



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

## ECUACIONES DE LA MECÁNICA CLÁSICA

Marcos Cossarini

Director: Gabriel Larotonda

29 de marzo de 2012



# Ecuaciones de la mecánica clásica

Marcos Cossarini

## 1. Comentario preliminar

Este texto fue pensado para ser escrito por su autor, con el fin de familiarizarse con las distintas formulaciones de las leyes de la mecánica clásica. Se desarrolla en tres actos.

En el primero se presentan los hechos empíricos a estudiar y se desarrolla la teoría mecánica de Newton, que estudia sistemas de partículas que se mueven en un espacio euclídeo. La notación usada busca lograr el look casual de un libro de mecánica elemental.

En el segundo se desarrolla la mecánica analítica de Lagrange, que representa al sistema de partículas como un punto que se mueve en una variedad riemanniana. Aquí se ve cómo transformar problemas de dinámica en problemas variacionales y viceversa, y explotar sus simetrías para hallar soluciones. La notación retro usada en los cálculos más extensos, con abundantes subíndices y superíndices, evoca el look vintage de un libro de análisis tensorial.

En el tercero se describe la formulación de Hamilton, según la cual el estado del sistema mecánico es un punto que se mueve en una variedad simpléctica. Esto permite encontrar más simetrías y resolver explícitamente más problemas, pero no quedó tiempo para eso. Aquí usamos la notación moderna de geometría diferencial.

Los ejemplos elegidos fueron sólamente los necesarios para desarrollar la teoría básica. Si bien los comentarios históricos fueron limitados cobardemente por el autor, que no quiso meter la pata, se trató de presentar las ideas en un orden natural y pedagógicamente aceptable. Como si alguien que no sabe del tema eventualmente lo fuera a leer, lo cual es siempre una ficción útil.

El autor es un férreo defensor de la simetría, y arrastra a lo largo de la obra la tara de no poder aceptar un sistema de referencia elegido arbitrariamente. Esto lo conduce a traducir las ideas básicas de la teoría a un lenguaje no estándar, tarea que finalmente insume todo su esfuerzo. Si bien el formalismo más pedante está concentrado en las primeras secciones (y algunos exabruptos posteriores), la terminología usada en general pretende disuadir al lector ocasional, que de otro modo podría leer el texto y llevarse un fiasco.

## 1.1. Advertencia acerca de notación y convenciones

**Números naturales e índices numéricos** El conjunto de los números naturales incluye al cero y es  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ . En particular, si  $n$  es un número natural, cuando mencionemos una colección finita  $\{x_i\}_{i < n}$  de objetos, se debe entender que  $i$  toma valores naturales, desde 0 hasta  $n - 1$ , y por lo tanto la colección tiene  $n$  elementos.

**Positividad** Cuando decimos “positivo”, queremos decir mayor o igual a cero. Los números reales positivos forman un semianillo que denotamos  $\mathbb{P}$ . Para indicar que algo es mayor que cero, diremos “estrictamente positivo”.

**Espacios afines** En física aparecen muchos espacios que no son vectoriales sino afines, es decir, no tienen un punto distinguido de referencia que sirva como origen. Por ejemplo, el espacio euclídeo tridimensional es un espacio afín (real). La categoría de espacios afines se puede definir sencillamente a partir de la de espacios vectoriales. Un espacio afín es un conjunto  $A$ , provisto de un espacio vectorial  $\Delta A$  cuyos elementos se llaman **diferencias** entre puntos de  $A$  (o traslaciones en  $A$ ), y una acción simplemente transitiva del grupo  $\Delta A$  en  $A$ : para cualesquiera puntos  $x$  e  $y$  de  $A$  existe un único vector  $v \in \Delta A$  tal que  $y = x + v$ . A este vector  $x$  lo llamamos  $y - x$ . Una función  $T : A \rightarrow B$  entre espacios afines se llama transformación afín cuando existe una transformación lineal  $F : \Delta A \rightarrow \Delta B$  tal que para cualesquiera puntos  $x, y$  en  $A$  se tiene  $T(y) - T(x) = F(y - x)$ . Esta transformación lineal es necesariamente única y se la denota  $\Delta T$ , la **parte lineal** de  $T$ .

**Diferenciabilidad** Cuando decimos que una función  $F : X \rightarrow Y$  (con  $X$  e  $Y$  subconjuntos abiertos de espacios afines normados  $E$  y  $F$ ) es diferenciable en un punto  $x_0 \in X$ , estamos hablando de **diferenciabilidad fuerte**. Es decir, la diferencial de  $F$  en  $x_0$  es una transformación lineal  $T$  tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, x_0)} \frac{F(y) - F(x) - T(y - x)}{|y - x|} = 0.$$

Esta noción de diferenciabilidad difiere de la usual, a la que llamaremos **diferenciabilidad débil**, en la que se fija  $x = x_0$  y sólo se le permite a  $y$  moverse.<sup>1</sup> Diremos que  $F$  es derivable cuando tiene derivada, es decir, hay una función continua  $F' : U \rightarrow L(E, F)$  que da para cada  $x_0$  una (la única posible) diferencial de  $F$  en  $x_0$ . Una función que es diferenciable en todo su dominio, es automáticamente derivable porque estamos usando la noción de

---

<sup>1</sup>No hay que confundir este concepto (local) con el concepto (global) de *derivada débil*, que se aplica a funciones que suelen no ser siquiera débilmente diferenciables en todo su dominio.

diferenciabilidad fuerte. El espacio de funciones derivables será denotado con su nombre usual  $\mathcal{C}^1(X, Y)$ .

**Expresiones indeterminadas** Si  $S$  es un conjunto, cuando decimos que  $v$  es un **elemento indeterminado** de  $S$  o **variable indeterminada** en  $S$ , o cuando escribimos “ $v \in S$ ”, estamos introduciendo un ente matemático (representado en este caso por el símbolo “ $v$ ”) que más tarde podrá ser reemplazado por cualquier elemento de  $S$ , o por otra indeterminada. A partir de una indeterminada  $v$  podemos construir expresiones que incluyan a  $v$ , que son, a fin de cuentas, funciones definidas en  $S$ , que además tienen un símbolo predeterminado  $v$  ocupando desde el principio el lugar de la variable independiente. Por eso las llamamos también  $v$ -funciones. Por ejemplo, si  $s \in \mathbb{R}$ , la expresión  $f = \sin s$  es una  $s$ -función, y la podemos evaluar en  $s = \pi$  obteniendo  $f|_{s=\pi} = 0$ . También escribimos “ $=$ ” en lugar de “ $:=$ ” si es claro en qué dirección se hace el reemplazo, y usamos el símbolo  $f(\pi)$  para representar a  $f|_{s=\pi}$  si es claro cuál es la indeterminada que estamos reemplazando, y así una  $s$ -función puede usarse del mismo modo que una función. Nótese que en el ejemplo se tiene  $f(s) = f|_{s=s} = f$ .

Si la indeterminada es real (o vectorial), como en nuestro ejemplo, podemos definir la derivada  $\frac{df}{ds}$ , que será una nueva  $s$ -función (en este caso igual a  $\cos s$ ) definida en un dominio posiblemente más chico. También podemos construir expresiones con varias indeterminadas, y sus derivadas parciales. Por ejemplo, si  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $f = f(x, y)$  toma valores reales, podemos permutar las variables definiendo  $f(y, x)$  (que es igual a  $f|_{(x,y)=(y,x)}$ ) y se cumple que  $\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = \frac{\partial(f(y,x))}{\partial y}$ .

**Índices abstractos** Si  $V$  es un espacio vectorial y  $\phi$  un covector de  $V$  (es decir, un elemento de  $V^*$ ), podemos usar una indeterminada  $\alpha \in V$  de intermediario para evaluar  $\phi$  en un vector  $v \in V$ , escribiendo  $\phi(\alpha)|_{\alpha=v}$ , cuyo valor es simplemente  $\phi(v)$ . Esto lo escribiremos usualmente en la notación más compacta  $\phi_\alpha v^\alpha$  (y el símbolo  $v^\alpha$ , cuando está solo, representa a un co-covector). Esta es la notación de índices abstractos de Penrose [9], y permite operar sin coordenadas, teniendo a la vez la flexibilidad de los índices numéricos. Por ejemplo, para simetrizar una función bilineal  $B$  escribimos  $B_{\alpha,\beta} + B_{\beta,\alpha}$ . En general los vectores tendrán un índice arriba y los covectores tendrán un índice abajo. Por otra parte, los covectores de  $V$  son a la vez vectores de  $V^*$ , y entonces no siempre es posible establecer una distinción consistentemente.

## 2. Magnitudes y espacios de la mecánica clásica

A continuación daremos una descripción (matemática) de las nociones de magnitud escalar, tiempo, espacio euclídeo y mundo galileano. En esta ocasión no intentaremos definir los conceptos por medio de experimentos, de modo que el lector tendrá que recurrir a sus propios preconceptos para comprobar que estas descripciones se adecúan a la realidad física (o no). El contenido observable de estos conceptos se especificará (en parte) más adelante, a partir de la sección 3. Si la terminología resulta muy espesa, toda esta sección puede saltarse.

### 2.1. Magnitudes escalares y tiempo

En este texto distinguiremos entre distintos tipos de magnitudes escalares. Por ejemplo, la masa de un objeto y su volumen no son números, sino que son puntos de distintos espacios, y en principio no se pueden comparar. Para convertir una magnitud escalar en un número real hay que elegir una unidad de medida, y a veces también un valor de referencia.

El espacio de los posibles valores de la masa de un objeto es una semirecta real. Una semirecta está ordenada: Si  $x$  e  $y$  son las masas de distintos objetos, tiene sentido preguntar si  $x$  es mayor, menor, o igual que  $y$  (y esto se puede determinar, con cierto margen de error, por medio de experimentos que indicaremos más adelante). Además, si  $x$  es la masa de un objeto y  $r$  es un número real positivo, podemos multiplicar  $x$  por  $r$  obteniendo un nuevo valor de masa  $rx$ . Si  $x$  no es nula, al variar  $r$ , el valor recorre todas los posibles valores de masa. Esto permite tomar a  $x$  como unidad de medida, y describir luego todas las posibles masas como múltiplos positivos de  $x$ . En términos técnicos:

**Definición 2.1.1.** Una **semirecta** (real) es un módulo libre, de rango 1, sobre el semianillo  $\mathbb{P}$  de los números reales positivos, y hereda el orden de los números.

Denotamos  $\mathbb{P}kg$  a la semirecta de los valores de masa, pues todas las masas son múltiplos positivos de cierta masa  $kg$  que se suele usar de referencia.

Las posibles longitudes de una curva en el espacio euclídeo forman otra semirecta  $\mathbb{P}m$ . Las áreas de las superficies forman una semirecta  $\mathbb{P}m^2 = (\mathbb{P}m)^2$  (y se puede multiplicar dos longitudes para obtener un área). También los volúmenes de los cuerpos forman una semirecta  $\mathbb{P}m^3$ , y así se puede seguir imaginando medidas de cualquier dimensión.

Las **duraciones** de los intervalos de tiempo forman un semirecta  $\mathbb{Ps}$ . Las **frecuencias** forman otra recta  $(\mathbb{Ps})^* = \mathbb{Ps}^{-1}$ , cuyos elementos son los

inversos de las duraciones, y se puede multiplicar una frecuencia por una duración, obteniendo un número positivo.

Un lapso de tiempo  $\mathbb{P}s$  se puede multiplicar también por un número real cualquiera (no positivo), pero el resultado ya no está en  $\mathbb{P}s$  si no en  $\mathbb{R}s = \pm\mathbb{P}s$ , la recta vectorial de los **lapsos**.

El álgebra de escalares se puede describir en términos más precisos (y técnicos) del siguiente modo: Sea  $\mathbb{P}$  el semianillo de los números reales positivos. Una semirecta  $S$  es un  $\mathbb{P}$ -módulo libre de rango 1. Se puede definir su dual  $S^*$  (al cual también llamaremos  $S^{-1}$ ), y si  $T$  es otra semirecta, el producto tensorial  $S \otimes_{\mathbb{P}} T$  también es una semirecta. En particular, el producto  $S^{-1} \otimes_{\mathbb{P}} S$  es naturalmente isomorfo a  $\mathbb{P}$ . Como el anillo  $\mathbb{R}$  de los números reales es también un  $\mathbb{P}$ -módulo, dada una semirecta  $S$  se puede definir  $\pm S = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{P}} S$ , que es una recta vectorial, es decir, un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial real de dimensión 1.

La **línea de tiempo**  $\mathcal{T}$  es un espacio afín real de dimensión 1. Es decir, no sólo no tiene una unidad de medida predeterminada, sino que tampoco tiene un punto de referencia. Sus puntos se llaman **instantes**. Si a partir de un instante  $A$  dejamos transcurrir un lapso  $l \in \mathbb{R}s$ , llegamos a otro instante al que denotamos  $A + l$ . Cualquier instante  $B$  se puede obtener a partir de  $A$  sumando un  $l$  adecuado, al que denotamos  $B - A$ .

Un **intervalo de tiempo** es un intervalo contenido en la línea de tiempo.

## 2.2. Espacio euclídeo

Un espacio euclídeo  $n$ -dimensional es un espacio afín  $E$  de dimensión  $n$  con una norma, a valores en  $\mathbb{P}m$ , que proviene de un producto interno. Digámoslo menos resumidamente.

Si  $A$  y  $B$  son puntos en el espacio  $E$ , tenemos la distancia  $d(A, B) \in \mathbb{P}m$ . Esta distancia es de hecho una norma, es decir, es compatible con la estructura afín (invariante por traslaciones y homogénea). Si  $v \in \Delta E$  es un vector traslación, sabemos que  $d(A + v, B + v) = d(A, B)$ , de aquí que la distancia  $d(A, B)$  depende sólo de cuál es el vector  $B - A$ . Existe entonces una función  $|-| : \Delta E \rightarrow \mathbb{P}m$  que determina la distancia: para cualesquiera  $A, B \in E$  se tiene  $d(A, B) = |B - A|$ . Además  $|-|$  es homogénea, es decir, para cualquier vector  $v \in \Delta E$  y cualquier número positivo  $r \in \mathbb{P}$  se tiene  $|rv| = r|v|$ . Por lo tanto,  $|-|$  es una norma en  $\Delta E$ .

Por otra parte, sabemos que si dos figuras  $A$  y  $A'$  en un espacio euclídeo  $E$  son semejantes (siendo el tamaño de  $A'$  igual a  $r$  veces el tamaño de  $A$ ), entonces hay una transformación del espacio completo en sí mismo que lleva  $A$  a  $A'$ . Esto implica que el espacio es isótropo, lo cual permite demostrar<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Ver <http://mathoverflow.net/questions/41211/easy-proof-of-the-fact-that-isotropic-spaces-are-euclidean>.

(por medio del teorema del elipsoide de John) que la norma proviene de un producto interno  $\langle -, - \rangle : \Delta E \times \Delta E \rightarrow \mathbb{P}m^2$  (para cualquier vector  $v \in \Delta E$  se tiene  $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ).

*Comentario 2.2.1.* Más precisamente, si  $r \in \mathbb{P}$ , una  $r$ -dilatación en un espacio métrico  $E$  es una función  $E \rightarrow E$  que multiplica todas las distancias por  $r$ . El espacio se dice completamente transitivo (por dilataciones) si toda dilatación parcialmente definida  $f : A \rightarrow E$  (donde  $A \subseteq E$ ) se puede extender a una dilatación  $E \rightarrow E$ . Los espacios euclídeos son completamente transitivos, y esto distingue a los espacios euclídeos entre los espacios normados, y de hecho aparentemente los distingue entre todos los espacios métricos localmente compactos y de métrica interior.<sup>3</sup>

Un espacio euclídeo de dimensión  $n$  tiene un grupo de **isometrías** (biyecciones que preservan la métrica, necesariamente afines) de dimensión  $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ , pues una isometría  $S$  queda determinada por la imagen de un punto  $A$  y una isometría de  $\Delta E$ , y el grupo de isometrías de  $\Delta E$  tiene dimensión  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Las traslaciones forman un subgrupo normal. Las isometrías que preservan la orientación forman otro subgrupo normal. Una **similaridad euclídea** es una transformación que no preserva las distancias sino que las multiplica por un factor estrictamente positivo, y tiene asociado un automorfismo de  $\mathbb{P}m$ .

El espacio en donde usualmente están las cosas tiene dimensión  $n = 3$ .

### 2.3. Mundo galileano

(En esta sección seguiremos aproximadamente la exposición de [1].)

Un principio fundamental de la mecánica clásica, que sólo es aproximadamente cierto, afirma que es posible la comunicación instantánea a lo largo del espacio (por ejemplo, usando señales luminosas), lo cual permite sincronizar los relojes entre observadores que se encuentran alejados, permitiendo tener una noción de tiempo universal (válida en todo el mundo).

Fijada la línea de tiempo  $\mathcal{T}$  y la semirrecta de longitudes  $\mathbb{P}m$ , se puede definir el concepto de **mundo galileano**. Un mundo galileano  $1+n$ -dimensional  $(G, t_G, | - |_G)$  está compuesto por un espacio afín  $G$  de dimensión  $n+1$  (cuyos puntos se llaman **eventos**), un morfismo afín (no singular)  $t_G : G \rightarrow \mathcal{T}$  (el **tiempo**) y una norma euclídea  $| - |_G$  a valores en  $\mathbb{P}m$ , definida en el espacio vectorial tridimensional  $\text{Spa Vec } G := \text{Ker}(\Delta t) \subseteq \Delta G$  de los vectores espaciales (que unen eventos denominados **simultáneos**, por ocurrir en el mismo instante de tiempo). Otra forma de decir esto es la siguiente: un mundo galileano  $n$ -dimensional es un fibrado afín (sobre  $\mathcal{T}$ ) de espacios euclídeos

---

<sup>3</sup>Ver discusión en <http://mathoverflow.net/questions/64269/towards-a-metric-characterization-of-euclidean-spaces>.

$n$ -dimensionales, con estructura euclídea invariante por las traslaciones de  $G$ .

Para cada instante  $t$ , el espacio afín tridimensional  $G_t = \mathbf{t}^{-1}(t)$  es entonces un espacio euclídeo, el espacio de **posiciones** en el instante  $t$ . Un evento tiene entonces asociado un par  $(t, x)$ , en donde  $t$  es un instante en el tiempo y  $x$  es un punto de  $G_t$ . Nótese que si dos instantes  $t$  y  $s$  son distintos, en principio no hay una manera natural de identificar los puntos de  $G_t$  con los de  $G_s$ , de modo que no tiene sentido decir que un móvil está quieto: lo más parecido a la quietud que se puede definir es el **movimiento uniforme**. Un movimiento uniforme en  $G$  es una función afín  $m : \mathcal{T} \rightarrow G$  tal que  $\mathbf{t} \circ m = \text{id}_{\mathcal{T}}$ .

Una **simetría** de  $G$  está compuesta por una traslación del tiempo  $S$  y una biyección afín  $G \rightarrow G$ , a la cual también llamamos  $S$ , que respeta la traslación temporal (es decir, para cada evento  $(t, x)$  se cumple que  $\mathbf{t}_G(S(t, x)) = S(t)$ ) y preserva las distancias. Las simetrías (o automorfismos) de un mundo galileano  $1 + n$ -dimensional forman un grupo de dimensión  $1 + n + n + \frac{n(n-1)}{2}$ , pues si  $e_0$  y  $e_1$  son eventos no simultáneos, una simetría  $S$  está determinada por una traslación en el tiempo, las imágenes de  $e_0$  y  $e_1$ , y una isometría que deja fijos a  $S(e_0)$  y  $S(e_1)$ . Las traslaciones son simetrías, y forman un subgrupo normal: el grupo de las simetrías  $S$  tales que el vector que une un evento  $e$  con su imagen  $S(e)$  es el mismo para todos los eventos  $e$  (esto se puede definir en cualquier espacio afín). Obsérvese que la componente espacial de una traslación sólo está definida para traslaciones con componente temporal nula, pues es el único caso en el que  $e$  y  $S(e)$  están unidos por un vector espacial. Tomar la componente de traslación temporal y la componente de isometría determina dos morfismos, a partir de los cuales se pueden definir otros subgrupos normales. Uno de ellos es el de los **boosts** galileanos: simetrías cuya traslación temporal y cuya isometría asociada son nulas. Un boost tiene asociada una velocidad relativa (magnitud que definiremos precisamente en la sección de cinemática), pero no tiene asociada una componente de traslación, a menos que la velocidad relativa sea nula, pues sólo entonces el vector que une  $e$  con  $S(e)$  es igual para todos los eventos  $e$ . Fijado un movimiento uniforme, podemos hablar del grupo de simetrías que dejan sus eventos fijos, y es isomorfo al grupo de rotaciones de un espacio euclídeo  $n$ -dimensional que dejan cierto punto fijo. El grupo de simetrías es a su vez subgrupo normal del grupo de las **similaridades**, que incluye transformaciones que dilatan uniformemente el tiempo, e independientemente dilatan uniformemente las distancias (pero preservando la simultaneidad entre eventos).

Si  $E$  es un espacio euclídeo de dimensión  $n$ , el producto de espacios afines  $\mathcal{T} \times E$  adquiere naturalmente estructura de mundo galileano, y si  $G$  es un mundo galileano, un **sistema de referencia inercial** para  $G$  es un isomorfismo entre  $G$  y un mundo producto. Al especificar en  $G$  un movimiento

rectilíneo uniforme  $c_o$  como nulo, podemos identificar eventos de distintos instantes entre sí: se piensa que dos eventos ocurren en la misma posición del espacio si están unidos por una recta paralela a  $c_o$ . Entonces, si  $t$  es un instante cualquiera, el mundo galileano queda identificado con el producto  $\mathcal{T} \times G_t$ , lo cual establece un sistema de referencia inercial. Siempre que decimos que un punto está **fijo en el espacio** estamos aludiendo implícitamente a un sistema de referencia. El **principio de relatividad** afirma que todos los sistemas de referencia son equivalentes físicamente, es decir, indistinguibles por medio de experimentos. La descripción galileana del mundo se ajusta a este principio con bastante exactitud si sólo se tienen en cuenta los fenómenos que estudia la mecánica clásica. Este hecho es conocido como **principio de relatividad galileana**.

La descripción galileana deja de ser compatible con el principio de relatividad cuando se tiene en cuenta que la luz se propaga a una velocidad finita, pues un movimiento rectilíneo uniforme a la velocidad de la luz resultaría distinguido de otros movimientos a otras velocidades. Las concepciones del mundo que compatibilizan el principio de relatividad con la finitud de la velocidad de la luz se suelen llamar **relativistas**, y son necesarias también para describir experimentos mecánicos que involucran movimientos relativos a velocidades comparables con la de la luz, e incluso para describir movimientos más lentos en presencia de objetos muy masivos.

