beta_1 : B_1 \otimes_{k[[t]]} k \longrightarrow A$ y $\beta_2 : B_2 \otimes_{k[[t]]} k \longrightarrow A$, son equivalentes si existe un isomorfismo de $k[[t]]$-álgebras $\Phi_t : B_1 \longrightarrow B_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
B_1 \otimes_{k[[t]]} k \arrow[rr, "\Phi_t \otimes_{k[[t]]} \mathrm{id}_k"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & B_2 \otimes_{k[[t]]} k \arrow[dl, "\beta_2"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Observación 3.2.16. Sea f_t una deformación trivial de A. De la definición se sigue que $\Phi_t(f_t(a,b)) = \Phi_t(a)\Phi_t(b)$. El término de la izquierda es:

$$\Phi_t(f_t(a,b)) = ab + (\phi_1(ab) + F_1(a,b))t + O(t^2),$$

y el término de la derecha es:

$$\Phi_t(a)\Phi_t(b) = ab + (a\phi_1(b) + \phi_1(a)b)t + O(t^2),$$

por lo tanto, igualando los términos lineales obtenemos $F_1(a,b) = \delta_1(\phi_1)(a,b)$; es decir $F_1 = 0$ en $HH^2(A)$.

En general, si f_t es equivalente a g_t, al desarrollar la igualdad $\Phi_t(f_t(a,b)) = g_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b))$ como antes, se deduce que $F_1 = G_1 + \delta_1(\phi_1)$; sin embargo, la recíproca es falsa, un mismo 2-cociclo podría integrarse de dos maneras no equivalentes. Veremos ejemplos mas adelante en la observación 3.2.23

Lema 3.2.17. *Sean f_t y g_t dos deformaciones. Entonces $\Phi_t : A_{g_t} \longrightarrow A_{f_t}$, dada por $\Phi_t := \mathrm{id}_A + \phi_1 t + \phi_2 t^2 + \cdots$, es una equivalencia si y solo si*

$$\sum_{i+j=s} \phi_i(G_j(a,b)) = \sum_{i+j+k=s} F_i(\phi_j(a), \phi_k(b)), \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0, \forall a, b \in A.$$

Demostración. Basta desarrollar la igualdad $\Phi_t(g_t(a,b)) = f_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b))$ y agrupar los términos por potencias de t. □

Proposición 3.2.18. *Sea f_t una familia uniparamétrica de deformaciones de A no trivial, entonces existe $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, y una familia uniparamétrica de deformaciones g_t de A que cumple que $G_1 = \cdots = G_{n-1} = 0$ y G_n es un 2-cociclo no cohomólogo a cero y tal que f_t es equivalente a g_t.*

Demostración. Sea f_t una deformación no trivial de A. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_i = 0$ para $i < n$ y $F_n \neq 0$. Sabemos por el Lema 3.2.11 que F_n es un 2-cociclo. Si F_n no es un coborde, entonces no hay nada que hacer. Si $F_n = \delta_1(\phi)$, consideramos $g_t := \Phi_t^{-1} f_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b))$ donde $\Phi_t = Id_A - t^n\phi$; entonces g_t es equivalente a f_t y además cumple que:

$$\begin{aligned}\Phi_t(g_t(a,b)) &= \Phi_t(ab + G_1(a,b)t + G_2(a,b)t^2 + \cdots) \\ &= ab + G_1(a,b)t + \cdots - t^n(\phi(ab) + \phi(G_1(a,b))t + \phi(G_2(a,b))t^2 + \cdots),\end{aligned}$$

y por el otro lado:

$$\begin{aligned}f_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b)) &= f_t(a - t^n\phi(a), b - t^n\phi(b)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} F_i(a,b)t^i - (\sum_{i=0}^{\infty} F_i(a, \phi(b)) + F_i(\phi(a), b))t^{i+n} + \sum_{i=0}^{\infty}(F_i(\phi(a), \phi(b))t^{i+2n} \\ &= ab + (F_n(a,b) - a\phi(b) - \phi(a)b)t^n + O(t^{n+1}).\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes vemos que $G_i = 0$ para todo $i < n$ y que $G_n(a,b) - \phi(ab) = F_n(a,b) - a\phi(b) - \phi(a)b$, como $\delta_1(\phi) = F_n$ se sigue que $G_n = 0$. Veamos que este procedimiento eventualmente termina.

Supongamos que el procedimiento no termina, entonces tenemos una sucesión de automorfismos $\Psi_k := \Phi_1 \circ \Phi_2 \cdots \circ \Phi_k$ que corresponden a la composición de los automorfismos de los primeros k pasos. Cada coeficiente de esta sucesión eventualmente se estanca, entonces Ψ_k converge en la topología t-ádica a algún $\Psi \in \mathrm{End}_K(A[[t]])$. Además, por construcción se sigue que $\Psi_k^{-1}(f_t(\Psi_k(a), \Psi_k(b))) = ab + G_{n+k}^k(a,b)t^{n+k} + \cdots$, luego, por continuidad obtenemos $\Psi^{-1}(f_t(\Psi(a), \Psi(b))) = ab$, lo cual es absurdo pues f_t no es trivial. □

Corolario 3.2.19. *Si $HH^2(A) = 0$ entonces toda deformación es trivial. En estos casos se dice que A es rígida.*

Observación 3.2.20. Si A es una k-álgebra de dimensión finita y separable, entonces A es rígida.

Veamos ahora la vuelta de la Proposición 3.2.18. Para ello necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.2.21. *Sea ϕ un 1-cociclo de Hochschild. Entonces*

$$\Phi_t := \sum_{i\geq 0} \frac{\phi^i}{i!} t^i,$$

es un automorfismo de $A[[t]]$ con el producto usual. Notaremos con $e^{\phi t}$ a Φ_t.

Demostración. Por el Lema 3.2.17, basta chequear que

$$\frac{\phi^s(ab)}{s!} = \sum_{i+j=s} \frac{\phi^i(a)}{i!}\frac{\phi^j(b)}{j!},$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. Es decir, basta chequear que

$$-\delta_1(\frac{\phi^s}{s!}) = \sum_{\substack{i+j=s\\ i,j>0}} \frac{\phi^i}{i!} \smile \frac{\phi^j}{j!},$$

para todo $s \in \mathbb{N}$.

Como ϕ es un 1-cociclo de Hochschild, entonces la igualdad vale para $s = 1$. Veamos por inducción que vale para todo $s \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
-\delta_1(\frac{\phi^{s+1}}{(s+1)!}) &= \frac{1}{s+1}\delta_1(\phi \circ (-\frac{\phi^s}{s!})) \\
&= \frac{1}{s+1}(\sum_{i+j=s,i,j\geq 0}(\phi \circ (\frac{\phi^i}{i!} \smile \frac{\phi^j}{j!})) - \frac{\phi^s}{s!} \smile \phi - \phi \smile \frac{\phi^s}{s!}) \\
&= \frac{1}{s+1}(\sum_{i+j=s,i,j>0}(\frac{\phi^{i+1}}{i!} \smile \frac{\phi^j}{j!} + \frac{\phi^i}{i!} \smile \frac{\phi^{j+1}}{j!}) - \frac{\phi^s}{s!} \smile \phi - \phi \smile \frac{\phi^s}{s!}) \\
&= \frac{1}{s+1}(\sum_{i=2}^{s-1}(\frac{\phi^i}{(i-1)!} \smile \frac{\phi^{s+1-i}}{(s+1-i)!} + \frac{\phi^i}{i!} \smile \frac{\phi^{s+1-i}}{(s-i)!})+ \\
&\quad + \frac{\phi^s}{(s-1)!} \smile \phi + \phi \smile \frac{\phi^s}{(s-1)!} - \frac{\phi^s}{s!} \smile \phi - \phi \smile \frac{\phi^s}{s!}) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \frac{\phi^i}{i!} \smile \frac{\phi^{s-i}}{(s-i)!}.
\end{aligned}$$

Como queríamos demostrar. □

Proposición 3.2.22. *Sea f_t una deformación trivial de A distinta del producto usual de $A[[t]]$. Sea $i_0 \in \mathbb{N}$ el mínimo de los $i \in \mathbb{N}$ tal que $F_i \neq 0$. Entonces F_{i_0} es un 2-coborde.*

Demostración. Sea $\Phi_t : A[[t]] \longrightarrow A_{f_t}$ la equivalencia. Por el lema 3.2.17, tenemos

$$-\delta_1(\phi_s) = \sum_{\substack{i+j=s\\ i,j>0}} \phi_i \smile \phi_j,$$

para todo $s < i_0$. Sea s_0 el mínimo de los $s \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_s \neq 0$. Entonces $\delta_1(\phi_{s_0}) = 0$.

Consideremos $\Phi'_t := \Phi_t \circ e^{-\phi_{s_0} t^{s_0}}$. Entonces $\Phi'_t : A[[t]] \longrightarrow A_{f_t}$ es una equivalencia y $\phi'_s = 0$ para todo $s \leq s_0$. De esta manera podemos suponer que $\phi_s = 0$ para todo $s < i_0$. Luego, por el Lema 3.2.17 tenemos $-\delta_1(\phi_{i_0}) = F_{i_0}$. □

Observación 3.2.23. Sea f_t una deformación de A no trivial. Por la proposición 3.2.18 existe una deformación g_t equivalente a f_t tal que

$$g_t(a,b) = ab + G_n(a,b)t^n + G_{n+1}t^{n+1} + \cdots,$$

y G_n no es un 2-coborde. Sea $m \in \mathbb{N}$ y consideremos

$$\hat{g}_t(a,b) = ab + G_n(a,b)t^{nm} + G_{n+1}t^{(n+1)m} + \cdots.$$

Es decir, $\hat{g}_t$ se obtiene de g_t *evaluando* en t^m. Por la proposición 3.2.22 resulta que $\hat{g}_t$ es una deformación no trivial. De esta manera a partir de una deformación no trivial podemos obtener otras deformaciones no triviales cuyo primer coeficiente es nulo.

