UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Introducción a la Teoría Geométrica de Invariantes

Javier Nicolás Gargiulo Acea

Director: Fernando Cukierman

Fecha de Presentación: 21 de Marzo de 2012

Agradecimientos

No es sencillo recordar y sintetizar en tan poco espacio tantos recuerdos y tanta gente que me ha ayudado en este camino, que comenzó cuando un día extraño me levanté y dije quiero estudiar matemática. Antes que nada comenzaré con las personas que estuvieron a mi lado en ese momento, y aunque les sonara raro, siempre estuvieron conmigo y me apoyaron, y que son mis papás Graciela y Eduardo, obviamente sin ellos esto hubiese sido imposible.

A Seba, el hermano que me dió la vida, gracias por haber estado siempre, tanto en las buenas como en las malas, por haberme entendido incluso cuando pasaba mucho tiempo sin vernos.

A Dani, esa persona especial, esa persona que hace que todo sea con una sonrisa, gracias por hacerme tan feliz, por toda tu ayuda y por estar siempre conmigo. Gracias por tantos momentos, y también por sentir al rojo.

A Eze, otra persona de fierro, que conozco desde que tengo uso de razón, gracias también por siempre haberme entendido.

A Nico un amigazo con el que realice el CBC, y con el compartimos grandes anécdotas, una gran persona con el comenzó esta locura.

A mis inseparables amigos del camino, Chou y Tom, gracias por tantas proezas y jornadas épicas, por haberme bancado durante tantos años.

A toda la barra de fondo: De, Agus, Dani, Fede, Maxi, Sergio, Tute, Tin, Nano y Dami. Un grupo de personas increíbles y divertidas, con las que paso casi todo mi tiempo, que con sus locas ideas me hacen morir de risa. Gracias por todo su apoyo a mis ligamentos cruzados, en los momentos más difíciles, y por siempre brindar sus oidos a mis interminables anécdotas, de corridas y trabavolantes.

A Mati, quiero agradecerle en especial por tantas cosas compartidas en estos últimos años, y por soportarme moral y futbolísticamente en el interior de su hogar, y a sus papás Olga y Osvaldo, por la misma razón y por buenos consejos.

A De, por estar siempre en las buenas y malas.

A Milena por su gran ayuda para la corrección de este trabajo.

A Miguel, mi gran motivador de la matemática y una persona que admiro mucho. A Adrian otro gran amigo que conocí en la facultad y que me acompañó en estos años.

Al Tin y a Cochi mis compañeros de aventuras futbolísticas.

A mis primos Leonel y Leandro, por haber compartido tanto, por ser mis hermanos y por siempre ayudarme en todo.

A mis abuelos, Ita y José, que son las personas que más quiero y admiro, gracias por formarme como persona.

A mis tíos Jorge y Monica, personas que quiero muchísimo y que siempre estan conmigo.

A mi primo Matias (o Ezequiel según él), que aunque vivamos lejos, siempre se preocupa por mi y comparte unos buenos tragos.

A toda mi familia de Avellaneda, mi abu Teresa, mi madrina Noemi, mis tíos Nestor y Marcela, y a mis dulces primitas.

A Andrea Solotar, Nicolas Botbol y Mariano Suarez Alvarez, por sus clases, por siempre responder mis dudas y por compartir su gran conicimiento.

Al jurado, Marco Farinati y Eduardo Dubuc por su tiempo y sus sugerencias.

A Fernando Cukierman, mi guía matemático en estos últimos años, por su gran conocimiento y su predisposición, y por siempre darme buenos consejos y sabias anécdotas.

A la UBA, por otorgarme la Beca Estímulo, que sirvió de gran motivación para la realización de este trabajo.

Al fútbol, pero especialmente al glorioso Club Atlético Independiente , por su grandeza.

Simplemente: gracias.

Introducción

En Geometría Algebraica y Analítica frecuentemente los teoremas se expresan como una igualdad entre fórmulas que involucran las coordenadas de puntos o de otras figuras. Para que dicha igualdad tenga un verdadero significado geométrico, debe ser invariante por cambios de coordenadas. Esto lleva naturalmente al estudio del anillo de funciones (polinomiales, racionales, etc.) invariantes bajo la acción de un cierto grupo de transformaciones. Estas consideraciones son también relevantes en algunas áreas del Álgebra y de la Física.

Estas ideas (relacionadas también con el Programa de Erlangen, de Felix Klein) se desarrollaron especialmente durante el siglo XIX, dando lugar a la Teoría Clásica de Invariantes. Uno de los problemas principales era exhibir explícitamente generadores (y sus relaciones) del anillo de invariantes en varios casos de acciones de grupos en anillos de polinomio.

Hacia fines del siglo XIX aparecieron trabajos importantes de Hilbert, que resolvieron varios de los problemas del área, aunque la solución no era constructiva sino que solamente existencial. Estos trabajos no tuvieron aceptación inmediata entre los otros expertos, pero posteriormente impulsaron una mayor actividad en aspectos más abstractos del Algebra.

La expresión más simple, a parte de la lineal, es la cuadrática, que en coordenadas homogéneas determina la ecuación:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Estudiando el cociente complejo X/Y, esta ecuación tiene o bien dos soluciones distintas, o bien una solución doble, dependiendo del valor de $b^2 - 4ac$, y esto se sigue de que las soluciones vienen dadas por:

$$\frac{x}{y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La teoría de invariantes aborda esta cuestión investigando el efecto de los cambios lineales en las variables de polinomios que determinan ecuaciones. La trasnformación lineal determinada por:

$$\overline{x} = a_{11}x + a_{12}y$$

$$\overline{y} = a_{21}x + a_{22}y$$

altera la ecuación cuadrática, y cambia la expresión $b^2 - 4ac$ por $b^2 - 4ac(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2$. Por lo tanto, la expresión $b^2 - 4ac$ es un invariante, porque bajo la trasnformación solo cambia en un múltiplo de una potencia de su determinante.

La teoría de invariantes del siglo XIX se basó en el estudio de un polinomio homogéneo general de cualquier grado y en cualquier número de variables. Durante esa época buscaban expresiones en los coeficientes del polinomio dado que, cuando se hace una transformación lineal en las variables, cambia sólo en un múltiplo de una potencia del determinante. Los primeros teóricos de invariantes, Cayley y Sylvester en Inglaterrra , Aronhold, Clebsch y Gordan en Alemania, y Hermite y Jordan en Francia, realizaron numerosos y dificultosos cálculos en el área, y de a poco, para grados bajos, se fueron dando cuenta que por lo general solían encontrar "bases" de invariantes, es decir, un conjunto finito de invariantes, tales que el resto resultaba un polinomios en ellos. De hecho, Silvester tenía una forma de enumerar invariantes de un grado dado. Y con uno esfuerzo considerable, Paul Gordan habia demostrado en 1868 que siempre existía una base finita para formas binarias de cualquier grado. Sin embargo, las inmensas dificultades técnicas que implicaba trabajar con tres o más variables bloqueban ese tipos de intentos para dar una demostración más general. En este punto es donde Hilbert hizo su gran aporte a esta teoría, pues logro demostrar uno de estos métodos generales. La demostración entera ocupaba poco apenas dos páginas, y contenía en su interior una nueva forma de pensar matemática, pues demostraba su existencia de una forma no explícita. A raiz de esto fue que recibió muchas criticas de los principales estudiosos del área, espacialmente por parte de Gordan, que calificó al trabajo como "teología y no matemática".

El aporte de Hilbert sobre esta área fue más profundo aún, pues en la formulación de su famosa lista de problemas, que estableció en el Congreso Internacional de Matemáticos en Paris, en el año 1900, formuló una versión más general de aquel problema clásico sobre invariantes que ya había resuelto, permitiendo o admitiendo distintos grupos de transformaciones. Específicamente esto esta, de fondo, abordado en su problema 14. Ya que si bien, la teoría estaba bien comprendida cuando se permitían cambios lineales en las variables para todo tipo de matrices (en $\mathbb{GL}_n$ o en $\mathbb{SL}_n$), para subgrupos de ellas u otros grupos de transformacioens se tornaba difícil de entender, y ya no era claro que siempre existieran bases finitas.

En los años 1950's comenzó el desarrollo moderno de la Geometría Algebraica, especialmente a través de los trabajos de Jean Pierre Serre y de Alexander Grothendieck, con antecedentes en trabajos de Andre Weil y de Oscar Zariski, entre otros autores. Grothendieck realizó un nuevo estudio de varios espacios de moduli clásicos, como los esquemas de Picard y los esquemas de Hilbert (en FGA, Fondements de la Geometrie Algebrique). Un ingrediente necesario para el análisis de estos espacios es la existencia de una variedad cociente $X//G$, donde G es un grupo algebraico actuando en la variedad algebraica X, bajo hipótesis apropiadas. Grothendieck planteó varias preguntas sobre esto, que fueron respondidas por David Mumford, a travś de su Teoría Geomŕica de Invariantes, expuesta en la primera edición ([GIT]).

El presente trabajo consiste de un resumen de todos estos elementos clásicos de la Teoría Geométrica de invariantes, e intenta dar un panorama amplio de estos conceptos involucrados. Nuestro objetivo principal es el desarrollo de las construcciones, conceptos y resultados principales de la Teoría Geométrica de Invariantes de Mumford. Esto incluye, más específicamente: condiciones para generación finita de anillos de invariantes, estructura de dichos anillos en varios casos, nociones de cocientes algebraicos, el concepto de estabilidad y el criterio numérico de estabilidad.

A lo largo del primer capítulo estudiaremos aspectos básicos sobre grupos algebraicos afines, que son la herramienta de base para la formulación de todos los problemas clásicos de la teoría. Discuteremos cuestiones sobre su estructura, morfismos, y además sobre uno de sus principales resultados, que demuestran que a este tipo de grupos siempre podremos pensarlos como subgrupos de matrices.

En los capítulos dos y tres, abordaremos todos los problemas clásicos ya mencionados. Comenzaremos por contraejemplos y casos afirmativos del problema 14 de generación finita, y estudiaremos algunos aspectos que se desprenden de esto como la construcción de operadores de Reynolds, que son la herramienta clave que deberá contener un grupo para que los invariantes de sus acciones queden finitamente generados. También estudiaremos series de Hilbert, que resulta un concepto muy util para la descripción de anillos de invariantes generales. El último capítulo aborda el problema de la construcción de cocientes geométricos, que deriva en el estudio de la estabilidad de puntos sobre las variedades en las que se actúa, que resulta el elemento fundamental para que dichos cocientes tengan un verdadero significado geométrico, o expresado más formalmente, que estos cocientes tenga una estructura de variedad. Este capítulo finaliza con una breve descripción sobre criterios numéricos que permiten estudiar la estabilidad de puntos. Además, a modo de consulta, el trabajo cuenta con un apéndice sobre diversos resultados de geometría algebraica, que son utilizados a lo largo de los capítulos, y que permiten una mejor compresión del marco teórico en donde se encuentra inscripta esta teoría.

Índice general

Capítulo 1

Grupos algebraicos afines

1.1. Aspectos básicos

En el presente capítulo discutiremos las propiedades básicas de grupos algebraicos. En particular, nos vamos a centrar en el caso de los grupos algebraicos afines, que se desprenden del estudio de las variedades afines. La idea principal consta de l desarrollo de sus módulos racionales y las acciones de ellos mismos sobre otras variedades algebraicas. Los módules racionales serán el principal obejto de estudio de los capítulos que siguen y, por otra parte, conformarán la base sobre la que estudiaremos los invariantes y las nociones de ”estabilidad“.

Definición 1.1.1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y sea G una variedad algebraica definida sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Asumamos que G está dotado de una estructura de grupo abstracto, con una operación $m : G \times G \to G$, con inversos dados por $i : G \to G$ y con neutro $1 \in G$.

Decimos que (G, m, i) (o en forma abreviada, G) es un *grupo algebraico* si m e i son morfismos de variedades algebraicas. Si, además, G es una variedad afín, decimos que (G, m, i) es un grupo algebraico afín.

Observación 1.1.2. Si $x \in G$, la traslación a derecha $\rho_x : G \to G$, $\rho_x(y) = xy$ es un isomorfismo de variedades que manda el $1 \in G$ en x, con inversa dada por $\rho_{x^{-1}}$. Análogamente ocurre lo mismo para la traslación a izquierda λ_x.

Esto nos garantiza que todas las propiedades geométricas locales que se satisfacen en un punto del grupo algebraico lo harán en cualquier otro. Por ejemplo, en cualquier variedad algebraica el conjunto de puntos regulares es no vacío, entonces podemos deducir que todo grupo algebraico es una variedad no singular.

Ahora definamos las sub-estructuras asociadas a los grupos algebraicos. Sabemos que dado un grupo abstracto tenemos bien definidos sus subgrupos, y que dado cualquier variedad afín, sus subconjuntos cerrados, resultan nuevamente variedades afines. De este modo podemos definir:

Definición 1.1.3. Sea G un grupo algebraico, decimos que H es un subgrupo algebraico, si $H \leq G$ es un subgrupo abstracto y un subconjunto cerrado de G. Además, como $H \times H$

es cerrado en $G \times G$ y la restricción de un morfismo a una subvariedad es un morfismo, se sigue que H es un grupo algebraico.

Definición 1.1.4. Sean G, H dos grupos algebraicos, un morfismo de grupos algebraicos, es un morfismo de variedades $\varphi : H \to G$ que además es un morfismo de grupos abstractos.

1.1.1. Grupos algebraicos y Álgebras de Hopf

Al trabajar con variedades algebraicas afines podemos destacar un isomorfismo categórico entre ellas y las álgebras afines, Ver apéndice en A.4.9. Para el caso de los grupos algebraicos afines haremos algo similar. Usando que, en particular, son variedades algebraicas afines, podremos establecer una correspondencia entre ellos y alguna subcategoría de las álgebras afines. Precisamente, los grupos algebraicos afines se corresponden con aquellas K-álgebras afines que tienen una estructura de álgebra de Hopf.

Definición 1.1.5. Álgebras de Hopf:
Sea A un K-álgebra asociativa con unidad, supongamos que el producto está dado por el morfismo de K-álgebras $\mu : A \otimes_k A \longrightarrow A$ y la unidad dada por la inclusión $\eta : K \longrightarrow A$. Diremos que A es una K-biálgebra asociativa si existen morfismos de K-álgebras: $\Delta : A \longrightarrow A \otimes_k A$ (comultiplicación) y $e : A \longrightarrow K$ (counidad), tales que los siguientes diagramas conmutan:

- Coasociatividad:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "Id\otimes\Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes Id"'] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

- Counidad:

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[dr, "Iso"'] & A \otimes A \arrow[l, "e\otimes Id"'] \arrow[r, "Id\otimes e"] & A \otimes K \arrow[dl, "Iso"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Diremos que una bi-álgebra es un Álgebra de Hopf si existe un morfismo K-lineal $S : A \longrightarrow A$, al que llamaremos antípoda, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dd, "Id\otimes S"'] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "e"] & A \otimes A \arrow[dd, "S\otimes Id"] \\ & K \arrow[d, "\eta"] & \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A & A \otimes A \arrow[l, "m"'] \end{tikzcd}$$

Observación 1.1.6. Cabe destacar que hay distintas formas equivalentes de definir al objeto antípoda", y que quizá la que hemos definido en el desarrollo anterior, no es la más usual en la bibliografiía. Por ejemplo, es posible definir un producto llamado de convolución sobre $Hom_k(A, A)$ de modo tal que la antípoda S resulta por definición la inversa de la Id y donde $e \circ \eta$ resulta el neutro de dicho producto.

Definición 1.1.7 (Notación de Sweedler)**.** En general, para cualquier co-álgebra (C, Δ, ϵ), se usa una notación especial para expresar de una manera más sencilla la comultiplicación, la notación de Sweedler:

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

Esta notación omite hacer referencia a la cantidad de sumandos de $\Delta(c)$ y a la dependencia de dicha cantidad respecto de c. Es muy útil a la hora de expresar propiedades de coálgebras, biálgebras o Álgebras de Hopf. Por ejemplo, la coasociatividad puede expresarse del siguiente modo:

$$\sum c_{1,1} \otimes c_{1,2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2,1} \otimes c_{2,2}.$$

Y a estos elementos podemos notarlos directamente como:

$$\sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.$$

Para finalizar esta digresión sobre co-álgebras y Álgebras de Hopf, definimos el concepto dual de módulos sobre álgebras asociativas para el caso de coálgebras asociativas.

Definición 1.1.8. Sea C una co-álgebra asociativa sobre un cuerpo K y sea M un K-espacio vectorial, diremos que M es un co-módulo a derecha si existe un morfismo K-lineal $\Phi : M \longrightarrow M \otimes C$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Phi"'] & M \otimes C \arrow[d, "Id\otimes\Delta"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\Phi\otimes Id"'] & M \otimes M \otimes C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
M \otimes C \arrow[r, "Id\otimes\epsilon"'] & M \otimes K
\end{tikzcd}$$

La misma definición, pero para comódulos a izquierda sobre C, puede darse de forma análoga.

Observación 1.1.9. De forma análoga a la notación de Sweedler, en el caso de comódulos, la correspondiente acción podemos expresarla como:

$$\Phi(m) = \sum m_0 \otimes m_1 \in M \otimes C.$$

Las propidades que debe satisfacer Φ quedarán expresadas con esta notación del siguiente modo:

$$\sum m_{0,0} \otimes m_{0,1} = \sum m_0 \otimes m_{1,1} \otimes m_{1,2} := \sum m_o \otimes m_1 \otimes m_3.$$

$$\sum \epsilon(m_1) m_0 = m.$$

Continuemos con la relación de estas álgebras con los grupos algebraicos afines. Sea G una variedad algebraica afín y sea $K[G]$ su K-álgebra afín asociada. Veamos que dar una estructura de grupo algebraico sobre G es equivalente a definir una estructura de K-Álgebra de Hopf sobre $K[G]$.

- Dar un morfismo de variedades $m : G \times G \longrightarrow G$ es equivalente a dar un morfismo de K-álgebras $\Delta = m^* : K[G] \longrightarrow K[G] \otimes K[G]$.
- Dar un morfismo de variedades $i : G \longrightarrow G$, que corresponderá a tomar inversos en el grupo, es equivalente a definir un morfismo de K-álgebras $S = i^* : K[G] \longrightarrow K[G]$, que corresponderá al morfismo antípoda.
- Definir un elemento neutro 1_G en el producto de G, que puede pensarse como un morfismo de grupos algebraicos $1 : \{1_G\} \longrightarrow G$, es equivalente a definir un morfismo de K-álgebras $\epsilon = 1^* : K[G] \longrightarrow K$.

Veamos que las propiedades que deben satisfacer m, i y 1 para que G sea un grupo algebraico afín son equivalentes a las propiedades que deben satisfacer Δ,S y ϵ para que $K[G]$ resulte un Álgebra de Hopf.

1. m es asociativo si y solo si $\Delta = m^*$ es co-asociativo, es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "m\circ(m\times Id)"] \arrow[d, "m\circ(Id\times m)"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

resulta conmutativo si y sólo si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} K[G] \otimes K[G] \otimes K[G] & K[G] \times k[G] \arrow[l, "m^*\circ(m^*\times Id)"'] \\ K[G] \times K[G] \arrow[u, "m^*\circ(Id\times m^*)"] & K[G] \arrow[l, "m^*"] \arrow[u, "m^*"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo

2. El elemento 1_G (o equivalentemente $1 : \{1_G\} \longrightarrow G$), resulta un neutro para el producto definido por m si y solo si ϵ cumple con la propiedad correspondiente a la counidad, es decir:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, <->] & \\ G \times G \arrow[u, "m"] & \{1_G\} \times G \arrow[l, "1\times Id"] \end{tikzcd}$$

es conmutativo si y sólo si

$$\begin{tikzcd}
K[G] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
K[G] \otimes K[G] \arrow[r, "\epsilon\otimes Id"] & K \otimes K[G]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

3. La función i determina inversos para el producto dado por m si y solo si el morfismo de álgebras $S = i^*$ cumple con el diagrama correspondiente asociado a la antípoda.
Si tomamos el morfismo trivial $h : G \longrightarrow \{1_G\}$, su correspondiente morfismo de álgebras $\mu : K[G] \longrightarrow K$ resulta la unidad del álgebra. Además, si denotamos a $d : G \longrightarrow G \times G$ como el morfismo diagonal de grupos algebraicos, su correspondiente morfismo de álgebras $d^* : K[G] \otimes K[G] \longrightarrow K[G]$, resulta el producto del álgebra. La conmutatividad del siguiente diagrama expresa la propiedad que deben satisfacer los inversos del producto:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] & G & G \times G \arrow[l, "m"'] \arrow[dd, "Id\times i"] \\
 & \{1_G\} \arrow[u, "1"'] & \\
G \times G \arrow[from=uu, "i\times Id"'] & G \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "d"] \arrow[u, "h"'] & G \times G
\end{tikzcd}$$

es conmutativo si y sólo si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
K[G] \otimes K[G] \arrow[dd, "Id\otimes S"'] & K[G] \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\epsilon"] & K[G] \otimes K[G] \arrow[dd, "S\otimes Id"] \\
 & K \arrow[d, "h^*"] & \\
K[G] \otimes K[G] \arrow[r, "d^*"] & K[G] & k[G] \otimes K[G] \arrow[l, "d^*"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

En todos los casos, la equivalencia entre la conmutatividad de los respectivos diagramas se debe al hecho de que los diagramas de K-álgebras explicitados corresponden a aplicarle el funtor contravariante que va de la categoría de variedades algebraicas afines a la categoría de K-álgebras afines.

Así queda demostrado que dar una estructura de K-álgebra de Hopf sobre $K[G]$ es equivalente a dar una estructura de grupo algebraico afín sobre una variedad afín G. Utilizando como base la equivalencia categórica entre variedades y álgebras (ver apéndice, A.4.9), obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.1.10. Sea $\mathcal{G}$ la cateoría de grupos algebraicos afines y sea $\mathcal{H}$ la categoría de Álgebras de Hopf afines. Luego, el funtor $K[.] : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}^{op}$, que asocia a cada grupo algebraico afín G su K-álgebra afín asociada $K[G]$, es una equivalencia categórica. Su inversa está dada por tomar el espectro maximal, es decir, por considerar todos los ideales maximales de $K[G]$.

1.1.2. Ejemplos

1. Todo grupo finito es trivialmente un grupo algebraico afín.

2. El grupo aditivo $\mathbb{G}_a$ consiste en la variedad algebraica afín $A^1 = \mathbb{K}$, con la estructura dada por la suma en $\mathbb{K}$, es decir, $m(a,b) = a+b$ y los inversos $i(a) = -a$. $\mathbb{G}_a$. Con dicha estructura resulta un grupo algebraico afín donde:

$$K[\mathbb{G}_a] = K[x].$$

Recordemos que probar que $m : \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a$ es un morfismo de variedades algebraicas es equivalente a probar que:

$$m^* : K[\mathbb{G}_a] \longrightarrow K[\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a] \simeq K[\mathbb{G}_a] \otimes K[\mathbb{G}_a]$$

es un morfismo de K-álgebras. Para cada $p \in K[x]$:

$$m^*(p)(x,y) = p(x+y) \in K[x,y],$$

con lo cual es claro que m es un morfismo de variedades. Análogamente es sencillo probar que i también resulta un morfismo, y así concluimos que $\mathbb{G}_a$ es un grupo algebraico afín.

3. El grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m$, como variedad consiste en $A^1 - \{0\} = \mathbb{K}^*$. Además, es sencillo probar que:

$$K[\mathbb{G}_m] = K[x, x^{-1}].$$

Dado que $m(a,b) = a.b$, los morfismo asociados:

$$m^* : K[x,x^{-1}] \longrightarrow K[x,x^-1] \otimes K[x,x^{-1}] \qquad i^* : K[x,x^{-1}] \longrightarrow K[x,x^{-1}],$$

quedan determinados por $m^*(x^{\pm}) = x^{\pm} \otimes x^{\pm}$ e $i^*(x^{\pm}) = x^{\mp}$, con lo cual es claro que $\mathbb{G}_m$ resulta un grupo algebraico afín.

4. El grupo $\mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$, de matrices n-dimensionales e inversibles con coeficientes en $\mathbb{K}$, es un grupo algebraico afín. Pues es un subconjunto abierto básico del espacio afín de todas las matrices (espacio afín n^2 dimensional), pues es el conjunto de todas las matrices donde el determinante no se anula (la función determiante Δ es polinomial en los coeficientes de la matriz).

Es decir, si M_n es el espacio de las matrices de $n \times n$, entonces $\Delta \in K[M_n]$ y además:

$$\mathbb{GL}_n(\mathbb{K}) = D_\Delta(K^{n^2}).$$

Es sencillo demostrar que $K[\mathbb{GL}_n]$, el anillo coordenado de $\mathbb{GL}_n$, es $K[x_1, \dots, x_{n^2}, \frac{1}{\Delta}]$. El producto de dos matrices puede expresarse como una función polinomial en los coeficientes de ambas matrices y el inverso de una matriz también es polinomial en las coordenadas x_{ij} y en $\frac{1}{\Delta}$. Como $\frac{1}{\Delta} \in K[\mathbb{GL}_n]$ es claro que i^* define un morfismo de K-álgebras y por lo tanto $i : \mathbb{GL}_n \longrightarrow \mathbb{GL}_n$ define también un morfismo de variedades. Explícitamente, el morfismo m^* queda determinado por las fórmulas:

- $m^*(x_{ij}) = \sum x_{ik} \otimes x_{kj}$.
- $m^*(\frac{1}{\Delta}) = \frac{1}{\Delta} \otimes \frac{1}{\Delta}$.

Así queda demostrado que $\mathbb{GL}_n$ es un grupo algebraico afín.

5. Por lo desarrollado anteriormente, sabemos que todo subgrupo algebraico de $\mathbb{GL}_n$ define un grupo algebraico afín. A estos grupos los llamaremos grupos algebraicos lineales, y son de mucha importancia para la correspondiente teoría debido a que todo grupo algebraico afín es isomorfo a un grupo lineal. En otras palabras, como demostraremos más adelante, es cierto que un grupo algebraico es lineal si y solo si es afín.