## 2.4. Cinemática en mundos galileanos

Si  $G$  es un mundo galileano con  $\mathbf{t} : G \rightarrow \mathcal{T}$  la función tiempo, un **movimiento** (de una partícula) en  $G$  durante un intervalo  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}$  es una función continua  $c : \mathcal{I} \rightarrow G$  tal que  $\mathbf{t} \circ c = \text{id}_{\mathcal{I}}$ . El movimiento queda determinado por su **trayectoria**  $H = \text{Im } c \subseteq G$ , y tiene estructura de fibrado de puntos sobre  $\mathcal{T}$ . Si  $c$  es un movimiento diferenciable que en cierto instante  $t_0$  incide en el evento  $(t_0, x_0) = c(t_0)$ , su velocidad  $c'(t_0) = dc(t_0)$  en dicho instante es una transformación lineal  $\mathbb{R}_s \rightarrow \Delta G$  (recordando que  $\Delta \mathcal{T} = \mathbb{R}_s$ ). Esta transformación lineal es sección de  $\Delta \mathbf{t} : \Delta G \rightarrow \mathbb{R}_s$ , es decir, se cumple  $\Delta \mathbf{t} \circ dc(t_0) = \text{id}_{\mathbb{R}_s}$ .

Las posibles velocidades en  $G$ , (las secciones de  $\Delta \mathbf{t}$ ) forman un espacio *afín*  $\dot{G}$ . El espacio vectorial  $\Delta \dot{G}$  de las **velocidades relativas** (diferencias entre velocidades) contiene a las transformaciones lineales  $\mathbb{R}_s \rightarrow \Delta G$  que compuestas con  $\Delta \mathbf{t}$  dan cero, es decir, cuya imagen contiene sólo vectores espaciales. Las velocidades relativas son entonces las transformaciones lineales  $\mathbb{R}_s \rightarrow \text{Spa } \text{Vec } G$ , y entonces  $\Delta \dot{G} = (\mathbb{R}_s)^* \otimes_{\mathbb{R}} \text{Spa } \text{Vec } G$  hereda de  $\text{Spa } \text{Vec } G$  una norma euclídea, que toma valores en  $\mathbb{P}_s^m$ .

Si  $c : \mathcal{I} \rightarrow G$  es un movimiento diferenciable, tenemos su función derivada  $c' : \mathcal{I} \rightarrow \dot{G}$ , y si esta función es diferenciable en cierto instante  $t_0$ , la diferencial es lo que llamamos **aceleración** del movimiento en  $t_0$ , y es una

transformación lineal  $\mathbb{R}s \rightarrow \Delta\dot{G}$ . Las aceleraciones en  $G$  forman un espacio vectorial  $\ddot{G}$ , (el espacio de las transformaciones lineales  $\mathbb{R}s \rightarrow \Delta\dot{G}$ ), que hereda de  $\dot{G}$  una norma a valores en  $\mathbb{P}\frac{m}{s^2}$ . Un movimiento es rectilíneo uniforme cuando tiene aceleración nula en todo instante.

Las simetrías del espacio euclídeo actúan naturalmente sobre sus espacios de velocidades, velocidades relativas y aceleraciones.

Para describir el movimiento de un sistema (digamos, finito)  $\Gamma$  de partículas  $i$  en un mundo galileano  $G$  de dimensión  $1+n$ , debemos definir el espacio afín de configuraciones  $G^\Gamma$  de dicho sistema, de dimensión  $1+n|\Gamma|$ , al cual llamaremos **mando producto** o **mando de configuraciones** del sistema, y tiene la propiedad de que para cada instante  $t$ , a cada  $\Gamma$ -upla de posiciones  $(x_i \in G_t)_{i \in \Gamma}$  o **configuración** del sistema en el instante  $t$  le corresponde un punto  $x$  en el espacio  $G_t^\Gamma$ . El mundo  $G^\Gamma$  no es el producto cartesiano de los espacios afines  $G$ , sino un subconjunto del mismo, ya que sólo consideramos las  $\Gamma$ -uplas de eventos simultáneos. Nótese que el mundo que estamos definiendo sí es un producto en la categoría de fibrados afines de espacios afines sobre  $\mathcal{T}$ . El mundo producto  $G^\Gamma$  tiene un tiempo  $t_{G^\Gamma} : G^\Gamma \rightarrow \mathcal{T}$  al cual usualmente llamaremos simplemente  $t$ . Un movimiento del sistema es una curva  $c = c(t)$ , sección de  $t$ , definida en un intervalo de tiempo  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}$ , que describe el movimiento de todas las partículas durante dicho intervalo. El espacio afín de velocidades  $(\dot{G}^\Gamma)$  es isomorfo a  $(\dot{G})^\Gamma$ , y lo mismo sucede con el espacio vectorial de aceleraciones  $(\ddot{G}^\Gamma)$ . Si  $\Gamma$  es finito y todas las partículas son iguales, puede dársele al producto una norma euclídea, pero conviene esperar hasta haber introducido el concepto de masa, para poder en general darle a cada partícula la importancia que le corresponde.



### 3. Dinámica en mundos galileanos: mecánica de Newton

#### 3.1. Ecuación de Newton

(En esta sección introduciremos la ecuación de Newton, siguiendo aproximadamente la exposición de [1].)

La mecánica estudia el movimiento de un sistema (digamos, finito) de partículas en un mundo galileano  $G$  (de dimensión 3). Un hecho empírico es que la aceleración de todas las partículas queda determinada, en cada sistema de partículas, por las posiciones y velocidades de las partículas en cualquier instante inicial. Es decir, cada sistema  $\Gamma$  tiene asociada una  $\Gamma$ -upla  $(A_i)_{i \in \Gamma}$  de funciones continuas

$$A_i(t, x, \dot{x}) : G^n \times \dot{G}^n \rightarrow \ddot{G},$$

y evoluciona de acuerdo con el sistema de ecuaciones

$$\forall i \quad \ddot{x}_i = A_i(t, x, \dot{x}),$$

llamadas ecuaciones de Newton, en honor a ISAAC NEWTON (1642-1727), que las estudió en su obra [8]. Esto se puede expresar en una sola ecuación

$$\ddot{x} = A(t, x, \dot{x}) \tag{1}$$

(a la cual llamaremos **ecuación de Newton**), en donde  $A = (A_i)_{i \in \Gamma}$  actúa como una función a valores en  $\ddot{G}^n$ , llamada **función de aceleraciones** del sistema. La ecuación de Newton es una **ecuación de movimiento** o **ecuación dinámica**, pues a partir de cada configuración y velocidad iniciales determina un movimiento (al menos durante un intervalo de tiempo, si  $A$  es localmente Lipschitz respecto de la configuración  $x$ ). Las ternas  $(t, x, \dot{x})$  (en donde  $t$  es un instante,  $x$  es una configuración del sistema en el instante  $t$ , y  $\dot{x}$  es una velocidad en el mundo de configuraciones) son los **estados** del sistema. El hecho de que a partir de un estado inicial del sistema en cierto instante se pueda determinar el estado en los otros instantes se conoce como **principio de determinismo** de la física clásica.

La función  $A$  de un sistema aislado de partículas es invariante por simetrías galileanas: Si  $S$  es una simetría, entonces para cada estado  $(t, x, \dot{x})$  se cumple la relación

$$A(S(t, x, \dot{x})) = S(A(t, x, \dot{x})), \tag{2}$$

a la cual podemos llamar **ecuación de Galileo**. De la misma se deduce inmediatamente (usando simetrías de traslación) que para un sistema aislado de partículas, la función  $A$  no puede depender del tiempo ni de las posiciones absolutas  $x_i$  de las partículas, sino sólo de las posiciones relativas  $x_i - x_j$ .

Usando simetrías boost vemos que tampoco puede depender de las velocidades absolutas, sino que sólo depende de las velocidades relativas  $\dot{x}_i - \dot{x}_j$ . Pero este razonamiento no se aplica a un sistema no aislado de partículas que interactúan con agentes externos, pues al aplicarle una simetría galileana al conjunto de partículas, su situación respecto de los agentes externos cambia. Así es posible obtener funciones que dependan de la posición absoluta, y aún del tiempo (si el estado de los agentes externos no es constante en el tiempo).

Empecemos estudiando algunos sistemas de una sola partícula.

**Ejemplo 3.1.1.** En el caso de una sola partícula moviéndose en un mundo vacío, la aceleración debe ser nula, pues si en algún instante tuviera una dirección en particular, esto permitiría establecer una dirección especial, rompiendo el principio de relatividad. Para demostrar esto a partir de la ecuación de Galileo, en cada estado  $(t, x, \dot{x})$  se puede concluir que  $A(t, x, \dot{x}) = 0$  aplicando la ecuación de Galileo al grupo de rotaciones que dejan fijo el estado  $(t, x, \dot{x})$ , que no deja ninguna dirección espacial fija. Así obtenemos la **primera ley de Newton o ley de inercia**: una partícula aislada describe un movimiento rectilíneo uniforme. Explícitamente, la solución general de esta ecuación de movimiento con condición inicial  $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$  es

$$x = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0).$$

Nótese que la curva propuesta es un movimiento, pues es sección de  $t$ .

Los movimientos uniformes permiten experimentar la estructura afín del mundo, y dan un método sencillo de comprobar que un sistema de referencia (sistema de coordenadas para el mundo) es inercial (respeta la estructura afín del mundo), pues en un sistema de referencia (aproximadamente) inercial es posible observar que las partículas que están (aproximadamente) aisladas describen movimientos (aproximadamente) uniformes. Estos movimientos fueron estudiados por Galilei.

Para que el movimiento de una partícula sea no uniforme, tiene que interactuar con otras partículas (o algún otro agente externo). Para poder estudiar nuestra partícula (o sistema no aislado) por separado, debemos suponer que el comportamiento de los agentes externos ya está predeterminado. Como veremos más adelante, esto no es posible, pues siempre que dos partículas interactúan, se afectan mutuamente. Pero en la práctica, la independencia de los agentes externos respecto del sistema se da aproximadamente, por ejemplo, si son cuerpos mucho más grandes que las partículas que estamos estudiando. Los movimientos uniformes y el principio de relatividad fueron estudiados por **GALILEO GALILEI (1564–1632)**.

**Ejemplo 3.1.2.** El movimiento de una partícula cerca de la superficie terrestre se describe aproximadamente por la ecuación  $\ddot{x} = g$ , donde  $g$  es un

vector espacial constante, vertical y hacia abajo. La solución con estado inicial  $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$  se obtiene integrando una vez para calcular la velocidad  $\dot{x} = \dot{x}_0 + g(t - t_0)$  y otra vez para hallar la posición  $x = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$ . Nótese que la velocidad propuesta es válida, pues siendo  $g$  una aceleración (necesariamente espacial), difiere en un vector espacial  $g(t - t_0)$  de una velocidad constante. Por lo tanto, el término  $\frac{1}{2}g(t - t_0)^2$  de diferencia entre este **movimiento uniformemente variado** y un movimiento uniforme es un desplazamiento espacial, de modo que la curva propuesta es efectivamente un movimiento. Este tipo de movimiento también fue estudiado Galilei.

**Ejemplo 3.1.3.** El movimiento de una partícula en un fluido viscoso quieto se describe aproximadamente<sup>4</sup> por la ecuación  $\ddot{r} = -k\dot{r}$ , donde  $r$  es la posición de la partícula relativa a algún punto fijo respecto del fluido y  $k > 0$  es un escalar. La solución se obtiene integrando una vez para obtener la velocidad  $\dot{r} = \dot{r}_0 e^{-k(t-t_0)}$  y otra vez para obtener la posición.

**Ejemplo 3.1.4.** Consideremos en un mundo galileano orientado  $G$  de dimensión  $1 + 2$ , una partícula  $i$  en **movimiento circular uniforme** con **velocidad angular**  $\omega \in \mathbb{P}\text{s}^{-1}$  alrededor de un punto fijo  $o$ , es decir, según la ecuación de primer orden

$$\dot{r} = \omega T(r),$$

donde  $r = x_i - x_o$  es el vector de posición relativa de  $i$  respecto de  $o$  y  $T(r)$  es el único vector tal que  $(r, T(r))$  es una base ortonormal<sup>5</sup> de  $\text{Spa Vec } G$  orientada positivamente (esto garantiza que se mueva a distancia fija de  $o$ , y que la norma de la velocidad del movimiento sea  $|\omega||r|$ , lo cual explica el nombre). Como  $T$  es la transformación lineal dada en cualquier base ortonormal  $B$  orientada positivamente por la matriz

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la aceleración está dada por

$$\ddot{r} = \omega T \dot{r} = \omega^2 T^2 r = -\omega^2 r.$$

Este tipo de movimiento fue estudiado por CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695).

*Comentario 3.1.5.* La posición  $r$  en el instante  $t$  no se puede describir por medio de funciones algebraicas, pero depende linealmente de la posición  $r_0$  en

---

<sup>4</sup>Esta aproximación puede no ser buena (ver comentario de [10] sobre el segundo libro de los Principia), pero tiene la ventaja de depender linealmente de la velocidad, lo cual facilita los cálculos.

<sup>5</sup>Una base ortogonal se dice ortonormal si y sólo si está compuesta por vectores de la misma norma.

el instante  $t_0$  según la fórmula  $r = S_{\omega,t,t_0}r_0$ , y puede probarse usando similitudes que en realidad  $r = S_{\omega,t,t_0}$  sólo depende del ángulo  $\varphi = \omega(t-t_0) \in \mathbb{R}$ , de modo que  $S_{\omega,t,t_0} = R_\varphi$ . Usando simetrías puede además probarse que  $R$  es un **morfismo** suave de  $\mathbb{R}$  al grupo de rotaciones de  $\text{Spa } \text{Vec } G$ . Su núcleo es  $\mathbb{Z}(2\pi)$ , donde  $\pi$  es cierto número positivo. Por lo tanto, el movimiento es periódico, y la duración de cada período es  $\frac{2\pi}{\omega}$ . La transformación  $R_\varphi$  está dada en cualquier base ortonormal  $B$  orientada positivamente por cierta matriz

$$[R_\varphi]_B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

donde  $\sin$  y  $\cos$  son funciones suaves  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 3.1.6.** Si unimos una partícula  $i$  por medio de un resorte a un punto fijo, y la apartamos de su posición de equilibrio  $x_{eq}$ , ésta comienza a oscilar alrededor de dicha posición según la ecuación

$$\ddot{r} = -\omega^2 r,$$

donde  $r = x_i - x_{eq}$  es la posición de la partícula relativa al punto de equilibrio (que se supone fijo) y  $\omega^2 \in \mathbb{P}(\text{s}^{-2})$  es un escalar positivo constante. Introduciendo la variable  $v = \dot{r}$ , la dinámica se describe por medio del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\omega^2 r \\ \dot{r} &= v, \end{aligned}$$

o matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ r \end{pmatrix},$$

donde podemos multiplicar la variable  $r$  por  $\omega$  para homogeneizar (siendo ahora  $v$  y  $\omega r$  dos vectores velocidad). Entonces queda la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega r \end{pmatrix},$$

cuya solución general es

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-t_0)) & -\sin(\omega(t-t_0)) \\ \sin(\omega(t-t_0)) & \cos(\omega(t-t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ \omega r_0 \end{pmatrix},$$

donde  $r_0$  y  $v_0$  son la posición y velocidad inicial en un instante  $t_0$ . Este movimiento se llama **movimiento armónico simple**. Nótese que el par  $(v, \omega r)$  se mueve en un círculo, conservándose la cantidad  $|v|^2 + \omega^2|r|^2$ .

### 3.2. Movimiento planetario y campos centrales

Un gran triunfo de la mecánica de Newton fue lograr explicar con gran precisión el movimiento de los astros de nuestro Sistema Solar. En una primera aproximación, se observa que cada planeta  $i$  ejecuta alrededor del Sol un movimiento circular uniforme de radio  $\rho$  y período  $\tau$ . Los planetas se mueven independientemente, siendo el período de revolución mayor mientras mayor es el radio de la órbita.

Más precisamente, haciendo un gráfico logarítmico del período en función del radio, se observa que la magnitud  $\frac{\rho^3}{\tau^2}$  tiene el mismo valor para todos los planetas. Este hecho empírico es conocido como **tercera ley de Kepler**, en honor al astrónomo JOHANNES KEPLER (1571–1630) que estudió el movimiento de los planetas a partir de las observaciones sistemáticas de TYCHO BRAHE (1546–1601). En términos de la velocidad angular  $\omega$ , que es inversamente proporcional al radio, la ley dice que el número  $k = \omega^2 \rho^3$  es igual para todos los planetas. Según lo calculado en 3.1.4, si  $r$  es el vector de posición relativa de un planeta respecto del Sol (fijo), la aceleración  $\ddot{r} = -\omega^2 r$  del movimiento circular uniforme es en este caso igual a  $-\frac{\omega^2 |r|^3}{|r|^3} r = -\frac{k}{|r|^3} r$ . Así, los planetas están sometidos a un campo de aceleraciones dirigido hacia el Sol y de intensidad  $\frac{k}{|r|^2}$ , es decir, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al mismo.

Cuando el campo de aceleraciones al que está sometido una partícula depende sólamente de su posición (siendo independiente de la velocidad de la partícula, y del tiempo) y tiene simetría alrededor de un **centro** fijo, se dice que es un **campo central** de aceleraciones, y puede probarse (usando la simetría) que la aceleración tiene la dirección del vector posición  $r$  (relativa al centro), y su sentido e intensidad dependen sólamente de la distancia  $\rho = |r|$ , por lo que está dada por la forma  $\ddot{r} = a(|r|) \frac{r}{|r|}$ , siendo  $a = a(|\rho|)$  una función continua y a valores escalares, que depende del campo en cuestión. Aquí consideraremos que el campo no está definido en el centro, por lo que interrumpiremos cualquier movimiento que llegue hasta allí.

*Observación 3.2.1.* En cualquier campo central dado por una función  $a = a(\rho)$ , el movimiento circular uniforme de radio  $\rho$  será posible para cualquier valor de  $\rho > 0$  para el cual el campo resulte atractivo, es decir, para el cual se tenga  $a(\rho) \leq 0$ .

*Comentario 3.2.2.* Cuando  $a = a(\rho)$  es de la forma  $a = k\rho^\alpha$ , decimos que es un campo central **homogéneo**, pues son los únicos campos centrales que admiten simetrías de similaridad (que dilatan las distancias y el tiempo), lo cual implica que todos los puntos (distintos del centro) resultan equivalentes, no habiendo un experimento que permita distinguir un radio positivo de otro (asumiendo que no hay unidades de medida distinguidas para medir tiempo o distancia). Notar que, en el caso de  $\alpha = 0$ , ni siquiera es posible distinguir un radio de otro disponiendo de una unidad de tiempo distinguida.

### 3.3. Conservación de la velocidad areolar en campos centrales

Cuando se analiza más detenidamente el movimiento de un planeta alrededor del Sol, se nota que su órbita en general no es exactamente un círculo centrado en el mismo, sino que parece estar descentrada, y además se observa que el movimiento del planeta es más lento cuando el planeta está más alejado del Sol.<sup>67</sup> Más precisamente, la **segunda ley de Kepler**, también de carácter empírico, afirma que el área barrida en un intervalo de tiempo por el vector posición de un planeta es proporcional al tiempo transcurrido, o dicho de otra manera, la **velocidad areolar** del movimiento de cada planeta es constante. Esto ocurre con cualquier partícula  $i$  moviéndose en un campo central alrededor de un punto fijo  $o$ .

Para empezar, puede probarse que se conserva el plano de vectores espaciales generado por la posición relativa  $r = x_i - x_o$  y la velocidad relativa  $\dot{r} = \dot{x}_i - \dot{x}_o$ ,<sup>8</sup> es decir, el plano determinado por el bivector  $r \wedge \dot{r}$  (o cualquiera de sus múltiplos). Más aún, el bivector  $r \wedge \dot{r}$  es constante, y para probarlo basta con ver que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r \wedge \dot{r}) &= \dot{r} \wedge \dot{r} + r \wedge \ddot{r} \\ &= 0 + r \wedge (\ddot{x}_i - \ddot{x}_o) \\ &= 0. \end{aligned}$$

pues el sol tiene aceleración nula y  $\ddot{x}_i$  es paralelo a  $r$ .

Recíprocamente, puede probarse que si el (bi)vector  $r \wedge \dot{r}$  (que es la velocidad areolar, si entendemos el área como una magnitud vectorial, y no sólo consideramos su medida absoluta) es constante, entonces el movimiento transcurre en un plano que pasa por el centro, y la aceleración está dirigida hacia el centro.

---

<sup>6</sup>Se puede ver una animación del movimiento de los planetas —desde el punto de vista de la Tierra— en <http://jove.geol.niu.edu/faculty/stoddard/JAVA/ptolemy.html>.

<sup>7</sup>Un modelo propuesto para describir el movimiento proponía una órbita circular, con el Sol  $S$  desplazado del centro  $C$  (pero situado en el mismo plano del círculo). Además había otro punto  $E$  llamado **ecuante** con un desplazamiento (respecto del centro) opuesto al del Sol, de modo que  $C$  era el punto medio entre  $S$  y  $E$ . El movimiento propuesto del planeta  $P$  en su órbita era uniforme respecto de  $E$ , es decir, con el ángulo entre  $EP$  y  $ES$  variando con rapidez constante. Se puede ver un dibujo de esto en [2].

<sup>8</sup>Esto se puede demostrar, en general, para un sistema aislado compuesto por dos partículas: la recta que une sus posiciones en cierto instante, y las velocidades de las dos partículas en dicho instante, generan un submundo galileano de  $H \subset G$  de dimensión 3 (o menor), y usando las simetrías que lo dejan fijo (por ejemplo, si  $\dim(G) = 1 + 3$  usamos isometrías de espejo) encontramos que las aceleraciones tienen que estar dirigidas a lo largo de  $H$ , por lo que todo el movimiento debe transcurrir en  $H$ , o dicho de otra manera, (existe un sistema de referencia inercial en el que) las dos partículas permanecen en un plano constante.

### 3.4. Órbitas en campos centrales

En esta sección desarrollaremos, usando notación moderna, los puntos centrales del análisis de Newton de las órbitas en campos centrales, que puede verse con más detalle en [11].

Una consecuencia de la conservación del impulso angular en un campo central es que, conocida la **órbita** que recorre la partícula (es decir, el conjunto de puntos del espacio que visita, medidas respecto del centro) y el valor del impulso angular (el cual se puede calcular conociendo la velocidad en un punto de la órbita), el movimiento a lo largo de la órbita a partir de un instante y posición inicial ya queda determinado, aún sin conocer la función  $a(\rho)$  que determina el campo central. La función  $a(\rho)$  se puede determinar después, a partir del movimiento de la partícula, al menos para el intervalo de valores de  $\rho = |r|$  que visita la partícula.