Deformaciones relativas a una subálgebra

El objetivo de esta sección es probar que toda deformación f_t de una k-álgebra con unidad resulta unitaria.

Definición 3.2.24. Sea A una k-álgebra y sea S una subálgebra de A. Una deformación f_t se dice *S-relativa* si $f_t(s,a) = sa$, y $f_t(a,s) = as$, para todo $s \in S$.

Lema 3.2.25. *Sea f_t una deformación S-relativa. Entonces $F_i \in \bar{C}^2(A,S;A)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Debemos ver que para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todos $a, b \in A$, $s \in S$,

1. $F_i(a,b) = 0 \quad$ si a ó $b \in S$,
2. $F_i(as,b) = F_i(a,sb)$,
3. $sF_i(a,b) = F_i(sa,b)$,
4. $F_i(a,bs) = F_i(a,b)s$.

La igualdad (1) es consecuencia directa de la condición $f_t(s,a) = sa$ y $f_t(a,s) = 0$. La segunda igualdad puede obtenerse observando que

$$f_t(as,b) = f_t(f_t(a,s),b) = f_t(a,f_t(s,b)) = f_t(a,sb).$$

Argumentos análogos devuelven (3) y (4). □

Definición 3.2.26. Sean f_t y g_t dos deformaciones S-relativas. Una *equivalencia S-relativa* entre f_t y g_t es una equivalencia usual Φ_t que satisface además $\Phi_t(s) = s \, \forall s \in S$.

Lema 3.2.27. *Sea Φ_t una equivalencia S-relativa entre dos deformaciones S-relativas f_t y g_t. Entonces $\phi_i \in \bar{C}^1(A,S;A)$.*

Demostración. Sea $s \in S$. La condición $\Phi_t(s) = s$ implica directamente que $\phi_i(s) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. □

Teorema 3.2.28. *Sea A una k-álgebra. Sea S una subálgebra separable de A. Entonces toda deformación f_t de A es equivalente a una deformación S-relativa.*

Demostración. Como S es separable, $H^\bullet(A, S; A) = H^\bullet(A, A)$. Además, $H^\bullet(A, S; A)$ puede calcularse utilizando el complejo de cocadenas S-relativas normalizadas $\bar{C}^\bullet(A, S; A)$. Veamos, por inducción en $n \in \mathbb{N}$, que si $F_1, \cdots, F_n \in \bar{C}^2(A, S; A)$, entonces f_t es equivalente a una deformación g_t con $G_i = F_i$ para $i = 1, \cdots, n$, y $G_{n+1} \in \bar{C}^2(A, S; A)$. Como $F_1 \in \operatorname{Ker}(\delta_2)$, existe $\tilde{F}_1 \in \bar{Z}^2(A, S; A)$ y $\phi \in C^1(A, S; A)$ tal que $\tilde{F}_1 - F_1 = \delta_1(\phi)$.

Sea $\Phi_t = \mathrm{id}_A + \phi t$. Entonces si definimos $g_t := \Phi_t^{-1}(f_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b))$ resulta una deformación equivalente a f_t. Luego por el Lema 3.2.17, $G_1 = F_1 + \delta_1\phi = \tilde{F}_1$.

Supongamos ya normalizados $F_1, \cdots, F_{n-1}$. Una simple verificación muestra que si $\alpha \in \bar{C}^r(A, S; A)$ y $\beta \in \bar{C}^s(A, S; A)$, entonces el asociador $\alpha \circ \beta \in \bar{C}^{r+s-1}(A, S; A)$. Luego

$$\delta_2(F_n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} F_i \circ F_j \in \bar{B}^3(A, S; A).$$

Entonces existe $F_n' \in \bar{C}^2(A, S; A)$ tal que $\delta_2(F_n) = \delta_2(F_n')$, y por lo tanto $F_1 - F_1' \in \bar{Z}^2(A, S; A)$.

Sean $F_n'' \in \bar{Z}^2(A, S; A)$ y $\phi \in \bar{C}^1(A, S; A)$ tal que $F_n'' - (F_1 - F_1') = \delta_1(\phi)$.

Sea $\Phi_t = \mathrm{id}_A + t^n F_n$, y sea $g_t := \Phi_t^{-1}(f_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b)))$. Por el lema 3.2.17 obtenemos $G_i = F_i$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$, y $G_n = F_n + \delta_1(\phi) = F_n'' + F_n' \in \bar{C}^2(A, S; A)$.

Finalmente, la composición infinita de las equivalencias de cada paso converge en la topología t-ádica y por lo tanto f_t es equivalente a una deformación con todos sus términos en $\bar{C}^2(A, S; A)$, es decir, es equivalente a una deformación S-relativa. □

Corolario 3.2.29. *Sea A una k-álgebra con unidad. Es evidente que $k \subset A$ es una k-álgebra separable. Aplicando el teorema anterior a $S = k$ deducimos que toda deformación f_t de A es equivalente a una deformación k-relativa, implicando que tiene unidad.*

3.3 Deformaciones de Gerstenhaber de un álgebra de Lie

En esta sección, notaremos con $Z^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ y $B^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ respectivamente a los cociclos y cobordes del complejo $\operatorname{Hom}_k(\wedge^\bullet \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ del Corolario 2.2.19 del capítulo de álgebras de Lie.

Sea $k = \mathbb{C}$. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión n, y sea $[-,-] : V \times V \longrightarrow V$ un morfismo k-lineal. Sea $\{v_1, \cdots, v_n\}$ una k-base de V. Entonces existen $\alpha_{i,j}^r \in k$ tales que $[v_i, v_j] = \sum_k \alpha_{i,j}^r v_r$.

La condición de Jacobi y la antisimetría del corchete se traducen en ecuaciones polinomiales en $\{\alpha_{i,j}^r\}_{i,j,r}$. Luego podemos pensar a las estructuras de álgebras de Lie sobre V como una variedad algebraica en k^{n^3}. Análogamente al caso de las álgebras asociativas, si consideramos una estructura de álgebra de Lie fija sobre V que llamaremos $\mathfrak{g}$, una curva analítica $\gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Lie}$ que en 0 pasa por $\mathfrak{g}$ puede escribirse, en un entorno del 0, como

$$\gamma_t(v, w) = [v, w] + F_1(v, w)t + F_2(v, w)t^2 + \cdots,$$

para ciertas $F_i : \wedge^2 V \longrightarrow V$, donde el corchete $[-,-]$ es el de $\mathfrak{g}$. Vista de esta manera, la condición de Jacobi resulta

$$\sum_{\substack{i+j=s \\ i,j\geq 0}} F_i(F_j(a,b),c) + F_i(F_j(b,c),a) + F_i(F_j(c,a),b) = 0, \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0. \tag{3.3.1}$$

De esta manera obtenemos la asignación

$$\{\text{Gérmenes de curvas analíticas}\} \longrightarrow \{\text{Familias } \{F_i\}_i \text{ que cumplen 3.3.1}\} \ .$$

Por otro lado, podemos pensar a una familia $\{F_i\}$ que cumple 3.3.1 como la estructura de álgebra de Lie sobre las series formales en V con corchete dado por

$$[v,w]_t = [v,w] + F_1(v,w)t + F_2(v,w)t^2 + \cdots, \qquad \forall v,w \in V.$$

Definición 3.3.1. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie. Una familia uniparamétrica de deformaciones de $\mathfrak{g}$ es un corchete de Lie en $\mathfrak{g}[[t]]$ dado por la extensión $k[[t]]$-bilineal de $f_t : \wedge^2\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}[[t]]$ donde

$$f_t(v,w) = [v,w] + F_1(v,w)t + F_2(v,w)t^2 + \cdots,$$

con $F_i : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ k-bilineal y alternada para todo $i \in \mathbb{N}$. Cuando no haya ambigüedad notaremos con $\mathfrak{g}_t$ a $\mathfrak{g}[[t]]$ con el corchete dado por f_t, de lo contrario la notaremos con $\mathfrak{g}_{f_t}$.

Definición 3.3.2. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie. Dos familias de deformaciones f_t y g_t de $\mathfrak{g}$ se dicen equivalentes si existe un isomorfismo de K-álgebras de Lie $\Phi_t : \mathfrak{g}_{f_t} \longrightarrow \mathfrak{g}_{g_t}$, dado por la extensión K-lineal de

$$\Phi_t(a) = a + \phi_1(a)t + \phi_2(a)t^2 + \cdots,$$

donde $\phi_i : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ son k-lineales. Decimos que una familia f_t es trivial si es equivalente al corchete usual de $\mathfrak{g}[[t]]$.

3.3.1 Integrabilidad y obstrucciones

Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea f_t una familia uniparamétrica de deformaciones. La condición de Jacobi es

$$f_t(f_t(a,b),c) + f_t(f_t(b,c),a) + f_t(f_t(c,a),b) = 0,$$

que se traduce en

$$\sum_{\substack{i+j=s \\ i,j\geq 0}} F_i(F_j(a,b),c) + F_i(F_j(b,c),a) + F_i(F_j(c,a),b) = 0, \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0.$$

Despejando los términos correspondientes a $(i,j) = (0,s)$ e $(i,j) = (s,0)$, obtenemos

$$\sum_{\substack{i+j=s \\ i,j>0}} F_i(F_j(a,b),c) + F_i(F_j(b,c),a) + F_i(F_j(c,a),b) = \delta_2(F_s)(a,b,c), \qquad \forall s \in \mathbb{N}_0,$$

donde δ_2 es el diferencial en grado 2 del complejo $\mathrm{Hom}_k(\wedge^\bullet\mathfrak{g},\mathfrak{g})$.

En forma análoga al caso de álgebras asociativas, se deducen las siguientes proposiciones.