   Destacaremos a continuación ejemplos de grupos lineales que son particularmente importantes:

   - El grupo lineal especial $\mathbb{SL}_{nn}$ dado por $\mathbb{SL}_{nn} = \{A \in \mathbb{GL}_n : \det A = 1\}$, es un subgrupo cerrado de $\mathbb{GL}_n$, con la topología Zariski, debido a que $\det \in K[\mathbb{GL}_n]$.
   - El subgrupo $\mathbb{B}_n$ de todas las matrices triangulares superiores es un subgrupo algebraico afín de $\mathbb{GL}_n$. Claramente, este espacio es isomorfo como variedad afín a $\mathbb{A}^{\frac{n(n+1)}{2}} \times (\mathbb{K}^*)^n$
   - Otro ejemplo parecido al anterior es $\mathbb{D}_n$, el grupo de todas las matrices diagonales, que como subgrupo algebraico de $\mathbb{GL}_n$ resulta isomorfo a $(\mathbb{K}^*)^n = \mathbb{G}_m^n$. A este grupo lo llamaremos toro n-dimensional.
   - Denotamos por $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{GL}_n$ al subrgrupo de todas las matrices triangulares superiores con coeficientes de la diagonal iguales a 1, es decir:

     $$\mathbb{U}_n = \{A \in \mathbb{GL}_n : a_{ij} = 0 \, si \, i > j \, , \, a_{ii} = 1\}.$$

     Este grupo algebraico afín es isomorfo a $\mathbb{A}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Además a los subgrupos cerrados de $\mathbb{U}_n$ los llamaremos unipotentes.

La siguiente proposición muestra una generalización de los argumentos usados en los ejemplos anteriores:

Proposición 1.1.11. Sea $T \in \mathbb{GL}_n$ una matriz inversible, consideremos $\Omega_T = \{X \in \mathbb{GL}_n : XTX^t = T\}$, dicho subgrupo resulta un subgrupo algebraico de $\mathbb{GL}_n$.

Demostración. Puede encontrarse en [FSR, Cáp. 3]. □

Por último veremos cómo funcionan los productos de grupos en este contexto algebraico particular:

Observación 1.1.12. Si G y G' son dos grupos algebraicos, entonces $G \times G'$ es también un grupo algebraico, con el producto y el inverso tomado coordenada a coordenada. El hecho de que la operación producto $m_{G\times G'}$ sea un morfismo de variedades se sigue de que puede expresarse de la siguiente forma:

$$m_{G\times G'} = m_G \times m_{G'} \circ (Id \times S \times Id) : G \times G' \times G \times G' \longrightarrow G \times G'$$

Donde $S : G' \times G \longrightarrow G \times G'$ es la función que intercambia los factores.

Ejemplo 1.1.13. Utilizando la observación anterior podemos introducir un ejemplo clásico muy útil: el toro algebraico n dimensional, al que denotaremos T_n y que corresponde a n copias del grupo multiplicativo G_m, es decir $T_n = G_m^n$.

1.1.3. Resultados básicos sobre subgrupos y morfismos

En esta sub-sección, veremos las principales propiedades de los grupos algebraicos, sus sub-grupos y morfismos. Empezaremos viendo cómo, en este caso particular de variedades, los conceptos de irreducibilidad y conexión se relacionan.

Proposición 1.1.14. Sea G un grupo algebraico, luego se cumplen las siguientes afirmaciones:

I) Para cada $x \in G$ existe una única componente irreducible G^x que contiene al elemento x. Además $G^x = xG^{1_G}$ para cada $x \in G$.

II) G^{1_G} es un subgrupo de G cerrado, normal y de índice finito.

III) Las componentes irreducibles coinciden con las componentes conexas de G.

IV) Todo subgrupo cerrado de G de indice fínito contiene a G^{1_G}

Demostración. **i)** Sabemos que dado $x \in G$ existe una componente irreducible de G como espacio topológico que contiene a x. Para demostrar su unicidad supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x = 1_G$.

Si existen dos componentes irreducibles X_1 y X_2 que contienen a 1_G, entonces $X_1 \times X_2$ resulta irreducible en $G \times G$, y luego, su imagen por el morfismo m (que define el producto de G) también lo es. Por lo tanto:

$$\overline{X_1 X_2}$$

también resulta irreducible. De esto último, usando que X_1 y X_2 son componentes irreducibles, obtenemos que:

$$X_1 = X_2 = X_1 X_2 = \overline{X_1 X_2}$$

. A partir de esta última desigualdad podemos deducir, además de la unicidad de dicha componente, que G^{1_G} resulta cerrado.

ii) Ya probamos que G^{1_G} resulta cerrado como subespacio y además que:

$$G^{1_G}.G^{1_G} = G^{1_G}.$$

Como además el morfismo i (que determina los inversos de G), es un isomorfismo de variedades, entonces $(G^{1_G})^{-1}$ resulta una componente irreducible de G que contiene a 1_G. Luego:

$$(G^{1_G})^{-1} = G^{1_G},$$

con lo cual dicho subespacio resulta un subgrupo. Con un argumento similar, usando que los automorfismos que derivan de conjuagar resultan isomorfismos de variedades se sigue que:

$$xG^{1_G}x^{-1} = G^{1_G},$$

y así resulta ser normal.

Las coclases xG^{1_G} resultan, por lo visto anteriormente, las componentes de G, y a partir de la noetherianidad de G como espacio topológico, resulta que G^{1_G} es de índice finito (pues G tiene finitas componentes irreducibles).

iii) Todo espacio irreducible resulta trivialmente conexo y cada compoente conexa de G se puede descomponer como una unión de componentes irreducibles. Además probamos que, en este caso particular de variedades algebraicas, las componentes irreducibles resultan disjuntas, luego dichas componentes conexas deberán coincidir con las componentes irreducibles.

iv) Sea H un subgrupo cerrado de G de indice finito, si llamamos H^{1_G} a la componente irreducible de H que contiene a 1_G, luego H^{1_G} resulta un subgrupo cerrado de índice fintio de G^{1_G}. Observemos que:

$$G^{1_G} = \bigsqcup gH^{1_G},$$

y como dicha unión puede ser tomada sobre todos los elementos de G/H, es una unión finita y cada componente es un cerrado. Con lo cual, $G^{1_G} - H^{1_G}$ es tambien cerrado, y así podemos deducir que H^{1_G} es a la vez cerrado y abierto en G^{1_G}. A partir de un argumento de conexión es inmediato que $G^{1_G} = H^{1_G}$

□

Observación 1.1.15. Veamos algunos detalles que podemos deducir a partir de la proposición anterior:

- Para grupos algebraicos, las nociones de conexión e irreducibilidad coinciden. Por eso es usual en la bibliografía hablar de Grupos algebraicos conexos y no de irreducibles.

- A partir de iii) y iv), podemos deducir que G^{1_G} es el único subgrupo irreducible de G de indice finito.

Ahora veamos algunas propiedades que involucran y relacionan subespacios abiertos y cerrados de G con subgrupos abstractos de dicho grupo algebraico.

Proposición 1.1.16. Sea G un grupo algebraico y U,V dos abiertos no vacíos de G, con V además denso. Luego $G = UV$.

Demostración. Como ya hemos mencionado anteriormente, la inversión i y la traslación a derecha ρ_x son isomorfismos de variedades algebraicas. Así para cada $x \in G$, el conjuto xV^{-1} es un abierto denso de G. Luego:

$$U \cap xV^{-1} \neq \emptyset,$$

es decir existen $v \in V$ y $u \in U$ tales que : $u = xv^{-1}$. En conclusión $UV = G$ □

A partir de esta proposición podemos obtener la siguiente, que nos relaciona subgrupos y clausuras:

Proposición 1.1.17. Sea H un subgrupo de G:

a) La clausura $\overline{H}$ es también un subgrupo de G.

b) Si, además, H es un subconjunto constructible. Entonces $\overline{H} = H$, es decir, H es un subgrupo algebraico de G.

Demostración. Veamos primero que la clausura de todo subgrupo abstracto también resulta un subgrupo.

Si m es el morfismo de variedades que define el producto de grupo de G, entonces $m(H \times H) \subseteq H$, y por ser dicho morfismo continuo obtenemos que :

$$m(\overline{H \times H}) = m(\overline{H} \times \overline{H}) \subseteq \overline{H}.$$

Por lo tanto, $\overline{H}$ es cerrado para el producto. Un argumento análogo aplicado al morfismo inversión i, nos demuestra que tambén es cerrado tomando inversos, con lo cual queda demostrado a).

Veamos ahora la segunda afirmación: a partir de que H es constructible (Ver apéndice para estas defenciones A.3.2) podemos deducir que existe $U \subseteq H$ un abierto no vacío dentro del grupo algebraico $\overline{H}$. Además, observemos que:

$$H \bigcup_{h \in H} hU,$$

y luego resulta también un abierto en $\overline{H}$. Para concluir nuestro enunciado basta aplicar a), tomando $U = V = H$ como abiertos en $\overline{H}$. deduce que $H = HH = \overline{H}$.

□

Observación 1.1.18. Observar que en la proposición anterior, en el momento de demostrar la segunda afirmación, sólo usamos que H contenía un abierto no vacío de $\overline{H}$. De ese modo, se puede debilitar la hipótesis de constructible que hemos pedido en el correspondiente enunciado.

Para finalizar con este conjunto de propiedades básicas sobres grupos algebraicos, veamos algunos resultados que cumplen los morfismos entre grupos algebraicos:

Proposición 1.1.19. Sea $\phi : G \longrightarrow$ un morfismo de grupos algebraicos, entonces:

I $Ker\ \phi$ es un subgrupo algebraico de G.

II $\phi(G)$ también es un subgrupo algebraico de H.

III $\phi(G^{1_G}) = (\phi(G))^{1_H}$

Demostración. La afirmación I es obvia a partir de que $Ker\ \phi = \phi^{-1}\{1_H\}$.

Para II), basta recordar que para todo morfismo ϕ de variedades algebraicas, su imagen $\phi(G)$ contiene un abierto no vacio de su clausura (Ver A.4.10 en el apéndice). Luego usando la proposición anterior, $\phi(G)$ resulta un subgrupo cerrado de H.

Por último, observemos que $\phi(G^{1_G})$ es cerrado por la afirmación II), y además es irreducicle por ser la imagen de un morfismo continuo, luego:

$$\phi(G^{1_G}) \subseteq (\phi(G))^{1_H}.$$

Como $\phi(G^{1_G})$ tiene índice finito en $\phi(G)$, se sigue, a partir de la proposición 1.1.14 , que: $(\phi(G))^{1_H} \subset \phi(G^{1_G})$, lo cual concluye nuestra demostración. □

1.2. Acciones y G-módulos racionales

1.2.1. G-variedades

Comencemos definiendo acciones de un grupo algebraico sobre otra variedad algebraica. Esto nos permitirá estudiar al grupo algebraico como un grupo de transformaciones sobre otro objeto algebraico y geométrico. En general este desarrollo correponde a un caso particular del estudio de las acciones de un grupo sobre un conjunto abstracto.

Definición 1.2.1. Sea G un grupo algebraico y X una variedad algebraica. Diremos que X es una G-variedad, si existe una acción, a la que llamaremos acción regular de G en X, dada por un morfismo de variedades. Es decir que existe $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ morfismo de variedades que cumple:

- $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$
- $\alpha(1_G, x) = x$ para todo elemento $x \in X$

Dicha acción α es una acción de grupos abstractos, que además es un morfismo de variedades algebraicas. Usualmente, a dicha acción la denotaremos de la siguiente forma: $\alpha(g, x) = g.x$.

Observación 1.2.2. Así como lo indicamos luego de la definición de grupos algebraicos, si fijamos un elemento $g \in G$ y tomamos el morfismo $\phi_g : X \longrightarrow X$, con $\phi_g(x) = g.x$, este resulta un isomorfismo de variedades algebraicas, con inversa dada por $\phi_{g^{-1}}$.

Daremos algunas definiciones básicas y usuales que se desprenden de la correspondiente definición de G-variedad.

Definición 1.2.3.

I Sean X e Y dos G-variedades, para cierto grupo algebraico G. Un morfismo de variedades $\Phi : X \longrightarrow Y$ se dice un morfismo de G-variedades o un G-morfismo si : $\Phi(g.x) = g.\Phi(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$.

II Sea X una G-variedad y sea $x \in X$, llamamos *órbita del elemento* x al conjunto:

$$O_x = \{g.x : g \in G\}.$$

También, suele notarse a las órbitas mediante: $G \times x$.

III Sea X una G-variedad y sea $x \in X$, definimos el *estabilizador de* x *o grupo de isotropía de* x al conjunto:

$$G_x = \{g \in G : g.x = x\}$$

En los casos en que notemos a las órbitas por $G \cdot x$, podemos notar a los estabilizadores como: $Stab(x)$.

Observación 1.2.4. Si G es un grupo algebraico y X es una G-variedad, entonces el grupo de isotropía de un elemento $x \in X$ es un subrgrupo algebraico de G.

Demostración. Consideremos primero el morfismo de variedades dado por:

$$\begin{aligned} \Omega : G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, y) &\longmapsto (y, g.y), \end{aligned}$$

que suele denominarse mapa de órbitas. Dado $x \in X$ fijo, tomemos el morfismo inclusión determinado por:

$$\begin{aligned} \iota : G &\longrightarrow G \times X \\ g &\longmapsto (g, x) \end{aligned}$$

Ahora es sencillo verificar que:

$$G_x = (\Omega \circ \iota)^{-1}(\Delta(X)),$$

donde $\Delta(X) \in X \times X$ denota la diagonal en el producto. Luego, como toda variedad es un espacio topológico T_2, dicha diagonal resulta un cerrado del producto,de donde deducimos el resultado deseado a partir de la continuidad de los mapas de variedades que definimos. $\square$

Definición 1.2.5. Diremos que X es una G-variedad homogénea si su correspondiente acción es transitiva, es decir, existe un elemento $x \in X$ tal que $O_x = X$. Observemos que esto es equivalente a pedir que $O_y = X$ para todo elemento $y \in X$.

A partir de esta última definición veamos, algunos ejemplos básicos pero a la vez importante de dichos tipos de G-variedades.

Ejemplo 1.2.6.

- Si G es un grupo algebraico, la multiplicación $m : G \times G \longrightarrow G$ induce una acción regular sobre G que lo convierte en una G-variedad. Además, es claro que resulta un G-variedad homogénea.
- Consideremos a $G \times G$ como grupo algebraico actuando en G mediante la acción:

  $$(g, h).x = gxh^{-1}.$$

  Es sencillo chequear los axiomas de acción como grupo abstracto y que el morfismo inducido por esta acción es de variedades algebraicas.

  Observemos también que la órbita del elemento neutro 1_G es todo el grupo algebraico G, y que su grupo de isotropía es exactamente $\Delta(X)$. Luego vista como una acción de un grupo abstractos sobre un conjunto G, este resulta isomorfo a $G \times G/\Delta(X)$. Además observemos que este último espacio con la acción inducida resulta homogéneo.

  Más adelante, este ejemplo podrá verse desde un punto de vista más geométrico, a partir de la definición de cocientes veremos que $G \times G/\Delta(X)$ tiene una estructura de variedad algebraica y que este isomorfismo que planteamos resulta también de variedades algebraicas en el caso afín.

Ahora probemos algunas propiedades importantes sobre el otro elemento, que hemos definido a partir de las acciones regulares de grupos algebraicos, es decir, sobre las órbitas de dicha acción.

Proposición 1.2.7. Sea G un grupo algebraico y sea X una G-variedad en donde G actúa regularmente. Luego, para cada elemento $x \in X$ la órbita O_x es un espacio localmente cerrado, es decir, es abierto en $\overline{O_x}$.

Demostración. Consideremos el morfismo de variedades algebraicas dado por:

$$\begin{aligned} \phi_x : G &\longrightarrow Y = \overline{O_x} \\ g &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

Como este morfismo es de variedades afines, podemos considerar un abierto U de Y, contenido en la órbita O_x. (Ver A.4.10). Debido a que el espacio O_x es homogéneo, trasladando a U por los elementos de G, obtenemos que:

$$O_x = \bigcup_{g \in G} g.U$$

resulta un abierto de $Y = \overline{O_x}$. □

Corolario 1.2.8. Toda G-variedad X contiene órbitas cerradas.

Demostración. Consideremos la familia de conjuntos cerrados $S_x = \overline{O_x} - O_x$, indexada por los elementos de x. Debido a que la variedad X es un espacio topológico notheriano, entonces existe un conjunto S_{x_0} minimal (Ver apéndice, A.1.6). Este conjuto puede escribirse como una unión de órbitas pero aplicando el resultado anterior y la minimalidad de S_{x_0}, deducimos que:

$$S_{x_0} = \emptyset$$

y por lo tanto la órbita O_{x_0} es cerrada. □

1.2.2. G-módulos racionales o G-representaciones

Así como se puede adaptar la definición de acción de grupos abstractos a este contexto algebraico y geométrico, se puede hacer lo mismo con las representaciones de los grupos abstactos a través de espacios vectoriales. Es decir, que en este contexto, la idea será estudiar a un grupo algebraico visto como transformaciones lineales sobre espacios vectoriales, obviamente pidiendo que esa acción también sea de variedades algebraicas. En lo que sigue de esta sección y a menos que lo aclaremos explícitamente, consideraremos sólo grupos algebraicos afines.

Definición 1.2.9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Rercodemos que dado que es isomorfo, como espacio vectorial, a K^n, para cierto entero n, V hereda una estructura trivial de variedad algebraica afín. Sea además G un grupo algebraico afín.

Supongamos que V es una G-variedad en donde cada elemento $g \in G$ actúa linealmente. En este caso, diremos que V es una representación racional de G o un G-módulo racional.

Dicho de otro modo, diremos que V es un G-módulo racional si existe una acción regular $\phi : G \times V \longrightarrow V$, tal que si tomamos $\phi_g = \phi(g, -) : V \longrightarrow V$, entonces $\phi_g \in GL(V)$.

En vista de esta última definición que dimos, se puede demostrar la siguiente caracterización:

Proposición 1.2.10. Un espacio vectorial V de dimensión finita es un G-módulo racional si y solo si el morfismo inducido $\phi_* : G \longrightarrow GL(V)$ es un morfismo de grupos algebraicos.

Demostración. Dad una base $\{v_1, \cdots, v_n\}$, definimos funciones $g_{ij} : G \longrightarrow K$, que para cada $g \in G$ satisfacen:

$$g \cdot v_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(g) v_j$$

Si la acción es regular entonces las funciones g_{ij} son polinomilas y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \phi_* : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto (g_{ij}(g)) \end{aligned}$$

define un morfismo de variedades, y luego de grupos algebraicos.

Recíprocamente, si el morfismo ϕ^* es de grupos algebraicos, entonces:

$$g_{ij} \in K[G],$$

y luego $\phi : G \times V \longrightarrow V$ es una acción regular. $\square$

Nuestra intención es generalizar la definición anterior para espacios no necesariamente de dimensión finita. Pero antes de eso daremos, algunas definiciones que pueden ser establecidas en el contexto más general de grupos abstractos y representaciones de grupos.

Definición 1.2.11. Sea un grupo abstracto G y V un espacio vectorial donde G actúa por automorfismos k-lineales. Si tomamos $v \in V$ y $\phi \in V^*$ definimos $\phi|v : G \longrightarrow K$ como:

$$\phi|v(g) = \phi(g.v)$$

A dichas funciones las llamaremos V-funciones representativas, y se puede corroborar que si variamos V por todas las representaciones lineales de G y tomamos el espacio vectorial generado por todas las funciones representativas, conforma una sub-álgebra de las funciones k-valuadas, K^G.

Además, podemos definir un morfismo $R_V : V \otimes_k V^* \longrightarrow K^G$, dado por $R_V(v \otimes \phi) = \phi|v$; y lo llamaremos morfismo representativo asosiado a V.

Definición 1.2.12. Bajo las hipótesis de la definición anterior, diremos que V es una representación localmente finita, si para cada elemento $v \in V$, existe un subespacio vectorial $W \subseteq V$ de dimensión finita y estable por la acción de G que contiene a v.

Lema 1.2.13. Sea G u grupo abstracto y V una representación lineal de G, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. V es localmente finita.
2. Para cada $v \in V$ la órbita $G.v$ genera un espacio vectorial de dimensión finita.
3. Para cada $v \in V$ la funcion k-lineal $R_V(v \otimes -) : V^* \longrightarrow K^G$ tiene rango finito.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$: Si llamamos W al subespacio finito dimensional G-estable que contiene a v, luego $G.v \subset W$ y por lo tanto dicha órbita genera un subespacio de dimensión finita.

$2 \Rightarrow 1$: Es inmediato, pues basta tomar como dicho espacio al generado por la órbita del punto.

$2 \Rightarrow 3$: Sea $\{v_1, ..v_n\}$ una base de $\langle G.v \rangle$ como espacio vectorial, si llamamos $\{\phi_1, .., \phi_n\}$ a su base dual asociada, obtenemos que:

$$g.v = \sum (\phi_i|v)(g).v_i$$

Luego, si tomamos $\psi \in V^*$ y la aplicamos a la fórmula anterior:

$$R_V(v \otimes \psi)(g) = \psi(g.v) = \sum (\phi_i|v)(g)\psi(v_i),$$

deducimos que las funciones representativas $\{\phi_i|v\}_{i=1}^n$ generan linealmente la imagen de la funciones deseadas.

$3 \Rightarrow 2$: Sea $\{f_1, ..., f_n\}$ una base de la imagen de $R_V(v \otimes -)$, y sean $\{g_1, ..., g_n\}$ elementos en el grupo G tales que:

$$f_(g_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1..n.$$

La existencia de dichos elementos y la mencionada base no es totalmente trivial, pero es un resultado sencillo que puede ser probado por inducción en la dimensión de la imagen. Dado un funcional $\psi \in V^*$, existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$ en K tales que:

$$\psi|v = \sum \lambda_i.f_i$$

Evaluando en los correspondientes g_j para cada j obtenemos que:

$$\psi(g_j.v) = (\psi|v)(g_j) = \lambda_j$$

Por lo tanto, para todo funcional $\psi \in V^*$ y $g \in G$:

$$\psi(g.v) = \sum \psi(g_j.v)f_i(g) = \psi(\sum f_i(g)g_j.v)$$

De donde obtenemos que el espacio generado por la órbita asociada al elemento v queda generada por $\{g_j.v\}_{j=1}^n$. $\square$

A partir de estas definiciones, daremos ahora una posible definición de G-módulos racionales posiblemente de dimensión infinita.

Definición 1.2.14. Si V es un espacio vectorial de dimensión infinita y G un grupo algebraico afín, diremos que es un G-módulo racional o una G-representación racional, si está equipado de una acción de grupos abstractos $\phi : G \times V \longrightarrow V$, tal que $\phi_g \in GL(V)$ para todo elemento $g \in G$; y si además cumple:

- V es localmente finito.
- Para cada $\phi \in V^*$ y $v \in V$, se satisface que $\phi|v \in K[G]$.

Vale aclarar que todas las definiciones de acciones y módulos dadas fueron consideradas a izquierda, es decir que G actúa abstractamente a izquierda como grupo, tanto en las G variedades como en las representaciones racionales. Pero todas las definiciones pueden ser dadas de manera análoga al caso de acciones a derecha.

Ahora que tenemos dada esta definición más general de módulos racionales sobre un grupo algebraico G, veamos que efectivamente coincide con la que ya dimos para el caso de dimensión finita.

Proposición 1.2.15. Sea G un grupo algebraico afín y se V un k-espacio vectorial de dimensión finita que es además una representación lineal de G como grupo abstracto. Entonces:

La acción $\phi : G \times V \longrightarrow V$ define una estructura de G-módulo racional (según la definición anterior) si y solo si el morfismo de grupos asociado $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ es un morfismo de grupos algebraicos afines.

Demostración. Sea $\{v_1, ..., v_n\}$ una base de V como k-espacio vectorial y sea $\{f_1, .., f_n\}$ su base dual asociada. Luego, ρ es un morfismo de variedades si y solo si $\rho(g)$ vista en $GL(V)$ como una matriz (que depende de $g \in G$), tiene en todos sus lugares elementos de $K[G]$. Es decir, si llamamos, para cada $i \in \{1, ..n\}$, $\lambda_{ij} \in K^G$ a los elementos tales que:

$$g.v_i = \sum \lambda_{ij}(g)v_j$$

Queremos ver que $\lambda_{ij} \in K[G]$, pero si aplicamos f_j a la ecuación anterior:

$$f_j|v_i(g) = f_j(g.v_i) = \lambda_{ij}(g)$$

Con lo cual, si todas las funciones representativas de V pertenecen a $K[G]$, deducimos que ρ es un morfismo de variedades.

Inversamente, si dicho morfismo resulta de variedades obtenemos que $f_j|v_i \in K[G]$, $\forall i, j = 1..n$. Además, es sencillo corroborar que estas funciones generan linealmente a todas las funciones V-representativas, con lo cual todas ellas cumplirán la condición deseada. $\square$

Definición 1.2.16. Sea G un grupo algebraico afín actuando en una variead algebraica afín X mediante una acción regular.

En el caso de que la acción sea a derecha, definimos la acción a izquierda inducida: $G \times K[X] \longrightarrow K[X]$ por $g.f(x) = f(x.g)$.

Y en el caso de que la acción inicial sea a izquierda, definimos la acción a derecha inducida: $K[X] \times G \longrightarrow K[X]$ por $f.g(x) = f(g.x)$. Aunque, por el momento, dichas acciones resultan tan sólo acciones de grupos abstractos sobre conjuntos.

Observación 1.2.17. En el contexto de las definiciones que acabamos de dar, G actúa en $K[X]$ mediante K-álgebra automorfismos. Es decir, para cada $g \in G$ fijo:

$$g. : K[X] \longrightarrow K[X]$$

define un automorfismo de álgebras.

Demostración. Es claro que, con la acción que definimos, dicho morfismo resulta k-lineal y biyectivo (con inversa dada por g^{-1}). Además las propiedades de ser una acción abstracta se desprenden inmediatamente del hecho que X es una G variedad.

