UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Grupos de dimensión cohomológica uno

Agustín Gonzalo Méndez

Director: Jorge A. Guccione

29 de Mayo de 2012

Índice general

Introducción

Todo grupo libre tiene dimensión cohomológica uno, por lo cual es natural preguntarse en que casos vale la recíproca. Nos proponemos demostrar en este trabajo que todo grupo libre de torsión que tiene dimensión cohomolgica uno sobre un anillo R arbitrario, es libre (por supuesto que cuando $R = \mathbb{Z}$ la hipótesis sobre la torsión es innecesaria, debido a que si un grupo tiene torsión, entonces su dimensión cohomológica sobre $\mathbb{Z}$ es infinita).

Para ello nos basamos en el libro de Daniel E. Cohen [**C**] donde se repasan dos trabajos: el de John R. Stallings [**St**], donde se prueba que todo grupo de torsión, finitamente generado y de dimensión cohomolgica uno es libre; y el de Richard G. Swan [**Sw**] donde se deduce de esto el caso general.

En la primera parte del trabajo repasamos la teoría sobre grupos libres, producto libre de grupos y cohomología de grupos finalizando en el siguiente resultado de Jean-Pierre Serre:

Sea R un anillo conmutativo con unidad, G un grupo con un subgrupo H de índice finito. Entonces si G no tiene R-torsión (en particular si G es libre de torsión), G y H tienen la misma dimensión cohomológica sobre R.

De esto y de nuestro teorema principal deducimos que todo grupo libre de torsión que contiene un subgrupo libre de índice finito debe ser libre.

La segunda parte del trabajo se orienta a probar el resultado principal. En el último capítulo damos una versión relativisada de este resultado que implica el siguiente teorema:

Sea H un subgrupo de G grupo libre, entonces H es factor libre de G si y sólo si para todo anillo R el ideal $I_H RG$ sumando un directo de I_G (donde I_H e I_G son los ideales de aumentación de RH y RG respecrivamente).

Se darán a lo largo del texto todos los detalles necesarios para la demostración de estos teoremas y sólo se asumen conocimientos básicos de teoría de grupos. Cabe destacar que se enunciaran y utilizarán sin demostrar los teoremas de Kuroš y Gruškos, puede verse [**H**] o [**L**] para el primero y [**H1**] para el segundo.

Capítulo 1

Preliminares sobre teoría de grupos

En este capítulo presentamos algunas construcciones universales de la teoría de grupos que son necesarias tanto para el enunciado de los problemas estudiados en este seminario, como también para su resolución.

1. Grupos libres

Dado un conjunto X, denotamos con $X^{\pm 1}$ a la unión disjunta de dos copias X^{+1} y X^{-1} de X. Para cada elemento $x \in X$ hay un elemento correspondiente $x^{+1} \in X^{+1}$ y otro $x^{-1} \in X^{-1}$. Nosotros diremos que x^{+1} y x^{-1} están *asociados*. Una *palabra en* X es una expresión

$$w := x_{\alpha_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{\alpha_n}^{\epsilon_n} \qquad (\text{con } x_{\alpha_i} \in X \text{ y } \epsilon_i = \pm 1,\ i = 1, \dots, n).$$

Si en la misma ningún símbolo aparece junto a su asociado, decimos que w es una palabra *reducida*. La cantidad n de símbolos que tiene, es la *longitud* $l(w)$ de w. Consideramos también como una palabra reducida a la expresión vacía. Por definición, esta palabra tiene longitud cero. Nuestro proximo objetivo será definir el *producto* $w_1 w_2$ de dos palabras reducidas

$$w_1 := x_{\alpha_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{\alpha_n}^{\epsilon_n} \quad \text{y} \quad w_2 := x_{\beta_1}^{\delta_1} \cdots x_{\beta_m}^{\delta_m}.$$

Para ello escribimos

$$x_{\alpha_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{\alpha_n}^{\epsilon_n} x_{\beta_1}^{\delta_1} \cdots x_{\beta_m}^{\delta_m}. \tag{1}$$

Si esta es una palabra reducida, entonces ponemos

$$w_1 w_2 := x_{\alpha_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{\alpha_n}^{\epsilon_n} x_{\beta_1}^{\delta_1} \cdots x_{\beta_m}^{\delta_m}.$$

Si no, primero eliminamos de (1) sucesivamente pares de símbolos asociados, hasta obtener una que si lo sea.

TEOREMA 1.1. *El conjunto $L(X)$, de las palabras reducidas en X, es un grupo via el producto que acabamos de definir.*

Demostración. Es claro que la palabra vacía es el elemento neutro. Probaremos ahora por inducción en $l(w_2)$, que

$$w_1(w_2w_3) = (w_1w_2)w_3$$

para toda terna w_1, w_2, w_3 de palabras reducidas. Si $l(w_2) = 1$ (esto es, si $w_2 = x^\epsilon$ con $x \in X$ y $\epsilon = \pm 1$) hay cuatro casos para analizar: que el último símbolo de w_1 y el primero de w_3 sean distintos del elemento de $X^{\pm 1}$ asociado a x^ϵ; que el último símbolo de w_1 sea el elemento de $X^{\pm 1}$ asociado a x^ϵ, pero que el primero de w_3 no lo sea; que el primer símbolo de w_3 sea el elemento de $X^{\pm 1}$ asociado a x^ϵ, pero que el último de w_1 no lo sea; y que el último símbolo que w_1 y el primero de w_3 sean el elemento de $X^{\pm 1}$ asociado a x^ϵ. Es fácil ver que en todos vale que $w_1(w_2w_3) = (w_1w_2)w_3$. Supongamos ahora que la asociatividad vale cuando $l(w_2) \le n$ y que $l(w_2) = n + 1$. Escribamos $w_2 = w_2'x^\epsilon$. Entonces, por hipótesis inductiva

$$\begin{aligned} w_1(w_2w_3) &= w_1((w_2'x^\epsilon)w_3) \\ &= w_1(w_2'(x^\epsilon w_3)) \\ &= (w_1w_2')(x^\epsilon w_3) \\ &= ((w_1w_2')x^\epsilon)w_3 \\ &= (w_1(w_2'x^\epsilon))w_3 \\ &= (w_1w_2)w_3. \end{aligned}$$

Resta probar que cada palabra reducida es inversible, pero es claro que la inversa de la palabra reducida $x_{\alpha_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{\alpha_n}^{\epsilon_n}$ es la palabra reducida $x_{\alpha_n}^{-\epsilon_n} \cdots x_{\alpha_1}^{-\epsilon_1}$. □

El *grupo libre sobre un conjunto* X es, por definición, el grupo $L(X)$ construído arriba. Identificando cada elemento $x \in X$ con la palabra reducida x^{+1}, obtenemos una aplicación canónica $i\colon X \to L(X)$. Claramente $i(X)$ genera $L(X)$ como grupo. En el siguiente teorema establecemos la propiedad universal de $L(X)$.

Teorema 1.2. *Dada una función $j\colon X \to G$, de X en un grupo G, hay un único morfismo $f\colon L(X) \to G$ que extiende a j. En otras palabras, que tiene la propiedad de que el triángulo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & G \\ L(X) \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Si f es un morfismo de grupos que extiende a j, forzosamente debe ser

$$f(x_{\alpha_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{\alpha_n}^{\epsilon_n}) = j(x_{\alpha_1})^{\epsilon_1} \cdots j(x_{\alpha_n})^{\epsilon_n}.$$

Pero es inmediato que la función definida por esta fórmula es un morfismo de grupos. □

Ampliando un poco la definición dada arriba del Teorema 1.2, diremos que un *grupo libre sobre* X es cualquier par (G, j), formado por un grupo G y una función $j\colon X \to G$, que tiene la misma propiedad universal que $(L(X), i)$. Por extensión, decimos también que un grupo G es libre si es el grupo subyacente de un par (G, j) que lo es.

Proposición 1.3. *(G, j) es un grupo libre sobre X si y sólo si el morfismo $f\colon L(X) \to G$, cuya existencia y unicidad fue probada en el Teorema 1.2, es un isomorfismo.*

Demostración. Es inmediato que si f es un isomorfismo, entonces (G, j) tiene la propiedad universal de $(L(X), i)$. Recíprocamente, si (G, j) tiene esta propiedad, entonces hay un único morfismo $g\colon G \to L(X)$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & G \arrow[dl, "g"] \\ L(X) & \end{tikzcd}$$

conmuta. Como $g \circ f \circ i = i$ y $f \circ g \circ j = j$, por las propiedades universales de i y j, debe ser $g \circ f = \mathrm{id}_{L(X)}$ y $f \circ g = \mathrm{id}_G$. $\square$

Una *base* de un grupo G es cualquier subconjunto X de G tal que el par (G, i_X), donde $i_X\colon X \to G$ es la inclusión canónica, es un grupo libre. Es inmediato que esto ocurre si y sólo si el morfismo evidente de $L(X)$ en G es biyectivo. Es claro que un grupo tiene una base si y sólo si es libre. A continuación probaremos el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Dos grupos libres $L(X)$ y $L(Y)$ son isomorfos si y sólo si $|X| = |Y|$. Equivalentemente, todos las bases de un grupo libre G tienen el mismo cardinal.*

En su demostración usaremos los siguentes dos lemas, el segundo de los cuales es el resultado análogo para grupos abelianos, que suponemos conocido y establecemos sin demostración.

Lema 1.5. *Si (G, j) es un grupo libre, entonces $(G/[G, G], \pi \circ j)$, donde $\pi\colon G \to G/[G, G]$ es la proyección canónica, es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.*

Demostración. Denotemos con X al dominio de j y tomemos una función $\varphi\colon X \to H$, de X en un grupo abeliano H. Por las propiedades universales de (G, j) y del abelianizado de G, existen morfismos únicos $\tilde{\varphi}\colon G \to H$ y $\overline{\varphi}\colon G/[G, G] \to H$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & H \\ X \arrow[urr, "\varphi"] \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\pi\circ j"'] & G \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"] & \\ & \dfrac{G}{[G,G]} \arrow[uur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd},$$

donde π es la proyección canónica, conmuta. En particular, $\overline{\varphi} \circ \pi \circ j = \varphi$. Además $\overline{\varphi}$ es el único morfismo con esta propiedad, porque si $\psi\colon G/[G, G] \to H$ también satisface $\psi \circ \pi \circ j = \varphi$, entonces, por la propiedad universal de (G, j), forzosamente $\psi \circ \pi = \overline{\varphi} \circ \pi$ y, por lo tanto, dado que π es sobreyectivo, $\psi = \overline{\varphi}$. $\square$

Lema 1.6. *En cada grupo abeliano libre todas las bases tienen el mismo cardinal.*

Demostración del Teorema 1.4. Supongamos que (G, j) y (H, l) son grupos libres sobre X e Y respectivamente. Por supuesto, si G y H son isomorfos, entonces $G/[G, G]$ y

$H/[H,H]$ también lo son. Debido a los Lemas 1.5 y 1.6, esto implica que $|X| = |Y|$. Recíprocamente, por la propiedad universal de (G, j), dada una biyección $\varphi\colon X \to Y$, existen morfismos únicos $\overline{\varphi}\colon G \to H$ y $\overline{\varphi^{-1}}\colon H \to G$ tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle l} \\ G & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & H \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & X \\ \downarrow{\scriptstyle l} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ H & \xrightarrow{\overline{\varphi^{-1}}} & G \end{array}$$

conmutan. Como $\overline{\varphi^{-1}} \circ \overline{\varphi} \circ j = j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = j$, debe ser $\overline{\varphi^{-1}} \circ \overline{\varphi} = \mathrm{id}_G$. Un argumento similar muestra que $\overline{\varphi} \circ \overline{\varphi^{-1}} = \mathrm{id}_H$. □

Teorema 1.4 permite definir el *rango* de un grupo libre como el cardinal de cualquiera de sus bases. Los grupos libres de rango 1 son los grupos cíclicos infinitos. Por otra parte si $|X| \geq 2$, entonces $L(X)$ no es conmutativo, porque si x_1 y x_2 son elementos distintos de X, entonces $x_1^{+1}x_2^{+1} \neq x_2^{+1}x_1^{+1}$.

PROPOSICIÓN 1.7. *Todo grupo es isomorfo a un cociente de un grupo libre.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada conjunto de generadores X de G, el único morfismo

$$f\colon L(X) \to G$$

que extiende a la inclusión canónica de X en G es sobreyectivo. Entonces, por el Primer Teorema del Isomorfismo, $G \approx L(X)/\ker f$. □

2. Producto libre de una familia de grupos

Dada una familia de grupos $(G_i)_{i \in I}$ consideramos el conjunto de todas las expresiones

$$w := x_{i_1} \cdots x_{i_n} \quad \text{con } i_1, \dots, i_n \in I \text{ y } x_{i_j} \in G_{i_j} \setminus \{e\} \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

Es decir de las palabras en $\bigcup_{i \in I}(G_i \setminus \{e\})$. Si en esta expresión se satisface que $i_j \neq i_{j+1}$ para $1 \leq j < n$ decimos que w es *reducida* y llamamos *longitud* $l(w)$ a n. Como en la construcción del grupo libre consideramos también como palabra reducida de longitud 0 a la expresión vacía. A continuación definimos el producto $w_1 w_2$ de dos palabras reducidas

$$w_1 := x_{i_1} \cdots x_{i_n} \quad \text{y} \quad w_2 := x_{j_1} \cdots x_{j_m}.$$

Para ello escribimos

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n} x_{j_1} \cdots x_{j_m}.$$

Si esta es una palabra reducida, entonces ponemos

$$w_1 w_2 := x_{i_1} \cdots x_{i_n} x_{j_1} \cdots x_{j_m}. \tag{2}$$

Si no, primero eliminamos de (2) sucesivamente pares de símbolos asociados, reemplazandolos por su producto en el grupo al que pertenecen y eliminando los neutros cuando aparecen, hasta obtener una que si lo sea.

Un argumento similar al dado en la demostración del Teorema 1.1 prueba el siguiente resultado.

TEOREMA 1.8. *El conjunto $*_{i \in I} G_i$, de las palabras reducidas en $\bigcup_{i \in I}(G_i \setminus \{e\})$, es un grupo via el producto que acabamos de definir.*

Para cada $j \in I$, la *inclusión canónica* $i_j\colon G_j \to *_{i\in I}G_i$ es la aplicación definida por $i_j(e) := \emptyset$ e $i_j(x) := x$ para $x \in G_j \setminus \{e\}$. Es evidente que cada i_j es un morfismo inyectivo de grupos y que $\bigcup_{j\in J} i_j(G_j)$ genera a $*_{i\in I}G_i$ como grupo. A continuación establecemos la propiedad universal de $*_{i\in I}G_i$.

TEOREMA 1.9. *Para cada familia $(f_j\colon G_j \to G)_{j\in I}$, de morfismos de grupo, hay un único morfismo $f\colon *_{i\in I} G_i \to G$ tal que los triángulos*

$$\begin{tikzcd} G_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "i_j"] & G \\ *_{i\in I}G_i \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

conmutan.

DEMOSTRACIÓN. Si f es un morfismo de grupos que hace conmutativos a los diagramas mencionados arriba, entonces forzosamente

$$f(\emptyset) = e \quad \text{y} \quad f(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) = f_{i_1}(x_{i_1})\cdots f_{i_n}(x_{i_n}).$$

Pero es inmediato que la función definida por esta fórmula es un morfismo de grupos. $\square$

De la misma manera que para grupos libres, diremos que un *producto libre de una familia $(G_i)_{i\in I}$ de grupos* es cualquier familia de morfismos de grupos $(\iota_j\colon G_j \to G)_{j\in I}$, que tiene la misma propiedad universal que $(i_j\colon G_j \to *_{i\in I}G_i)_{j\in J}$. Por extensión, decimos también en este caso, que G es el producto libre de la familia de grupos $(G_i)_{i\in I}$.

PROPOSICIÓN 1.10. *$(\iota_j\colon G_j \to G)_{j\in I}$ es un producto libre de la familia de grupos $(G_i)_{i\in I}$ si y sólo si el morfismo $f\colon *_{i\in I} G_i \to G$, cuya existencia y unicidad fue probada en el Teorema 1.9, es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato que si f es un isomorfismo, entonces $(\iota_j\colon G_j \to G)_{j\in I}$ tiene la propiedad universal de $(i_j\colon G_j \to *_{i\in I}G_i)_{j\in J}$. Recíprocamente, si $(\iota_j\colon G_j \to G)_{j\in I}$ tiene esta propiedad, entonces hay un único morfismo $g\colon G \to *_{i\in I}G_i$ tal que los triángulos

$$\begin{tikzcd} G_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[d, "i_j"] & G \arrow[dl, "g"] \\ *_{i\in I}G_i & \end{tikzcd}$$

conmutan. Como $g\circ f\circ i_j = i_j$ y $f\circ g\circ \iota_j = \iota_j$ para cada $j \in I$, por las propiedades universales de $(i_j\colon G_j \to *_{i\in I}G_i)_{j\in I}$ y $(\iota_j\colon G_j \to G)_{j\in I}$, debe ser $g\circ f = \mathrm{id}_{*_{i\in I}G_i}$ y $f\circ g = \mathrm{id}_G$. $\square$

3. Producto amalgamado de grupos

Supongamos que tenemos un diagrama de morfismos de grupos

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & H \\ G & \end{tikzcd} \tag{3}$$

El *producto amalgamado* de este diagrama es la terna

(4) $$(H *_K G, i_H \colon H \to H *_K G, i_G \colon G \to H *_K G),$$

donde $H *_K G$ es el grupo

$$H *_K G := \frac{H * G}{\langle f(k)g(k)^{-1} : k \in K\rangle},$$

e $i_H \colon H \to H *_K G$ e $i_G \colon G \to H *_K G$ son las composiciones de las inclusiones canónicas de H y G en $H * G$, con la proyección canónica $\pi \colon H * G \to H *_K G$. Es evidente que el diagrama

(5) $$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & H \arrow[d, "i_H"] \\ G \arrow[r, "i_G"] & H *_K G \end{tikzcd}$$

conmuta. El producto amalgamado satisface la siguiente propiedad universal.

TEOREMA 1.11. *Si $\iota_H \colon H \to L$ y $\iota_G \colon G \to L$ son dos morfismos de grupos que satisfacen $\iota_H \circ f = \iota_G \circ g$, entonces existe un único morfismo de grupos $\theta \colon H *_K G \to L$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & H \arrow[d, "i_H"] \arrow[ddr, "\iota_H"] & \\ G \arrow[r, "i_G"] \arrow[drr, "\iota_G"'] & H *_K G \arrow[dr, "\theta"] & \\ & & L \end{tikzcd}$$

conmuta.

Como en el caso de grupos y productos libres diremos que una terna (L, ι_H, ι_G), formada por un grupo L y morfismos $\iota_H \colon H \to L$ y $\iota_G \colon G \to L$, es un producto amalgamado si $\iota_H \circ f = \iota_G \circ g$ y si (L, ι_H, ι_G) satisface la misma propiedad universal que (4).

PROPOSICIÓN 1.12. $(L, \iota_H \colon H \to L, \iota_G \colon G \to L)$ *es un producto amalgamado de un diagrama* (3) *si y sólo si el morfismo $\theta \colon H *_K G \to L$, cuya existencia y unicidad fue probada en el Teorema 1.11, es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Es similar a las demostraciones de las Proposiciones 1.3 y 1.10. □

Supongamos que f y g son inyectivos. Nosotros identificaremos a K con $f(K)$ y $g(K)$, de modo que hablaremos de transversales a izquierda de K en H en lugar de transversales a izquierda de $f(K)$ en H y, para $h \in H$, denotaremos con hK a la coclase a izquierda $hf(K)$, y similarmente para la coclase a derecha $f(K)h$, etcetera. Consideremos transversales a izquierda T y T' de K en H y G respectivamente, ambas conteniendo al neutro e del grupo correspondiente. Es fácil ver que cada elemento de $H *_K G$ puede ser escrito en la forma[1]

$$t_1 t_1' \cdots t_r t_r' k,$$

[1] Aquí usamos una construcción de $H * K$ algo distinta de la dada arriba, en la que la palabra vacía es reemplazada por la expresión eee, donde $r = 1$, el primer e es el neutro de H, el segundo, el de G y, el tercero, el de K. Elejimos esta construcción para no tener que dividir la demostración del próximo resultado en varios casos.

donde

(6) $\quad r \geq 1, \quad t_1 \in T, \quad t_2, \dots, t_r \in T \setminus \{e\}, \quad t'_1, \dots, t'_{r-1} \in T' \setminus \{e\}, \quad t'_r \in T' \quad \text{y} \quad k \in K.$

Probaremos a continuación que esta escritura es única. Denotemos con S al conjunto de las sucesiones $(t_1, t'_1, \dots, t_r, t'_r, k)$ que satisfacen (6) y con $\mathbb{S}(S)$ al grupo de permutaciones de S. Para terminar la demostración será suficiente probar que existe un morfismo de grupos

$$\mathfrak{p}\colon H *_K G \to \mathbb{S}(S)^{\mathrm{op}}$$

tal que si $u = t_1 t'_1 \cdots t_r t'_r k$, entonces

$$\mathfrak{p}(u)(e, e, e) = (t_1, t'_1, \dots, t_r, t'_r, k).$$

Para obtener $\mathfrak{p}$ vamos a usar la propiedad universal de $H *_K G$. Definimos

$$\mathfrak{p}_H\colon H \to \operatorname{Maps}(S)^{\mathrm{op}} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{p}_G\colon G \to \operatorname{Maps}(S)^{\mathrm{op}}$$

donde $\operatorname{Maps}(S) := \{f\colon S \to S\}$ provisto de la operación dada por composición, por

$$\mathfrak{p}_H(tk')(V) := \begin{cases} (t_1, t'_1, \dots, t_{r-1}, t'_{r-1}, t_{r+1}, e, k''k') & \text{si } t'_r = e \text{ y } t_r kt = t_{r+1}k'' \text{ con } t_{r+1} \neq e, \\ (t_1, t'_1, \dots, t_{r-1}, t'_{r-1}, k''k') & \text{si } r > 1,\ t'_r = e \text{ y } t_r kt = ek'', \\ (e, e, k''k') & \text{si } r = 1,\ t'_1 = e \text{ y } t_1 kt = ek'', \\ (t_1, t'_1, \dots, t_r, t'_r, t_{r+1}, e, k''k') & \text{si } t'_r \neq e,\ t \neq e \text{ y } kt = t_{r+1}k'', \\ (t_1, t'_1, \dots, t_r, t'_r, kk') & \text{si } t'_r \neq e \text{ y } t = e, \end{cases}$$

y

$$\mathfrak{p}_G(t'k')(V) := (t_1, t'_1, \dots, t_r, t'_{r+1}, k''k') \quad \text{si } t'_r kt' = t'_{r+1}k'',$$

donde $V := (t_1, t'_1, \dots, t_r, t'_r, k)$. Un cálculo directo muestra que $\mathfrak{p}_H$ y $\mathfrak{p}_G$ son morfismos de monoides y, por lo tanto, $\operatorname{im}(\mathfrak{p}_H) \subseteq \mathbb{S}(S)^{\mathrm{op}}$ e $\operatorname{im}(\mathfrak{p}_G) \subseteq \mathbb{S}(S)^{\mathrm{op}}$. Además, usando el mismo procedimiente se puede ver que $\mathfrak{p}_H(ek') = \mathfrak{p}_G(ek')$ para todo $k' \in K$. En consecuencia, por el Teorema 1.11, existe $\mathfrak{p}\colon H *_K G \to \mathbb{S}(S)^{\mathrm{op}}$ tal que $\mathfrak{p} \circ i_H = \mathfrak{p}_H$ y$\mathfrak{p} \circ i_G = \mathfrak{p}_G$. Por último se sigue por inducción en r que si $u = t_1 t'_1 \cdots t_r t'_r k$ satisface las condiciones (6), entonces

$$\mathfrak{p}(u)(e, e, e) = \mathfrak{p}_G(t'_r k) \circ \mathfrak{p}_H(t_r) \circ \cdots \circ \mathfrak{p}_G(t'_1) \circ \mathfrak{p}_H(t_1)(e, e, e) = (t_1, t'_1, \dots, t_r, t'_r, k),$$

como queríamos.

Corolario 1.13. *Si en un diagrama como* (5) *los morfismos f y g son inyectivos, entonces también i_H e i_G lo son y además $K = H \cap G$, donde hemos identificado K, H y G con $i_H(f(K))$, $i_H(H)$ e $i_G(G)$, respectivamente.*

Nota 1.14. *Se sigue facilmente de los comentarios que preceden al corolario anterior, que si $x \in H *_K G$ tiene orden finito, entonces $x \in H \cup G$. En particular si H y G no tienen torsión, entonces $H *_K G$ tampoco la tiene.*

Nota 1.15. *Supongamos que H y G son dos grupos y que $K \subseteq H' \subseteq H$ y $K \subseteq G' \subseteq G$ son dos cadenas de subgrupos. Se sigue facilmente de los comentarios que preceden al corolario anterior, que el morfismo canónico*

$$H' *_K G' \to H *_K G$$

es siempre inyectivo, y que es sobreyectivo si y sólo si $H' = H$ y $G' = G$.

NOTA 1.16. *Supongamos que K es un subgrupo normal de H y de G. Se sigue facilmente de los comentarios que preceden al corolario anterior que el morfismo canónico*

$$H *_K G \to \frac{H}{K} * \frac{G}{K}$$

es sobreyectivo y que su núcleo es K.

NOTA 1.17. *Supongamos que $H *_K G$ es finitamente generado. Escribiendo cada generador en forma normal podemos encontrar subconjuntos finitos S y T de H y G respectivamente, tales que $H *_K G = \langle S \cup T \rangle$. Así, si $H' := \langle S \cup K \rangle$ y $G' := \langle T \cup K \rangle$, entonces $H' *_K G' = H *_K G$, lo que por la nota anterior implica que $H' = H$ y $G' = G$. En particular si K es finitamente generado, entonces H y G también lo son.*

4. El grupo G_{*a}

A continuación daremos una construcción de la teoría de grupos que necesitaremos más adelante.

DEFINICIÓN 1.18. *Dados un subgrupo K de un grupo G y un monomorfismo $a\colon K \to G$ de grupos definimos*

$$G_{*a} := \frac{G * \langle x \rangle}{\langle k^x a(k)^{-1} : k \in K \rangle},$$

donde $\langle x \rangle$ es el grupo cíclico infinito y $k^x := x^{-1}kx$.