Proposición 3.3.3. *Sean* $F_1 \cdots F_{n-1}$ *tales que*

$$\delta_2(F_s)(a,b,c) = \sum_{\substack{i+j=s \\ i,j>0}} F_i(F_j(a,b),c) + F_i(F_j(b,c),a) + F_i(F_j(c,a),b),$$

para $s = 1, \cdots, n-1$, *para todo* $a, b, c \in \mathfrak{g}$. *Sea*

$$G(a,b,c) := \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} F_i(F_j(a,b),c) + F_i(F_j(b,c),a) + F_i(F_j(c,a),b).$$

Entonces $G \in Z^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Proposición 3.3.4. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una* k*-álgebra de Lie y sea* f_t *una deformación no trivial. Entonces existe* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *y una deformación* g_t *tal que* $G_1 = \cdots = G_{n-1} = 0$, G_n *no es un* 2*-coborde y* f_t *es equivalente a* g_t.

Corolario 3.3.5. *Sea* $\mathfrak{g}$ *una* k*-álgebra de Lie semisimple, como* $H^2_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$, *tenemos que toda deformación de* $\mathfrak{g}$ *es trivial. En estos casos se dice que* $\mathfrak{g}$ *es rígida.*

Capítulo 4

El lema del diamante y su aplicación al cálculo de deformaciones

4.1 Lema del diamante de Bergman

El lema del diamante es una herramienta para encontrar bases de módulos dados por generadores y relaciones. En esta sección veremos las definiciones y notaciones necesarias para poder enunciar luego dicho resultado.

A lo largo de esta sección

- k será un anillo conmutativo con unidad,
- si X es un conjunto, $\langle X\rangle$ será el semigrupo con unidad de las palabras en X, $k\langle X\rangle$ la k-álgebra asociativa libre con k-base $\langle X\rangle$.

Definición 4.1.1. Sea X un conjunto. Un *sistema de reducción para* $k\langle X\rangle$ es un conjunto S de pares $\sigma = (W_\sigma, f_\sigma)$, donde $W_\sigma \in \langle X\rangle$ y $f_\sigma \in k\langle X\rangle$.

Sea S un sistema de reducción para $k\langle X\rangle$.

Definición 4.1.2.

1. Para cada $\sigma \in S$, $A, B \in \langle X\rangle$, sea $r_{A\sigma B} : k\langle X\rangle \longrightarrow k\langle X\rangle$ el morfismo definido por $r_{A\sigma B}(AW_\sigma B) = Af_\sigma B$, y que fija el resto de las palabras. Estos morfismos reciben el nombre de *reducciones*.

2. Sea $a \in k\langle X\rangle$. Una reducción $r_{A\sigma B}$ se dice que *actúa trivialmente en* a si el coeficiente de $AW_\sigma B$ de a es cero. Además, a se dice *irreducible* si toda reducción actúa trivialmente en a. Observemos que si un elemento a es irreducible, entonces $r_{A\sigma B}(a) = a$ para todo $A, B \in \langle X\rangle$, $\sigma \in S$. Notaremos con $k\langle X\rangle_{irr}$ al submódulo formado por los elementos irreducibles.

3. Sea $a \in k\langle X\rangle$. Una sucesión finita de reducciones $r_1, \cdots, r_n$ se dice *final en* a si $r_n \circ \cdots \circ r_1(a) \in k\langle X\rangle_{irr}$. El elemento $r_n \circ \cdots \circ r_1(a)$ se llama *imagen de* a *por la sucesión final*.

4. Un elemento $a \in k\langle X\rangle$ se dice *de reducción finita* si para cada sucesión infinita de reducciones $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, r_n actúa trivialmente en $r_{n-1} \circ \cdots \circ r_1(a)$.

5. Un elemento $a \in k\langle X\rangle$ se dice *de reducción única* si es de reducción finita y existe $r_S(a) \in k\langle X\rangle_{irr}$ tal que $r_n \circ \cdots \circ r_1(a) = r_S(a)$ para toda sucesión $r_1, \cdots, r_n$ final en a.

6. Una 5-upla (σ, τ, A, B, C) con $\sigma, \tau \in S$; $A, B, C \in \langle X\rangle - \{1\}$ tal que $W_\sigma = AB$, y $W_\tau = BC$, se llama una *ambigüedad de tipo overlap*, o simplemente un *overlap*. Un overlap (σ, τ, A, B, C) se dice *resoluble* si existen reducciones r y r' tales que $r(f_\sigma C) = r'(Af_\tau)$.

7. Una 5-upla (σ, τ, A, B, C) con $\sigma \neq \tau \in S$; $A, B, C \in \langle X\rangle$ tal que $W_\sigma = B$, y $W_\tau = ABC$, se llama una *ambigüedad de tipo inclusión*, o simplemente un *inclusión*. Un inclusión (σ, τ, A, B, C) se dice *resoluble* si existen reducciones r y r' tales que $r(Af_\sigma B) = r'(f_\tau)$.

8. Un orden parcial $\leqslant$ sobre $\langle X\rangle$ se llama *orden parcial de semigrupo* si para todo $B, B' \in \langle X\rangle$ tal que $B < B'$, vale que $ABC < AB'C$ para todo $A, C \in \langle X\rangle$. Por otro lado, un orden parcial sobre $\langle X\rangle$ tiene la *propiedad de cadena descendente* si toda cadena de monomios $A_1 \geq A_2 \geq \cdots$ eventualmente se estanca.

9. Un orden parcial de semigrupo en $\langle X\rangle$ se dice *compatible* con S si para todo $\sigma \in S$, f_σ es combinación lineal de monomios $A_1, \cdots, A_n \in \langle X\rangle$ con $A_i < W_\sigma$ para todo i.

Teorema 4.1.3. *Sea X un conjunto, sea S un sistema de reducción para $k\langle X\rangle$ y sea $\leqslant$ un orden parcial de semigrupo en $\langle X\rangle$ compatible con S con la propiedad de cadena descendente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) Todas las ambigüedades de S son resolubles.

ii) Todos los elementos de $k\langle X\rangle$ son de reducción única.

iii) La clase de los monomios irreducibles son k-base del módulo $k\langle X\rangle/I$ donde I es el ideal bilátero generado por $W_\sigma - f_\sigma$ para todo $\sigma \in S$.

Una demostración de este resultado puede encontrarse en [Ber].

Observación 4.1.4. Sea $\omega : X \longrightarrow \mathbb{N}$ una función de conjuntos y $\leqslant$ un orden total en X. Podemos definir un orden en $\langle X\rangle$ de la siguiente manera: $x_1 \cdots x_n < y_1 \cdots y_m$ si y solo si $\sum_i \omega(x_i) < \sum_i \omega(y_i)$ ó $\sum_i \omega(x_i) = \sum_i \omega(y_i)$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = y_i$ para $i = 1, \cdots, k-1$ y $x_k < y_k$.

Proposición 4.1.5. *El orden definido en la observación anterior es un orden de semigrupo y, si X es finito, tiene la propiedad de cadena descendente.*

Demostración. Primero extendamos ω a todo $\langle X\rangle$ como $\omega(x_1 \cdots x_n) = \sum_i \omega(x_i)$. Es evidente que de esta manera $\omega(AB) = \omega(A) + \omega(B)$. Veamos que el orden es de semigrupo. Sean $B = b_1 \cdots b_n$ y $B' = b'_1 \cdots b'_m$ tales que $B < B'$, y sean $A = a_1 \cdots a_r$ y $C = c_1 \cdots c_s$.

- Si $\omega(B) < \omega(B')$, entonce $\omega(ABC) = \omega(A) + \omega(B) + \omega(C) < \omega(A) + \omega(B') + \omega(C) = \omega(AB'C)$; y por lo tanto $ABC < AB'C$.

- Si $\omega(B) = \omega(B')$ y $b_i = b'_i$ para $i = 1, \cdots, k-1$ y $b_k < b'_k$, entonces $\omega(ABC) = \omega(AB'C)$ y además

$$(ABC)_i = a_i = (AB'C)_i \quad \text{para todo } i = 1, \cdots, r,$$

$$(ABC)_{r+i} = b_i = b'_i = (AB'C)_{i+r} \quad \text{para todo } i = 1, \cdots, k-1,$$

y $(ABC)_{r+k} = b_k < b'_k = (AB'C)_{r+k}$. Por lo tanto $ABC < AB'C$.

Entonces el orden es de semigrupo.

Por otro lado, si X es finito, para todo $A \in \langle X \rangle$ vale que hay finitos elementos menores o iguales que A, y por lo tanto cumple la propiedad de cadena descendente. □

4.2 Cálculo de deformaciones de las álgebras envolventes de las álgebras de Lie del tipo $\mathfrak{r}_\alpha$

En esta sección aplicaremos el lema del diamante para calcular de forma efectiva una familia de deformaciones de las álgebras envolventes de las álgebras de Lie del tipo $\mathfrak{r}_\alpha$.

Necesitaremos para esto conocer los grupos de cohomología de Hochschild de estas álgebras.

4.2.1 Cohomología de Hochschild de las álgebras envolventes de las álgebras de Lie del tipo $\mathfrak{r}_\alpha$

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_\alpha$ el álgebra de Lie de dimensión 3 con corchete definido por $[x, y] = y$, $[x, z] = \alpha z$ y $[y, z] = 0$. Sea $A(\alpha)$ su álgebra envolvente a la que también llamaremos a veces A cuando no haya confusión.