Por último, para ver que respera el producto del álgebra observemos que: para cada $g \in G$ y $f, h \in K[X]$ se satisface:

$$g.(f.h)(x) = (f.h)(x.g) = f(x.g)h(x.g) = (g.f)(g.h)(x)$$

. $\square$

Ahora probaremos que la acción inducida de G en $K[X]$, hace de $K[X]$ un G-módulo racional, es decir, una representación racional posiblemente de dimensión infinita.

Lema 1.2.18. Sea G un grupo algebraico afín y sea X una G-variedad (a izquierda), donde la acción esta dada por el morfismo de variedades algebraicas $\rho : G \times X \longrightarrow X$. Entonces, la acción inducida de G sobre $K[X]$ puede ser expresada mediante el morfismo de álgebras asociado $\rho^* : K[X] \longrightarrow K[G] \otimes K[X]$, del siguiente modo:

$$f.g = \sum f_1(g) f_2$$

Donde estamos adaptando la notacion de Sweedler para expresar:

$$\rho^*(f) = \sum f_1 \otimes f_2,$$

para ciertas funciones $f_1 \in K[G]$ y $f_2 \in K[X]$.

Demostración. Recordemos que si X e Y dos variedades algebraicas afines, el producto $X \times Y$ tiene una estructura categórica de variedad afín y mediante la cual la estructura de K-álgebra $K[X \times Y]$, resulta isomorfa a $K[X] \otimes K[Y]$. Dicho isomorfismo queda determinado por:

$$f \in K[X] \times K[Y] \longleftrightarrow \sum f_i \otimes g_i 4$$

si y solo si

$$f(x, y) = \sum f_i(x) g_i(y)$$

Considerando el morfismo de algebras asociado ρ^*, deducimos que:

$$(f.g)(x) = f(g.x) = f(\rho(g, x)) = \rho^*(f)(g, x) = \sum f_1(g) f_2(x)$$

De donde obtenemos el resultado deseado. □

Teorema 1.2.19. Sea G un grupo algebraico afín actuando regularmente en una variedad algebraica afín X. Entonces, para la acción inducida $K[X]$ resulta un G-módulo racional.

Demostración. Ya hemos probado anteriormente que la acción de grupos definida por G sobre $K[X]$ resulta una acción por automorfismos de K-ágebras, lo que en particular nos prueba que $K[X]$ es una representación lineal de G.

En virtud del lema anterior:

$$f.g = \sum f_1(g) f_2,$$

podemos concluir que, fijado $f \in K[X]$, el espacio $\langle \{f.g : g \in G\} \rangle$ resulta de dimensión finita. Para conlcuir la demostración veamos que sucede con las funciones representativas, si $\phi \in K[X]^*$ y $f \in K[X]$ luego:

$$\phi | f(g) = \phi(f.g) = \sum f_1(g) \phi(f_2)$$

con lo cual

$$\phi | f = \sum \phi(f_2) f_1 \in K[G]$$

. □

Observación 1.2.20. Veamos estos ejemplos propios e importantes de las definiciones y resultados anteriores:

1. Sea G un grupo algebraico afín. Recordemos que G puede ser tomado como una G-variedad tanto a izquierda como a derecha mediante el morfismo de multiplicación m. Esto induce en $K[G]$ dos estructuras de G-módulo racional, una a izquierda y otra a derecha, dadas por:

$$(x.f)(y) = f(yx) \qquad (f.x)(y) = f(xy)$$

   Estas acciones de G en $k[X]$ pueden expresarse mediante la notación de Sweedler y la comultiplicación de $K[G]$, mediante:

$$x.f = \sum f_2(x)f_1 \qquad f.x = \sum f_1(x)f_2$$

   A estas acciones las llamaremos acciones regulares de G.

2. Sea G un grupo algebraico afín y sea X una G-variedad a izquierda, con una acción racional dada por un morfismo ϕ. Podemos inducir otra acción sobre $K[X]$, pero a izquierda, que hace también de $K[X]$ un G-módulo racional, y es la dada por:

$$(g.f)(x) = f(g^{-1}.x)$$

   Esta acción puede ser expresada mediante el morfismo de K-álgebras dado por $\phi^* : K[X] \longrightarrow K[G] \otimes K[X]$, del siguiente modo:

$$g.f = \sum f_1(g^{-1})f_2, \qquad \text{donde } \phi^*(f) = \sum f_1 \otimes f_2 \in K[G] \otimes K[X].$$

   La prueba de que resulta una G-variedad es análoga a la de la proposición precedente.

Estos ejemplos de G-variedades que estamos dando forman parte de una caracterización más amplia de G-módulos racionales. Es decir, el método que estamos utilizando para demostrar que ciertos espacios son G-variedades muestra una cierta relación entre estas estructuras y la K-álgebra $K[G]$. Este hecho puede formalizarse a través del siguiente resultado.

Proposición 1.2.21. Sea G un grupo algebraico afín y sea V un K-espacio vectorial. Las estructuras de G-módulos racionales a izquierda sobre V están en correpondencia con las estructuras de $K[G]$-comódulo a derecha sobre V.

Demostración. Dada una co-acción a derecha $\chi : V \longrightarrow V \otimes K[G]$, definimos una acción $\Phi_\chi : G \times V \longrightarrow V$ como:

$$g.v = \sum f_i(g)v_i, \qquad \text{donde } \chi(v) = \sum v_i \otimes f_i.$$

A partir de la definición anterior resulta claro, que G actúa, para cada $g \in G$ fijo, por automorfismo k-lineales y que V resulta localmente finito, pues el espacio generado por la órbita $G.v$ esta generado por $\{m_i\}$.

Además si $\gamma \in V^*$ y $v \in V$ entonces:

$$\gamma|v(g) = \gamma(g.v) = \sum f_i(g)\gamma(v_i)$$

y por lo tanto

$$\gamma|v = \sum \gamma(v_i) f_i \in K[G]$$

Luego, todas las funciones representativas pertenecen a $K[G]$. Para concluir esta parte de la demostración nos falta corroborar que esta acción es efectivamente una acción de grupos abstractos. En virtud de que χ define una estructura de comódulo sabemos que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\chi"'] & V \otimes K[G] \arrow[d, "Id\otimes\Delta"] \\ V \otimes K[G] \arrow[r, "\chi\otimes Id"'] & V \otimes V \otimes K[G] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, esto puede expresarse con la notación de Sweedler:

$$\sum v_{i,0} \otimes v_{i,1} \otimes f_i = \sum v_i \otimes f_{i,1} \otimes f_{i,2}$$

Si tomamos esta expresión y evaluamos en $g \in G$ su segunda coordenada se obtiene que:

$$\sum g.v_i \otimes f_i = \sum v_{i,0} \otimes v_{i,1}(g) \otimes f_i = \sum v_i \otimes f_{i,1}(y) \otimes f_{i,2} = \sum v_i \otimes f_i.g$$

Por definición, si $h \in G$, entonces $h.v = \sum f_i(h) v_i$ y por lo tanto, en virtud de la ecuación anterior:

$$g.(h.v) = \sum f_i(h) g.v_i = \sum (f_i.g)(h) v_i = \sum f_i(gh) v_i = (gh).v_i$$

Así queda demostrada la asociatividad de la acción. El hecho que 1_G actúe trivialemente se sigue inmediatamente a partir de la conmutatividad del siguiente diagrama que satisfacen los comódulos:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\chi"'] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ V \otimes K[G] \arrow[r, "Id\otimes\epsilon"'] & \otimes K \end{tikzcd}$$

y también recordando que el morfismo ϵ es la evaluación en 1_G. Pues, de estos hechos deducimos que:

$$\text{Si } \chi(v) = \sum v_i \otimes f_i \quad \text{luego} \quad v = \sum f_i(1_G) v_i = 1_G.v$$

La construcción recíproca es la siguiente: Si tenemos definida una estructura de G-módulo racional sobre V, dada por un morfismo $\phi : G \times V \longrightarrow V$, definimos una estructura de $K[G]$-comódulo a derecha χ_ϕ del siguiente modo:

Si $v \in V$ y $\{v_1, .., v_n\}$ es una base de $\langle G.v\rangle$, tomamos $\{v^1, .., v^n\}$ su base dual asociada en V^* y definimos:

$$\chi(v) = \sum v_i \otimes (v^i|v) \in V \otimes K[G]$$

Recordemos además que podemos recuperar la acción racional de G sobre V mediante la expresión:

$$g.v = \sum (v^i|v)(g)v_i$$

Esto nos está probando una de las dos condiciones que deberiamos chequear para conlcuir la reciprocidad de ambas construcciones. La prueba de la condición restante es análoga y será omitida.

Para concluir la demostración veamos que χ_ϕ satisface los diagramas correspondientes a ser una estructura de $K[G]$-comódulo a derecha.

1. $(Id \otimes \epsilon)(\chi_\phi(v)) = \sum (v^i|v)(1_G)v_i = 1_G.v = v$. Con lo cual el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\chi_\phi"'] \arrow[dr, leftarrow] & \\ V \otimes K[G] \arrow[r, "Id\otimes\epsilon"'] & \otimes K \end{tikzcd}$$

   es conmutativo.

2. También debemos chequear que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\chi_\phi"] \arrow[d, "\chi_\phi"'] & V \otimes K[G] \arrow[d, "Id\otimes\Delta"] \\ V \otimes K[G] \arrow[r, "\chi\otimes Id"'] & V \otimes V \otimes K[G] \end{tikzcd}$$

   Esta condición puede ser expresada como:

$$\sum v_i \otimes \Delta(f_i) = \sum \chi_\phi(v_i) \otimes f_i$$

   Tomando $x, y \in G$ y evaluando en estos elementos la segunda y tercera coordenada de la ecuación anterior, obtenemos la siguiente condición:

$$\sum v_i f_i(xy) = \sum (x.v_i) f_i(y)$$

   Que puede ser expresada como: $(xy).v = x.(y.v)$, y que se satisface por la asociatividad de la acción ϕ como acción de grupos abstractos.

   Con lo cual queda demostrado que χ_ϕ define una co-acción a derecha sobre el espacio vectorial V.

$\square$

Proposición 1.2.22. Sea V una representación racional de G que es, además, un álgebra asociativa sobre el cuerpo K. Entonces la acción de G es multiplicativa (actua por automorfismos) si y sólo si la estructura de $K[G]$-comódulo es multimplicativa, es decir que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V\otimes V \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\chi\otimes\chi"'] & V \arrow[d, "\chi"] \\ V\otimes K[G]\otimes V\otimes K[G] \arrow[r, "m\otimes m_{K[G]}\circ\delta_{2,3}"'] & V\otimes K[G] \end{tikzcd}$$

sea conmutativo, donde $\delta_{2,3}$ es el morfismo que intercambia el segudo y el tercer término, del correspondiente producto tensorial.

Demostración. Sean $a, b \in V$, y supongamos que la acción de un elemento $g \in G$ queda determinada por:

$$g.a = \sum f_i(g)a_i \quad \text{y} \quad g.b = \sum g_j(g)b_j$$

Y a partir de estas expresiones, fijemos la notación para la coacción sobre dichos elementos:

$$\chi(a) = \sum a_i \otimes f_i \quad \text{y} \quad \chi(b) = \sum b_j \otimes g_j.$$

Entonces G actúa por automorfismos, es decir:

$$g(ab) = g(a)g(b) = \sum f_i(g)g_j(g)a_ib_j = \sum (f_ig_j)(g)a_ib_j$$

si y solo la coacción sobre el elemento producto ab resulta:

$$\chi(ab) = \sum a_ib_j \otimes f_ig_j.$$

Esta última condición es equivalente a:

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b),$$

que expresa exactamente que la coacción χ sea multiplicativa. □

Ejemplos .

1. Sea V un G-módulo racional a izquierda de dimensión finita. Entonces V^* resulta también un G-módulo racional a derecha de dimensión finita, definiendo la acción como:

   $$(\alpha.g)(v) = \alpha(g.v).$$

   Veamos como queda determinada la estructura de $K[G]$-comódulo a izquierda asociada a esta acción sobre V^*.

   Sea $\{v_1, .., v_n\}$ una base de V y $\{v^1, .., v^n\}$ su base dual asociada. Entonces:

   $$v^j.g = \sum f_{jk}v^k$$

   Para ciertas funciones $f_{jk} \in K[G]$. Evaluando en v_k la ecuación anterior obtenemos:

   $$(v^j|v_k)(g) = (v^j.g)(v_k) = f_{jk}(g)$$

   Por lo tanto, la coacción queda determinada por:

   $$\chi_{V^*}(v^j) = \sum (v^j|v_k) \otimes v^k$$

2. Si V es un G-módulo racional de dimensión infinita, V^* no necesariamente hereda una estructura de G-módulo racional como en el ejemplo anterior. El problema radica en que puede dejar de ser una representación lineal localmente finita.

   Consideremos al toro unidimensional G_m actuando en el espacio de los polinomios $\mathbb{K}[x]$ por multimplicación en la variable.

   El dual $\mathbb{K}[x]^*$ tiene una identificación natural con el espacio de las series formales con coeficientes en $\mathbb{K}$, donde una serie

$$\sum a_i y^i \in \mathbb{K}[[y]]$$

   vista como un funcional actúa como:

$$(\sum a_i y^i)(x^j) = a_j.$$

   La acción inducida de G_m sobre $\mathbb{K}[[y]]$ queda determinada por:

$$s.(\sum a_i y^i) = \sum s^{-i} a_i y^i$$

   Si consideramos la órbita de la serie $f = \sum y^i$, obtenemos el espacio vectorial dado por $\langle \sum s^i y^i : s \in G_m \rangle$ y no es de dimensión finita.

Una vez probada esta estructura de G-módulo racional sobre la K-álgebra afín $K[X]$ para una G-variedad, estamos en condiciones de demostrar que todo grupo algebraico afín puede verse como un subgrupo algebraico de $\mathbb{GL}_n$, para cierto $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.2.23. Un morfismo $\phi : X \longrightarrow Y$ entre variedades algebraicas afines es una inmersión cerrada si y solo si su correspondiente morfismo entre las k-algebras afines $\phi^* : K[Y] \longrightarrow K[X]$ es sobreyectivo.
(Recordemos que un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ entre variedades afines es una inmersión cerrada si $f(X)$ es un subconjunto cerrado de Y, y $f : X \longrightarrow f(X)$ es un isomorfismo entre variedades, donde $f(X)$ está considerado con la estructura inducida de subvariedad afín).

Demostración. Si suponemos que el morfismo ϕ es una inmersión cerrada, debido a que:

$$\phi : X \longrightarrow \phi(X)$$

resulta un isomorfismo, es inmediato que el morfismo de álgebras ϕ^* es sobreyectivo.

Supongamos ahora, que efectivamente el morfismo $\phi^* : K[Y] \longrightarrow K[X]$ es sobreyectivo. Luego obetenemos que $K[Y]/Ker\,(\phi^*) \simeq K[X]$. Ahora consideremos el subconjuto cerrado dado por $\overline{\phi(X)}$, que resulta una subvariedad afín. Veamos como describir a $Ker\,(\phi^*)$:

$$Ker\,(\phi^*) = \{g \in K[Y] : g \circ \phi = 0\} = I(\phi(X))$$

En conclusión, como el ideal asociado a $\overline{\phi(X)}$ coincide con $I(\phi(X))$, obtenemos que $K[\overline{\phi(X)}] \simeq K[X]$, y como ambas son variedades afines se sigue que el morfismo $\phi : X \longrightarrow \overline{\phi(X)}$ es un isomorfismo de variedades, y por lo tanto $\overline{\phi(X)} = \phi(X) \simeq X$.

□

Teorema 1.2.24. Sea G un grupo algebraico afín, entonces exiten $n \in \mathbb{N}$ y una inmersión cerrada $\rho : G \longrightarrow \mathbb{GL}_n$, con lo cual todo grupo algebraico afín resulta isomorfo a un grupo algebraico lineal.

Demostración. Como G es una variedad algebraica afín sabemos que $K[G] = K[p_1, .., p_k]$, pues es una K-álgebra finitamente generada. Consideremos la acción regular a izquierda de G en $K[G]$ y tomemos un subespacio V de dimensión finita estable por la acción G que contenga a $\{p_i : i = 1...k\}$. Veremos que el morfismo de grupos algebraicos afines inducido por dicha acción $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ resulta una inmersión cerrada.

Consideremos el morfismo $\rho^* : K[GL(V)] \longrightarrow K[G]$ y veamos que resulta sobreyectivo. Como V contiene a los generadores de $K[G]$ como álgebra, basta demostrar que V está contenido en la imagen de ρ^*.

Sea $f \in V$, si

$$\Delta(f) = \sum f_i \otimes g_i \in K[G] \otimes K[G]$$

sabemos que la acción de $g \in G$ sobre f queda dada por:

$$g.f = \sum g_i(g) f_i$$

con lo cual por la G-estabilidad del espacio V, obtenemos que

$$f_i \in V \quad \forall i.$$

Y además podemos suponerlos linealmente independientes. Consideremos $\{\psi_i\} \subset V^*$ su base dual asociada y tomemos la acción racional natural de $GL(V)$ en V. Bajo esta acción las funciones representativas $\psi_i|f \in K[GL(V)]$. Entonces, aplicando el morfismo ρ^* a dichas funciones, obtenemos:

$$\rho^*(\psi_j|f)(g) = (\psi_j|f)(\rho(g)) = \psi_j(\rho(g).f) = \psi_j(g.f) = \psi_j(\sum g_i(g)f_i) = g_j(g)$$

En esta última ecuación usamos que $\rho(g)$ visto en $GL(V)$ es exactamente el automorfismo K-lineal dado por $g. : V \longrightarrow V$. De este modo, tenemos demostrado que todas las funciones $g_j \in K[G]$ están en la imagen del morfismo ρ^*. Para concluir el argumento consideremos la acción regular de G en $K[G]$, pero a derecha de donde obetenemos que:

$$f = f{,}1_G = \sum f_i(1_G) g_i$$

Por lo tanto, f también pertenece a la imagen del morfismo ρ^*, de donde concluimos su suryectividad, y el resultado general del teorema. $\square$

Para concluir esta sección demostraremos un resultado similar al desarrollado en el teorema anterior, y que relaciona de manera directa a las G-variedades con los G-módulos racionales de un grupo algebraico afín.

Teorema 1.2.25. Sea G un grupo algebraico afín y sea X una G-variedad afín. Entonces existe una representación racional de dimensión finita W del grupo G y una inmersión cerrada $\tau : X \longrightarrow W$, que además es G-equivariante, es decir que $\tau(g.x) = g.\tau(x)$.

Antes de la demostración veamos el siguiente lema que nos será de utilidad en la misma:

Lema 1.2.26. Sea V un G-módulo racional de dimensión finita. Si llamamos $S(V^*)$ al álgebra simétrica asociada a V^*, entonces:

$S(V^*) \simeq K[V]$ como álgebras, mediante un morfismo que también respeta la acción de G inducida en ambas estructuras.

Demostración. Sean $\{v_i\}_{i=1}^n$ y $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ bases respectivas de V y V^*. Además podemos identificar el álgebra $K[V]$ con el álgebra polinomial $K[x_1, ..., x_n]$.

Recordando que el álgebra simétrica asociada a un espacio vectorial de dimensión finita, puede ser pensada como K-polinomios formales en los elementos de la base, el resultado es inmediato, identificando las "variables" $\phi_i \in S(V^*)$ con $x_i \in K[V]$. $\square$

Ahora si demostraremos el teorema:

Demostración. Como X es, en particular, una variedad algebraica afín, podemos tomar $\{f_1, .., f_n\}$ generadores de $K[X]$ como álgebra. Y, al igual que en el teorema anterior. podemos tomar un subespacio V de dimensión finita y G-estable que contenga a todos los f_i. Luego, la inclusión k-lineal $i : V \longrightarrow K[X]$ y G-equivariante nos determina un epimorfismo de K-álgebras:

$$\Phi : S(V) \longrightarrow K[X]$$

Además como G actúa por automorfismo de K-álgebras sobre $K[X]$ se sigue que dicho morfismo resulta G-equivariante. Utilizando el lema precedente obtenemos un epimorfismo de K-álgebras $\Psi : K[V^*] \longrightarrow k[X]$, que respeta también la acción de G. Para concluir este teorema bastará aplicar el lema usado en el teorema anterior para deducir la existencia de la correspondiente inmersión cerrada $\overline{\Psi} : X \hookrightarrow V^*$ que resulta G-equivariante. $\square$

1.3. Descomposición de Jordan

Para culminar este capítulo dedicado a grupos algebraicos afines, expondremos un breve resumen sobre algunas definciones básicas, que caracterizan ciertos elementos del grupo, a los que llamaremos semisimples, nilpotentes y unipotentes. Dentro de este contexto estos elementos desarrollan el mismo rol que los correspondientes conceptos en matrices, a la hora de expresar la conocida descomposición de Jordan. Estas definiciones conforman la base para la extensa teoría de estructura dada sobre los grupos algebraicos. Para ver resultados más profundos sobre este tema, consultar: [SPR] y [HUM].

Comencemos esta sección repasando brevemente resultados básicos de álgebra lineal sobre la descomposición de Jordan.Omitiremos las correpondientes demostraciones, que podrán ser consultadas también en: [JST]. Consideraremos un espacio V vectorial de dimensión finita y llamaremos $A = End_k(V)$ a los endomorfismos lineales de dicho espacio.

Definición 1.3.1. Un elemento $a \in A$ se dice semisimple si existe una base de V conformada por autovectores de a, es decir, si dicho morfismo resulta diagonizable en el espacio V. El elemento se dice nilpotente si existe algún entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a^n = 0$ y se lo llama unipotente si $a - Id$ resulta nilpotente.

Teorema 1.3.2. [Descomposición aditiva de Jordan]

Sea $a \in A$, entonces existen únicos elementos $a_s, a_n \in A$, semisimple y nilpotente respectivamente tales que:

- $a_s.a_n = a_n.a_s$
- $a = a_s + a_n$

Las siguientes propiedades sobre esta descomposición son resultados clásicos de esta teoría:

Proposición 1.3.3. Sea $a \in A$ y sean a_s y a_n sus componentes semisimple y nilpotente respectivamente, luego:

1. Existen polinomios $p, q \in K[x]$ tales que $a_s = p(a)$ y $a_n = q(a)$
2. Si $W \subset V$ es un subespacio a-estable, es decir, que $a(W) \subset W$, entonces también resulta es a_s-estable y a_n-estable, y además, $a|_W = a_s|_W + a_n|W$ resulta la descomposición aditiva de a restringida al subespacio W.

Si $a \in GL(V)$, es decir, es un morfismo k-lineal inversible, como corolorario del teorema de descopomsición aditiva podemos establecer una descomposición multiplicativa del siguiente modo:

Teorema 1.3.4. [Descomposición multiplicativa de Jordan]

Sea $a \in GL(V)$, entonces existen únicos elementos a_s(semisimple) y a_u(unipontente) en $GL(V)$, tales que:

$$a = a_s.a_u = a_u.a_s$$

Si consideramos ahora un espacio vectorial V no necesariamente de dimensión finita, y consideramos nuevamente los espacios de funciones dados por $End_k(V)$ y $GL(V)$ podemos dar definiciones más generales de las dadas anteriormente, pero no para culquier elemento dentro de dichos espacios de funciones.

Diremos que una transformación $a \in End_k(V)$ es localmente finita, si V puede ser descompuesto por una unión finita de subespecios a-estables de dimensión finita. Para un elemento a localmente finito podemos definir las nociones de semisimple, nilpotente o unipotente pidiendo que la restricción de a a cada uno de los espacios a-estables finito dimensionales en los que podemos descomponer a V cumpla con las definiciones respectivas que ya dimos.

En este contexto tenemos teoremas análogos de descomposición de Jordan, tanto en el caso aditivo como en el caso multiplicativo.

A continuación trataremos de extender estos resultados de descomposiciones al contexto de grupos algebraicos, con el cual trabajamos durante este capítulo:

Sea G un grupo algebraico afín y sea $K[G]$ su k-álgebra de Hopf afín asociada. Como ya hemos visto anteriormente, G actúa por automorfimos k-lineales sobre $K[G]$ mediante las acciones regulares, inducidas por su propio producto, de hecho, de este modo $K[G]$ resulta un G-módulo. Si notamos por $\rho(g) \in GL(K[G])$ a la acción correspondiente al morfismo $g. : K[G] \longrightarrow K[G]$, estamos en condiciones de aplicar los teoremas de descomposición de Jordan del siguiente modo:

Existen únicos elementos elementos, $\rho(g)_u$(unipotente) y $\rho(g)_s$(semisimple) en $GL(K[G])$ tales que:

$$\rho(g) = \rho(g)_u.\rho(g)_s = \rho(g)_s.\rho(g)_u$$

A partir de estas definciones y observaciones es posible exponer una serie de resultados que caracterizan, la aplicación de muchos del álgebra lineal, al caso de grupos algebraicos afines. A continuación, daremos un resumen de dichos resultados, para ver sus respectivas demostraciones y ampliar este desarrollo consultar: [SPR, Sec. 2.4].

Teorema 1.3.5. [Descomposición de Jordan en grupos algebraicos afines]

Sea G un grupo algebraico afín. Existen únicos elementos $g_s, g_u \in G$ tales que:

- $\rho(g)_s = \rho(g_s)$
- $\rho(g)_u = \rho(g_u)$
- $g = g_s.g_u = g_u.g_s$

Proposición 1.3.6. A partir de la descomposición dada en el teorema anterior, son válidas las siguientes afirmaciones:

1. Si G y H son dos grupos algebraicos afines y $f : G \longrightarrow H$ un morfismo de grupos algebraicos afines, entonces $f(g)_s = f(g_s)$ y $f(g)_u = f(g_u)$.
2. Si G es un grupo algebraico afín y $g \in G$ entonces g semisimple (coincide con g_s) si y solo si para todo isomorfismo de G con algún subgrupo cerrado de $\mathbb{GL}_n$ (para cierto $n \in \mathbb{N}$), se tiene que la imagen de g por dicho isomorfismo es semisimple. El resultado analogo para elementos unipotentes también es cierto.

Definición 1.3.7. Diremos que un grupo algebraico afín es unipotente si todos sus elementos lo son, es decir, que para todo elemento elemento $g \in G$ se tiene que: $g = g_s$.