NOTA 1.19. *Si $K = e$, entonces $G_{*a} = G * \langle x \rangle$.*

Tomemos transversales a izquierda T y T' de K y $a(K)$ en G respectivamente, ambas conteniendo a e. Debido a la relación de conmutatividad $kx = xa(k)$, todo elemento de G_{*a} puede ser escrito en la forma

$$g_1 x^{\epsilon_1} g_2 x^{\epsilon_2} \cdots g_n x^{\epsilon_n} g_{n+1}, \tag{7}$$

donde

$$n \geq 0, \quad \epsilon_i = \pm 1, \quad g_i \neq e \text{ si } \epsilon_{i-1} + \epsilon_i = 0 \quad \text{y} \quad g_i \in \begin{cases} T & \text{si } \epsilon_i = 1, \\ T' & \text{si } \epsilon_i = -1. \end{cases} \tag{8}$$

PROPOSICIÓN 1.20. *La escritura (7) es única. En particular $G \subseteq G_{*a}$ y el orden de x es infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Siguiendo el procedimiento usado para el producto amalgamado denotamos con S el conjunto de las sucesiones $(g_1, \epsilon_1, \dots, g_n, \epsilon_n, g_{n+1})$ que cumplen (8) y con $\mathbb{S}(S)$ al grupo de permutaciones de S. Como antes, el objetivo será construír un morfismo de grupos

$$\mathfrak{q}\colon G_{*a} \to \mathbb{S}(S)^{\mathrm{op}} \tag{9}$$

tal que si $u \in G_{*a}$ se escribe como $u := g_1 x^{\epsilon_1} g_2 x^{\epsilon_2} \cdots g_n x^{\epsilon_n} g_{n+1}$ sujeto a las condiciones (8), entonces

$$\mathfrak{q}(u)(e) = (g_1, \epsilon_1, \dots, g_n, \epsilon_n, g_{n+1}).$$

Con este proposito consideremos el morfismo $\mathfrak{q}_G\colon G \to \mathbb{S}(S)^{\mathrm{op}}$ y la permutación ξ de S, definidos respectivamente por

$$\mathfrak{q}_G(g)(g_1, \epsilon_1, \dots, g_n, \epsilon_n, g_{n+1}) := (g_1, \epsilon_1, \dots, g_n, \epsilon_n, g_{n+1}g)$$

y

$$\xi(V) := \begin{cases} (t,1,a(k)) & \text{si } n=0 \text{ y } g_1 = tk \text{ con } t\in T,\\ (g_1,\epsilon_1,\dots,g_n,\epsilon_n,t,1,a(k)) & \text{si } n>0,\ \epsilon_n = 1 \text{ y } g_{n+1} = tk \text{ con } t\in T,\\ (g_1,\epsilon_1,\dots,g_n,\epsilon_n,t,1,a(k)) & \text{si } n>0,\ \epsilon_n = -1 \text{ y } g_{n+1} = tk \text{ con } t\in T\setminus\{e\},\\ (g_1,\epsilon_1,\dots,g_{n-1},\epsilon_{n-1},g_n a(k)) & \text{si } n>0,\ \epsilon_n = -1 \text{ y } g_{n+1} = k\in K, \end{cases}$$

donde $V := (g_1,\epsilon_1,\dots,g_n,\epsilon_n,g_{n+1})$. Como

$$\xi\circ \mathfrak{q}_G(k) = \mathfrak{q}(a(k))\circ\xi \quad \text{para todo } k\in K,$$

existe un morfismo como (9) tal que $\mathfrak{q}(x) = \xi$ y $\mathfrak{q}(g) = \mathfrak{q}_G(g)$ para todo $g\in G$. Por último, usando que

$$\xi^{-1}(V) = \begin{cases} (g_1',-1,k) & \text{si } n=0 \text{ y } g_1 = g_1' a(k) \text{ con } g_1'\in T',\\ (g_1,\dots,\epsilon_n,g_{n+1}',-1,k) & \text{si } n>0,\ \epsilon_n=-1 \text{ y } g_{n+1} = g_{n+1}' a(k) \text{ con } g_{n+1}'\in T',\\ (g_1,\dots,\epsilon_n,g_{n+1}',-1,k) & \text{si } n>0,\ \epsilon_n=1 \text{ y } g_{n+1} = g_{n+1}' a(k) \text{ con } g_{n+1}'\in T'\setminus\{e\},\\ (g_1,\dots,\epsilon_{n-1},g_n k) & \text{si } n>0,\ \epsilon_n = 1 \text{ y } g_{n+1} = a(k), \end{cases}$$

donde $V := (g_1,\epsilon_1,\dots,g_n,\epsilon_n,g_{n+1})$, se sigue facilmente que

$$\mathfrak{q}(u)(e) = \mathfrak{q}(g_{n+1})\circ\mathfrak{q}(x^{\epsilon_n})\circ\mathfrak{q}(g_n)\circ\cdots\circ\mathfrak{q}(x^{\epsilon_1})\circ\mathfrak{q}(g_1)(e) = (g_1,\epsilon_1,\dots,g_n,\epsilon_n,g_{n+1}),$$

como queríamos. □

NOTA 1.21. *Se sigue inmediatamente de la proposición anterior que cada elemento de G se escribe de manera única como*

$$g_1 x^{\epsilon_1} g_2 x^{\epsilon_2}\cdots g_n x^{\epsilon_n} g_{n+1},$$

donde

$$n\ge 0,\quad \pm\epsilon_i\in\mathbb{N},\quad g_i\ne e \textit{ si } 1<i\le n \quad \textit{y} \quad g_i\in\begin{cases} T & \textit{si } \epsilon_i\in\mathbb{N},\\ T' & \textit{si } -\epsilon_i\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

NOTA 1.22. *La aplicación $\pi\colon G_{*a}\to\langle x\rangle$, dada por*

$$\pi\big(g_1 x^{\epsilon_1} g_2 x^{\epsilon_2}\cdots g_n x^{\epsilon_n} g_{n+1}\big) = x^{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n},$$

es un morfismo sobreyectivo de grupos. Además si $K = a(K) = G$, entonces $\ker(\pi) = G$.

Capítulo 2

Preliminares sobre cohomología de grupos

En este capítulo presentamos algunos preliminares sobre cohomología de grupos que necesitaremos en los capítulos siguentes. Empezamos con algunas notaciones. Denotaremos con R a un anillo con unidad no necesariamente conmutativo, con $\mathbb{Z}$ al anillo de los enteros, y con $\mathbb{Z}_2$ al anillo de los enteros módulo 2. Además G denotará siempre a un grupo con identidad e y RG al anillo de grupo de G sobre R. Por definición los elementos de RG son las sumas formales $\sum_{g\in G} r_g g$, donde $r_g \in R$, $g \in G$ y la cantidad de los r_g no nulos es finita. La suma y el producto en RG están definidos por

$$\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big) + \Big(\sum_{g\in G} s_g g\Big) := \sum_{g\in G} (r_g + s_g) g$$

y

$$\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big)\Big(\sum_{g\in G} s_g g\Big) := \sum_{g\in G} \Big(\sum_{xy=g} r_x s_y\Big) g,$$

respectivamente.

Notemos que si H es un subgrupo de G, entonces RH es un subanillo de RG y RG es libre sobre RH con base dada por las coclases a izquierda (o por las coclases a derecha) de H en G.

Todos los RG-módulos que consideraremos serán a derecha. Notemos que R es en si mismo un RG-módulo via la *acción trivial* dada por $r(sg) := rs$ para $r, s \in R$ y $g \in G$.

Una resolución proyectiva de R como RG-módulo es una sucesión exacta de morfismos de RG-módulos

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0,$$

con cada P_i proyectivo. Recordemos que una tal resolución siempre existe, pues podemos tomar como P_0 a RG, como ϵ al morfismo definido por $\epsilon\big(\sum_{g\in G} r_g g\big) := \sum_{g\in G} r_g$ y supuestos construídos $P_1, \dots, P_n$ con sus respectivos d_i podemos elegir P_{n+1} como cualquier RG-módulo libre que se aplique sobre $\ker d_n$, y tomar d_{n+1} como esta aplicación. Esta construcción da una sucesión de RG-módulos libres (y en particular proyectivos) P_i. Para cada RG-módulo cualquiera A, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{RG}(-,A)$ a esta resolución, obtenemos una nueva sucesión

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}^*} \mathrm{Hom}_{RG}(P_{n-1},A) \xrightarrow{d_n^*} \mathrm{Hom}_{RG}(P_n,A) \xrightarrow{d_{n+1}^*} \mathrm{Hom}_{RG}(P_{n+1},A) \xrightarrow{d_{n+2}^*} \cdots,$$

en la categoría de grupos abelianos, que claramente satisface $d_{n+1}^* \circ d_n^* = 0$. Definimos el *$n$-ésimo grupo de cohomología de G con coeficientes en A*, como

$$H^n(G,A) := \frac{\ker d_{n+1}^*}{\mathrm{im}\, d_n^*},$$

donde para el caso $n = 0$ consideramos que $P_{-1} = 0$ y así, $\mathrm{im}\, d_{-1}^* = 0$. Por la teoría básica del Álgebra Homológica este grupo no depende de la resolución proyectiva elegida (ver [**M**, pg. 87-88] para una demostración). Por ejemplo si $G := \langle g \rangle$ es el grupo cíclico de orden m, entonces podemos usar la resolución

$$\cdots \xrightarrow{\sigma} RG \xrightarrow{\delta} RG \xrightarrow{\sigma} RG \xrightarrow{\delta} RG \xrightarrow{\sigma} RG \xrightarrow{\delta} RG \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0,$$

donde δ es la multiplicación por $g-1$ y σ es la multiplicación por $1+g+\cdots+g^{m-1}$. Por lo tanto, usando la identificación

$$\mathrm{Hom}_{RG}(RG,A) \simeq A,$$

obtenemos que, en este caso,

$$\begin{aligned} H^0(G,A) &= \{a \in A : ag = a\}, \\ H^{2n-1}(G,A) &= \frac{\{a \in A : a + ag + \cdots + ag^{m-1} = 0\}}{\{a - ag : a \in A\}}, \\ H^{2n}(G,A) &= \frac{\{a \in A : ag = a\}}{\{a + ag + \cdots + ag^{m-1} : a \in A\}}, \end{aligned}$$

donde $n \in \mathbb{N}$. En particular

$$H^0(G,R) = R, \quad H^{2n-1}(G,R) = \{a \in R : ma = 0\} \quad \text{y} \quad H^{2n}(G,R) = \frac{R}{mR}.$$

Notemos que si $m > 1$ y $R = \mathbb{Z}$, estos grupos son todos diferentes de cero.

Volvamos ahora al caso de un grupo arbitrario. Como el funtor $\mathrm{Hom}_{RG}(-,A)$ es exacto a izquierda,

$$H^0(G,A) = \mathrm{Hom}_{RG}(R,A) = A^G := \{a \in A : ag = a \text{ para todo } g \in G\}.$$

Supongamos ahora que tenemos un morfismo de RG-módulos $f\colon A \to B$. Para cada $n \geq 0$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{RG}(P_{n-1},A) \arrow[r, "d_n^*"] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Hom}_{RG}(P_n,A) \arrow[r, "d_{n+1}^*"] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Hom}_{RG}(P_{n+1},A) \arrow[d, "f_*"] \\ \mathrm{Hom}_{RG}(P_{n-1},B) \arrow[r, "d_n^*"] & \mathrm{Hom}_{RG}(P_n,B) \arrow[r, "d_{n+1}^*"] & \mathrm{Hom}_{RG}(P_{n+1},B) \end{tikzcd}$$

conmuta (en el caso $n = 0$ consideramos que P_{-1} es cero). Por lo tanto queda definido un morfismo

$$\overline{f_*}\colon H^n(G,A) \to H^n(G,B),$$

por $\overline{f_*}(\overline{a}) := \overline{f_*(a)}$ (donde, como es usual, usamos la línea superior para denotar a la clase de un elemento de un grupo en un cociente). Se verifica que $A \mapsto H^n(G,A)$ es un functor covariante de RG-módulos en grupos abelianos, siendo $H^n(G,f) := \overline{f_*}$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Si*

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de RG-módulos, con $n > 0$ y $P_0, \dots, P_{n-1}$ proyectivos, entonces para cada RG-módulo A hay una sucesión exacta de grupos abelianos

$$\operatorname{Hom}_{RG}(P_{n-1}, A) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_{RG}(Y, A) \xrightarrow{h} H^n(G,A) \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Tomemos primero un RG-módulo libre P_n y un epimorfismo de RG-módulos $g\colon P_n \to Y$, y luego un RG-módulo libre P_{n+1} y un epimorfismo de RG-módulos $d_{n+1}\colon P_{n+1} \to \ker g$. Usando la sucesión exacta de RG-módulos

$$P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{f\circ g} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0,$$

obtenemos que

$$H^n(G,A) = \frac{\ker d_{n+1}^*}{\operatorname{im}(f\circ g)^*}.$$

Por otra parte aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{RG}(-,A)$ a la sucesión exacta de RG-módulos

$$P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0,$$

obtenemos la sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{RG}(Y,A) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_{RG}(P_n, A) \xrightarrow{d_{n+1}^*} \operatorname{Hom}_{RG}(P_{n+1}, A).$$

En otras palabras

$$g^*\colon \operatorname{Hom}_{RG}(Y,A) \to \ker d_{n+1}^*$$

es un isomorfismo y, así,

$$H^n(G,A) = \frac{\ker d_{n+1}^*}{\operatorname{im}(f\circ g)^*} \simeq \frac{\operatorname{Hom}_{RG}(Y,A)}{\operatorname{im} f^*},$$

como queríamos. □

PROPOSICIÓN 2.2. *Son equivalentes:*

1. *Si*

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{g} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0$$

   es una sucesión exacta de RG-módulos con $P_0, \dots, P_{n-1}$ proyectivos, entonces Y también es proyectivo.
2. *Existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0$$

   de RG-módulos con $P_0, \dots, P_n$ proyectivos.
3. *$H^k(G,A) = 0$ para todo RG-módulo A y todo $k > n$.*
4. *$H^{n+1}(G,A) = 0$ para todo RG-módulo A.*

5. *Si $f\colon A \to B$ es un epimorfismo de RG-módulos, entonces $\overline{f_*}\colon H^n(G,A) \to H^n(G,B)$ también es un epimorfismo.*

Las equivalencias están establecidas para $n \geqq 1$. Para n=0 se debe cambiar el item 1) por "R es un RG-módulo proyectivo" y el item 2) por "existe una sucesión $0 \to P_0 \to R \to 0$ de RG-módulos, con P_0 proyectivo".

Demostración. Es claro que 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4). Veamos que 4) ⇒ 1). Tomemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\alpha} P_n \xrightarrow{\beta} Y \longrightarrow 0 \tag{10}$$

de RG-módulos con P_n proyectivo y completemos la sucesión del item 1) a

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\alpha} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0$$

donde $d_n := g \circ \beta$. Por la Proposición 2.1 hay una sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_{RG}(P_n, Q) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Hom}_{RG}(Q, Q) \xrightarrow{h} H^{n+1}(G, Q) \longrightarrow 0$$

Como por hipótesis $H^{n+1}(G,Q) = 0$ se sigue que la sucesión (10) es partible y, por lo tanto, Y es proyectivo. Veamos a continuación que 2) ⇒ 5). Como f es sobreyectiva y P_n es proyectivo, $f_*\colon \operatorname{Hom}_{RG}(P_n, A) \to \operatorname{Hom}_{RG}(P_n, B)$ es un epimorfismo. Así, dado que por 2) los grupos abelianos $H^n(G,A)$ y $H^n(G,B)$ son cocientes de $\operatorname{Hom}_{RG}(P_n, A)$ y $\operatorname{Hom}_{RG}(P_n, B)$ respectivamente, también $\overline{f_*}$ es un epimorfismo. Probemos por último que 5) ⇒ 1). Para ello tomemos un epimorfismo $f\colon A \to B$ de RG-módulos. Por la Proposición 2.1 hay un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{RG}(P_{n-1}, A) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "f_*"] & \operatorname{Hom}_{RG}(Y, A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H^n(G, A) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f_*}"] & 0 \\
\operatorname{Hom}_{RG}(P_{n-1}, B) \arrow[r, "g^*"] & \operatorname{Hom}_{RG}(Y, B) \arrow[r] & H^n(G, B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en el que, por hipótesis $\overline{f_*}$ es un epimorfismo. Como, por ser P_{n-1} proyectivo la flecha vertical de la izquierda f_* es sobreyectiva, también lo es la del medio. En consecuencia, dado que f es arbitrario, Y es proyectivo. □

Cuando se cumpla cualquiera de estas condiciones equivalentes diremos que G tiene *dimensión cohomológica a lo sumo n sobre R* y escribiremos $\operatorname{cd}_R G \leq n$. Si esto no pasa para ningún n diremos que la dimensión cohomológica de G sobre R es infinita y escribiremos $\operatorname{cd}_R G = \infty$. Por ejemplo si G es un grupo cíclio finito y no trivial, entonces $\operatorname{cd}_R G = \infty$.

Si H es un subgrupo de un grupo G y M es un RH-módulo, entonces $\operatorname{Hom}_{RH}(RG, M)$ es un RG-módulo via la acción definida por $f^g(u) = f(gu)$, donde $f \in \operatorname{Hom}_{RH}(RG, M)$ y $g \in G$.

Lema 2.3. *Para cada RH-módulo M y cada RG-módulo N hay un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\theta_{MN}\colon \operatorname{Hom}_{RG}(N, \operatorname{Hom}_{RH}(RG, M)) \to \operatorname{Hom}_{RH}(N, M),$$

que es natural en M y N.

La naturalidad de θ_{MN} significa que si $h\colon M \to M'$ y $g\colon N' \to N$ son morfismos de RH-módulos y de de RG-módulos respectivamente, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{RG}(N, \mathrm{Hom}_{RH}(RG, M)) \arrow[r, "\theta_{MN}"] \arrow[d, "\alpha(g,h)"] & \mathrm{Hom}_{RH}(N, M) \arrow[d, "\beta(g,h)"] \\ \mathrm{Hom}_{RG}(N', \mathrm{Hom}_{RH}(RG, M')) \arrow[r, "\theta_{M'N'}"] & \mathrm{Hom}_{RH}(N', M'), \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $\alpha(g,h)$ y $\beta(g,h)$ están definidos por

$$\alpha(g,h)(f) := h_* \circ f \circ g \quad \text{y} \quad \beta(g,h)(f) := h \circ f \circ g,$$

siendo $h_*\colon \mathrm{Hom}_{RH}(RG, M) \to \mathrm{Hom}_{RH}(RG, M')$ el morfismo inducido por h.

Demostración. Definimos θ_{MN} por $\theta(f)(n) := f(n)(e)$, donde e es el neutro de RG. Dejamos al lector la tarea de probar que $\theta(f) \in \mathrm{Hom}_{RH}(N, M)$ y que θ es aditiva y natural en M y N. Para ver que es biyectiva es suficiente probar que hay una aplicación

$$\vartheta\colon \mathrm{Hom}_{RH}(N, M) \to \mathrm{Hom}_{RG}(N, \mathrm{Hom}_{RH}(RG, M))$$

tal que $\theta \circ \vartheta = \mathrm{id}$ y $\vartheta \circ \theta = \mathrm{id}$. Definimos esta aplicación por $\vartheta(f)(n)(g) := f(ng)$ para $n \in N$ y $g \in RG$. Dejamos también al lector la tarea de probar que $\vartheta(f)(n) \in \mathrm{Hom}_{RH}(RG, M)$ y que $\vartheta(f) \in \mathrm{Hom}_{RG}(N, \mathrm{Hom}_{RH}(RG, M))$. Por último

$$\theta(\vartheta(f))(n) = \vartheta(f)(n)(e) = f(n) \quad \text{y} \quad \vartheta(\theta(f))(n)(g) = \theta(f)(ng) = f(ng)(e) = f(n)(g),$$

como queríamos. $\square$

Proposición 2.4 (Lema de Shapiro). *Si H es un subgrupo de G y M es un RH-módulo, entonces $H^n(H, M) = H^n(G, \mathrm{Hom}_{RH}(RG, M))$.*

Demostración. Consideremos una resolución libre de R como RG-módulo

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0,$$

Dado que cada P_n es también libre como RH-módulo, podemos calcular $H^*(H, M)$ aplicando $\mathrm{Hom}_{RH}(-, M)$ a esta resolución. Así el resultado se sigue de que, por el lema anterior, $\mathrm{Hom}_{RH}(P_n, M)$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_{RG}(P_n, \mathrm{Hom}_{RH}(RG, M))$. $\square$

Corolario 2.5. *Si $H \subseteq G$ entonces $\mathrm{cd}_R H \le \mathrm{cd}_R G$.*

Corolario 2.6. *Si $\mathrm{cd}_R G < \infty$, entonces G no tiene torsión.*

Demostración. En caso contrario G tiene un subgrupo cíclico finito y no trivial H. Como $\mathrm{cd}_{\mathbb{Z}} H = \infty$ esto contradice la Proposición 2.4. $\square$

Definición 2.7. *Un complejo de R-módulos*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0,$$

se parte *si existen morfismos*

$$\eta\colon A \to X_0 \quad y \quad s_i\colon X_i \to X_{i+1} \quad para\ i \ge 0,$$

tales que $\epsilon \circ \eta = \mathrm{id}$, $\eta \circ \epsilon + d_1 \circ s_0 = \mathrm{id}$ y $s_{i-1} \circ d_i + d_{i+1} \circ s_i = \mathrm{id}$ para $i > 0$.

Lema 2.8. *Toda sucesión que se parte es exacta.*

Demostración. Para cada $i > 0$ y $x \in \ker d_i$,

$$x = (s_{i-1} \circ d_i + d_{i+1} \circ s_i)(x) = d_{i+1}(s_i(x))$$

y, así, $\ker d_i \subseteq \operatorname{im} d_{i+1}$. Similarmente ϵ es sobreyectiva y $\ker \epsilon \subseteq \operatorname{im} d_1$. □

Lema 2.9. *Si*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta de R-módulos y tanto A como todos los X_i son proyectivos, entonces la sucesión se parte.

Demostración. Para unificar notaciones escribimos d_0 en lugar de ϵ y X_{-1} en lugar de A. Como d_0 es un epimorfismo y X_{-1} es proyectivo existe $s_{-1}\colon X_{-1} \to X_0$ tal que $d_0 \circ s_{-1} = 1$. Supongamos que para $n \geq 0$ fijo hemos definidos $s_i\colon X_i \to X_{i+1}$ para $0 \leq i < n$ con la propiedad de que $d_{i+1} \circ s_i = 1 - s_{i-1} \circ d_i$. Entonces $\operatorname{im}(1 - s_{n-1} \circ d_n) \subseteq \ker d_n = \operatorname{im} d_{n+1}$ y, así, como X_n es proyectivo, existe $s_n\colon X_n \to X_{n+1}$ tal que $d_{n+1} \circ s_n = 1 - s_{n-1} \circ d_n$ □

Si M es $\mathbb{Z}G$-módulo y R es un anillo, entonces $M \otimes_{\mathbb{Z}} R$ es un RG-módulo via la acción definida por $(m \otimes r)sg := mg \otimes rs$, donde $m \in M$, $rs \in R$ y $g \in G$.

Lema 2.10. *Para cada $\mathbb{Z}G$-módulo M y cada RG-módulo N hay un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\theta_{MN}\colon \operatorname{Hom}_{RG}(M \otimes_{\mathbb{Z}} R, N) \to \operatorname{Hom}_{RH}(M, N),$$

que es natural en M y N.

La naturalidad de θ_{MN} significa que si $h\colon M' \to M$ y $g\colon N \to N'$ son morfismos de $\mathbb{Z}G$-módulos y de de RG-módulos respectivamente, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Hom}_{RG}(M \otimes_{\mathbb{Z}} R, N) & \xrightarrow{\theta_{MN}} & \operatorname{Hom}_{RH}(M, N) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \alpha(g,h)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \beta(g,h)} \\
\operatorname{Hom}_{RG}(M' \otimes_{\mathbb{Z}} R, N') & \xrightarrow{\theta_{M'N'}} & \operatorname{Hom}_{RH}(N', M'),
\end{array}$$

conmuta, donde $\alpha(g,h)$ y $\beta(g,h)$ están definidos por

$$\alpha(g,h)(f) := g \circ f \circ (h \otimes R) \quad \text{y} \quad \beta(g,h)(f) := g \circ f \circ h.$$

Demostración. Definimos la aplicación θ_{MN} por $\theta(f)(m) := f(m \otimes 1)$. Es evidente que $\theta(f) \in \operatorname{Hom}_{RH}(N, M)$ y que θ es aditiva y dejamos al lector la tarea de comprobar que es natural en M y N. Para ver que es biyectiva es suficiente probar que hay una aplicación

$$\vartheta\colon \operatorname{Hom}_{RH}(N, M) \to \operatorname{Hom}_{RG}(M \otimes_{\mathbb{Z}} R, N)$$

tal que $\theta \circ \vartheta = \mathrm{id}$ y $\vartheta \circ \theta = \mathrm{id}$. Definimos esta aplicación por $\vartheta(f)(m \otimes r) := f(m)r$ para $m \in M$ y $r \in R$. Dejamos también al lector la tarea de probar que $\vartheta(f) \in \operatorname{Hom}_{RG}(M \otimes_{\mathbb{Z}} R, N)$. Por último

$$\theta(\vartheta(f))(m) = \vartheta(f)(m \otimes 1) = f(m) \quad \text{y} \quad \vartheta(\theta(f))(m \otimes r) = \theta(f)(m)r = f(m \otimes 1)r = f(m \otimes r),$$

como queríamos. □

Proposición 2.11. *Si M es un RG-módulo, entonces $H^n(G, M)$ no depende de que se considere a M como RG-módulo o como $\mathbb{Z}G$-módulo.*

Demostración. Consideremos una resolución proyectiva

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo. Por el Lema 2.9 esta sucesión es partible y así también lo es la sucesión

$$\cdots \longrightarrow P_n \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow P_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow P_0 \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0,$$

Por lo tanto, por el Lema 2.8 esta última es una resolución de R como RG-módulo. Como además cada $P_n \otimes_{\mathbb{Z}} R$ es proyectivo podemos calcular $H^n(G, M)$, para el RG-módulo M, aplicando $\operatorname{Hom}_{RG}(-, M)$ a esta resolución. Así, por el lema anterior, el resultado se sigue de que $\operatorname{Hom}_{RG}(P_n \otimes_{\mathbb{Z}} R, M)$ es naturalmente isomorfo a $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_n, M)$. $\square$

Lema 2.12. *Supongamos que R es un anillo conmutativo y que*

$$\cdots \xrightarrow{d'_{n+1}} X'_n \xrightarrow{d'_n} X'_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d'_1} X'_0 \xrightarrow{\epsilon'} A' \longrightarrow 0$$

y

$$\cdots \xrightarrow{d''_{n+1}} X''_n \xrightarrow{d''_n} X''_{n-1} \xrightarrow{d''_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d''_1} X''_0 \xrightarrow{\epsilon''} A'' \longrightarrow 0$$

son complejos de R-módulos que se parten. Si definimos X_n y $d_{n+1}\colon X_{n+1} \to X_n$ para $n \geq 0$ por

$$X_n = \bigoplus_{i+j=n} X'_i \otimes_R X''_j \qquad y \qquad d_{n+1}(x'_i \otimes x''_j) := d'_i(x'_i) \otimes x''_j + (-1)^i x'_i \otimes d''_j(x''_j),$$

entonces la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\epsilon} A' \otimes_R A'' \longrightarrow 0,$$

donde $\epsilon := \epsilon' \otimes \epsilon''$, se parte.

Demostración. Tomemos morfismos $\eta'\colon A' \to X'_0$, $s'_n\colon X'_n \to X'_{n+1}$, $\eta''\colon A'' \to X''_0$ y $s''_n\colon X''_n \to X''_{n+1}$ que parten a la primera y segunda sucesión respectivamente y definamos $\eta\colon A' \otimes_R A'' \to X_0$ y $s_n\colon X_n \to X_{n+1}$ como

$$\eta(a' \otimes a'') := \eta'(a') \otimes \eta''(a''),$$

$$s_n(x'_i \otimes x''_j) := \begin{cases} s'_0(x'_0) \otimes x''_n + \eta'\epsilon'(x'_0) \otimes s''_n(x''_n) & \text{si } i = 0, \\ s'_i(x'_i) \otimes x''_j & \text{si } i > 0, \end{cases}$$

respectivamente. Un cálculo directo muestra que estos morfismos η y s_n parten la sucesión deseada. $\square$

Corolario 2.13. *La sucesión de R-módulos*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\epsilon} A' \otimes_R A'' \longrightarrow 0,$$

es exacta.