La cohomología de Hochschild es la cohomología del complejo

$$0 \longleftarrow \wedge^3\mathfrak{g}^*|A \xleftarrow{\delta_2} \wedge^2\mathfrak{g}^*|A \xleftarrow{\delta_1} \mathfrak{g}^*|A \xleftarrow{\delta_0} A \longleftarrow 0$$

cuyos diferenciales son

$$\begin{aligned}
\delta_0(u) &= dx|x \cdot u + dy|y \cdot u + dz|z \cdot u, \\
\delta_1(dx|u_1 + dy|u_2 + dz|u_3) &= dx \wedge dy|(x \cdot u_2 - u_2 - y \cdot u_1) \\
&\quad + dx \wedge dz|(x \cdot u_3 - \alpha u_3 - z \cdot u_1) \\
&\quad + dy \wedge dz|(z \cdot u_2 - y \cdot u_3), \\
\delta_2(dx \wedge dy|v_1 + dx \wedge dz|v_2 + dy \wedge dz|v_3) &= x \cdot v_3 - y \cdot v_2 + z \cdot v_1 - v_3 - \alpha v_3,
\end{aligned}$$

donde la acción es la acción adjunta $g \cdot p = gp - pg$, para $g \in \mathfrak{g}$ y $p \in A(\alpha)$.

En el siguiente lema listamos algunos cálculos útiles.

Lema 4.2.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}^\times$. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_\alpha$ y sean $p, q \in A(\alpha)$. Entonces*

1. $x \cdot x^i y^j z^k = (j + \alpha k) x^i y^j z^k$,
2. $y \cdot p = (p(x-1, y, z) - p(x, y, z))y$.

3. $z \cdot p = (p(x-\alpha, y, z) - p(x, y, z))z$.

Demostración. 1) Primero veamos que $y^j x = xy^j - jy$. El caso $j = 1$ se deduce de las relaciones del álgebra. Para $j \in \mathbb{N}$, $y^{j+1}x = y^j xy - y^{j+1} = xy^{j+1} - jy^{j+1} - y^{j+1} = xy^{j+1} - (j+1)y^{j+1}$.

De manera análoga se puede probar que $z^k x = xz^k - \alpha kz^k$.

Luego $x^i y^j z^k x = x^i y^j xz^k - \alpha kx^i y^j z^k = x^{i+1}y^j z^k - jx^i y^j z^k - \alpha kx^i y^j z^k$. Entonces $x \cdot x^i y^j z^k = (j + \alpha k)x^i y^j z^k$.

2) Veamos que $yx^i = (x-1)^i y$. Para $i = 1$ la igualdad se deduce de las relaciones del álgebra. Para $i \in \mathbb{N}$, $yx^{i+1} = xyx^i - yx^i = x(x-1)^i y - (x-1)^i y = (x-1)^{i+1}y$. Luego $y \cdot x^i y^j z^k = yx^i y^j z^k - x^i y^j z^k y = ((x-1)^i - x^i)y^j z^k y$.

3) La prueba es análoga al caso anterior. □

Lema 4.2.2. *Sea k un cuerpo de característica cero. Sea $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$, y sea $p(x) \in k[x]$ tal que $p(x-\alpha) = p(x)$. Entonces p es constante.*

Demostración. Supongamos que p no es constante. Sea x_0 una raíz en una clausura algebraica, entonces $\{x_0 - i\alpha\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un conjunto infinito de raíces, absurdo. □

Corolario 4.2.3. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}^\times$. Sea $p = \sum \lambda_{i,j,k}x^i y^j z^k \in A(\alpha)$, con $\lambda_{i,j,k} \in \mathbb{C}$, tal que $y \cdot p = 0$ ó $z \cdot p = 0$, entonces $\lambda_{i,j,k} = 0$ para todo $i \neq 0$.*

Demostración. Por el teorema de PBW sabemos que y y z no son divisores de cero. Podemos escribir $p = \sum_{j,k} p_{j,k}y^j z^k$ para ciertos $p_{j,k} \in k[x]$. Si $y \cdot p = 0$, usando las fórmulas del Lema 4.2.1 obtenemos que

$$\sum_{j,k}(p_{j,k}(x-1) - p_{j,k}(x))y^j z^k = 0.$$

Utilizando nuevamente el teorema de PBW, deducimos la igualdad $p_{j,k}(x-1) = p_{j,k}(x)$ y por lo tanto $p_{j,k} \in \mathbb{C}$ para todo $j, k \in \mathbb{N}_0$. □

A continuación describiremos en términos de bases a la cohomología de Hochschild $HH^\bullet(A(\alpha))$.

Cohomología en grado 0: Veamos ahora una descripción de $HH^0(A(\alpha))$.

Proposición 4.2.4. *1. Sea $\alpha \in \mathbb{Q}_{<0}$, $\alpha = -\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$, $(a : b) = 1$. Sea $\Delta := y^a z^b$, entonces $\mathcal{Z}(A(\alpha)) = HH^0(A(\alpha)) = k[\Delta]$.*

2. Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$. Entonces $\mathcal{Z}(A(\alpha)) = HH^0(A(\alpha)) = k$.

Demostración. • 1) Como y y z conmutan, entonces $\Delta^i = y^{ai}z^{bi}$. Sea $p = y^{ai}z^{bi}$ para $i \in \mathbb{N}$. Entonces $x \cdot y^{ai}z^{bi} = (ai + \alpha bi)y^{ai}z^{bi} = 0$. Luego $k[\Delta] \subset HH^0(A(\alpha))$.

Sea $p = \sum \lambda_{i,j,k}x^i y^j z^k$, $p \in HH^0(A(\alpha))$, es decir,

$$x \cdot p = 0, \qquad y \cdot p = 0, \qquad z \cdot p = 0.$$

Como $x \cdot p = 0$, tenemos que $\lambda_{i,j,k}(j + \alpha k) = 0$ para todo $i, j, k \in \mathbb{N}_0$. Entonces $\lambda_{i,j,k} = 0$ para todo (j, k) tal que $\frac{j}{k} \neq \frac{a}{b}$. Resumiendo, los términos de p con $\lambda_{i,j,k} \neq 0$

se escriben como $\lambda_{i,j,k}x^iy^{ar}z^{br} = \lambda_{i,j,k}x^i\Delta^r$ donde r es tal que $j = ra$ y $k = rb$. De esta manera obtenemos que existen $p_i \in k[x]$ tales que $p = \sum_i p_i\Delta^i$.

Por otro lado $0 = y \cdot p = \sum_i (p_i(x-1) - p_i(x))\Delta^i$. Por el teorema de PBW obtenemos que $p_i(x-1) - p_i(x) = 0$ y por lo tanto $p_i \in k$. Entonces $p \in k[\Delta]$.

- 2) Sea $p \in HH^0(A(\alpha))$. En este caso $x \cdot p = 0$ implica $p \in k[x]$ ya que $j + \alpha k = 0$ si y solo si $j = k = 0$. Luego, la igualdad $y \cdot p = 0$ se traduce en $p(x-1) = p(x)$ y por lo tanto $p \in k$.

$\square$

Cohomología en grado 1: Veamos ahora una descripción de $HH^1(A(\alpha))$.

Primero probaremos algunos resultados preliminares.

Lema 4.2.5. *Sea $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, entonces $f : k[x] \longrightarrow k[x]$ definida por $f(p) = p(x-\lambda) - p(x)$ es sobreyectiva.*

Demostración. f es k-lineal. Por otro lado, $f(x^i) = (x-\lambda)^i - x^i = i\lambda x^{i-1} + \cdots$. Por lo tanto, para $n \in \mathbb{N}$, $f|_{k_n[x]} : k_n[x] \longrightarrow k_{n-1}[x]$ envía el conjunto $\{x^i\}_{i=1}^n$ a un conjunto de n polinomios de distintos grados que por lo tanto resulta una base. Luego $f|_{k_n[x]} : k_n[x] \longrightarrow k_{n-1}[x]$ es sobreyectiva para todo n y entonces f resulta sobreyectiva. $\square$

Corolario 4.2.6. *Sea $\alpha \neq 0$. Entonces $\operatorname{Im}(y \cdot (-)) = A(\alpha)y$, $\operatorname{Im}(z \cdot (-)) = A(\alpha)z$.*

Demostración. El resultado se sigue del Lema 4.2.5 y de las fórmulas del Lema 4.2.1 $\square$

Lema 4.2.7. *Sean $\varphi, \psi, \theta : A(\alpha) \longrightarrow A(\alpha)$ los morfismos definidos por $\varphi(u) = x \cdot u - u$, $\psi(u) = x \cdot u - \alpha u$, $\theta(u) = x \cdot u - (1+\alpha)u$.*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ y $\alpha \neq 1$ entonces $\operatorname{Ker}\varphi = k[x]y$, $\operatorname{Ker}\psi = k[x]z$, $\operatorname{Ker}\theta = k[x]yz$.*

2. *Si $\alpha = 1$ entonces $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi = k[x]y \oplus k[x]z$, $\operatorname{Ker}\theta = k[x]y^2 \oplus k[x]yz \oplus k[x]z^2$.*

3. *Si $\alpha \in \mathbb{Q}_{<0}$, $\alpha = -\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$ entonces $\operatorname{Ker}\varphi$ es el subespacio vectorial generado por $\{x^iy^{ak+1}z^{kb} : i, k \in \mathbb{N}_0\}$ y $\operatorname{Ker}\psi$ es el subespacio vectorial generado por $\{x^iy^{ka}z^{kb+1} : i, k \in \mathbb{N}_0\}$.*

   Para $\alpha \neq -1$, $\operatorname{Ker}\theta$ es el subespacio vectorial generado por $\{x^iy^{ak+1}z^{bk+1} : i, k \in \mathbb{N}_0\}$ mientras que para $\alpha = -1$, $\operatorname{Ker}\theta$ está generado por $\{x^iy^kz^k : i, k \in \mathbb{N}_0\}$.