En efecto, si  $H \subseteq G$  es una trayectoria en un campo central y  $s$  es un parámetro regular en  $H$  (lo cual hace que  $t$  y  $s$  estén relacionados por un difeomorfismo, con lo que  $\frac{ds}{dt}$  y  $\frac{dt}{ds}$  son escalares no nulos, y en general podemos derivar cualquier expresión  $E$  (a valores en un espacio afín) definida en  $H$  respecto de  $s$  (obteniendo  $E' := \frac{dE}{ds}$ ) o respecto de  $t$  (obteniendo  $\dot{E} = \frac{dE}{dt}$ ). A lo largo de  $H$  tenemos

$$\lambda = r \wedge \dot{r} = r \wedge \frac{dr}{dt} = r \wedge \left( \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = r \wedge (r' \dot{s}) = (r \wedge r') \dot{s},$$

con lo que podemos usar la parametrización  $s \mapsto r$  para calcular la relación entre los diferenciales de las variables:

$$\lambda dt = (r \wedge r') ds.$$

Esta relación permite, para cualquier cantidad  $E$  definida en  $H$ , calcular  $\dot{E}$  a partir de  $E'$  (y viceversa), pues tenemos

$$\lambda \frac{d}{ds} = (r \wedge r') \frac{d}{dt},$$

es decir,

$$\lambda E' = (r \wedge r') \dot{E}.$$

En particular, podemos calcular

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\left(\frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}\right)}{ds} \frac{ds}{dt} = (r' \dot{s})' \dot{s} = (r'' \dot{s} + r' \dot{s}') \dot{s},$$

que se puede calcular en términos de  $s$  (recordando que  $\dot{s} = \frac{\lambda}{r \wedge r'}$ ). Para obtener la función  $a = a(\rho)$  que define la intensidad del campo de aceleraciones según la fórmula  $|\ddot{r}| = a(|r|)$ , sólo hace falta calcular  $|r|$  en función de  $s$  e invertir para escribir  $s$  en función de  $|r|$  y poder usar el cálculo anterior (que da  $\ddot{r}$  en función de  $s$ ).

*Comentario 3.4.1.* A partir de una función  $a = a(\rho)$  y un estado inicial con momento angular no nulo, se genera un tramo de órbita plano, dos veces derivable, cuyo vector tangente nunca es paralelo al vector posición, y que no repite valores de  $|r|$  (pues si repitiera, podríamos quedarnos con un intervalo de tiempo en el que  $|r|$  crezca o decrezca monótonamente, cortando el movimiento en cualquier **pericentro** (punto en el que  $|r|$  es mínimo) o **apocentro** (punto en el que  $|r|$  es máximo) que aparezca).<sup>9</sup> Esta asignación es inyectiva, pues a partir del tramo de órbita podemos calcular la intensidad del campo de aceleraciones, como indicamos atrás, al menos para los valores de  $|r|$  que recorre la partícula. Además es sobreyectiva: Si tenemos un tramo de curva dos veces derivable, con vector tangente nunca paralelo al vector posición, contenido en un plano que pasa por el centro, y que no repite valores de  $|r|$ , podemos parametrizarlo con  $\lambda = r \wedge \dot{r}$  constante, y la aceleración resultará dirigida hacia el centro, por lo cual el movimiento podrá explicarse como generado por un campo central.

*Comentario 3.4.2.* Teniendo esta correspondencia entre órbitas y campos centrales, cabe preguntarse cómo son los movimientos no circulares que corresponden al campo de atracción del Sol, de intensidad  $a = \frac{k}{|r|^2}$ , con cierto  $k > 0$ . Una conclusión sorprendente es que las órbitas son siempre cerradas, y de hecho, son secciones cónicas (elipses, paráolas o hipérbolas), con el Sol en uno de sus focos. Para probar esto basta con mostrar que todas las secciones cónicas, parametrizadas adecuadamente, tienen aceleración  $\ddot{r} = \frac{k}{|r|^3}r$ , y además mostrar que para cualquier condición inicial existe una sección cónica adecuada. No conociendo una demostración fácil y elegante de estos hechos, me limito a esbozar una demostración, que consiste en aplicar el método anterior de reconstrucción de campos a partir de órbitas.

Para probar que las cónicas son soluciones usando coordenadas cartesianas, se puede partir (en el caso de una elipse  $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , con  $a > c \geq 0$  y  $b^2 = a^2 - c^2$ ) de la parametrización usual  $r = r(s)$ , dada por  $r = (a \cos s - c, b \sin s)$ , y calcular el radio  $|r| = a - c \cos s$  y el valor que debe tener  $\dot{s}$  para que el momento angular  $(r \wedge r')\dot{s}$  tenga cierto valor constante  $\lambda$ , que está dado por  $r\dot{s} = \frac{\lambda}{b(1,0) \wedge (0,1)}$ . A partir de acá es posible calcular  $\ddot{r}$ , usando el valor de  $\ddot{s}$  que se obtiene de la ecuación  $\frac{d(r\dot{s})}{dt} = 0$ , y llegar finalmente a que  $\ddot{r} = -\frac{|\lambda|^2 a}{b|r|^3}r$ .

Alternativamente, se puede usar la ecuación polar  $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}$ , con  $p > 0$

---

<sup>9</sup>El movimiento en un campo central (como la mayoría de los movimientos que estudiaremos), admite simetrías que invierten el tiempo. Es decir, cualquier movimiento, recorrido hacia atrás, es solución a las ecuaciones dinámicas. Usando este tipo de simetrías, se puede probar que si el radio crece (o decrece) hasta alcanzar un valor estacionario en un punto  $E$  del plano, entonces a partir de ahí va a trazar un tramo que es imagen especular del anterior, respecto de la recta que une el centro con  $E$ . Esto implica que los puntos de radio estacionario son necesariamente máximos o mínimos, y que todo el movimiento queda determinado a partir de lo que pasa en un período maximal de monotonía.

y  $\epsilon \in \mathbb{R}$  (que sirve para elipses, paráolas e hipérbolas), parametrizando la curva por medio de  $\theta$ . En este caso hay que elegir  $\dot{\theta} = \frac{\lambda}{|r|^2(\hat{r} \wedge \dot{r})}$  para obtener  $r \wedge \dot{r}$  constante, y después calcular la componente radial de la velocidad (la única componente no nula), cuya intensidad en coordenadas polares es  $|\ddot{r}| - |r|\dot{\theta}^2$ , y concluir que es igual a  $-\frac{|\lambda|^2}{p|r|^2}$ .

Finalmente, para obtener secciones cónicas que se ajusten a cualquier condición inicial y cualquier valor de  $k$ , hay que resolver el problema de trazar una cónica a partir de un foco  $F$  (el centro del campo), un punto  $P$  de la curva (la posición inicial), la recta  $R$  tangente a la curva en  $P$  (la dirección inicial de movimiento), y la curvatura en dicho punto (determinada por  $\lambda$  y  $k$ ). Para eso debemos ubicar el segundo foco  $F'$ . Pero como las rectas  $PF$  y  $PF'$  tienen a la tangente  $R$  como bisectriz, queda determinada una recta de valores posibles para  $F'$ , y hay que elegir uno de ellos para darle a la sección cónica la curvatura en  $P$  deseada.

*Comentario 3.4.3.* La **primera ley de Kepler** afirma que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de sus focos. Sin embargo, en la práctica fue difícil de establecer, pues una órbita elíptica de eccentricidad  $\epsilon$  y semidiámetro mayor  $a$  coincide aproximadamente (para valores de  $\epsilon$  cercanos a cero, a primer orden en  $\epsilon$ ) con una circunferencia de radio  $a$  y con el centro desplazado una distancia  $\epsilon a$  respecto del Sol. Por lo tanto, no fue tan sencillo para Newton establecer su teoría. Para tener un vistazo del contexto histórico en el que publicó su obra, ver [10].

### 3.5. Masa inercial y fuerzas

Ahora estudiaremos sistemas de más de una partícula.

En el caso de dos partículas  $i$  y  $j$ , que inicialmente tienen velocidad relativa nula, aplicando en cierto estado  $(t, (x_i, x_j), (\dot{x}_i, \dot{x}_j))$  las rotaciones que lo dejan fijo, puede verse que la aceleración de cada partícula tiene la dirección de la recta que une a ambas. Además, si las dos partículas son semejantes, aplicando la simetría del sistema que las permuta (que no es una simetría galileana, sino una simetría del sistema mecánico producto), notamos que las aceleraciones de ambas partículas deben ser vectores opuestos, de modo que si promediamos las posiciones de las dos partículas, obtenemos un punto cuyo movimiento es uniforme.

Si las dos partículas son distintas, la naturaleza también provee una forma de promediarlas. Empíricamente se observa que todas las partículas parecen ser múltiplos positivos de una misma cosa: aún si en el experimento anterior usamos dos partículas distintas, las aceleraciones también son opuestas, de modo que  $-\frac{\dot{x}_j}{\dot{x}_i}$  es un número positivo, que además resulta constante durante el movimiento de las dos partículas, y persiste al repetir el experimento partiendo de otro estado inicial, y aún al cambiar el mecanismo de interacción

(por ejemplo, si estaban unidas por una cuerda o resorte, se lo cambia por otra cuerda o resorte distinto, en cuyo caso cambia la función  $A$  que determina el movimiento). Este número constante se llama masa de  $i$  relativa a  $j$ , y lo denotamos provisoriamente con el símbolo  $m_{i/j}$ . Además, al experimentar con varias partículas de a pares, se observa que para cualesquiera partículas  $i, j$  y  $k$  se cumple la relación de cancelación  $\frac{m_{i/k}}{m_{j/k}} = m_{i/j}$ , la cual nos indica que en realidad cada partícula  $i$  tiene una **masa**  $m_i > 0$ , de modo que la masa de  $i$  relativa a  $j$  es en realidad el cociente  $\frac{m_i}{m_j}$ . Las masas están en una nueva semirecta  $\mathbb{P}^k$  (que también incluye un valor nulo).

Si durante el movimiento de una partícula  $i$  multiplicamos su masa  $m_i$  por su aceleración  $\ddot{x}_i$ , obtenemos una magnitud

$$f_i = m_i \ddot{x}_i,$$

a la cual llamamos **fuerza efectiva** sobre la partícula  $i$ . Las ecuaciones de Newton (1) se pueden reescribir en la forma

$$\forall i \quad m_i \ddot{x}_i = F_i(t, x, \dot{x}),$$

donde  $F_i(t, x, \dot{x}) = m_i A_i(t, x, \dot{x})$ , o en la forma

$$m \ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \quad (3)$$

donde  $m = (m_i)_{i \in \Gamma}$  es la **masa del sistema** (que en este caso estamos multiplicando *componente a componente* por la aceleración del sistema  $x = (x_i)_{i \in \Gamma}$ ), y  $F = (F_i)_{i \in \Gamma}$  es la **función de fuerzas** del sistema, a determinar para cada sistema en particular.

**Ejemplo 3.5.1.** Si en los dos extremos de un resorte, de longitud inicial nula, fijamos dos partículas  $a$  y  $b$ , éstas se mueven según las ecuaciones

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a &= -\omega_a(x_a - x_b) \\ \ddot{x}_b &= -\omega_b(x_b - x_a), \end{aligned}$$

(con  $\omega_a, \omega_b > 0$ ) que, introduciendo las masas de las partículas, se reescriben en la forma

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_a &= -k(x_a - x_b) \\ m_b \ddot{x}_b &= -k(x_b - x_a), \end{aligned}$$

siendo  $k = m_a \omega_a = m_b \omega_b$  una **constante elástica** que de hecho depende sólo del resorte, lo cual se puede comprobar repitiendo el experimento con otras partículas. Sumando estas ecuaciones y dividiendo por  $m_a + m_b$  notamos que el punto  $x_{\text{cm}} = \frac{m_a x_a + m_b x_b}{m_a + m_b}$ , del cual hablaremos en general más adelante, se mueve uniformemente. Para terminar de describir el movimiento,

bastaría con calcular la evolución del vector espacial  $r = x_b - x_a$ . Sumando las ecuaciones originales obtenemos

$$\ddot{r} = -\frac{k}{\mu}r,$$

en donde  $\mu$  es la **masa reducida** del sistema, dada por la ecuación  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}$ . Definiendo  $\omega \in \mathbb{P}s^{-1}$  según la fórmula  $\omega^2 = \frac{k}{\mu}$ , la ecuación queda en la forma  $\ddot{r} = -\omega^2 r$ , que se resuelve como en el ejemplo 3.1.6, obteniendo la solución

$$\begin{pmatrix} v \\ wr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) & -\sin(\omega(t - t_0)) \\ \sin(\omega(t - t_0)) & \cos(\omega(t - t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ wr_0 \end{pmatrix},$$

donde  $v = \dot{x}_b - \dot{x}_a$ . En este caso se conserva la cantidad  $|v|^2 + \frac{k}{\mu}|r|^2$ , que multiplicando por  $\frac{\mu}{2}$  da la energía mecánica  $E = \frac{\mu}{2}|v|^2 + \frac{k}{2}|r|^2$ , de la cual hablaremos en general más adelante.

En este ejemplo vimos que un resorte de constante elástica  $k$  y longitud inicial nula actúa sobre las partículas  $a$  y  $b$  sujetas sobre sus extremos ejerciendo sobre  $a$  una fuerza  $-k(x_a - x_b)$  y sobre  $b$  una fuerza opuesta  $-k(x_b - x_a)$ . Estas fórmulas definen una función de fuerzas. Haciendo experimentos similares se puede asociar a cada mecanismo de interacción (gravitacional, electromagnético, rozamiento, etc.) una función de fuerzas. Cuando en un sistema coexisten varios mecanismos de interacción, el movimiento es descrito satisfactoriamente por la **función de fuerzas resultantes** que se obtiene sumando las funciones que corresponden a todos los mecanismos de interacción presentes. En adelante entenderemos la palabra **fuerza** en este sentido: como una función de fuerza que contribuye como sumando a la función de fuerzas de un sistema (llamada **fuerza resultante**), y es debida a la presencia de un mecanismo de interacción concreto. La ley de Newton se enuncia en palabras diciendo que el sistema se mueve de modo que la fuerza efectiva  $f = m\ddot{x}$  es igual a la fuerza resultante  $F(t, x, \dot{x})$ .

*Observación 3.5.2.* En el ejemplo 3.1.2, y también en el caso del movimiento de los planetas alrededor del sol, la aceleración  $g$  que experimenta cualquier partícula es independiente de su masa  $m$ . Para que eso ocurra, la fuerza que actúa sobre él (llamada fuerza **peso**, y debida a la presencia de la Tierra) debe ser igual a  $mg$ , es decir, proporcional a la masa. El vector aceleración  $g = g(t, x)$ , que puede variar entre un evento y otro, es llamado **campo gravitatorio**.

**Ejemplo 3.5.3.** Un **péndulo simple** es una partícula inmersa en un campo gravitatorio uniforme  $g$  y sujetada de un punto fijo por medio de una cuerda fina y liviana de longitud  $l$ . El péndulo tiene una **posición de equilibrio** (punto del mundo de configuraciones en el que si el sistema se queda quieto, cumple

la ecuación de movimiento) situado debajo del punto de sujeción (siendo **abajo** la dirección a donde apunta  $g$ ). Al apartar levemente la partícula de esta posición de equilibrio y soltarla (con velocidad inicial nula), notamos que comienza a oscilar periódicamente en un plano vertical,<sup>10</sup> pudiendo su posición describirse en coordenadas polares  $\rho, \theta$ , donde  $\rho$  es la distancia al punto de sujeción (de valor fijo  $l$ ) y  $\theta$  es el ángulo de apartamiento de la cuerda respecto de la dirección vertical (con un signo que depende de la dirección de apartamiento). La aceleración de la partícula es

$$\ddot{r} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\frac{\partial}{\partial\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\frac{\partial}{\partial\theta} = -l\dot{\theta}^2\frac{\partial}{\partial\rho} + l\ddot{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

y las fuerzas a las que está sometida son la tensión de la cuerda (cuya dirección, suponemos,<sup>11</sup> es paralela a la cuerda, y por lo tanto, perpendicular a la dirección de movimiento del péndulo) y la fuerza peso  $m|g|(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})$  (donde  $m$  es la masa de la partícula). Para calcular la evolución de  $\theta$  basta con analizar la componente tangencial  $ml\ddot{\theta} = -m|g|\sin\theta$  de la ecuación de Newton, que definiendo  $\omega = \sqrt{\frac{|g|}{l}}$ , se reescribe como

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta.$$

*Observación 3.5.4.* Para calcular el movimiento no hace falta conocer la tensión de la cuerda. Una vez conocido el movimiento, la tensión puede calcularse usando la componente de la ecuación de Newton que es perpendicular al movimiento de la partícula.

*Observación 3.5.5.* Aplicando una simetría que invierte el orden del tiempo, en el instante en el que la partícula está en el punto  $\theta = 0$ , vemos que el movimiento debe ser simétrico respecto de este punto, de modo que la oscilación va a ser entre el ángulo inicial  $\theta_0$  (en el instante inicial  $t_0$ ) y su opuesto  $-\theta_0$ .

*Comentario 3.5.6.* La ecuación de movimiento  $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$  se parece a la ecuación lineal  $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$  del movimiento armónico simple, y de hecho, la duración de una oscilación del péndulo tiende a la duración  $\frac{2\pi}{\omega}$  del oscilador lineal, a medida que la amplitud de oscilación (determinada por el ángulo inicial  $\theta_0$ ) tiende a cero. En efecto usando el valor inicial  $\theta_0$  (que también es el valor máximo de  $\theta$ ), podemos describir la posición por medio de una variable auxiliar  $q$  definiendo  $\theta = \theta_0 q$ . Entonces el movimiento está descrito por la ecuación  $\theta_0\ddot{q} = -\omega^2 \sin(\theta_0 q)$  con condiciones iniciales  $q_0 = 1$  y  $\dot{q}_0 = 0$ .

---

<sup>10</sup>El plano de oscilación en realidad gira lentamente con una velocidad angular menor que la velocidad de rotación de la Tierra. Este experimento, llamado **péndulo de Foucault**, permite comprobar la rotación de nuestro planeta respecto de las estrellas, mostrando que un sistema de referencia fijo a la Tierra no es inercial.

<sup>11</sup>Esto se puede explicar a partir de la delgadez de la cuerda si suponemos que las fuerzas internas entre sus partículas cumplen la ley fuerte de interacción, a explicar más adelante.

Como la solución de la ecuación debe depender suavemente del parámetro  $\theta_0$  (pues la función  $a(q) = -\omega^2 \sin(\theta_0 q)$  depende analíticamente de  $\theta_0$ ), vemos que el movimiento de  $q$  tiende a la solución  $q = \cos \omega(t - t_0)$  de la ecuación lineal. Más aún, como cualquier valor de  $\theta_0$  equivale (a los efectos de calcular el período de oscilación) a su opuesto  $-\theta_0$ , sospechamos que el período debe depender suavemente de  $\theta_0^2$ .<sup>12</sup>

*Observación 3.5.7.* El estado  $(\theta, \dot{\theta})$  del péndulo se mueve en curvas cerradas alrededor del punto  $(0, 0)$ , que deben ser curvas de nivel de una función  $e = e(\theta, \dot{\theta})$  que alcanza su valor mínimo en  $(0, 0)$ . En efecto, la derivada temporal de  $e$  en una curva solución es

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial e}{\partial \dot{\theta}} \ddot{\theta} = \frac{\partial e}{\partial \theta} \dot{\theta} - \frac{\partial e}{\partial \dot{\theta}} \frac{|g|}{l} \sin \theta,$$

que se anula si tomamos una  $e$  tal que  $\frac{\partial e}{\partial \theta} = \frac{|g|}{l} \sin \theta$  y  $\frac{\partial e}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta}$ . Por ejemplo, podemos tomar  $e = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{|g|}{l} \cos \theta$ . Multiplicando por  $ml^2$  obtenemos  $E = m \frac{(\dot{\theta})^2}{2} - m|g|l \cos \theta = m \frac{|\dot{r}|^2}{2} - m \langle g, r \rangle$ , que es la energía mecánica, de la cual hablaremos en general más adelante.

### 3.6. Ley de interacción

El hecho observado en los experimentos con dos partículas queda expresado en la ecuación  $f_i = -f_j$ , y recibe el nombre de **ley (débil) de interacción**. Escrita en la forma  $f_i + f_j = 0$ , se extiende de hecho a sistemas de más partículas: la suma  $\sum_{i \in \Gamma} f_i$  de las fuerzas que actúan sobre todas las partículas de un sistema aislado  $\Gamma$  es nula. Este hecho equivale a que la fuerza resultante sobre cada partícula  $i$  se pueda descomponer como

$$f_i = \sum_{j \neq i} f_{i,j},$$

donde  $f_{i,j}$  es la **fuerza de interacción** que  $j$  ejerce sobre  $i$ , y se cumple que  $f_{i,j} = -f_{j,i}$ . Esta descomposición no es única, pero en muchos casos concretos, se puede descomponer de modo que  $f_{i,j}$  dependa solamente del estado de las partícula  $i$  y  $j$ , lo cual muestra que en realidad cada par de partículas interactúa independientemente. Estas fuerzas que se presentan de a pares de vectores opuestos actuando en distintas partículas se denominan **fuerzas de interacción o pares de acción y reacción**.

---

<sup>12</sup>Según la Wikipedia (<http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum>), el período es

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{|g|}} \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \frac{173}{737280} \theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760} \theta_0^8 + \dots \right).$$

Por ejemplo, la **ley de gravitación universal** postulada por Newton afirma que entre cada par de partículas  $i, j$  hay una fuerza atractiva, en la dirección de  $r_{i,j} = x_i - x_j$ , y de intensidad  $\frac{k_g m_i m_j}{|r_{i,j}|^2}$ , donde  $k_g$  es una constante universal, válida para todos los pares de cuerpos.<sup>13</sup> Esto permite explicar con gran precisión el movimiento de los cuerpos del sistema solar. La fuerza predominante sobre cada planeta, asteroide, u otro cuerpo es la de interacción con el Sol, pero también hay fuerzas más débiles<sup>14</sup> de interacción entre los demás cuerpos, que son especialmente notorias entre cada planeta y sus satélites (lunas).

Muchas fuerzas de interacción entre partículas, como la gravitacional y la elástica ya vistas, cumplen la **ley fuerte de interacción**, que requiere que la fuerza con la que  $j$  atrae a  $i$  tenga la dirección del vector  $r_{i,j}$ . Siempre que la fuerza dependa sólo de la configuración de las dos partículas, se puede probar usando simetrías (como en el análisis de campos centrales) que es de la forma  $f_{i,j} = \alpha(|r_{i,j}|) \frac{r_{i,j}}{|r_{i,j}|}$ , con  $\alpha$  escalar. Decimos entonces que se trata de una **fuerza de interacción central**.

*Comentario 3.6.1.* Entre dos partículas con carga eléctrica aparece una **fuerza electrostática**, dada por una fórmula similar a la de la atracción gravitatoria, y una **fuerza magnética** más débil, que depende de la velocidad, y no cumple la ley de interacción, ni respeta el principio de relatividad galileano, pues la fórmula que se obtiene para calcularla en términos de las posiciones y velocidades de las partículas (respecto de un sistema de referencia inercial) da valores distintos al cambiar de sistema de referencia. Esto impide tratarlas satisfactoriamente usando el modelo galileano del mundo. Al pasar al modelo relativista, en el que la simultaneidad no está definida, la acción a distancia instantánea deja de ser posible, y se considera que las partículas interactúan **localmente** con ciertos campos, generando una perturbación que se propaga por el mundo. Sin embargo, fijado un sistema de referencia y conocido el campo electromagnético al que estará sometida una partícula, es posible estudiar su movimiento en el modelo galileano (ver p. 26–29 de [5]).