Observación 2.14. *El Lema 2.12 y su corolario se extienden directamente a cualquier producto tensorial finito de sucesiones.*

Teorema 2.15. *Si H es un subgrupo de un grupo G tal que $|G : H| < \infty$ y $\operatorname{cd}_R G < \infty$, entonces $\operatorname{cd}_R H = \operatorname{cd}_R G$.*

Demostración. Denotemos con n a $\operatorname{cd}_R G = n$ y tomemos un RG-módulo M tal que $H^n(G, M) \neq 0$. Para probar la proposición será suficiente ver que existe un epimorfismo $\psi\colon \operatorname{Hom}_{RH}(RG, M) \to M$ de RG-módulos. En efecto, en este caso, por el item 5 de la la Proposición 2.2, también $\overline{\psi_*}\colon H^n(G, \operatorname{Hom}_{RH}(RG, M)) \to H^n(G, M)$ es un epimorfismo. Por lo tanto, según la Proposición 2.4, sabemos que $H^n(H, M) = \operatorname{Hom}_{RH}(RG, M) \neq 0$, lo que implica que $\operatorname{cd}_R H \geq n$. Veamos que existe tal epimorfismo ψ. Tomemos una transversal $\{t_1, \dots, t_m\}$ del conjunto de clases a izquierda de H en G, de modo que $G = \bigsqcup t_i H = \bigsqcup H t_i^{-1}$ y consideremos la aplicación

$$\varphi\colon \operatorname{Hom}_{RH}(RG, M) \to M \otimes_{RH} RG,$$

definida por $\varphi(f) := \sum_{i=1}^m f(t_i) \otimes t_i^{-1}$. Notemos que $\varphi(f)$ no depende de la transversal $\{t_1, \dots, t_m\}$ elegida pues si $u_i = t_i h_i$ con $h_i \in H$, entonces

$$\sum_{i=1}^m f(u_i) \otimes u_i^{-1} = \sum_{i=1}^m f(t_i h_i) \otimes (t_i h_i)^{-1} = \sum_{i=1}^m f(t_i) h_i \otimes h_i^{-1} t_i^{-1} = \sum_{i=1}^m f(t_i) \otimes t_i^{-1}.$$

Afirmamos que φ es RG-lineal. Para verificar esto debemos ver que

$$\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2), \quad \varphi(fr) = \varphi(f)r \quad \text{y} \quad \varphi(f^g) = \varphi(f)g$$

donde $f, f_1, f_2 \in \operatorname{Hom}_{RH}(RG, M)$, $r \in R$ y $g \in G$. Pero

$$\varphi(f_1 + f_2) = \sum_{i=1}^m (f_1(t_i) + f_2(t_i)) \otimes t_i^{-1} = \sum_{i=1}^m f_1(t_i) \otimes t_i^{-1} + \sum_{i=1}^m f_2(t_i) \otimes t_i^{-1} = \varphi(f_1) + \varphi(f_2),$$

$$\varphi(fr) = \sum_{i=1}^m f(rt_i) \otimes t_i^{-1} = \sum_{i=1}^m f(t_i) r \otimes t_i^{-1} = \sum_{i=1}^m f(t_i) \otimes t_i^{-1} r = \varphi(f) r$$

y

$$\varphi(f^g) = \sum_{i=1}^m f(g t_i) \otimes t_i^{-1} = \left(\sum_{i=1}^m f(g t_i) \otimes (g t_i)^{-1} \right) g = \varphi(f) g.$$

Además φ es biyectiva pues, dado que $RG = \bigoplus t_i RH$ como RH-módulo a derecha, cada $f \in \operatorname{Hom}_{RH}(RG, M)$ está determinada por una elección arbitraria de $f(t_1), \dots, f(t_n)$, y, puesto que $RG = \bigoplus RH t_i^{-1}$ como RH-módulo a izquierda,

$$M \otimes_{RH} RG = M \otimes_{RH} \bigoplus_{i=1}^m RH t_i^{-1} = \bigoplus_{i=1}^m M \otimes_{RH} RH t_i^{-1},$$

de manera que cada elemento en $M \otimes_{RH} RG$ se escribe de forma única como $\sum x_i \otimes t_i^{-1}$ con $x_1, \dots, x_m \in M$. Componiendo φ con el epimorfismo de RG-módulos $M \otimes_{RH} RG \to M$, dado por $m \otimes g \mapsto mg$, obtenemos el epimorfismo ψ buscado. □

Definición 2.16. *Decimos que un grupo G tiene R-*torsión*, donde R es un anillo arbitrario, si existe un subgrupo finito de G cuyo orden no es inversible en R.*

Teorema 2.17. *Si R es conmutativo, G no tiene R-torsión y H es un subgrupo de G de índice finito, entonces* $\operatorname{cd}_R H = \operatorname{cd}_R G$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una resolución proyectiva

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0,$$

de R como RH-módulo y escribamos $m := |G : H|$. Definimos

$$Q_n := \bigoplus_{i_1+\cdots+i_m=n} P_{i_1} \otimes_R \cdots \otimes_R P_{i_m}. \tag{11}$$

Por el Lema 2.9 y su observación, esta resolución se parte como complejo de R-módulos. Así, podemos usar el Lema 2.12 (aplicado a más de una sucesión) para obtener la sucesión exacta de R-módulos

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} Q_n \xrightarrow{\delta_n} Q_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_1} Q_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0,$$

donde

$$\epsilon(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) := \epsilon(x_1) \cdots \epsilon(x_m)$$

y

$$\delta_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) := \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i_1+\cdots+i_{j-1}} x_1 \otimes \cdots \otimes x_{j-1} \otimes d_{i_j}(x_j) \otimes x_{j+1} \otimes \cdots \otimes x_m$$

si $x_j \in P_{i_j}$ para $1 \leq j \leq m$. Nuestro objetivo será dotar a los Q_k de una estructura de RG-módulo que los haga proyectivos y tal que los δ sean morfismos de RG-módulos. De esta manera, si $\operatorname{cd}_R H < \infty$, entonces podremos elegir los P_i de forma tal que sean todos cero a partir de cierto $u \in \mathbb{N}$ y, así quedará $Q_i = 0$ para $i > um$, por lo que $\operatorname{cd}_R G < \infty$ y el resultado se seguirá del Teorema 2.15. Notemos que si $\operatorname{cd}_H = \infty$ entonces, por el corolario a la Proposición 2.4, también $\operatorname{cd}_G = \infty$. Denotemos con M al conjunto

$$M := \{(\sigma, h_1, \ldots, h_m) : \sigma \in \mathbb{S}_m \text{ y } h_1, \ldots, h_m \in H\},$$

dotado del producto

$$(\sigma, h_1, \ldots, h_m)(\tau, k_1, \ldots, k_m) := (\tau \circ \sigma, h_{\tau^{-1}(1)} k_1, \ldots, h_{\tau^{-1}(m)} k_m).$$

Es fácil comprobar que M es un grupo. Fijemos una transversal a derecha $\{t_1, \ldots, t_m\}$ de H en G de modo que $G = \bigcup_{i=1}^m Ht_i$. Para todo $g \in G$ existen un único $\sigma \in \mathbb{S}_m$ y elementos únicos $h_1, \ldots, h_m$ de H tales que $t_i g = h_{\sigma(i)} t_{\sigma(i)}$. La aplicación

$$\theta \colon G \to M,$$

definida por $\theta(g) := (\sigma, h_1, \ldots, h_m)$ es un morfismo de grupos. Definimos una acción de RM en Q_n por

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \cdot r(\sigma, h_1, \ldots, h_m) := (-1)^a x_{\sigma^{-1}(1)} h_1 \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(m)} h_m r,$$

donde, si $x_j \in P_{i_j}$ para $1 \leq j \leq m$,

$$a := \sum_{\{(j,l) : j<l \text{ y } \sigma(j)>\sigma(l)\}} i_j i_l.$$

Veamos que esta es efectivamente una acción. Como claramente

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \cdot (\mathrm{id}, e, \ldots, e) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_m).$$

sólo debemos comprobar que

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \cdot r\zeta s\xi = \big((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \cdot r\zeta\big) \cdot s\xi \tag{12}$$

donde $\zeta := (\sigma, h_1, \dots, h_m)$ y $\xi := (\tau, k_1, \dots, k_m)$. Es obvio que podemos suponer que $r = s = 1$. Por definición

$$\begin{aligned}\big((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \cdot \zeta\big) \cdot \xi &= (-1)^a \big(x_{\sigma^{-1}(1)}h_1 \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(m)}h_m\big) \cdot \xi \\ &= (-1)^a(-1)^b x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))}h_{\tau^{-1}(1)}k_1 \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(m))}h_{\tau^{-1}(1)}k_m,\end{aligned}$$

donde

$$b := \sum_{\{(j,l):j<l \text{ y } \tau(j)>\tau(l)\}} i_{\sigma^{-1}(j)} i_{\sigma^{-1}(l)}.$$

Por otra parte se sigue también de la definición que

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \cdot \zeta\xi' = (-1)^c x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))}h_{\tau^{-1}(1)}k_1 \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(m))}h_{\tau^{-1}(m)}k_m,$$

donde

$$c := \sum_{\{(j,l):j<l \text{ y } \tau(\sigma(j))>\tau(\sigma(l))\}} i_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(j))} i_{\sigma^{-1}((\tau^{-1}l))}.$$

En consecuencia, para verificar (12) es suficiente ver que $(-1)^{a+b} = (-1)^c$. Pero

$$\begin{aligned} a+b &= \sum_{\{(j,l):j<l \text{ y } \sigma(j)>\sigma(l)\}} i_j i_l + \sum_{\{(j,l):\sigma(j)<\sigma(l) \text{ y } \tau(\sigma(j))>\tau(\sigma(l))\}} i_j i_l \\ &= \sum_{\{(j,l):j<l,\ \sigma(j)>\sigma(l) \text{ y } \tau(\sigma(j))>\tau(\sigma(l))\}} i_j i_l + \sum_{\{(j,l):j<l,\ \sigma(j)>\sigma(l) \text{ y } \tau(\sigma(j))<\tau(\sigma(l))\}} i_j i_l \\ &+ \sum_{\{(j,l):j<l,\ \sigma(j)<\sigma(l) \text{ y } \tau(\sigma(j))>\tau(\sigma(l))\}} i_j i_l + \sum_{\{(j,l):j>l,\ \sigma(j)<\sigma(l) \text{ y } \tau(\sigma(j))>\tau(\sigma(l))\}} i_j i_l,\end{aligned}$$

y, como la suma del primer y tercer término del lado derecho de la última igualdad es c y el segundo y cuarto término coinciden, $(-1)^{a+b} = (-1)^c$. Definimos la acción de RG sobre cada Q_n por medio de θ. Es decir

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \cdot rg := (x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \cdot r\theta(g).$$

Probemos a continuación que $\delta_n \colon Q_n \to Q_{n-1}$ es un morfismos de RM-módulos y, por lo tanto también de RG-módulos, para cada $n \geq 1$. Para ello será suficiente ver que

$$\delta_n\big((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \cdot \zeta\big) = \delta_n\big((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)\big) \cdot \zeta, \tag{13}$$

para $\zeta \in M$ de la forma $\zeta := (\mathrm{id}, h_1, \dots, h_m)$ o $\zeta := ((r, r+1), e, \dots, e)$. Es evidente que la igualdad (13) se satisface en el primer caso. Supongamos entonces que estamos en el segundo. Los términos en el lado izquierdo y derecho de (13) en los que aparece $d_{i_j}(x_j)$ con j fijo y distinto de r y $r+1$ son idénticos y de la forma

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_{j-1}+i_r i_{r+1}} x_1 \otimes \cdots \otimes d_{i_j}(x_j) \otimes \cdots \otimes x_m$$

dónde los $x_1, \dots, x_m$ están en órden salvo que x_{r+1} precede a x_r. Finalmente la suma de los dos términos restantes en el lado izquierdo de (13) es

$$\begin{aligned}&(-1)^{i_r i_{r+1}}(-1)^{i_1+\cdots+i_{r-1}} x_1 \otimes \cdots \otimes x_{r-1} \otimes d_{i_{r+1}}(x_{r+1}) \otimes x_r \otimes x_{r+2} \otimes \cdots \otimes x_m \\ &+ (-1)^{i_r i_{r+1}}(-1)^{i_1+\cdots+i_{r-1}+i_{r+1}} x_1 \otimes \cdots \otimes x_{r-1} \otimes x_{r+1} \otimes d_{i_r}(x_r) \otimes x_{r+2} \otimes \cdots \otimes x_m,\end{aligned}$$

mientras que la suma análoga en el lado derecho de (13) es

$$\begin{aligned}&(-1)^{i_1+\cdots+i_{r-1}}(-1)^{(i_r-1)i_{r+1}}x_1\otimes\cdots\otimes x_{r-1}\otimes x_{r+1}\otimes d_{i_r}(x_r)\otimes x_{r+2}\otimes\cdots\otimes x_m\\ &+(-1)^{i_1+\cdots+i_r}(-1)^{i_r(i_{r+1}-1)}x_1\otimes\cdots\otimes x_{r-1}\otimes d_{i_{r+1}}(x_{r+1})\otimes x_r\otimes x_{r+2}\otimes\cdots\otimes x_m,\end{aligned}$$

que evidentemente coincide con la anterior. Resta ver que los Q_n son RG-módulos proyectivos. Notemos que hasta ahora no hemos usado que G no tiene R-torsión.

Para ver que los Q_n son proyectivos como RG-módulos probaremos en general que para toda familia $(P_i)_{i\ge 0}$ de RH-módulos proyectivos el RG-módulo $Q=\bigoplus_{n\ge 0}Q_n$, obtenido tomando Q_n como en (11), es proyectivo. Para ello podemos asumir que los P_i son libres, pues si probamos este caso podremos pasar al de los P_i proyectivos usando que existen RH-módulos P_i' tales que los $P_i'':=P_i\oplus P_i'$ son libres y que Q_n es sumando directo del RG-módulo Q'' asociado a la familia $(P_i'')_{i\ge 0}$. Tomemos $X:=\bigcup_{i\ge 0}X_i$ donde X_i es una base fijada de P_i. Claramente el conjunto

$$W:=\{x_1h_1\otimes\cdots\otimes x_nh_n : x_i\in X \text{ y } h_i\in H \text{ con } i=1,\dots,n\},$$

es una base de Q como R-módulo. Notemos que $W\cup -W$ es invariante por la acción de G definida arriba. Consideremos la acción a derecha de $G\times\mathbb{Z}_2$ sobre $W\cup -W$, definida por

$$w\cdot(g,u):=\begin{cases} w\cdot g & \text{si } u=0,\\ -w\cdot g & \text{si } u=1.\end{cases}$$

Tomemos un subconjunto W_0 de W que tenga exactamente un elemento de cada órbita de $W\cup -W$ por esta acción. Como Q es un R-módulo libre sobre W,

$$Q=\bigoplus_{w\in W_0} w\cdot RG.$$

Afirmamos que los $w\cdot RG$ son proyectivos. Para cada $w\in W$ denotemos con K_w al estabilizador de w por la acción de G. Afirmamos que K_w siempre es finito. Para ver esto denotemos con N al núcleo de la representación de G como grupo de permutaciones obtenida haciendo actuar a G a derecha sobre la transversal $\{t_1,\dots,t_n\}$ de H en G. Así, si $g\in N$, existen $h_1,\dots,h_n\in H$ tales que $t_ig=h_it_i$ y, por lo tanto, si $w=x_1k_1\otimes\cdots\otimes x_nk_n$, entonces

$$w\cdot g=x_1k_1h_1\otimes\cdots\otimes x_nk_nh_n.$$

Como W es base, se sigue de esto que $g\in K_w\cap N$ si y sólo si $h_1=\cdots=h_n=e$. En consecuencia $N\cap K_w=\{e\}$, lo cual implica que la restricción a K_w de la proyección canónica $\pi\colon G\to G/N$ es inyectiva. Como G/N es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{S}_n$ se sigue de esto que K_w es finito. Escribamos

$$\overline{K_w}:=\{g\in G : w\cdot g=\pm w\}.$$

Es claro que que $\overline{K_w}$ es un subgrupo de G que contiene a K_w. Además $|\overline{K_w}:K_w|\le 2$ ya que si $g_1,g_2\in\overline{K_w}\setminus K_w$, entonces $g_2g_1^{-1}\in K_w$. Consideremos el morfismo de RG-módulos $f\colon RG\to w\cdot RG$, definido por $f(v)=w\cdot v$. Como W es R-linealmente independiente el núcleo de f está generado como RG-módulo por

$$\{e-x : x\in K_w\}\bigcup\{e+x : x\in\overline{K_w}\setminus K_w\}.$$

Supongamos que $\overline{K_w}=K_w$ (por ejemplo esto pasa si R tiene característica 2). Como G no tiene R-torsión, $|K_w|$ es inversible en R. Tomemos el morfismo de RG-módulos $l\colon RG\to RG$

definido por $l(v) = uv$, donde

$$u := \frac{1}{|K_w|} \sum_{x \in K_w} x \tag{14}$$

Puesto que $u(e - x) = 0$ para $x \in K_w$, existe un morfismo $\varphi\colon w \cdot RG \to RG$ de RG-módulos tal que $l = \varphi \circ f$. Observando que $f(u) = w \cdot u = w$ concluimos que $f \circ \varphi$ es la identidad de $w \cdot RG$, lo que implica que $w \cdot RG$ es proyectivo. En efecto,

$$f(\varphi(w \cdot v)) = f(\varphi(f(v))) = f(l(v)) = f(uv) = w \cdot uv = (w \cdot u) \cdot v = w \cdot v.$$

Si $K_w \subsetneq \overline{K_w}$ aplicamos un argumento similiar, pero tomando u como

$$\frac{1}{|\overline{K_w}|} \left(\sum_{x \in K_w} x - \sum_{y \in \overline{K_w} \setminus K_w} y \right)$$

en lugar de (14). $\square$

Capítulo 3

El ideal de aumentación

El *ideal de aumentación* I_G del álgebra de grupo RG es el núcleo del morfismo de álgebras $\varepsilon\colon RG \to R$, definido por $\varepsilon(\sum r_g g) := \sum r_g$. Claramente I_G es libre sobre R con base

$$\{g - e : g \in G \setminus \{e\}\}.$$

De la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I_G \longrightarrow RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

se sigue que $\operatorname{cd}_R G \leq 1$ si y sólo si I_G es RG-proyectivo. Para cada subgrupo H de G denotamos con J_{GH} (o simplemente J_H si G es evidente) al ideal a derecha $I_H RG$ de RG.

Lema 3.1. *Para cada subgrupo H de G y cada transversal a derecha $(g_i)_{i\in I}$ de H en G que contiene a e se satisfacen:*

1. *J_H es R-libre con base $\{(h-e)g_i : h \in H \setminus \{e\}$ e $i \in I\}$.*
2. *RG/J_H es R-libre con base $\{\overline{g}_i : i \in I\}$, donde $\overline{g}_i$ denota a la clase de g_i en RG/J_H.*
3. *$g - e \in J_H$ si y sólo si $g \in H$.*
4. *Si K es otro subgrupo de G, entonces $H \subseteq K$ si y sólo si $J_H \subseteq J_K$. En particular $H = K$ si y sólo si $J_H = J_K$.*

Demostración. 1) y 2) Como

$$(h-e)h'g_i = (hh'-e)g_i - (h'-e)g_i \quad \text{para } h \in H \setminus \{e\},\ h' \in H \text{ e } i \in I,$$

el ideal a derecha J_H de RG y el RG-módulo a derecha RG/J_H están generados sobre R por $\{(h-e)g_i : h \in H \setminus \{e\}$ e $i \in I\}$ y $\{\overline{g_i} : i \in I\}$, respectivamente. Veamos que estas son bases. Supongamos que

$$\sum_{i\in I} g_i r_i = \sum_{\substack{i\in I\\ h\in H\setminus\{e\}}} (h-e)g_i r_{i,h}.$$

Entonces
$$\sum_{i\in I} g_i\biggl(r_i - \sum_{h\in H\setminus\{e\}} r_{i,h}\biggr) + \sum_{\substack{i\in I\\ h\in H\setminus\{e\}}} hg_i r_{i,h} = 0$$
y, por lo tanto, $r_{i,h} = r_i = 0$ para todo $h \in H \setminus \{e\}$ y todo $i \in I$.

3) Escribamos $g = hg_i$ donde $i \in I$ y $h \in H$. Como $g - e = (h - e)g_i + (g_i - e)$, las clases de $g - e$ y de $g_i - e$ en RG/J_H coinciden. Así $g - e \in J_H$ si y sólo si $g_i = e$.

4) Es consecuencia inmediata del item 3). □

Lema 3.2. *Si H es un subgrupo de G y S es un subconjunto de G, entonces $H = \langle S\rangle$ si y sólo si J_H está generado como RG-módulo por $\{s - e : s \in S\}$.*

Demostración. Supongamos primero que $H = \langle S\rangle$. Tomemos $r \in H$ y escribamoslo como $r = t_1 \cdots t_n$ con $t_i \in S \cup S^{-1}$. Se sigue inductivamente de la expresión
$$r - e = (t_n - e)t_{n-1} \cdots t_1 + t_{n-1} \cdots t_1 - e$$
que $r - e$ está en el RG-submódulo de J_H generado por $\{t - e : t \in S \cup S^{-1}\}$. Como J_H está generado como RG-módulo por estos $r - e$ y $s^{-1} - e = -(s - e)s^{-1}$ concluimos que J_H está generado como RG-módulo por $\{s - e : s \in S\}$. Supongamos ahora que vale esto último y escribamos $K := \langle S\rangle$. Por lo que acabamos de probar J_K está generado como RG-módulo por $\{s - e : s \in S\}$. Pero entonces $J_K = J_K$ y, así, por el item 4) del Lema 3.1, sabemos que $H = K$. □

Corolario 3.3. *Sean H un subgrupo de G y $(G_a)_{a\in\Lambda}$ una familia de subgrupos de G. Entonces $H = \langle G_a : a \in \Lambda\rangle$ si y sólo si $J_H = \sum_{a\in\Lambda} J_{G_a}$.*

Lema 3.4. *Sea H un subgrupo de G. Para cada ideal a derecha M de RH, el morfismo de RG-módulos $f\colon M \otimes_{RH} RG \to MRG$ dado por $f(m \otimes rg) := m.rg$, es un isomorfismo.*

Demostración. Como RG es un RH-módulo libre, la aplicación canónica
$$i\colon M \otimes_{RH} RG \to RH \otimes_{RH} RG$$
es inyectiva. Componiendo i con el isomorfismo $RH \otimes_{RH} RG \to RG$ obtenemos un morfismo inyectivo cuya correstricción a su imagen es el isomorfismo f que estamos buscando. □

Ejemplo 3.5. *Consideremos un subgrupo monogenerado $H := \langle a\rangle$ de un grupo G. Por el Lema 3.2 sabemos que J_H está generado por $a-e$ como RG-módulo a derecha. Afirmamos que J_H es un RG-módulo libre a derecha con base $a - e$ si y sólo si el orden de a es infinito. Por el lema anterior es evidente que podemos considerar que $H = G$. Ahora, si $a^n = e$, entonces $RH \simeq R[X]/\langle X^n - 1\rangle$ (via la identificación que envía a en la clase de X) y $X - 1$ tiene un anulador no trivial en $R[X]/\langle X^n - 1\rangle$ pues $0 = X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + \cdots + 1)$, mientras que si el orden de a es infinito, entonces $RH \simeq R[X, X^{-1}]$ (via la identificación que envía a en X) y el anulador de $X - 1$ en $R[X, X^{-1}]$ es trivial.*

Observación 3.6. *Como I_G es un R-módulo libre con base $\{g - e : g \in G \setminus \{e\}\}$, cada morfismo R-lineal $f\colon I_G \to M$ queda determinado por una función $\varphi\colon G \to M$ que satisface $\varphi(e) = 0$, vía $f(g - e) := \varphi(g)$. Supongamos que M es un RG-módulo. Entonces*
$$\begin{aligned} f \text{ es } RG\text{-lineal} &\iff f((x - e)y) = f(x - e)y \text{ para todo } x, y \in G\\ &\iff f(xy - e) - f(y - e) = f(x - e)y \text{ para todo } x, y \in G\\ &\iff \varphi(xy) = \varphi(x)y + \varphi(y) \text{ para todo } x, y \in G. \end{aligned}$$

En consecuencia tener un morfismo RG-lineal $f\colon I_G \to M$ *es equivalente a tener una función* $\varphi\colon G \to M$ *tal que* $\varphi(xy) = \varphi(x)y + \varphi(y)$ *para todo* $x, y \in G$ *y* $\varphi(e) = 0$*. Notemos que la segunda condicion pude ser omitida pues se deduce de la primera poniendo* $x = y = e$*.*

Observación 3.7. *Sea M un RG-módulo. Por la Proposición 2.1 de la sucesion exacta*

$$0 \longrightarrow I_G \xrightarrow{i} RG \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0$$

se obtiene una sucesión exacta de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_{RG}(RG, M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{RG}(I_G, M) \xrightarrow{h} H^1(G, M) \longrightarrow 0.$$

En consecuencia, debido a la observación anterior, $H^1(G, M) = 0$ *si y sólo si para toda función* $\varphi\colon G \to M$ *que satisfaga* $\varphi(xy) = \varphi(x)y + \varphi(y)$ *para todo* $x, y \in G$*, existe* $m \in M$ *tal que* $\varphi(g) = m(g - e)$ *para todo* $g \in G$*.*

Teorema 3.8. *Sean* G_0, G_1, G_2, G_3 *subgrupos de un grupo G. Vale lo siguiente:*

1. $\langle G_1, G_2\rangle = G_1 *_{G_0} G_2$ *si y sólo si* $J_{G_1} \cap J_{G_2} = J_{G_0}$*.*
2. $G_3 = G_1 *_{G_0} G_2$ *si y sólo si* $J_{G_1} + J_{G_2} = J_{G_3}$ *y* $J_{G_1} \cap J_{G_2} = J_{G_0}$*.*

Demostración. El segundo item se deduce inmediatamente del primero y del Corolario 3.3. Veamos que vale el item 1). Supongamos que $J_{G_1} \cap J_{G_2} = J_{G_0}$. Del ítem 4) del Lema 3.1 se sigue que $G_0 \subseteq G_1 \cap G_2$, con lo cual tiene sentido considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & G_1 \arrow[d, "i_1"'] \arrow[ddr, "\iota_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, "\iota_2"'] & G_1 *_{G_0} G_2 \arrow[dr, "\theta"] & \\
& & \langle G_1, G_2\rangle
\end{tikzcd}$$

en el que j_1, j_2, i_1, i_2, ι_1 y ι_2 son las inclusiones canónicas y θ es el morfismo obtenido usando la propiedad universal de $G_1 *_{G_0} G_2$. Queremos ver que $\langle G_1, G_2\rangle = G_1 *_{G_0} G_2$ o, más precisamente, que θ es un isomorfismo. Como evidentemente es sobreyectivo sólo debemos probar que es un monomorfismo. Debido a los comentarios que aparecen a continuación de la Proposición 1.12, para ello es suficiente ver que un producto $g_n \cdots g_1$ en G, cuyos factores están alternadamente en $G_1 \setminus G_0$ y $G_2 \setminus G_0$, no puede estar en G_0. Pero como la igualdad $g_n \cdots g_1 = k$ es equivalente a $g_n \cdots g_2(g_1 k^{-1}) = e$, es suficiente probar que $g_n \cdots g_1$ no puede ser e. Hacemos esto por inducción en n. El caso $n = 1$ es trivial. Si $n > 1$ y n es impar, entonces $g_n \cdots g_2 g_1 = e$ si y sólo si $g_{n-1} \cdots g_2(g_1 g_n) = e$, con lo cual por hipótesis inductiva debe ser $g_1 g_n \in G_0$. Puesto que entonces $g_2(g_1 g_n) \in G_0^c$, aplicando la hipótesis inductiva a $g_{n-1} \cdots [g_2(g_1 g_n)]$, obtenemos el resultado que queremos. Supongamos ahora que $g_n \cdots g_1 = e$ con $n > 1$ par. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $g_1 \in G_1$. Entonces

$$0 = g_n \dots g_1 - e = \sum_{i=1}^{n} (g_i - e) g_{i-1} \dots g_1 = \sum_{i \text{ par}} (g_i - e) g_{i-1} \dots g_1 + \sum_{i \text{ impar}} (g_i - e) g_{i-1} \dots g_1.$$

Como el primer sumando está en J_{G_1} y el segundo en J_{G_2}, obtenemos

$$(15) \qquad \sum_{i \text{ impar}} (g_i - e)g_{i-1} \dots g_1 \in J_{G_1} \cap J_{G_2} = J_{G_0}$$

Notemos además que

$$(16) \qquad g := g_{i-1} \cdots g_1 \notin G_1 \quad \text{para todo } 1 < i < n \text{ impar.}$$

En efecto si $g \in G_0$, entonces $e = g_{i-1} \cdots g_2(g_1 g_0^{-1})$, lo que contradice la hipótesis inductiva, y si $g \in G_1 \setminus G_0$, entonces $e = g^{-1} g_{i-1} \cdots g_1$, lo que también contradice la hipótesis inductiva. Ahora, por el item 1) del Lema 3.1 sabemos que J_{GG_1} es R-libre con base $\{(h-e)g_i\}$, donde $(g_i)_{i \in I}$ es una transversal a derecha de G_1 en G y, en consecuencia, existe un morfismo R-lineal

$$f\colon J_{GG_1} \to I_{G_1},$$

que restringido a I_{G_1} es la identidad y que envía $(x-e)y$ en 0 para $x \in G_1$ e $y \in G_1^c$. Es claro que $f(J_{GG_0}) \subseteq J_{G_1 G_0}$. En consecuencia, aplicando f a (15) y teniendo en cuenta (16), obtenemos que $g_1 - e \in J_{G_1 G_0}$, lo que por el ítem 3) del Lema 3.1, implica que $g_1 \in G_0$ contra lo asumido. Esto completa la primera parte de la demostración.