Proposición 1.3.8. Sea G un subgrupo de $\mathbb{GL}_n$ conformado por matrices unipotentes. Entonces existe una matriz $A \in \mathbb{GL}_n$ tal que $AGA^{-1} \subset U_n$ (U_n corresponde a las matrices triangulares superiores, con unos en la diagonal). Con lo cual todo grupo algebraico afín unipotente resulta isomorfo a un subgrupo cerrado de U_n.

Un grupo se dice nilpotente, si para los conmutadores definidos por:

$$R_0(G) = G \qquad R_{i+1}(G) = (G, R_i(G))$$

existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$R_k(G) = \{1_G\}$$

.

A partir de la proposción anterior, podemos deducir el siguiente corolorario importante:

Corolario 1.3.9. Todo grupo algebraico unipotente resulta también nilpotente (y además soluble)

Para la prueba de este corolario, podemos utilizar la proposición precedente para reducirla al caso del grupo U_n, de matrices unipotentes y triangulares superiores; y luego realizar la cuenta para ese caso específico.

Por último, veamos unos de los resultados má interesantes, que involucra este tipo de grupos algebraicos afines, y que tiene una conexión muy importante, con el estudio de cocientes sobre el espacio de órbitas que abordaremos en el capítulo final. El siguiente teorema es conocido como El Teorema de Kostant-Rosenlicht:

Teorema 1.3.10. Sea G un grupo algebraico afín unipotente y sea X una G-variedad. Luego, todas las órbitas de G en X resultan cerradas.

Demostración. Ver: [SPR, pág. 37]. □

Capítulo 2

Teoría Clásica de Invariantes

2.1. Generación finita de invariantes

2.1.1. Anillos de invariantes y el Problema 14 de Hilbert

Sea G un grupo algebraico afín y sea X una G-variedad, vamos a considerar sobre $K[X]$ la siguiente acción:

$$g.f(x) = f(g^{-1}.x)$$

que induce una representación racional, y además resulta una variante de las acciones regulares clásicas.

Definición 2.1.1. Sea G un grupo algebraico afín y sea X una G-variedad, definimos el anillo de invariantes como el siguiente subanillo de $K[X]$:

$$K[X]^G = \{f \in K[X] : g.f = f \ \forall g \in G\}.$$

Observemos que debido a que G actúa por automorfismo de K-álgebras sobre $K[X]$, el anillo de invariantes resulta también una sub -K-álgebra.

Ejemplo 2.1.2. Si tomamos una representación racional V en lugar de una G-variedad arbitraria, obtenemos un caso particular de la definición anterior. Si además le pedimos a V que sea de dimensión finita, entonces su K-álgebra asociada $K[V]$ resulta isomorfa a la K-álgebra de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$ (donde $n = dim_k(V)$). Como en este caso G actúa por automorfismos K-lineales sobre V, se sigue que si $f \in K[x_1, ..., x_n]_d$, $\lambda \in K$ y $g \in G$ entonces:

$$(g.f)(\lambda.x) = f(g^{-1}.(\lambda.x)) = f(\lambda.(g^{-1}.x)) = \lambda^d (g.f)(x).$$

Por lo tanto, la acción de G respeta la graduación dada por:

$$K[V] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} K[V]_d,$$

de donde podemos deducir que el subanillo $K[V]^G$ se descompone como:

$$K[V]^G = \bigoplus_{d=0}^{\infty} K[V]_d^G$$

Ejemplo 2.1.3. Consideremos al grupo simetrico de permutaciones S_n actuando racionalmente en $V = K^n$ via:

$$\sigma \cdot (x_1, ..., x_n) = (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

Si considaramos el polinomio $g(t) = (t - x_1)...(t - x_n) \in K[x_1, .., x_n][t]$ entonces es sabido que:

$$g(t) = t^n - f_1 t^{n-1} + ... + (-1)^n f_n$$

donde lo polonomios $f_i \in K[x_1, ..., x_n]$ son conocidos como los n polonimios simétricos elementales y estan dados por las fórmulas:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\ f_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j \\ &... \\ f_n &= x_1 \cdots x_n \end{aligned}$$

El anillo de invariantes de este representación esta generado por estos n polinomios $f_1, ...f_n$ algebraicamente independientes:

$$K[V]^{S_n} = K[f_1, ..., f_n]$$

Para un demostración de este resultado consultar: [CIT, Pág. 41].

Ejemplo 2.1.4. Sea $V \simeq K^n$, un espacio vetorial de dimensión n. El grupo $GL(V)$ actua en $End(V)$ por conjugación, es decir, si $\sigma \in GL(V$ y $A \in End(V)$, entonces:

$$\sigma \cdot A := \sigma A \sigma^{-1}$$

Consideremos el polinomio característico de A:

$$\chi_A(t) = t^n - g_1(A)t^{n-1} + g_2(A)t^{n-2} + ... + (-1)^n g_n$$

Claramente, las funciones g_i son funciones polinomiales invariantes en A, dicho de otro modo, pertenen al anillo de invariantes de la acción:

$$g_i \in K[End(V)]^{GL(V)}$$

Consideremos el subgrupo de matrices diagonales:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_n \end{pmatrix} : x_1, ...x_n \in K \right\}$$

Además, el grupo de permutaciones S_n puede ser visto como el subgrupo de GL_n de matrices de permutación. El subespacio T es estable por la acción del grupo S_n, y la restricción de χ a T, coincide con el polinomio $g(t)$ definido en el ejemplo anterior. A partir de estas observaciones, deducimos que la restricción de cada g_i a T coincide con los polinomios simétricos elementales f_i, de donde resultan algebraicamente independientes.

Sea $h \in K[End(V)]^{GL(V)}$, luego la restricción de h a T resulta S_n invariante, y por lo tanto existe un polinomio ψ tal que:

$$h|_T = \psi(f_1, .., f_n)$$

Sea U el conjunto de todas las matrices que tienen distintos autovalores, claramente:

$$Y \subset G \cdot T$$

El conjunto U es Zariski denso pues es el complemento del cerrado definido por: $\delta(\chi) = 0$ (donde se anula el discriminante del polinomio característico).

Afirmamos que:

$$h - \psi(g_1, ..., g_n) = 0,$$

pues se anula en $G \cdot T$. Con lo cual demostramos que:

$$K[End(V)]^{GL(V)} = K[g_1, .., g_n]$$

.

"El problema 14" Sabemos que al tomar una G-representación racional V podemos estudiar el anillo de invariantes $K[V]^G$ como una sub-K-álgebra de $K[x_1, ..., x_n]$. Además, extendiendo las definiciones de acciones e invariantes de manera natural, podemos ver que si $K(x_1, ..., x_n)$ representa el cuerpo de funciones racionales en n-variables , entonces:

$$K[x_1, ..., x_n]^G = K(x_1, ..., x_n)^G \cap K[x_1, ..., x_n],$$

donde $K(x_1, ..., x_n)^G$ representa el subcuerpo de funciones racionales invariantes.

Uno de los problemas clásicos estudiado en teoría de invariantes es el de determinar si el anillo de invariantes de G resulta finitamente generado, y en caso afirmativo describir métodos para computarlos. Si en particular tomamos como G-variedad una representación racional de dimensión finita V, el problema antes enunciado tiene una relación estrecha con el problema 14° de Hilbert, que fórmula la siguiente pregunta:

Si L es un subcuerpo de $K(x_1, ..., x_n)$

¿Es $L \cap K[x_1, ..., x_n]$ un subanillo de $K[x_1, ..., x_n]$ finitamente generado?

La respuesta, tanto al problema original de Hilbert como al problema de la generación finita de invariantes, es negativa. Hay muchos contraejemplos a estas formulaciones y a problemas parecidos que derivan de ellas, trataremos de presentar un breve resumen sobre estas cuestiones en la próxima subsección.

2.1.2. Contraejemplo al problema de generación finita

Trabajando con la versión geométrica del problema 14 que hemos establecido, Nagata estableció en 1958 una serie de contraejemplos utlizando al grupo aditivo G_a^{13} actuando por trasnformaciones lineales en el espacio afín $\mathbb{A}^{32}$, para una descripción de estos resultados consultar: [NAG]. A partir de este hecho, se han establecido una gran cantidad de nuevos contraejemplos, que reducen la dimensión, tanto del grupo actuante G, como de la variedad afín $\mathbb{A}^n$.

A lo largo de las próximas secciones mostraremos una respuesta afirmativa al teorema de finitud, que establece que si el grupo actuante es reductivo (o linealmente reductivo) entonces el anillo de invariantes siempre resulta finitamente generado. Aunque el grupo 1-dimensional G_a no es reductivo, también tiene esa propiedad de finitud, por lo establecido en el siguiente teorema:

Teorema 2.1.5. [Maurer-Weitzenbock]

Si K es de característica cero, y G es un grupo algebraico de dimensión uno actuando linealmente en el espacio afín $\mathbb{A}^n$, entonces el anillo $K[V]^G$ es finitamente generado.

Para una demostración de ese teorema consultar: [FRE].

También trabajando sobre el grupo aditivo G_a, Mukai construyó acciones lineales del grupo G_a^3 sobre $\mathbb{A}^{18}$, tales que el anillo de invariantes no resulta finitamente generado. Para consultar este contraejemplo ver: [MUK2]. A partir de este contraejemplo y del teorema que anunciamos anteriormente, surge una pregunta natural y que todavía continua abierta, incluso en característica cero:

¿ El anillo de invariantes asociado a acciones lineales del grupo G_a^2 sobre $\mathbb{A}^n$ resulta siempre finitamente generado?

Para cuerpos de característica positiva y para accciones no lineales de grupos, hay muchos contraejemplos estudiados y muchas preguntas sobre minimalidad en la dimensión de dichos contraejemplos que pueden formularse.

Después del contraejemplo de Nagata sobre el espacio afín $\mathbb{A}^{32}$, fueron encontrados una serie de contraejemplos en dimensiones menores: Campo Neuen para $\mathbb{A}^{19}$(Ver [CNE]), Steinberg para $\mathbb{A}^{18}$(Ver [STE]), Mukai para $\mathbb{A}^{16}$ (Ver [MUK2]), Tanimoto para $\mathbb{A}^{13}$ (Ver [TAN]), y Freudenburg para $\mathbb{A}^{11}$(Ver [FRE2]). Sin embargo, la minimalidad del n para la cual existe un contrajemplo para $\mathbb{A}^n$ es un pregunta abierta.

Para concluir esta breve digresión sobre los contraejemplos al problema 14, veremos como esta construído el contraejemplo original formulado por Nagata:

Ejemplo 2.1.6. Consideremos $K = \mathbb{C}$, y elementos $\{a_{ij}\}$ con $(i = 1,2,3; j = 1,2,..,16$ algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Tomemos $V = \mathbb{C}^{16}$ y W como el subespacio de elemetos ortogonales a los elementos:

$$(a_{i1}, ..., a_{i16})$$

Observemos que la dimensión de W es 13.

Sean $x_1, ..., x_{16}, t_1, ..., t_{16}$ elementos algebraicamente independientes sobre K, y sea G el conjunto de de trasnformaciones lineales σ tales que:

- $\sigma(t_i) = t_i$
- $\sigma(x_i) = x_i + b_i t_i$

con $(b_1, ..b_{16}) \in W$. Entonces, el anillo de invariantes $K[x_i, t_i]^G$ no es finitamente generado.

2.1.3. Grupos linealmente reductivos y generación finita

Si bien el problema de la generación finita de invariantes en su versión general no es cierto, lo es en el caso en que el grupo G sea reductivo.

Debido a distintos contextos, hay tres nociones de reductibidad: la de grupo algebraicamente reductivo, la de grupo geométricamente reductivo y la de grupo linealmente reductivo. Las primeras dos son equivalentes, sin importar la característica del cuerpo de base y, además, en el caso de que el cuerpo $\mathbb{K}$ sea de característica cero, todas estas nociones coinciden. Sin embargo, en característica positiva, ser linealmente reductivo es más fuerte. Volveremos sobre estos conceptos en las próximas secciones, a continuación nos concentraremos en el caso de grupos linealmente reductivos.

Definición 2.1.7. Sea G un grupo algebraico afín, diremos que una representación racional V es irreducible si las únicas subrepresentaciones racionales son las triviales. Es decir, si W es un subespacio vectorial de V no nulo y estable por la acción de G, entonces $W = V$.

Observación 2.1.8. Sea V una G-representación racional irreducible, entonces:

- Si $v \in V - \{0\}$ entonces $V = \langle G.v \rangle_{\mathbb{K}}$
- La acción de G es trivial o no posee elementos invariantes.

Demostración. Es inmediata a partir de que tanto $\langle G.v \rangle_{\mathbb{K}}$ como V^G resultan subrepresentaciones racionales de V. □

Definición 2.1.9. Diremos que un grupo algebraico afín es linealmente reductivo si para toda representación lineal V de dimensión finita existen subrepresentaciones irreducibles V_1,V_2,...,V_n tales que:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n.$$

En virtud de la similitud de esta definición con la de módulo semisimple sobre un anillo, podemos llamar a todas las representaciones racionales irreducibles como simples y, a las representaciones que cumplen la condición de la definición anterior, semisimples.

Probemos ahora una caracterización ligeramente distinta de la definición de grupo linealmente reductivo:

Proposición 2.1.10. G es un grupo linealmente reductivo si y sólo si para toda representación racional V y para toda subrepresentación W existe otra subrepresentación T tal que: $V = W \oplus T$.

A dicho T también lo llamaremos complemento G-estable de W.

Demostración. Supongamos que el grupo G es linealmente reductivo, entonces existen subrepresentaciones irreducibles de V tales que: $V = V_1 \oplus ... \oplus V_n$. Por lo tanto,

$$W = W \cap V_1 \oplus ... \oplus W \cap V_n.$$

Además, como $W \cap V_i$ resulta una subrepresentación de V_i entonces: $W \cap V_i = V_i$ o $W \cap V_i = 0$ para cada $i \in \{1, .., n\}$. Supongamos entonces, sin pérdida de generalidad, que $W = V_1 \oplus ... \oplus V_k$ para cierto $k \leq n$. Luego basta tomar $T = V_{k+q} \oplus .. \oplus V_n$.

La recíproca de este resultado la probaremos por inducción en la dimensión de la representación V como K-espacio vectorial.

Si V es de dimensión 1, el resultado es inmediato, pues como V no tiene subespacios vectoriales propios, tampoco tiene subrepresentaciones propias, con lo cual resulta irreducible. Supongamos V una representación racional de dimensión n, si es irreducible, el resultado es nuevamente inmediato, si no lo es, entonces posse alguna subrepresentacion W no trivial, luego sabemos que existe otra subrepresentación tal que: $V = W \oplus T$, y si aplicamos la hipótesis inductiva a cada componente obtenemos el resultado deseado y queda probada la proposición. $\square$

Todos los grupos algebraicos finitos, como veremos más adelante, son linealmente reductivos. Dada una representación racional V, podemos definir, para cada $v \in V$, el promedio dado por:

$$R(v) = \frac{\sum_{g \in G} g.v}{|G|},$$

$R(V) \subset V^G$ y define una "proyección" de V sobre sus invariantes. Este operador fue el elemento clave para demostrar que, sobre un grupo finito, todos los anillos de invariantes quedan finitamente generados, y es también el que nos permitirá demostrar fácilmente que todos los gurpos finitos son linealmente reductivos.

Definición 2.1.11. Sea G un grupo algebraico afín y sea V una representación racional de G. Un Operador de Reynolds es un morfismo K-lineal $R : V \longrightarrow V^G$ tal que:

1. $R(v) = v$ para todo elemento $v \in V^G$,
2. R es G-equivariante, es decir, $R(g.v) = R(v)(= g.R(v))$.

A continuación veremos que, para cualquier representación racional de un grupo algebraico reductivo, podemos definir un operador de Reynolds, y que además, la existencia de dichos operadores en todas las representaciones caracterizan a los grupos linealmente reductivos. Para esto necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 2.1.12. Sea G un grupo linealmente reductivo y sea V una representación lineal de dimensión finita. Entonces existe un isomorfismo de G-representaciones: $\Phi : (V^G)^* \longrightarrow (V^*)^G$

Demostración. Sabemos que existe W una subrepresentación racional de V tal que: $V = V^G \oplus W$. Si $f \in (V^G)^*$ definimos $\Phi(f) = \overline{f}$ del siguiente modo:

$$\overline{f}(v + w) = f(v).$$

Además, esta asignación es G-equivariante, pues ambos espacios tienen una estructura trivial sobre G. Como este morfismo es claramente K-lineal, deducimos que Φ es un morfismo de G-representaciones que, además, resulta inyectivo. Aplicando lo que acabamos de demostrar, a la representación racional V^*, obtenemos una inyección de G-representaciones:

$$((V^*)^G)^* \hookrightarrow (V^{**})^G \simeq V^G.$$

Este morfismo en particular resulta una inyección K-lineal. Luego, tomando dimensión a ambos conjuntos se sigue que: $dim_k(V^*)^G \leq dim_k(V^G)^*$. A partir de esto podemos deducir que Φ resulta un isomorfismo, pues es un monomorfismo entre espacios de igual dimensión. $\square$

Los siguientes lemas, que pueden ser enunciados para representaciones de grupo abstractos en general, caracterizan los morfismos de representaciones irreducibles:

Lema 2.1.13. (Lema de Schur) Sean V y W dos G-representaciones irreducibles y $f : V \longrightarrow W$ un morfismo no nulo de representaciones, entonces f resulta inversible.

Corolario 2.1.14. Si V es una G-representación irreducile de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ es un morfismo de G-representaciones, entonces f es un múltiplo de un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

Para ampliar y encontrar demostraciones de estos rseultados consultar: [FUL, Schur's Lemma 1.7].

A contiunación establecemos el teorema que habíamos anunciado, el cual determina caracterizaciones de grupos linealmente reductivos:

Teorema 2.1.15. Sea G un grupo algebraico afín, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) G es linealmente reductivo.

b) Para cada representación racional finita V, existe una unica subrepresentación racional Z tal que: $V = V^G \oplus Z$, y además satisface que $(Z^*)^G = 0$.

c) Para toda representación racional V, existe un único operador de Reynolds $R_V : V \longrightarrow V^G$.

d) Dada un representación racional V y $v \in V^G \backslash \{0\}$, existe $f \in (V^*)^G \backslash \{0\}$ tal que: $f(v) \neq 0$.

Demostración. **a)⇒b):** Por ser G linealmente reductivo sabemos que existe una subrepresentación Z tal que: $V = V^G \oplus Z$. Como G también actúa racionalmente sobre V^*, por ser V finito dimensional, obtenemos que:

$$V^* = (V^G)^* \oplus Z^*.$$

Utilizando el lema 2.1.12 deducimos que $Z^* \cap (V^*)^G = (Z^*)^G = \{0\}$. Además de esta condición, deducimos que $Z = ((V^*)^G)^\perp$, es decir, el anulador del espacio de funcionales invariantes, y así obtenemos la unicidad.

b)⇒c): Sea $v \in V$ un elemento arbitrario, como V es en particular localmente finita, existe un subespacio W de V que es G-estable y de dimensión finita. A partir de b) obtenemos una descomposición: $W = W^G \oplus Z$, donde $(Z^*)^G = \{0\}$. Definimos $R_W : W \longrightarrow W^G$ como la G-proyección dada por la descomposición anterior.

Veamos que si W' es otra G-representación racional contenida en W, entonces $R_{W'} = R_W|_{W'}$. Si $W' = W'^G \oplus Z'$, entonces $R_W|_{Z'} = 0$, pues si existe un $z' \in Z'$ tal que $R_W(z') \neq 0$, entonces podemos considerar un funcional $\psi \in (W^G)^*$ que no sea anule en z' y luego:

$$Z' \overset{R_W|_{Z'}}{\longrightarrow} W^G \overset{\psi}{\longrightarrow} K,$$

resulta un elemento no nulo en $(Z'^*)^G = 0$, lo cual es un absurdo por construcción de Z'. Entonces, como $w' - R_{W'}(w') \in Z'$, aplicando R_W obtenemos:

$$0 = R_W(w') - R_{W'}(w').$$

De donde concluimos lo que queríamos. Para definir el operador de Reynolds sobre toda la representación racional V bastará entonces definir $R_V(v) = R_W(v)$, donde W es cualquier subrepresentación racional finita que contenga a v. Es claro que con esta definición R_V cumple las propiedades de dicho operador.

Para probar la unicidad supongamos que tenemos definido un operador de Reynolds sobre V, y sea W una subrepresentación finita, si W admite la descomposición $W = W^G \oplus Z$, la restricción de R_V a Z deberá ser 0 pues, de lo contrario, con argumentos análogos a los que ya utilizamos, probaríamos que $(Z^*)^G$ sería no nulo. Además, por ser R_V un operador de Reynolds sobre W^G actuará como Id_{W^G}, con lo cual $R_V|_W = R_W$, y concluimos la unicidad.

c)⇒d): Sea V una representación racional cualquiera y sea $v \in V^G \setminus \{0\}$. Antes de continuar observemos que aunque V^* posiblemente no tenga estructura de G módulo racional o representación racional, sí resulta una G-variedad por lo que tiene sentido definir $(V^*)^G$.

Sabemos que existe un único operador de Reynolds $R_V : V \longrightarrow V^G$. Si tomamos $\phi : V^G \longrightarrow K$ un operador lineal cualquiera que no se anule en v, entonces $\phi \circ R_V \in (V^*)^G$ y además no se anula en v.

d)⇒a) Sea V una representación racional de G de dimensión finita y sea W una subrepresentación de V. Primero supongamos que W es irreducible. Sea $\tilde{V} = Hom_G(W, V)$, el espacio de todos los morfismos de G representaciones. Es sencillo ver que también resulta una G-representación racional. Además su dual resulta isomorfo a $Hom_G(V, W)$ mediante el isomorfismo determinado por la siguiente forma bilineal no degenerada:

$$Hom(V, W) \times Hom(W, V) \longrightarrow K$$

$$(f, h) \longrightarrow Tr(f \circ h) \in K.$$

Luego, a cada elemento $f \in Hom(V, W)$ lo identificamos con $(f, -) \in Hom(W, V)^*$. Además, la acción de G inducida sobre $\tilde{V}^*$ coincide con la acción de G sobre $Hom(V, W)$, al cual a partir de ahora lo denotaremos directamente por $\tilde{V}^*$, sin hacer alusión al isomorfismo.

Consideremos a $i \in \tilde{V}^G$ como el morfismo dado por la inclusión. Por d) existe un elemento $f \in (\tilde{V}^*)^G$ tal que $f(i) = Tr(f \circ i) \neq 0$, por lo tanto, $f \circ i \in Hom(W, W)^G$ es un morfismo no nulo, y aplicando entonces el lema 2.1.14 obtenemos que existe $\lambda \in K$ tal que:

$$f \circ i(w) = \lambda w.$$

Consideremos ahora $Z = Ker\,(f)$, es claro que $Z \cap W = \{0\}$ pues $f|_W = Id$. Veamos que resulta un complemento para W. Dado $v \in V$ tenemos la siguiente descomposición:

$$v = \underbrace{\frac{1}{\lambda} f(v)}_{\in W} + \underbrace{v - \frac{1}{\lambda} f(v)}_{\in Z = Ker\,(f)},$$

de donde concluimos que $V = W \oplus Z$.

Para el caso en que W no sea irreducible, es sencillo deducir el resultado por inducción en la dimensión de V. Basta tomar W' alguna subrepresentación racional irreducile contenida estrictamente en W, para la cual ya sabemos que admite un complemento G-estable Z' tal que $V = W' \oplus Z'$. Luego $W = W' \oplus W \cap Z'$ y además, por hipótesis inductiva, $W \cap Z'$ admite un complemento en Z', es decir, existe Z una subrepresentación racional de Z' tal que: $Z' = W \cap Z' \oplus Z$. Así podemos conlcuir que Z es un complemento para W en V, pues:

$$V = W' \oplus Z' = W' \oplus W \cap Z' \oplus Z = W \oplus Z$$

. □

Este teorema es de suma importancia, pues establece importantes equivalencias para grupos reductivos, que nos permitirán no sólo demostrar el teorema de generación finita para este tipo de grupos, sino también probar que muchos de los grupos algebraicos afines usuales resultan linealmente reductivos.

Observación 2.1.16. Sea V y W dos G-representaciones racionales, sea $f : V \longrightarrow W$ un morsfismo de G representaciones, y sea $f^G : V^G \longrightarrow W^G$ el morfimso inducido en los respectivos invariantes, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "R_V"'] & W \arrow[d, "R_W"] \\ V^G \arrow[r, "f^G"'] & W^G \end{tikzcd}$$

Pues si $V = V^G \oplus Z$, donde Z es el único complemento G-estable de V^G, entonces $f(Z)^G = \{0\}$, pues de lo contrario existiría un elemento no nulo $f(z_0) \in W^G$ y podríamos considerar el morfismo:

$$Z \xrightarrow{f|_Z} W \xrightarrow{R_W} W^G \xrightarrow{\phi} K,$$

donde ϕ es algún funcional lineal que no anule a $f(z_0)$. Este morfismo descripto resultaría un funcional no nulo en $(Z^*)^G$ lo cual sería un absurdo por la definición de Z. Esto nos prueba que, efectivamente, $f(Z)^G = \{0\}$, y como además $f(V^G) \subset f(V)^G$ deducimos que:

$$f(V) = f(V)^G \oplus f(W)$$

A partir de lo cual la conmutatividad del diagrama es inmediata.

Veamos ahora algunos corolarios importantes que se obtienen a partir de la observación anterior:

Corolario 2.1.17. Sea G un grupo algebraicamente reductivo, consideremos V y W dos representaciones racionales de G, y un morfismo sobreyectivo $f : V \longrightarrow W$ de G representaciones. Entonces $f(V^G) = W^G$.

Demostración. Es inmediata a partir de la observación anterior. □

Veamos ahora un resultado que también resulta importante para el teorema de generación finita y que nos permitirá establecer una relación entre los invariantes de $K[X]$ para cualquier G-variedad con los invariantes de una cierta representación racional de G.