### 3.7. Cantidad de movimiento y centro de masas

La fuerza efectiva  $f_i = m_i \ddot{x}_i$  que actúa sobre una partícula  $i$  es la velocidad con la que varía la magnitud

$$p_i = m_i \dot{x}_i,$$

---

<sup>13</sup>Newton obtuvo una confirmación de esta ley al explicar el movimiento orbital de la Luna alrededor de la tierra por el mismo mecanismo que hace que los objetos caigan sobre la Tierra.

<sup>14</sup>El planeta Neptuno fue descubierto por anomalías detectadas en la órbita de Urano.

denominada **cantidad de movimiento** de la partícula. La ley de interacción equivale al hecho de que la **cantidad total de movimiento**

$$p_{\text{tot}} = \sum_{i \in \Gamma} p_i$$

de un sistema aislado se mantiene constante. Las ecuaciones de Newton se pueden reescribir nuevamente, en términos de la cantidad de movimiento, como

$$\forall i \quad \dot{p}_i = F_i(t, x, \dot{x}),$$

que es la forma que él les dio originalmente. Definiendo la **cantidad de movimiento del sistema** como  $p = (p_i)_{i \in \Gamma}$ , podemos combinarlas en una ecuación

$$\dot{p} = F(t, x, \dot{x}). \quad (4)$$

La función de fuerzas  $F$  indica cómo las partículas van intercambiando cantidad de movimiento.

Además de la masa del sistema  $m = (m_i)_{i \in \Gamma}$ , podemos definir la **masa total del sistema** como la suma

$$m_{\text{tot}} = \sum_{i \in \Gamma} m_i.$$

Si un sistema de partículas está compuesto por varios **cuerpos** (subsistemas), su masa total es la suma de las masas totales de todos los cuerpos que lo componen. Así, la masa total es una medida positiva (a valores en  $\mathbb{Pkg}$ ), definida en el conjunto de todos los sistemas de partículas que se mueven en  $G$ . La masa provee una forma de promediar posiciones de varias partículas: se define el centro de masas  $x_{\text{cm}}$  de  $\Gamma$  mediante la fórmula

$$m_{\text{tot}} x_{\text{cm}} = \sum_i m_i x_i.$$

La fuerza es aditiva en el siguiente sentido: si combinamos varias partículas formando un cuerpo, y definimos la **fuerza total** que actúa sobre el cuerpo como la rapidez con la que varía su cantidad total de movimiento, la fuerza total será la suma de las fuerzas sobre todas las partículas (pues la cantidad total de movimiento es aditiva). Esto se puede repetir, uniendo cuerpos para formar nuevos cuerpos. La fuerza es una medida (a valores vectoriales) en el conjunto de todos los cuerpos que se mueven en  $G$ . La ley de interacción se cumple para sistemas de varios cuerpos: la suma de las fuerzas que actúan sobre las partes de un sistema aislado (que son los cuerpos que lo componen) es nula.

La cantidad total de movimiento de un cuerpo puede expresarse en términos del movimiento del centro de masas según la fórmula

$$p_{\text{tot}} = m_{\text{tot}} \dot{x}_{\text{cm}},$$

por lo que la fuerza que actúa sobre el cuerpo será igual a

$$f_{\text{tot}} = m_{\text{tot}} \ddot{x}_{\text{cm}}.$$

La ley de interacción equivale, entonces, al hecho de que el centro de masas de un sistema aislado se mueve uniformemente.

El espacio de todas las posibles cantidades totales de movimiento de los sistemas de partículas que se mueven en un mundo galileano  $G$  es un  $\mathbb{P}$ -módulo  $\text{Mov } G = \mathbb{P}\text{kg} \otimes_{\mathbb{P}} \dot{G}$ , que tiene sumas formales de productos entre masas y velocidades. Así como el mundo  $G$  está estratificado por el tiempo, el espacio  $\text{Mov } G$  está estratificado por la masa total: fijada un valor de masa  $m_{\text{tot}} > 0$ , las posibles cantidades de movimiento de un sistema de masa total  $m_{\text{tot}}$  forman un subespacio afín  $\text{Mov}_{m_{\text{tot}}} G$ . La masa total es un  $\mathbb{P}$ -morfismo de  $\text{Mov } G$  a  $\mathbb{P}\text{kg}$ . Las posibles diferencias entre dos cantidades de movimiento de igual masa total  $m$  forman el espacio vectorial  $\text{Imp } G = \Delta(\text{Mov}_{m_{\text{tot}}} G)$  de los **impulsos** en  $G$ , que no depende de  $m_{\text{tot}}$ , y de hecho es igual a  $\mathbb{P}\text{kg} \otimes_{\mathbb{P}} \Delta \dot{G}$ .

### 3.8. Impulso angular y torque

Así como las partículas, al interactuar entre sí, experimentan variaciones en su velocidad, intercambiando cantidad de movimiento (que es el producto entre la masa y la velocidad), se observa que la velocidad areolar de los planetas alrededor del Sol no es constante, sino que entre ellos intercambian una magnitud denominada **impulso angular**, que es el producto de la masa por la velocidad areolar. Más precisamente, si  $o$  es un punto cualquiera que se mueve uniformemente (por ejemplo, el centro de masas del sistema), se define impulso angular de una partícula  $i$  respecto de  $o$  como

$$l_{i,o} = r_{i,o} \wedge p_{i,o}.$$

Su derivada temporal es

$$\dot{l}_{i,o} = r_{i,o} \wedge f_i$$

y recibe el nombre de **torque** o **momento** de la fuerza  $f_i$  respecto del punto  $o$ .

*Observación 3.8.1.* El torque de la fuerza  $f_i$  que actúa sobre una partícula  $i$  depende no sólamente del vector  $f_i$ , sino que también depende de cuál es la recta a lo largo de la cual actúa la fuerza.

El **impulso angular total** del sistema se define como la suma

$$l_o = \sum_{i \in \Gamma} l_{i,o}$$

de los impulsos de todas sus partículas. Es posible probar que esta magnitud se conserva en un sistema aislado, suponiendo que las fuerzas de interacción

entre sus partículas satisfacen la ley fuerte de interacción. En efecto, su derivada temporal es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(l_o) &= \sum_{i \in \Gamma} r_{i,o} \wedge f_i \\ &= \sum_{i,j \in \Gamma, i \neq j} r_{i,o} \wedge f_{i,j},\end{aligned}$$

pero cada término  $r_{i,o} \wedge f_{i,j}$  correspondiente a un par  $(i, j)$  se cancela con el término correspondiente a  $(j, i)$ , pues

$$r_{i,o} \wedge f_{i,j} + r_{j,o} \wedge f_{j,i} = (r_{i,o} - r_{j,o}) \wedge f_{i,j} = r_{i,j} \wedge f_{i,j} = 0.$$

*Observación 3.8.2.* Esta conservación se da aún si agregamos a cada partícula  $i$  una fuerza  $f_{i,o}$  que tenga la dirección de  $r_i - r_o$ . Por ejemplo, el impulso angular total de un sistema de planetas moviéndose cerca de un sol fijo que los atrae se conserva.

### 3.9. Sistemas de referencia no inerciales

Un **sistema de referencia no inercial** o **sistema de referencia acelerado** en  $G$  (de dimensión  $1+n$ ) es una función  $\mathcal{C}^2$  biyectiva  $S : \mathcal{T} \times X \rightarrow G$  (donde  $X$  es un espacio euclídeo de dimensión  $n$ ), que respeta el tiempo y la estructura métrica (de modo que para cada instante  $t$  da una biyección isométrica  $S_t : X \rightarrow G_t$ ), pero no necesariamente respeta la estructura afín de  $G$ . Por ejemplo, como el planeta Tierra es un cuerpo aproximadamente rígido, hay un sistema de referencia no inercial en el que todos los puntos de la Tierra están quietos.

Cuando calculamos la fuerza efectiva sobre una partícula  $i$  en un sistema de referencia no inercial según la fórmula  $\tilde{f}_i = m_i \frac{d^2}{dt^2}(S^{-1}(x_i))$  (medido en el mundo  $\mathcal{T} \times X$ ), obtenemos un vector espacial que difiere de la imagen  $S_t^{-1}(f_i)$  de la fuerza efectiva real  $f_i = m_i \ddot{x}_i$ . La diferencia  $f_{\text{iner}} = \tilde{f}_i - f_i$  es llamada **fuerza inercial** o **fuerza ficticia** sobre  $i$ . Por lo tanto, para poder estudiar el movimiento por medio de la ecuación de Newton, hay que sumar a las fuerzas reales (que provienen de los mecanismos de interacción) las fuerzas ficticias, que en general no tienen un par de interacción (es decir no existe otra partícula en donde esté actuando una fuerza opuesta, satisfaciendo la ley de interacción). La fuerza inercial sobre  $i$  es proporcional a la masa, más precisamente, es el producto entre la masa y una expresión que depende del movimiento de la partícula en relación al sistema de referencia no inercial, y del movimiento del sistema de referencia no inercial en el mundo.

**Ejemplo 3.9.1.** Si un disco rígido gira a velocidad angular constante  $\omega$  (en algún sistema inercial), cada partícula  $j$  del mismo tiene una **aceleración centrípeta** de valor  $\omega^2|r_j|$  (donde  $r_j$  es la posición de  $j$  relativa al centro del disco). Esta aceleración es lograda por fuerzas internas entre las partículas del disco, que aseguran su rigidez. En un sistema fijo al disco, cada partícula  $j$  que lo compone está quieta, y la fuerza (nula) que actúa sobre ella es suma de la **fuerza centrípeta** que ya calculamos, y una **fuerza centrífuga** (ficticia) opuesta.

*Observación 3.9.2.* Para cualquier partícula moviéndose en  $G$  existe un sistema de referencia acelerado  $S$  tal que la imagen de la partícula en  $X$  es un punto fijo. Además, el sistema puede elegirse de modo que la parte lineal de la isometría  $S_t : G_t \rightarrow X$  sea la misma para todos los  $t$ , en cuyo caso se dice que el sistema está **uniformemente acelerado**, y su aceleración en el instante  $t$  es la aceleración del movimiento en  $t$ .

*Comentario 3.9.3.* La fuerza peso es proporcional a la masa de los objetos sobre los que actúa, lo cual lo hace similar a una fuerza ficticia. De hecho, si en una región pequeña del mundo (donde la aceleración de caída de los objetos sea aproximadamente constante) tomamos un sistema uniformemente acelerado con aceleración  $g$  (llamado **sistema en caída libre**), entonces los cuerpos que caen libremente por su peso (según un sistema inercial) se ven moverse uniformemente en el sistema acelerado, lo cual muestra que la fuerza inercial asociada al sistema acelerado está cancelando a la fuerza peso. Según la teoría general de la relatividad, que no trataremos acá, las fuerzas ficticias y las fuerzas peso son, bajo ciertas condiciones, indistinguibles entre sí.

### 3.10. Energía cinética

La masa también permite obtener una magnitud *escalar* que indica cuánto se están moviendo las partículas de un sistema  $\Gamma$ . Pero para eso hace falta definir un sistema de referencia. Si  $\dot{x}_o$  es una velocidad fija (la cual determina un sistema de referencia inercial, y permite asociarle a cada velocidad  $\dot{x}_i$  una vector velocidad relativa  $v_{i,o} = \dot{x}_i - \dot{x}_o$ ), podemos definir en cada instante la **energía cinética** (o **energía de movimiento**) de  $\Gamma$  (respecto de  $\dot{x}_o$ ) como

$$K_o = \sum_{i \in \Gamma} m_i \frac{|\dot{v}_{i,o}|^2}{2}.$$

*Comentario 3.10.1.* Parece inevitable que la noción de energía cinética dependa de un sistema de referencia. Como la velocidad  $\dot{x}_i$  de una partícula es un vector espaciotemporal, no podemos medir su norma, pues sólo tienen norma los vectores espaciales. En la teoría relativista, hay una norma para vectores espaciotemporales, cuyo cálculo depende de la posibilidad de determinar a cuántos metros de distancia equivale un segundo de tiempo.

*Observación 3.10.2.* Sin embargo, cuando la cantidad total de movimiento de un sistema se conserva (por ejemplo, porque el sistema es aislado), la variación de la energía cinética entre dos instantes es independiente del sistema de referencia. En efecto, si  $\dot{x}_{o'}$  es otra velocidad, tenemos

$$\begin{aligned} K_{o'} &= \sum_{i \in \Gamma} m_i \frac{|v_{i,o'}|^2}{2} \\ &= \sum_{i \in \Gamma} m_i \frac{|(v_{i,o}) + (v_{o,o'})|^2}{2} \\ &= \sum_{i \in \Gamma} m_i \frac{|v_{i,o}|^2}{2} + \sum_{i \in \Gamma} m_i \langle v_{i,o}, v_{o,o'} \rangle + \sum_{i \in \Gamma} m_i \frac{|v_{o,o'}|^2}{2} \\ &= K_o + m_{\text{tot}} \langle v_{\text{cm},o}, v_{o,o'} \rangle + m_{\text{tot}} \frac{|v_{o,o'}|^2}{2}, \end{aligned}$$

y siendo los dos últimos términos constantes, la variación de  $K_{o'}$  será igual a la de  $K_o$ . Si la cantidad total de movimiento no se conserva, es porque hay alguna asimetría, que en algunos casos permite elegir el sistema de referencia según el cual calcular la energía cinética.

### 3.11. Sistemas conservativos, trabajo y energía

(En esta sección consideremos una velocidad  $\dot{x}_o$  de referencia fija, y denotamos  $K$  a la energía cinética del sistema  $\Gamma$  respecto de esa velocidad de referencia, y  $v_i = \dot{x}_i - \dot{x}_o$  las velocidades relativas de las partículas. El sistema de referencia permite identificar configuraciones en distintos instantes.)

En muchos sistemas físicos ideales, como el oscilador elástico, el péndulo, y el movimiento de los planetas, se observa que la energía cinética que tiene el sistema cada vez que pasa por una misma configuración es la misma. Un sistema así se dice **conservativo**.

La rapidez con la que varía la energía cinética es

$$\dot{K} = \sum_{i \in \Gamma} m_i \langle \ddot{x}_i, v_i \rangle = \sum_{i \in \Gamma} \langle f_i, v_i \rangle,$$

por lo que su variación entre  $t_0$  y  $t_1$  es igual a

$$K_1 - K_0 = \sum_{i \in \Gamma} \int_{t_0}^{t_1} \langle f_i, v_i \rangle dt.$$

Denominando **trabajo** de la fuerza  $f_i$  entre  $t_0$  y  $t_1$  a la integral  $\int_{t_0}^{t_1} \langle f_i, v_i \rangle dt$ , resulta que la variación (entre dos instantes) de la energía cinética del sistema es igual a la suma de los trabajos (entre los mismos instantes) de las fuerzas que actúan sobre sus partículas. El trabajo de una suma de fuerzas que

actúa sobre un misma partícula es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas individuales, y en general se define el trabajo de una fuerza aplicada al sistema (es decir, una  $\Gamma$ -upla de fuerzas, una aplicada a cada partícula) como la suma de los trabajos de las fuerzas individuales.

Para que un sistema sea conservativo, la fuerza resultante que actúa sobre el sistema debe ser tal que su trabajo entre dos instantes dependa sólo de la configuración inicial y final, y es independiente del movimiento del sistema entre dichos instantes. Una fuerza con esta propiedad se dice **conservativa**. Por ejemplo, las fuerzas gravitatorias, elásticas y electrostáticas son conservativas.

Cuando una fuerza que actúa sobre un sistema es conservativa, se puede definir una función  $-V = -V(t, x)$ , llamada **función de trabajo**, tal que el trabajo de dicha fuerza entre una configuración y otra sea igual a la variación de  $-V$ . Cuando todas las fuerzas son conservativas, se observa que la **energía mecánica**

$$E = K + V$$

se conserva en cualquier movimiento del sistema, y la magnitud  $V$  recibe el nombre de **energía potencial**, por la posibilidad que tiene de transformarse en energía de movimiento. La conservación de la energía permite, a partir de la energía  $E_0$  del estado inicial de un movimiento, calcular cuánta energía cinética tendrá el movimiento cuando pase por cada configuración, lo cual restringe las posibles soluciones a la ecuación de movimiento (más precisamente, para cada curva en el espacio de configuraciones (formada por puntos donde  $V < E_0$ ) queda determinada una única parametrización posible, pues la norma de la velocidad está determinada por la energía cinética).

Para que una fuerza  $f$  que no depende de la velocidad<sup>15</sup> sea conservativa, debe no depender del tiempo (pues el trabajo en un movimiento rápido seguido de una espera debe ser igual al trabajo en la misma espera seguida del mismo movimiento rápido). Esto implica que la función de trabajo  $-V$  tampoco depende del tiempo. Además, calculando el diferencial de trabajo de  $f = (f_i)_{i \in \Gamma}$  en un movimiento cualquiera como

$$d(-V) = \sum_{i \in \Gamma} \langle f_i, v_i \rangle dt = \sum_{i \in \Gamma} \langle f_i, dx_i \rangle,$$

notamos que la fuerza  $f$  es el gradiente de  $-V$ , es decir, se tiene

$$\langle f_i, - \rangle = - \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Recíprocamente, cualquier función que sea gradiente de una función  $-V = -V(x)$  es conservativa.

---

<sup>15</sup> Esta hipótesis es necesaria, pues por ejemplo la fuerza magnética, que depende de la velocidad, nunca realiza trabajo, y sin embargo el razonamiento que sigue no se le aplica.

Un campo central es necesariamente conservativo, pues es el gradiente de una función que depende de la distancia al centro. En particular, la fuerza elástica  $-kr$  producida por un resorte de constante  $k$  que conecta una partícula con un soporte fijo es el gradiente de la función  $-V = -\frac{k}{2}|r_i|^2$ , y una fuerza gravitacional  $-\frac{k}{|r|^3}r$  es el gradiente de la función  $-V = \frac{k}{|r|}$ . En general, todo par de fuerzas de interacción central, de la forma  $f_{i,j} = -f_{j,i} = \alpha(|r_{i,j}|) \frac{r_{i,j}}{|r_{i,j}|}$  (con  $\alpha$  escalar), es el gradiente de una función  $-V(|r_{i,j}|)$  dada por  $-V = \int \alpha(\rho)d\rho$ , y por lo tanto, es conservativa.

**Ejemplos 3.11.1.** En un oscilador armónico simple (como el del ejemplo 3.1.6), se conserva la energía

$$E = m\frac{|\dot{r}|^2}{2} + k\frac{|r|^2}{2}.$$

En un péndulo (como el del ejemplo 3.5.3) se conserva la energía

$$E = m\frac{|\dot{r}|^2}{2} - m\langle g, r \rangle.$$

Esta fórmula también vale en el caso del **péndulo cicloidal** ideado por Huygens, en el que la partícula es restringida a moverse en una curva que no es un círculo, sino una cicloide (y de hecho, la fórmula se aplica a cualquier curva regular).

En el caso de un planeta moviéndose alrededor del Sol, se conserva la energía

$$E = m\frac{|\dot{r}|^2}{2} - m\frac{k}{|r|}.$$

*Comentario 3.11.2.* A veces una fuerza no es conservativa, pero sí es gradiente de una función  $-V(t, x)$ . Se dice que la fuerza **deriva de un potencial (dependiente del tiempo)**. Por ejemplo si estudiamos el movimiento de una partícula  $a$  unida por un resorte a otra partícula  $b$  cuyo movimiento  $x_b = x_b(t)$  ya está determinado, la fuerza elástica a la que está sometida  $a$  será  $f_{a,b} = -k(x_a - x_b)$ , que es el gradiente de  $-V(t, x_a) = -k|x_a - x_b|^2$ , que depende del tiempo. Nótese que si agregamos la partícula  $b$  al sistema, entonces también estamos incluyendo la fuerza  $f_{b,a}$ , y el par de fuerzas elásticas pasa a ser conservativo. Pero la otra fuerza que está moviendo a  $b$  probablemente no lo sea.

*Observación 3.11.3.* Ya vimos que el valor de la energía cinética depende del sistema de referencia que estemos usando, y sólo se puede definir naturalmente su variación entre dos estados (si el sistema es aislado). Similarmente, la energía potencial (y por lo tanto, la energía mecánica), están definidas a menos de una constante aditiva, lo que significa que no son funciones definidas naturalmente en el mundo de estados, sino que se aplican a pares de estados. La información que nos proporciona la energía no está en su valor absoluto, sino en su variación.

*Comentario 3.11.4.* En general, la variación de la energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas que no están incluidas en el cálculo de  $-V$ , y se considera que la energía mecánica faltante se convirtió en **energía no mecánica**, que suelen hallarse en forma de energía mecánica fuera del sistema, energía térmica, energía electromagnética, etc.. En particular, se sabe que la energía térmica está asociada al movimiento de partículas muy pequeñas que componen la materia. Las fuerzas fundamentales son conservativas, y la no conservación de la energía mecánica es evidencia de que estamos haciendo un análisis incompleto, sea porque el sistema que estamos estudiando no es aislado, o porque las variables que estamos analizando no describen completamente el estado del sistema (por ejemplo, al no incluir la temperatura de las partes, que cuantifica el movimiento a nivel molecular).

## 4. Dinámica en variedades riemannianas: mecánica de Lagrange

La mecánica analítica de Lagrange permite estudiar sistemáticamente el movimiento de un sistema  $\Gamma$  de partículas en un mundo galileano  $G$ , cuando éste se halla restringido a un submundo  $M$  de  $G^\Gamma$ . El método consiste en parametrizar  $M$  con la cantidad adecuada de variables, y escribir ecuaciones de movimiento que describan la evolución de esas variables.

### 4.1. Vectores y covectores en mecánica

Antes de desarrollar la mecánica de Lagrange, vamos a revisar algunos aspectos formales de la mecánica de Newton.

Cuando una partícula  $i$  se mueve en un mundo galileano  $G$ , una fuerza  $F_i$  que actúa sobre la misma es tradicionalmente considerada un vector, pero el hecho de que a veces es el gradiente de una función  $-V(t, x)$  (es decir, se tiene  $\langle F_i, - \rangle = \frac{\partial V}{\partial x}$ ) sugiere que quizás sea más sencillo pensar a la fuerza en términos del covector  $(F_i)_\beta = \langle F_i, - \rangle$ . ¿Cómo se reconcilia esto con la ecuación de Newton  $\dot{p}_i = F_i$ ? Aplicando el producto interno a la ecuación de Newton, obtenemos

$$\langle \dot{p}_i, - \rangle = (F_i)_\beta,$$

por lo que también podemos pensar a la fuerza efectiva  $f_i = \dot{p}_i$  como un covector  $(f_i)_\beta = \langle f_i, - \rangle = m_i \langle \ddot{x}_i, - \rangle$ . Definiendo un nuevo producto interno  $g_i = m_i \langle -, - \rangle$ , la ecuación de Newton queda en la forma  $g_i(\ddot{x}_i, -) = (F_i)_\beta$ . En adelante, escribiremos a las fuerzas con superíndice para indicar que están en forma vectorial y con subíndice para indicar que están en forma covectorial. En caso de hablar de **fuerza** sin aclarar ni escribir un índice, se debe entender que *por defecto hablamos de un covector*.