Para la recíproca supongamos que la función $\theta\colon G_1 *_{G_0} G_2 \to \langle G_1, G_2 \rangle$ es un isomorfismo y denotemos a $\langle G_1, G_2 \rangle$ con G_3. Como $G_0 \subseteq G_1 \cap G_2$, se sigue del ítem 4) del Lema 3.1, que $J_{G_0} \subseteq J_{G_1} \cap J_{G_2}$. Para ver que vale la otra inclusión es suficiente probar que para todo RG-módulo M y todo par de morfismos RG-lineales $f_1\colon J_{G_1} \to M$ y $f_2\colon J_{G_2} \to M$, tales que $f_1 = f_2$ en J_{G_0}, existe un morfismo RG-lineal $f_3\colon J_{G_3} \to M$ que coincide con f_1 en J_{G_1} y con f_2 en J_{G_2}. En efecto, esto muestra en particular que existe un morfismo RG-lineal $f_3\colon J_{G_3} \to J_{G_1}/J_{G_0}$, que se anula en J_{G_2} y coincide con la proyección canónica en J_{G_1}, lo cual sólo es posible si $J_{G_1} \cap J_{G_2} = J_{G_0}$. Veamos entonces que existe el morfismo $f_3\colon J_{G_3} \to M$ prometido arriba. Consideremos el producto semidirecto $G \ltimes M$ cuya multiplicación está definida por

$$(g_1, m_1)(g_2, m_2) := (g_1 g_2, m_1 \cdot g_2 + m_2).$$

Por el Lema 3.4 y la Observación 3.6, una aplicación $\varphi_i\colon G_i \to M$ se extiende a un morfismo RG-lineal $f_i\colon J_{G_i} \to M$ si y sólo si $\varphi_i(xy) = \varphi_i(x)y + \varphi_i(y)$ para todo $x, y \in G_i$ y, además, esta extensión es única. Por otra parte un cálculo directo muestra que una función $\varphi_i\colon G_i \to M$ satisface la propiedad mencionada arriba, si y sólo si la aplicación

$$\phi_i\colon G_i \to G \ltimes M,$$

definida por $\phi_i(x) := (x, \varphi_i(x))$, es un morfismo de grupos. Supongamos entonces que tenemos morfismos $f_1\colon J_{G_1} \to M$ y $f_2\colon J_{G_2} \to M$, tales que $f_1 = f_2$ en J_{G_0} y consideremos sus restricciones $\varphi_1\colon G_1 \to M$ y $\varphi_2\colon G_2 \to M$ y los morfismos de grupos ϕ_1 y ϕ_2 asociados a ellas. Como ϕ_1 y ϕ_2 coinciden en G_0, existe un único morfismo de grupos $\phi_3\colon G_3 \to G \ltimes M$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & G_1 \arrow[d, "\iota_1"'] \arrow[ddr, "\phi_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[drr, "\phi_2"'] & G_3 \arrow[dr, "\phi_3"] & \\
 & & G \ltimes M
\end{tikzcd}$$

conmuta. Dado que $G_3 = \langle G_1, G_2\rangle$ es claro que existe $\varphi_3\colon G_3 \to M$ tal que $\phi_3(x) = (x, \varphi_3(x))$ para todo $x \in G_3$. Ahora como ϕ_3 es un morfismo de grupos,

$$\varphi_3(xy) = \varphi_3(x)y + \varphi_3(y) \quad \text{para todo } x, y \in G_3$$

y, por lo tanto, se extiende a un único morfismo RG-lineal $f_3\colon J_{G_3} \to M$. Es evidente que f_3 coincide con f_1 en J_{G_1}, pues ambos coinciden con φ_1 en G_1, y, similarmente, f_3 coincide con f_2 en J_{G_2}. □

COROLARIO 3.9. *Sean H subgrupo de G y $(G_a)_{a\in\Lambda}$ una familia de subgrupos de G. Entonces $\{G_a\}_{a\in\Lambda}$ genera su producto libre si y sólo si los J_{G_a} están en suma directa, y $H = *_{a\in\Lambda} G_a$ si y sólo si $J_H = \bigoplus_{a\in\Lambda} J_{G_a}$*

DEMOSTRACIÓN. La segunda parte se deduce inmediatamente del Corolario 3.3 y de la primera. Para ver esta es suficiente considerar el caso en que $|\Lambda|$ es finito, pues en general el grupo generado por todos los G_a es su producto libre si y sólo si el grupo generado por cualquier subconjunto finito de los G_a lo es, mientras que la suma de los J_{G_a} es directa si y sólo si la suma de cualquier subconjunto finito de los J_{G_a} lo es. Supongamos entonces que $n := |\Lambda|$ es finito y procedamos por inducción. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos ahora que $n > 1$ y que el resultado vale para una familia con menos de n subgrupos. Escribamos $H_{n-1} := \langle G_1, \dots, G_{n-1}\rangle$, lo que por el Corolario 3.3 implica que $J_{H_{n-1}} = J_{G_1} + \cdots + J_{G_{n-1}}$. Entonces, debido a la hipótesis inductiva y al teorema anterior con G_0 trivial, son equivalentes

- La suma de los $J_{G_1}, \dots, J_{G_n}$ es directa,
- la suma de los $J_{G_1}, \dots, J_{G_{n-1}}$ es directa y $J_{H_{n-1}} \cap J_{G_n} = 0$,
- $H_{n-1} = G_1 * \cdots * G_{n-1}$ y $\langle H_{n-1}, G_n\rangle = H_{n-1} * G_n$,
- $\langle G_1 \dots G_n\rangle = G_1 * \cdots * G_n$,

lo cual concluye el paso inductivo. □

PROPOSICIÓN 3.10. *G es un grupo libre con base $(x_a)_{a\in\Lambda}$ si y sólo si I_G es un RG-módulo libre con base $(x_a - e)_{a\in\Lambda}$.*

DEMOSTRACIÓN. Escribamos $X_a := \langle x_a\rangle$. Por el Ejemplo 3.5 sabemos que J_{X_a} es un RG-módulo libre con base $x_a - e$ si y sólo si el orden de x_a es infinito. Como I_G es un RG-módulo libre con base $(x_a - e)_{a\in\Lambda}$ si y sólo si I_G es la suma directa de los J_{X_a} y cada J_{X_a} es un RG-módulo libre con base $x_a - e$; mientras que G es libre con base $(x_a)_{a\in\Lambda}$ si y sólo si G es el producto libre de los X_a y todos estos tienen orden infinito, el resultado se sigue del Corolario 3.9. □

COROLARIO 3.11. *Si G es libre, entonces $\operatorname{cd}_R G \le 1$.*

Nosotros necesitaremos el siguiente resultado

PROPOSICIÓN 3.12. *Sean H y K subgrupos de G con $H \subseteq K$. Si J_{GH} es un RG-sumando directo de I_G, entonces J_{KH} es un RK-sumando directo de I_K.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente probar que J_{KH} es un RK-sumando directo de J_{GH}. En efecto, en ese caso, dado que por hipótesis J_{GH} es un RK-sumando directo de I_G, obtenemos que J_{KH} es un RK-sumando directo de I_G y, por lo tanto, de I_K. Para ello tomamos una transversal a derecha T de K en G con $e \in T$ y consideramos la descomposición en R-módulos

$$J_{GH} = \bigoplus_{t\in T} J_{KH}t = J_{KH} \oplus \bigoplus_{t\in T\setminus\{e\}} J_{KH}t.$$

El resultado se sigue entonces de que $\bigoplus_{t\in T\setminus\{e\}} J_{KH}t$ y J_{KH} son RK-módulos. $\square$

Capítulo 4

Cantidad de finales de un grupo

El conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A es una $\mathbb{Z}_2$-álgebra con la suma y el producto dados por la diferencia simétrica y la intersección respectivamente. En esta álgebra el cero es el conjunto vacío, el uno es A y el opuesto de cada subconjunto E de A es E mismo. Para $E \in \mathcal{P}(A)$ denotaremos con E^c a $A \setminus E$. Es evidente que la aplicación

$$\theta\colon \mathcal{P}(A) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(A, \mathbb{Z}_2),$$

dada por $\theta(E) := \chi_E$, donde χ_E es la función característica de E, es un isomorfismo de álgebras. Nosotros escribiremos $\overline{\mathbb{Z}_2 A}$ en lugar de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(A, \mathbb{Z}_2)$. Denotemos con $\mathcal{I}(A)$ al ideal de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A y con $\overline{\mathcal{P}}(A)$ a $\mathcal{P}(A)/\mathcal{I}(A)$. Via θ este ideal se identifica con el ideal $\mathbb{Z}_2 A$ de $\overline{\mathbb{Z}_2 A}$ formado por las funciones cuyo soporte es un conjunto finito. Escribamos $\mathcal{E}(A) := \overline{\mathbb{Z}_2 A}/\mathbb{Z}_2 A$. Claramente θ induce un isomorfismo de $\overline{\mathcal{P}}(A)$ en $\mathcal{E}(A)$. Para cada $E \in \mathcal{P}(A)$ denotaremos con $\overline{E}$ a su imagen por la proyección canónica en $\overline{\mathcal{P}}(A)$. Diremos que dos subconjuntos E y F de A son *casi iguales* y escribiremos $E =^a F$ si sus imagenes $\overline{E}$ y $\overline{F}$ en $\overline{\mathcal{P}}(A)$ coinciden. En otras palabras si $E \Delta F$ es finito. También diremos que un subconjunto E de A está *casi incluido* en otro subconjunto F si $E \setminus F$ es finito y denotaremos este hecho con el símbolo $E \subseteq^a F$. Así $E =^a F$ si y sólo si $E \subseteq^a F$ y $F \subseteq^a E$. Es evidente que

- $E \subseteq^a F$ si y sólo si $F^c \subseteq^a E^c$.
- Si $E \subseteq^a F$ y $F \subseteq^a H$, entonces $E \subseteq^a H$.
- Si $E_1 \subseteq^a F_1$ y $E_2 \subseteq^a F_2$, entonces $E_1 \cap E_2 \subseteq^a F_1 \cap F_2$ y $E_1 \cup E_2 \subseteq^a F_1 \cup F_2$.
- Si $E_1 =^a F_1$ y $E_2 =^a F_2$, entonces $E_1 \Delta E_2 =^a F_1 \Delta F_2$.

Cada función $f\colon A \to B$ determina un morfismo de álgebras

$$f^{\#}\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A),$$

dado por $f^{\#}(F) := f^{-1}(F)$. Es evidente que

$$f^{\#}(E_1 \cap E_2) = f^{\#}(E_1) \cap f^{\#}(E_2) \quad \text{y} \quad f^{\#}(E_1 \cup E_2) = f^{\#}(E_1) \cup f^{\#}(E_2).$$

Notemos que $f^{\#}(\mathcal{I}(B)) \subseteq \mathcal{I}(A)$ si y sólo si las fibras $f^{-1}(b)$ de f son finitas. Por lo tanto, en este caso, $f^{\#}$ induce un morfismo

$$\overline{f^{\#}}\colon \overline{\mathcal{P}}(B) \to \overline{\mathcal{P}}(A).$$

Es claro que

$$\overline{f^{\#}}(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \overline{f^{\#}}(\overline{E_1}) \cap \overline{f^{\#}}(\overline{E_2}) \quad \text{y} \quad \overline{f^{\#}}(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = \overline{f^{\#}}(\overline{E_1}) \cup \overline{f^{\#}}(\overline{E_2}).$$

Fijemos un grupo G y consideremos la acción a derecha de G sobre el álgebra $\mathcal{P}(G)$ dada por la multiplicación. Así $Eg := \{hg : h \in E\}$ para cada $g \in G$ y cada $E \subseteq G$. Es evidente que esta acción es compatible con la relación de casi igualdad e induce, en cosecuencia, una acción de G sobre el álgebra $\overline{\mathcal{P}}(G)$, formada por sus clases de equivalencia. Además

$$E_1 \subseteq^a E_2 \Rightarrow E_1 g \subseteq^a E_2 g, \quad (E_1 \cup E_2)g = E_1 g \cup E_2 g, \quad E^c g = (Eg)^c \quad \text{y} \quad (\overline{E_1} \cup \overline{E_2})g = \overline{E_1}g \cup \overline{E_2}g$$

para cada $E, E_1, E_2 \in \mathcal{P}(G)$ y $g \in G$. También vale que

$$E_1 \subseteq^a E_2 \Longrightarrow E_1^{-1} \subseteq^a E_2^{-1}$$

donde para cada $E \subseteq G$ denotamos con E^{-1} a $\{g^{-1} : g \in E\}$. Es fácil ver que la única acción a derecha de G sobre $\overline{\mathbb{Z}_2 G}$ que convierte a θ en un isomorfismo de G-álgebras satisface

$$f^g(h) = f(hg^{-1}) \quad \text{para todo } f \in \overline{\mathbb{Z}_2 G} \text{ y todo } h, g \in G,$$

y donde con f^g denotamos el resultado de la acción de g sobre f. Diremos que un subconjunto E de G es *casi invariante a derecha* si $Eg =^a E$ para todo $g \in G$. Notemos que esto es equivalente a decir que la clase $\overline{E}$ de E por la relación de casi igualdad es invariante. Así es claro que

- Si F es casi igual a E y E es casi invariante, entonces F también lo es.
- Si E_1 y E_2 son casi invariantes, entonces $E_1 \cap E_2$ y $E_1 \Delta E_2$ también lo son.

Además

- Si E es casi invariante, entonces E^c también lo es.
- Si E_1 y E_2 son casi invariantes, entonces $E_1 \cup E_2$ también lo es.

pues si E, E_1 y E_2 son casi invariantes, entonces

$$E^c g = (Eg)^c =^a E^c \qquad \text{y} \qquad (E_1 \cup E_2)g = E_1 g \cup E_2 g =^a E_1 \cup E_2.$$

Notemos que para cada $E \in \mathcal{P}(G)$, el conjunto $\{g \in G : Eg =^a E\}$ es un subgrupo de G. En efecto es el estabilizador de $\overline{E}$ bajo la acción de G sobre las clases de casi igualdad definida arriba. En consecuencia $E \subseteq G$ es casi invariante si y sólo si $E =^a Ex$ para todo x en un conjunto de generadores de G. Notemos que si $f\colon H \to G$ es un morfismo de grupos, entonces H actúa sobre $\mathcal{P}(G)$ y $\overline{\mathcal{P}}(G)$ a través de f. Es fácil ver que la aplicación

$$f^{\#}\colon \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(H),$$

es un morfismo de H-álgebras y, que si además $f^{-1}(0)$ es finito, entonces $f^{\#}(\mathcal{I}(G)) \subseteq \mathcal{I}(H)$ y

$$\overline{f^{\#}}\colon \overline{\mathcal{P}}(G) \to \overline{\mathcal{P}}(H),$$

es también un morfismo de H-álgebras. Así, en este caso queda definido por restricción un morfismo de $\mathbb{Z}_2$-álgebras

(17) $$\overline{\mathcal{P}}(G)^G \longrightarrow \overline{\mathcal{P}}(G)^H \xrightarrow{\overline{f^{\#}}^H} \overline{\mathcal{P}}(H)^H.$$

Definición 4.1. *La* cantidad de finales *de un grupo G es la dimensión* $\dim_{\mathbb{Z}_2}(\overline{\mathcal{P}}(G)^G)$, *como $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial, del anillo de invariantes $\overline{\mathcal{P}}(G)^G$, de $\overline{\mathcal{P}}(G)$ por la acción de G.*

Nota 4.2. *Se sigue inmediatamente de la definición que la cantidad de finales de un grupo G es cero si y sólo si G es finito, que es al menos dos si y sólo si G tiene un subconjunto casi invariante infinito E cuyo complemento también es infinito, y, que es exactamente dos si, además, cada subconjunto casi invariante infinito de G cuyo complemento es infinito, es casi igual a E o a $G \setminus E$.*

Nota 4.3. *Por el lema de Shapiro,*

$$H^i(G, \overline{\mathbb{Z}_2 G}) = H^i(e, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 0, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Además

$$H^0(G, \mathbb{Z}_2 G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } G \text{ es finito}, \\ 0 & \text{si } G \text{ es infinito}, \end{cases}$$

pues $\emptyset$ y G son los únicos subconjuntos invariantes de G. Por otro lado de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 G \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}_2 G} \longrightarrow \mathcal{E}(G) \longrightarrow 0,$$

se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(G, \mathbb{Z}_2 G) \longrightarrow H^0(G, \overline{\mathbb{Z}_2 G}) \longrightarrow H^0(G, \mathcal{E}(G)) \longrightarrow H^1(G, \mathbb{Z}_2 G) \longrightarrow H^1(G, \overline{\mathbb{Z}_2 G}).$$

En consecuencia la cantidad de finales de G coincide con

$$\dim_{\mathbb{Z}_2}\big(H^0(G, \mathcal{E}(G))\big) = \begin{cases} \dim_{\mathbb{Z}_2}\big(H^1(G, \mathbb{Z}_2 G)\big) & \text{si } G \text{ es finito}, \\ 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2}\big(H^1(G, \mathbb{Z}_2 G)\big) & \text{si } G \text{ es infinito}. \end{cases}$$

Ejemplo 4.4. *Sea G el grupo cíclico infinito generado por x. Si E es un conjunto casi invariante de G, entonces para casi todo $x^n \in E$, vale que $x^{n+1}, x^{n-1} \in E$. Así, si existen infinitos $x^n \in E$ con $n > 0$, entonces todos, excepto una cantidad finita de x^n con $n > 0$, están en E y similarmente, si existen infinitos $x^n \in E$ con $n < 0$, entonces todos, excepto finitos x^n con $n < 0$, están en E. Por lo tanto $\overline{\mathcal{P}}(G)^G = \{\overline{\emptyset}, \overline{G}, \overline{G_+}, \overline{G_-}\}$, donde $G_+ := \{x^n : n > 0\}$ y $G_- := \{x^n : n < 0\}$. En consecuencia G tiene exactamente 2 finales.*

Ejemplo 4.5. *Si $G = G_1 * G_2$ con G_1 y G_2 no triviales, entonces G tiene al menos dos finales y, si tiene exactamente dos, entonces $|G_1| = |G_2| = 2$. En efecto para cada $b \in G_1 \setminus \{e\}$, denotemos con sea E_b al subconjunto de los elementos de G cuya forma reducida comienza con b. Entonces tanto E_b como E_b^c son infinitos. Además E_b es casi invariante, pues $E_b y = E_b$ para todo $y \in G_2$ y $E_b x = (E_b \setminus \{b\}) \cup \{bx\}$ para todo $x \in G_1$. Por lo tanto, G tiene al menos dos finales. Supongamos ahora que $|G_1| > 2$ y tomemos $c \in G_1 \setminus \{e, b\}$. Entonces E_c es infinito y casi invariante y E_c^c también es infinito. Como claramente $E_b \neq^a E_c \neq^a E_b^c$, en este caso, G tiene más de dos finales. Por simetría lo mismo ocurre si $|G_2| > 2$.*

Un grupo G es *localmente finito* si todos sus subgrupos finitamente generados son finitos.

Ejemplo 4.6. *Si G es numerable y localmente finito, entonces G tiene una cantidad infinita de finales. Para probar esto escribamos $G := \{g_1, g_2, \dots\}$ y definamos*

$$B_n := \langle g_1, \dots, g_{n+1} \rangle \setminus \langle g_1, \dots, g_n \rangle \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Como G es localmenta finito, cada B_n es finito y, como G es infinito, $B_n \neq \emptyset$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Claramente $B_n g_i = B_n$ si $1 \leq i \leq n$. Para cada conjunto S de números positivos definamos $E_S := \bigcup_{n\in S} B_n$. Entonces E_s es casi invariante pues

$$E_s g_i \subseteq \Big(\bigcup_{n\leq i} B_n g_i\Big) \cup E_s =^a E_s.$$

Ahora para cada $r \in \mathbb{N}$ podemos encontrar r conjuntos $S_1, \dots, S_r$, disjuntos dos a dos, de $\mathbb{N}$, tales que para cada $1 \leq i \leq r$ hay infinitos $n \in S_i$ tal que $B_n \neq \emptyset$. Por lo tanto $\{\overline{E_{S_1}}, \dots, \overline{E_{S_r}}\}$ es un conjunto $\mathbb{Z}_2$ linealmente independiente de $\overline{\mathcal{P}}(G)^G$.

Proposición 4.7. *Sea $f\colon H \to G$ un morfismo de grupos tal que $f^{-1}(0)$ es finito. Si el índice de $f(H)$ en G es finito, entonces el morfismo*

$$\overline{\mathcal{P}}(G)^G \longrightarrow \overline{\mathcal{P}}(G)^H \xrightarrow{\overline{f^{\#}}^H} \overline{\mathcal{P}}(H)^H.$$

presentado en (17) *es biyectivo. En consecuencia H y G tienen la misma cantidad de finales.*

Demostración. Para probar que el morfismo (17) es inyectivo basta ver que si $E \subseteq G$ es casi invariante y $f^{-1}(E)$ es finito, entonces E es finito, lo cual se sigue inmediatamente de que si $b_1 = e, b_2, \dots, b_n$ es una transversal a derecha de G en $f(H)$, entonces

$$E = \bigcup_{i=1}^{n}(E \cap f(H)b_i) =^a \bigcup_{i=1}^{n} Eb_i \cap f(H)b_i = \bigcup_{i=1}^{n}(E \cap f(H))b_i = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(E))b_i =^a \emptyset.$$

Veamos ahora que el morfismo (17) es sobreyectivo. Tomemos un subconjunto casi invariante E de H. Claramente

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} f(E)b_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(f(E)b_i) = E,$$

pues $f(E)b_1 \subseteq f(H)$ y $f(E)b_i \cap f(H) = \emptyset$ si $i \neq 1$. Así, para terminar la demostración sólo hay que ver que $\bigcup_{i=1}^{n} f(E)b_i$ es un subconjunto casi invariante de G. Tomemos $g \in G$. Como para cada cada $i \neq j$

$$Hb_i \cap Hb_j = \emptyset \Rightarrow Hb_i g \cap Hb_j g = \emptyset,$$

existen $h_1, \dots, h_n$ en H tales que $b_1 g, \dots, b_n g$ es una permutación de $f(h_1)b_1, \dots, f(h_n)b_n$. En consecuencia

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n} f(E)b_i\Big)g = \bigcup_{i=1}^{n} f(E)b_i g = \bigcup_{i=1}^{n} f(E)f(h_i)b_i = \bigcup_{i=1}^{n} f(Eh_i)b_i =^a \bigcup_{i=1}^{n} f(E)b_i,$$

como queríamos. □

El resultado anterior tiene los siguientes corolarios importantes.

Proposición 4.8. *Si H es un subgrupo de G de índice finito, entonces el morfismo*

$$\overline{\mathcal{P}}(G)^G \longrightarrow \overline{\mathcal{P}}(G)^H \xrightarrow{\overline{i^{\#}}^H} \overline{\mathcal{P}}(H)^H,$$

donde $i\colon H \to G$ es la inclusión canónica, es biyectivo. En particular G y H tienen la misma cantidad de finales.

Demostración. Aplicar la Proposición 4.7 al morfismo $i\colon H \to G$. □

COROLARIO 4.9. *Si G tiene un subgrupo cíclico infinito de índice finito, entonces G tiene exactamente dos finales. En particular, la cantidad de finales de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ es dos.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 4.8 y el Ejemplo 4.4. $\square$

PROPOSICIÓN 4.10. *Si H es un subgrupo normal y finito de G, entonces el morfismo*

$$\overline{\mathcal{P}}(G/H)^{G/H} \longrightarrow \overline{\mathcal{P}}(G/H)^{G} \xrightarrow{\overline{\pi^{\#}}^{G}} \overline{\mathcal{P}}(G)^{G},$$

donde $\pi\colon G \to G/H$ es la proyección canónica, es biyectivo. En particular G y G/H tienen el misma cantidad de finales.

DEMOSTRACIÓN. Aplicar la Proposición 4.7 al morfismo $\pi\colon G \to G/H$. $\square$

LEMA 4.11. *Si K es un subgrupo finitamente generado de un grupo G y E es un subconjunto casi invariante de G, entonces casi todas las coclases a izquierda gK de K en G están incluidas en E o en E^c.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un conjunto finito D de generadores de K y notemos que como E es casi invariante el conjunto

$$R := \bigcup_{d\in D\cup D^{-1}} E \cap E^c d^{-1}.$$

es finito. Supongamos ahora que $g \in G$ es tal que $gK \cap E \neq \emptyset$ y $gK \cap E^c \neq \emptyset$ y tomemos $u \in gK \cap E$ y $v \in gK \cap E^c$. Como $u^{-1}v \in K$ es un producto de elementos de $D \cup D^{-1}$ podemos encontrar $k \in K$ y $d \in D \cup D^{-1}$ tales que $uk \in E$ y $ukd \in E^c$. En consecuencia $uk \in R$, lo que, dado que R es finito, sólo puede pasar para una cantidad finita de uk's. Por lo tanto sólo hay una cantidad finita de clases gK que cortan a la vez a E y a E^c. $\square$

COROLARIO 4.12. *Sea K subgrupo infinito y finitamente generado de un grupo G. Si E es un subconjunto casi invariante de G y $gK \cap E$ es finito para todo $g \in G$, entonces E es finito.*

DEMOSTRACIÓN. Como K es infinito y $gK \cap E$ es finito, $gK \nsubseteq E$ para ningún $g \in G$. En consecuencia, por el lema anterior, $gK \cap E = \emptyset$ para casi todas las coclases a izquierda gK de K en G. Así E está incluido en la unión de una cantidad finita de conjuntos de la forma $gK \cap E$, cada uno de los cuales es finito. $\square$

LEMA 4.13. *Sea G grupo que no es localmente finito. Si todo subgrupo finitamente generado de G está contenido en un subgrupo que tiene exactamente un final, entonces la cantidad de finales de G es uno.*

DEMOSTRACIÓN. Sea E un conjunto casi invariante de G y K un subgrupo infinito y finitamente generado de G. Por el Corolario 4.12, para terminar la demostración será suficiente probar que $gK \cap E$ es finito para todo $g \in G$ o que $gK \cap E^c$ es finito para todo $g \in G$. Supongamos que esto es falso y tomemos $u, v \in G$ tales que $uK \cap E$ y $vK \cap E^c$ son infinitos. Por hipótesis existe un subgrupo H de G que contiene a $\langle u, v, K\rangle$ y que tiene exactamente un final. En consecuencia, dado que $H \cap E$ es un subconjunto casi invariante de H, necesariamente $H \cap E$ o $H \cap E^c$ es finito. Pero esto es imposible, pues $uK \cap E \subseteq H \cap E$ y $vK \cap E^c \subseteq H \cap E^c$. $\square$

LEMA 4.14. *Sea H un subgrupo subnormal, que no es localmente finito, de un grupo G. Si E es un subconjunto casi invariante de G y $H \cap E$ es finito, entonces E es finito.*

Demostración. Consideremos una cadena

$$H = G_r \subseteq G_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G,$$

con G_i un subgrupo normal de G_{i-1} para cada $1 \leq i \leq r$. Debemos ver que si $G_i \cap E$ es finito, entonces $G_{i-1} \cap E$ también lo es. Por hipótesis H tiene un subgrupo finitamente generado e infinito K. Así, por el Corolario 4.12, para terminar la demostración será suficiente ver que $gK \cap G_{i-1} \cap E$ es finito para todo $g \in G_{i-1}$. Para ello, dado que $gK \cap E \subseteq gG_i \cap E = G_i g \cap E$, bastará probar que $G_i g \cap E$ es finito para todo $g \in G_{i-1}$. Pero esto se sigue de que $G_i g \cap E g \cap E$ y $G_i g \cap E^c g \cap E$ lo son, ya que, por hipótesis, $G_i \cap E$ y $E^c g \cap E$ son finitos. □

Proposición 4.15. *Sea H un subgrupo subnormal, que no es localmente finito, de un grupo G. Si la cantidad de finales de H es uno o si H está contenido en un subgrupo finitamente generado y de índice infinito de G, entonces G tiene exactamente un final.*

Demostración. Sea E subconjunto casi invariante de G. Debemos ver que E o E^c es finito. Si la cantidad de finales de H es uno, entonces $H \cap E$ o $H \cap E^c$ es finito y, si H esta contenido en un subgrupo finitamente generado y de índice infinito L de G, entonces por el Lema 4.11 existe $g \in G$ tal que $gL \cap E$ o $gL \cap E^c$ es vacío. En consecuencia $D = E$, $D = E^c$, $D = g^{-1}E$ o $D = g^{-1}E^c$ satisface que $H \cap D$ es finito. Por el Lema 4.14, se sigue de esto que D es finito, lo que claramente implica que E o E^c lo es. □

Corolario 4.16. *El producto directo de un grupo infinito y de un grupo que no es localmente finito, tiene exactamente un final.*

Demostración. Sea $G = A \times B$ con A infinito y B no localmente finito. Por hipótesis B contiene un subgrupo finitamente generado e infinito C. Es evidente que cada subgrupo finitamente generado de G está contenido en un subgrupo de G de la forma $A \times B_1$, donde B_1 es un subgrupo finitamente generado de B que contiene a C. Así, debido al Lemma 4.13, para terminar la demostración será suficiente ver que la cantidad de finales de $A \times B_1$ es uno. Esto reduce el problema al caso en que B es finitamente generado. Pero como $\{e\} \times B$ es un subgrupo mormal y de índice infinito de G, en este caso el resultado se sigue de la Proposición 4.15. □

Para los que sigue necesitaremos algunos resultados de combinatoria. Comenzamos con algunas definiciones.

Un *grafo* Γ consiste en dos conjuntos, llamados *vértices* y *aristas* de Γ, y de una función ϕ, del conjunto de aristas en el de pares no ordenados de vértices. Denotaremos con Γ_0 al conjunto de vértices de Γ y con Γ_1 al de aristas. Si $\phi(e) = \{v, w\}$ diremos que la arista e tiene vértices v y w o que e une a v con w. Un *camino* que une los vértice v y w es una sucesión $v = v_0, \dots, v_n = w$ de vértices tal que para todo $i = 1, \dots, n$ existe una arista que une a v_{i-1} con v_i.