Corolario 2.1.18. Sea G un grupo algebraico afín y sea X una G-variedad. Existe una representación racional V y un morfismo G-equivariante de K-álgebras afines $\phi : K[V] \longrightarrow K[X]$ tal que : $\phi(K[V]^G) = K[X]^G$.

Demostración. Por lo probado en 1.2.25, sabemos que dada una G-variedad X existe un G-módulo racional finito (representación racional) V y una inmersión cerrada $i : X \longrightarrow V$, que es G-equivariante. Además sabemos que i está determinada por un morfismo sobreyectivo de K-álgebras G-equivariante dado por: $i^* : K[V] \longrightarrow K[X]$. Luego, utilizando la proposición anterior, deducimos que $i^*(K[V]^G) = K[X]^G$. □

Corolario 2.1.19. Si consideramos una G-variedad X de un grupo linealmente reductivo, sabemos que $K[X]$ resulta una representación racional de G y por lo tanto existe un único operador de Reynolds $R : K[X] \longrightarrow K[X]^G$. Pero además, en este caso, la representación $K[X]$ tiene una estructura adicional, pues es una K-álgebra afín. Entonces podemos probar, además, que R es un morfismo de $K[X]^G$-módulos, con las acciones inducidas por el producto en $K[X]$.

Demostración. Sea $f \in K[X]^G$ y sea $g \in K[X]$, queremos probar que $R(f.g) = f.R(g)$. Para probar este resultado basta aplicar la observación anterior al morfismo: $(f.) : K[X] \longrightarrow K[X]$, determinado por el producto del elemento f. Debido a que el elemento f es invariante, se deduce que dicho morfismo es G-equivariante y por lo tanto de G-representaciones. La conmutatividad de:

$$\begin{tikzcd} K[X] \arrow[r, "f."] \arrow[d, "R"'] & K[X] \arrow[d, "R"] \\ K[X]^G \arrow[r, "(f.)^G"'] & K[X]^G \end{tikzcd}$$

prueba el resultado afirmado.

□

Ahora probemos el teorema de generación finita que tanto anunciamos:

Teorema 2.1.20. (Teorema de generación finita de Hilbert)

Sea G un grupo algebraicamente reductivo y sea V una representación racional de G, entonces el anillo de invariantes dado por $K[V]^G$ resulta una K-álgebra finitamente generada.

Demostración. Como V es en particular una variedad algebraica afín, entonces $K[V]$ resulta una K-álgebra notheriana. Por lo tanto, si considaremos el ideal ideal

$$I = \langle K[V]^G_{>0} \rangle_{K[V]}$$

generado por todos los invariantes de $K[V]$ de grado positivo, existen finitos $f_1, .., f_r$ invariantes (de grado positivo) tales que:

$$I = \langle f_1, .., f_r \rangle_{K[V]}$$

Veamos que entonces: $k[V]^G = K[f_1, ..., f_r]$. Para esto probaremos que si $h \in K[V]^G$ es un polinomio homogéneo de grado d, entonces $h \in K[f_1, ..., f_r]$ y esto lo veremos por inducción en el grado d.

Para $d = 0$ es trivial, supongamos que h es un invariante de grado positivo d, entonces, por la definición de I sabemos que existen elementos $g_1, .., g_r \in K[V]$ tales que:

$$h = \sum_{i=1}^{r} g_i.f_i \tag{2.1.1}$$

Donde cada g_i puede ser supuesto homogéneo de grado $d - deg(f)$, pues en caso de no ser homegéneos, podríamos descomponerlos como sumas de sus componentes homegéneas y aplicar el mismo razonamiento, que haremos a continuación a, cada componente.

Consideremos el operador de Reynolds $R = R_{K[V]}$ definido sobre la representación racional $K[V]$. Para cada $l \in \mathbb{N}_0$, como la acción de G sobre $K[V]$ respeta el grado sabemos que $K[V]_l$ resulta una subrepresentación, y por lo tanto, como ya hemos visto:

$$R_{K[V]_l} = R_{K[V]}|_{K[V]_l},$$

y luego aplicando el operador R a la ecuación 2.1.1 obtenemos:

$$h = R(h) = \sum_{i=1}^{r} R(g_i f_i) = \sum_{i=1}^{r} R(g_i) f_i$$

Cada elemento $R(g_i)$ es un elemento en $K[V]^G_{d-deg(f_i)}$, y por hipótesis inductiva pertenece a $K[f_1, ..., f_r]$, de dónde podemos concluir que h también pertenece, y así queda probado el teorema.

□

Corolario 2.1.21. Sea X una G-variedad de un grupo algebraicamente reductivo, entonces $K[X]^G$ es un álgebra finitamente generada.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema de generación finita de Hilbert y del corolario 2.1.18. □

2.1.4. Radicales, Grupos Semisimples y Reductividad

La presente sección es una breve digresión sobre algunos conceptos generales de estructura de grupos algebraicos afines. Para un panorama más amplio de los resultados y demostraciones que enunciaremos a continuación, consultar: [HUM, Secciones 13.5 y 19.5].

Lema 2.1.22. Sea G un grupo algebraico afín y sean H y H' dos subgrupos algebraicos. Se define su conmutador por:

$$(H, H') = \langle xyx^{-1}y^{-1} : x \in H \;\; y \in H' \rangle$$

y además satisface:

- Si H y H' son normales, entonces (H, H') es un subgrupo algebraico normal.
- Si H es conexo, entonces (H, H') es un subgrupo algebraico y conexo.

A partir de la definición anterior se definen los derivados asociados al grupo G por:

$$\mathfrak{D}^k(G) = (\mathfrak{D}^k(G), \mathfrak{D}^k(G))$$

donde $\mathfrak{D}^0(G) = G$.

Definición 2.1.23. Un grupo algebraico se dice soluble si satisface alguna de las siguientes definiciones equivalentes:

1. Existe un entero k tal que: $\mathfrak{D}^k(G) = 0$
2. Existe una cadena $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq ... \supseteq G_n = \{e\}$ de subgrupos algebraicos tales que: G_i/G_{i+1} resultan abelianos.

En todo grupo algebraico afín es posible destacar dos tipos de subgrupos algebraicos, que resultan de mucha importancia para describir la estrucutura de los grupos en general:

- Un subgrupo algebraico B se dice de Borel si es conexo, soluble y maximal con respecto a esas propiedades.
- Un subgrupo T maximal e isomorfo a un toro algebraico se suele denominar como el subgrupo tórico de G.

Observación 2.1.24. Como todo toro algebraico resulta conexo y soluble, se sigue que todo subgrupo tórico esta contenido en un subgrupo de Borel B y también resulta un subgrupo tórico de este último.

Una propiedad importante que satisfacen los subgrupos de Borel es la siguiente:

Proposición 2.1.25. Todos los subgrupos de Borel de G son conjugados.

A continuación enunciaremos un teorema de estrucutura para grupos conexos y solubles:

Teorema 2.1.26. Sea B un grupo algebraico conexo y soluble, y sea T su subgrupo tórico. Entonces existe un único subgrupo algebraico B_u conexo, normal y unipotente tal que:

$$B = B_u \ltimes T$$

Definamos los radicales asociados al grupo algebraico:

Definición 2.1.27. Sea G un grupo algebraico afín, definimos el racial asociado $R(G)$ como la componente conexa del elemento neutro de la intersección de todos los subgrupos de Borel, es decir:

$$R(G) = (\bigcap_{B \ borel} B)_{1_G}$$

Y definimos el radical unipotente $R_u(G)$ como la componente unipotente de $R(G)$, es decir, el subgrupo formado por todos sus elementos unipotentes.

Observación 2.1.28. Dicho de otro modo, el radical de un grupo algebraico es el subgrupo algebraico normal, conexo y soluble más grande de G, y el radical unipotente queda caracterizado como el subgrupo algebraico normal, conexo y unipotente más grande.

Ahora podemos introducir las nociones de grupo semisimples y reductivos:

Definición 2.1.29. Un grupo algebraico afín G se dice semisimple si su radical es trivial, es decir, si $R(G) = \{1_g\}$. Por otro lado, G se dice reductivo si su radical unipotente es trivial.

La observación previa a las definiciones puede traducirse en la siguiente equivalencia para grupos semisimples:

Proposición 2.1.30. Un grupo conexo G se dice semisimple si no contiene subgrupos algebraicos, normales y conmutativos, excepto $\{1_G\}$.

Para una demostración de la equivalencia anterior ver: [HUM, Sec. 13.5].

Hay numerosos ejemplos de grupos grupos reductivos: $\mathbb{GL}_n$,$\mathbb{SL}_n$,O_n, SO_n, S_{p_n}, todos los grupos finitos, los toros algebraicos y los grupos semisimples.

Como ya hemos enunciado anteriormente sobre cuerpos de característica cero, las nociones de linealmente reductivo y reductivo coinciden. Este resultado se debe al trabajo de Nagata y Miyata (Ver [NAM]), que establece:

Teorema 2.1.31. Si $car(K) = 0$ entonces un grupo algebraico afín es linealmente reductivo si y solo si es reductivo.

Observemos que en particular todo grupo semisimple resulta linealmente reductivo. Como veremos, también es posible ver este resultado en forma directa utilizando argumentos que involucran las álgebras de Lie asociadas a los respectivos grupos algebraicos.

2.1.5. Nota sobre los ejemplos de grupos linealmente reductivos

Como ya hemos enunciado, si el cuerpo de base es de caracteristica cero entonces las nociones de grupo reductivo y de linealmente reductivo coinciden, por lo tanto podemos deducir que los siguientes grupos resultan linealmente reductivos:

1. $\mathbb{GL}_n$
2. $\mathbb{SL}_n$
3. O_n
4. SO_n
5. SP_n
6. Grupos finitos
7. Toros algebraicos
8. Todos los grupos semisimples

En este desarrollo estamos apelando al teorema de equivalencia de Nagata y Miyata, y el hecho de que puede demostrarse que los radicales de estos grupos resultan triviales. Sin embargo, no describiremos este tipo de cálculos en este trabajo.

La idea de esta nota es explicar cómo puede ser demostrado de otro modo que estas familias de grupos resultan linealmente reductivas. Es importante tener en cuenta el resultado dado en 2.1.15, sobre equivalencias de grupos linealmente reductivos.

Utilizando resultados clásicos sobre la clasificación de álgebras de Lie semisimples y resultados que vinculan grupos semisimples con álgebras de Lie semisimples, podremos demostrar que los ejemplos 2, 5 y 7 resultan grupos semisimples. A priori, este argumento no sería muy distinto a usar directamente que reductivo implica linealmente reductivo, sin embargo, algunas diferencias importantes son: en este caso podemos enunciar cómo se demuestra que estos grupos son semisimples, y además es posible dar una idea de ciertos argumentos sobre la reducibilidad de representaciones que demuestran que todo grupo semisimple es linealmente reductivo, sin usar en el medio el concepto de reductivo. De este modo, también obtendremos otro modo de ver que la familia de ejemplos 8 satisface la condición que deseamos. El desarrollo de estas ideas puede verse en este trabajo en: 2.2.3.

Para los casos 6 y 7, veremos directamente (en 2.2.5)que es posible definir sobre cada representación racional un operador de Reynolds. Estos argumentos serán demostrados en la próxima sección. Para los grupos tipo 2 también es posible hacer una demostración constructiva de su operador de Reynolds que formará parte de un caso particular del método de construcción de este tipo de operadores para grupos semisimple,s que también será descripta en la siguiente sección. Como veremos, estas técnicas también sirven para dar una demostración alternativa de 8.

Por útimo, los ejemplos 1 y 3 se podrán obtener a partir de 2 y 4 respectivamente. Es posible demostrar que producto directo y cocientes de grupos linealmente reductivos resultan linealmente reductivos (Ver por ejemplo [MUK, Sec. 4.3 (a)]). Además, hay una forma natural de construirse operadores de Reynolds para productos o para cocientes, a partir de los operadores de Reynolds de cada componente, y los grupos de tipo 1 y 3 pueden expresarse como cocientes y productos de grupos linelmente reductivos. Por ejemplo, estudiemos qué suecede para $\mathbb{GL}_n$

Identifiquemos al centro del grupo con: $Z(\mathbb{GL}_n) = G_m$ y consideremos el epimorfismo de grupos dado por:

$$\begin{aligned} \phi : G_m \times \mathbb{SL}_n &\longrightarrow \mathbb{GL}_n \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda.A \end{aligned}$$

Es claro que este morfimso resulta un morfismo de variedades algebraicas. Además, su nucleo queda determinado por:

$$Ker\,(\phi) = \{(\lambda, A) : \lambda.A = Id\} = \{(\lambda, \frac{1}{\lambda} Id) : \lambda^n = 1\} \simeq \mathbb{Z}_n$$

y por lo tanto:

$$\mathbb{GL}_n \simeq (G_m \times \mathbb{SL}_n)/\mathbb{Z}_n$$

de donde se sigue que $\mathbb{GL}_n$ es linealmente reductivo. Un argumento similar nos prueba que O_n también es linealmente reductivo a partir de que SO_n lo es.

Otro tipo de argumentos para probar que los grupos clásicos de matrices resultan linealmente reductivos pueden encontrarse en: [FSR, Cáp. 9].

2.2. Construcción de operadores de Reynolds

Nuestro objetivo es estudiar la construcción de operadores de Reynolds sobre diversos grupos algebraicos afines. La importancia de dichos operadores no sólo radica en que nos probarán que los correspondientes grupos son linealmente reductivos, sino que también son un motor para diversos algoritmos para el cálculo de generadores del anillo de invariantes.

Específicamente, a lo largo de esta de esta sección daremos las definiciones y construcciones básicas sobre el álgebra de Lie asociada a un grupo algebraico afín y definiremos un operador clásico sobre su álgebra envolvente, que nos ayudará en la construcción operadores de Reynolds sobre ciertos grupos algebraicos afines.

2.2.1. Derivaciones y el Álgebra de Lie asociada a un grupo algebraico

Álgebras de Lie: Recordemos los conceptos básicos de álgebras de Lie, especialmente para fijar la notación de esta sección:

Definición 2.2.1. Sea $\mathcal{V}$ un k-espacio vectorial. Se dice que $\mathcal{V}$ es un algebra de Lie si existe $[,] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ una forma bilineal antisimétrica que además cumpla la siguiente identidad, que es llamada identidad de Jacobi:

$$[v, [w, z]] + [w, [z, v]] + [z, [v, w]] = 0$$

Definición 2.2.2. Sea $\mathcal{V}$ un álgebra de Lie, a continuación definiremos los conceptos de ideal, subálgebra y morfismos de álgebras de Lie:

- Diremos que un subespacio vectorial $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ es una subálgebra de Lie si el corchete dado en $\mathcal{V}$ se restringe bien al subespacio $\mathcal{W}$, es decir, si dados dos elementos $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ entonces $[w_1, w_2] \in \mathcal{W}$.
- Una subalgebra $\mathcal{W}$ se dirá además un ideal de $\mathcal{V}$ si $[\mathcal{V}, \mathcal{W}] \subset \mathcal{W}$, es decir si dados elementos $v \in V$ y $w \in \mathcal{W}$ entonces $[v, w] \in \mathcal{W}$.
- Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos álgebras de Lie y sea $\phi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ un morfismo K-lineal. Diremos que ϕ es un morfismo de álgebras de Lie si satisface:

$$\phi([v_1, v_2]) = [\phi(v_1), \phi(v_2)]$$

.

Observación 2.2.3. Si $\phi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ es un morfismo de álgebras de Lie entonces $\phi(\mathcal{V})$ es una subálgebra de Lie de $\mathcal{V}'$. Pues si $v_1' = \phi(v_1), v_2' = \phi(v_2) \in \phi(\mathcal{V})$, entonces:

$$[v_1', v_2'] = [\phi(v_1), \phi(v_2)] = \phi([v_1, v_2]) \in \phi(\mathcal{V})$$

Definición 2.2.4. Dada $\mathcal{V}$ un algebra de Lie, podemos definir una acción lineal de $\mathcal{V}$ sobre sí misma, a la que llamaremos acción adjunta, y denotaremos por: $ad : \mathcal{V} \longrightarrow End_k(\mathcal{V})$. Para $v \in \mathcal{V}$ definiremos $\mathrm{ad}(v)$ del siguiente modo:

$$ad(v)(w) = [v, w]$$

Aclaremos que en este contexto la "acción" ad es tan solo una función, no cumple ninguna propiedad de asociatividad, debido a que el propio corchete de Lie no es asociativo.

También usaremos la notación multiplicativa de acción para expresar:

$$ad(v)(w) = ad(v) \cdot w$$

Para finalizar este breve repaso de los conceptos básicos de álgebras de Lie, definiremos una forma bilineal sobre el álgebra $\mathcal{V}$ que nos será de gran utilidad para la construcción de operadores importantes en el álgebra de Lie asociada a un grupo algebraico afín. Es su contexto general, esta forma no necesariamente es no degenerada:

Definición 2.2.5. Sea $\mathcal{V}$ un álgebra de Lie con y $ad : \mathcal{V} \longrightarrow End_k(\mathcal{V})$ su acción adjunta asociada. Definimos la forma de killing asociada $\mathcal{V}$, $k_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ del siguiente modo:

$$k_{\mathcal{V}}(v_1, v_2) = Tr(ad(v_1) \circ ad(v_2))$$

Donde Tr denota la traza de endomorfismo k-lineales definidos sobre $\mathcal{V}$.

Álgebras de Lie asociadas: Sea G un grupo algebraico afín y $K[G]$ su álgebra de Hopf asociada. Comenzaremos estudiando el espacio dual dado por $K[G]^*$, que resultará importante para definir $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie asociada al grupo. Definiremos sobre $K[G]^*$ una estructura de álgebra asociativa:

Para cada elemento $g \in G$ definimos $\epsilon_g \in K[G]^*$ como la evaluación en dicho elemento. Esto nos permite ver a G como un subconjunto de $K[G]^*$.

Definición 2.2.6. Dados dos elementos $\delta, \gamma \in K[G]^*$, definimos su convolución, como el único elemento $\delta * \gamma$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K[G] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\delta*\gamma"'] & K[G] \otimes K[G] \arrow[d, "\delta\otimes\gamma"] \\ K & K \otimes K \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Con la notación de Sweedler queda expresado por:

$$\delta * \gamma(f) = \sum \delta(f_1)\gamma(f_2)$$

Este producto es un caso particular del producto de convolución algebraico que se puede definir sobre $Hom_k(C, A)$, donde C representa una K-coálgebra y A una K-álgebra. En el caso de que H sea una bialgebra, el morfismo antipoda que definimos para álgebras de Hopf resulta una inversa del morfismo identidad en $Hom_k(H, H)$ con el producto dado por $*$.

Cálculos directos y sencillos, permiten ver que este producto determina cierta estructura sobre $K[G]^*$:

Proposición 2.2.7. El espacio dual $K[G]^*$ resulta una K-álgebra asociativa con el producto dado por $*$ y que tiene como unidad a ϵ_e, donde e denota al elemento neutro de G.

A continuación definimos el concepto de derivación:

Definición 2.2.8. Sea $g \in G$ y sea $\delta \in K[G]^*$, decimos que δ es una derivación en el punto g si para cada $f, h \in K[G]$ satisface:

$$\delta(f.h) = \delta(f)h(g) + f(g)\delta(h)$$

Al conjunto de todas las derivaciones en el punto g lo denotaremos por: $\mathcal{D}_g(K[G]) \subseteq K[G]^*$.

Observación 2.2.9. Sea G un grupo algebraico afín. Como en particular es una variedad algebraica afín, en cada punto $g \in G$ podemos definir su espacio tangente Zariski, al que denotaremos por $\mathcal{T}_g(G)$. Si llamamos m_g al ideal maximal de $K[G]$ correspondiente al punto g, dicho espacio tangente puede definirse por:

$$\mathcal{T}_g(G) = (m_g/m_g^2)^*$$

Este espacio tangente puede definirse (siempre en el contexto afín) de manera equivalente tomando $\mathcal{D}_g(G)$. Por ejemplo tomando al elemento neutro del grupo, $e \in G$, y dado $\delta \in (m_e/m_e^2)^*$. podemos definir $\hat{\delta} \in K[G]^*$ del siguiente modo:

$$\hat{\delta}(f) = \delta(\overline{f - f(e)}$$

La transformación $\hat{\delta}$ resulta una derivación en el punto e pues:

$$\hat{\delta}(f.g) = \delta(f.g - f(e).g(e)) = \delta((f - f(e))(g - g(e)) + (f - f(e))g(e) + f(e)(g - g(e))) =$$
$$\hat{\delta}(f)g(e) + f(e)\hat{\delta}(g)$$

Es sencillo ver que $\delta \longmapsto \hat{\delta}$ resulta un isomorfismo k-lineal.

Para profundizar estos conceptos consultar: [SHA, Cáp. II, Sec. 1].

Definición 2.2.10. Dado un grupo algebraico afín G, definimos el álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$ como el espacio vectorial dado por $\mathcal{D}_e(G)$ y con el corchete de Lie definido por:

$$[\delta.\gamma] = \delta * \gamma - \gamma * \delta$$

Observación 2.2.11. El corchete de Lie definido sobre $\mathfrak{g}$ es antisimétrico. La identidad de Jacobi para $[,]$ se sigue inmediatamente a partir de la asociatividad del producto de convolución $*$.

Observación 2.2.12. Debido a que $\mathfrak{g}$ coincide como espacio vectorial con $\mathcal{T}_e(G)$ y todo grupo algebraico afín es una variedad suave, se sigue que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita y $dim_k(\mathfrak{g}) = dim_k(\mathcal{T}_e(G) = dim(G)$.

A continuación veremos cómo, a partir de una acción del grupo G sobre una representación, podemos inducir una acción de $K[G]^*$ sobre ella, y por lo tanto, una acción de $\mathfrak{g}$. Además, introduciremos una acción específica del grupo G sobre $\mathfrak{g}$ que será de gran utilidad.

Recuerdo 2.2.13. Recordemos que, dado un espacio vectorial V, darle una estructura de representación racional sobre G a partir de un morfismo de variedades $\phi : G \times V \longrightarrow V$, es equivalente a darle un estructura de $K[G]$-comódulo a derecha dada por un morfismo K-lineal $\chi : V \longrightarrow V \otimes K[G]$. Además, se satisface que:

$$g.v = \sum f_i(g).v_i \iff \chi(v) = \sum v_i \otimes f_i$$

donde $\{v_i\}$ representa una base del espacio vectorial dado por $\langle G.v \rangle$, es decir, por el espacio generado por la G-órbita del vector v.

En algunos casos, por simplicidad, usaremos la notación de Sweedler para comódulos:

$$\chi(v) = \sum v_i \otimes f_i = \sum v_0 \otimes f_1$$

Definición 2.2.14. Dada un representación racional V y un elemento $\delta \in K[G]^*$, definimos la acción de δ sobre $v \in V$ del siguiente modo:

$$\delta \cdot v = \sum \delta(f_i)v_i$$

Esto define sobre V una estructura de $K[G]^*$-módulo a izquierda, donde el morfismo $\Psi : K[G]^* \times V \longrightarrow V$ queda determinado por:

$$\Psi(\delta, v) = \delta \cdot v = (Id \otimes \delta) \circ \chi(v)$$

Demostración. Como χ es un morfismo k-lineal, el morfismo determinado por $\delta\cdot : V \longrightarrow V$ resulta también un morfismo lineal. Veamos que, efectivamente, V cumple con los axiomas de $K[G]^*$-módulos a izquierda:

1. $\Psi(\delta, \Psi(\gamma.v)) = \Psi(\delta * \gamma, v)$
2. $\Psi(\epsilon_e, v) = v, \forall v \in V$

Para probar (1) recordemos que como χ define una estructura de comódulo sobre V, entonces respeta la comultiplicación. Es decir que el siguiente diagrama resulta conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\chi"'] & V \otimes K[G] \arrow[d, "Id\otimes\Delta"] \\ V \otimes K[G] \arrow[r, "\chi\otimes Id"'] & V \otimes V \otimes K[G] \end{tikzcd}$$

Esto puede expresarse mediante la notación de Sweedler como:

$$(\chi \otimes Id) \circ \chi = \sum v_{0,0} \otimes f_{0,1} \otimes f_1 =$$

$$= (Id \otimes \Delta) \circ \chi = \sum v_0 \otimes f_{1,1} \otimes f_{1,2}$$

Por lo tanto, podemos deducir (1) a partir de:

$$\delta \cdot (\gamma \cdot v) = \delta \cdot (\sum \gamma(f_1)v_0) = \sum \gamma(f_1)\delta(f_{0,1})v_{0,1} = \sum \gamma(f_{1,2})\delta(f_{1,1})v_0 =$$

$$= \sum \delta * \gamma(f_1)v_0 = (\delta * \gamma)(v)$$

Para deducir (2) observemos que, por la definición de la acción de G sobre V:

$$\epsilon_e \cdot v = \sum \epsilon_e(f_1)v_o = \sum f_1(e)v_o = e.v = v$$

□

Observación 2.2.15. Según lo desarrollado en la demostración anterior, podemos recuperar la acción de G sobre V a partir de la acción de $K[G]^*$ del siguiente modo:

$$\epsilon_g \cdot v = g.v$$

Veamos que a partir de la definición anterior, $K[G]^*$ tiene una acción natural sobre $K[X]$ para toda G-variedad.

Ejemplo 2.2.16. Sea X una G-variedad sobre un grupo algebraico afín, entonces sabemos que $K[X]$ tiene una estructura de G-representación racional a izquierda a partir de la acción:

$$(g.f)(x) = f(g^{-1}.x)$$

A la estructura de comódulo la denotaremos por $\chi_X : K[X] \longrightarrow K[X] \otimes K[G]$. Esto determina una estructura de $K[G]^*$-módulo, y en particular podemos ver a $\mathfrak{g}$ actuando sobre $K[X]$.

Proposición 2.2.17. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada a un grupo algebraico afín G actúa por derivaciones sobre $K[X]$ para toda G-variedad. Es dedir que si $\delta \in \mathfrak{g}$ entonces $\delta \cdot (f.g) = (\delta \cdot f).g + f.(\delta \cdot g)$. Además, $K[X]$ resulta un $\mathfrak{g}$-módulo o representación de $\mathfrak{g}$.