En el caso de un sistema  $\Gamma$  de partículas  $i$  que se mueven en el mismo mundo galileano  $G$ , la fuerza resultante  $F = (F_i)_i$  será una  $\Gamma$ -upla de covectores (es decir, un covector de  $G^\Gamma$ ), y la ecuación de Newton se escribirá en la forma

$$g(\ddot{x}, -) = F(t, x, \dot{x})$$

donde  $g = \sum_{i \in \Gamma} g_i = \sum_{i \in \Gamma} m_i \langle -, - \rangle_G$ . Podemos definir entonces la fuerza efectiva  $f = g(\ddot{x}, -)$ , que es igual a  $m \langle \ddot{x}, - \rangle$ , si  $m$  es la masa del sistema, que acá opera multiplicando la componente  $i$ -ésima  $\langle \ddot{x}_i, - \rangle_G$  del covector  $\langle \ddot{x}, - \rangle$  por la correspondiente masa  $m_i$ . El espacio  $G^\Gamma$  puede entonces considerarse un espacio galileano en el que se mueve la configuración del sistema, pero la masa  $m$  de la configuración no es un escalar, sino un operador más complicado.

Usando índices abstractos, la ecuación de Newton se escribe como

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\alpha = F_\beta.$$

## 4.2. Sistemas restringidos por fuerzas de vínculo

A veces, sobre un sistema  $\Gamma$  de partículas que se mueven en un mundo galileano  $G$ , actúan **fuerzas de vínculo** que obligan al sistema a moverse bajo cierta **restricción (holónoma)** conocida, es decir, a moverse en un mundo de configuraciones  $M \subseteq G^\Gamma$ . Por ejemplo, una barra rígida de longitud  $l$  que une dos partículas  $a$  y  $b$  restringe el movimiento del sistema de dos partículas a configuraciones en las que  $|x_a - x_b| = l$ .

*Comentario 4.2.1.* Las fuerzas de vínculo a veces provienen en la práctica de un potencial definido en  $G^\Gamma$ , que crece mucho al alejarse levemente de  $M$ , lo-grando que los movimientos (de energía suficientemente baja) se mantengan aproximadamente restringidos a  $M$ .

*Comentario 4.2.2.* También existen restricciones de la forma  $U(t, x) \geq q$ , y restricciones **anholónomas** que involucran a  $\dot{x}$ , que no trataremos aquí porque la vida es corta. Por ejemplo, una esfera que rueda sin deslizar sobre un plano está sujeta a una **restricción diferencial** dada por una ecuación  $\dot{x} \in S(t, x)$ , donde  $S(t, x)$  es un submundo de  $\Delta G$ . Para estudiar esta clase de vínculos, ver p. 451–455 de [11].

Decimos que la fuerza de vínculo es **ideal** o **pura** cuando su valor es tal que hace trabajo nulo en cualquier **desplazamiento virtual** del sistema (que es un desplazamiento instantáneo compatible con las restricciones, es decir, una curva en  $M_t$ ). Por ejemplo, la cuerda del péndulo en el ejemplo 3.5.3 es un vínculo ideal, pues la tensión de la cuerda es perpendicular al movimiento (y esto también vale si se le da una velocidad inicial no nula, en cuyo caso el movimiento queda restringido a una esfera, en vez de a un círculo). El par de fuerzas de contacto entre dos cuerpos que no deslizan entre sí es un vínculo ideal. Nótese que en general, un par de fuerzas de interacción es ideal sin que cada una de ellas lo sea. Por ejemplo, el par de fuerzas de contacto entre un ascensor y su carga es ideal, pues se trata de dos fuerzas opuestas aplicadas a objetos que se mueven a la misma velocidad.

El par de fuerzas internas entre dos partículas  $i, j$  de un cuerpo rígido, que obliga a mantener las distancia entre ellas constante, es una fuerza de vínculo ideal (lo cual se puede demostrar suponiendo que cumple la ley fuerte de interacción, y esto a su vez queda evidenciado por la conservación del impulso angular).

*Observación 4.2.3.* Si bien la definición de vínculo ideal menciona al trabajo, se trata de un trabajo a tiempo constante, por lo cual no hace falta un sistema de referencia para definirlo.

Cuando una fuerza de vínculo no es ideal, se la puede descomponer en una parte ideal y otra no ideal. Por ejemplo, la fuerza de contacto entre una superficie y una partícula que desliza sobre ella se descompone en una componente ideal que es perpendicular a la superficie y una componente no ideal tangencial (que incluye al rozamiento, si existiera). Por lo tanto, en adelante vamos a suponer que todos los vínculos son ideales. Además supondremos que la fuerza de vínculo puede tomar cualquier valor (ideal) que haga falta para restringir el movimiento del sistema al mundo  $M$ . El significado preciso de esta última afirmación quedará claro más adelante, cuando expliquemos cómo se define la función de fuerza de la cual proviene la fuerza de vínculo.

A las fuerzas que actúan sobre el sistema y no estamos considerando como fuerzas de vínculo las llamaremos **fuerzas aplicadas**. La ventaja de identificar y apartar fuerzas de vínculo ideales es que más adelante podremos ignorarlas, y estudiar el movimiento restringido del sistema a partir de las fuerzas aplicadas.

### 4.3. Cinemática de sistemas restringidos

Un **mundo de configuraciones** (de dimensión  $1 + n$ ) es un fibrado suave, de variedades suaves (de dimensión  $n$ ), sobre  $\mathcal{T}$ . Es decir, es un par  $(M, \mathbf{t}_M)$ , donde  $M$  es una variedad suave (de dimensión  $1+n$ ) y  $\mathbf{t}_M : M \rightarrow \mathcal{T}$  es una función regular. Un **movimiento** en  $M$  es una sección de  $\mathbf{t}_M$ . Un morfismo de mundos de configuración es una función suave  $F : M \rightarrow N$  que respeta el tiempo, es decir, tal que  $\mathbf{t}_N \circ F = \mathbf{t}_M$ . Cuando  $\dim N \leq \dim M$ , se dice que  $F$  es **regular** en un punto  $(t, x)$  de  $M$  cuando la función  $F$  es regular en dicho punto, y además el  $\text{Ker } d_{(t,x)}F$  no está contenido en el  $\text{Ker } d_{(t,x)}\mathbf{t}_M$ . O equivalente,  $\mathbf{t}_M \times F$  es regular en  $(t, x)$ .

Por ejemplo,  $G^\Gamma$  es un mundo de configuraciones, y dado un morfismo  $F : G^\Gamma \rightarrow N$  y un movimiento  $c$  en  $N$ , el conjunto  $M = \{(t, x) \in G^\Gamma : F(t, x) = c(t)\}$  es un submundo de configuraciones de  $G^\Gamma$  (si  $F$  es regular en  $M$ ). Los mundos que nos interesan son de este tipo.

En cada punto  $(t, x)$  de un mundo de configuraciones  $M$  se pueden definir, como en un mundo galileano, el espacio vectorial  $\text{Spa } \text{Vec}_{(t,x)} M = \text{Ker}(d_{(t,x)}\mathbf{t}_M) = T_x M_t$  de vectores tangentes espaciales, el espacio afín  $\dot{M}_{(t,x)}$  de velocidades (secciones de  $d_{(t,x)}\mathbf{t}_M$ ) y el espacio vectorial  $\Delta \dot{M}_{(t,x)} = (\mathbb{R}s)^* \otimes_{\mathbb{R}} \text{Spa } \text{Vec}_{(t,x)} M$  de velocidades relativas. A los vectores tangentes espaciales también se los llama **desplazamientos virtuales infinitesimales**. Un morfismo  $F : M \rightarrow N$  que manda  $(t, x)$  a  $(t, y)$  convierte movimientos en  $M$  en movimientos en  $N$ , y transforma las velocidades según la fórmula  $\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha$ , estableciendo un morfismo  $\dot{F} : \dot{M} \rightarrow \dot{N}$ .

La aceleración de un movimiento en  $M$  no se puede definir como un vector

espacial sin recurrir a la estructura afín y métrica de un mundo galileano  $G$  que contenga a  $M$ . Para calcular la aceleración de un movimiento en  $M$ , hay que medir su aceleración en  $G$  (usando la estructura afín de  $G$ ), y proyectar el vector  $\ddot{x} \in \tilde{G}$  obtenido (que tiene dirección espacial) ortogonalmente sobre  $\ddot{M} = \mathbb{R}(\text{s}^{-2}) \otimes_R T_x M_t \subseteq \tilde{G}$ , usando la métrica de  $G_t$ .

#### 4.4. Dinámica de sistemas restringidos: principio de D'Alembert

<sup>16</sup> Consideremos un sistema restringido a un mundo de configuraciones  $M \subseteq G$  (donde  $G$  es un producto de mundos galileanos), con fuerza resultante  $F_G = F_M + F_{G/M}$ , donde  $F_M$  es la fuerza aplicada y  $F_{G/M}$  es la fuerza de vínculo, ambas dependiendo del estado  $(t, x, \dot{x})$  (y en forma covectorial). El movimiento que va a tener el sistema está determinado por la ecuación de Newton  $g(\ddot{x}, -) = F_G$ . Se ve entonces que el covector  $g(\ddot{x}, -) - F_G$  debe ser nulo, en particular, es nula su restricción  $T_x M_t$ . O para decirlo de la forma tradicional, la fuerza  $g(\ddot{x}, -) - F_G$  realiza trabajo nulo en cualquier desplazamiento virtual. Pero las fuerzas de vínculo de por sí realizan trabajo nulo, por lo cual no aportan nada a esta ecuación. Entonces la fuerza  $g(\ddot{x}, -) - F_M$  no realiza trabajo en ningún desplazamiento virtual.

Esta ecuación

$$(g(\ddot{x}, -) - F_M)|_{T_x M_t} = 0$$

es conocida como **principio (o ecuación) de D'Alembert**, y determina un único movimiento posible del sistema (que no se sale de  $M$ ), como calcularemos próximamente.

En efecto, sea  $X : U \rightarrow M$  una parametrización local de  $M$ , con  $U \subseteq \mathcal{T} \times Q$  abierto y  $Q$  espacio afín formado por puntos  $q$ . Esto permite escribir la configuración  $x$  en función de  $(t, q)$ , según la ecuación  $x = X(t, q)$ , y da una biyección entre los estados  $(t, q, \dot{q})$  de los movimientos en  $U$  y los estados  $(t, x, \dot{x})$  de los movimientos en el conjunto  $X(U)$  abierto de  $M$ . Al hacer esto, el símbolo  $x$ , que representaba un punto indeterminado e independiente en  $G_t$ , se vuelve un poco menos indeterminado (pues queda restringido a  $M$ ) y más dependiente (porque  $x = x(t, q)$ ). El símbolo  $\dot{x}$  es ahora una velocidad indeterminada de un movimiento en  $M$ , y se tiene  $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q}$ , donde  $\frac{\partial x}{\partial t}$  y  $\frac{\partial x}{\partial q}$  son transformaciones lineales (que dependen de  $(t, q)$ ). Lo mismo pasa con  $\ddot{x}$ . En fin. La ecuación de D'Alembert dice que el covector

$$g_{\alpha, \beta} \ddot{x}^\alpha - F_\beta$$

es nulo en  $T_x M_t$ , es decir, el covector

$$(g_{\alpha, \beta} \ddot{x}^\alpha - F_\beta) \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\nu}$$

---

<sup>16</sup> L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X issue: “I'm happy but D'Alembert is not”. Workaround: “D'{}Alembert”.

es nulo (en  $\Delta Q$ ), o lo que es lo mismo,

$$g_{\alpha,\beta} \ddot{x}^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\nu} = F_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\nu}. \quad (5)$$

(La operación  $(\dot{-})$  de derivada total respecto del tiempo  $t$  debe hacerse en una curva solución  $q = c(t)$ ). Ahora, como  $\dot{x}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu$ , tenemos

$$\ddot{x}^\alpha = \left( \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial q^\mu} \right) \dot{q}^\mu + \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\mu} \ddot{q}^\mu,$$

que podemos reemplazar en la ecuación de D'Alembert, obteniendo

$$g_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\nu} \ddot{q}^\mu = F_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\nu} - g_{\alpha,\beta} \left( \left( \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial q^\mu} \right) \dot{q}^\mu \right) \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\nu}.$$

Definiendo el producto interno  $h_{\mu,\nu} = g_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\nu}$ , notamos que la ecuación queda en la forma

$$h_{\mu,\nu} \ddot{q}^\mu = H_\nu,$$

donde  $H = H(t, q, \dot{q})$  es un covector de  $Q$ . Por lo tanto, quedó una ecuación de Newton en  $U$ , que es determinista porque se puede invertir  $h_{\mu,\nu}$  para obtener una ecuación explícita de orden 2 (aunque  $U$  no es un espacio galileano tradicional, pues el producto interno  $h = h(t, q)$  no es constante).<sup>17</sup>

*Comentario 4.4.1.* Más adelante vamos a escribir la ecuación de Lagrange, que es más fácil de usar, y también permite resolver la ecuación de D'Alembert.

El razonamiento anterior parte de la restricción  $M$  y la fuerza aplicada (que es la única que importa en la ecuación de D'Alembert) y logra escribir  $\ddot{x}$  en función del estado  $(t, x, \dot{x})$  (que debe ser un estado de movimiento en  $M$ , es decir,  $(t, x)$  debe estar en  $M$  y  $\dot{x}$  debe estar contenido en  $T_{(t,x)}M$ ). En un movimiento solución, se ve que el covector  $g(\ddot{x}, -) - F_M$ , que no realiza trabajo en ningún desplazamiento virtual, es un posible valor de la fuerza de vínculo. Este procedimiento determina la fuerza de vínculo  $F_{G/M} = g(\ddot{x}, -) - F_M$  en cualquier estado de movimiento  $(t, x, \dot{x})$  en  $M$ , lo cual muestra que

---

<sup>17</sup>El autor no sabe cómo definir un mundo de configuraciones abstracto que incluya la posibilidad de calcular aceleraciones. Es una variedad riemanniana que cambia al transcurrir el tiempo, pero esta estructura no es suficiente para calcular la aceleración de una curva, como lo demuestran los sistemas no inerciales (en los que la variedad riemanniana es siempre la misma (el espacio euclídeo)) pero la aceleración no se calcula simplemente derivando dos veces). La definición debería abarcar a los espacios  $\mathcal{T} \times R$ , con  $R$  variedad riemanniana, en cuyo caso se puede calcular la aceleración usando la conexión de Levi-Civita. En un mundo de este tipo se podría aplicar una fuerza (campo de covectores) y estudiar la ecuación de D'Alembert, interpretada como una ecuación de Newton en un espacio curvado.

está dada por una función de fuerzas, como debe ser. Agrupando las funciones de fuerza de un lado, vemos que el movimiento calculado cumple la ecuación de Newton  $g(\ddot{x}, -) = F_M + F_{G/M}$ . Por lo tanto, la ecuación de D'Alembert equivale, para movimientos restringidos, a la ley de Newton (tiene a los mismos movimientos en  $M$  como soluciones).

*Observación 4.4.2.* La función  $F_{G/M}$  se construye a partir de la función  $F_M$  (restringida a  $M$ ).

Se puede ver cómo funciona la restricción en un ejemplo concreto:

**Ejemplo 4.4.3.** Sea  $S$  una superficie en un espacio euclídeo  $X$  de dimensión 3. Consideremos una partícula que se mueve en  $\mathcal{T} \times S$ , por la acción de una fuerza de vínculo ideal, es decir, perpendicular a la superficie. Esto significa que la componente tangencial de la aceleración de la partícula es nula. Por otra parte, la componente de la aceleración que es normal a la superficie está determinada en cada instante por la velocidad del movimiento en dicha dirección y la curvatura normal de la superficie en el espacio (teorema de Meusnier, ver p. 149 de [3]). Por lo tanto, la aceleración se puede escribir en función de la posición y velocidad, quedando determinado el movimiento.

#### 4.5. Estática: Principio de los trabajos virtuales

Antes de estudiarse la dinámica de sistemas restringidos, se conocía la versión de la ecuación de D'Alembert para el caso estático. Consideremos un sistema con mundo de configuraciones  $M \subseteq \mathcal{T} \times X$  constante en el tiempo, y una fuerza aplicada que no depende del tiempo ni de la velocidad. Según el **principio de los trabajos virtuales**, las configuraciones de equilibrio son aquellas en las que el valor de la fuerza aplicada es tal que no realiza trabajo en ningún desplazamiento virtual infinitesimal. En el caso de fuerzas que provienen de un potencial, los puntos de equilibrio son aquellos donde el potencial es estacionario, y eso incluye a todos los puntos en donde es máximo o mínimo. Por ejemplo, en una montaña rusa, las posiciones de equilibrio son los puntos en donde la recta tangente es horizontal, que son los lugares en donde la fuerza gravitatoria no hace trabajo, porque la energía potencial gravitacional es estacionaria.

Los problemas de estática que involucran sistemas de infinitas partículas, y en los cuales la fuerza proviene de un potencial, conducen a problemas clásicos del cálculo de variaciones, cuya teoría no desarrollaremos por ahora, sino que nos limitaremos a hacer cálculos ingenuos en algún ejemplo.

**Ejemplo 4.5.1.** Consideremos un resorte masivo de longitud inicial nula, con constante elástica  $k$  y masa  $m$ , sujeto en sus extremos a dos puntos  $A$  y  $B$  fijos en un espacio euclídeo  $X$ , en el que hay un campo gravitatorio uniforme  $g$ . Su espacio de configuraciones es el conjunto de curvas  $r = c(s)$

definidas para  $s \in [0, 1]$ , dos veces diferenciables, con  $c(0) = A$  y  $c(1) = B$ . La energía potencial  $E = E(c)$  de una configuración es

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{elástica}} + E_{\text{gravitacional}} \\ &= \int_0^1 k \frac{|x'|^2}{2} ds - \int_0^1 m \langle g, x \rangle ds \\ &= \int_0^1 \left( k \frac{\langle x', x' \rangle}{2} - m \langle g, x \rangle \right) ds, \end{aligned}$$

donde la  $(-)'$  denota derivada respecto de  $s$ . Esto está mal definido porque como  $x$  no es un vector sino un punto, no se lo puede multiplicar escalarmente contra  $g$ . Pero sí está bien definida su variación

$$\delta E = \int_0^1 (k \langle x', \delta x' \rangle - m \langle g, \delta x \rangle) ds$$

en una perturbación arbitraria  $\delta x = (\delta c)(s)$  de la curva. Si pudiéramos sacar a  $\delta x$  de factor común en el integrando, tendríamos que concluir que el otro factor es una función nula, pues el producto de esa función por una función arbitraria integra cero. Como las perturbaciones de  $x$  y de  $x'$  no son independientes, sino que  $\delta(x') = (\delta x)'$ , para poder sacar  $\delta x$  de factor común en el integrando, debemos integrar por partes el primer término (suponiendo que la curva es dos veces diferenciable), obteniendo

$$\begin{aligned} \delta E &= \int_0^1 (k \langle x', \delta x \rangle)' ds \\ &= \int_0^1 (k \langle x'', \delta x \rangle + m \langle g, \delta x \rangle) ds \\ &= [k \langle x', \delta x \rangle]_{s=0}^{s=1} - \int_0^1 \langle kx'' + mg, \delta x \rangle ds. \end{aligned}$$

El primer término es nulo, y en el segundo, el factor  $kx'' + mg$  debe ser nulo, por lo que la configuración de equilibrio será una parábola con  $x'' = -\frac{m}{k}g$ . Nótese que si  $g = 0$ , la curva que queda es una recta, que es el camino más corto posible entre  $a$  y  $b$ . Un problema clásico relacionado es el de la **catenaria**, en el que se sustituye el resorte por una cuerda de masa  $m$  y longitud  $l$ , que puede pensarse como un resorte con longitud inicial no nula y constante elástica infinita.

#### 4.6. Cálculo de variaciones

Un problema clásico del cálculo de variaciones es el de descubrir la forma que debe tener un tobogán (sin fricción) que une dos puntos predeterminados para que el descenso a lo largo del mismo sea el más rápido posible. Esta curva

se llama **braquistócrona**. El desafío fue planteado por JOHANN BERNOULLI a sus contemporáneos en 1696, y resuelto por varios de ellos. Para enfrentarlo, desarrollaremos a continuación el método usado en el ejemplo 4.5.1, que permite en general traducir un problema de cálculo de variaciones a una ecuación diferencial. Esta técnica es más relevante para la mecánica de lo que puede parecer en este momento.

#### 4.6.1. Problemas variacionales

Consideremos un **sistema lagrangiano**  $(M, L)$ , es decir, un mundo  $M$  junto con una **función lagrangiana** (dos veces derivable)  $L = L(t, q, \dot{q})$ , que para cada instante, posición y velocidad en  $M$  da un valor escalar, en una recta afín  $A$ . Sea  $E$  el espacio de los movimientos  $C = C(t)$  que van de cierta configuración inicial  $(t_0, q_0)$  a cierta configuración final  $(t_1, q_1)$ . Consideremos el funcional de **acción**  $I$  definido en  $E$ , que a cada movimiento  $C = C(t)$  le asigna el valor escalar

$$I(C) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, C, \dot{C}) dt.$$

(Esta integral está mal definida porque  $L$  toma valores en una recta afín, no vectorial. Pero en realidad nos interesa la variación de  $I$  entre distintas curvas, que sí se puede definir, y toma valores en  $\mathbb{R}$ s  $\times \Delta A$ .)

Queremos hallar los movimientos  $C$  donde el valor de  $I$  es **estacionario** al variar la curva, a primer orden en la variación  $\delta C$ . Una forma de precisar esto parte de considerar variaciones uniparamétricas del movimiento. Una **variación uniparamétrica** de  $C$  es una curva  $F$  de elementos de  $E$ , definida en un entorno de 0, y tal que  $F(0) = C$ .

#### 4.6.2. Nota sobre espacios de curvas

Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  espacios topológicos y  $x \in X$  y  $y \in Y$  puntos indeterminados. Cuando decimos que una función  $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$  es continua, eso equivale a afirmar que la correspondiente función de dos variables  $F(x)(y) : X \times Y \mapsto Z$  resulta continua.

Si los espacios son afines normados y  $F : X \rightarrow \mathcal{C}^1(Y, Z)$ , decimos que  $F$  es continua, o que  $F(x)$  depende continuamente de  $x$  como elemento de  $\mathcal{C}^1(Y, Z)$  cuando  $F(x)$  depende continuamente de  $x$  (como elemento de  $\mathcal{C}(Y, Z)$  y su derivada (respecto de  $y$ ) depende continuamente de  $x$  (como elemento de  $\mathcal{C}(Y, L(\Delta Y, \Delta Z))$ , o lo que es lo mismo, la derivada parcial de  $F(x)(y)$  respecto de  $y$  está en  $\mathcal{C}(X \times Y, L(\Delta Y, \Delta Z))$ .