Un grafo Γ es *localmente finito* si cada $v \in \Gamma_0$ la cantidad de aristas que lo tienen como vértice es finita.

Sea A un subconjunto de vértices de Γ. Un *camino en A* es un camino cuyos vértices están en A. Diremos que A es *conexo* si para cada par de sus vértices existe un camino en A que los une. Es evidente que para cada $v \in A$ la unión de todos los subconjuntos de A que contienen a v es un subconjunto conexo de A. Este es el máximo subcojunto conexo de A que contiene a v y es llamado *componente conexa de A que contiene a v*. Es fácil ver que este conjunto no depende del elemento v que se tome dentro de él y que A es la unión disjunta de sus componentes conexas.

El *coborde* δA de un conjunto de vértices A de Γ es el conjunto de las aristas de Γ que tienen exactamente un vértice en A. Notemos que

$$\delta A = \delta A^c, \quad \delta\emptyset = \delta\Gamma = \emptyset \quad \text{y} \quad \delta(A\Delta B) = \delta A\Delta\delta B.$$

Además si Γ es conexo y $\emptyset \neq A \neq \Gamma$, entonces $\delta A \neq \emptyset$, pues existe un camino que une un vértice que está en A con uno que no y, por lo tanto, alguna arista de este camino, tiene exactamente un vértice en A. De esto se sigue que si $\delta B = \delta A$, entonces $B = A$ o $B = A^c$, pues $\delta(A\Delta B) = \delta A\Delta\delta B = \emptyset$ y, así, $A\Delta B = \emptyset$ o $A\Delta B = \Gamma$. En el primer caso $B = A$ y, en el segundo, $B = A^c$.

NOTA 4.17. *Sean A y P un conjunto de vértices y un conjunto de arcos de un grafo. Escribiremos $P \subseteq A$ si todos los elementos de P tienen ambos vértices en A y $A \cap P = \emptyset$ si ningún elemento en P tiene ambos vértices en A. Notemos que de $P \subseteq A$ se sigue que $A^c \cap P = \emptyset$, pero que la recíprca no vale.*

NOTA 4.18. *Todo grafo Γ satisface las siguientes propiedades:*

1. *Sean $A, B \subseteq \Gamma_0$ y $P \subseteq \Gamma_1$. Si $P \subseteq A$ y $A \subseteq B$, entonces $P \subseteq B$.*
2. *Sean $A, B \subseteq \Gamma_0$ y $P, Q \subseteq \Gamma_1$. Si $P \subseteq A$ y $Q \subseteq B$, entonces $P \cap Q \subseteq A \cap B$.*

LEMA 4.19. *Sea Γ un grafo y $A, B \subseteq \Gamma_0$. Si B es conexo y $B \cap \delta A = \emptyset$ entonces es $B \subseteq A$ o $B \subseteq A^c$.*

DEMOSTRACIÓN. Si no, existe un elemento en $B \cap A$ y otro en $B \cap A^c$ y, como B es conexo, hay un camino en B que los une. Este camino tendrá una arco con un vértice en A y otro en A^c contradiciendo que $B \cap \delta A = \emptyset$. $\square$

LEMA 4.20. *Sea Γ un grafo conexo y $A, B \subseteq \Gamma_0$. Si existen conjuntos conexos C y D de vértices tales que $C \cap D = \emptyset$, $\delta A \subseteq C$ y $\delta B \subseteq D$, entonces alguna de las intersecciones $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ o $A^c \cap B^c$ es vacía.*

DEMOSTRACIÓN. Como $D \cap \delta A = C \cap \delta B = \emptyset$ se sigue del Lema 4.19 que $D \subseteq A$ o $D \subseteq A^c$ y que $C \subseteq B$ o $C \subseteq B^c$. Por simetría podemos suponer que $D \subseteq A^c$ y $C \subseteq B^c$. Afirmamos que $\delta(A \cap B) = \emptyset$. Supongamos que esto es falso y tomemos $\gamma \in \delta(A \cap B)$. Por definición uno de los vértices de γ está en $A \cap B$ y el otro en $A^c \cap B$, $A \cap B^c$ o $A^c \cap B^c$. Pero el primer caso es imposible porque $\delta A \subseteq C \subseteq B^c$, el segundo, porque $\delta B \subseteq D \subseteq A^c$ y, el tercero, porque $\delta A \cap \delta B \subseteq C \cap D = \emptyset$. Ahora, como Γ es conexo se sigue de esto que $A \cap B = \emptyset$ o $A \cap B = \Gamma$, lo que claramente termina la demostración. $\square$

Fijemos un grupo G y un conjunto X de generadores de G. El *grafo de G con respecto a X* es aquel cuyos vértices son los elementos de G y que tiene un arco que une g con gx para todo $g \in G$ y todo $x \in X$. Denotaremos a este grafo con $\mathrm{Gr}(G, X)$ o simplemente con $\mathrm{Gr}(G)$ o aún con G mismo si, por el contexto, no es necesario mencionar a X. Notemos ahora que cada $x \in X$ determina dos arcos que salen de cada $g \in G$:

- Uno que une g con gx y que llamaremos γ_x^g.
- Otro que une gx^{-1} con g y que llamaremos $\overline{\gamma}_x^g$.

Claramente $\overline{\gamma}_x^{gx} = \gamma_x^g$. Además vale lo siguiente:

- Hay más de un arco (y en este caso exactamente dos) que unen g con gx si sólo si $x \neq e$ y existe $y \in X$ tal que $xy = e$. Uno de ellos es γ_x^g y el otro, $\overline{\gamma}_y^g$ (puede ser $y = x$, pero no $g = gx$, por lo que exigimos que x no sea e).
- En cada $g \in G$ hay un bucle (y en este caso exactamente uno) si y sólo si $e \in G$.
- $\mathrm{Gr}(G, X)$ es conexo.
- La cantidad de arcos que salen de cada $g \in G$ es $|X|$. En particular $\mathrm{Gr}(G, X)$ es localmente finito si y sólo si X es finito.

Sea $B \subseteq G$ y $x \in X$. Notemos que para cada $g \in G$ se satisface que

$$g \in B \text{ y } g \notin Bx \Leftrightarrow g \in B \text{ y } gx^{-1} \notin B \quad \text{y que} \quad g \in Bx \text{ y } g \notin B \Leftrightarrow gx^{-1} \in B \text{ y } g \notin B.$$

En consecuencia

$$g \in B \Delta Bx \iff \text{el arco } \overline{\gamma}_x^g \text{ determinado por } x \text{ que une } gx^{-1} \text{ con } g \text{ está en } \delta B.$$

Similarmente

$$g \in B \Delta Bx^{-1} \iff \text{el arco } \gamma_x^g \text{ determinado por } x \text{ que une } g \text{ con } gx \text{ está en } \delta B.$$

Por lo tanto si X es finito, entonces δB es finito si y sólo si B es casi invariante. Esta identificación entre conjuntos casi invariantes y conjuntos con coborde finito es fundamental en la teoría de finales de grupos finitamente generados.

Lema 4.21. *Sean $h \in G$ y $A, B \subseteq G$. Si $\delta A \subseteq B$, entonces $\delta(hA) \subseteq hB$.*

Demostración. Para cada $x \in X$ y cada $g \in G$,

$$\gamma_x^g \in \delta A \iff g \in A \Delta A x^{-1} \iff hg \in hA \Delta hAx^{-1} \iff \gamma_x^{hg} \in \delta(hA).$$

Así,

$$\begin{aligned} \delta A \subseteq B &\iff g, gx \in B \text{ para todo } \gamma_x^g \in \delta A \\ &\iff hg, hgx \in hB \text{ para todo } \gamma_x^g \in \delta A \\ &\iff hg, hgx \in hB \text{ para todo } \gamma_x^{hg} \in \delta(hA) \\ &\iff \delta(hA) \subseteq hB, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Lema 4.22. *Si E_0 y E_1 son subconjuntos casi invariantes de un grupo finitamente generado G, entonces para casi todo $g \in E_0$,*

$$gE_1 \subseteq E_0 \qquad o \qquad gE_1^c \subseteq E_0.$$

Demostración. Como δE_0 y δE_1 son finitos existen subconjuntos conexos y finitos C_0 y C_1 de Γ_0, tales que $\delta E_0 \subseteq C_0$ y $\delta E_1 \subseteq C_1$. En efecto, para construír C_i podemos, elijir para cada vértice de δE_i, un camino que lo una con e y tomar la unión de los vertices de todos estos caminos. Ahora dado que C_0 y C_1 son finitos, existe un subconjunto cofinito F de G tal que $gC_1 \cap C_0 = \emptyset$ para todo $g \in F$. Por otra parte, por el Lema 4.21 también se cumple que $\delta(gE_1) \subseteq gC_1$ para todo $g \in G$. En consecuencia si $g \in F$, entonces $A := gE_1$, $B := E_0$, $C := gC_1$ y $D := C_0$ satisfacen las hipótesis del Lema 4.20 y, por lo tanto,

$$E_0 \cap gE_1 = \emptyset, \quad E_0 \cap gE_1^c = \emptyset, \quad E_0^c \cap gE_1 = \emptyset \quad \text{o} \quad E_0^c \cap gE_1^c = \emptyset, \tag{18}$$

para todo $g \in F$. Algo que no hemos usado hasta este momento, pero que claramente podemos suponer, es que $E_1 \neq \emptyset$ y $E_1 \neq G$, lo cual implica que $\delta(gE_1) \neq \emptyset$ para todo $g \in G$. Pero entonces, debido a la definición de $\delta(gE_1)$ y a que $\delta(gE_1) \subseteq gC_1$, obtenemos que

$$gC_1 \cap gE_1 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad gC_1 \cap gE_1^c \neq \emptyset \quad \text{para todo } g \in G. \tag{19}$$

Ahora, como C_1 es finito y E_0 es casi invariante existe un subconjunto cofinito H de E_0 tal que $gC_1 \subseteq E_0$ para todo $g \in H$. Combinando esto con (19), obtenemos que

$$E_0 \cap gE_1 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad E_0 \cap gE_1^c \neq \emptyset \quad \text{para todo } g \in H.$$

Así, por (18),

$$E_0^c \cap gE_1 = \emptyset \quad \text{o} \quad E_0^c \cap gE_1^c = \emptyset \quad \text{para todo } g \in F \cap H,$$

lo que termina la demostración pues claramente $F \cap H$ es un subconjunto cofinito de E_0. □

LEMA 4.23. *Si un grupo G finitamente generado tiene un subconjunto casi invariante e infinito E tal que E^c y $\{g \in G : gE =^a E\}$ también son infinitos, entonces G tiene un subgrupo cíclico infinito de índice finito. En consecuencia, por el Ejemplo 4.4 y la Proposición 4.8, la cantidad de finales de G es 2.*

DEMOSTRACIÓN. Reemplazando E por E^c si es necesario, podemos suponer que el conjunto $\{g \in E : gE =^a E\}$ es infinito y, reemplazando E por $E \cup \{e\}$, podemos suponer además que $e \in E$. Por el Lema 4.22

$$gE \subseteq E \setminus \{e\} \quad \text{o} \quad gE^c \subseteq E \setminus \{e\} \qquad \text{para casi todo } g \in E \setminus \{e\}.$$

Así, podemos tomar $c \in E \setminus \{e\}$ tal que

$$cE =^a E \quad \text{y} \quad cE \subseteq E \setminus \{e\} \qquad \text{o} \qquad cE =^a E \quad \text{y} \quad cE^c \subseteq E \setminus \{e\}.$$

Pero como el último caso es imposible, necesariamente

$$cE =^a E \qquad \text{y} \qquad cE \subseteq E \setminus \{e\}. \tag{20}$$

Notemos que de la segunda condición en (20) se sigue que $c^n E \subseteq E \setminus \{e\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que

$$c^n \neq e, \quad c^n \in E \quad \text{y} \quad c^{-n} \in E^c \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

En particular $\langle c \rangle$ es un subgrupo cíclico infinito de G. Para terminar la demostración debemos ver que el índice de $\langle c \rangle$ en G es finito. Afirmamos que

$$\bigcap_{n \geq 0} c^n E = \emptyset \qquad \text{y} \qquad \bigcap_{n \geq 0} c^{-n} E^c = \emptyset$$

En efecto, si $d \in \bigcap_{n \geq 0} c^n E$, entonces $c^{-n} \in Ed^{-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, como $Ed^{-1} =^a E$ y $\{c^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c^{-n} \in E$, lo que se contradice con la tercera condición en (21). Similarmente, si $d \in \bigcap_{n \geq 0} c^{-n} E^c$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c^n \in E^c$, lo que se contradice con la segunda condición en (21). Por lo tanto

$$E = \bigcup_{n \geq 0} (c^n E \setminus c^{n+1} E) = \bigcup_{n \geq 0} c^n (E \setminus cE)$$

y

$$E^c = \bigcup_{n \geq 0} (c^{-n} E^c \setminus c^{-n-1} E^c) = \bigcup_{n \geq 0} c^{-n} (E^c \setminus c^{-1} E^c).$$

Como $cE =^a E$ se sigue facilmente de esto que $\langle c \rangle$ tiene índice finito en G. □

Proposición 4.24. *La cantidad de finales de un grupo G de torsión que no es localmente finito es* 1.

Demostración. Por el Lema 4.13 podemos suponer que G es finitamente generado. Supongamos que G tuviera más de un final. Entonces existiría un subconjunto casi invariante e infinito E de G con E^c también infinito. Reemplazando E por $E \cup \{e\}$ si es necesario, podemos suponer que $e \in E$. Si $E^{-1} \subseteq^a E$, entonces $E^{-1} =^a E$ y así

$$gE =^a gE^{-1} = (Eg^{-1})^{-1} =^a E^{-1} =^a E \qquad \text{para todo } g \in G,$$

lo cual es imposible por el Lema 4.23. En consecuencia $\{g \in G : g^{-1} \in E^c\}$ es infinito. Por el Lema 4.22 existe $c \in E$ tal que

$$c^{-1} \in E^c \quad \text{y} \quad cE \subseteq E \setminus \{e\} \qquad \text{o} \qquad c^{-1} \in E^c \quad \text{y} \quad cE^c \subseteq E \setminus \{e\}.$$

Pero como el último caso es imposible, necesariamente $cE \subseteq E \setminus \{e\}$. Así $c^n E \subseteq E \setminus \{e\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$c^n \neq e, \quad c^n \in E \quad \text{y} \quad c^{-n} \in E^c \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En particular $\langle c \rangle$ es un subgrupo cíclico infinito de G, lo que se contradice con la hipótesis. □

Teorema 4.25. *La cantidad de finales de un grupo G que no es localmente finito es* 1, 2 *o* ∞. *Además es* 2 *si y sólo si G tiene un subgrupo cíclico infinito de índice finito.*

Demostración. Supongamos que G tiene una cantidad finita de finales y tomemos una familia $\{E_1, \dots, E_n\}$ de representantes de las distintas clases de equivalencia de casi invarianza. El grupo G actúa a izquierda sobre $\{\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_n\} = \overline{\mathcal{P}}(G)$ via la multiplicación a izquierda. Así, para todo $g \in G$ existe una permutación σ de $\{1, \dots, n\}$ tal que $gE_i =^a E_{\sigma(i)}$ para todo i, por lo que

$$H := \{g \in G : gE_i =^a E_i, \text{ para todo } i\}$$

es un subgrupo de G de índice finito. En consecuencia, si H es de torsión también lo es G y el resultado se sigue de la Proposición 4.24. Supongamos ahora que H tiene un subgrupo cíclico infinito K. Si el índice de K en H es finito, entonces el índice de K en G también lo es y, por lo tanto, debido a la Proposición 4.8 y al Ejemplo 4.4, la cantidad de finales de G es 2. Resta considerar el caso en que K tiene índice infinito en H. Tomemos un subconjunto E casi invariante de G. Por el Lema 4.11 existe $h \in H$ tal que $hK \subseteq E$ o $hK \subseteq E^c$. Supongamos que estamos en el primer caso. Entonces para todo $u \in H$

$$uK \cap E^c = uh^{-1}(hK \cap hu^{-1}E^c) =^a uh^{-1}(hK \cap E^c) = \emptyset.$$

Así, por el Corolario 4.12, el subconjunto casi invariante $H \cap E^c$ de H es finito. En consecuencia, por la Proposición 4.8, también E^c es finito. Análogamente, si $hK \subseteq E^c$, entonces E es finito. Por lo tanto la cantidad de finales de G es 1. □

Proposición 4.26. *Un grupo G es finitamente generado y tiene exactamente* 2 *finales si y sólo si existen subgrupos K y H de G tales que K es finito, $|G : H| \leq 2$, $K \lhd H$ y H/K cíclico infinito.*

Demostración. Por el Ejemplo 4.4 y las Proposiciones 4.8 y 4.10 todo grupo con esas propiedades es finitamente generado y tiene exactamente 2 finales. Supongamos ahora que G es finitamente generado y que tiene exactamente dos finales y tomemos un subconjunto casi invariante e infinito E de G tal que E^c también es infinito. Para cada $g \in G$, el conjunto gE es casi invariante e infinito y su complemento también es infinito. Así, necesariamente

$gE =^a E$ o $gE =^a E^c$ y, por lo tanto, $H := \{g \in G : gE =^a E\}$ es un subgrupo de G tal que $|G : H| \leq 2$. Dado que para cada $g \in H$ los conjuntos $\{gE \cap E^c\}$ y $\{gE^c \cap E\}$ son finitos, podemos definir

$$\varphi\colon H \to \mathbb{Z}$$

por

$$\varphi(g) = |gE \cap E^c| - |gE^c \cap E|.$$

Afirmamos que φ es un morfismo de grupos. En efecto, para cada $g, h \in H$,

$$\begin{aligned}
\varphi(g) + \varphi(h) &= |gE \cap E^c| - |gE^c \cap E| + |hE \cap E^c| - |hE^c \cap E| \\
&= |gE \cap E^c| - |gE^c \cap E| + |ghE \cap gE^c| - |ghE^c \cap gE| \\
&= |gE \cap E^c \cap ghE| + |gE \cap E^c \cap ghE^c| - |gE^c \cap E \cap ghE| - |gE^c \cap E \cap ghE^c| \\
&+ |ghE \cap gE^c \cap E| + |ghE \cap gE^c \cap E^c| - |ghE^c \cap gE \cap E| - |ghE^c \cap gE \cap E^c| \\
&= |gE \cap E^c \cap ghE| + |ghE \cap gE^c \cap E^c| - |gE^c \cap E \cap ghE^c| - |ghE^c \cap gE \cap E| \\
&= |ghE \cap E^c| - |ghE^c \cap E| \\
&= \varphi(gh).
\end{aligned}$$

Llamemos K al núcleo de φ. Para terminar la demostración es suficiente ver que K es finito. Tomemos $b \in E$. Por el Lema 4.22

$$gE \subseteq E \setminus \{b\} \quad \text{o} \quad gE^c \subseteq E \setminus \{b\} \qquad \text{para casi todo } g \in E.$$

Pero si $g \in H$ la última condición es imposible, así que necesariamente

$$gE \subseteq E \setminus \{b\} \qquad \text{para casi todo } g \in E \cap H.$$

Por lo tanto

$$gE \cap E^c = \emptyset \quad \text{y} \quad b \in gE^c \cap E \qquad \text{para casi todo } g \in E \cap H,$$

y, en consecuencia,

$$\varphi(g) < 0 \qquad \text{para casi todo } g \in E \cap H.$$

Similarmente

$$\varphi(g) > 0 \qquad \text{para casi todo } g \in E^c \cap H,$$

lo que combinado con lo anterior muestra que $K = (K \cap E) \cup (K \cap E^c)$ es finito. □

Corolario 4.27. *Si G es finitamente generado, libre de torsión y tiene exactamente 2 finales, entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Sean H y K como en la Proposición 4.26. Como K es finito y G no tiene torsión, necesariamente $K = \{e\}$ y, por lo tanto, $H = \langle h \rangle$ es un subgrupo cíclico infinito de G tal que $|G : H| \leq 2$. Si $G = H$, entonces no hay nada más que probar. En caso contrario hay una sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} L \xrightarrow{i} 1,$$

con $i\colon H \to G$ la inclusión canónica y L un grupo cíclico de orden 2. Tomemos $w_g \in G$ tal que $\pi(w_g) = g$, donde g es el generador de L. Es claro que $G = \langle h, w_g \rangle$. Como $\pi(w_g^2) = 1$, existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $w_g^2 = h^i$. Denotemos con $\theta\colon H \to H$ al automorfismo definido por $\theta(h^j) = w_g h^j w_g^{-1}$. Como H es cíclico infinito, necesariamente $\theta(h^j) = h^j$ o $\theta(h^j) = h^{-j}$.

Afirmamos que en el último caso $i = 0$, lo que es imposible pues implica que $w_g^2 = 1$, contradiciendo que G no tiene torsión. En efecto,

$$h^i w_g = (w_g w_g) w_g = w_g (w_g w_g) = w_g h^i = w_g h^i w_g^{-1} w_g = \theta(h^i) w_g = h^{-i} w_g$$

y así $i = 0$. Podemos suponer en consecuencia que $\theta = \mathrm{id}$. Escribamos $i = 2j + k$ con $0 \le k \le 1$. Entonces

$$(h^{-j} w_g)^2 = h^{-j} w_g h^{-j} w_g = h^{-j} w_g h^{-j} w_g^{-1} w_g^2 = h^{-j} \theta(h^{-j}) h^i = h^r.$$

Es imposible que $r = 0$ pues implica que $(h^{-j} w_g)^2 = 1$, lo que contradice que G no tiene torsión. Finalmente si $(h^{-j} w_g)^2 = 1$, entonces

$$G = \langle h, w_g \rangle = \langle h, h^{-j} w_g \rangle = \langle h^{-j} w_g \rangle,$$

es cíclico infinito. □

PROPOSICIÓN 4.28. *Si G es un grupo finitamente generado, entonces G tiene un sólo final si y sólo si $H^1(G, RG) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea E un conjunto casi invariante de G. Definamos $a \colon G \to RG$ por

$$a(g) := Eg \cap E^c - E \cap E^c g.$$

donde, para cada subconjunto finito B de G denotamos también con B a $\sum_{x \in B} x \in RG$. Cualesquiera sean $g, h \in G$,

$$a(g)h + a(h) = Egh \cap E^c h - Eh \cap E^c gh + Eh \cap E^c - E \cap E^c h. \tag{22}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} Egh \cap E^c h &= Egh \cap E^c h \cap E + Egh \cap E^c h \cap E^c, \\ Eh \cap E^c gh &= Eh \cap E^c gh \cap E + Eh \cap E^c gh \cap E^c, \\ Eh \cap E^c &= Eh \cap E^c \cap Egh + Eh \cap E^c \cap E^c gh, \end{aligned}$$

y

$$E \cap E^c h = E \cap E^c h \cap Egh + E \cap E^c h \cap E^c gh,$$

en (22), obtenemos

$$a(g)h + a(h) = Egh \cap E^c - E \cap E^c gh = a(gh),$$

con lo cual, debido a la Observación 3.7, si $H^1(G, RG) = 0$ existe $u \in RG$ tal que

$$a(g) = u(g - e) = ug - u.$$

De esta expresión se sigue claramente si e aparece en u, entonces g aparece en $a(g)$ si y sólo si g no aparece en u, mientras que si e no aparece en u, entonces g aparece en $a(g)$ si y sólo si g aparece en u. Sin embargo, por la definición de $a(g)$, sabemos que si $e \in E$, entonces g aparece en $a(g)$ si y sólo si $g \in E^c$, mientras que si $e \in E^c$, entonces g aparece en $a(g)$ si y sólo si $g \in E$. Así si $H^1(G, RG) = 0$, entonces o E o E^c es finito, lo que quiere decir que G tiene un sólo final.

Ahora tomemos una función cualquiera $a \colon G \to RG$ que cumpla $a(gx) = a(g)x + a(x)$ para todo $g, x \in G$. Notemos que el coeficiente de gx en $a(gx)$ coincide con el de g en $a(g)$ si y sólo si gx no aparece en $a(x)$. Para cada $r \in R$ definamos

$$E_r := \{g \in G : g \text{ aparece con coeficiente } r \text{ en } a(g)\}.$$

Notemos que G es la unión disjunta de los E_r. Por lo que hemos visto arriba, para cada $x \in G$ fijo, $E_r x \subseteq^a E_r$ para todo $r \in R$ y $E_r x \subseteq E_r$ para casi todo $r \in R$ (más precisamente si y sólo si ningún elemento de $E_r x$ aparece en $a(x)$). Como G es finitamente generado existen $x_1, \dots, x_n \in G$ talqe que $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Como $E_r x_j^{\pm 1} \subseteq E_r$ para casi todo $r \in R$, obtenemos que $E_r G = E_r$ para casi todo $r \in R$. Pero como esto pasa sólo si $E_r = G$ o $E_r = \emptyset$, concluímos que todos los E_r salvo una cantidad finita serán vacíos. Como G es infinito existe r_0 tal que E_{r_0} también lo es. Supongamos que G tiene un sólo final, lo cual implica que $E_{r_0}^c$ es finito. Consideremos la función $b\colon G \to RG$, dada por

$$b(g) := a(g) - r_0(g - e).$$

Notemos que esta función claramente cumple $b(gx) = b(g)x + b(x)$ para todo $g, x \in G$ y que si $g \in E_{r_0} \setminus \{e\}$, entonces g aparece con coeficiente cero en $b(g)$. Así

$$u := \sum_{g \in G} s_g g,$$

donde s_g es el coeficiente de g en $b(g)$, es un elemento de RG. Claramente el coeficiente de g en $u(x - e)$ es $s_{gx^{-1}} - s_g$. Por otra parte de $b(x) = b(g) - b(gx^{-1})x$ se sigue que el coeficiente de g en $b(x)$ es $s_g - s_{gx^{-1}}$, y así $b(x) = -u(x - e)$. Por lo tanto

$$a(x) = b(x) + r_0(x - e) = -u(x - e) + r_0(x - e) = (r_0 e - u)(x - e),$$

para cada $x \in G$, lo debido a la Observación 3.7, muestra que $H^1(G, RG) = 0$. $\square$

Proposición 4.29. *Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Si*

$$\mathrm{Hom}_{RG}(I_G, RG) \to \mathrm{Hom}_{RG}(J_H, RG)$$

no es monomorfismo, entonces G tiene un subconjunto propio que es casi invariante y H-invariante

Demostración. Por la hipótesis y la Observación 3.6 existe una función $a\colon G \to RG$ no nula, que satisface $a(xy) = a(x)y + a(y)$ para todo $x, y \in G$ y que se anula en H. Supongamos que u aparece en $a(v)$ y definamos

$$b\colon G \to RG,$$

por $b(g) := vu^{-1}a(g)$. Notemos que $b(xy) = b(x)y + b(y)$, que b sa anula en H y que v aparece en $b(v)$. Escribamos

$$E_0 := \{g \in G : g \text{ no aparece en } a(g)\}.$$

Entonces $H \subseteq E_0 \subseteq G \setminus \{v\}$, como se vió en la prueba de la Proposición 4.28, E_0 es casi invariante y E_0 es H-invariante pues si b se anula en H. $\square$

Capítulo 5

Un teorema de estructura

Supongamos que Γ un grafo conexo y localmente finito y denotemos con $\mathfrak{F}(\Gamma)$ a

$$\mathfrak{F}(\Gamma) := \{E \subseteq \Gamma_0 : |E| = \infty,\ |E^c| = \infty \text{ y } |\delta E| < \infty\}.$$

Definición 5.1. *Decimos que $E \in \mathfrak{F}(\Gamma)$ es* minimal *si δE tiene la menor cantidad de aristas posibles.*

Claramente E es minimal si y sólo si su complemento lo es. También se satisface que todo conjunto minimal es conexo. En efecto, si E es minimal y C es una componente conexa de E, entonces δE es la unión disjunta de δC y $\delta(E \setminus C)$. Como Γ es conexo, $\delta C \neq \emptyset$ y $\delta(E \setminus C) = \emptyset$ sólo si $C = E$. Dado que C^c y $(E \setminus C)^c$ son infinitos y al menos uno de C y $E \setminus C$ es infinito, se sigue de la minimalidad de E requiere que $\delta(E \setminus C) = \emptyset$.

Lema 5.2. *Para todo grafo conexo y localmente finito Γ con $\mathfrak{F}(\Gamma) \neq \emptyset$ existe un conjunto minimal E tal que para cada conjunto minimal E_1 al menos uno de los conjuntos*

$$E \cap E_1, \quad E \cap E_1^c, \quad E^c \cap E_1 \quad o \quad E^c \cap E_1^c \tag{23}$$

es finito.

Demostración. Dividimos la demostración en varios pasos.

1) Si E y E_1 son minimales y ninguno de los conjuntos de (23) es finito, entonces los cuatro son minimales.