4. *Para todo $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, φ, ψ, θ los morfismos tienen como base de autovectores a los monomios ordenados $\{x^iy^jz^k\}_{i,j,k \in \mathbb{N}_0}$. En particular las imágenes de los morfismos φ, ψ y θ están generadas por los monomios de autovalor no nulo, y además $A(\alpha) = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi \oplus \operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\theta \oplus \operatorname{Im}\theta$.*

5. *Sean $P : A(\alpha) \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi$, $Q : A(\alpha) \longrightarrow \operatorname{Ker}\psi$, $R : A(\alpha) \longrightarrow \operatorname{Ker}\theta$ las proyecciones ortogonales. Entonces $0 = P \circ \varphi = Q \circ \psi = R \circ \theta$.*

Demostración. De las fórmulas del Lema 4.2.1 se deduce fácilmente (4). Los ítems (1), (2) y (3) se obtienen de calcular para cada $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ los autoespacios asociados al autovalor 0. $\square$

Usando los resultados anteriores, describamos ahora la cohomología de Hochschild en grado 1.

Proposición 4.2.8. *1. Sea $\alpha \in \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{Q}_{<0}$, $\alpha \neq 1$. Entonces $HH^1(A(\alpha))$ tiene como base el conjunto formado por las clases de los elementos*

$$dx|1, \qquad\qquad dz|z.$$

2. Sea $\alpha = 1$. Entonces $HH^1(A(\alpha))$ tiene como base el conjunto formado por las clases de los elementos

$$dx|1, \qquad dy|z, \qquad\qquad dz|y, \qquad dz|z.$$

3. Sea $\alpha \in \mathbb{Q}_{<0}$. Entonces $HH^1(A(\alpha))$ tiene como base el conjunto formado por las clases de los elementos

$$dx|\Delta^i, \quad i \in \mathbb{N}_0, \qquad\qquad dz|y^{ak}z^{bk+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

donde $\Delta = y^a z^b$ con $\alpha = -\frac{a}{b}$, $(a:b) = 1$, $a, b \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $HH^1(A(\alpha))$, como módulo sobre $k[\Delta]$ es libre y una base está dada por el conjunto formado por las clases de los elementos

$$dx|1, \qquad\qquad dz|z.$$

Demostración. • 1) Es claro que tanto $dx|1$ como $dz|z$ son elementos de $\operatorname{Ker}\delta_1$ y es fácil verificar que sus clases son linealmente independientes.

Sea $f := dx|u_1 + dy|u_2 + dz|u_3 \in \operatorname{Ker}\delta_1$. Esto nos brinda las siguientes igualdades

$$0 = x \cdot u_2 - u_2 - y \cdot u_1, \tag{4.2.1}$$
$$0 = x \cdot u_3 - \alpha u_3 - z \cdot u_1, \tag{4.2.2}$$
$$0 = z \cdot u_2 - y \cdot u_3. \tag{4.2.3}$$

Como en este caso el morfismo $x \cdot (-)$ tiene imagen $Ay + Az$, podemos suponer, reduciendo módulo bordes, que $u_1 \in k[x]$.

De la igualdad (4.2.1) deducimos que $x \cdot u_2 - u_2 = y \cdot u_1$. Por otro lado, por el Lema 4.2.7, $P(x \cdot u_2 - u_2) = 0$. Entonces como $y \cdot u_1 \in k[x]y$,

$$y \cdot u_1 = P(y \cdot u_1) = P(x \cdot u_2 - u_2) = 0,$$

y por lo tanto

$$x \cdot u_2 - u_2 = 0.$$

Entonces por el Lema 4.2.2, sabemos que $u_1 = \lambda \in \mathbb{C}$ y por el Lema 4.2.7, obtenemos que $u_2 \in k[x]y$.

Por otro lado, de la igualdad (4.2.2) podemos deducir en forma análoga a la cuenta anterior que $u_3 \in k[x]z$.

Como $u_2 = \sum \lambda_i x^i y$, por el Lema 4.2.5 existe $q \in k[x]$ tal que $y{\cdot}q = (q(x-1)-q(x))y = u_2$, que además cumple $x{\cdot}q = 0$, y entonces $f-\delta_0(q) = dx|\lambda+dz|(u_3-z{\cdot}q)$. Observemos que $u_3 - z \cdot q \in k[x]z$.

Finalmente, como $f-\delta_0(q) \in \operatorname{Ker}\delta_1$, de la igualdad (4.2.3) obtenemos $y\cdot(u_3-z\cdot q) = 0$ y por el Corolario 4.2.3, $u_3 - z \cdot q = \mu z$ resulta que $f - \delta_0(q) = \lambda dx|1 + \mu dz|z$.

- 2) Como en el caso anterior, $\operatorname{Im}(x \cdot (-)) = Ay + Az$, y por lo tanto podemos reducir la prueba al caso en el que $u_1 \in k[x]$.

  Por la igualdad (4.2.1), tenemos que $x\cdot u_2 - u_2 = y \cdot u_1$ y análogamente al caso anterior deducimos que $y \cdot u_1 = 0$ y $x \cdot u_2 - u_2 = 0$. Por el Lema 4.2.2 sabemos que $u_1 = \lambda \in \mathbb{C}$, y que $u_2 = u_2^1 + u_2^2 \in k[x]y \oplus k[x]z$. De manera similar obtenemos $u_3 = u_3^1 + u_3^2 \in k[x]y \oplus k[x]z$. Por el Lema 4.2.5 existe $q \in k[x]$ tal que $y \cdot q = (q(x-1) - q(x)) = u_2^1$, como también $x \cdot q = 0$ deducimos que $f - \delta_0(q) = dx|\lambda + dy|u_2^2 + dz|(u_3^1 + u_3^2)$.

  Finalmente como $f-\delta_0(q) \in \operatorname{Ker}\delta_1$, la igualdad (4.2.3) dice que $z\cdot u_2^2 - y\cdot u_3^1 - y \cdot u_3^2 = 0$. Además, $z\cdot u_2^2 \in k[x]z^2$, $y\cdot u_3^1 \in k[x]y^2$ y $y\cdot u_3^2 \in k[x]yz$. Por lo tanto, por el teorema de PBW obtenemos que cada término es nulo y entonces por el Corolario 4.2.3, $u_2^2 = \mu_1 z$, $u_3^1 = \mu_2 y$, $u_3^2 = \mu_3 z$ para $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$.

  Resumiendo, $f - \delta_0(q) = \lambda dx|1 + \mu_1 dy|z + \mu_2 dz|y + \mu_3 dz|z$. Entonces las clases de estos elementos generan $HH^1(A(1))$. Se puede verificar fácilmente que el conjunto $\{dx|1, dy|z, dz|y, dz|z\}$ es linealmente independiente.

- 3) Sea V el subespacio generado por los monomios $\{x^i y^j z^k : j + \alpha k = 0\} = \{x^i y^{ak} z^{bk} : i,k \in \mathbb{N}_0\} = \{x^i \Delta^k : i,k \in \mathbb{N}_0\}$. Aquí $\operatorname{Im}(x \cdot (-)) = \{x^i y^j z^k : j + \alpha k \neq 0\}$. Por lo tanto podemos reducir módulo bordes, al caso $u_1 \in V$.

  Observemos que si $x^i y^j z^k$ es tal que $j + \alpha k = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot (x^i y^j z^k)) = x \cdot (((x-1)^i - x^i) y^{j+1} z^k) &= (j+1+\alpha k)(x-1)^i - x^i) y^{j+1} z^k) \\ &= ((x-1)^i - x^i) y^{j+1} z^k) \\ &= y \cdot (x^i y^j z^k). \end{aligned}$$

  Por lo tanto para todo $u \in V$, $y \cdot u$ pertenece al núcleo del morfismo φ definido en el Lema 4.2.7

  De forma análoga, para todo $u \in V$, $z \cdot u$ pertenece al núcleo del morfismo ψ del Lema 4.2.7

  De la igualdad (4.2.1) deducimos que $x \cdot u_2 - u_2 = y \cdot u_1$. Por el Lema 4.2.7

$$y \cdot u_1 = P(y \cdot u_1) = P(x \cdot u_2 - u_2) = 0.$$

  y por lo tanto
$$\varphi(u_2) = x \cdot u_2 - u_2 = 0.$$

Por el Corolario 4.2.3 obtenemos que existen $\eta_i \in \mathbb{C}$ tales que

$$u_1 = \sum_i \eta_i \Delta^i \quad \in k[\Delta]$$

y por el Lema 4.2.7 existen $\lambda_{i,k} \in \mathbb{C}$ tales que

$$u_2 = \sum_{i,k \in \mathbb{N}_0} \lambda_{i,k} x^i y^{ak+1} z^{bk}.$$

La igualdad (4.2.2) nos dice que $x \cdot u_3 - \alpha u_3 = z \cdot u_1$.

Dado $i \in \mathbb{N}_0$, sea $q_i \in k[x]$ tal que $q_i(x-1) - q_i(x) = x^i$. Sea

$$u := \sum_{i,k \in \mathbb{N}_0} \lambda_{i,k} q_i y^{ka} z^{kb},$$

entonces $y \cdot u = u_2$. Además $x \cdot u = \sum \lambda_{i,k}(ak + \alpha bk) q_i y^{ak} z^{bk} = 0$ y por lo tanto

$$f - \delta_0(u) = dx|u_1 + dz|(u_3 - z \cdot u).$$

Sea $\hat{u}_3 = u_3 - z \cdot u$. Como $f - \delta_0(u) \in \operatorname{Ker} \delta_1$, de la igualdad (4.2.2) deducimos que $x \cdot \hat{u}_3 - \alpha \hat{u}_3 = z \cdot u_1 = 0$ pues $u_1 \in k[\Delta]$. Entonces por el Lema 4.2.7 existen $\mu_{i,k} \in \mathbb{C}$ tales que

$$\hat{u}_3 = \sum_{i,k \in \mathbb{N}_0} \mu_{i,k} x^i y^{ak} z^{bk+1}.$$

Finalmente, como $f - \delta_0(u) \in \operatorname{Ker} \delta_1$, $y \cdot \hat{u}_3 = 0$. Por el Corolario 4.2.3 deducimos

$$u_3 = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mu_{0,k} y^{ak} z^{bk+1}.$$

Resumiendo, obtuvimos

$$f - \delta_0(u) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \eta_i dx|\Delta^i + \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mu_{0,k} dz|y^{ak} z^{bk+1}.$$

Es decir, las clases de los elementos $dx|\Delta^i$ y $dz|y^{ak}z^{bk+1}$ con $i, k \in \mathbb{N}_0$ son generadores de $HH^1(A(\alpha))$. Además se puede verificar facilmente que son linealmente independientes.