También tiene sentido preguntarse si una  $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$  es diferenciable. En un punto  $x_0 \in X$ , el diferencial  $d_{x_0}F$  debe ser una función (continua)

que para cada valor  $y_0 \in Y$  nos dé la diferencial de  $F(x)(y_0)$  en  $x = x_0$ , que es un elemento de  $L(\Delta X, \Delta Z)$ . Por lo tanto,  $d_{x_0}F \in \mathcal{C}(Y, L(\Delta X, \Delta Z))$ . Cuando decimos que  $F$  es derivable, queremos decir que hay una función continua  $F' : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, L(\Delta X, \Delta Z))$  que en cada  $x_0$  nos da  $d_{x_0}F$ . Es decir,  $F' \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, L(\Delta X, \Delta Z))) \cong \mathcal{C}(X \times Y, L(\Delta X, \Delta Y))$ . Entonces  $F$  es derivable cuando  $F(x)(y)$  tiene derivada parcial (continua) respecto de  $x$ .

*Observación 4.6.1.* Los dos párrafos anteriores prueban que

$$\mathcal{C}^1(X \times Y, Z) = \mathcal{C}^1(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \cap \mathcal{C}(X, \mathcal{C}^1(Y, Z)).$$

Curiosamente,  $\mathcal{C}^1(X, \mathcal{C}^1(Y, Z)) \cong \mathcal{C}^1(Y, \mathcal{C}^1(X, Z))$ , pues una función  $F = F(x, y)$  del primer espacio tiene  $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$  y  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$  continuas, y esto permite probar fácilmente que  $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$  es igual a  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$  (y por lo tanto, también continua).

#### 4.6.3. Ecuación de Euler-Lagrange

Volvamos al cálculo de variaciones. Diremos que  $I$  es **estacionario** en  $C$ , o que  $C$  es movimiento **extremal** de  $I$ , cuando  $\frac{dI(F(s))}{ds}|_{s=0} = 0$  para cualquier  $F$  variación diferenciable de  $C$ . (Notar que  $F$  es una curva diferenciable de curvas diferenciables). Calculemos esta derivada. Sea  $F = F(s, t)$  una variación de  $C$ . Como

$$I(F) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, F, \dot{F}) dt$$

(que es una  $s$ -función), podemos calcular

$$\frac{d(I(F))}{ds} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} (t, F, \dot{F}) \frac{\partial F^\alpha}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, F, \dot{F}) \frac{\partial (\dot{F}^\alpha)}{\partial s} \right) dt.$$

Ahora bien, cuando evaluamos esto en  $s = 0$ , notamos que como la variación es arbitraria, podemos hacer que la  $t$ -función  $\frac{\partial F}{\partial s}(0, t)$  sea cualquier función diferenciable  $v = v(t)$  a valores vectoriales que se anule en  $t_0$  y en  $t_1$ . Si lográramos, como en el ejemplo 4.5.1, expresar el integrando (para  $s = 0$ ) en la forma  $\phi_\alpha \frac{\partial F^\alpha}{\partial s}$  (con  $\phi = \phi(t)$  construida a partir de  $C$  y sus derivadas, e independiente de la variación), sabríamos que  $I$  es estacionaria (es decir, la integral se anula en cualquier variación  $F$ ) si y sólo si  $\phi$  es la función nula. Y entonces el problema variacional se reduciría a buscar las  $C$  que cumplen la ecuación diferencial  $\phi(t) = 0$ .

Entonces debemos sacar de factor común a  $\frac{\partial F}{\partial s}$  en el integrando. Para eso necesitamos deshacernos del factor  $\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}$  en el segundo término. Recordando que, según la observación 4.6.1, en esta situación tenemos  $\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s}$ ,

podemos integrar el segundo término por partes obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, F, \dot{F}) \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, F, \dot{F}) \frac{\partial F^\alpha}{\partial s} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, F, \dot{F}) \right) \frac{\partial F^\alpha}{\partial s}.\end{aligned}$$

Nuestro integrando queda expresado entonces como

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} (t, F, \dot{F}) \frac{\partial F^\alpha}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, F, \dot{F}) \frac{\partial F^\alpha}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, F, \dot{F}) \right) \frac{\partial F^\alpha}{\partial s},$$

que para  $s = 0$  se convierte en

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} (t, C, \dot{C}) v^\alpha + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, C, \dot{C}) v^\alpha \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, C, \dot{C}) \right) v^\alpha.$$

Transformado así el integrando, podemos volver a la integral, obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{dI(F_s)}{ds}(0) &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} (t, C, \dot{C}) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, C, \dot{C}) \right) \right) v^\alpha dt \\ &\quad + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, C, \dot{C}) v^\alpha \right]_{t=t_0}^{t=t_1},\end{aligned}\tag{6}$$

en donde el segundo término es nulo porque  $v(a) = 0$  y  $v(b) = 0$ . Como  $\frac{dI(F_s)}{ds}(0) = 0$  para cualquier variación (es decir, para cualquier función  $v(t)$ ), concluimos que la curva diferenciable  $C = C(t)$  estaciona el valor del funcional  $I$  si y sólo si satisface

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, C, \dot{C}) \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} (t, C, \dot{C}) = 0$$

que se conoce como ecuación de Euler-Lagrange. Es una ecuación diferencial implícita de segundo orden para  $C$ .

La ecuación de Euler-Lagrange se suele escribir en la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0,\tag{7}$$

entendiéndose que  $L$  y sus derivadas se evalúan en el movimiento  $C$ , y también la ecuación de variación (6) se escribe más sintéticamente en la forma

$$\delta I(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) \delta q^\alpha dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right]_{t=t_0}^{t=t_1},\tag{8}$$

donde  $\delta$  representa la diferenciación de funciones definidas en el espacio de curvas, y así la ecuación es una igualdad entre vectores duales tangentes a

este espacio. El vector en el que estuvimos evaluándolas al hacer la variación determinada por la función  $F = F(s, t)$  es la  $t$ -función  $\frac{\partial F}{\partial s}|_{s=0}$ , que es un campo continuo de vectores definido a lo largo de  $C$ .

Para hacer explícita la ecuación de Euler-Lagrange, debemos calcular la derivada temporal que aparece en el primer término, a saber,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}^\alpha} \dot{C}^\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^\alpha} \ddot{C}^\alpha.$$

Para que se pueda despejar  $\ddot{C}$  en función de  $(t, C, \dot{C})$  basta con que, para cualquier estado  $(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$ , la función bilineal  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}(t, q, \dot{q})$  sea no degenerada. Decimos entonces que la función lagrangiana  $L$  es **regular**.

*Comentario 4.6.2.* En este procedimiento quedan varios cabos sueltos. Por ejemplo, al alterar el integrando original por medio de la integración por partes, estamos suponiendo que existe la derivada  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, F, \dot{F}) \right)$ , lo cual es cierto si  $F$  es dos veces derivable respecto de  $t$ , pero en otro caso podría no serlo. Por lo tanto, la ecuación de Lagrange para hallar movimientos extremales podría no detectar aquellos que no tienen derivada segunda, mientras que la integral original en los casos que nos interesan va a estar dado por una función suave en  $(t, q)$  y cuadrática en  $\dot{q}$ , que se puede evaluar en cualquier curva de clase  $H^1$ . Estas dificultades pueden resolverse probando que las curvas extremales son dos veces diferenciables.<sup>18</sup> Pero en realidad podemos no preocuparnos por estas cuestiones, porque nuestro objetivo verdadero no es resolver problemas de cálculo de variaciones, sino aplicar el procedimiento formal anterior para manipular ecuaciones.

#### 4.6.4. Problemas variacionales restringidos

Supongamos que la función lagrangiana  $L = L(t, q, \dot{q})$  de un sistema  $(M, L)$  proviene de la función lagrangiana  $K = K(t, x, \dot{x})$  de otro sistema  $(N, K)$  via un **morfismo lagrangiano**  $H = H(t, q) : (M, L) \rightarrow (N, K)$ , que es un morfismo de mundos (dos veces diferenciable) tal que  $L = (\dot{H})^*(K)$ , es decir,  $L = K(t, H, \dot{H})$ . Por ejemplo,  $M$  podría ser un submundo de  $N$ , y  $H$  el morfismo de inclusión. Escribamos la ecuación de Euler-Lagrange del sistema  $(M, L)$ , que permite buscar las curvas en  $M$  cuya imagen via  $H$  extremiza la integral de  $K$ . Por un lado, a partir de

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{\partial \dot{H}^\beta}{\partial \dot{q}^\nu} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{\partial \left( \frac{\partial H^\beta}{\partial t} + \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu \right)}{\partial \dot{q}^\nu} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu}$$

---

<sup>18</sup>Mirando fugazmente las p.40–41 de [4], parece que la ecuación de Euler-Lagrange es adecuada para encontrar todos las curvas extremales en los casos que nos van a interesar, en los que  $L = a_{(t, q)}(\dot{q})$ , donde  $a_{(t, q)}$  es una función cuadrática estrictamente positiva en el espacio afín de las velocidades  $\dot{q}$ , que depende diferenciablemente de  $(t, q)$ .

podemos calcular

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \right) \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu} + \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu} \right).$$

Por otro lado tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial q^\nu} = \frac{\partial K}{\partial x^\beta} \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu} + \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{\partial \dot{H}^\beta}{\partial q^\nu}.$$

Entonces la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\nu} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \right) \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu} + \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu} \right) - \frac{\partial K}{\partial x^\beta} \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu} - \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{\partial \dot{H}^\beta}{\partial q^\nu} &= 0 \\ \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \right) - \frac{\partial K}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu} + \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu} \right) - \frac{\partial \dot{H}^\beta}{\partial q^\nu} \right) &= 0, \end{aligned}$$

en donde el último término es nulo pues

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu} \right) &= \frac{\partial^2 H^\beta}{\partial t \partial q^\nu} + \frac{\partial^2 H^\beta}{\partial q^\mu \partial q^\nu} \dot{q}^\mu \\ &= \frac{\partial^2 H^\beta}{\partial q^\nu \partial t} + \frac{\partial^2 H^\beta}{\partial q^\nu \partial q^\mu} \dot{q}^\mu = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \left( \frac{\partial H^\beta}{\partial t} + \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu \right) = \frac{\partial (\dot{H}^\beta)}{\partial q^\nu}. \end{aligned}$$

La ecuación de Euler-Lagrange se simplifica entonces a

$$\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \right) - \frac{\partial K}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial H^\beta}{\partial q^\nu} = 0,$$

es decir,

$$\left. \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \right) - \frac{\partial K}{\partial x^\beta} \right) \right|_{\text{Im} \left( \frac{\partial H}{\partial q} \right)} = 0.$$

Esta ecuación también se puede obtener directamente por el mismo procedimiento que usamos en primer lugar para obtener la ecuación de Euler-Lagrange. Al expresar la variación de la integral de  $K$ , integrando por partes, obtenemos una expresión similar a la ecuación (8), que se anula en cualquier variación de la curva que provenga vía  $H$  de una variación en  $M$ , es decir, en cualquier variación en  $N$  que sea tangente a la imagen de  $H$ . Esto es equivalente a que el covector  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\beta} \right) - \frac{\partial K}{\partial x^\beta}$  sea nulo en el espacio tangente a la imagen de  $H$ .

#### 4.6.5. Curvas geodésicas

Un problema típico de cálculo de variaciones es el de encontrar el camino más corto para ir de un punto de una superficie a otro, viajando sin salir de la misma. En general, sean  $X$  un espacio euclídeo con métrica  $g$ ,  $M \subseteq \mathcal{T} \times X$  una restricción (que puede variar con el tiempo),  $t_0 < t_1$  dos instantes y  $x_0 \in M_{t_0}$  y  $x_1 \in M_{t_1}$  dos puntos. Consideremos el espacio  $E$  de movimientos que van de  $(t_0, x_0)$  a  $(t_1, x_1)$ , sin salir de  $M$ . Buscamos aquel que minimice la integral

$$\tilde{I} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\alpha,\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} dt.$$

Este problema es patológico en el caso en el que la restricción no dependa del tiempo, porque entonces cualquier reparametrización de una solución va a ser también una solución. La ecuación diferencial asociada debe ser no determinista.

Una alternativa es tender un “resorte” a lo largo de  $M$ , que une  $(t_0, x_0)$  con  $(t_1, x_1)$  minimizando su “energía elástica”

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} g_{\alpha,\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta dt.$$

Este problema es equivalente al problema del camino corto, al menos si la restricción  $M$  no depende del tiempo. En efecto, al minimizar la energía  $I$ , el resorte encuentra una curva  $C$  que, en particular, minimiza  $I$  dentro del espacio de las reparametrizaciones de  $C$ , es decir, los movimientos contenidos en  $[t_0, t_1] \times \text{Im}(C)$  (que están en  $M$  porque  $M_t$  no depende de  $t$ ). Pero  $\text{Im}(C)$  es una variedad riemanniana de dimensión 1, que es isomorfa a un segmento de recta euclídea, y ahí el problema es trivial: como vimos en el ejemplo 4.5.1 (que ahora debemos restringir al caso de dimensión 1 y gravedad nula), la solución es una parametrización con velocidad constante. Esto muestra que el movimiento que minimiza  $I$  tiene velocidad de norma constante. Pero si nos restringimos a los movimientos con velocidad de norma constante, las integrales  $I$  y  $\tilde{I}$  son equivalentes, y luego el resorte encuentra la curva que minimiza  $\tilde{I}$  y además tiene velocidad de norma constante.

Estudiemos entonces el problema de minimizar la integral de

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha,\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta,$$

restringida a movimientos contenidos en  $M$ . Según el resultado de la sección anterior, las curvas que buscamos son las que cumplen la ecuación

$$\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\beta} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\beta} \right) \Big|_{T_x M_t} = 0,$$

que sencillamente equivale a

$$g_{\alpha,\beta}\ddot{x}^\alpha|_{T_x M_t} = 0,$$

es decir, la aceleración del movimiento debe ser ortogonal a  $M_t$ .

*Observación 4.6.3.* La ecuación obtenida es la ecuación de D'Alembert (5) que describe el movimiento restringido a  $M$  por medio de un vínculo ideal, y con fuerza aplicada nula.

#### 4.7. Ecuaciones de Lagrange para la mecánica

Los cálculos de la sección anterior muestran que la ecuación de D'Alembert

$$g_{\alpha,\beta}\ddot{x}^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\nu} = 0$$

de un movimiento **libre** (sin fuerzas aplicadas) en  $M \subseteq \mathcal{T} \times X$  es equivalente a la ecuación de Euler-Lagrange para hallar caminos en donde

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt$$

es estacionaria, siendo  $L$  igual a la energía cinética  $K$  dada por

$$K = \frac{1}{2} g_{\alpha,\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta.$$

(Nótese que  $L$  está bien definido pues estando en un espacio producto, los puntos  $\dot{x}$  del espacio afín  $\dot{M}_{(t,x)}$  pueden considerarse vectores, existiendo una velocidad nula de referencia.) Esto da un método sencillo para hallar las ecuaciones de movimiento de un tal sistema mecánico, a partir de una expresión de  $L$  en términos de  $(t, q, \dot{q})$ .

Pero los movimientos libres no son los únicos que responden a un problema variacional. En el ejemplo 4.5.1 vimos que la ecuación de Euler-Lagrange de un resorte masivo y de longitud inicial nula, que cuelga sujeto de sus extremos en un campo gravitatorio uniforme  $g$ , es la misma ecuación que describe el movimiento uniformemente variado que experimenta una partícula sobre la que actúa el campo gravitatorio opuesto  $-g$  (si multiplicamos por un factor constante para que coincidan los tipos de magnitud). De hecho, siempre que una fuerza  $F_\beta$  definida en un mundo galileano  $G$  sea el diferencial (espacial) de una función de trabajo  $-V(t, x)$ , la ecuación de Newton

$$g_{\alpha,\beta}\ddot{x}^\alpha = F_\beta$$

será equivalente a la ecuación de Euler-Lagrange asociada al integrando  $L = K - V$ . Esta posibilidad se extiende a cualquier fuerza que pueda obtenerse de un **potencial generalizado**  $V(t, x, \dot{x})$  según la fórmula

$$F_\beta = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}^\beta} \right) - \frac{\partial V}{\partial x^\beta}$$

(como es el caso de la fuerza electromagnética, tratado en las p.26–29 de [5]).

El caso en el que actúan fuerzas se puede combinar con un vínculo ideal. En general, consideremos un mundo galileano  $G$  con métrica  $g$ , en el que un punto (que podría representar un sistema de partículas) se mueve restringido a un submundo  $M$  por una fuerza de vínculo ideal, y con una fuerza aplicada

$$F_\beta = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}^\beta} \right) - \frac{\partial V}{\partial x^\beta} + Q_\beta,$$

que incluye en el término  $Q_\beta$  la parte de la fuerza que no pudimos (o no quisimos) derivar de un potencial. Entonces la ecuación de D'Alembert

$$g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha |_{T_x M_t} = F_\beta |_{T_x M_t}$$

que describe los movimientos del sistema es equivalente a la **ecuación (dinámica) de Lagrange**

$$\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\beta} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\beta} \right) |_{T_x M_t} = Q_\beta |_{T_x M_t},$$

donde  $L = K - V$  es la **función lagrangiana** del sistema, que involucra a la energía cinética

$$K = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

En la práctica, se suele escribir la ecuación de Lagrange a partir de una parametrización de  $M$  que determina  $x = x(t, q)$  (con  $q$  en un espacio afín). La función lagrangiana  $L$  queda también en función de  $(t, q, \dot{q})$  y la ecuación queda en la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\nu} = Q_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\nu},$$

donde  $L = K - V$ , con

$$K = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu \right) \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial t} + \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu \right).$$

La cantidad  $p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu}$ , que queda expresada en términos del estado de movimiento  $(t, q, \dot{q})$ , es el **impulso** del sistema, y se la puede definir en cualquier sistema lagrangiano, por más que no esté asociado a un sistema mecánico. Llamaremos **sistema mecánico lagrangiano** a cualquier sistema mecánico cuya ecuación de movimiento pueda derivarse de una función lagrangiana adecuada, es decir, un sistema en el que la fuerza aplicada pueda derivarse completamente de un potencial (generalizado).

Como vimos al analizar la ecuación de Euler-Lagrange, la ecuación dinámica de Lagrange se puede usar para obtener una ecuación diferencial de segundo orden y explícita que describe el movimiento, al menos cuando  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}$

es no degenerada. Esto se cumple en todos los problemas mecánicos que tengan  $V = V(t, q)$ , pues entonces se tiene

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} = g_{\alpha, \beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q} \frac{\partial x^\beta}{\partial q},$$

que es positiva (y por lo tanto, no degenerada).

**Ejemplo 4.7.1.** Consideremos el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas central que deriva de un potencial  $V = V(\rho)$ , con  $\rho$  la distancia al centro. Según ya sabemos, este movimiento transcurre en un plano, que podemos parametrizar usando coordenadas polares  $\rho$  y  $\theta$ . El lagrangiano en este caso es

$$L = K - V = m \frac{\dot{\rho}^2}{2} + m \frac{(\rho \dot{\theta})^2}{2} - V(\rho).$$

La ecuación de Lagrange es una igualdad entre dos covectores. Evaluando en  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} (m \rho^2 \dot{\theta}) &= 0, \end{aligned}$$

por lo que el escalar  $l = m \rho^2 \dot{\theta}$  (que representa al impulso angular) es constante a lo largo del movimiento. Evaluando en  $\frac{\partial}{\partial \rho}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \rho} \\ \frac{d}{dt} (m \dot{\rho}) &= m \rho \dot{\theta}^2 - \frac{dV}{d\rho}, \end{aligned}$$

en donde podemos reemplazar  $\dot{\theta} = \frac{l}{m \rho^2}$ , obteniendo la ecuación

$$m \ddot{\rho} = \frac{l^2}{m \rho^3} - \frac{dV}{d\rho} \quad (9)$$

que describe la evolución de  $\rho$  en el tiempo. Pero nosotros sabemos que en este sistema se conserva la energía

$$\begin{aligned} E = K + V &= m \frac{\dot{\rho}^2}{2} + m \frac{(\rho \dot{\theta})^2}{2} + V(\rho) \\ &= m \frac{(\dot{\rho})^2}{2} + \frac{l^2}{2m \rho^2} + V, \end{aligned}$$

lo cual debe poder deducirse de las ecuaciones de Lagrange (que describen completamente el movimiento). Y en efecto, multiplicando la ecuación (9) por  $\dot{\rho}$ , obtenemos

$$m\ddot{\rho}\dot{\rho} - \frac{l^2\dot{\rho}}{m\rho^3} + \frac{dV}{d\rho}\dot{\rho} = 0,$$

es decir,  $\frac{dE}{dt} = 0$ . La conservación de la energía, escrita en términos de  $\rho$  y  $\dot{\rho}$ , permite escribir a  $\dot{\rho}^2$  en función de  $\rho$ , con lo que  $\rho$  queda determinado por una ecuación diferencial de primer orden.

*Observación 4.7.2.* La ecuación (9) describe también el movimiento unidimensional de una partícula de masa  $m$  sujeta a una fuerza aplicada  $\frac{l^2}{m\rho^3} - \frac{dV}{d\rho}$ , que, podemos considerar, proviene del potencial  $V_{\text{efectivo}} = V + \frac{l^2}{2m\rho^2}$ . En este movimiento se conserva la energía

$$E_{\text{efectiva}} = K_{\text{efectiva}} + V_{\text{efectiva}} = m\frac{(\dot{\rho})^2}{2} + V + \frac{l^2}{2m\rho^2}$$

que, por supuesto, es la misma energía del sistema original.

*Observación 4.7.3.* En el ejemplo se observa que si alguna coordenada  $q_i$  (que en el ejemplo fue  $\theta$ ) no aparece en la fórmula que define a  $L$ , o dicho de otra manera, si  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , entonces la cantidad escalar  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$  se conserva en cualquier movimiento solución. Esto se obtiene inmediatamente al aplicar la ecuación de Lagrange al vector  $\frac{\partial}{\partial q_i}$ . Se dice entonces que  $q_i$  es una **coordenada cíclica**. Otra instancia de este fenómeno se obtiene al analizar el lagrangiano  $L = g_{\alpha,\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$  (con  $g_{\alpha,\beta}$  constante) de una partícula moviéndose libremente por el espacio euclídeo. En este caso se conserva el covector  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\beta} = g_{\alpha,\beta}\dot{x}^\alpha$ , que es la cantidad de movimiento.