Demostración. Veamos que cada $\delta \in \mathfrak{g}$ actúa por derivaciones: recordemos que la acción de G sobre $K[X]$ es multiplicativa, y entonces la estructura de $K[G]$-coálgebra:

$$\chi_X : K[X] \longrightarrow K[X] \otimes K[G]$$

también es multiplicativa, y por lo tanto, utilizando la notación de Sweedler obtenemos:

$$\chi_X(f.g) = \sum f_0.g_0 \otimes f_1.g_1$$

Luego:

$$\delta \cdot (f.g) = \sum \delta(f_1.g_1)f_0.g_0 = \sum(\delta(f_1)g_1(e) + \delta(g_1)f_1(e))f_0.g_0 =$$
$$= \sum \delta(f_1)f_0.g_1(e)g_0 + \sum \delta(g_1)g_0.f_1(e)f_0 = (\delta \cdot f).g + f.(\delta \cdot g)$$

Por último, para ver que $K[X]$ resulta un $\mathfrak{g}$-módulo, basta comprobar que:

$$[\delta, \gamma] \cdot f = (\delta * \gamma) \cdot f - (\gamma * \delta) \cdot f = \delta \cdot (\gamma \cdot f) - \gamma \cdot (\delta \cdot f)$$

Lo cual demuestra que el morfismo inducido: $\mathfrak{g} \longrightarrow Der_k(K[X])$ es un morfismo de álgebras de Lie. □

Observación 2.2.18. El hecho de que $K[X]$ resulte un $\mathfrak{g}$-módulo se desprende de un resultado más general: si $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es el álgebra envolvente universal asociada al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces los $\mathfrak{g}$-módulos de Lie coinciden con los $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos. En nuestro caso particular, $K[G]^*$ resulta un álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, de donde se sigue que $K[X]$ es un $\mathfrak{g}$-módulo, a a partir del hecho que es un $K[G]^*$-módulo.

Observación 2.2.19. En el caso de que V sea una representación racional finita de G, entonces la acción inducida de $\mathfrak{g}$ también induce en V una estructura de $\mathfrak{g}$ representación, es decir, un morfismo de Lie:

$$\mathfrak{g} \longrightarrow End_k(V).$$

Así como se puede definir la acción adjunta sobre un álgebra de Lie arbitraria, que es una acción lineal del álgebra en sí misma, también podemos definir una acción lineal (e incluso racional) de un grupo algebraico G en su álgebra de lie asociada $\mathfrak{g}$. Primero definamos una acción de G sobre $K[G]^*$:

Definición 2.2.20. Dado un elemento $g \in G$ definimos para cada $\delta \in K[G]^*$:

$$Ad(g) \cdot \delta = \epsilon_g * \delta * \epsilon_{g^{-1}}$$

Esto nos define una acción de G sobre $K[G]^*$ por automorfismo k-lineales. Es decir que tenemos una función:

$$Ad : G \longrightarrow Hom_{k-alg}(K[G]^*, K[G]^*)$$

Observación 2.2.21. Si $g \in G$, $\delta \in K[G]^*$ y $f \in K[G]$, entonces la acción dada por $Ad(g)$ podemos describirla del siguiente modo:

$$(Ad(g) \cdot \delta)(f) = \delta(f(g.-.g^{-1}))$$

Donde $f(g.-.g^{-1})(x) = f(gxg^{-1})$.

Demostración. Primero observemos que:

$$(\delta * \epsilon_{g^{-1}})(f) = \sum \delta(f_1)f_2(g^{-1}) = \delta(\sum f_2(g^{-1})f_1) = \delta(f(-.g^{-1}))$$

Por lo tanto:

$$\epsilon * (\delta * \epsilon_{g^{-1}})(f) = \sum f_1(g)\delta(f_2(-.g^{-1})) = \delta(\sum f_1(g)f_2(-.g^{-1})) = \delta(f(g.-.g^{-1}))$$

□

Proposición 2.2.22. Si restringimos la acción de G sobre $K[G]^*$ a $\mathfrak{g}$ nos determina sobre $\mathfrak{g}$ una estructura de G-representación racional finita. Además, para cada $g \in G$, $Ad(g)$ resulta un isomorfimso de álgebras de Lie.

Demostración. La finitud de la representación se sigue de que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita. Si definimos la acción racional de G en $K[G]$ dada por:

$$g.f(x) = f(g^{-1}xg)$$

Entonces la acción inducida sobre el dual $K[G]^*$ también resulta ser racional. Veamos que esta acción inducida coincide con la acción dada por Ad. Sean $g \in G$, $\delta \in K[G]^*$ y $f \in k[G]$ luego:

$$(g \cdot \delta)(f) = \delta(g^{-1}.f) = \delta(f(g{-}g^{-1})) = (Ad(g) \cdot \delta)(f)$$

Para concluir la demostración, observemos que la acción dada por $Ad(g)$ queda bien restringida al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada a G. Tomemos $g \in G$ y $\delta \in \mathfrak{g}$, entonces:

$$(Ad(g) \cdot \delta)(fh) = \delta(fh(g.-.g^{-1})) = \delta(f(g.-.g^{-1})h(g.-.g^{-1})) =$$

$$= \delta(f(g.-.g^{-1}))h(g.e.g^-1) + f(g.e.g^{-1})\delta(h(g.-.g^{-1}) = (Ad(g) \cdot \delta)(f)h(e) + f(e)(Ad(g) \cdot \delta)(h)$$

Por lo tanto:

$$Ad(g) \cdot \delta \in \mathfrak{g},$$

y esto define sobre $\mathfrak{g}$ un estructura de G-módulo racional.

Además, es claro que la acción de $Ad(g)$ resulta de automorfimos K-lineales, que también respetan el corchete de Lie, pues:

$$[Ad(g)\delta, Ad(g)\gamma] = \epsilon_g * \delta * \epsilon_{g^{-1}} * \epsilon_g * \gamma * \epsilon_{g^{-1}} - \epsilon_g * \gamma * \epsilon_{g^{-1}} * \epsilon_g * \delta * \epsilon_{g^{-1}} =$$

$$\epsilon_g * \delta * \gamma * \epsilon_{g^{-1}} - \epsilon_g * \delta * \epsilon_{g^{-1}} = Ad(g)[\delta, \gamma]$$

□

Las notaciones de Ad y ad no son casuales, estos dos conceptos estan bien relacionados. Debido a que el morfismo $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ resulta de grupos algebraicos, es posible tomar su diferencial como morfismo de variedades algebraicas, y este último determina al morfismo ad:

$$\mathfrak{D}(Ad) = ad.$$

Para una demostración de este resultado ver: [HUM, Pág. 73].

2.2.2. Ejemplos de álgebras de Lie asociadas

En esta sección estudiaremos y caracterizaremos álgebras de Lie asociadas a algunos grupos clásicos de matrices.

Ejemplo 2.2.23. Consideremos el grupo algebraico afín dado por $\mathbb{GL}_n$, a su álgebra de Lie asociada la denotaremos por $\mathfrak{gl}_n$. Probaremos que esta álgebra coincide con el álgebra de matrices $K^{n\times n}$, con el corchete dado por el conmutador, es decir, que si $A, B \in K^{n\times n}$ entonces $[A, B] = AB - BA$.

Demostración. Dada una matriz $A \in K^{n\times n}$ definimos el operador ∂A en $K[\mathbb{GL}_n]^*$ dado por:

$$\partial A(f) = \frac{\partial}{\partial t} f(Id + tA)|_{t=0}$$

En principio deberíamos verificar que ∂A está bien definida, o dicho de otro modo, explicar cómo está definida. Si

$$f \in K[\mathbb{GL}_n] = K[X_{i,j}, 1/det],$$

luego podemos evaluar formalmente en $Id+tA$, esto quiere decir que por más que al evaluar t en ciertos valores de K la matriz dada no resulte inversible (lo cual no nos permitiría evaluar f en ella) consideramos a:

$$f(Id + tA) = \sum_{\substack{I\in\mathbb{N} \\ n_I\in\mathbb{N}}} a_I (Id + tA)^I.(1/det(Id + tA))^{n_I}$$

como un cociente polinomial en la variable t, y a priori tan sólo bien definido en la evaluación correspondiente a $t = 0$. Veamos a $f(Id + tA)$ como un elemento en $K(t) = frac(K[X])$. Consideremos en $K(t)$ la derivada formal en la variable t que correponde a la derivada formal de polinomios extendida a su cuerpo de fracciones mediante las reglas usuales de derivación, y a su aplicación al elemento dado la notaremos por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(f(Id + tA)).$$

Luego, observando que los denominadores de $f(Id + tA) \in K(t)$ nunca se anulan en su evaluación en $t = 0$ se sigue, mediante la conocida regla dereivación para el cociente de polonimios, que los denominadores de $\frac{\partial}{\partial t}(f(Id + tA))$ tampoco se anulan en la evaluación en cero, por lo tanto, podemos definir:

$$\partial A(f) := (\frac{\partial}{\partial t} f(Id + tA))(0)(= \frac{\partial}{\partial t} f(Id + tA)|_{t=0})$$

Usando las propiedades usuales de derivación se sigue que:

$$\partial A(f.g) = (\frac{\partial}{\partial t} f(Id + tA)|_{t=0}).g(Id + 0.A) + (\frac{\partial}{\partial t} g(Id + tA)|_{t=0}).f(Id + 0.A)$$

Con lo cual ∂A resulta una derivación en Id y $\partial A \in \mathfrak{gl}_n$.

Veamos cómo funcionan estos operadores sobre las funciones coordenadas $X_{i,j} \in K[\mathbb{GL}_n]$:

$$\partial A(X_{i,j}) = \frac{\partial}{\partial t}(\delta_{i,j} + t a_{i,j})|_{t=0} = a_{i,j}$$

Por lo tanto, si llamamos $E_{i,j}$ a las matrices que conforman la base canónica de $K^{n\times n}$, entonces $\{\partial E_{i,j}\}$ resultan linealmente independientes pues:

$$\text{Si} \quad \sum \lambda_{i,j}\partial E_{i,j} = 0 \quad \text{entonces} \quad \sum \lambda_{i,j}\partial E_{i,j}(X_{k,l}) = 0 \;\forall k,l \quad \text{entonces} \quad \lambda_{k,l} = 0 \;\forall k,l$$

Como $dim_k(\mathfrak{gl}_n) = n^2$, el mencionado conjunto conforma una base de esta álgebra de Lie como k-espacio vectorial. Ahora, tan sólo nos basta chequear que el corchete dado conmutador de $K^{n\times n}$ se corresponde con el corchete de $\mathfrak{gl}_n$, es decir que: Si $A, B \in K^{n\times n}$ entonces

$$\partial[A,B] = [\partial A, \partial B]_{\mathfrak{gl}_n}.$$

Para probar esto obsevemos que:

$$\begin{aligned}(\partial A * \partial B)(f) &= \sum \frac{\partial}{\partial t} f_1(Id + tA)|_{t=0} . \frac{\partial}{\partial s} f_2(Id + sB)|_{s=0} \quad = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}(\sum f_1(Id+tA).f_2(Id+sB))|_{t=0}|_{s=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} f((Id+tA)(Id+sB))|_{t=0}|_{s=0}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el corchete $[\partial A, \partial B]$ queda definido por:

$$[\partial A, \partial B](f) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}[f((Id+tA)(Id+sB)) - f((Id+tB)(Id+sA))]|_{t=0}|_{s=0}$$

Evaluando esta expresión en las funciones coordenadas obtenemos:

$$[\partial A, \partial B](X_{i,j}) = (AB)_{i,j} - (BA)_{i,j} = \partial AB(X_{i,j}) - \partial BA(X_{i,j}) = \partial[A,B](X_{i,j})$$

y a partir de esto podemos que deducir también que coinciden sobre la función $det \in K[\mathbb{GL}_n]$ y por lo tanto: $[\partial A, \partial B](1/det) = \partial[A,B](1/det)$, de donde se sigue que coinciden como derivaciones en $\mathfrak{gl}_n$. □

Observación 2.2.24. Observemos que en el desarrollo anterior si, en lugar de trabajar con el grupo algebraico afín dado por $\mathbb{GL}_n$, trabajamos con todo el espacio de matrices $K^{n\times n}$, entonces las derivaciones dadas por ∂A quedan bien definidas, y el álgebra de Lie $\mathcal{G}_{k^{n\times n}}$ asociada a $K^{n\times n}$, coincide con $\mathfrak{gl}_n$.

A continuación, veamos cómo podemos relacionar al álgebra de Lie asociada a un grupo algebraico afín y la asociada a algún subgrupo algebraico.

Proposición 2.2.25. Sea G un grupo algebraico afín y sea H un subgrupo cerrado de G, esto nos induce un epimorfismo de álgebras afines $\phi : K[G] \longrightarrow K[H]$. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sus álgebras de Lie asociadas respectivas.

Si consideramos el ideal $J = Ker\ (\phi)$, entonces los elementos de $\mathfrak{h}$ estan en correspondecia con las derivaciones $\delta \in \mathfrak{g}$ tales que $\delta(J) \equiv 0$. Este hecho induce un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{h}$ y la subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ con esa condición.

Demostración. El morfismo $\phi : K[G] \longrightarrow K[H]$ es el morfismo de álgebras inducido por la inmersión cerrada $i : H \hookrightarrow G$. Si $\gamma \in \mathfrak{h}$, entonces consideremos $\gamma \circ \phi : K[G] \longrightarrow K$ y veamos que pertenece a $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\gamma \circ \phi(g_1 g_2) = \gamma(\phi(g_1)\phi(g_2)) &= \gamma(\phi(g_1))\phi(g_2)(e) + \phi(g_1)(e)\gamma(\phi(g_2)) = \\ &= \gamma \circ \phi(g_1) g_2(i(e)) + g_1(i(e))\gamma \circ \phi(g_2) \\ &= \gamma \circ \phi(g_1) g_2(e) + g_1(e)\gamma \circ \phi(g_2)\end{aligned}$$

Con lo cual $\gamma \circ \phi \in \mathfrak{g}$, y además es claro que $\gamma \circ \phi(J) \equiv 0$. Reciprocamente dada una derivación $\delta \in \mathfrak{g}$ que cumple $\delta(J) \equiv 0$ existe una única función $\bar{\delta}$ tal que:

$$\begin{tikzcd} K[G] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\pi"'] & K \\ K[G]/J \arrow[ur, "\bar{\delta}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además sabemos que $K[H] \simeq K[G]/J$ mediante el isomorfismo dado por ϕ, con lo cual el diagrama:

$$\begin{tikzcd} K[G] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & K[H] \\ K[G]/J \arrow[ur, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

también resulta conmutativo. Tomando $\bar{\delta} \circ \bar{\phi}^{-1} : K[H] \longrightarrow K$ resulta una derivación en $\mathfrak{h}$ tal que: $(\bar{\delta} \circ \bar{\phi}^{-1}) \circ \phi = \bar{\delta} \circ \pi = \delta$. Veamos que efectivamente resulta un elemento de $\mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned}\bar{\delta} \circ \bar{\phi}^{-1}(h_1 h_2) &= \bar{\delta}(\bar{\phi}^{-1}(h_1)\bar{\phi}^{-1}(h_2)) = \bar{\delta}(\pi(g_1)\pi(g_2)) = \bar{\delta}(\pi(g_1 g_2)) = \\ &= \delta(g_1 g_2) = \delta(g_1) g_2(e) + g_1(e)\delta(g_1) = \\ &= \bar{\delta}(\bar{\phi}^{-1}(h_1)) g_2(e) + g_1(e)\bar{\delta}(\bar{\phi}^{-1}(h_2)) = \\ &= \bar{\delta}(\bar{\phi}^{-1}(h_1))\pi(g_2)(e) + \pi(g_1)(e)\bar{\delta}(\bar{\phi}^{-1}(h_2)) = \\ &= \bar{\delta}(\bar{\phi}^{-1}(h_1))\bar{\phi}^{-1}(h_2)(e) + \bar{\phi}^{-1}(h_1)(e)\bar{\delta}(\bar{\phi}^{-1}(h_2))\end{aligned}$$

Con lo cual podemos concluir que el morfismo dado por:

$$\begin{aligned} Psi : H &\hookrightarrow \mathfrak{g} \\ \gamma &\mapsto \gamma \circ \phi \end{aligned}$$

es una sobreyección lineal con imagen dada por $\{\delta \in \mathfrak{g} : \delta(J) \equiv 0\}$. Además, a partir de la sobreyectividad de ϕ, es inmediato que Ψ resulta inyectivo. Veamos que este morfismo Ψ resulta un morfismo de álgebras de Lie:

$$\Psi[\gamma_1, \gamma_2] = [\gamma_1, \gamma_2] \circ \phi = (\gamma_1 * \gamma_2 - \gamma_2 * \gamma_1) \circ \phi$$

$$(\gamma_1 \circ \phi) * (\gamma_2 \circ \phi) - (\gamma_2 \circ \phi) * (\gamma_1 \circ \phi) = [\gamma_1 \circ \phi, \gamma_2 \circ \phi] = [\Psi(\gamma_1), \Psi(\gamma_2)]$$

Dado que este morfismo es de álgebras de Lie, su imagen es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, y entonces $\Psi : \mathfrak{h} \longrightarrow \Psi(\mathfrak{h})$ determina un isomorfismo. Esto último se sigue a partir de que es un isomorfismo lineal que además es morfismo de álgebras de Lie, y bajo estas condiciones es sencillo chequear que la inversa lineal también es morfismo de álgebras de Lie.

□

Ejemplo 2.2.26. A partir del resultado anterior, calculemos el álgebra de Lie asociada de algunos subgrupos clásicos de $\mathbb{GL}_n$:

1. Consideremos el subgrupo algebraico de $\mathbb{GL}_n$ dado por $\mathbb{SL}_n$, denotaremos como $\mathfrak{sl}_n$ a su álgebra de Lie asociada. Si consideramos el epimorfismo de álgebras dado por ϕ, su núcleo queda generado, como ideal, por el polinomio $(det - 1) \in K[\mathbb{GL}_n]$. Sabemos que:
$$\mathfrak{sl}_n = \{\delta \in \mathfrak{gl}_n : \delta(\langle det - 1\rangle) \equiv 0\} = \{\delta \in \mathfrak{gl}_n : \delta(det - 1) = 0\}$$
Dada $A \in K^{n\times n}$, veamos cuando $\partial A(det - 1) = 0$, para eso calculemos:
$$\frac{\partial}{\partial t}(det(Id + tA) - 1)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}(det(Id + tA))|_{t=0}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(1 + Tr(A)t + \cdots + det(A)t^n)|_{t=0} = Tr(A)$$
Por lo tanto, $\mathfrak{sl}_n = \{A \in K^{n\times n} : Tr(A) = 0\}$, con el corchete dado por el conmutador de las matrices. Lo cual resulta equivalente al espacio $\{\partial A \in K[\mathbb{SL}_n]^* : Tr(A) = 0\}$ con el corchete determinado por el conmutador dado por el producto de convolución. Podemos tomar una base de $\mathfrak{sl}_n$ dada por:
$$B_{\mathfrak{sl}_n} = \{\partial E_{i,j}\}_{i\neq j} \cup \{\partial E_{i,i} - \partial E_{i+1,i+1}\}_{i=1}^{n}$$

2. Consideremos al grupo algebraico afín de matrices unipotentes U_n, que corresponde al subgrupo algebraico de $\mathbb{GL}_n$ dado por las matrices triangulares superiores con unos en su diagonal. Para no realizar cuentas de más consideremos a este grupo como un subgrupo algebraico de $\mathfrak{sl}_n$, para el cual ya calculamos su álgebra de Lie.

   Los elementos de U_n estan dados por elementos de $\mathbb{SL}_n$ que además satisfacen las condiciones polinomiales dadas por: $X_{i,j} = 0$ con $i > j$. Por lo tanto, si notamos por $\mathfrak{u}_n$ al álgebra de Lie asociada a U_n, entonces:
$$\mathfrak{u}_n = \{\partial A \in K[U_n]^* : Tr(A) = A_{ij} = 0 \;\; i > j\}$$
   Y una base queda determinada por:
$$B_{\mathfrak{u}_n} = \{\partial E_{i,j}\}_{i>j} \cup \{\partial E_{i,i} - \partial E_{i+1,i+1}\}_{i=1}^{n}$$

3. Ahora consideremos el subgrupo algebraico dado por las matrices ortogonales $\mathbb{SO}_n$. El ideal que lo describe como subgrupo algebraico de $\mathbb{GL}_n$ está generado por el sistema de ecuaciones: $C.C^t = Id$, con $C \in \mathbb{GL}_n$.

   Recordemos que, dada una matriz $A = (a_{ij})$ y una función coordenada $X_{i,j} \in K[\mathbb{GL}_n]$, el operador ∂A satisfacía que:
$$\partial A(X_{i,j}) = a_{ij}$$
   Si notamos por $X \in K[\mathbb{GL}_n]^{n\times n}$ a la matriz de funciones coordenadas, obtenemos que:
$$\partial A(X) = A$$
   Luego, los n^2 polinomios dados por la condición $X.X^t = Id$, en donde ∂A debe anularse, podemos expresarlos usando la notación anterior:
$$\partial A(X.X^t - Id) = \frac{\partial}{\partial t}((Id + tA)(Id + tA)^t - Id)|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}((Id + tA)(Id + tA^t))|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}(Id + t(A + A^t) + t^2AA^t)|_{t=0} = A + A^t$$
   El álgebra de Lie asociada, a la que denotaremos por $\mathfrak{so}_n$, queda determinada por:
$$\mathfrak{so}_n = \{\partial A \in k[\mathbb{SO}_n]^* : A + A^t = 0\}$$
   Y una base de esta álgebra de Lie puede darse por $B = \{\partial E_{i,j} - \partial E_{j,i}\}_{i<j}$.

Por último, a partir de la siguiente propocición podremos ver qué sucede con las álgebras de Lie asociadas a grupos algebraicos afines abelianos, que, como es de esperar, corresponderán a álgebras de Lie abelianas.

Proposición 2.2.27. Sea G un grupo algebraico afín abeliano, entonces $(K[G]^*, *)$ resulta una K-álgebra conmutativa y por lo tanto $\mathfrak{g}$ resulta un álgebra de Lie abeliana, de dimensión $dim(G)$.

Demostración. Como G es un grupo conmutativo entonces, dada $f \in K[G]$:
$$f(xy) = f(yx) = \sum f_1(x)f_2(y) = \sum f_1(y)f_2(x)$$

Por lo tanto: $\sum f_1 \otimes f_2 = \sum f_2 \otimes f_1$, y de está igualdad obtenemos que el producto de convolución $*$ es conmutativo pues:
$$\delta * \gamma(f) = \sum \delta(f_1)\gamma(f_2) = \sum \delta(f_2)\gamma(f_1) = \gamma * \delta(f)$$

Como el corchete de Lie en $\mathfrak{g}$ está inducido por el conmutador de $K[G]^*$, deducimos que $\mathfrak{g}$ resulta un álgebra de Lie abeliana.

□

Observación 2.2.28. La recíproca de la proposición anterior también es cierta, es decir, si el álgebra de Lie asociada a un grupo algebraico afín resulta abeliana, entonces dicho grupo es conmutativo. Para esto podríamos usar que, si tomamos el centro de grupo $\mathcal{Z}(G)$ visto como subgrupo algebraico, entonces su álgebra de Lie asociada se corresponde con el centro del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Es decir, el álgebra de Lie asociada a $\mathcal{Z}(G)$ coincide con $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{\gamma \in \mathfrak{g} : ad(\gamma) = 0\}$. Para ampliar estos conceptos consultar: [HUM, Sec. 13.4 y 13.5].

2.2.3. Álgebras de Lie semisimples y el operador de Casimir

Definición 2.2.29. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice semisimple si es una suma directa de álgebras de Lie simples $\mathfrak{h}_i$, es decir de álgebras $\mathfrak{h}_i$ no abelianas tales que sus únicos ideales de Lie corresponden a $\{0\}$ y a $\mathfrak{h}_i$.

Veamos ahora, aunque sin demostración, un teorema que establece importantes equivalencias de este tipo de álgebras de Lie:

Teorema 2.2.30. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita, entonces son equivalentes:

1. $\mathfrak{g}$ es semisimple.
2. $\mathfrak{g}$ no contiene ideales de Lie no nulos y abelianos.
3. La forma de Killing $k_{\mathfrak{g}}$ asociada a $\mathfrak{g}$ es no degenerada.