□

Cohomología en grado 2: Veamos ahora una descripción de $HH^2(A(\alpha))$.

Proposición 4.2.9. *1. Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$, $\alpha \neq 1$. Entonces $HH^2(A(\alpha))$ tiene como base el conjunto formado por la clase del elemento*

$$dx \wedge dz|z.$$

2. *Sea $\alpha = 1$. Entonces $HH^2(A(\alpha))$ tiene como base el conjunto formado por las clases de los elementos*

$$dx \wedge dy|z, \qquad dx \wedge dz|y, \qquad dx \wedge dz|z.$$

3. *Sea $\alpha \in \mathbb{Q}_{<0} \setminus \{-1\}$. Entonces $HH^2(A(\alpha))$ tiene como base el conjunto formado por las clases de los elementos*

$$dx \wedge dz|y^{ak}z^{bk+1} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Por lo tanto, como módulo sobre $k[\Delta]$, es libre y una base está dada por la clase del elemento

$$dx \wedge dz|z$$

4. *Sea $\alpha = -1$. Entonces $HH^2(A(\alpha))$ tiene como base el conjunto formado por las clases de los elementos*

$$dx \wedge dz|y^k z^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \qquad dy \wedge dz|x^i, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración.

- 1) Sea $h = dx \wedge dy|v_1 + dx \wedge dz|v_2 + dy \wedge dz|v_3 \in \operatorname{Ker} \delta_2$, es decir,

$$z \cdot v_1 - y \cdot v_2 = x \cdot v_3 - (1+\alpha)v_3.$$

Por el Lema 4.2.7, $\operatorname{Im}(\varphi) = \langle \{x^i y^j z^k : (j,k) \neq (1,0)\} \rangle$ y por el Corolario 4.2.6, sabemos que $\operatorname{Im}(y \cdot (-)) = A(\alpha)y$. Entonces $\operatorname{Im}(\varphi) + \operatorname{Im}(y \cdot (-)) = A(\alpha)$ y luego podemos suponer, reduciendo módulo bordes, que $v_1 = 0$. Además, nuevamente por el Lema 4.2.7 $\operatorname{Im}(\psi) = \langle \{x^i y^j z^k : (j,k) \neq (0,1)\} \rangle$ y por lo tanto podemos reducir al caso $v_2 \in k[x]z$. Asi, la condición $h \in \operatorname{Ker} \delta_2$ resulta

$$-y \cdot v_2 = x \cdot v_3 - (1+\alpha)v_3 = \theta(v_3).$$

Como $y \cdot v_2 \in k[x]yz = \operatorname{Ker} \theta$, tenemos que

$$\theta(v_3) = -y \cdot v_2 = R(-y \cdot v_2) = R(\theta(v_3)) = 0.$$

Por lo tanto $v_2 = \lambda z$ y $v_3 \in k[x]yz$. Sea $p \in k[x]$ tal que $v_3 = pyz$ y sea $q \in k[x]$ tal que $q(x-1) - q(x) = p$. Entonces $f - \delta_1(dy|qy) = dx \wedge dz|v_2 = \lambda dx \wedge dz|z$. Por otro lado es fácil verificar que $dx \wedge dz|z$ no es cero en $HH^2(A(\alpha))$.

- 2) Por el Lema 4.2.7, $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Im}(\psi) = \langle \{x^i y^j z^k : (j,k) \neq (1,0), (j,k) \neq (0,1)\} \rangle$ y como $\operatorname{Im}(y \cdot (-)) = Ay$, podemos suponer , reduciendo módulo bordes, $v_1 \in k[x]z$ y $v_2 = v_2^1 + v_2^2 \in k[x]y \oplus k[x]z$.

  Luego como $h \in \operatorname{Ker} \delta_2$, tenemos la igualdad

$$z \cdot v_1 - y \cdot v_2^1 - y \cdot v_2^2 = x \cdot v_3 - (1+\alpha)v_3 = \theta(v_3)$$

El término de la izquierda pertenece a $k[x]z^2 \oplus k[x]yz \oplus k[x]y^2 = \operatorname{Ker}\theta$. Entonces por el Lema 4.2.7

$$\theta(v_3) = z \cdot v_1 - y \cdot v_2^1 - y \cdot v_2^2 = R(z \cdot v_1 - y \cdot v_2^1 - y \cdot v_2^2) = R(\theta(v_3)) = 0.$$

El teorema de PBW implica que $z \cdot v_1 = y \cdot v_2^1 = y \cdot v_2^2 = 0$. Por lo tanto existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ tales que $v_1 = \lambda_1 z$, $v_2^1 = \lambda_2 y$, $v_2^2 = \lambda_3 z$.

Por otro lado, como $v_3 \in \operatorname{Ker}\theta = k[x]y^2 \oplus k[x]yz \oplus k[x]z^2$, existen $p_1, p_2, p_3 \in k[x]$ tales que $v_3 = p_1 y^2 + p_2 yz + p_3 z^2$. Sean $q_1, q_2, q_3 \in k[x]$ tales que $q_i(x-1) - q_i(x) = p_i$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces $\delta_1(dy|(q_2 y + q_3 z) - dz|q_1 y) = dy \wedge dz|v_3$.

Resumiendo, obtuvimos la igualdad

$$h - \delta_1(dy|(q_2 y + q_3 z) - dz|q_1 y) = \lambda_1 dx \wedge dy|z + \lambda_2 dx \wedge dz|y + \lambda_3 dx \wedge dz|z.$$

- 3) y 4) En estos casos $\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Im}(y \cdot (-)) = A(\alpha)$. Entonces podemos suponer $v_1 = 0$. Por otro lado, $\operatorname{Im}(\psi) = \langle \{x^i y^j z^k : (j,k) \neq (ar, br+1) \forall r \in \mathbb{N}_0\} \rangle$. Podemos reducir al caso $v_2 \in \langle \{x^i y^{ar} z^{br+1} : i, r \in \mathbb{N}_0\} \rangle = \operatorname{Ker}\psi$.

  Como $h \in \operatorname{Ker}\delta_2$, tenemos la igualdad

  $$-y \cdot v_2 = x \cdot v_3 - (1+\alpha)v_3 = \theta(v_3).$$

  Análogamente a los casos anteriores deducimos $y \cdot v_2 = 0$ y $\theta(v_3) = 0$. Luego, por el Corolario 4.2.3 existen $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tales que $v_2 = \sum_k \lambda_k y^{ak} z^{bk+1}$;

  - Si $\alpha \neq -1$, como $v_3 \in \operatorname{Ker}\theta$, por el lema 4.2.7 obtenemos que existen $p_i \in k[x]$ tales que $v_3 = \sum_i p_i y^{ai+1} z^{bi+1}$.
    Dado $i \in \mathbb{N}_0$, sea $q_i \in k[x]$ tal que $q_i(x-1) - q_i(x) = -p_i$. Entonces

    $$\delta_1(dz|\sum_i q_i y^{ai} z^{bi+1}) = dy \wedge dz|v_3.$$

    Luego $f - \delta_1(dz|\sum_i q_i y^{ai} z^{bi+1}) = dx \wedge dz|v_2 = \sum_k \lambda_k dx \wedge dz|y^{ak} z^{bk+1}$.
  - Si $\alpha = -1$, entonces $a = b = 1$. Como $v_3 \in \operatorname{Ker}\theta$, el Lema 4.2.7 nos dice en este caso que existen $p_i \in k[x]$ tales que $v_3 = \sum_i p_i y^i z^i$.
    Dado $i \in \mathbb{N}_0$, sea $q_i \in k[x]$ tal que $q_i(x-1) - q_i(x) = -p_{i+1}$. Entonces

    $$\delta_1(dz|\sum_{i \in \mathbb{N}_0} q_i y^i z^{i+1}) = dy \wedge dz|(\sum_i p_{i+1} y^{i+1} z^{i+1}) = dy \wedge dz|(v_3 - p_0).$$

    Luego si escribimos $p_0 = \sum_k \mu_k x^k$, obtenemos

    $$f - \delta_1(dz|\sum_i q_i y^i z^{i+1}) = \sum_k \lambda_k dx \wedge dz|y^k z^{k+1} + \sum_k \mu_k dy \wedge dz|x^k.$$

□

Corolario 4.2.10. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}^\times$.*

1. *Si $\alpha \notin \mathbb{Q}_{<0}$ entonces $HH^2(A(\alpha)) = H^2_{Lie}(\mathfrak{r}_\alpha, \mathfrak{r}_\alpha)$.*
2. *Si $\alpha \in \mathbb{Q}_{<0}$, $\alpha \neq -1$ entonces $HH^2(A(\alpha)) = k[\Delta]H^2_{Lie}(\mathfrak{r}_\alpha, \mathfrak{r}_\alpha)$.*

Cohomología en grado 3: Para finalizar, veamos una descripción de $HH^3(A(\alpha))$.

Proposición 4.2.11. *1. Sea $\alpha \in \mathbb{C}^\times \setminus \{-1\}$. Entonces $HH^3(A(\alpha)) = 0$.*

2. Sea $\alpha = -1$. Entonces $HH^3(A(\alpha))$ tiene como base el conjunto formado por las clases de los elementos

$$dx \wedge dy \wedge dz \otimes x^i, \qquad i \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Para $\alpha \neq -1$, observemos que $\mathrm{Im}(y \cdot (-)) = A(\alpha)y$, $\mathrm{Im}(z \cdot (-)) = A(\alpha)z$ e $\mathrm{Im}(\theta) \supseteq k[x]$. Como

$$\delta_2(dx \wedge dy|v_1 + dx \wedge dz|v_2 + dy \wedge dz|v_3) = \theta(v_3) - y \cdot v_2 + z \cdot v_1,$$

y concluimos entonces que δ_2 es sobreyectiva.