#### 4.8. Simetrías y cantidades conservadas: teorema de Nöther

Una **simetría** de un sistema lagrangiano  $(M, L)$  es un automorfismo de dicho sistema, es decir, un isomorfismo  $S$  del mundo  $M$  en sí mismo tal que el isomorfismo  $\dot{S}$  de  $\dot{M}$  en sí mismo preserva el lagrangiano. Una simetría  $S$  preserva la dinámica del sistema, es decir, es tal que si un movimiento  $q = C(t)$  es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces el movimiento  $q = S(C(t))$  es también solución. (Notar que en el problema del movimiento libre en el espacio galileano, los automorfismos afines del espacio (incluyendo dilataciones) llevan soluciones a soluciones, pero no son simetrías del sistema lagrangiano por alterar el valor de la función lagrangiana.)<sup>19</sup>

Un grupo uniparamétrico de simetrías siempre es de la forma  $(w^s)_{s \in \mathbb{R}}$ , es decir, está generado por un campo  $w = w(t, s)$  de vectores tangentes a  $M$ , que son de dirección espacial porque sólo admitimos morfismos que preserven el

---

<sup>19</sup> ¿Sirven para algo las simetrías de dilatación?

tiempo. El campo  $w_*$ , tangente a  $TM$  y dado por la relación  $(w_*)^s = (w^s)_*$ , también es de dirección espacial, es decir, tangente a  $\text{Ker } d_{(t,q)}\mathbf{t}$  en cada espacio  $T_{(t,q)}M$ . Por lo tanto  $w_*$  da un grupo de difeomorfismos del espacio de velocidades  $\dot{M}_{(t,q)} \subseteq \mathbb{R}s^{-1} \times TM_{(t,x)}$  (que contiene a las secciones de  $d_{(t,q)}\mathbf{t}$ ), al cual también vamos a llamar  $w_*$ . Este campo preserva  $L$ , es decir, la derivada de  $L$  en la dirección de  $w_*$  se anula. Y recíprocamente, un campo  $w$  tangente a  $M$  y de dirección espacial, tal que  $w_*(L) = 0$ , genera necesariamente un grupo uniparamétrico de simetrías  $w^s$  (quizás definidas sólo localmente en  $M$  y para  $s$  cercano a cero, si  $M$  no es compacta). Se dice entonces que  $w$  es una **simetría infinitesimal** del sistema lagrangiano.

Toda coordenada cíclica evidencia la existencia de un grupo uniparamétrico de simetrías del sistema lagrangiano. En el caso del movimiento en un campo central, el hecho de que la coordenada angular sea cíclica muestra que las rotaciones alrededor del centro son simetrías (automorfismos) del sistema lagrangiano. En el caso del movimiento libre en el espacio euclídeo (en coordenadas cartesianas), todas las coordenadas son cíclicas, pues las traslaciones del plano en cualquier dirección son simetrías. Además vimos que si  $q^i$  es una coordenada cíclica, la cantidad asociada  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$  es una **constante de movimiento** del sistema lagrangiano, es decir, una función escalar definida en  $\dot{M}$  que resulta constante a lo largo de cualquier movimiento solución de la ecuación de Euler-Lagrange del sistema.

Este fenómeno se puede describir sin usar coordenadas. Supongamos que  $w$  es un grupo uniparamétrico de simetrías de un sistema lagrangiano. El campo de vectores  $w$  está asociado a una coordenada cíclica  $\tilde{q}^i$  en cierto sistema de coordenadas apropiado  $\tilde{q}$  (al menos localmente en torno a cada punto donde  $w$  sea no nulo), teniéndose  $w = \frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{q}}^i}$ , por lo que puede usarse para obtener una constante de movimiento  $\frac{\tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}^i}$  donde  $\tilde{L}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = L(t, q, \dot{q})$  es el lagrangiano escrito en función de las nuevas coordenadas. Pero la hipótesis de que  $w$  sea no nulo es superflua, y la constante de movimiento  $\frac{\tilde{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}} \frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{q}}^i} = \frac{L}{\partial \dot{q}^\alpha} w^\alpha$  puede hallarse directamente, sin usar coordenadas. En esto consiste, para nosotros, el **teorema de Nöther**.<sup>20</sup>

En efecto, sea  $w$  una simetría infinitesimal del sistema lagrangiano. Consideremos un movimiento  $C = C(t)$  que sea solución a la ecuación de Euler-Lagrange del sistema, y apliquémosle el campo  $w$ , obteniendo una función de dos variables  $F = F(t, s)$  (definida en un abierto que incluye a la curva original, situada en  $s = 0$ ), de modo que para cualquier valor fijo de  $s$ , la  $t$ -función  $F$  es un movimiento solución. Por lo tanto, tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, F, \dot{F}) \right) = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} (t, F, \dot{F}).$$

---

<sup>20</sup>Hay quienes dicen que el teorema es en realidad más general.

Por otra parte, como el valor del lagrangiano  $L(t, F, \dot{F})$  se conserva al variar  $s$ , tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial s} \left( L(t, F, \dot{F}) \right) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} (t, F, \dot{F}) \frac{\partial F^\alpha}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} (t, F, \dot{F}) \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial s \partial t}. \end{aligned}$$

Más sintéticamente, escribamos

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \frac{\partial F^\alpha}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial s \partial t} = 0,$$

entendiéndose que  $L$  y sus derivadas parciales siempre están evaluadas en  $(t, F, \dot{F})$ .

La cantidad conservada que buscamos será un escalar cuya derivada respecto de  $t$  sea cero. Arriba sólo aparece la derivada respecto de  $t$  en un factor del último término, por lo que debemos integrar dicho término por partes respecto de  $t$  para obtener una derivada temporal. Al hacerlo queda

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \frac{\partial F^\alpha}{\partial s} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial F^\alpha}{\partial s} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \frac{\partial F^\alpha}{\partial s} = 0.$$

Teniendo en cuenta que primero y el último término se cancelan por satisfacerse la ecuación de Lagrange, y recordando que  $\frac{\partial F}{\partial s} = w$ , concluimos que el escalar

$$f = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} w^\alpha,$$

definido en todo  $\dot{M}$  a partir de la función lagrangiana y el campo vectorial  $w$ , es una constante de movimiento.

#### 4.9. Conservación de la energía

Además de las constantes de movimiento que se pueden hallar en cualquier problema variacional a partir de las simetrías infinitesimales, sabemos que en algunos sistemas mecánicos se conserva la energía mecánica.

Por ejemplo, consideremos una partícula que se mueve en una subvariedad  $S$  de un espacio euclídeo  $X$ , sometida a una fuerza aplicada que deriva de un potencial  $V = V(x)$ . En esta situación se conserva la energía mecánica, pues la fuerza aplicada es conservativa, y la fuerza de vínculo, que suponemos ideal, no trabaja en ningún desplazamiento virtual (y como la restricción es constante, tampoco trabaja en un movimiento del sistema). ( Nótese que el sistema de referencia hace falta en este caso para poder definir la energía.) Un sistema mecánico de estas características se llama **sistema lagrangiano natural**.

El espacio de configuraciones del sistema es  $M = \mathcal{T} \times S$ , con  $S$  variedad riemanniana (con métrica igual al doble de la energía cinética), y además hay definida en  $S$  una función potencial  $V$ . En realidad, esta estructura de variedad riemanniana con un potencial es todo lo que hace falta en lo que sigue, y por lo tanto es otra posible definición de “sistema lagrangiano natural”, que aparece en la p.84 de [1].<sup>21</sup>

El movimiento de la partícula cumplirá la ecuación de Lagrange que deriva del lagrangiano  $L = K - V$ , donde  $K$  es la energía cinética. Dado que el sistema lagrangiano  $(M, L)$  describe completamente la dinámica, es saludable intentar probar que se conserva la energía partiendo de las ecuaciones de Lagrange. Esto involucra, en primer término, expresar la energía  $E = K + V$  en términos del lagrangiano  $L$ , lo cual requiere separar los dos términos  $K$  y  $V$ . Parametricemos  $S$  escribiendo  $x = x(q)$ , con  $q$  en un espacio afín  $A$ . Entonces podemos expresar  $V = V(q)$  y  $K = g_{\mu,\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu$ , con  $g = g(q)$ , de modo que el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu,\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - V.$$

El potencial  $V$  no depende de  $\dot{q}$ , por lo que al derivar respecto de  $\dot{q}$  obtenemos

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} = g_{\mu,\nu} \dot{q}^\mu,$$

de donde podemos recuperar la energía cinética (duplicada) si aplicamos este covector a  $\dot{q}$ , pues

$$p_\nu \dot{q}^\nu = g_{\mu,\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = 2K.$$

Para obtener la energía mecánica, basta con restar  $K - V$ , que es el lagrangiano. Entonces la energía se puede expresar en función del lagrangiano usando la fórmula

$$H = p_\nu \dot{q}^\nu - L.$$

Esta cantidad, definida en función de  $(t, q, \dot{q})$  para cualquier sistema lagrangiano según la última fórmula, es llamada **hamiltoniano**. Lo denotamos con la letra  $H$  porque en algunos sistemas mecánicos, no es igual a la energía, y además se lo puede definir en otros problemas variacionales no mecánicos.

---

<sup>21</sup>La definición aquí presentada asegura que haya un grupo uniparamétrico de simetrías de la inclusión de  $M$  en el espacio galileano  $G = \mathcal{T} \times X$  con potencial  $V$  (si admitimos simetrías que trasladan el tiempo).

Veamos que  $H$  es una constante de movimiento.

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \frac{d}{dt} (p_\nu \dot{q}^\nu - L) \\ &= \dot{p}_\nu \dot{q}^\nu + p_\nu \ddot{q}^\nu - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^\nu} \dot{q}^\nu - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} \ddot{q}^\nu \\ &= \left( \dot{p}_\nu - \frac{\partial L}{\partial q^\nu} \right) \dot{q}^\nu + \left( p_\nu - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} \right) \ddot{q}^\nu - \frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}$$

El primer término se anula porque se satisface la ecuación de Euler-Lagrange. El segundo se anula por la definición de  $p_\nu$ . Entonces  $\dot{E} = -\frac{\partial L}{\partial t}$  pero esta derivada también es nula porque el lagrangiano sólo depende de  $q$  y  $\dot{q}$ . Un sistema lagrangiano en el que ocurre esto se dice **autónomo**, y en todo sistema autónomo se conserva el hamiltoniano.

**Ejemplo 4.9.1.** Consideremos una partícula de masa  $m$  que se mueve en el plano euclídeo, restringida por un vínculo ideal a mantenerse en una recta que gira con velocidad constante  $\omega$  alrededor de un centro fijo. Como no hay fuerza aplicada, el lagrangiano del sistema es simplemente la energía cinética:

$$L = m \frac{\dot{\rho}^2}{2} + m \frac{\omega^2 \rho^2}{2},$$

donde  $\rho$  es la distancia al centro (con un signo que cambia al cruzar el centro). Como el lagrangiano es autónomo, se conserva el hamiltoniano  $H = m \frac{\dot{\rho}^2}{2} - m \frac{\omega^2 \rho^2}{2}$ , que en este caso se puede calcular simplemente cambiándole el signo a la parte que depende de la posición. Pero la energía verdadera es el lagrangiano, que no es una constante de movimiento porque la fuerza de vínculo está realizando trabajo. La ecuación de Lagrange es  $m \ddot{\rho} = m \omega^2 \rho$ , y  $\rho$  evoluciona como en el problema unidimensional de potencial  $-m \frac{\omega^2 \rho^2}{2}$ , en el cual se conserva la energía  $m \frac{\dot{\rho}^2}{2} - m \frac{\omega^2 \rho^2}{2}$  que es el hamiltoniano del problema original.

*Comentario 4.9.2.* La definición de sistema autónomo requiere un sistema de referencia, es decir, una foliación del mundo de configuraciones  $M$  por movimientos cuya velocidad pueda considerarse nula. Esta foliación se puede describir por medio de un campo de vectores cuya proyección en  $\mathbb{R}^n$  via  $dt$  es constante, y determina un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de  $M$  que traslada el tiempo uniformemente. A estos difeomorfismos no podemos llamarlos “simetrías” porque trasladan el tiempo. Pero en caso de preservar a  $L$ , también van a preservar los movimientos solución. Las transformaciones de este tipo pueden usarse también para hallar cantidades conservadas, que van a ser análogas al hamiltoniano, por medio de un procedimiento similar al que usamos para demostrar el teorema de Nöther.<sup>22</sup>

<sup>22</sup>Ver el último ejercicio de la p. 90 de [1]. Acá no voy a desarrollar esta técnica, porque

*Comentario 4.9.3.* Al elegir un sistema de referencia, podemos definir una energía cinética, que usamos para construir una función lagrangiana. Pero inversamente, en muchos sistemas mecánicos el lagrangiano depende cuadráticamente de la velocidad (con hessiano positivo, y coeficientes dependientes del tiempo y la posición), lo cual permite en cada punto del sistema determinar una velocidad especial: la que minimiza  $L$  (donde  $p = 0$ ). Por lo tanto, queda determinado un sistema de referencia. Según ese sistema, el lagrangiano, que sigue dependiendo cuadráticamente de la velocidad, tiene término lineal nulo, y esta propiedad caracteriza a la parametrización natural asociada al lagrangiano.

En el caso de un sistema lagrangiano natural, la parametrización natural es la original, que ya tiene término lineal nulo, pero en otros sistemas puede no serlo.

#### 4.10. Solución al problema de la braquistócrona

Volvamos al problema de la braquistócrona. Sean  $P_0$  y  $P_1$  puntos de un espacio euclídeo con campo gravitatorio uniforme de norma  $g$ , sea  $m$  una masa y sea  $E$  una energía. Para cada curva  $C$  que une  $P_0$  con  $P_1$  podemos calcular el tiempo que tarda una partícula de masa  $m$  y con energía  $E$  en llegar de  $P_0$  a  $P_1$ , bajo el efecto de su peso y una fuerza de vínculo ideal que la obliga a mantenerse en  $C$ . Estamos buscando la curva que minimiza este tiempo. Dicho movimiento seguramente estará contenido en el plano vertical que une ambos puntos, porque cualquier otra curva puede ser proyectada sobre este plano, reduciendo su tiempo.

Eligiendo coordenadas  $x$  e  $y$  adecuadas, la energía mecánica  $E = K + V = m\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - mgy$  de la partícula resulta nula, y entonces durante el movimiento de la partícula se tiene

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2gy$$

(Notar que  $y$  dice qué tan abajo está la partícula del mayor nivel de altura al que puede llegar, y es siempre positiva.) La integral que queremos minimizar es

$$\int dt = \int \frac{dt}{dl} dl = \int \frac{1}{\frac{dl}{dt}} dl = \int \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} dl = \int \frac{1}{\sqrt{2gy}} dl = \int \sqrt{\frac{dl^2}{2gy}}.$$

Pero ésta es la longitud de curva determinada por la métrica riemanniana  $dt^2 = \frac{dl^2}{2gy}$ , definida en el semiplano  $y > 0$ . Obtenemos la misma curva si intentamos minimizar la integral de la “energía cinética”

$$\int \frac{dt^2}{2} = \int \frac{dl^2}{4gy} = \int \frac{x'^2 + y'^2}{4gy} ds,$$

---

la demostración que conozco es desproporcionada. Quizás sea porque estoy usando una definición restrictiva de “morfismo”, que impide trasladar (y dilatar) el tiempo. En otra edición de este texto, cada mundo tendrá su propia línea de tiempo y su propia semirrecta de longitudes.

donde  $s$  es un nuevo parámetro y  $(-)' = \frac{d}{ds}$ . Además, al minimizar esta integral, la parametrización que obtenemos es afínmente equivalente al tiempo, que es la “longitud” asociada a la métrica  $dt^2$ . Esto es una consecuencia de la conservación del hamiltoniano, que en este caso es igual a la función lagrangiana, porque sólo hay “energía cinética”.

Debemos resolver la ecuación de Euler-Lagrange con el lagrangiano

$$L = \frac{x'^2 + y'^2}{4gy}.$$

Como  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ , la ecuación asociada a la coordenada  $x$  dice que la cantidad

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{x'}{2gy}$$

es una constante de movimiento. La ecuación asociada a  $y$  no es necesaria, pues seguramente va a ser equivalente a la conservación del hamiltoniano

$$L = \frac{x'^2 + y'^2}{4gy} = \frac{(2gp_{xy})^2 + y'^2}{4gy},$$

que ya es suficiente para determinar la curva. Despejando obtenemos

$$y'^2 = 4gL y - 4g^2 p_x^2 y^2 = 4g^2 p_x^2 \left( \frac{L}{gp_x^2} y - y^2 \right),$$

que definiendo  $k = 2gp_x$  y  $a = \frac{L}{2gp_x^2}$  se convierte en

$$y'^2 = k^2(2ay - y^2).$$

Esta ecuación de primer orden determina  $y$  en función de  $s$ , pero también determina  $s$  en función de  $y$ , y como no depende de  $s$ , se resuelve entonces simplemente integrando. En efecto, suponiendo que  $y$  vale cero cuando  $s = 0$  y a partir de ahí ambas variables aumentan, tenemos

$$\begin{aligned} dy &= k\sqrt{2ay - y^2} ds \\ kds &= \frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - (a - y)^2}} = \frac{1}{a} \frac{dy}{\sqrt{1 - (1 - \frac{y}{a})^2}}, \end{aligned}$$

e integrando,  $ks = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right)$ , de donde despejamos

$$y = a(1 - \cos(ks)).$$

Para calcular  $x$ , suponiendo que vale cero para  $s = 0$ , partimos de que

$$\frac{dx}{ds} = 2gp_{xy} = ky = ka(1 - \cos(ks))$$

e integrando obtenemos

$$x = a(ks - \sin(ks)).$$

La curva obtenida es una cicloide.



## 5. Dinámica en una variedad simpléctica: mecánica de Hamilton

WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) había estudiado óptica y descubierto las ventajas de pasar de pensar en rayos a pensar en frentes de onda. Empíricamente se observan más fácilmente los rayos: un **rayo** es un camino a lo largo del cual se propaga la luz, es decir, tal que si lo interrumpimos, la luz no llega. El resultado fundamental de Hamilton, que ya había sido probado en un caso particular por Malus ([11], p. 499), decía que si un **sistema de rayos** (que es una foliación del espacio euclídeo por rectas) admitía una superficie ortogonal (esto pasa siempre en dimensión 2, pero no siempre en dimensión 3), entonces también debía admitir toda una foliación ortogonal de superficies. Esto se cumple en general para sistemas de rayos ópticos que provienen de un foco, por más que en el camino se reflejen en espejos o refracten al cambiar de medio, y aún cuando hay refracción atmósferica, que hace que se curven de a poco al viajar, como geodésicas en una variedad riemanniana (esto ocurre cuando la métrica que define la ecuación de onda no es la misma en todos los puntos del espacio).

Una idea básica para Hamilton era pensar en la longitud óptica de un rayo. Cuando Hamilton escribió sus primeros trabajos ([6],[7]) todavía no estaba claro que la luz fuera un fenómeno ondulatorio. Newton había postulado su **teoría corpuscular**, según la cual los rayos eran haces de partículas que al pasar a un medio óptico de mayor **índice de refracción** (por ejemplo, del aire al agua) eran aceleradas en la dirección perpendicular a la superficie de transición (como si estuvieran bajando por una rampa), y por eso el rayo se curvaba en dirección hacia el medio de mayor índice. La velocidad debía ser *directamente proporcional* al índice de refracción para explicar la **ley de refracción** empírica: el producto entre el índice de refracción y el seno del **ángulo de incidencia** (que es el ángulo entre el rayo y la recta normal a la superficie) se conserva durante la refracción. También se conocía la **teoría ondulatoria** de Huygens, según la cual la luz era una perturbación que se propagaba como una onda mecánica o una ola en el agua, y los rayos de luz eran conjuntos de caminos vecinos a lo largo de las cuales las perturbaciones se propagaban en el mismo tiempo, produciendo interferencia constructiva. En este modelo, la refracción al pasar a un medio de mayor índice se explica diciendo que la velocidad de propagación es *inversamente proporcional* al índice de refracción, lo cual implica que la luz viaja más despacio en el agua que en el aire.

Una forma de hablar sin despertar controversia (p. 497 de [11]) era decir que la luz se propagaba por un camino extremal de la **longitud óptica** (también llamada más vagamente “acción”, que es el término que usaba Hamilton), que era la integral del diferencial de longitud multiplicado por el índice de refracción (que en general depende del lugar y la dirección: hay

cristales homogéneos anisótropos, y también medios no homogéneos, como la atmósfera, pero aparentemente siempre es una forma cuadrática que varía en el espacio). El hecho de que el problema de determinar los rayos fuera equivalente a un problema de cálculo de variaciones ya había sido explotado, en sentido inverso, por Johann Bernoulli, al establecer una analogía óptica para dar su solución al problema de la braquistócrona.

Las superficies ortogonales de un sistema de rayos proveniente de un foco eran simplemente superficies de nivel de la longitud óptica. Pensando de esta manera, es fácil probar el teorema de Hamilton de las foliaciones. Además, también se puede partir de un sistema de rayos que no provienen necesariamente de un foco. De hecho, la condición de integrabilidad de la distribución de planos ortogonales a los rayos equivale a que el sistema se pueda hacer converger a un foco usando un espejo o lente. Hamilton entendió que el comportamiento de los rayos estaba determinado completamente por la función de **distancia óptica** entre puntos (llamada “función característica” por Hamilton), que es la longitud óptica de un rayo (curva extremal de la longitud óptica) que los une. (Si hay varios extremales, la distancia óptica puede ser una función multivaluada.) Conocida la función característica, los rayos se pueden calcular fácilmente por medio de una ecuación diferencial de *primer* orden, como veremos próximamente.

### 5.1. Función característica y ecuación de Hamilton-Jacobi

Volvamos a la mecánica. O en general, pensemos en un problema variacional, dado por un sistema lagrangiano  $(M, L)$ , con  $L = L(t, q, \dot{q})$ . Queremos buscar  $t$ -movimientos  $C = C(t)$  que extremicen (a bordes  $(t_0, q_0)$  y  $(t_1, q_1)$  fijos) la acción  $I = I(C)$  dada por  $L$ , que es la integral

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(t, C, \dot{C}) dt.$$

Su variación está dada por la fórmula (8), que recordamos:

$$\delta I(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right) \delta q^\alpha dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right]_{t=t_0}^{t=t_1}.$$

Un movimiento es extremal si y sólo si cumple la ecuación de Euler-Lagrange (7)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0.$$

Nos proponemos hallar la función característica  $S = S(t_0, q_0, t_1, q_1)$ , que asigna a cada par de eventos el valor de la acción  $I$  en un  $t$ -movimiento extremal  $C = C_{(t_0, q_0, t_1, q_1)}$  que los une. Este movimiento es único si los eventos

están suficientemente cerca y el lagrangiano es regular, pero finalmente veremos que no necesitamos probar esto. Para determinar  $S$ , empezaremos por calcular sus derivadas parciales. Supongamos, para simplificar los cálculos, que el evento inicial  $(t_0, q_0)$  está fijo, y estudiemos la dependencia respecto del evento final, que ahora puede llamarse  $(t, q)$ .