Demostración. [HUM2, Sec. 4 y 5, Cáp. II]. □

Observación 2.2.31. Que en estos casos la forma de killing sea no degenerada nos permite contruir bases duales del algebra:

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie finita y semisimple, con una base k-lineal dada por $\{\delta_i\}_{i=1}^n$, y $K_{\mathfrak{g}}$ es su forma de killing no degenerada asociada, entonces existe otra base de $\mathfrak{g}$ dada por $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ que satisface:

$$k_{\mathfrak{g}}(\delta_i, \gamma_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

La forma de Killing definida sobre un álgebra de Lie asociada a un grupo algebraico afín tendrá una propiedad adicional correspondiente a la acción adjunta de G sobre $\mathfrak{g}$:

Lema 2.2.32. Sea G un grupo algebraico afín y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie asociada. La forma de killing $k_{\mathfrak{g}}$ resulta invariante por la acción racional Ad de G en $\mathfrak{g}$, es decir que si $g \in G$ y $\delta, \gamma \in \mathfrak{g}$ entonces:

$$k_{\mathfrak{g}}(Ad(g) \cdot \delta, Ad(g) \cdot \gamma) = k_{\mathfrak{g}}(\delta, \gamma)$$

Demostración. Recordemos que la acción adjunta $Ad : G \longrightarrow End_k(\mathfrak{g})$ determina sobre $\mathfrak{g}$ uns estructura de G-módulo racional de dimensión finita. Además, cada endomorfismo $Ad(g)$ resulta un isomorfismo de álgebras de Lie con inversa dada por $Ad(g^{-1})$, es decir que en particular:

$$[Ad(g)\delta, Ad(g)\gamma] = Ad(g)[\delta, \gamma]$$

Utilizando la notación del enunciado y tomando $\alpha \in \mathfrak{g}$ observemos que:

$$\begin{aligned} & ad(Ad(g)\cdot\delta)\circ ad(Ad(g)\cdot\gamma)(\alpha) = [Ad(g)\cdot\delta, [Ad(g)\cdot\gamma, \alpha]] = \\ & = [Ad(g)\cdot\delta, [Ad(g)\cdot\gamma, Ad(g)\cdot(Ad(g^{-1})\cdot\alpha)]] = \\ & = Ad(g)\cdot[\delta[\gamma, Ad(g^{-1})\cdot\alpha]] \end{aligned}$$

Así deducimos que los endomorfismos $ad(Ad(g)\cdot\delta)\circ ad(Ad(g)\cdot\gamma)$ y $ad(\delta)\circ ad(\gamma)$ son conjugados pues:

$$ad(Ad(g)\cdot\delta)\circ ad(Ad(g)\cdot\gamma) = Ad(g)\circ ad(\delta)\circ ad(\gamma)\circ Ad(g^{-1})$$

Por lo tanto, tienen la misma traza, de donde deducimos que la forma de killing $k_{\mathfrak{g}}$ resulta invariante. □

El conocimiento en general que se tiene sobre las álgebras de Lie semisimples sobre cuerpos algebraicamente cerrados es bastante amplio, de hecho, este tipo de álgebras de Lie están completamente clasificadas. Toda álgebra de Lie semisimple puede escribirse como una suma directa de álgebras de Lie simples, y estas estan clasificadas a partir de los diagramas de Dynkin conexos. Básicamente, las álgebras de Lie simples se clasifican en cuatro familias: A_n,B_n,C_n y D_n, y hay cinco casos excepcionales. Estas cuatro familias corresponden a:

- $A_n : \mathfrak{sl}_{n+1}$,
- $B_n : \mathfrak{so}_{2n+1}$,
- $C_n : \mathfrak{sp}_{2n}$ (álgebras de Lie simplecticas),
- $D_n : \mathfrak{so}_{2n}$.

También tenemos una descripción precisa de como resultan las representaciones de álgebras de Lie semisimples. Un resultado clásico atribuido a Weyl establece:

Teorema 2.2.33. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple y $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es una representación, entonces esta última resulta completamente reducible. En términos que utlizamos durante este trabajo, la representación resulta semisimple.

Demostración. [HUM2, Sec.6, Cáp. II]. □

Breve digresión sobre grupos semisimples: Para finalizar esta sección realicemos una pequeña digresión sobre la relación entre grupos algebraicos semisimples y álgebras de Lie semisimples. Para obtener un panorama más amplio de esta relación consultar: [HUM, Cáp. V].

Como hemos visto, un grupo algebraico conexo resulta abeliano si y solo si su álgebra de Lie asociada lo es. Además, por el teorema descripto anteriormente, un álgebra de Lie es semisimple si no contiene ideales no nulos abelianos. Recordemos, por otra parte, que una definición equivalente para grupos algebraicos semisimples corresponde a que no contenga subgrupos algebraicos normales conmutativos, excepto el dado por $\{e\}$, por lo tanto, esto nos sugiere la siguiente proposición:

Proposición 2.2.34. Sea G un grupo algebraico afín conexo, entonces G es semisimple si y solo si su álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$ es semisimple.

Demostración. Ver [HUM, Sec. 13.5, Cáp. V]. □

A continuación, enunciaremos algunos resultados que nos permiten conectar las nociones de grupo semisimple y linealmente reductivo, sin usar de forma explícita la noción de reductividad.

La idea del argumento es relacionar los subespacios invariantes de un grupo algebraico sobre una representación, con los subespacios invariantes de la acción asociada a su álgebra de Lie. Luego trataremos de ver cómo en todo grupo semisimple sus representaciones también resultan semisimples. Para esto explicaremos un poco el desarrollo dado por: [HUM, Sec. 14.3, Cáp. V].

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y consideremos el subgrupo algebraico afín dado por $GL(V)$. Si W es un subespacio de V de dimensión m, entonces podemos definir:

$$G_W = \{A \in GL(V) : A(W) = W\}$$

$$\mathfrak{g}_W = \{X \in \mathfrak{gl}(V) : X(W) \subseteq W\}$$

No es difícil demostrar que el álgebra de Lie asociada a G_W, denotada por $\mathfrak{L}(G_W)$ puede identificarse con una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}_W$. Pero además, fijando una base de V y utilizando un argumento de dimensión lineal, podemos probar que:

$$\mathfrak{L}(G_W) = \mathfrak{g}_W,$$

y para argumentar esto puede observarse que tanto G_W como $\mathfrak{g}_W$ tienen dimensión $n(n-m)+m^2$. En el caso de $\mathfrak{g}_W$ se debe a la identificación natural de $\mathfrak{gl}(V)$ con $End_k(V)$, y a un argumento básico de dimensión en espacios de matrices. Para G_W se debe a que puede identificarse con un abierto de una variedad afín de esa misma dimensión.

Si consideramos un subgrupo cerrado de $H \in GL(V)$ y $\mathfrak{h}$ su álgebra de Lie asociada, es posible extender el resultado anterior:

$$\mathfrak{L}(G_w \cap G) = \mathfrak{g}_W \cap \mathfrak{h}$$

Esto último es una consecuencia directa del hecho de que el álgebra de Lie asociada a la intersección de dos subgrupos coincide con la intersección de sus álgebras de Lie respectivas.

Para relacionar los argumentos anteriores con la idea que anunciamos al principio, consideremos una representación racional $\phi : H \longrightarrow GL(V)$ y apliquemos el resultado anterior al subgrupo $\phi(H)$:

$$\mathfrak{L}(G_W \cap \phi(H)) = \mathfrak{g}_w \cap \mathfrak{L}(\phi(H))$$

Además, es posible relacionar el álgebra de Lie $\mathfrak{L}(\phi(H))$ con $\mathfrak{h}$, a través de un elemento que no hemos utilizado aún en el presente trabajo, y que es el diferencial de ϕ visto como morfismo de variedades. Es posible demostrar que esa conexión esta dada por:

$$d\phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{L}(\phi(H))$$

A partir de estos resultados, deducimos que H y $\mathfrak{h}$ dejan invariantes a los mismos subespacios de una representación racional V.

Como ya hemos enunciado, un resultado clásico de álgebras de Lie semisimples atribuido a Weil establece que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semimismple y V es una representación finita, entonces esta última resulta semisimple. Luego, aplicando el hecho de que un grupo algebraico afín y su álgebra de Lie asociada admiten las mismas subrepresentaciones de una representación dada, se sigue que todo grupo semisimple es linealmente reductivo, de acuerdo a las equivalencias dadas en: 2.1.15.

Ejemplo 2.2.35. Esto establece más ejemplos de grupos linealmente reductivos, pues todo grupo semimismple lo es. En particular, dentro de los subgrupos cĺasicos de $\mathbb{GL}_n$, los siguientes grupos resultan semisimples: $\mathbb{SL}_n$, SO_n y SP_{2n}, pues sus álgebras de Lie asociadas se incluyen dentro de la clasificación descripta.

2.2.4. El operador de Casimir

Definición 2.2.36. Sea G un grupo algebraico afín semisimple y $\mathfrak{g} \subset K[G]^*$ su álgebra de Lie asociada. Tomemos $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ una base de $\mathfrak{g}$ como k-espacio vectorial y $\{\gamma_j\}_{j=1}^n \subset \mathfrak{g}$ su base dual asociada con respecto a la forma de killing $k_{\mathfrak{g}}$. Definimos el elemento de Casimir por:

$$C = \sum_{i=1}^{n} \delta_i * \gamma_i \in K[G]^*$$

Observación 2.2.37. Tengamos en cuenta algunas observaciones importantes sobre la definición del elemento que acabamos de dar:

1. El elemento de Casimir no depende de la base elegida: si tomamos una segunda base $\{\delta'_i\}$ con base dual dada por $\{\gamma'_j\}$, entonces podemos relacionar con las bases originales mediante:

$$\delta'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_k \qquad \text{y} \qquad \gamma'_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\gamma_k$$

Donde las matrices (a_{ik}) y (b_{ik}) de elementos de K cumplen que $(a_{ik})^t.(b_{ik}) = ID$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\delta_i' * \gamma_i' &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_k) * (\sum_{l=1}^{n} b_{il}\gamma_l) = \\ &= \sum_{k,l}(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{il})\delta_k * \gamma_l = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\delta_i * \gamma_i\end{aligned}$$

2. Este elemento puede ser definido directamente sobre álgebras de Lie abstractas de dimensión finita y semisimples, donde el producto de convolución $*$ puede cambiarse por el producto del álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Proposición 2.2.38. El elemento de Casimir es un invariante de la acción adjunta de G sobre el álgebra $K[G]^*$, es decir, satisface que si $g \in G$ entonces:

$$Ad(g) \cdot C = \epsilon_g * C * \epsilon_{g^{-1}} = C$$

Demostración. Para probar este resultado tomemos una base de $\mathfrak{g}$ dada por $\{\delta_i\}$ y su base dual asociada $\{\gamma_j\}$ a través de la forma de killing $k_{\mathfrak{g}}$. Si consideramos $\{Ad(g)\delta_i\}$ resulta otra base de $\mathfrak{g}$ como k-espacio vectorial, y a partir de la invarianza de la forma de Killing por la acción adjunta de G (vista en 2.2.32), obtenemos que $\{Ad(g)\gamma_j\}$ resulta su base dual asociada, pues:

$$k_{\mathfrak{g}}(Ad(g)\delta_i, Ad(g)\gamma_j) = k_{\mathfrak{g}}(\delta_i, \gamma_j) = \delta ij$$

Como la definición del elemento C no depende de la base elegida concluimos que:

$$C = \sum(Ad(g)\delta_i) * (Ad(g)\gamma_j) = Ad(g) \cdot \sum \delta_i * \gamma_j = Ad(g) \cdot C$$

□

Ejemplo 2.2.39. En virtud de que ya hemos calculado y estudiado el álgebra de Lie para ciertos grupos clásicos, veamos, a modo de ejemplo, cómo calcular el elemento de Casimir de $\mathbb{SL}_n$. Recordemos que:

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in K^{n\times n} : Tr(A) = 0\}$$

con el corchete dado por el conmutador de las matrices. Lo cual resulta equivalente al espacio $\{\partial A \in K[\mathbb{SL}_n]^* : Tr(A) = 0\}$ con el corchete determinado por el conmutador dado por el producto de convolución. Podemos tomar una base de $\mathfrak{sl}_n$ dada por:

$$B_{\mathfrak{sl}_n} = \{\partial E_{i,j}\}_{i\neq j} \cup \{\partial E_{i,i} - \partial E_{i+1,i+1}\}_{i=1}^{n}$$

Primero debemos determinar cuál es la forma de killing asociada: consideremos la siguiente bilineal no degenerada definida sobre $\mathfrak{sl}_n$:

$$\begin{aligned}\phi : \mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n &\longrightarrow \mathfrak{sl}_n \\ (A, B) &\longmapsto Tr(AB)\end{aligned}$$

La traza es invariante por conjugación, y la acción adjunta de $\mathbb{SL}_n$ sobre $\mathfrak{sl}_n$ queda determinada por la conjugación de matrices, es decir que si $\mathcal{C} \in \mathbb{SL}_n$ y $A \in \mathfrak{sl}_n$, entonces:

$$Ad(C) \cdot A = CAC^{-1}$$

Esto nos dice que la forma bilineal que definimos es invariante por la acción de G. Como además dicha forma nos define un isomorfismo lineal entre $\mathfrak{sl}_n$ y $\mathfrak{sl}_n^*$, utilizando el lema de Schur, es sencillo verificar que resulta un múltiplo de la forma de la forma de killing. Calculando ambas formas en un par específico de matrices en $\mathfrak{sl}_n$ (es decir, en matrices de traza cero, como por ejemplo en $E_{1,2}$ y $E_{2,1}$) obtenemos que dicho múltiplo resulta:

$$k_{\mathfrak{sl}_n}(A, B) = 2nTr(AB)$$

Como ya conocemos una base de $\mathfrak{sl}_n$, que describimos anteriormente como $B_{\mathfrak{sl}_n}$, es sencillo verificar que la base dual asociada a través de la forma ϕ resulta:

$$B_{\mathfrak{sl}_n} = \{\partial E_{i,j}\}_{i \neq j} \cup \{\partial E_{i,i} - \partial E_{i+1,i+1}\}_{i=1}^{n}$$

$$B^*_{\mathfrak{sl}_n} = \{\partial E_{j,i}\}_{i \neq j} \cup \{\frac{n-1}{n}(\partial E_{1,1} + \cdots + \partial E_{i,i}) - \frac{i}{n}(\partial E_{i+1,i+1} + \cdots + \partial E_{n,n})\}_{i=1}^{n}$$

Conociendo la forma de Killing y las bases duales respectivas, ya podemos explicitar al elemento de Casimir:

$$C = \frac{1}{2n} \sum_{i \neq j} \partial E_{i,j} * \partial E_{j,i} +$$

$$+\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (\partial E_{i,i} - \partial E_{i+1,i+1}) * (\frac{n-1}{n}(\partial E_{1,1} + \cdots + \partial E_{i,i}) - \frac{i}{n}(\partial E_{i+1,i+1} + \cdots + \partial E_{n,n})))$$

Reagrupando estos términos se obtiene:

$$C = \frac{1}{2n}(\sum_{i \neq j} \partial E_{i,j} * \partial E_{j,i} + \partial E_{1,1}^2 + \cdots + \partial E_{n,n}^2 - \frac{1}{n}(\partial E_{1,1} + ... + \partial E_{n,n})^2)$$

Por otra parte, recordemos que si V es una representación racional de un grupo algebraico G, tenemos definida una acción de $K[G]^*$ en V, donde si $\phi \in K[G]^*$ y $\chi(v) = \sum v_0 \otimes v_1$ representa la $K[G]$-coacción asociada, entonces:

$$\phi \cdot v = \sum \phi(v_1) v_0$$

Esto nos permitirá ver al elemento de Casimir actuando linealmente en cualquier representación racional de G:

Definición 2.2.40. Sea V una representacional racional de un grupo algebraico afín semisimple y sea $C \in K[G]^*$ el elemento de Casimir asociado. Definimos el operador de Casimir asociado a V,notado por $C_V : V \longrightarrow V$, como el endomorfismo lineal que define la acción de C sobre V, es decir:

$$C_V(v) = C \cdot v = \sum C(v_1) v_0$$

Corolario 2.2.41. El operador de Casimir asociado a una representación racional V es un morfismo de G-representaciones, es decir que además de ser K-lineal, resulta G-equivariante.

Demostración. Recordemos que la acción de $K[G]^*$ sobre V define una estructura de módulo sobre esa álgebra con el producto dado por la convolución. Como además el elemento de Casimir es invariante por la acción de G sobre $K[G]^*$, obtenemos que:

$$C_V(g.v) = C \cdot (g.v) = C \cdot (\epsilon_g \cdot v) = (C * \epsilon_g) \cdot v = (\epsilon_g * C) \cdot v =$$

$$= \epsilon_g \cdot (C \cdot v) = \epsilon_g \cdot (C_V(v)) = g.(C_V(v))$$

□

Veamos ahora cómo se comporta dicho operador con respecto a los invariantes, a través de los siguientes resultados:

Proposición 2.2.42. Sea V una G-representación racional sobre un grupo algebraico afín semisimple y sea $C_V : V \longrightarrow V$ el operador de Casimir asociado entonces: $V^G \subseteq Ker\,(C_V)$.

Demostración. Veamos que, en general, los elementos $\mathfrak{g}$ anulan a todos los invariantes de G. Recordemos, que un elemento $v \in V^G$ si y sólo la coacción χ de la representación queda definida por: $\chi(v) = v \otimes 1$. Por lo tanto, si $v \in V^G$:

$$\delta \cdot v = \delta(1)v = 0 \qquad \forall \delta \in \mathfrak{g}$$

pues las derivaciones se anulan sobre funciones constantes. Concluyendo, en virtud de que $C = \sum \delta_i * \gamma_i$, para ciertos $\delta_i, \gamma_i \in \mathfrak{g}$ se sigue que:

$$C_V \cdot v = (\sum \delta_i * \gamma_i \cdot)v = \sum (\delta_i * \gamma_i) \cdot v = \sum \delta_i \cdot (\gamma_i \cdot v) = 0$$

. □

2.2.5. Sobre la construcción explícita de operadores de Reynolds

Veamos algunos ejemplos y resultados importantes que nos permitirán reducir la construcción de operadores de Reynolds al caso en que G es un grupo semisimple.

Observación 2.2.43. Sea G un grupo algebraico linealmente reductivo. Consideremos la acción regular a derecha de G sobre $K[G]$ via:

$$\sigma f(x) = f(x\sigma)$$

Como la acción de G sobre sí mismo vía multiplicación es transitiva, es claro que: $K[G]^G = K$. Llamemos $R_G : K[G] \longrightarrow K \in K[G]^*$ al operador de Reynolds asociado a dicha acción regular sobre $K[G]$, al que denominaremos operador de Reynolds principal.

Proposición 2.2.44. Sea V una representación racional finita sobre un grupo linealmente reductivo G, y sea $R_V : V \longrightarrow V^G$ su operador de Reynolds asociado, entonces:

$$R_V(v) = R_G \cdot v$$

Demostración. Si $v \in V^G$, entonces:

$$R_G \cdot v = R_G(1)v = v.$$

Por lo tanto, tal como queríamos, R_G actúa trivialemente sobre os invariantes V^G. Veamos que además es G equivariante, es decir, un morfismo de G representaciones:

$$R_G \cdot (\sigma v) = R_G \cdot (\epsilon_\sigma \cdot v) = (R_G * \epsilon_\sigma) \cdot v$$

A partir de la definición de K_G es claro que $K_G * \epsilon_\sigma = K_G$, con lo cual conlcuimos el resultado deseado. □

Veamos ahora un resultado importante que nos permitirá relacionar el operador de Reynolds de un grupo algebraico con el correspondiente operador de un subgrupo algebraico normal.

Proposición 2.2.45. Sea G un grupo algebraico afín y sea N un subgrupo algebraico normal. Consideremos una representación racional V y sean R_G y R_N los operadores de Reynolds respectivos. Bajo estas hipótesis, V^N resulta una representación racional de G/N, con $R_{G/N} : V^N \longrightarrow V^G$ como operador de Reynolds asociado, y además:

$$R_G = R_{G/N} \circ R_N$$

Demostración. Es inmediato a partir de la definición de operadores de Reynolds. □

La siguiente proposición nos permitirá reducir el estudio de la construcción de este tipo de operadores a ciertos casos particulares de grupos algebraicos afines:

Proposición 2.2.46. Sea G un grupo algebraico linealmente reductivo, y sea G_{1_G} la componente irreducible de la identidad, entonces:

1. G/G_{1_G} es un grupo algebraico finito.
2. $G_{1_G}/[G_{1_G}, G_{1_G}]$ es un toro algebraico.
3. $[G_{1_G}, G_{1_G}]$ es un grupo algebraico semisimple.

Demostración. Ya hemos demostrado, en general, que el cociente G/G^{1_G} es un grupo algebraico finito (Recordar: 1.1.14).

El grupo $G_{1_G}/[G_{1_G}, G_{1_G}]$ resulta un grupo abeliano, conexo y sin elementos unipotentes (de hecho también es linealmente reductivo). En virtud de ciertos teoremas de estructura para grupos algebraicos abelianos, es posible deducir inmediatamente que $G_{1_G}/[G_{1_G}, G_{1_G}]$ resulta un toro algebraico. Pués, por ser un grupo abeliano puede descomponerse como el producto directo de su parte semisimple y de su parte unipontente, y además por ser linealmente reductivo deducimos que su parte unipotente es trivial, y resulta un grupo diagonalizable. Luego a partir del coralario [SPR, 3.2.7, pág. 45], deducimos que este grupo resulta un toro. Para una demostración más detallada de este resultado y del último inciso consultar: [HUM, Chapter V] y [CIT, Sec. 4.5.2]. □

Veamos como podemos construir operadores de Reynolds para estos grupos particulares:

Grupos algebraicos finitos: Sea G un grupo algebraico finito y sea V una representación racional, entonces al definir:

$$R_V(v) = \frac{1}{|G|}.\sum_{g\in G} gv,$$

nos queda definido también un operador de Reynolds sobre V, pues es claro que

$$(\frac{1}{|G|}.\sum_{g\in G} gv) \in V^G,$$

y además para cada $\sigma \in G$ y $v \in V$:

$$R_V(\sigma v) = \frac{1}{|G|}.\sum_{g\in G} g(\sigma v) = \frac{1}{|G|}.\sum_{g\in G} gv = R_V(v)$$

y para cada $v \in V^G$:

$$R_V(v) = \frac{1}{|G|}.\sum_{g\in G} gv = \frac{1}{|G|}.\sum_{g\in G} v = v$$

Por lo tanto, esto nos demuestra que todo grupo finito es, en particular, un grupo algebraicamente reductivo, y conocemos explicítamente su operador de Reynolds para cada representación racional.

Toros algebraicos: Primero analicemos el caso de un toro unidimensional, $T_1 = G_m$. Debido a que $K[T_1] \simeq K[t, t^{-1}]$, es suficiente encontrar un morfismo invariante por la acción de T_1 en el espacio $K[t, t^{-1}]^*$. Definimos el operador de Reynolds principal como:

$$\begin{aligned} R_{T_1} : K[t, t^{-1}] &\longrightarrow K \\ \sum_{i=-n}^{m} a_i t^i &\longmapsto a_0 \end{aligned}$$

Veamos que efectivamente resulta G_m equivariante, sea $\sigma \in T_1$ y sea $f = \sum_{i=-n}^{m} a_i t^i \in K[t, t^{-1}]$, luego:

$$R_{T_1}(\sigma \cdot f) = R_{T_1}(\sigma(\sum_{i=-n}^{m} a_i t^i)) = R_{T_1}(\sum_{i=-n}^{m} a_i(\sigma t)^i) =$$

$$= a_0 = R_{T_1}(\sum_{i=-n}^{m} a_i t^i) = R_{T_1}(f)$$

Ahora en forma análoga extendamos la construcción anterior al caso de un toro r-dimensional, $T_r = G_m^r$, definimos:

$$\begin{aligned} R_{T_r} : K[T_r] \simeq K[t_1, ..., t_r, t_1^{-1}, ..., t_r^{-1}] &\longrightarrow K \\ \sum a_{j_1,..,j_r}.t_1^{j_1}...t_r^{j_r} &\longmapsto a_{0,..,0} \end{aligned}$$

Este operador en $K[T_r]^*$ resulta el operador de Reynolds principal, y su demostración es similar a la del caso unidimensional. Esto nos demuestra que todos los gurpos algebraicos afines isomorfos a un toro de cualquier dimensión resultarán linealmente reductivos.

Grupos semisimples: Por último, veamos cómo realizar la construcción en general del operador de Reynolds de esta importante familia de grupos algebraicos. Para este caso utilizaremos como elemento clave de la construcción el hecho de que en todas las representaciones asociadas a estos grupos tenemos definido un endomorfismo especial al que anteriormente llamamos operador de Casimir.

Veamos algunos resultados previos que nos describirán la acción del operador de Casimir sobre representaciones irreducibles:

Lema 2.2.47. Sea V un representación racional irreducible sobre un grupo algebraicos semisimple G, y sea $C_V \in End_k(V)$ su operador de Casimir asociado. Entonces existe $\lambda_V \in K$ tal que: $C_V(v) = \lambda_V.v$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Lema de Schur, ver: 2.1.13. □

Veamos un resultado que caracteriza el caso de representaciones irreducibles y triviales, la demostración requiere herramientas específicas de teoría de representaciones de grupos algebraicos, que no hemos introducido en este trabajo y por lo tanto, nos limitaremos a dejar referenciadas a la bibliografia sugerida en [CIT, Sec. 4.5]:

Proposición 2.2.48. Bajo las mismas hipótesis del lema anterior, el operador de Casimir y su respectivo escalar λ_V satisfacen:

$$\lambda_V = 0 \iff V^G = V$$

es decir que C_V resulta el operador nulo si y sólo si la representación V es trivial.

Observación 2.2.49. Obsevemos que el hecho de que la representación sea trivial siempre implica que el operador de Casimir es nulo, pues, como ya hemos visto: $V^G \subseteq Ker\,(C_V)$. Además, para esto no estamos usando la hipótesis de que V sea una representación irreducible.

Los resultados anteriores son las herramientas clave que nos permitirán entender cuál es la estructura de estos operadores sobre grupos semisimples. Todo grupo semisimple G resulta en particular linealmente reductivo, pues toda representación racional resulta simisimple, en el sentido que puede descomponerse como una suma directa de representaciones irreducibles.

Observación 2.2.50. Consideremos una reprensentación racional V de un grupo semisimple y supongamos que $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, donde cada V_i es una subrepresentación irreducible. Como el operador de Casimir está definido como la acción por un elemento fijo en $K[G]^*$, es claro que:

$$C_V|_{V_i} = C_{V_i}.$$

Llamemos λ_i al escalar asociado a cada operador C_{V_i}. Como cada representación V_i es irreducible sabemos que la acción de G sobre V_i es trivial o que la represetación no admite invariantes, es decir que: $V_i^G = 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que:

- $V_i^G = V_i$ para todo $i = 1...r$

- $V_i^G = 0$ para todo $i = r + 1...n$

Como $V^G = \bigoplus_{i=1}^n V_i^G$, obtenemos que $V^G = V_1 \oplus ... \oplus V_r$ y además:

- $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1...r$
- $\lambda_i \neq 0$ para todo $i = r + 1...n$

Sea $v = (v_1, .., v_r) \in V$ entonces:

$$v \in V^G \iff v_{r+1} = \cdots = v_n = 0 \iff$$

$$\iff R_V(v) = (0, ..., 0, \lambda_{r+1}.v_{r+1}, ..., \lambda_n.v_n) = 0 \iff v \in Ker\,(C_V)$$

Con lo cual no sólo explicitamos que estrucutura tiene el operador de Casimir sobre cada representación, sino que además, probamos el siguiente resultado importante sobre invariantes:

$$V^G = Ker\,(C_V)$$

Corolario 2.2.51. Recordemos que estamos trabajando con un cuerpo K de caracteristica cero. Dado $m \in \mathbb{N}$, la composición del endomorfismo de Casimir dada por C_V^m satisface que:

$$C_V^m(v) = (0, ..., 0, \lambda_{r+1}^m.v_{r+1}, ..., \lambda_n^m.v_n)$$

donde los escalares $\lambda_{r+1}^m, .., \lambda_n^m$ resultan no nulos, y por lo tanto, de la misma forma en que demostramos la observación anterior deducimos que:

$$V^G = Ker\,(C_V^m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Veamos a continuación cómo podemos construir el operador de Reynolds para cualquier representación racional finita de un grupo semisimple.