Supongamos que todos los conjuntos que aparecen en (23) son infinitos y llamemos n a $|\delta E|$. Por lo visto arriba, $n = |\delta E^c| = |\delta E_1| = |\delta E_1^c|$. Dado que $(E \cap E_1)^c$ es infinito, necesariamente $|\delta(E \cap E_1)| \geq n$ y similarmante

$$|\delta(E \cap E_1^c)| \geq n, \quad |\delta(E^c \cap E_1)| \geq n \quad \text{y} \quad |\delta(E^c \cap E_1^c)| \geq n.$$

Por otra parte es facil ver que $\delta(E \cap E_1) \subseteq \delta(E) \cup \delta(E_1)$ y que cada arista de $\delta(E) \cup \delta(E_1)$ aparece en exactamente dos de los cuatro conjuntos

$$\delta(E \cap E_1), \quad \delta(E \cap E_1^c), \quad \delta(E^c \cap E_1) \quad \text{y} \quad \delta(E^c \cap E_1^c).$$

Puesto que, por simetría, lo mismo ocurre con las aristas de $\delta(E^c) \cup \delta(E_1)$, $\delta(E) \cup \delta(E_1^c)$ y $\delta(E^c) \cup \delta(E_1^c)$,

$$\begin{aligned}
4n &\leq |\delta(E \cap E_1)| + |\delta(E \cap E_1^c)| + |\delta(E^c \cap E_1)| + |\delta(E^c \cap E_1^c)| \\
&= \frac{1}{2}|\delta E \cup \delta E_1| + \frac{1}{2}|\delta E^c \cup \delta E_1| + \frac{1}{2}|\delta E \cup \delta E_1^c| + \frac{1}{2}|\delta E^c \cup \delta E_1^c| \\
&\leq |\delta E| + |\delta E_1| + |\delta E^c| + |\delta E_1^c| \\
&= 4n.
\end{aligned}$$

Así

$$|\delta(E \cap E_1)| = |\delta(E \cap E_1^c)| = |\delta(E^c \cap E_1)| = |\delta(E^c \cap E_1^c)| = n,$$

lo que muestra que los cuatro conjuntos de (23) son minimales.

2) Si el lema es falso, existe una cadena $E_1 \supsetneq E_2 \supsetneq \dots$ estrictamente decreciente de conjuntos minimales, tal que $\bigcap_{i\geq 1} E_i \neq \emptyset$.

En efecto, tomemos un conjunto minimal cualquiera E_1 y tomemos $e \in E_1$. Si el lema no se satisface, entonces debido a 1) existe conjunto minimal $E \neq E_1$ tal que los conjuntos $E_1 \cap E$, $E_1^c \cap E$, $E_1 \cap E^c$ y $E_1^c \cap E^c$ son todos minimales. Como $E_1 \cap E \subsetneq E_1$ y $E_1 \cap E^c \subsetneq E_1$, entre $E_1 \cap E$ y $E_1 \cap E^c$ podemos elegir como E_2 al subconjunto que contiene a e. El proceso se puede continuar inductivamente.

3) Si $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ es una cadena de conjuntos minimales, tal que $\bigcap_{i\geq 1} E_i$ es infinito, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $E_i = E_{i+1}$ para todo $i \geq k$.

Tomemos una arista l de $\delta(\bigcap_{i\geq 1} E_i)$ y llamemos q al vértice de l que está en $(\bigcap_{i\geq 1} E_i)^c$. Como $(E_i^c)_{i\geq 1}$ es una sucesión creciente, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $q \in E_i^c$ para $i \geq j$, por lo que l está también en δE_i para $i \geq j$. Ahora, como $(\bigcap_{i\geq 1} E_i)^c$ es infinito y asumimos que $\bigcap_{i\geq 1} E_i$ también lo es, $|\delta(\bigcap_{i\geq 1} E_i)| \geq n$, donde n es la cantidad de aristas del borde de un conjunto minimal. Sea P un conjunto de n aristas de $\delta(\bigcap_{i\geq 1} E_i)$. Por lo que acabamos de decir en el párrafo anterior, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $P \subseteq \delta E_i$ para $i \geq k$. Como $|\delta E_i| = n$ para todo i, necesariamente $\delta E_i = P$ para $i \geq k$ y, por lo tanto, $\delta E_i = \delta E_{i+1}$ para $i \geq k$. Dado que Γ es conexo, se sigue de esto que $E_i = E_{i+1}$ o $E_i = E_{i+1}^c$ para $i \geq k$. Pero como, debido a que $E_i \supseteq E_{i+1}$, la igualdad $E_i = E_{i+1}^c$ es imposible, necesariamente $E_i = E_{i+1}$ para $i \geq k$.

4) Si $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$ es una cadena de conjuntos conexos infinitos, entonces $\bigcap_{i\geq 1} C_i$ es infinito o vacío.

Supongamos que $\bigcap_{i\geq 1} C_i$ es finito y no vacío. Como Γ es localmente finito y $\bigcap_{i\geq 1} C_i$ es finito, el conjunto B, de vértices que están en $(\bigcap_{i\geq 1} C_i)^c$ y que pueden ser unidos por una arista a un vértice de $\bigcap_{i\geq 1} C_i$, también es finito. Por otro lado, como C_r es infinito, $C_r \setminus (\bigcap_{i\geq 1} C_i) \neq \emptyset$ cualquiera sea $r \in \mathbb{N}$. Ahora, dado que $\bigcap_{i\geq 1} C_i \neq \emptyset$ y C_r es conexo existe un camino en C_r que une un vértice de $\bigcap_{i\geq 1} C_i$ con uno de $C_r \setminus (\bigcap_{i\geq 1} C_i)$. Este camino contendrá un elemento de B y, por lo tanto, $B \cap C_r \neq \emptyset$ para todo $r \geq 1$. En consecuencia, como B es finito, existe un vértice de B que pertenece a infinitos de los C_r. Pero entonces como $(C_r)_{r\geq 1}$ es una cadena decreciente, ese vértice estará en $\bigcap_{i\geq 1} C_i$ y, así, $B \cap (\bigcap_{i\geq 1} C_i) \neq \emptyset$ contra lo que habíamos asumido. Esta contradicción muestra que $\bigcap_{i\geq 1} C_i$ es infinito o vacío.

5) El lema es verdadero.

En efecto, en caso contrario, por los pasos 2) y 3) existiría una cadena estrictamente decreciente de conjuntos minimales, tal que $\bigcap_{i\geq 1} E_i$ ses finito, lo que se contradice con el paso 4), puesto que todo conjunto minimal es conexo. $\square$

Teorema 5.3 (Estructura). *Si G es un grupo finitamente generado que tiene una cantidad infinita de finales, entonces*

$$G \simeq G_1 *_K G_2 \quad o \quad G \simeq G_{1*a},$$

donde, en el primer caso K es un subgrupo finito y propio de G_1 y de G_2 y, en el segundo caso, K es un subgrupo finito de G_1 y $a\colon K \to G$ es un monomorfismo. Reciprocamente, si G_1 y G_2 son grupos finitamente generados, K es un grupo finito y $a\colon K \to G$ es un monomorfismo, entonces G_{1*a} y $G_1 *_K G_2$ tienen infinitos finales, excepto para los grupos G_{1*a} con $K = G_1$ y $G_1 *_K G_2$ con $\mid G_1 : K \mid = \mid G_2 : K \mid = 2$, que tienen exactamente dos finales. En particular, un grupo libre de torsión tiene infinitos finales si y sólo si es un producto libre de dos grupos no triviales.

Demostración. Si $G \simeq G_{1*a}$ y $K = G_1$, entonces K es un subgrupo normal de G y G/K es isomorfo a $\mathbb{Z}$, mientras que si $G \simeq G_1 *_K G_2$ y $\mid G_1 : K \mid = \mid G_2 : K \mid = 2$, entonces K es un subgrupo normal de G y G/K es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. En consecuencia, por el Corolario 4.9 y la Proposición 4.10, en estos casos, G tiene exactamente dos finales. Afirmamos que en los otros tiene una cantidad infinita. Debido al Teorema 4.25, para probar esto será suficiente ver que tiene más de dos.

Supongamos primero que $G \simeq G_{1*a}$ con $K \neq G_1$ y definamos

$$E_+ := \{u \in G : \; g_1 = e \text{ y } \epsilon_1 = 1 \text{ en la forma normal de } u \text{ dada en (7)}\}$$

y

$$E_- := \{u \in G : \; g_1 = e \text{ y } \epsilon_1 = -1 \text{ en la forma normal de } u \text{ dada en (7)}\}.$$

Se sigue facilmente de la unicidad de la forma normal mencionada aquí, que E_+ y E_- son disjuntos e infinitos y, de que $K \neq G_1$, que $G \setminus (E_+ \cup E_-)$ también lo es. En consecuencia, para terminar la prueba de la afirmación en este caso, será suficiente ver que E_+ y E_- son casi invariantes. Como $G = \langle G_1, x\rangle$ y K es finito, esto se sigue de que $E_+ g = E_+$ y $E_- g = E_-$ si $g \in G_1$, y de que $E_+ x \subseteq E_+$, $E_+ x^{-1} \subseteq E_+ \cup K$, $E_- x^{-1} \subseteq E_-$ y $E_- x \subseteq E_- \cup a(K)$.

Supongamos ahora que $G = G_1 * G_2$ con $|G_1 : K| > 2$. Para cada $b \in G_1 \setminus K$ definimos

$$E_b = \{g_1 g_2 \dots g_n \in G : g_1 = b,\; g_{2i-1} \in G_1 \setminus K \text{ y } g_{2i} \in G_2 \setminus K\}$$

Es evidente que si $b, c \in G_1 \setminus K$ y $bK \neq cK$, entonces E_b y E_c son disjuntos y de que E_b, E_c y $G \setminus (E_b \cup E_c)$ son infinitos. En consecuencia, para terminar la prueba de la afirmación en este caso, será suficiente ver que cada E_b con $b \in G \setminus K$ es casi invariante. Pero como $G = \langle G_1, G_2\rangle$, esto se sigue de que $E_b u = E_b$ Si $u \in G_2$ y $E_b v \subseteq E_b \cup \{bv\}$ si $v \in G_1$.

A continuación probaremos la recíproca. Así, por hipótesis G es un grupo finitamente generado con infinitos finales. Se sigue facilmente del Lema 4.21 que si E es minimal, entonces para cada $g \in G$ también gE lo es. En consecuencia, por el Lema 5.2, existe un subconjunto casi invariante e infinito E de G, cuyo complemento E^c también es infinito y, tal que para cada $g \in G$, al menos uno de los conjuntos

$$E \cap gE, \quad E \cap gE^c, \quad E^c \cap gE \quad \text{o} \quad E^c \cap gE^c, \tag{24}$$

es finito o, equivalentemente,

$$gE \subseteq^a E^c, \quad gE^c \subseteq^a E^c, \quad gE \subseteq^a E \quad \text{o} \quad gE^c \subseteq^a E. \tag{25}$$

Sean

$$K := \{g : gE =^a E\} \qquad \text{y} \qquad H := \{g : gE =^a E \text{ o } gE =^a E^c\}.$$

Claramente K y H son subgrupos de G, $|H : K| \leq 2$ y, por el Lema 4.23, K es finito. Además si dos de los conjuntos que aparecen en (24) son finitos, entonces $g \in H$, pues las únicas posibilidades son

- $E \cap gE$ y $E^c \cap gE^c$ son finitos $\Longleftrightarrow gE =^a E^c$,
- $E \cap gE^c$ y $E^c \cap gE$ son finitos $\Longleftrightarrow gE^c =^a E^c$,

ya que las otras implican que E o E^c es finito, contra lo asumido. Consideremos ahora los conjuntos

$$E_1 := \{g \in G : gE \subseteq^a E \text{ o } gE^c \subseteq^a E\} \quad \text{y} \quad E_2 := \{g \in G : gE \subseteq^a E^c \text{ o } gE^c \subseteq^a E^c\}.$$

De (24) se sigue que $E_1^c \subseteq E_2$ y, así, como $H = E_1 \cap E_2$, deducimos que $E_2 = E_1^c \cup H$ y que esta unión es disjunta. Por el Lema 4.22 sabemos que $gE \subseteq E$ o $gE^c \subseteq E$ para casi todo $g \in E$. En otras palabras $E \subseteq^a E_1$ y, similarmente $E^c \subseteq^a E_1^c \cup H$. Como H es finito se sigue de estos dos hechos que $E =^a E_1$. Por lo tanto

- E_1 es casi invariante y tanto E_1 como E_1^c son infinitos,
- $K = \{g : gE_1 =^a E_1\}$ y $H = \{g : gE_1 =^a E_1 \text{ o } gE_1 =^a E_1^c\}$,
- $E_1 = \{g \in G : gE_1 \subseteq^a E_1 \text{ o } gE_1^c \subseteq^a E_1\}$ y $E_2 = \{g \in G : gE_1 \subseteq^a E_1^c \text{ o } gE_1^c \subseteq^a E_1^c\}$.

Es fácil ver ahora que

$$e \in E_1, \quad E_1 h = E_1 \text{ para todo } h \in H \quad \text{y} \quad hE_1 = \begin{cases} E_1 & \text{para todo } h \in K, \\ E_2 & \text{para todo } h \in H \setminus K. \end{cases}$$

De aquí en más, los símbolos X e Y denotarán indistintamente a $E_1 \setminus K$ o a $E_1 \setminus (H \setminus K)$ y, si X denota a uno de ello, X' denotará al otro. Un cálculo directo muestra que

$$kX = X \text{ para todo } k \in K \quad \text{y} \quad hX = X^c \text{ para todo } h \in H \setminus K.$$

Por ejemplo, si $h \in H \setminus K$, entonces

$$h(E_1 \setminus K) = hE_1 \setminus hK = E_2 \setminus (H \setminus K) = (E_1^c \cup H) \setminus (H \setminus K) = E_1^c \cup K = (E_1 \setminus K)^c.$$

Afirmamos que para todo $g \in G$, el conjunto $Xg \bigtriangleup Y$ es la unión de una cantidad finita de coclases a derecha Hl de H. En efecto, como $X =^a E_1$, $Y =^a E_1$ y E_1 es casi invariante,

$$Xg \bigtriangleup Y =^a E_1 g \bigtriangleup E_1 =^a \emptyset$$

y, por lo tanto, $Xg \bigtriangleup Y$ es finito. Así, para terminar la demostración basta ver que $Xg \bigtriangleup Y$ es una unión de coclases a derecha de H, lo cual se sigue de que

$$k(Xg \bigtriangleup Y) = kXg \bigtriangleup kY = Xg \bigtriangleup Y \quad \text{para todo } k \in K$$

y

$$h(Xg \bigtriangleup Y) = hXg \bigtriangleup hY = X^c g \bigtriangleup Y^c = Xg \bigtriangleup Y \quad \text{para todo } h \in H \setminus K.$$

Ahora definimos la *longitug* $\ell(g)$ de g como

$$\ell(g) := 1 + \frac{|Xg \bigtriangleup Y|}{|H|}, \tag{26}$$

donde X e Y son elegidos de manera que $|Xg \bigtriangleup Y|$ sea lo mínimo posible. Por lo que acabamos de ver $\ell(g) \in \mathbb{N}$. Además, usando que

$$(E_1 \setminus K)h = E_1 h \setminus Kh = E_1 \setminus Kh = \begin{cases} E_1 \setminus K & \text{si } h \in K, \\ E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } h \in H \setminus K, \end{cases} \tag{27}$$

o

$$(28)\quad (E_1 \setminus (H \setminus K))h = E_1h \setminus (H \setminus K)h = E_1 \setminus (H \setminus Kh) = \begin{cases} E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } h \in K, \\ E_1 \setminus K & \text{si } h \in H \setminus K, \end{cases}$$

es fácil ver que $\ell(g) = 1$ para todo $g \in H$. Notemos ahora que si $e \in Xg \triangle Y$, entonces $H \subseteq Xg \triangle Y$ y, como $Y \triangle Y' = H$, tenemos

$$Xg \triangle Y' = (Xg \triangle Y) \triangle (Y \triangle Y') = (Xg \triangle Y) \setminus H$$

y, similarmente, si $g \in Xg \triangle Y$, entonces

$$X'g \triangle Y = (Y \triangle Xg) \triangle (Xg \triangle X'g) = (Xg \triangle Y) \setminus Hg.$$

Por lo tanto, si X e Y son elegidos de manera que $|Xg \triangle Y|$ sea el mínimo posible, entonces $e, g \notin Xg \triangle Y$. Así, con esta elección de X e Y,

$$\begin{aligned} Xg \triangle Y' &= (Xg \triangle Y) \triangle (Y \triangle Y') = (Xg \triangle Y) \triangle H = (Xg \triangle Y) \cup H, \\ X'g \triangle Y &= (X'g \triangle Xg) \triangle (Xg \triangle Y) = Hg \triangle (Xg \triangle Y) = Hg \cup (Xg \triangle Y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} X'g \triangle Y' &= (X'g \triangle Xg) \triangle (Xg \triangle Y) \triangle (Y \triangle Y') = Hg \triangle (Xg \triangle Y) \triangle H \\ &= (Xg \triangle Y) \triangle (Hg \triangle H) = \begin{cases} (Xg \triangle Y) \cup Hg \cup H & \text{si } g \notin H, \\ Xg \triangle Y & \text{si } g \in H. \end{cases} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$(29)\qquad \ell(g) = 1 + \frac{|Xg \triangle Y|}{|H|} \Longleftrightarrow e, g \notin Xg \triangle Y.$$

Afirmamos que si $x \in Xg \triangle Y$ pero $e, g \notin Xg \triangle Y$, entonces

$$(30)\qquad Xx \triangle Y \subseteq Xg \triangle Y.$$

Para ver esto basta probar que

$$(31)\qquad Xg \cap Y \subseteq Xx \subseteq Xg \cup Y.$$

Supongamos que $Xx \nsubseteq Xg \cup Y$ y tomemos $z \in Xx \setminus (Xg \cup Y)$. En particular

$$z \notin E_1 \setminus H, \qquad zg^{-1} \notin E_1 \setminus H \qquad \text{y} \qquad zx^{-1} \in E_1.$$

Como $(E_1 \setminus H)^c = E_1^c \cup H = E_2$, se sigue de la definición de E_1 y E_2 que existen conjuntos A, B y C, cada uno de los cuales es igual a E_1 o E_1^c, tales que

$$zA \subseteq^a E_1^c, \qquad zg^{-1}B \subseteq^a E_1^c \qquad \text{y} \qquad zx^{-1}C \subseteq^a E_1.$$

Por lo tanto

$$xA = xz^{-1}zA \subseteq^a xz^{-1}E_1^c \subseteq^a C^c \qquad \text{y} \qquad xg^{-1}B = xz^{-1}zg^{-1}B \subseteq^a xz^{-1}E_1^c \subseteq^a C^c.$$

En consecuencia, si $C = E_1$, entonces $x, xg^{-1} \in E_2 = E_1^c \cup H$, mientras que si $C = E_1^c$, entonces $x, xg^{-1} \in E_1$. Además $x, xg^{-1} \notin H$, pues como $Xg \triangle Y$ es una unión de coclases a derecha de H, de $x \in H$ y $x \in Xg \triangle Y$, se sigue que $e = x^{-1}x \in Xg \triangle Y$, lo que contradice que $e \notin Xg \triangle Y$; mientras que de $xg^{-1} \in H$ y $x \in Xg \triangle Y$, se sigue que $g = gx^{-1}x \in Xg \triangle Y$, lo que contradice que $g \notin Xg \triangle Y$. Así, $x, xg^{-1} \in E_1 \setminus H$, lo que implica que $x \in Xg \cap Y$; o $x, xg^{-1} \in E_1^c$, lo que implica que $x \notin Xg \cup Y$. En ambos casos obtenemos una contradicción al hecho de que $x \in Xg \triangle Y$. Notemos ahora que si en (24) intercambiamos E con E^c, obtenemos los mismos conjuntos K y E, pero que E_1 y E_2 quedan intercambiados. Además como

$$E_2 \setminus K = (E_1^c \cup H) \setminus K = E_1^c \cup (H \setminus K) = (E_1 \setminus (H \setminus K))^c$$

y

$$E_2 \setminus (H \setminus K) = (E_1^c \cup H) \setminus (H \setminus K) = E_1^c \cup K = (E_1 \setminus K)^c,$$

los papeles de X e Y quedan intercambiados con los de X^c e Y^c. Dado que

$$X^c g \cap Y^c = (Xg)^c \cap Y^c = Xg \cap Y,$$

se sigue de todo esto y de lo que ya hemos probado que $X^c x \subseteq X^c g \cup Y^c$. Así,

$$Xg \cap Y = \big((Xg)^c \cup Y^c\big)^c = \big(X^c g \cup Y^c\big)^c \subseteq (X^c x)^c = Xx,$$

lo que termina la demostración de (31).

A continuación probaremos una serie de hechos.

1) G está generado por elementos de longitud 1. Claramente, para probar esto es suficiente ver que si $\ell(g) > 1$, entonces existe $x \in G$ tal que $\ell(x) < \ell(g)$ y $\ell(gx^{-1}) < \ell(g)$. Supongamos que $\ell(g) > 1$ y tomemos X e Y tales que la igualdad (26) se satisface. Por (29), sabemos que $e, g \notin Xg \triangle Y$ y, además, evidentemente existe $x \in Xg \triangle Y$. Así, para este x se satisface la inclusión (30). Por lo tanto, si $x \in Xx \triangle Y$, entonces

$$\ell(x) < \frac{|\, Xx \triangle Y \,|}{|\, H \,|} + 1 \leq \frac{|\, Xg \triangle Y \,|}{|\, H \,|} + 1 = \ell(g),$$

mientras que si $x \notin Xx \triangle Y$, entonces

$$\ell(x) \leq \frac{|\, Xx \triangle Y \,|}{|\, H \,|} + 1 < \frac{|\, Xg \triangle Y \,|}{|\, H \,|} + 1 = \ell(g).$$

En cualquier caso queda $\ell(x) < \ell(g)$. Veamos ahora que $\ell(gx^{-1}) < \ell(g)$. Notemos que

$$Xx \triangle Xg = (Xg \triangle Y) \triangle (Xx \triangle Y) \subseteq Xg \triangle Y$$

y

$$x \in Xx \triangle Xg \Longleftrightarrow e \in X \triangle Xgx^{-1}.$$

Así, si $x \in Xx \triangle Xg$, entonces

$$\ell(gx^{-1}) < \frac{|\, X \triangle Xgx^{-1} \,|}{|\, H \,|} + 1 = \frac{|\, Xx \triangle Xg \,|}{|\, H \,|} + 1 \leq \frac{|\, Xg \triangle Y \,|}{|\, H \,|} + 1 = \ell(g),$$

mientras que si $x \notin Xx \triangle Xg$, entonces

$$\ell(gx^{-1}) \leq \frac{|\, X \triangle Xgx^{-1} \,|}{|\, H \,|} + 1 = \frac{|\, Xx \triangle Xg \,|}{|\, H \,|} + 1 < \frac{|\, Xg \triangle Y \,|}{|\, H \,|} + 1 = \ell(g),$$

como queremos.

2) Si $g_1, \dots, g_n \notin H$ tienen longitud 1 y existen $X_0, \dots, X_n$ tales que

$$X_{i-1} g_i = X_i' \qquad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

entonces $g_1 \cdots g_n \notin H$. Para comprobarlo, probaremos inductivamente que los conjuntos

$$Hg_1 \dots g_n,\ Hg_2 \dots g_n,\ Hg_3 \dots g_n,\ \dots,\ Hg_{n-1}g_n,\ Hg_n \text{ y } H$$

son disjuntos dos a dos y que

$$X_0 g_1 \cdots g_n \triangle X'_n \tag{32}$$

es la unión de

$$Hg_2 \dots g_n,\ Hg_3 \dots g_n,\ \dots,\ Hg_{n-1}g_n \text{ y } Hg_n. \tag{33}$$

Notemos que

$$Hg_1 \dots g_n \cap H = \emptyset \iff g_1 \dots g_n \notin H. \tag{34}$$

que es lo que queremos probar. El caso $n = 1$ es trivial ya que $g_1 \notin H$ por hipótesis y

$$X_0 g_1 \cdots g_n \triangle X'_1 = X'_1 \triangle X'_1 = \emptyset.$$

Supongamos ahora que el resultado vale para cualquier familia de $n-1$ elementos de G que satisface las condiciones mencionadas arriba. Por hipótesis inductiva las familias

$$Hg_1 \dots g_n,\ Hg_2 \dots g_n,\ Hg_3 \dots g_n,\ \dots,\ Hg_{n-1}g_n \text{ y } Hg_n \tag{35}$$

y

$$Hg_2 \dots g_n,\ Hg_3 \dots g_n,\ \dots,\ Hg_{n-1}g_n,\ Hg_n \text{ y } H \tag{36}$$

están formadas por conjuntos disjuntos dos a dos. Como

$$\begin{aligned} X_0 g_1 \cdots g_n \triangle X'_n &= X_0 g_1 \cdots g_n \triangle X_{n-1} g_n \\ &= \big(X_0 g_1 \cdots g_{n-1} \triangle X'_{n-1}\big) g_n \triangle \big(X'_{n-1} \triangle X_{n-1}\big) g_n \\ &= \big(X_0 g_1 \cdots g_{n-1} \triangle X'_{n-1}\big) g_n \triangle H g_n, \end{aligned}$$

se sigue de la hipótesis inductiva y de que

$$Hg_n \cap \bigcup_{i=2}^{n-1} Hg_i \cdots g_n = \emptyset,$$

que el conjunto (32) es la unión de la familia (33). Usando que las familias (35) y (36) están formadas por conjuntos disjuntos dos a dos, se sigue de la condición (29), que

$$\ell(g_1 \cdots g_n) = \frac{|\ X_0 g_1 \cdots g_n \triangle X'_n\ |}{|\ H\ |} + 1 = \frac{(n-1).\ |\ H\ |}{|\ H\ |} + 1 = n.$$

En consecuencia, si $n > 1$, entonces $g_1 \cdots g_n \notin H$. Por lo tanto, debido a (34), la unión de las familias (35) y (36) está formada por conjuntos disjuntos dos a dos, como queríamos.

3) Miremos ahora los elementos de longitud 1 de G. Ellos pueden ser agrupados en cuatro clases:

$$\begin{aligned} G_1 &:= \{g : (E_1 \setminus K)g = E_1 \setminus K\}, \\ G_2 &:= \{g : (E_1 \setminus (H \setminus K))g = E_1 \setminus (H \setminus K)\}, \\ P &:= \{g : (E_1 \setminus (H \setminus K))g = E_1 \setminus K\} \end{aligned}$$

y

$$Q := \{g : (E_1 \setminus K)g = E_1 \setminus (H \setminus K)\}.$$

Notemos que G_1 y G_2 son subgrupos de G y que $Q = P^{-1}$. Afirmamos que

(a) $P \cap G_1 = \emptyset = P \cap G_2$,

(b) $G_1 \cap G_2 = G_1 \cap H = G_2 \cap H = K$,

(c) $H \setminus K \subseteq P \cap P^{-1}$ y $x^{-1}G_2 y \subseteq G_1$ para todo $x, y \in P$.