Al perturbar la posición final  $q$ , varía el movimiento extremal  $C$ , y entonces la acción, que es la integral de  $L$  en dicho movimiento, varía según la fórmula (8), en la cual en este caso se anula el término integral porque los movimientos que estamos considerando son extremales, y por lo tanto cumplen la ecuación de Euler-Lagrange. Entonces sólo queda el término de borde, que nos dice que

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, C, \dot{C}).$$

En palabras, la derivada de  $S$  respecto de la posición en un evento  $(t, q)$  es el impulso del movimiento extremal  $C$  que llega hasta ahí. La fórmula de variación no nos dice la derivada parcial de  $S$  respecto de  $t$  porque de hecho no está definida tal cosa: como no tenemos un sistema de referencia, no hay una dirección determinada a lo largo de la cual derivar  $S$ . Lo que sí es sencillo es calcular la derivada temporal de  $S$  a lo largo de  $C$ , pues como  $S$  es la integral de  $L$  a lo largo del mismo, se tiene

$$\frac{d(S(t, C))}{dt} = L(t, C, \dot{C}).$$

Para continuar, supongamos que sí tenemos un sistema de referencia, de modo que es posible identificar posiciones  $q$  a distintos tiempos, y derivar  $S$  respecto de  $t$  con  $q$  fijo, obteniendo  $\frac{\partial S}{\partial t}$ . Como a lo largo de  $C$  ya sabemos calcular

$$\frac{d(S(t, C))}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t}(t, C) + \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}(t, C)\dot{C}^\alpha,$$

que resulta igual a  $L(t, C, \dot{C})$ , despejando concluimos que

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, C) = L(t, C, \dot{C}) - \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}(t, C)\dot{C}^\alpha$$

Ahora viene la idea de Hamilton. El problema de hallar los movimientos extremales puede separarse en dos partes. En primer lugar, debemos determinar la función característica  $S$ . Una vez obtenida esta función, veremos cómo hallar los movimientos extremales. Para poder calcular  $S$  en todo el mundo conociendo cuánto vale en cierto instante inicial, bastaría con tener expresada  $\frac{\partial S}{\partial t}$  en función de  $S$  y su derivada espacial  $\frac{\partial S}{\partial q}$ . Eso se puede obtener a partir de la última ecuación, pues la velocidad  $\dot{C}$  del movimiento

extremal que llega a  $(t, q)$  se puede determinar a partir de  $S$  y  $\frac{\partial S}{\partial q}$ . En efecto, en este caso conocemos el impulso  $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}^\alpha}$ , y suele pasar que fijado un evento  $(t, q)$ , la función  $L = L(\dot{q})$  es cuadrática y con hessiano positivo, y en ese caso la función  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}(\dot{q})$  es un isomorfismo afín. (En general, podemos restringirnos a lagrangianos **hiperregulares**, que son aquellos  $L$  tales que para cada evento  $(t, q)$ , la función  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}(\dot{q})$  es un difeomorfismo.) Recordando, además, que habíamos definido el hamiltoniano de un sistema lagrangiano como  $H = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L$ , llegamos a la **ecuación de Hamilton-Jacobi**

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \left( t, q, \frac{\partial S}{\partial q} \right), \quad (10)$$

donde  $H = H(t, q, p)$  es la **función hamiltoniana** del sistema, que es el hamiltoniano pero ahora escrito *en función del impulso* según el procedimiento anterior.

## 5.2. Ecuación de Clairaut y transformada de Legendre

A continuación nos ocuparemos de un problema geométrico con el fin de familiarizarnos con la transformada de Legendre, que es relevante para lo que veremos a continuación. Durante esta sección,  $E$  es una recta afín real ordenada en donde están los escalares,  $\Delta E$  es la recta vectorial ordenada de las traslaciones de  $E$ , y para cada espacio vectorial real  $V$  (de dimensión finita) definimos su dual  $V^* := L(V, \Delta E)$ . Observar que hay un morfismo  $\text{ev} : V \rightarrow V^{**}$ , que es además un isomorfismo.

Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión finita y  $X$  un subconjunto abierto en  $V$ .<sup>23</sup> Consideremos el problema de reconstruir una función diferenciable  $f : X \rightarrow E$  a partir del conjunto de hiperplanos tangentes a su gráfico. Si la función derivada  $df : X \rightarrow V^*$  es inyectiva con imagen  $P$  (lo cual ocurre cuando  $f$  es una forma cuadrática definida positiva),<sup>24</sup> una manera de describir el conjunto de planos tangentes al gráfico de  $f$  es por medio de la función  $g : P \rightarrow E$  que da, para cada posible pendiente  $p \in V^*$ , la ordenada al origen  $-g(p)$  del único plano tangente al gráfico de  $f$  que tiene pendiente  $p$ . Esta función  $g$  recibe el nombre de **transformada de Legendre** de  $f$ , y se denota con el símbolo  $f^*$ .

No es difícil obtener una fórmula para  $g$  en términos de  $f$  y  $(df)^{-1} : X \rightarrow P$ . Si  $p \in P$  es una pendiente y  $x \in V$  es el punto de  $X$  donde  $df(x) = p$ , como la ecuación del plano tangente al gráfico de  $f$  en  $x$  es

$$\psi = f(x) + p(\chi - x),$$

---

<sup>23</sup>Se puede cambiar a  $V$  por un espacio afín?

<sup>24</sup>Más generalmente, podemos considerar cualquier función derivable estrictamente convexa (definida en un conjunto convexo). Generalizando en otra dirección, podemos considerar cualquier forma cuadrática no degenerada.

la ordenada al origen de dicho plano será  $f(x) = f(x) - px$ , y concluimos que

$$g(p) = px - f(x), \quad \text{donde } x = (df)^{-1}(p).$$

<sup>25</sup> La función  $g$  será derivable si  $f$  es dos veces derivable.

¿Cómo se recupera  $f$  a partir de  $g$ ? Reordenando la fórmula que define  $g$  y escribiendo  $df(x)$  en lugar de  $p$ , obtenemos la expresión

$$f(x) = df(x)x + g(df(x)),$$

que, interpretada como ecuación diferencial para  $f$ , recibe el nombre de **ecuación de Clairaut**. Esta ecuación implícita de primer orden permite especificar la función a partir del conjunto de sus planos tangentes. Notemos que no sólo admite a la función que buscamos como solución, sino también a cualquier función lineal cuyo gráfico sea tangente al de  $f$ . Debemos resolverla, deshaciéndonos de estas soluciones triviales.

Para tener una imagen concreta, pensemos primero en una  $f$  de una variable tal que  $f'' > 0$ . En este caso,  $f'$  es automáticamente inyectiva, y su imagen  $P$  es un intervalo. Dado un punto  $x \in X$ , para hallar  $f(x)$  bastaría con hallar la pendiente  $p = f'(x)$  de la recta tangente, pues entonces  $g$  nos diría la ordenada al origen de dicha recta, y conociendo la recta y la abscisa de tangencia podríamos conocer la ordenada de tangencia. Entonces debemos hallar la relación (biyectiva) entre el punto de tangencia  $x \in X$  y la pendiente  $p \in P$ . Una buena idea es perturbar  $x$  sumándole un pequeño  $\Delta x$ , y ubicar la nueva recta tangente, cuya pendiente será  $p + \Delta p$ . Al variar la recta tangente, también se modificará la ordenada al origen, y su variación será aproximadamente  $-x\Delta p$ . Este cálculo no es exacto por haber variado también el punto de tangencia, pero es correcto a primer orden en  $\Delta p$  porque, al estar el nuevo punto de tangencia en el gráfico de  $f$ , la variación del punto de tangencia es paralela a la recta tangente, y entonces no afecta (a primer orden) al cálculo de la ordenada al origen. Como por otra parte conocemos la nueva ordenada al origen, que es  $g(p + \Delta p)$ , tenemos

$$g(p + \Delta p) - g(p) \approx x\Delta p$$

y podemos conjeturar entonces la relación infinitesimal  $dg = xdp$ , es decir,  $g'(p) = -x$ , y como la relación entre  $x$  y  $p$  es biyectiva,  $g'$  es inversa, y se puede despejar  $p = (g')^{-1}(x)$ .

Veámoslo rigurosamente. Nuestro punto de partida es la ecuación de Clairaut

$$f(x) = xf'(x) - g(f'(x)),$$

---

<sup>25</sup> La transformada de Legendre se puede definir también cuando  $f$  es una función convexa (no necesariamente diferenciable) definida en un conjunto convexo, definiendo  $g(p) = \inf_{x \in X} px - f(x)$ . En tal caso conviene admitir los valores infinitos  $\infty$  y  $-\infty$  como posibles escalares. (Lo que no sé es si hay una generalización que abarque tanto a las funciones convexas no diferenciables como a las formas cuadráticas no degeneradas.)

y como queremos analizar lo que pasa al variar  $x$ , debemos derivar ambos miembros de la ecuación respecto de  $x$ . Obtenemos

$$f'(x) = f'(x) + f''(x)x - g'(f'(x))f''(x)$$

y luego

$$f''(x)(x - g'(f'(x))) = 0.$$

Como sabemos que  $f''(x)$  no es cero (esto corresponde a las rectas tangentes, que también son soluciones a la ecuación de Clairaut), concluimos que  $g'(f'(x)) = x$ . Como  $f'$  es biyección de  $X$  a  $P$ , y  $g'$  está definida en el dominio de  $g$ , que es  $P$ , concluimos que  $g'$  es biyectiva y que para cada  $x$  se tiene  $f'(x) = (g')^{-1}(x)$ . Esto significa que  $g'$  es la función inversa de  $f'$ . Esta relación entre  $f$  y su transformada de Legendre  $g$  es simétrica, de modo que para obtener  $f$ , entonces, basta con transformar nuevamente a  $g$ .<sup>26</sup>

En general, si  $f$  está definida en un subconjunto  $X$  de un espacio de dimensión finita, y su derivada  $df : X \rightarrow V^*$  es inyectiva con imagen  $P$ , podemos proceder análogamente. En la ecuación de Clairaut

$$f(x) = d_\alpha f(x)x^\alpha - g(df(x)),$$

que es una igualdad entre funciones de  $X$  a  $E$ , podemos derivar ambos miembros respecto de  $x$  obteniendo la ecuación de funciones de  $X$  a  $V^*$  siguiente:

$$d_\beta f(x) = d_\beta d_\alpha f(x)x^\alpha + d_\alpha f(x) \text{id}_\beta^\alpha - d^\alpha g(df(x))d_\beta d_\alpha f(x)$$

(y aquí la diferencial de  $g$  lleva un superíndice en lugar de un subíndice porque el dominio de  $g$  es un conjunto de covectores). Cancelando, obtenemos

$$d_\beta d_\alpha f(x)x^\alpha = d^\alpha g(df(x))d_\beta d_\alpha f(x).$$

Si sabemos que para cada  $x$  la diferencial segunda de  $f$  es no degenerada, llegamos a que

$$\hat{x} = dg(df(x)),$$

en donde  $\hat{x} \in V^{**}$  es la evaluación en  $x$ . Entonces podemos concluir que  $dg^{-1}(\hat{x}) = df(x)$ , y que  $f = g^*$  como antes. Resumiendo, tenemos

**Definición 5.2.1.** Sea  $X$  un subconjunto abierto de un espacio vectorial real de dimensión finita  $V$ , sea  $E$  una recta afín real, y sea  $f : X \rightarrow E$  una función derivable tal que  $df : X \rightarrow V^*$  es inversible con imagen  $P$ . Entonces se define la transformada de Legendre de  $f$ , que es la función  $f^* : P \rightarrow E$  dada por

$$f^*(p) = px - f(x), \quad \text{donde } x = df^{-1}(p).$$

---

<sup>26</sup>Puede probarse que si  $f$  es convexa, entonces  $f^*$  también lo es.

**Teorema 5.2.2.** Si además  $f$  es dos veces derivable, y para cada  $x$  se tiene  $d^2f(x) : V \rightarrow V^*$  inversible, entonces  $df : X \rightarrow P$  es un difeomorfismo, y  $P$  es abierto. Entonces  $g := f^*$  es diferenciable,  $dg : P \rightarrow V^{**}$  tiene por imagen a  $\hat{X}$ , y para cada  $x \in X$  se tiene  $df(x) = (g')^{-1}(\hat{x})$ . Además,  $g$  tiene transformada de Legendre  $g^*$ , que resulta igual a  $f$ .

*Observación 5.2.3.* Si el dominio de  $f$  es convexo, entonces basta con saber que en todo punto  $x$  tenemos  $d^2f(x)$  no degenerada (que es casi lo mismo que decir que  $f$  es estrictamente convexa), para concluir que  $df$  tiene imagen abierta y es difeomorfismo, y se puede aplicar el teorema. Si  $f$  es una forma cuadrática no degenerada, entonces también se puede aplicar el teorema.

### 5.3. Dinámica en el espacio cotangente: ecuaciones de Hamilton

Así como la función  $L$  encierra en sus derivadas parciales el problema dinámico, la función  $H = H(t, q, p)$ , que es la transformada Legendre de  $L$ , también tiene esta información, y podemos reconstruir la dinámica a partir de sus derivadas parciales. La función  $H$  está definida como

$$H(t, q, p) = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L(t, q, \dot{q}),$$

donde  $\dot{q}$  está en función de  $(t, q, p)$  según la relación  $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}(t, q, \dot{q})$ , o más explícitamente,  $\dot{q}^\alpha = \left( \frac{\partial L}{\partial p_\alpha}(t, q) \right)^{-1}(p_\alpha)$ . Diferenciando,

$$\begin{aligned} dH &= dp_\alpha \dot{q}^\alpha + p_\alpha d\dot{q}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} d\dot{q}^\alpha \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \dot{q}^\alpha dp_\alpha + \left( p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) d\dot{q}^\alpha \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \dot{q}^\alpha dp_\alpha. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos las derivadas parciales de  $H$ , que son

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}, \\ \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} &= -\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} &= \dot{q}^\alpha. \end{aligned}$$

*Observación 5.3.1.* Como  $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$  y  $H$  es la transformada de Legendre de  $L$  respecto de  $\dot{q}$ , se tiene  $\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}^\alpha$ .

Teniendo en cuenta que en un movimiento solución se satisface la ecuación de Euler-Lagrange  $\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}$ , podemos reescribir la segunda ecuación, y entonces el movimiento queda descripto según las **ecuaciones de Hamilton**

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \quad \dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}. \quad (11)$$

*Observación 5.3.2.* La segunda ecuación se cumple a lo largo de cualquier movimiento en el **mundo de impulsos**  $(t, q, p)$  que sea imagen de un movimiento en el **mundo de velocidades**  $(t, q, \dot{q})$  vía la asignación  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ , y no sólo en los movimientos solución. Es decir, conocida la evolución de las coordenadas  $(t, q)$  de un movimiento  $C = C(t)$  en  $M$ , quedan determinadas su velocidad  $\dot{C}$ , su impulso  $\tilde{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, q, \dot{q})$  y  $\frac{\partial H}{\partial p}(t, q, \tilde{p})$ , que resulta igual a  $\dot{C}$ . Pero como  $\frac{\partial H}{\partial p}(t, q, p)$  depende biyectivamente de  $p$  (lo cual es necesario para poder antitransformar  $H$  y obtener  $L$ , y se da siempre que  $L$  sea hiperegular), un  $t$ -movimiento  $(C, D)$  en el mundo de impulsos que cumpla la ecuación  $\frac{\partial H}{\partial p}(t, C, D) = \dot{C}$  es un movimiento cuyo  $D$  tiene el valor correcto  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, C, \dot{C})$  para su velocidad  $\dot{C}$ . En conclusión, la ecuación  $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$  caracteriza a los movimientos en el mundo de impulsos que son imagen de un movimiento en el mundo de velocidades vía la asignación  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, q, \dot{q})$ .

#### 5.4. Principio variacional fuerte

Sabemos que un movimiento  $C = C(t)$  en  $M$  que satisface la ecuación de Euler-Lagrange es un extremal de la acción

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt,$$

que se puede escribir en términos del impulso  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$  del movimiento como

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (p_\alpha \dot{q}^\alpha - H) dt.$$

Aquí vemos que la acción  $I(C)$  es la integral del campo de covectores  $\tilde{\theta} = p_\alpha dq^\alpha - H dt$  en la imagen del movimiento  $C$  en el mundo de impulsos  $(t, q, p)$ . El campo  $\tilde{\theta}$  evaluado en un movimiento se puede escribir como  $\tilde{\theta} = (p_\alpha \dot{q}^\alpha - H) dt$ , dado que la componente temporal del vector tangente a un movimiento es no nula. Los movimientos solución en  $M$  son entonces aquellos que extremizan, a eventos de borde  $(t_0, q_0)$  y  $(t_1, q_1)$  fijos, la integral de  $\tilde{\theta}$  (evaluada en la imagen del movimiento en el mundo de impulsos). Por la observación 5.3.2, el problema es equivalente al de buscar un movimiento en el mundo de impulsos que empiece con  $(t, q) = (t_0, q_0)$  y termine con  $(t, q) = (t_1, q_1)$  (y cualquier impulso), que en todo punto tenga el valor de

impulso  $p$  determinado implícitamente por la ecuación  $\frac{\partial H}{\partial p}(t, q, p) = \dot{q}$ , y que además extremice la integral de  $\tilde{\theta}$  dentro del espacio de movimientos que cumplen estas restricciones.

Ahora bien, al buscar un tal movimiento extremal en el mundo de impulsos, notamos que la última restricción es superflua, pues para cualquier evento  $(t, q)$ , el valor de  $p$  que extremiza  $\tilde{\theta} = p_\alpha dq^\alpha - Hdt$  es aquél que cumple  $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$ . Para probar esto rigurosamente, basta con notar que si buscamos un movimiento que extremice la integral de  $\tilde{\theta}$  (ahora con  $p$  independiente de lo que haga  $q$ ), al hacer variaciones de la componente  $p$  del movimiento (con  $q$  fijo) notamos que la variación del integrando  $\tilde{\theta}$  está dada por

$$\delta\tilde{\theta} = \left( \dot{q}^\alpha \delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p^\alpha} \delta p^\alpha \right) dt,$$

por lo que un movimiento extremal necesariamente satisface la ecuación  $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$ . Así llegamos al **principio variacional fuerte**, según el cuál un movimiento en el mundo de velocidades satisface la ecuación de Euler-Lagrange si y sólo si su imagen en el mundo de impulsos es movimiento extremal de la integral de  $\tilde{\theta} = pdq - Hdt$ , sin restricciones para  $p$ , y con condiciones de borde  $(t_0, q_0)$  y  $(t_1, q_1)$ .

### 5.5. Dinámica en variedades simplécticas

Como ahora las variables  $t, q$  y  $p$  son componentes independientes de un evento  $x = (t, q, p)$  en el mundo de impulsos, la acción  $I$ , definida ahora para cualquier movimiento  $C = C(t)$  en el mundo de impulsos, puede escribirse como

$$I(C) = \int_{\text{Graf } C} \tilde{\theta} = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\theta}_\epsilon \dot{x}^\epsilon dt,$$

donde la última integral está evaluada a lo largo de  $x = C(t)$ . Ahora bien, la variación de  $I$  respecto del movimiento puede escribirse en términos de la 2-forma exterior  $\tilde{\omega}_{\lambda,\epsilon} = d_{[\lambda} \tilde{\theta}_{\epsilon]}$  (la diferencial exterior de  $\tilde{\theta}$ ) como

$$\delta I = \int_{\text{Graf } C} \delta_{[\lambda} \tilde{\theta}_{\epsilon]} = \int_{\text{Graf } C} d_{[\lambda} \tilde{\theta}_{\epsilon]} \delta x^\lambda = \int_{\text{Graf } C} \tilde{\omega}_{\lambda,\epsilon} \delta x^\lambda = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\omega}_{\lambda,\epsilon} \delta x^\lambda \dot{x}^\epsilon dt.$$

En efecto, si  $F = F(s, t)$  es una familia  $s$ -paramétrica de  $t$ -movimientos definidos en  $[t_0, t_1]$  que van de  $q_0$  a  $q_1$ , tenemos por el teorema de Stokes que

$$\begin{aligned} I(F_{s_1}) - I(F_{s_0}) &= \int_{[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]} \left( F^* \left( d\tilde{\theta} \right) \right) (ds \wedge dt) \\ &= \int_{[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]} \left( d_{[\lambda} \tilde{\theta}_{\epsilon]}(F) \frac{\partial F^\lambda}{\partial s} \frac{\partial F^\epsilon}{\partial t} \right) (ds \wedge dt) \\ &= \int_0^1 \left( \int_{t_0}^{t_1} d_{[\lambda} \tilde{\theta}_{\epsilon]}(F) \frac{\partial F^\lambda}{\partial s} \frac{\partial F^\epsilon}{\partial t} dt \right) ds \end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{d(I(F))}{ds} = \int_{t_0}^{t_1} d_{[\lambda]} \tilde{\theta}_\epsilon(F) \frac{\partial F^\epsilon}{\partial t} \frac{\partial F^\lambda}{\partial s} dt,$$

que también se puede escribir como

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} d_{[\lambda]} \tilde{\theta}_\epsilon \dot{x}^\epsilon \delta x^\lambda dt.$$

Entonces un movimiento será solución si y sólo si el covector  $\tilde{\omega}_{\lambda,\epsilon} \dot{x}^\epsilon$  es nulo durante todo el movimiento. Como

$$\tilde{\omega} = d\tilde{\theta} = d(p dq - H dt) = dp \wedge dq - dH \wedge dt,$$

definiendo  $\omega = dp \wedge dq$ , tenemos la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda,\epsilon} \dot{x}^\epsilon &= d_\lambda H d_\epsilon t \dot{x}^\epsilon - d_\lambda t d_\epsilon H \dot{x}^\epsilon \\ &= d_\lambda H - d_\lambda t \frac{d(H(x))}{dt}. \end{aligned}$$

Al desarrollar esta expresión en términos de las componentes  $(t, q, p)$  se obtienen, por supuesto, las ecuaciones de Hamilton, que no repetiremos. En sistema autónomos, en los que  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , el hamiltoniano es una constante de movimiento, y por lo tanto el último término se anula, quedando la ecuación de movimiento en la forma

$$\omega_{\lambda,\epsilon} \dot{x}^\epsilon = d_\lambda H,$$

o escrita sin índices

$$\omega(-, \dot{x}) = dH.$$

Aquí puede ignorarse la coordena  $t$  y pensarse que el movimiento transcurre en la variedad espacial de los pares  $(q, p)$ , que junto con la 2-forma no degenerada  $\omega$  tiene estructura de **variedad simpléctica**.

## Referencias

- [1] V.I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer, second edition, 1989.
- [2] K. Brown. Eccentrics, deferents, epicycles, and equants. Disponible en <http://mathpages.com/home/kmath639/kmath639.htm>.
- [3] M. P. do Carmo. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Editorial, 1990.
- [4] M. Giaquinta and S. Hildebrandt. *Calculus of variations: the Lagrangian formalism*, volume 1. Springer Verlag, 1996.

- [5] H. Goldstein. *Mecánica clásica*. Reverté, second edition, 1996.
- [6] W.R. Hamilton. Theory of systems of rays. *Transactions of the Royal Irish Academy*, 15:69–174, 1828.
- [7] W.R. Hamilton. Supplement to an essay on the theory of systems of rays. *Transactions of the Royal Irish Academy*, 16(part 1):1–61, 1830.
- [8] I. Newton, I.B. Cohen, A.M. Whitman, and J. Budenz. *The principia: mathematical principles of natural philosophy*. University of California Press [original work published 1678], 1999.
- [9] R. Penrose. *El camino a la realidad: Una guía completa de las leyes del universo*. Random House Mondadori, SA, 2006.
- [10] George Smith. Newton’s philosophiae naturalis principia mathematica. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University, winter 2008 edition, 2008.
- [11] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010.