Para $\alpha = -1$, $k[x] \subset \mathrm{Ker}\,(\theta)$ y como $\mathrm{Ker}\,(\theta) \cap \mathrm{Im}(\theta) = 0$, obtenemos que $\mathrm{Im}(\theta) \subset A(\alpha)y + A(\alpha)z$, entonces $\mathrm{Im}(\delta_2) = A(\alpha)y + A(\alpha)z$ y por lo tanto $HH^3(A(\alpha)) = k[x]$. $\square$

4.2.2 Morfismos de comparación

Si bien en la sección anterior calculamos los grupos de cohomología de Hochschild, estos quedaron presentados como clases de morfismos $\varphi : \wedge^n \mathfrak{g} \longrightarrow A$ k-lineales. Para realizar cálculos relacionados con las deformaciones vamos a necesitar presentarlos como clases de morfismos k-lineales $\varphi : A^{\otimes n} \longrightarrow A$.

Para ello consideremos las siguientes sucesiones exactas, donde $\mathfrak{g}$ es una k-álgebra de Lie del tipo $\mathfrak{r}_\alpha$ y A es su álgebra envolvente.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A|\wedge^3 \mathfrak{g}|A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A|\wedge^2 \mathfrak{g}|A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A|\mathfrak{g}|A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A^e \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & A|A^{\otimes 3}|A \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A|A^{\otimes 2}|A \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A|A|A \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A^e \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Los morfismos de complejos φ y η existen pues se obtienen como levantados de la identidad. Las composiciones $\varphi \circ \eta$ y $\eta \circ \varphi$ son homotópicas a las respectivas identidades por ser levantados de la identidad.

Al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ y los isomorfismos naturales obtenemos

$$\begin{tikzcd}
0 & \mathrm{Hom}_k(\wedge^3\mathfrak{g}, A) \arrow[l] \arrow[d, shift left, "\eta^*"] & \mathrm{Hom}_k(\wedge^2\mathfrak{g}, A) \arrow[l] \arrow[d, shift left, "\eta^*"] & \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, A) \arrow[l] \arrow[d, shift left, "\eta^*"] & A \arrow[l] \arrow[d, shift left, "\eta^*"] & 0 \arrow[l] \\
\cdots & \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes 3}, A) \arrow[l] \arrow[u, shift left, "\varphi^*"] & \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes 2}, A) \arrow[l] \arrow[u, shift left, "\varphi^*"] & \mathrm{Hom}_k(A, A) \arrow[l] \arrow[u, shift left, "\varphi^*"] & A \arrow[l] \arrow[u, shift left, "\varphi^*"] & 0. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Donde φ^* y η^* inducen isomorfismos a nivel de la cohomología.

Por lo tanto, conocer los morfismos φ y η nos permitirá poder pasar de los grupos de cohomología calculados con la resolución de Chevalley-Eilenberg a los grupos de cohomología calculados con la resolución Bar.

La expresión del morfismo φ es sencilla y se trata de la inclusión

$$\varphi(1|x_1 \wedge \cdots \wedge x_n|1) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma 1|x_{\sigma(1)}|\cdots|x_{\sigma(n)}|1.$$

La expresión del morfismo η es en general mas complicada y la conocemos sólo en grados 1 y 2. En grado 1

$$\eta(1|x^iy^jz^k|1) = \sum_{a+b=i-1} x^a|x|x^by^jz^k + \sum_{a+b=j-1} x^iy^a|y|y^bz^k + \sum_{a+b=k-1} x^iy^jz^a|z|z^b.$$

Para la expresión de η en grado 2, consideremos en $k\langle x,y,z\rangle$ el sistema de reducción

$$S := \{(yx, xy-y), (zy, yz), (zx, xz-\alpha z)\}.$$

Llamemos respectivamente σ_1, σ_2 y σ_3 a los elementos de S. Observemos que

$$k\langle x,y,z\rangle/\langle W_\sigma - f_\sigma\rangle_{\sigma\in S} = A.$$

Por el teorema de PBW los monomios ordenados son una k-base. Como los monomios ordenados resultan ser exactamente los irreducibles, el lema del diamante asegura que todos los elementos de $k\langle X\rangle$ son de reducción única.

Sea $s : S \longrightarrow \wedge^2\mathfrak{g}$ la función

- $s(\sigma_1) = dx \wedge dy,$
- $s(\sigma_2) = dy \wedge dz,$
- $s(\sigma_3) = dx \wedge dz.$

Luego, η en grado 2 puede definirse recursivamente de la siguiente manera

$$\eta(1|x^iy^jz^k|x^ay^bz^c|1) = A|s(\sigma)|B + \eta(1|A|f_\sigma B|1),$$

donde $AW_\sigma B = x^iy^jz^kx^ay^bz^c$, y B no contiene como submonomio a W_τ para ningún $\tau \in S$. Observemos que esta recursión efectivamente termina pues todos los elementos de A son de reducción única.

Intuitivamente, η en grado 2 es un *historial* de las reducciones que hay que hacer para ordenar un producto.

4.2.3 Cálculo de deformaciones

Contando con los datos calculados en la secciones anteriores, estamos en condiciones de pasar al cálculo de las deformaciones.

Corolario 4.2.12. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}^\times\setminus\{-1\}$. Entonces todo elemento de $HH^2(A(\alpha))$ es integrable.*

Demostración. El resultado se obtiene de observar que $HH^3(A(\alpha)) = 0$ para $\alpha \in \mathbb{C}^\times \setminus \{-1\}$. □

Ahora daremos deformaciones explícitas para cada 2-cociclo en cada uno de los distintos casos de α.

Proposición 4.2.13. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{Q}_{<0}$, $\alpha \neq 1$. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y definamos*

$$B := k[t]\langle x,y,z\rangle/\langle xy-yx-y, yz-zy, xz-zx-(\alpha+t\lambda)z\rangle.$$

Entonces la completación t-ádica $\hat{B}$ de B es una deformación de $A(\alpha)$ con

$$\varphi^*(F_1) = \lambda dx \wedge dz|z.$$

Demostración. Afirmamos que los monomios $x^iy^jz^k$ con $i,j,k\geq 0$ forman una $k[t]$-base de B. Para ello tomamos el sistema de reducción S sobre $k[t]\langle x,y,z\rangle$ dado por

$$S=\{(yx,xy-y),(zy,yz),(zx,xz-(\alpha+t\lambda)z)\}.$$

Llamaremos respectivamente σ_1,σ_2 y σ_3 a los elementos de S.

Consideramos el orden en los monomios inducido por la función $\omega(x)=\omega(y)=\omega(z)=1$ y $x<y<z$. Es claro que este orden es compatible con S y por la Proposición 4.1.5, tiene la propiedad de cadena descendente por ser monomios en una cantidad finita de letras.

Veamos que las ambigüedades se resuelven. La única ambigüedad que se presenta es el overlap $(\sigma_2,\sigma_1,z,y,x)$. Entonces, utilizando una notación evidente, tenemos las siguientes sucesiones de reducciones:

$$\begin{aligned}zyx=(zy)x\mapsto(yz)x=y(zx)\mapsto y(xz-(\alpha+t\lambda)z)=\\=yxz-(\alpha+t\lambda)yz\mapsto xyz-(1+\alpha+t\lambda)yz.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}zyx=z(yx)\mapsto z(xy-y)=zxy-zy\mapsto xzy-yz\mapsto(xz-(\alpha+t\lambda)z)y-yz=\\=xzy-(\alpha+t\lambda)zy-yz\mapsto xyz-(\alpha+t\lambda+1)yz.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la única ambigüedad se resuelve y en consecuencia obtenemos el resultado deseado. Dichos monomios irreducibles son los monomios ordenados $x^iy^jz^k$ ya que son los que no contienen como submonomios a $W_{\sigma_1},W_{\sigma_2}$ ni a W_{σ_3}.

Luego, el morfismo

$$\psi:A(\alpha)\longrightarrow B\otimes_{k[t]}k,$$

definido por $\psi(x^iy^jz^k)=x^iy^jz^k\otimes 1$ es un isomorfismo de k-espacios vectoriales. Mas aún, resulta un isomorfismo de k-álgebras pues al establecer $t=0$ en las relaciones de B obtenemos las relaciones de $A(\alpha)$.

Por otro lado, el hecho de que los monomios $x^iy^jz^k$ sean una $k[t]$-base de B implica que B es libre de torsión.

Entonces consideramos la completación t-ádica $\hat{B}$ de B, la cual cumple

$$\hat{B}\otimes_{k[[t]]}k\cong B\otimes_{k[t]}k,$$

como k-álgebras, y es un $k[[t]]$-módulo libre de torsión. De estas observaciones obtenemos que $\hat{B}$ consiste de series en t con coeficientes en $\hat{B}\otimes_{k[[t]]}k\cong A(\alpha)$, cuyo producto f_t cumple

- $f_t(y,x)=xy-y$,
- $f_t(z,x)=xz-\alpha z-\lambda zt$,
- $f_t(z,y)=yz$,
- $f_t(x,y)=xy$,
- $f_t(x,z)=xz$,
- $f_t(y,z)=yz$.