En efecto, el item (a) se sigue de que si $g \in P \cap G_1$, entonces

$$(E_1 \setminus (H \setminus K))g = E_1 \setminus K = (E_1 \setminus K)g \Rightarrow E_1 \setminus (H \setminus K) = E_1 \setminus K,$$

lo que es absurdo, mientras que si $g \in P \cap G_2$, entonces

$$g \in P \cap G_2 \Rightarrow E_1 \setminus K = (E_1 \setminus (H \setminus K))g = E_1 \setminus (H \setminus K),$$

lo que también lo es. Veamos el item (b). Por (27) sabemos que $K \subseteq G_1$ y $(H \setminus K) \cap G_1 = \emptyset$, pues si $h \in (H \setminus K) \cap G_1$, entonces

$$E_1 \setminus K = (E_1 \setminus K)h = (E_1 \setminus (H \setminus K)),$$

lo que es absurdo, mientras que un argumento similar, pero usando (28) en lugar de (27), prueba que $K \subseteq G_2$ y $(H \setminus K) \cap G_2 = \emptyset$. Por lo tanto $G_1 \cap H = K = G_1 \cap H$ y $K \subseteq G_1 \cap G_2$. Queda por ver que $G_1 \cap G_2 \subseteq K$. Pero, si $g \in G_1 \cap G_2$, entonces

$$Kg = \big((E_1 \setminus (H \setminus K)) \setminus (E_1 \setminus K)\big)g = (E_1 \setminus (H \setminus K))g \setminus (E_1 \setminus K)g = (E_1 \setminus (H \setminus K)) \setminus (E_1 \setminus K) = K,$$

lo que implica que $g \in K$. Finalmente probamos el item (c). De (27) y (28) se sigue inmediatamente que $H \setminus K \subseteq P \cap Q = P \cap P^{-1}$, mientras que la segunda inclusión es consecuencia inmediata de que si $x, y \in P$ y $g \in G_2$, entonces

$$(E_1 \setminus K)x^{-1}gy = (E_1 \setminus (H \setminus K))gy = (E_1 \setminus (H \setminus K))y = E_1 \setminus K.$$

Ahora consideramos tres casos:

Caso 1: $P = \emptyset$. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & G_1 \arrow[d, "i_1"'] \arrow[ddr, "\iota_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, "\iota_2"'] & G_1 *_K G_2 \arrow[dr, "\theta"] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

en el que j_1, j_2, i_1, i_2, ι_1 y ι_2 son las inclusiones canónicas y θ es el morfismo obtenido usando la propiedad universal de $G_1 *_K G_2$. Queremos ver que $G = G_1 *_K G_2$ o, más precisamente, que θ es un isomorfismo. Como $P = \emptyset$ sabemos que G está generada por G_1 y G_2 y, por lo tanto, θ es sobreyectiva. Debido a los comentarios que aparecen a continuación de la Proposición 1.12, para ver que también es inyectiva, es suficiente probar que un producto $g_n \cdots g_1$ en G, cuyos factores están alternadamente en $G_1 \setminus K$ y $G_2 \setminus K$, no puede estar en K. Como, por el item (c), $H = K$, esto se sigue aplicando 2) con

$$X_i = \begin{cases} E_1 \setminus K & \text{si } i < n \text{ y } g_{i+1} \in G_1 \setminus K \text{ o } i = n \text{ y } g_n \in G_2 \setminus K, \\ E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } i < n \text{ y } g_{i+1} \in G_2 \setminus K \text{ o } i = n \text{ y } g_n \in G_1 \setminus K. \end{cases}$$

Caso 2: $H \neq K$. Tomemos $x \in H \setminus K$. Por (c) sabemos que $H \setminus K \subseteq P$ y $x^{-1}G_2 y \subseteq G_1$ para todo $y \in P$. En consecuencia $G_2 \subseteq xG_1x^{-1}$ y $P \subseteq xG_1$ y, así,

$$G = \langle G_1, G_2, P, Q \rangle = \langle G_1, G_2, P, P^{-1} \rangle = \langle G_1, G_2, P \rangle = \langle G_1, x \rangle \subseteq \langle G_1, H \rangle \subseteq G.$$

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_H"] & G_1 \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, "\iota_1"] & \\ H \arrow[r, "i_H"] \arrow[drr, "\iota_H"'] & G_1 *_K H \arrow[dr, "\theta"] & \\ & & G \end{tikzcd}$$

en el que j_1, j_H, i_1, i_H, ι_1 y ι_H son las inclusiones canónicas y θ es el morfismo obtenido usando la propiedad universal de $G_1 *_K H$. Por lo que acabamos de ver θ es sobreyectivo. Para probar que es inyectiva es suficiente ver que

$$h_0 g_1 h_1 \cdots g_n h_n \notin H,$$

si $n \in \mathbb{N}$, $g_i \in G_1 \setminus K$ para todo i, $h_i \in H \setminus K$ para $i < n$ y $h_0, h_n \in H$. Notemos que

- $g_i h_i \notin H$ pues, por el item (b), lo contrario implicaría que $g_i \in G_1 \cap H = K$.
- De $g_i \in G_1$, $h_i \in H \setminus K$ y el item (c), se sigue que

$$(E_1 \setminus K) g_i h_i = (E_1 \setminus K) h_i = E_1 \setminus (H \setminus K) \quad \text{para } i < n,$$

  En consecuencia, por los items (b) y (c),

$$\begin{aligned} &(E_1 \setminus K) h_0 g_i h_i = (E_1 \setminus K) g_i h_i = E_1 \setminus (H \setminus K) && \text{si } h_0 \in K, \\ &(E_1 \setminus (H \setminus K)) h_0 g_i h_i = (E_1 \setminus K) g_i h_i = E_1 \setminus (H \setminus K) && \text{si } h_0 \in H \setminus K, \end{aligned}$$

- De $g_n \in G_1$, $h_n \in H$ y los items (b) y (c), se sigue que

$$(E_1 \setminus K) g_n h_n = (E_1 \setminus K) h_n = \begin{cases} E_1 \setminus K & \text{si } h_n \in K, \\ E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } h_n \in H \setminus K, \end{cases}$$

Así podemos aplicar 2) con

$$X_1 = \cdots = X_{n-1} = E_1 \setminus K \quad \text{y} \quad X_i = \begin{cases} E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } i \in \{0, n\} \text{ y } h_i \in K, \\ E_1 \setminus K & \text{si } i \in \{0, n\} \text{ y } h_i \in H \setminus K, \end{cases}$$

para obtener que $(g_1 h_1) \cdots (g_n h_n) \notin H$.

Caso 3: $\boldsymbol{H = K}$ pero $\boldsymbol{P \neq \emptyset}$. Tomemos $x \in H \setminus K$. Como en el Caso 2,

$$G = \langle G_1, x \rangle \qquad \text{y} \qquad x^{-1} G_2 x \subseteq G_1.$$

Además, por los items (b) y (c) sabemos que $x \in P \cap Q$ y $K = G_1 \cap H = G_1 \cap G_2$ y, así, $x^{-1} K x \subseteq G_1$. Denotemos con $a\colon K \to G_1$ al monomorfismo definido por $a(k) := x^{-1} k x$. Es evidente ahora que G es una imagen homomorfica de G_{*a}. Por la Proposición 1.20, para ver que es un isomorfismo es suficiente probar que

$$g_1 x^{\epsilon_1} g_2 x^{\epsilon_2} \cdots g_n x^{\epsilon_n} g_{n+1} \neq e \tag{37}$$

siempre que

$$n \geq 1, \quad \epsilon_i = \pm 1, \quad g_i \neq e \text{ si } \epsilon_{i-1} + \epsilon_i = 0 \quad \text{y} \quad g_i \notin \begin{cases} K \setminus \{e\} & \text{si } \epsilon_i = 1, \\ a(K) \setminus \{e\} & \text{si } \epsilon_i = -1. \end{cases}$$

Ahora en el lado izquierdo de la desigualdad (37) asociamos

a) $g_i x^{\epsilon_i}$ si $i = 1$ y $\epsilon_1 = -1$ o $\epsilon_{i-1} = -1$ y $\epsilon_i = -1$,

b) $x^{\epsilon_{i-1}} g_i$ si $i = n+1$ y $\epsilon_n = 1$ o $\epsilon_{i-1} = 1$ y $\epsilon_i = 1$,

c) $x^{\epsilon_{i-1}} g_i x^{\epsilon_i}$ si $\epsilon_{i-1} = 1$ y $\epsilon_i = -1$,

d) g_i si $i = 1$ y $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_{i-1} = -1$ y $\epsilon_i = 1$ o $i = n+1$ y $\epsilon_n = -1$.

Notemos que

- Si $g_i x^{-1}$ es como en el item a), entonces $g_i x^{-1} \notin K$. En efecto, en caso contrario $x \in G_1$, lo que es falso (pues implica que $x \in H \cap G_1 = K$ y así contradice que $x \notin K$).
- Si $x g_i$ es como en el item b), entonces $x g_i \notin K$. En efecto, en caso contrario $x \in G_1$, lo que es falso (pues implica que $x \in H \cap G_1 = K$ y así contradice que $x \notin K$).
- Si $x g_i x^{-1}$ es como en el item c), entonces $x g_i x^{-1} \notin K$. En efecto, en caso contrario $g_i \in x^{-1} K x = a(K)$ y así $g_i \in a(K) \setminus \{e\}$ puesto que $\epsilon_{i-1} + \epsilon_i = 0$. Pero esto contradice que $\epsilon_i = -1$.
- Si g_1 es como en el item d), entonces $g_1 = e$ o $g_1 \notin K$. En efecto, esto se sigue inmediatamente de que $\epsilon_i = 1$.
- Si $1 < i \leq n$ y g_i como en el item d), entonces $g_i \notin K$. En efecto, esto se sigue inmediatamente de que $\epsilon_i = 1$ y $\epsilon_{i-1} + \epsilon_i = 0$.

Por lo tanto el lado izquierdo de la desigualdad (37) queda expresado como un producto

$$u_1 \cdots u_{n+1}$$

de elementos de $G \setminus K$, salvo posiblemente $u_{n+1} = g_{n+1}$ si $\epsilon_n = -1$. Por otra parte

- Si u_i es como en el item a), entonces u_{i+1} es como en los items a) o d),
- si u_i es como en el item b), entonces u_{i+1} es como en los items b) o c),
- si u_i es como en el item c), entonces u_{i+1} es como en los items a) o d),
- si u_i es como en el item d), entonces u_{i+1} es como en el items b o c).

Además,

$$\begin{array}{ll}
(E_1 \setminus K) g_i x^{-1} = (E_1 \setminus K) x^{-1} = E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } g_i x^{-1} \text{ es como en el item a)}, \\
(E_1 \setminus (H \setminus K)) x g_i = (E_1 \setminus K) g_i = E_1 \setminus K & \text{si } g_i x^{-1} \text{ es como en el item b)}, \\
(E_1 \setminus (H \setminus K)) x g_i x^{-1} = (E_1 \setminus K) x^{-1} = E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } x g_i x^{-1} \text{ es como en el item c)}, \\
(E_1 \setminus K) g_i = E_1 \setminus K & \text{si } g_i \text{ es como en el item d)}.
\end{array}$$

Así, en el caso en que $\epsilon_n = 1$ o $\epsilon_n = -1$ pero $g_{n+1} \in G \setminus K$, obtenemos que la desigualdad (37) es válida, aplicando 2) con

$$X_i = \begin{cases} E_1 \setminus K & \text{si } i \leq n \text{ y } u_{i+1} \text{ es como en los items a) o d)}, \\ E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } i \leq n \text{ y } u_{i+1} \text{ es como en los items b) o c)}, \\ E_1 \setminus K & \text{si } i = n+1 \text{ y } u_{n+1} \text{ es como en los items a) o c)}, \\ E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } i = n+1 \text{ y } u_{n+1} \text{ es como en los items b) o d)}, \end{cases}$$

mientras que si $g_{n+1} \in K$, entonces aplicando 2) a $u_1 \dots u_n$ con

$$X_i = \begin{cases} E_1 \setminus K & \text{si } i < n \text{ y } u_{i+1} \text{ es como en los items a) o d),} \\ E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } i < n \text{ y } u_{i+1} \text{ es como en los items b) o c),} \\ E_1 \setminus K & \text{si } i = n \text{ y } u_n \text{ es como en los items a) o c),} \\ E_1 \setminus (H \setminus K) & \text{si } i = n \text{ y } u_n \text{ es como en los items b) o d),} \end{cases}$$

obtenemos que $u_1 \dots u_n \notin K$ y, por lo tanto, $u_1 \dots u_{n+1} \neq e$. □

PROPOSICIÓN 5.4. *Un grupo no puede ser a la vez de manera no trivial un producto directo y un producto libre.*

DEMOSTRACIÓN. En un producto directo el centralizador de cualquier elemento es un producto directo no trivial. Sin embargo en un producto libre $A * B$ con A y B no triviales, el elemento ab con $a \in A \setminus \{e\}$ y $b \in B \setminus \{e\}$ tiene como centralizador a un grupo cíclico ininito. En efecto, si

$$aba_1b_1 \cdots a_nb_n = a_1b_1 \cdots a_nb_nab \quad \text{con } a_1, \dots, a_n \in A \text{ y } b_1, \dots, b_n \in B,$$

entonces $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$, etcetera y, así, $a_1b_1 \cdots a_nb_n = (ab)^n$. Similarmente, si

$$abb_1a_1 \cdots b_na_n = b_1a_1 \cdots b_na_nab \quad \text{con } a_1, \dots, a_n \in A \text{ y } b_1, \dots, b_n \in B,$$

entonces

$$b_1a_1 \cdots b_na_nb^{-1}a^{-1} = b^{-1}a^{-1}b_1a_1 \cdots b_na_nab$$

y así, como antes $b_1a_1 \cdots b_na_n = (ab)^{-n}$. Finalmente, las igualdades

$$aba_1b_1 \cdots a_nb_na_{n+1} = a_1b_1 \cdots a_nb_na_{n+1}ab \quad \text{y} \quad b_1a_1 \cdots b_na_nb_{n+1}ab = abb_1a_1 \cdots b_na_nb_{n+1}$$

son imposibles, pues, en ellas, el lado izquierdo tiene longitud $2n+3$ y, el derecho, a lo sumo $2n+2$. □

TEOREMA 5.5 (Kuroš). *Sea $G = A*B$ un grupo. Si $H \subseteq G$ es un subgrupo de G, entonces*

$$H = F * \big(*_{x\in\mathcal{X}}(H \cap x^{-1}Ax)\big) * \big(*_{y\in\mathcal{Y}}(H \cap y^{-1}By)\big),$$

donde F es un subgrupo libre de H y $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son subconjuntos de G que contienen al neutro e de G.

COROLARIO 5.6 (Schreier-Nielsen). *Todo subgrupo de un grupo libre es libre.*

COROLARIO 5.7. *Todo subgrupo de un producto libre no trivial $G = A * B$ es uno de los siguientes:*

1. *Un producto libre no trivial.*
2. *Cíclico infinito.*
3. *Está contenido en un conjugado de uno de los factores libres A o B del grupo.*

PROPOSICIÓN 5.8. *Sean G un grupo finitamente generado y libre de torsión y H un subgrupo no trivial de G. Entonces existe un subconjunto no vacío y propio E de G que es casi invariante y H-invariante si y sólo si H está contenido en un factor libre y propio de G.*

DEMOSTRACIÓN. Si $G = A * B$ con A y B no triviales y $H \subseteq B$, tomamos como E el conjunto de elementos de G que empiezan con un elemento de $A \setminus \{e\}$. Así, E es casi invariante y B-invariante pues $Eb = E$ para todo $b \in B$ y $Ea = (E \setminus \{a\}) \cup \{e\}$. En particular E es casi invariante y H-invariante. Para la inversa supongamos que G tiene un subconjunto E no vacío y propio, que es casi invariante y H-invariante. Notemos que esto último significa que E es una unión de coclases a izquierda gH de H. En consecuencia H es propio pues E lo es. Además $E \nsubseteq H$, pues en caso contrario $E = H$, lo que es imposible ya que, como G no tiene torsión, H es infinito y, así, como $Hg \cap H = \emptyset$ para $g \in G \setminus H$, el conjunto H no es casi invariante. Tomemos una copia G_1 de G y definamos $K := G *_H (G_1 \times \mathbb{Z})$. Entonces K es finitamente generado y libre de torsión pues G y $G_1 \times \mathbb{Z}$ lo son. Consideremos transversales a izquierda T y T' de H en G y $G_1 \times \mathbb{Z}$, ambas conteniendo al neutro e del grupo correspondiente, de manera que la de H en G tenga algún elemento de E y denotemos con $\overline{E}$ al conjunto de elementos de K cuya forma normal (obtenida usando T y T') comienza con un elemento de E. Es evidente que $\overline{E}$ y $\overline{E}^c$ son infinitos. Además $\overline{E}$ es casi invariante puesto que $\overline{E}v = \overline{E}$ para cada $v \in G_1 \times \mathbb{Z}$, mientras que $\overline{E}g \subseteq \overline{E} \cup Eg =^a \overline{E} \cup E \subseteq \overline{E}$ para cada $g \in G$. Por lo tanto la cantidad de finales de K es al menos 2. Por el Teorema 5.3 y el Corolario 4.27, esto implica que $K \simeq \mathbb{Z}$ o K es un producto libre de dos grupos no triviales. Pero como ningún subgrupo de $\mathbb{Z}$ es un producto directo no trivial y $G_1 \times \mathbb{Z} \subseteq K$, necesariamente $K = A * B$ con $A \neq \{e\}$ y $B \neq \{e\}$. Ahora, por la Proposición 5.4 y el Corolario 5.7, existe $u \in K$ tal que $G_1 \times \mathbb{Z} \subseteq u^{-1}Au$ o $G_1 \times \mathbb{Z} \subseteq u^{-1}Bu$. Por simetría podemos suponer que estamos en el primer caso y así, $G \nsubseteq u^{-1}Au$ pues, en caso contrario, K estaría incluído en $u^{-1}Au$. Aplicando el teorema de Kuroš a $G \subseteq K = (u^{-1}Au) * (u^{-1}Bu)$ obtenemos que $G \cap u^{-1}Au$ es un factor libre de G. Como $H \subseteq G \cap (G_1 \times \mathbb{Z}) \subseteq G \cap u^{-1}Au$ esto termina la demostración. □

COROLARIO 5.9. *Sean G grupo finitamente generado y libre de torsión y H un subgrupo de G. Si $\mathrm{Hom}_{RG}(I_G, RG) \to \mathrm{Hom}_{RG}(J_H, RG)$ no es inyectivo, entonces H está incluido en un factor libre de G.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 4.29 existe un subconjunto casi invariante de G que además es H-invariante no es ni vacío ni G. En consecuencia, por la Proposición 5.8, el subgrupo H está incluido en un factor libre propio de G. □

Capítulo 6

El caso finitamente generado

Denotemos con S a un anillo arbitrario. Dado un S-módulo a derecha M denotamos con M^* al S-módulo a izquierda $\mathrm{Hom}_S(M,S)$ y con M^{**} al S-módulo a derecha $\mathrm{Hom}_S(M^*,S)$. Recordemos que las acciones en M^* y M^{**} están dadas por

$$(af)(m) := af(m) \qquad \text{y} \qquad (\varphi a)(f) := \varphi(f)a.$$

Para cada morfismo de morfismo de S-módulos a derecha $h\colon M \to N$ denotamos con

$$h^*\colon N^* \to M^* \qquad \text{y con} \qquad h^{**}\colon M^{**} \to N^{**}$$

a los morfismos de S-módulos definidos por

$$h^*(f) := f \circ h \qquad \text{y} \qquad h^{**}(\varphi) := \varphi \circ h^*.$$

Proposición 6.1. *Para cada S-módulo a derecha M la aplicación $\epsilon_M\colon M \to M^{**}$, dada por $\epsilon_M(m)(f) := f(m)$, es un morfismo de S-módulos a derecha, que es natural en M.*

La naturalidad de ϵ_M significa que si $h\colon M \to N$ es un morfismo de S-módulos a derecha, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\epsilon_M"] \arrow[d, "h"] & M^{**} \arrow[d, "h^{**}"] \\ N \arrow[r, "\epsilon_N"] & N^{**}, \end{tikzcd} \tag{38}$$

conmuta.

Demostración. Como para todo $a \in S$ y todo $m_1, m_2 \in M$,

$$\epsilon_M(m_1a + m_2)(f) = f(m_1a + m_2) = f(m_1)a + f(m_2) = (\epsilon_M(m_1)a)(f) + \epsilon_M(m_2)(f),$$

la aplicación ϵ_M es un morfismo de S-módulos a derecha. Dejamos al lector la tarea de comprobar que es natural. $\square$

Proposición 6.2. *Para cada par de S-módulos a derecha M_1 y M_2 la aplicación*

$$\Psi_{M_1M_2}\colon M_1^*\oplus M_2^*\to (M_1\oplus M_2)^*,$$

definida por $\Psi_{M_1M_2}(f_1,f_2)(m_1,m_2) := f_1(m_1)+f_2(m_2)$, es un isomorfismo de S-módulos, que es natural en M_1 y en M_2. Además su inversa es la aplicación

$$\Phi_{M_1M_2}\colon (M_1\oplus M_2)^*\to M_1^*\oplus M_2^*,$$

definida por

$$\Phi_{M_1M_2}(f) := (f_1,f_2),$$

donde $f_1\in M_1^*$ y $f_2\in M_2^*$ están dados por $f_1(m) := f(m,0)$ y $f_2(m) := f(0,m)$.

La naturalidad de $\Psi_{M_1M_2}$ significa que si $f_1\colon M_1\to N_1$ y $f_2\colon M_2\to N_2$ son morfismos de S-módulos, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N_1^*\oplus N_2^* \arrow[r, "\Psi_{N_1N_2}"] \arrow[d, "f_1^*\oplus f_2^*"] & (N_1\oplus N_2)^* \arrow[d, "(f_1\oplus f_2)^*"] \\
M_1^*\oplus M_2^* \arrow[r, "\Psi_{M_1M_2}"] & (M_1\oplus M_2)^*,
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Dejamos al lector la tarea de comprobar que $\Psi_{M_1M_2}$ es S-lineal y natural en M_1 y en M_2. Para terminar la prueba es suficiente observar que $\Psi_{M_1M_2}\circ\Phi_{M_1M_2}=\mathrm{id}$ y $\Phi_{M_1M_2}\circ\Psi_{M_1M_2}=\mathrm{id}$, lo que es obvio. $\square$

Por supuesto que hay un resultado similar al anterior para S-módulos a izquierda.

Observación 6.3. *De la proposición 6.2 se sigue facilmente que, para cada par de S-módulos a derecha M_1 y M_2, la aplicación*

$$\Upsilon_{M_1M_2}\colon (M_1\oplus M_2)^{**}\to M_1^{**}\oplus M_2^{**},$$

definida como la composición

$$M_1^{**}\oplus M_2^{**}\xrightarrow{\Psi_{M_1^*M_2^*}}(M_1^*\oplus M_2^*)^*\xrightarrow{\Phi^*_{M_1M_2}}(M_1\oplus M_2)^{**},$$

es un isomorfismo de S-módulos a derecha, que es natural en M_1 y en M_2. Un cálculo directo muestra que

$$\Upsilon_{M_1M_2}(\psi_1,\psi_2)(g)=\psi_1(g\circ i_1)+\psi_2(g\circ i_2),$$

donde $i_1\colon M_1\to M_1\oplus M_2$ y $i_2\colon M_2\to M_1\oplus M_2$ son las inclusiones canónicas.

La naturalidad de $\Upsilon_{M_1M_2}$ significa que si $f_1\colon M_1\to N_1$ y $f_2\colon M_2\to N_2$ son morfismos de S-módulos, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_1^{**}\oplus M_2^{**} \arrow[r, "\Upsilon_{M_1M_2}"] \arrow[d, "f_1^{**}\oplus f_2^{**}"] & (M_1\oplus M_2)^{**} \arrow[d, "(f_1\oplus f_2)^{**}"] \\
N_1^{**}\oplus N_2^{**} \arrow[r, "\Upsilon_{N_1N_2}"] & (N_1\oplus N_2)^{**},
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 6.4. *Para cada par de S-módulos a derecha M_1 y M_2 vale que*

$$\epsilon_{M_1 \oplus M_2} = \Upsilon_{M_1 M_2} \circ (\epsilon_{M_1} \oplus \epsilon_{M_2}).$$

En consecuencia $\epsilon_{M_1 \oplus M_2}$ es un isomorfismo si y sólo si ϵ_{M_1} y ϵ_{M_2} lo son.

Demostración. En efecto

$$\Upsilon_{M_1 M_2}\big((\epsilon_{M_1} \oplus \epsilon_{M_2})(m_1, m_2)\big)(g) = g \circ i_1(m_1) + g \circ i_1(m_1) = g(m_1, m_2) = \epsilon_{M_1 \oplus M_2}(m_1, m_2)(g)$$

para cada $g \in (M_1 \oplus M_2)^*$. La última afirmación se sigue de que $\Upsilon_{M_1 M_2}$ es un isomorfismo. □

Corolario 6.5. *Si P es un S-módulo a derecha proyectivo y finitamente generado, entonces ϵ_P es un isomorfismo.*

Demostración. Como P es un sumando directo de un S-módulo libre finitamente generado, se sigue de la Proposición 6.4 que basta ver que ϵ_S es un isomorfismo, lo que es fácil. □

Lema 6.6. *Sea $h\colon M \to N$ un morfismo de S-módulos con M y N proyectivos y finitamente generados. Entonces h es isomorfismo si y sólo si $h^*\colon N^* \to M^*$ lo es.*

Demostración. Es claro que si h es un isomorfismo, entonces h^* también lo es. Supongamos ahora que h^* es un isomorfismo. Entonces claramente también h^{**} lo es. Como, debido al Corolario 6.5, las flechas horizontales del diagrama (38) son isomorfismos, se sigue de esto que f es un isomorfismo. □

Teorema 6.7 (Gruško). *Si $G = G_1 * G_2$ con G_1 y G_2 finitamente generados, entonces la cantidad mínima de generadores de G es la suma de las cantidades mínimas de generadores de G_1 y G_2.*

Proposición 6.8. *Todo grupo G finitamente generado y libre de torsión tal que* $\mathrm{cd}_R\, G \leq 1$ *es libre.*

Demostración. Supongamos que el resultado es falso y tomemos un grupo G finitamente generado y libre de torsión y no libre tal que $\mathrm{cd}_R\, G \leq 1$ y que tiene una cantidad de generadores mínima entre los grupos que satisfacen estas propiedades. En particular G no es trivial y, por lo tanto, es infinito. Por la Proposición 2.1 aplicada a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I_G \xrightarrow{\ i\ } RG \xrightarrow{\ \varepsilon\ } R \longrightarrow 0,$$

donde i es la inclusion y ε el morfismo de aumentación, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(R, RG) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_{RG}(RG, RG) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{RG}(I_G, RG) \xrightarrow{h} H^1(G, RG) \longrightarrow 0.$$

Por el Lema 3.2 y la Proposición 2.2 el ideal de aumentación I_G es proyectivo y finitamente generado. Así, aplicando el Lema 6.6 con $S = RG$, obtenemos que

$$i^*\colon \mathrm{Hom}_{RG}(RG, RG) \to \mathrm{Hom}_{RG}(IG, RG)$$

no es un isomorfismo. Por otra parte, como G es infinito, $\mathrm{Hom}_{RG}(R, RG) \simeq RG^G = 0$. En consecuencia i^* no es sobreyectiva y, por lo tanto, $H^1(G, RG) \neq 0$. Así, por la Proposición 4.5 el grupo G tiene más de un final. Por los Teoremas 4.25 y 5.3 y el Corolario 4.26 se sigue de esto que $G = Z$ o $G = G_1 * G_2$ con G_1 y G_2 propios. Como en el primer caso G es libre, podemos considerar que estamos en el segundo. Ahora, por el Corolario 2.5 sabemos que $\mathrm{cd}_R\, G_i \leq \mathrm{cd}_R\, G$ para $i = 1, 2$. Como, por el Teorema 6.7, la cantidad minima de generadores de cada uno de las G_i es menor que la de G, se sigue de la elección de este último que G_1 y G_2 son libres, lo que lleva a una contradicción pues entonces G también lo es. $\square$

Capítulo 7

El caso numerable

Definición 7.1. *Sea m un cardinal infinito. Diremos que un grupo G es m-*generado *si está generado por un conjunto de cardinal a lo sumo m. En el caso en que m es $\aleph_0$ diremos también que G es un grupo contablemente generado.*

Definición 7.2. *Un grupo G es* localmente libre *si sus subgrupos finitamente generados son libres, y es* contablemente libre *si sus subgrupos contablemente generados son libres. Para un cardinal infinito m cualquiera diremos que G es m-*libre *si todo subgrupo suyo m-generado es libre.*

Observación 7.3. *Todo subgrupo finitamente generado H de un grupo libre G está contenido en un factor libre finitamente generado L de G. En efecto, dada una base B de G, basta considerar el subgrupo libre L de G generado por los elementos de B que aparecen en un conjunto finito de generadores de H para obtener L.*

Lema 7.4 (Higman). *Sea G un grupo localmante libre. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G es numerablemente libre.*
2. *Toda sucesión creciente $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$ de subgrupos finitamente generados de G, tal que ningún G_n está contenido en un factor libre propio de G_{n+1}, se estaciona.*
3. *Para todo subgrupo finitamente generado H de G existe otro subgrupo finitamente generado K de G tal que $H \subseteq K$ y K es un factor libre de todo subgrupo finitamente generado de G que lo contenga.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Como cada G_n finitamente generado, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ será contablemente generado y, por lo tanto, libre. Consideremos una factorización $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = X * Y$ tal que $G_1 \subseteq X$ con X finitamente generado (lo cual es posible debido a la observación anterior). Supongamos que $G_n \subseteq X$. Entonces $G_{n+1} \subseteq X$, pues $G_n \subseteq G_{n+1} \cap X$ y, por el teorema de Kuroš, $G_{n+1} \cap X$ es un factor libre de G_{n+1}, lo que contradice la hipótesis si $G_{n+1} \nsubseteq X$. Por lo tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = X$. Como X es finitamente generado existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $X \subseteq G_i$ y, así, $G_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ como queremos.

2) $\Rightarrow$ 3). Sea H_1 un subgrupo finitamente generado de G. Si H_1 es un factor libre de todo subgrupo finitamenete generado de G que lo contiene, entonces podemos tomar como K al mismo H_1. Si no, del conjunto de subgrupos finitamente generados de G que contienen a H_1, pero tales que H_1 no es un factor libre de ellos (en particular lo contienen propiamente), tomamos H_2 con una cantidad mínima de generadores. Como G es localmente libre, H_2 es libre y, por lo tanto, por el Teorema 6.7, todo factor libre de H_2 puede ser generado por menos elementos que H_2. En consecuencia H_1 no está contenido en ninguno de estos factores libres L_2 de H_2 pues, debido a la elección de H_2, si tenemos $H_1 \subseteq L_2$, entonces H_1 es un factor libre de L_2 y, por lo tanto, también de H_2. Si H_2 es un factor libre de todo subgrupo de G finitamente generado que lo contiene, entonces podemos tomar como K a H_2. Si no repetimos el proceso anterior para obtener un subgrupo finitamente generado H_3 de G, tal que $H_2 \subseteq H_3$ y tal que H_2 no está incluído en ningún factor libre de H_3. Continuando inductivamente, u obtenemos el K en algún paso, o contruímos una sucesión estrictemente creciente $H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq \cdots$ de subgrupos finitamente generados de G, tal que H_n no está contenido en ningún factor libre de H_{n+1} para ningún $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice 2).

3) $\Rightarrow$ 1). Sea H un subgrupo de G numerablemente generado por $h_1, h_2, \dots$. Por 3) podemos definir inductivamente una familia $(K_n)_{n\geq 0}$, de subgrupos finitamente generados de G, tal que $K_0 = \{e\}$, $\langle K_{n-1}, h_n\rangle \subseteq K_n$ y K_n es un factor libre de todo subgrupo de G finitamente generado que lo contiene. En particular existe una familia $(F_n)_{n\geq 1}$, de subgrupos de G, que cumple $K_n = K_{n-1} * F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como G es localemte libre, los K_n y, por lo tanto debido al teorema de Schreier-Nielsen, también los F_n, son libres. Ahora podemos ver inductivamente que $K_n = *_{i\leq n} F_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = *_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y, en consecuencia, libre. Como $H \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ se sigue, nuevamente del teorema de Schreier-Nielsen, que H también lo es. $\square$

Proposición 7.5. *Si G es un grupo libre de torsión y $\operatorname{cd}_R G \leq 1$, entonces G es contablemente libre.*

Demostración. Supongamos que no. Sabemos por el Corolario 2.5 y la Proposición 6.8 que G es localmente libre. En conseuencia, por el Lema 7.4, existe una sucesión estictamente creciente $G_1 \subsetneq G_2 \subsetneq \cdots$ de subgrupos finitamente generados de G tal que ningún G_i está contenido en un factor libre propio de G_{i+1}. Puesto que $\operatorname{cd}_R\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n\big) \leq \operatorname{cd}_R G$ podemos suponer que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ para llegar a una contradicción. Denotemos con $\iota_n \colon J_{G_{n+1}G_n} \to I_{G_{n+1}}$ a la inclusión canónica. Como los G_i son libres de torsión se sigue del Corolario 5.9 que

$$\operatorname{Hom}_{RG_{n+1}}(I_{G_{n+1}}, RG_{n+1}) \xrightarrow{\iota_n^*} \operatorname{Hom}_{RG_{n+1}}(J_{G_{n+1}G_n}, RG_{n+1})$$

es inyectivo para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como G_n y G_{n+1} son finitamente generados, el Lema 3.2 muestra que $I_{G_{n+1}}$ y $J_{G_{n+1}G_n}$ son finitamente generados como RG_{n+1}-módulos. En consecuencia, dado que RG es la suma directa de una cantidad de copias de RG_{n+1} y que, si M es un RG_{n+1}-módulo finitamente generado, entonces el $\operatorname{Hom}_{RG_{n+1}}(M,-)$ conmuta con sumas directas, se sigue de esto, que

$$\operatorname{Hom}_{RG_{n+1}}(I_{G_{n+1}}, RG) \xrightarrow{\iota_n^*} \operatorname{Hom}_{RG_{n+1}}(J_{G_{n+1}G_n}, RG)$$

también es un monomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por el Lemma 3.4,

$$\operatorname{Hom}_{RG}(J_{GG_{n+1}}, RG) \xrightarrow{i_n^*} \operatorname{Hom}_{RG}(J_{GG_n}, RG),$$

donde $i_n\colon J_{GG_n} \to J_{GG_{n+1}}$ es la inclusión canónica, es inyectivo para todo $n \in \mathbb{N}$. La contradicción a obtener es que si $\operatorname{cd}_R G \leq 1$ existe un valor de n tal que este último i_n^* no es monomorfismo. Denotemos con J_n a J_{GG_n}. Como G_n es finitamente generado y libre se sigue de la Proposición 3.10 que I_{G_n} es un RG_n-módulo libre y finitamente generado. En consecuencia, por el Lema 3.4 el RG-módulo J_n también es libre y finitamente generado. Tomemos ahora $J := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Como $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, sabemos que $I_G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Por lo tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} J \xrightarrow{f} RG \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0,$$

donde ϵ es el morfismo de aumentación,

$$j(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_1, a_2 - i_1(a_1), \dots, a_n - i_{n-1}(a_{n-1}), \dots),$$

y f restringido a cada J_n es la inclusión canónica, es exacta. Como J es libre, la sucesión anterior es una resolución proyectiva de R como RG-módulo. Así, por la Proposición 2.1, para todo RG-módulo M hay una sucesión exacta de grupos

$$\operatorname{Hom}_{RG}(J, M) \xrightarrow{j^*} \operatorname{Hom}_{RG}(J, M) \xrightarrow{h} H^2(G, M) \to 0.$$

En consecuencia, como $\operatorname{cd}_R G \leq 1$, el grupo $H^2(G, M)$ es cero y el morfismo j^* es sobreyectivo, cualquiera sea M. Por otra parte como $J = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} J_n$,

$$\operatorname{Hom}_{RG}(J, M) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Hom}_{RG}(J_n, M)$$

y

$$j^*(u_1, u_2, u_3, \dots) = (u_1, u_2, u_3, \dots) \circ j = (u_1 - u_2 \circ i_1, u_2 - u_3 \circ i_2, u_3 - u_4 \circ i_3, \dots).$$

Tomemos ahora $M = J$ y $u \in \operatorname{Hom}_{RG}(J, J)$ tal que $j^*(u) = \mathrm{id}_J$. Como J_n es finitamente generado,

$$\operatorname{Hom}_{RG}(J_n, J) = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{Hom}_{RG}(J_n, J_m).$$

Escribamos $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ con $u_n\colon J_n \to J$ y $u_n = \sum u_{nm}$ con $u_{nm}\colon J_n \to J_m$. Notemos que la igualdad $j^*(u) = \mathrm{id}_J$ se convierte en

$$u_{nm} - u_{n+1,m} \circ i_n := \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \mathrm{id}_{J_n} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Elijamos m tal que $u_{1m} = 0$. Si $u_{mm} = 0$, entonces $-u_{m+1,m} \circ i_m = \mathrm{id}_{J_m}$ y así J_m es un sumando directo de J_{m+1}. Como por el item 4) del Lema 3.1, $J_m \subsetneq J_{m+1} \subseteq RG$, se sigue de esto que el morfismo

$$\operatorname{Hom}_{RG}(J_{m+1}, RG) \xrightarrow{i_m^*} \operatorname{Hom}_{RG}(J_m, RG)$$

no es inyectivo, lo que es una contradicción. Si $u_{mm} \neq 0$, entonces, dado que $u_{1m} = 0$, existe $1 \leq n < m$ tal que $u_{n+1,m} \neq 0$ pero $u_{nm} = 0$. Así

$$\operatorname{Hom}_{RG}(J_{n+1}, RG) \xrightarrow{i_n^*} \operatorname{Hom}_{RG}(J_n, RG)$$

no es inyectivo pues $i_n^*(u_{n+1,m}) = u_{n+1,m} \circ i_n = u_{n+1,m} \circ i_n - u_{nm} = 0$, lo que nuevamente da la contradicción requerida. $\square$

Capítulo 8

Teoremas de partición

Por el Corolario 3.9, H es un factor libre de G si y sólo si J_H es un RG-sumando directo de I_G que tiene un complemento de la forma J_K para algún subgrupo K de G. Nos preguntamos si del hecho de que J_H sea un RG-sumando directo de I_G se seguirá siempre que H un factor libre de G. Estudiaremos a continuación algunos casos en donde esto ocurre.

PROPOSICIÓN 8.1. *Sea G es un grupo finitamente generado y libre de torsión y H un subgrupo de G. Si J_H es un RG-sumando directo de I_G, entonces H es factor libre de G.*

DEMOSTRACIÓN. Por el item 4) del Lemma 3.1, si $J_H = I_G$ entonces $H = G$. Por otro lado como J_H es un RG-sumando directo de I_G, si $J_H \neq I_G$, entonces la aplicación

$$\mathrm{Hom}_{RG}(I_G, RG) \to \mathrm{Hom}_{RG}(J_H, RG)$$

no es un monomorfismo. En consecuencia, por el Corolario 5.9 el subgrupo H de G está contenido en un factor libre no trivial de G. En otras palabras existen subgupos no triviales G_1 y G_2 de G tales que $G = G_1 * G_2$ y $H \leq G_1$. Dado que por el teorema de Gruško G_1 tiene menos generadores que G y, por la Proposición 3.12, el ideal $J_{G_1 H}$ es RG_1-sumando directo de I_{G_1}, se sigue de un argumento inductivo, que H es un factor libre de G_1 y, por lo tanto, de G. $\square$

PROPOSICIÓN 8.2. *Si G es un grupo libre y H es un subgrupo finitamente generado de G tal que J_H es un RG-sumando directo de I_G, entonces H es un factor libre de G.*

DEMOSTRACIÓN. Como H es finitamente generado existe un factor libre G_1 de G que es finitamente generado y que contiene a H. Dado que G_1 es libre de torsión y, por la Proposición 3.12, el ideal $J_{G_1 H}$ es un RG_1-sumando directo de I_{G_1}, se sigue de la Proposición 8.1 que H es un factor libre de G_1 y, por lo tanto, de G. $\square$

PROPOSICIÓN 8.3. *Si G es un grupo libre contablemente generado y H es un subgrupo de G tal que J_H es un RG-sumando directo de I_G, entonces H es un factor libre de G.*

DEMOSTRACIÓN. Como G es contable también H lo es. En particular H es contablemente generado. Por la Proposición 8.2 podemos suponer que H no es finitamente generado. Por lo tanto, debido al teorema de Schreier-Nielsen, H es libre de rango numerable. Tomemos un grupo libre F de rango 2 con base $\{a, b\}$. Un cálculo sencillo muestra que el conjunto $\{b^{-i}ab^i : i \in \mathbb{N}\}$ es base del subgrupo que genera. Identificando este subgrupo con H formamos el producto amalgamado $K := G *_H F$. Por el teorema de Kuroš si F es un factor libre de K, entonces $H = F \cap G$ es un factor libre de G. Así, por la Proposición 8.1, para terminar la demostración será suficiente ver que K es libre y que J_{KF} es un RK-sumando directo de I_K. Veremos primero esto último y que I_K es RK-proyectivo. Por la Proposición 3.10, I_F es RF-libre e I_G es RG-libre. Además, por hipótesis existe un RG-módulo P tal que

$$I_G = J_{GH} \oplus P.$$

Así, debido al Lema 3.4, J_{KF} y J_{KG} son RK-libres y

$$J_{KG} = J_{KH} \oplus N, \tag{39}$$

donde $N = PRK$. Como $K = G *_H F$ se sigue del item 2) del Teorema 3.8, que

$$I_K = J_{KF} + J_{KG} \quad \text{y} \quad J_{KH} = J_{KG} \cap J_{KF}.$$

En consecuencia, por la ecuación (39),

$$I_K \simeq J_{KF} + J_{KH} + N = J_{KF} + N \quad \text{y} \quad 0 = J_{KH} \cap N = J_{KG} \cap J_{KF} \cap N = J_{KF} \cap N.$$

Es decir

$$I_K \simeq J_{KF} \oplus N.$$

Además, puesto que J_{KF} y N son RK-proyectivos, también I_K lo es. Resta ver que K es libre y para ello, debido a la Proposición 7.5, es suficiente probar que K está generado por un conjunto numerable y es libre de torsión. Pero lo primero se sigue inmediatamente de que G y H son contablemente generados, mientras que lo segundo se sigue inmediatamente de la Nota 1.14 y de que G y F no tienen torsión. □

A continuación establecemos una generalización de la Proposición 8.3, que probaremos en el próximo capítulo, en el que se lo deducirá de un resultado más general

TEOREMA 8.4. *Si G es un grupo libre y H es un subgrupo de G tal que J_H es un RG-sumando directo de I_G, entonces H es un factor libre de G.*

Posponemos la demostración de este teorema para el proximo capítulo en el que se lo deducirá de un teorema más general.

Fijemos un cardinal infinito m. En la prueba de la siguiente proposición usaremos que el Teorema 8.4 vale bajo la hipótesis de que G es m-generado. En particular, debido a la Proposición 8.3, el resultado vale cuando $m = \aleph_0$. Procedemos de esta manera porque para la demostración del Teorema 8.4 necesitaremos usar la Proposición 8.5 en el caso en que $m = \aleph_0$.

PROPOSICIÓN 8.5. *Sea H un subgrupo de un grupo G tal que J_H es sumando directo de I_G. Si G es m-libre y $G = \langle H \cup S \rangle$, donde S tiene cardinal a lo sumo m, entonces existe un grupo libre F tal que $G = H * F$.*

Nota: $G = \langle H \cup S \rangle$ con S de cardinal a lo sumo si y sólo si existe un RG-módulo M generado por un conjunto de cardinal a lo sumo m, tal que $I_G = J_H + M$. En efecto, por el Lema 3.2 si $G = \langle H \cup S \rangle$, entonces $I_G = J_H + M$, donde M es el RG-módulo generado por $\{s - e; s \in S\}$. Recíprocamente, si $I_G = J_H + M$ con M generado por un conjunto de cardinal a lo sumo m, entonces podemos escribir cada uno de estos generadores como una combinación R-lineal finita de elementos $g - e$ y tomando S como el conjunto de los $g \in G$ que aparecen en ellas, obtenemos que $|S| \leq m$ y $I_G = J_H + S$, donde M es el RG-módulo generado por $\{s - e; s \in S\}$, lo cual, nuevamente por el Lema 3.2, implica que $G = \langle H \cup S \rangle$.

Demostración. Podemos escribir $I_G = J_{GH} \oplus C$. Por la observación previa $C \simeq I_G/J_{GH}$ está generado por un conjunto $\{c_a\}$ de cardinal a lo sumo m. Expresemos cada c_a como una combinación R-lineal de elementos $g-e$. Denotemos con X_0 al conjunto de los g que aparecen en estas combinaciones lineales y con L_0 al subgrupo de G generado por X_0. Claramente L_0 tiene cardinal a lo sumo m y $\{c_a\} \subseteq I_{L_0}$. Llamemos C_0 el ideal a derecha de RL_0 generado por $\{c_a\}$. Entonces $C_0RG = (\{c_a\}RL_0)RG = C$. Procedemos ahora a definir conjuntos $X_n \subseteq G$ y $Y_n \subseteq H$ para $n \geq 0$ sujetos a las condiciones:

1. $Y_{n+1} \subseteq X_{n+1}$, $X_n \subseteq X_{n+1}$, $Y_n \subseteq Y_{n+1}$,
2. X_n tiene cardinal a lo sumo m,
3. $I_{L_n} \subseteq J_{L_{n+1}K_{n+1}} + C_0RL_{n+1}$, donde $L_n := \langle X_n \rangle$ y $K_n := \langle Y_n \rangle$.

Para ello tomamos X_0 como arriba y $Y_0 = \emptyset$. Supongamos que hemos definido X_n e Y_n. Debido al Lema 3.2 I_{L_n} está RG-generado por $A := \{x - e : x \in X_n\}$. Como

$$I_{L_n} \subseteq I_G = J_{GH} \oplus C = I_H RG \oplus C_0RG$$

cada $x - e \in A$ se escribe como una combinación R-lineal de una cantidad finita de elementos $(h-e)g$ y cg', donde $h \in H$ y $g, g' \in G$. Definimos entonces Y_{n+1} como la unión de Y_n con los h así obtenidos y X_{n+1} como la unión de Y_{n+1} con X_n y con los g, g' así obtenidos. Es claro que esta construcción cumple las condiciones 1), 2) y 3). Definamos ahora

$$K := \bigcup K_n \quad \text{y} \quad L := \bigcup L_n.$$

Entonces $K \subseteq L \cap H$ y

$$I_L \subseteq J_{LK} + C_0RL$$

Además esta suma es directa pues $J_{LK} \subseteq J_{GH}$, $C_0RL \subseteq C$ y $J_{GH} \cap C = 0$. En consecuencia,

$$I_L = J_{LK} \oplus C_0RL, \tag{40}$$

pues $C_0RL = (\{c_a\}RL_0)RL \subseteq I_{L_0}RL \subseteq I_L$. Como L está generado por un conjunto de cardinal a lo sumo m, es libre. En consecuencia, por el Teorema 8.4 existe un subgrupo F de L tal que $L = K * F$. Notemos además que por el teorema de Schreier-Nielsen F es libre. Ahora por la igualdad (40) se sigue del Lema 3.4 que $J_{GL} = J_{GK} \oplus C$. Por lo tanto

$$I_G = J_{GH} \oplus C = J_{GH} + J_{GK} + C = J_{GH} + J_{GL}$$

y

$$J_{GH} \cap J_{GL} = J_{GH} \cap (J_{GK} \oplus C) = J_{GK} \oplus (J_{GH} \cap C) = J_{GK}.$$

Así, por el Teorema 3.8, $G = H *_K L$, lo que combinado con $L = K * F$ nos da $G = H * F$. $\square$

Capítulo 9

Teoremas principales

TEOREMA 9.1. *Sea G un grupo libre de torsión que satisface* $\operatorname{cd}_R G \leq 1$. *Si H es un subgrupo de G tal que J_H es sumando directo de I_G, entonces $G = H * F$ para algún grupo libre F.*

Observación: de este teorema se deduce el Teorema 8.4 pues todo grupo libre G es libre de torsión y satisface $\operatorname{cd}_R G \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que G está generado por una familia de elementos $(g_a)_{a \in A}$, donde A es el conjunto de ordinales menores que un ordinal límite λ. Para terminar la demostración será suficente encontrar para cada $a \leq \lambda$, un subconjunto S_a de G, de modo que se satisfagan las siguientes condiciones, que denotaremos con $(*)$:

1. Si $a < b$ entonces $S_a \subseteq S_b$.
2. Si a es un ordinal límite, entonces $S_a = \bigcup_{b<a} S_b$.
3. $S_{a+1} \setminus S_a$ es contable para cada $a \in A$.
4. $S_0 = \emptyset$ y $g_a \in S_{a+1}$ para cada $a \in A$.
5. Si $G_a := \langle H \cup S_a \rangle$, entonces J_{G_a} es un sumando directo de I_G.

En efecto, supongamos que existen estos S_a. Por la Proposición 3.12 sabemos que $J_{G_{a+1}G_a}$ es un RG_{a+1} sumando directo de $I_{G_{a+1}}$. Como, por la Proposición 7.5, el grupo G es contablemente libre, se sigue del caso contable de la Proposición 8.5 (con $H := G_a$ y $S := S_{a+1} \setminus S_a$), que existe un subgrupo libre F_a de G_{a+1} tal que $G_{a+1} = G_a * F_a$. Así, por inducción transfinita,

$$G_a = G_0 * \left(*_{b<a} F_b\right) \quad \text{para } a \leq \lambda \tag{41}$$

Tomando $a = \lambda$ el teorema queda demostrado pues $G_0 = H$ y $G_\lambda = G$. Veamos entonces que existe tal familia $\{S_a\}$.

Por hipótesis $I_G = J_H \oplus M$ e I_G es RG-proyectivo. Así, M es tanbién RG-proyectivo y, por lo tanto, existe un RG-módulo N tal que $M \oplus N$ es RG-libre. Tomemos una base $(c_k)_{k \in K}$ de $M \oplus N$. Para construir una familia $(S_a)_{a \leq \lambda}$ que satisfaga $(*)$, será suficiente encontrar, para cada $a \leq \lambda$, subconjuntos $S_a \subseteq G$, $T_a \subseteq N$ y $K_a \subseteq K$ que satisfagan las siguientes condiciones, que denotaremos con $(**)$:

1. Si $a < b$, entonces $S_a \subseteq S_b$, $T_a \subseteq T_b$ y $K_a \subseteq K_b$.
2. Si a es ordinal límite, entonces $S_a = \bigcup_{b<a} S_b$, $T_a = \bigcup_{b<a} T_b$ y $K_a = \bigcup_{b<a} K_b$.
3. $S_{a+1} \setminus S_a$, $T_{a+1} \setminus T_a$ y $K_{a+1} \setminus K_a$ son contables para cada $a \in A$.
4. $S_0 = T_0 = K_0 = \emptyset$ y $g_a \in S_{a+1}$ para cada $a \in A$.
5. El submódulo de $I_G \oplus N = J_H \oplus M \oplus N$ generado por J_H, $\{s - e : s \in S_a\}$ y T_a también está generado por J_H y $(c_k)_{k \in K_a}$.

Es claro que de los items 1) a 4) de $(**)$ se siguen los correspondientes items de $(*)$. Supongamos ahora que el item 5) de $(**)$ se satisface. El RG-submódulo U_a de $J_H \oplus M \oplus N$ generado por J_H y $(c_k)_{k\in K_a}$ es un RG-sumando directo de $J_H \oplus M \oplus N$ (con complemento generado por $(c_k)_{k \in K \setminus K_a}$). Por el item 5) de $(**)$ este submódulo U_a está generado por J_H, $\{s - e : s \in S_a\}$ y T_a y así, como $J_H \bigcup \{s - e : s \in S_a\} \subseteq I_G$ y $T_a \subseteq K$, tiene como sumando directo al RG-submódulo generado por J_H y $\{s - e : s \in S_a\}$, que, por el Lema 3.2, coincide con J_{G_a}. En consecuencia J_{G_a} es un RG-sumando directo de $I_G \oplus N$ y, por lo tanto de I_G, como lo requiere el item 5) de $(*)$.

Definimos ahora S_a, T_a y K_a por inducción transfinita. Para $a = 0$ los conjuntos son dados por el item 4) y claramente se satisface el item 5). Supongamos definidos S_a, T_a y K_a para $a < y$ de manera que se satisfaga $(**)$. Si y es un ordinal límite, entonces por el item 2) debemos definir

$$S_y := \bigcup_{b<y} S_b, \quad T_y := \bigcup_{b<y} T_b \quad \text{y} \quad K_y := \bigcup_{b<y} K_b.$$

Es fácil ver que con esta definición las condiciones relevantes de $(**)$ se satisfacen. Supongamos ahora que $y = b + 1$. Basta ver que, para cada $n \geq 0$ existen subconjuntos $S_{bn} \subseteq G$, $T_{bn} \subseteq N$ y $K_{bn} \subseteq K$ que satisfacen las siguientes condiciones, que llamaremos $(* * *)$:

1. $S_{bn} \subseteq S_{b,n+1}$, $T_{bn} \subseteq T_{b,n+1}$ y $K_{bn} \subseteq K_{b,n+1}$, para todo $n \geq 0$.
2. $S_{b,n+1} \setminus S_{b,n}$, $T_{b,n+1} \setminus T_{b,n}$ y $K_{b,n+1} \setminus K_{b,n}$ son contables, para todo $n \geq 0$.
3. $S_{b0} = S_b \cup \{g_b\}$ y $T_{b0} = T_b$.
4. El RG-submódulo de $I_G \oplus N = J_H \oplus M \oplus N$ generado por J_H, $\{s - e : s \in S_{bn}\}$ y T_{bn}, está contenido en el RG-submódulo generado por J_H y $(c_k)_{k \in K_{bn}}$.
5. El RG-submódulo de $I_G \oplus N = J_H \oplus M \oplus N$ generado por J_H y $(c_k)_{k\in K_{bn}}$ está contenido en el RG-submódulo generado por J_H, $\{s - e : s \in S_{b,n+1}\}$ y $T_{b,n+1}$.

Pues en ese caso, los conjuntos que completan la inducción serán:

$$S_{b+1} := \bigcup_n S_{b,n}, \quad T_{b+1} := \bigcup_n T_{b,n} \quad \text{y} \quad K_{b+1} := \bigcup_n K_{b,n}.$$

En efecto, es claro que con esta definición los item 1), 2), 3) y 4) de $(**)$ se satisfacen y, que un argumento simple muestra que de los items 4) y 5) de $(* * *)$ se sigue el item 5) de $(**)$ para $b + 1$.

A continuación definimos los S_{bn}, T_{bn} y K_{bn} recursivamente. Para $n = 0$, S_{b0} y T_{b0} quedan definidos por el item 3) de $(* * *)$. Supongamos dados S_{br} y T_{br} para $r \leq n$ y K_{br} para $r < n$ tales que se satisfacen las condiciones relevantes de $(***)$. Mostraremos ahora como construir $S_{b,n+1}$, $T_{b,n+1}$ y K_{bn} de manera que las condiciones relevantes de $(***)$ se sigan satisfaciendo. Cada elemento de

$$\{s - e : s \in S_{bn} \setminus S_{b,n-1}\} \bigcup (T_{bn} \setminus T_{b,n-1})$$

se escribe como un elemento de J_H y una combinación RG-lineal de finitos c_k. Definimos entonces $K_{bn} \setminus K_{b,n-1}$ como el conjunto de los c_k que aparecen en estas combinaciones lineales.

Es evidente que $K_{bn} \setminus K_{b,n-1}$ es contable y que, requiriendo que $K_{bn} \supseteq K_{b,n-1}$, queda determinado K_{bn}. De esta construcción se sigue que el submódulo generado por J_H y $(c_k)_{k \in K_{bn}}$ contiene al generado por J_H, $(c_k)_{k \in K_{b,n-1}}$, $\{s - e : s \in S_{bn} \setminus S_{b,n-1}\}$ y $T_{bn} \setminus T_{b,n-1}$. Así, si el item 4) vale para $n - 1$, entonces vale también para n. Por último, tomamos cada elemento del conjunto $\{c_k : k \in K_{bn} \setminus K_{b,n-1}\}$ y lo escribimos como la suma de un elemento $n \in N$ y una combinación R-lineal de finitos $g - e$ con $g \in G$. Definimos entonces $T_{b,n+1} \setminus T_{bn}$ como el conjunto de los $n \in N$ que aparecen en estas expresiones y $S_{b,n+1} \setminus S_{bn}$ como el conjunto de los g que aparecen en estas combinaciones R-lineales. Claramente ambos conjuntos son contables. El requirimiento de que $T_{b,n+1} \supseteq T_{bn}$ y $S_{b,n+1} \supseteq S_{bn}$ determina $S_{b,n+1}$ y $T_{b,n+1}$. De esta construcción se sigue que el submódulo generado por J_H, $\{s - e : s \in S_{b,n+1}\}$ y $T_{b,n+1}$ contiene al generado por J_H, $\{s - e : s \in S_{bn}\}$, $T_{b,n+1}$ y $(c_k)_{k \in K_{bn} \setminus K_{b,n-1}}$. De manera análoga a lo hecho para el item 4) se prueba que también vale el 5). □

TEOREMA 9.2. *Si G es un grupo libre de torsión que satisface $\operatorname{cd}_R G \leq 1$, entonces G es libre.*

DEMOSTRACIÓN. Es simplemente el Teorema 9.1 con $H = \{e\}$. □

TEOREMA 9.3. *Si G es un grupo libre de torsión que contiene a un subgrupo libre F de índice finito, entonces G es libre.*

DEMOSTRACIÓN. Como G el libre de torsión, podemos aplicar el Teorema 2.17 con $R = \mathbb{Z}$. Así $\operatorname{cd}_R G = \operatorname{cd}_R F = 1$ y la afirmación se sigue del Teorema 9.2. □

Bibliografía

[C] Cohen D., *Groups of cohomological dimension one,* Lecture notes in mathematicas 245, (1972).
[H] Higgins P.J., *Presentations of grupoids with applications to groups,* Proc. Cam. Phil. Soc. 60, (1964) 7-20.
[H1] Higgins P.J., *Gruško's theorem,* J. Alg 12, (1966) 365-372.
[L] Lyndon R.C., *Lenght funcions in groups,* Math. Scand. 12, (1963) 209-234.
[M] Saunders Mac Lane, *Homology,* Springer, (1963).
[St] Stallings John R, *On torsion free groups with finitely many ends,* Ann. of Math. 88, (1968) 312-334.
[Sw] Swan Richard G, *Groups of cohomological dimension one,* J. Alg. 12, (1969). 584-610.