Entonces $F_1(y,x)=F_1(x,y)=F_1(x,z)=F_1(z,y)=F_1(y,z)=0$, y $F_1(z,x)=-\lambda z$. Finalmente, $\varphi^*(F_1)=\lambda dx\wedge dz|z$. □

Proposición 4.2.14. *Sea $\alpha = 1$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ y definamos*

$$B := k[t]\langle x, y, z\rangle / \langle xy - yx - y - \lambda_1 zt, yz - zy, xz - zx - z - (\lambda_2 y + \lambda_3 z)t\rangle.$$

Entonces la completación t-ádica $\hat{B}$ de B es una deformación de $A(1)$ con

$$\varphi^*(F_1) = \lambda_1 dx \wedge dy|z + \lambda_2 dx \wedge dz|y + \lambda_3 dx \wedge dz|z.$$

Demostración. Nuevamente afirmamos que los monomios $x^i y^j z^k$ son una $k[t]$-base de B. Para ello, sea S el sistema de reducción S sobre $k[t]\langle x, y, z\rangle$

$$S := \{(yx, xy - y - \lambda_1 zt), (zy, yz), (zx, xz - z - (\lambda_2 y + \lambda_3 z)t)\},$$

cuyos elementos llamaremos σ_1, σ_2 y σ_3 respectivamente. El orden que consideramos es el inducido por la función $\omega(x) = \omega(y) = \omega(z) = 1$, y $x < y < z$.

Como en el caso anterior, la única ambigüedad es el overlap $(\sigma_2, \sigma_1, z, y, x)$ y se resuelve. En efecto

$$\begin{aligned}(zy)x = yzx &\mapsto y(xz - z - (\lambda_2 y + \lambda_3 z)t) = yxz - yz - (\lambda_2 y^2 + \lambda_3 yz)t \\ &\mapsto xyz - 2yz - (\lambda_1 z^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 yz)t.\end{aligned}$$

Por el otro lado,

$$z(yx) = zxy - zy - \lambda_1 z^2 t \mapsto xyz - 2yz - (\lambda_1 z^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 yz)t.$$

Luego por el lema del diamante obtenemos que los monomios $x^i y^j z^k$ son una $k[t]$-base de B. Entonces el morfismo

$$\psi : A(1) \longrightarrow B \otimes_{k[t]} k,$$

definido por $\psi(x^i y^j z^k) = x^i y^j z^k \otimes 1$ es un isomorfismo k-lineal, y como las relaciones de B resultan las relaciones de A al establecer $t = 0$, obtenemos que ψ es además un isomorfismo de k-álgebras.

Luego la completación t-ádica $\hat{B}$ de B es una $k[[t]]$-álgebra t-ádicamente completa, libre de torsión y cumple

$$\hat{B} \otimes_{k[[t]]} k \cong B \otimes_{k[t]} k \cong A(1),$$

como k-álgebras. Por lo tanto $\hat{B}$ es una deformación de $A(1)$ y consiste de series en t con coeficientes en $\hat{B} \otimes_{k[[t]]} k \cong A(1)$ con producto f_t que cumple

- $f_t(y, x) = xy - y - \lambda_1 zt$,
- $f_t(x, y) = xy$,
- $f_t(z, x) = xz - z - (\lambda_2 y + \lambda_3 z)t$,
- $f_t(x, z) = xz$,
- $f_t(z, y) = yz$,
- $f_t(y, z) = yz$.

Entonces $F_1(x, y) = F_1(x, z) = F_1(z, y) = F_1(y, z) = 0$, $F_1(y, x) = -\lambda_1 z$, $F_1(z, x) = -(\lambda_2 y + \lambda_3 z)$ y $\varphi^*(F_1) = \lambda_1 dx \wedge dy|z + \lambda_2 dx \wedge dz|y + \lambda_3 dx \wedge dz|z$. □

Proposición 4.2.15. *Sea $\alpha \in \mathbb{Q}_{<0}$, $\alpha \neq -1$, $\alpha = -\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y*

$$B := k[t]\langle x, y, z\rangle / \langle xy - yx - y, yz - zy, xz - zx - \alpha z - \lambda y^{ak} z^{bk+1} t\rangle.$$

Entonces la completación t-ádica $\hat{B}$ de B es una deformación de $A(\alpha)$ con

$$\varphi^*(F_1) = \lambda dx \wedge dz | y^{ak} z^{bk+1}.$$

Demostración. De forma análoga a los casos anteriores, basta probar que los monomios $x^i y^j z^k$ son una $k[t]$-base de B. Para ello consideramos el sistema de reducción S sobre $k\langle x, y, z\rangle$

$$S := \{(yx, xy - y), (zy, yz), (zx, xz - \alpha z - \lambda y^{ak} z^{bk+1} t)\}.$$

Los elementos de S los llamaremos σ_1, σ_2 y σ_3 respectivamente. Tomamos el orden inducido por la función $\omega(y) = \omega(z) = 1$, $\omega(x) = (a + b)k + 1$; y $x < y < z$. Es evidente que dicho orden es compatible con S y por la Proposición 4.1.5 tiene la propiedad de cadena descendente.

La única ambigüedad que se presenta es el overlap $(\sigma_2, \sigma_1, z, y, x)$ y se resuelve. En efecto

$$\begin{aligned}(zy)x &\mapsto yzx \mapsto yxz - \alpha yz - \lambda y^{ak+1} z^{bk+1} t\\ &\mapsto xyz - (1 + \alpha) yz - \lambda y^{ak+1} z^{bk+1} t.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}z(yx) &\mapsto zxy - zy \mapsto xzy - \alpha zy - \lambda y^{ak+1} z^{bk+1} t - zy\\ &\mapsto xyz - (1 + \alpha) yz - \lambda y^{ak+1} z^{bk+1} t.\end{aligned}$$

Luego por el lema del diamante los monomios $x^i y^j z^k$ son una $k[t]$-base de B. Entonces por argumentos análogos a los de los casos anteriores, la completación t-ádica $\hat{B}$ de B es una $k[[t]]$-álgebra que cumple

$$\hat{B} \otimes_{k[[t]]} k \cong B \otimes_{k[t]} k \cong A(\alpha),$$

y es libre de torsión. $\hat{B}$ consiste de series en t con coeficientes en $\hat{B} \otimes_{k[[t]]} k \cong A(\alpha)$ con producto f_t que cumple

- $f_t(y, x) = xy - y$,
- $f_t(x, y) = xy$,
- $f_t(z, x) = xz - \alpha z - \lambda y^{ak} z^{bk+1} t$,
- $f_t(x, z) = xz$,
- $f_t(z, y) = yz$,
- $f_t(y, z) = yz$.

Entonces $\varphi^*(F_1) = \lambda dx \wedge dz | y^{ak} z^{bk+1}$. $\square$

Proposición 4.2.16. *Sea $\alpha = -1$. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y*

$$B := k[t]\langle x, y, z\rangle / \langle xy - yx - y, yz - zy, xz - zx - \alpha z - \lambda y^{k} z^{k+1} t\rangle.$$

Entonces la completación t-ádica $\hat{B}$ de B es una deformación de $A(-1)$ con

$$\varphi^*(F_1) = \lambda dx \wedge dz | y^{k} z^{k+1}.$$

Demostración. La prueba es idéntica al caso anterior. □

Proposición 4.2.17. *Sea* $\alpha = -1$. *Sean* $\lambda \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}_0$ *y*

$$B := k[t]\langle x, y, z\rangle / \langle xy - yx - y, yz - zy - \lambda x^i t, xz - zx + z\rangle.$$

Entonces la completación t*-ádica* $\hat{B}$ *de* B *es una deformación de* $A(-1)$ *con*

$$\varphi^*(F_1) = \lambda dy \wedge dz | x^i.$$

Demostración. La demostración es completamente análoga a las de los otros casos. Probemos solamente que los monomios $x^i y^j z^k$ son una $k[t]$-base de B. Consideremos el sistema de reducciones S sobre $k[t]\langle x, y, z\rangle$

$$S := \{(yx, xy - y), (zy, yz - \lambda x^i t), (zx, xz + z)\},$$

con el orden inducido por la función $\omega(x) = \omega(y) = 1$, $\omega(z) = i + 1$, y $x < y < z$. Resulta evidente que es un orden compatible con S y tiene la propiedad de cadena descendente.

Nuevamente la única ambigüedad es $(\sigma_2, \sigma_1, z, y, x)$. Veamos que se resuelve

$$(zy)x \mapsto yzx - \lambda x^{i+1}t \mapsto yxz + yz - \lambda x^{i+1}t \mapsto xyz - \lambda x^{i+1},$$

Por otro lado,

$$z(yx) \mapsto zxy - zy \mapsto xzy \mapsto xyz - \lambda x^{i+1}t.$$

Entonces por el lema del diamante los monomios $x^i y^j z^k$ con $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ forman una $k[t]$-base de B. El resto del argumento también es análogo a los de los casos anteriores. □

Bibliografía

[A] Agaoka, Y. *On the variety of* 3*-dimensional Lie algebras*, Lobachevskii J. Math. **3**, (1999), pp. 5–17.

[Ber] Bergman, G. *The diamond lemma for ring theory*, Adv.Math. **29**,(1978), pp. 178–218.

[CE] Cartan, H.; Eilenberg, S. *Homological Algebra.* Princeton University Press, 1956.

[GS] Gerstenhaber, M.; Schack, S. *Algebraic cohomology and deformation theory. Deformation theory of algebras and structures and applications* (Il Ciocco, 1986), pp. 11–264, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 247, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.

[HS] Herscovich, E.; Solotar, A. *Hochschild and cyclic homology of Yang-Mills algebras.* Aceptado en *J. reine angew. Mathematik.* `arXiv:0906.2576`

[K] Kassel, C. *Quantum Groups.* Graduate Texts in Mathematics, **155**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[N] Nuss, P. *Homologie des algèbres commutatives et presque commutatives.* Thèse de Doctorat, Spécialité: Mathématiques, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, février 1990.

[TU] Tasaki, H.; Umehara, M. *An invariant on* 3*-dimensional Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **115**, (1992), no. 2, 293–294.

[W] Weibel, C. *An introduction to homological algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Wit] Witherspoon, S. *Cohomology of Hopf algebras*, Short Course, Universidad de Buenos Aires, May 17-31, 2010.