Teorema 2.2.52. Sea G un grupo semisimple y sea V una representación racional finita. Consideremos el endomorfismo C_V determinado por el operador de Casimir y sea $P_V = \chi_{C_V} \in K[t]$ su polinomio característico. Supongamos que:

$$P_V(t) = a.t^m.Q_V(t)$$

donde $a \in K^*$ y $Q_V \in K[t]$ es tal que $Q_V(0) = 1$. Entonces se sigue que:

$$R_V = Q_V(C_V)$$

resulta un operador de Reynolds asociado a la representación.

Demostración. Si $V^G = 0$ el resultado es inmediato, pues en ese caso, $m = 0$ y en virtud del teorema de Hamilton Cayley $Q_V(C_V) = (1/a)P_V(C_V) = 0$, que coincide con el operador de Reynolds asociado en este caso.

Supongamos que $V^G = Ker\,(C_V) \neq 0$, entonces esto nos prueba inmediatamente que 0 es autovalor y que $m > 0$. Utilizando nuevamente el Teorema de Hamilton Cayley sabemos que $P_V(C_V) = 0$, y por lo tanto:

$$C_V^m Q_V(C_V) = 0$$

Así resulta que la imagen de $Q_V(C_V)$ está contenida en $Ker\,(C_V^m) = V^G$. Entonces,

$$Q_V(C_V) : V \longrightarrow V^G$$

define un morfismo de G representaciones en virtud de que C_V lo es. Nos falta probar que sobre los elementos invariantes resulta la identidad. Observemos que:

$$Q_v(C_V)v - v = (Q_V(C_V) - Id_V)v = (Q_V - 1)(C_V)v$$

Como el polinomio $Q_V - 1$ no tiene término independiente, la tranformación $(Q_V - 1)(C_V)$ es una combinación lineal de potencias positivas de C_V, lo que nos demuestra, junto a que $V^G = Ker\,(C_V^k)$, que si $v \in V^G$ entonces:

$$(Q_V - 1)(C_V)v = 0$$

□

Observación 2.2.53. El elemento clave de la demostración anterior es haber probado que: $V^G = Ker\,(C_V^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Es decir, dicho en forma resumida que:

$$V^G = \bigcup Ker\,(C_V^k).$$

A partir de estos resultados, construímos explícitamente el operador de Reynolds sin asumir su existencia.

En conclusión, en cualquier grupo algebraico en el que podamos construir un endomorfismo "C_V" de G-representaciones que cumpla esa propiedad especial, podremos construir un operador de Reynolds asociado, y particularmente probar que dicho grupo resulta linealmente reductivo. La estrategia descripta es la que se utiliza muchas veces en distintos textos para deducir que un grupo en particular es linealmente reductivo, y es especialmente utilizada para el caso en que $G = \mathbb{SL}_n$. Por ejemplo ver: [MUK, Sec. 4.3].

Veamos ahora una construcción parecida a la que ya hemos realizado del operador de Reynold. Pero que utiliza los polinomios minimales de los vectores de la representación en lugar de utilizar el polonomio característico del operador de Casimir, y que por lo tanto, podrá aplicarse al caso de representaciones racionales no necesariamente finitas.

Proposición 2.2.54. Sea V una representación racional de un grupo semisimple G, no necesariamente finita. Consideremos para cada $v \in V$, a:

$$p_v = m_{v,C_V},$$

el polinomio minimal asociado al operador de Casimir C_V y al vector v. Entonces:

$$R_V(v) = q_v(C_V)(v)$$

donde $p_v = at^m.q_v$, y $q_v(o) = 1$.

Demostración. Al igual que en la demostración del teorema anterior, a partir de que

$$C_V^m(q_v(C_V)(v)) = p_v(C_V)(v) = 0$$

obtenemos que $q_v(C_V)v \in V^G$. Y utilizando la condición $q_v(o) = 1$, nuevamente se sigue que:

$$q_v(C_V)v - v = 0.$$

.

Con lo cual la función que estamos definiendo para cada $v \in_V$ actúa como la identidad sobre V^G. En este caso no es tan inmediato que la función que estamos definiendo como:

$$v \in V \longmapsto q_v(C_V)(v)$$

resulte un morfismo de G representaciones entre V y V^G. Para justificar esto, observemos que, como C_V es un endomorfismo de G representaciones entonces:

$$p_{g.v} = p_v,$$

de donde se sigue que: $v \longmapsto q_v(C_V)$, satisface las condiciones de operadores de Reynolds. $\square$

Ambos métodos pueden ser utilizados para el cálculo de operadores de Reynolds, y especialmente el segundo forma parte de los métodos computacionales clásicos para el cálculo de operadores de Reynolds, y puede ser utilizado junto con el próximo resultado como parte de un algoritmo más general para el calculo de invariantes.

La siguiente proposición nos muestra una pequeña conexión entre operadores de Reynolds y el cálculo de generadores para el anillo de invariantes.

Observación 2.2.55. Sea G un grupo linealmete reductivo actuando en una representación racional finita V. Como ya hemos visto, $K[V] \simeq K[x_1, .., x_n]$, donde $n = dim_k(V)$ y, si consideremos el ideal de $K[V]$ generado por los invariantes de grado positivo, entonces existen finitos $f_1, ..., f_r$ invariantes de grado positivo tales que:

$$I = \langle f_1, .., f_r \rangle_{K[V]}$$

Teorema 2.2.56. Utilizando las mismas notaciones que en la observación anterior, si $I = \langle g_1, .., g_r \rangle_{K[V]}$, donde cada $g_i \in K[V]$ es un polinomio homegenéos pero no necesariamente invariante, entonces $I = \langle R_{K[V]}(g_1), .., R_{K[V]}(g_r) \rangle_{K[V]}$ y por lo tanto:

$$K[V]^G = K[R_{K[V]}(g_1), .., R_{K[V]}(g_r)]$$

Para ver una demostración de este teorema, y ampliar esta idea con resultados tendientes a la generación del correspondiente ideal I consultar: [CIT, Sec. 4.1].

Breve digresión sobre las fórmulas desarrolladas: Volvamos por un momento al desarrollo dado con base en el teorema 2.2.52. Hemos visto que el operador de Reynolds de una representación racional finita puede calcularse a partir del operador de Casimir y de su polinomio característico o minimal sobre cada vector. Además, logramos probar una fórmula explícita para los invariantes de la representación:

$$V^G = Ker\,(C_v) \tag{2.2.1}$$

En resumen, para grupos semisimples la dificultad del cálculo del operador de Casimir depende tan sólo del grado de conocimiento que tengamos del álgebra de Lie asociada al grupo algebraico y del calculo explícito de su forma de Killing.

Uno podría pensar que entonces hemos resuelto el problema del cálculo de invariantes a partir de la fórmula 2.2.1. Por ejemplo, tomando $G = SL_2$, el elemento de Casimir es sencillo de calcular, y entonces el problema se reduce al cálculo del núcleo de un morfismo lineal. En primera medida, esto parecería ayudarnos en el ejemplo más clásico de esta disciplina y motivador de la teoría que es el caso de las representaciones dadas por las formas binarias o ternarias homogéneas de un grado fijo. Este problema no esta cerrado para cualquier grado y es realmente dificil, incluso computacionalmente. Trabajando con este ejemplo es posible darse cuenta de las limitaciones y atenuantes que tiene dicha fórmula propuesta para los invariantes.

En primer lugar, dada un representación racional finita V o una G-variedad X, el anillo de invariantes sobre el cual concentramos nuestra atención es $K[V]^G$ o $K[X]^G$ y no V^G o X^G respectivamente. Por lo tanto, las representaciones racionales sobres las cuales centramos nuestra atención son de la forma $K[X]$, y no suelen ser finito-dimensionales. Para el caso en que V es una representación racional finita de dimensión n, como ya vimos, $K[V] \simeq K[x_1, .., x_n]$, y por lo tanto admite una graduación (G-equivariante) dada por el grado homegéneo de los polinomios:

$$K[V] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} K[V]_d$$

Considerando esta descomposición, es posible estudiar los invariantes por un grado fijo, es decir, tomar las subrepresentaciones dadas por $K[V]_d$, que sí resultan de dimensión finita, y asi deducir:

$$K[V]^G = \bigoplus_{d=0}^{\infty} K[V]_d^G = \bigoplus_{d=0}^{\infty} Ker\,(C_{K[V]_d})$$

La otra limitación de este tipo de métodos tiene que ver con un problema de complejidad de las cuentas que debemos hacer. Dada una representación racional V obviamente tenemos dada en forma explícita la acción del grupo G sobre V. A partir de esta última, debemos deducir cuál es la acción inducida sobre $K[V]$, o de forma más óptima directamente sobre $K[x_1, ., x_n]$ (vía el isomorfismo). Como sabemos, esto determina sobre $K[V]$ una estructura de representación racional, y luego debemos calcular cual es la coacción de $K[G]$, que hace de $K[V]$ un $K[G]$-comódulo, y hallar fórmulas que determinen las funciones $h_{f,i} \in K[G]$ tales que:

$$g \cdot f = \sum h_{f,i}(g) f_i$$

En este punto es donde entra en juego el operador de Casimir. Si suponemos que ya tenemos calculado el elemento de Casimir (que suele ser una suma de convoluciones de elementos de ciertas bases del álgebra $\mathfrak{g}$), tenemos que calcular cómo actúa dicho elemento sobre cada $h_{f,i}$ para luego entender cómo actúa $C_{K[V]_d}$ sobre cada elemento $f \in K[V]_d$. Recién en este punto es dónde debemos calcular el núcleo de una transfomación lineal. Todos estos sucesivos pasos, desde la acción de G sobre V hasta la acción del elemento de Casimir C sobre $K[V]_c$, hacen que las cuentas se complejicen bastante.

A pesar de estas aparentes desventajas, esto nos determina y caracteriza los invariantes de forma explícita, es decir, son exactamente el núcleo de un determinado endomorfismo lineal. Utilizando más tecnicas clásicas de teoría de invariantes podemos obtener información sobre $dim_k(K[V]_d)$ y, de esta forma, saber sobre "cuáles d" utilizar el método anterior y "cuántos invariantes" hallar en cada uno de ellos. Esto nos introduce a una herramienta clásica en teoría de invariantes conocida como series de Hilbert, que es una pieza clave en la comprensión de cualquier anillo de invariantes.

2.3. Series de Hilbert y la fórmula de Cayler Silvester

2.3.1. Introducción

Definición 2.3.1. Sea V una representación racional finita de dimensión n, de un grupo algebraico G. LLamemos $S = K[V] \simeq K[x_1, .., x_n]$, como ya hemos visto, si notamos por S_d al subespacio de polinomios homegéneos de grado d, entonces:

$$S^G = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d^G$$

Llamamos serie de Hilbert del anillo graduado S^G a la serie formal de potencias dada por:

$$P(t) = \sum_{d=0}^{\infty} dim_k(S_d^G)t^d \in \mathbb{Z}[[t]]$$

Ejemplo 2.3.2. Consideremos al grupo simétrico de permutaciones S_n actuando racionalmente en $V = K^n$ vía:

$$\sigma \cdot (x_1, ..., x_n) = (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

Si considaramos el polinomio $g(t) = (t - x_1)...(t - x_n) \in K[x_1, .., x_n][t]$, entonces es sabido que:

$$g(t) = t^n - f_1 t^{n-1} + ... + (-1)^n f_n$$

donde los polonomios $f_i \in K[x_1, ..., x_n]$ son conocidos como los n polonomios simétricos elementales y están dados por las fórmulas:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\
f_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j \\
&... \\
f_n &= x_1 ... x_n
\end{aligned}
$$

Es claro que $f_i \in K[x_1, .., x_n]^G$ para todo $i \in \{1, ..n\}$, pero además, recordemos que generan todo el anillo de invariantes, para esto recordar: 2.1.3.

El conjunto $\{f_1, .., f_n\}$, además de generar el anillo de invariantes, es algebraicamente independiente, por lo tanto, la serie determinada por la expansión:

$$\frac{1}{(1-f_1)\cdots(1-f_n)} = \prod_{i=1}^{n}(\sum_{n_i=0}^{\infty} f_i^{n_i})$$

tiene en sus términos una base de todos los polinomios simetricos, es decir, de $K[x_1, .., x_n]^{S_n}$. Como además cada f_i es un polinomio homogéneo de grado i, sustituyendo cada f_i por t^i obtenemos que:

$$\frac{1}{(1-t^1)\cdots(1-t^n)}$$

es la serie de Hilbert asociada a dicha representación.

En el ejemplo anterior teníamos generadores homogéneos f_i de grados repectivos i, y la serie de Hilbert coincidió con el desarrollo de potencias de la función racional dada por: $\frac{1}{(1-t^1)\cdots(1-t^n)}$. Podemos generalizar este resultado a partir de la siguiente proposición.

Proposición 2.3.3. Utilizando la misma notación que en la definición 2.3.1, si existen generadores homogénos $f_1, ...f_n$ con grados respectivos $d_1, .., d_n$ entonces la serie de Hilbert de $K[V]^G$ se obtiene a partir de la expansión de la siguiente función racional:

$$\frac{F(t)}{(1-t^{d_1})\cdots(1-t^{d_n})}$$

para cierto polinomio $F \in \mathbb{Z}[t]$ que dependerá de la representación dada.

Demostración. Veamos el resultado por inducción en la cantidad de generadores homegéneos. Para $n = 1$ el resultado es claro pues, al igual que en el ejemplo, un sólo generador f_1 determina un conjunto algebraicamente independiente, y por lo tanto, la serie de Hilbert queda dada por el desarrollo de: $\frac{1}{(1-t^{d_1})}$.

Si $n > 1$, consideremos el morfismo lineal inyectivo dado por:

$$
\begin{aligned}
\psi : K[V]^G &\longrightarrow K[V]^G \\
h &\longmapsto f_n h
\end{aligned}
$$

Llamemos $R = f_n K[V]^G$ a la imagen de dicho morfismo. Como

$$K[V] = k[f_1, .., f_n],$$

separando los elementos en donde aparecen potencias de f_n, deducimos que existe un isomorfismo entre espacios vectoriales graduados:

$$(K[V]^G/R) \oplus R \simeq K[V]^G.$$

En este último paso, deberíamos probar que la graduación inducida sobre el cociente hace del isomorfismo lineal un isomorfismo de espacios graduados, donde a priori R resulta un subespacio graduado y, por lo tanto, podemos deducir que:

$$P_{K[V]^G}(t) = P_{K[V]^G/R}(t) + P_R(t) \tag{2.3.1}$$

Dicho de otro modo, estaríamos usando una definición más general de series de Hilbert, para espacios vectoriales graduados. Esta puede ser dada de manera totalemente análoga a la que explicitamos al principio de esta sección.

Además, es claro en virtud de la definición de ψ que:

$$dim(K[V]_d) = dim(K[V]^G \cap K[V]_d) = dim(R \cap K[V]_{d+d_r}$$

y luego $P_R(t) = t^{d_r} P_{K[V]^G}$. Reemplazando esto en la fórmula 2.3.1, obtenemos:

$$P_{K[V]^G}(t) = \frac{P_{K[V]^G/R}(t)}{1 - t^{d_r}}$$

Para concluir, observemos que el sub-anillo dado por $K[V]^G/R$ queda generado por los invariantes homogéneos $\overline{f_1}, .., \overline{f_{r-1}}$, que tienen las mismas graduaciones respectivas que los f_i, y así podemos utilizar la hipótesis inductiva para deducir el resultado deseado.

□

2.3.2. Fórmula de Molien

Esta fórmula nos determina de forma explícita la serie de Hilbert para anillos de invariantes de grupos finitos:

Dada un representación racional finita V de un grupos finito G, denotemos por $\rho : G \longrightarrow End_k(V)$ al morfismo de variedades que determina la acción. Podemos definir el mapa de caracteres $\chi : G \longrightarrow K$, asociado a la representación, mediante:

$$\chi(g) = tr(\rho(g))$$

.

Proposición 2.3.4. Dada una representación racional finita de G se sigue que:

$$dim(V^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$$

Esta fórmula es conocida como la fórmula de la dimensión para grupos algebraicos finitos.

Demostración. Consideremos el operador de Reynolds $R_V : V \longrightarrow V^G$ asociado a la representación. Como dicho operador es un morfismo lineal con imagen en V^G y que sobre dicho subespacio actúa como la identidad, entonces resulta un proyector lineal, y luego:

$$dim(V^G) = tr(R_V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)$$

□

La siguiente fórmula, conocida como "Fórmula de Molien", nos determina de forma explícita la serie de Hilbert para anillos de invariantes de grupos finitos:

Teorema 2.3.5. Supondremos para este teorema que el cuerpo K es de algebraicamente cerrado. Sea $G \subseteq \mathbb{GL}_n$, un subgrupo finito y sea S^G un anillo de invariantes asociado a una representación racional finita V. Entonces la serie de Hilbert asociada está determinada por:

$$P(t) = \frac{1}{|G|}\sum_{A\in G}\frac{1}{det(Id - tA)}$$

Demostración. Tomemos $A \in G$, como el grupo es finito, entonces A es una matriz con orden finito y por lo tanto resulta diagonalizable, pues todo polinomio de la forma $x^m - 1$ en un cuerpo de característica cero tiene raices simples, y como el cuerpo K es algebraicamente cerrado entonces el polinomio minimal de A se puede factorizar linealmente con raíces simples.

Sea $\{v_1, .., v_n\}$ una base de V formada por autovectores de A con autovalores respectivos dados por $\lambda_1, .., \lambda_n$. Luego:

$$det(Id - tA) = (1 - \lambda_1 t)\cdots(1 - \lambda_n t)$$

Observemos que $K[V] \simeq K[x_1, ..., x_n]$, y vía ese isomorfismo, la acción de A sobre $K[x_1, .., x_n]$ queda determinada por:

$$A \cdot x_i = \lambda_i x_i$$

De esta expresión deducimos que la acción sobre cada monomio queda determinada por:

$$A \cdot x_1^{j_1}...x_n^{j_n} = \lambda_1^{j_1}...\lambda_n^{j_n} x_1...x_n$$

Si consideramos el desarrollo en series de potencias de $\frac{1}{(1-x_1)\cdots(1-x_n)}$, los términos de dicha sumatoria recorren todos los monomios de $K[x_1, ..., x_n]$ y si actuamos por A en dicha expresión racional obtenemos:

$$\frac{1}{(1 - \lambda_1 x_1)\cdots(1 - \lambda_n x_n)} \qquad (I)$$

Esto nos dice que la traza de la matriz A actuando en $K[x_1, .., x_n]_d$ resulta exactamente la suma de los monomios en los λ_i que acampañan a monomios homogéneos de grado en la expansión en serie de (I). Si llamamos χ_d al mapa de caracteres asociado a a la subrepresentación $K[x_1,..,x_n]_d$ obtenemos:

$$\sum_{d=0}^{\infty}\chi_d(A)t^d = \frac{1}{(1-\lambda_1 t)\cdots(1-\lambda_n t)} = \frac{1}{det(Id-tA)}$$

Tomando promedio en la fórmula anterior sobre todos los elementos del grupo G y utilizando la fórmula de la dimensión para grupos finitos, deducimos:

$$P(t) = \sum_{d=0}^{\infty} dim_k(K[x_1,..,x_n]_d)t^d = \sum_{d=0}^{\infty}(\frac{1}{|G|}\sum_{A\in G}\chi_d(A))t^d =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{A\in G}\sum_{d=0}^{\infty}\chi_d(A)t^d = \frac{1}{|G|}\sum_{A\in G}\frac{1}{det(Id-tA)}$$

□

Observación 2.3.6. Observemos que para cada matriz $A \in \mathbb{GL}_n$ el polinomio determinado por $det(Id-tA)$ tiene término independiente igual a 1, y por lo tanto, resulta inversible en $K[[t]]$

Ejemplo 2.3.7. I) Consideremos el grupo finito de orden 2 dado por $\{Id, -Id\}$, actuando de forma natural sobre el anillo de polinomios $K[x_1,..,x_n]$. En este caso, es claro cuál es el anillo de invariantes, pues coincide con el anillo generado por todos los monomios homogéneos de grado par. Utilizando la fórmula de Molien deducimos que la serie de Hilbert asociada es:

$$P(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-t)^n} + \frac{1}{(1+t)^n}\right)$$

II) Consideremos para este ejemplo que $K = \mathbb{C}$. Sea $\mathfrak{H}$ el grupo finito de orden 8 conocido como el grupo de cuaterniones. Visto en forma matricial podemos pensarlo como el subgrupo de $\mathcal{SL}_2(\mathbb{C})$ generado por las matrices:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dicho grupo es isomorfo al grupo dado por $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, donde cada elemento distinto de ± 1 tiene orden 4 y satisface las reglas usuales de multiplicación del grupo de cuaterniones. Consideremos la acción de este grupo de manera natural sobre el anillo de polinomios dado por $\mathbb{C}[x,y]$.

Usando la fórmula de Molien obtenemos que la serie de Hilbert resulta:

$$P(t) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{det(Id-tId)} + \frac{1}{det(Id+tId)} + \sum_{A\in G:|A|=4}\frac{1}{det(Id-tA)}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{6}{1+t^2}\right) = \frac{1+t^6}{(1-t^4)^2} = \frac{1-t^{12}}{(1-t^4)^2(1-t^6)}$$

Observando el denominador de la expresión anterior y recordando la proposición 2.3.3, es claro que debemos buscar dos invariantes de grado 4 y otro de grado 6. Además, bastará chequear que son invariantes para las matrices generadoras. Es sencillo probar que:

$$f_1 = x^4 + y^4 \quad f_2 = x^2y^2$$

resultan invariantes algebraicamente independientes. Por lo tanto, $\mathbb{C}[f_1, f_2] \subseteq \mathbb{C}[x, y]^G$ define un subanillo del anillo de invarientes, que tiene como serie de Hilbert a:

$$\frac{1}{(1-t^4)^2}.$$

Utilizando la misma idea y observando nuevamente el denominador de la serie de Hilbert, buscamos un invariante de grado 6, y es también sencillo verificar que:

$$f_3 = xy(x^4 - y^4)$$

resulta dicho invariante. Sin embargo, este último no es algebraicamente independiente con f_1 y f_2, de hecho satisface la relación:

$$f_3^2 = f_1^2 f_2 - 4f_2^3$$

A partir de la identidad anterior podemos deducir que $\mathbb{C}[f_1, f_2] \oplus f_3\mathbb{C}[f_1, f_2]$ resulta un subanillo de $\mathbb{C}[x, y]^G$, además, haciendo un argumento parecico al que hicimos en la demostración de la proposición 2.3.3, podemos calcular las series de Hilbert por separado de los espacios vectoriales graduados dados por $\mathbb{C}[f_1, f_2]$ y $f_3\mathbb{C}[f_1, f_2]$ y deducir que:

$$P_{\mathbb{C}[f_1,f_2]\oplus f_3\mathbb{C}[f_1,f_2]}(t) = P_{\mathbb{C}[f_1,f_2]}(t) + P_{f_3\mathbb{C}[f_1,f_2]}(t) =$$

$$= \frac{1}{(1-t^4)^2} + \frac{t^6}{(1-t^4)^2} = \frac{1-t^{12}}{(1-t^4)(1-t^6)} = P_{\mathbb{C}[x,y]^G}(t)$$

Así logramos deducir que $\mathbb{C}[f_1, f_2] \oplus f_3\mathbb{C}[f_1, f_2] = \mathbb{C}[x, y]^G$. Y por lo tanto, visto como un cociente de un anillo de polinomios, podemos expresarlo como:

$$\mathbb{C}[x, y]^G = \mathbb{C}[x, y, z]/(z^2 - x^2y + y^3)$$

Estos ejemplos nos muestran de manera clara como la serie de Hilbert nos da mucha información sobre la forma del anillo de invariantes. Especialmente en el segundo, fue de gran utilidad para saber sobre qué grado debíamos buscar los generadores invariantes homogéneos. La idea en un contexto más general sería: obtener los grados posibles de los generadores a partir de la serie de Hilbert, pero sustituir la búsqueda manual de invariantes, por su cálculo a traves de métodos como el determinado por el operador de Casimir.

A continuación veremos algunas generalizaciones de los resultados sobre series de Hilbert probados anteriormente para grupos finitos, pero para el caso del grupo SL_2.

2.3.3. Fórmula de la dimensión para SL(2,K)

Recordemos primero algunos resultados que ya hemos probado sobre este grupo algebraico y su álgebra de Lie asociada $\mathfrak{sl}_2$. Dada una matriz $A \in K^{2\times 2}$ con traza nula, define un elemento de $\mathfrak{sl}_2 \subset K[SL_2]^*$, del siguiente modo:

$$\partial A(p) = \partial t(P(Id + tA))|_{t=0}$$

Y desde este punto de vista:

$$\mathfrak{sl}_2 = \{\partial A \in K[SL_2]^* : tr(A) = 0\} = \{A \in K^{2\times 2} : tr(A) = 0\}$$

Donde, en el segundo conjunto, la estructura de álgebra de Lie está dada por el conmutador de las matrices. Si consideramos:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

conforma una base del álgebra de Lie. La forma bilineal no degenerada dada por $\phi(A, B) = tr(AB)$ resulta un múltiplo de la forma de Killing, y tiene como matriz en la base anterior a:

$$|\phi| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La acción adjunta de SL_2 sobre $\mathfrak{sl}_2$ queda determinada de forma natural por la conjugación de matrices y, si consideramos al subgrupo maximal tórico de SL_2 dado por:

$$T = \{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} : t \in K^*\},$$

entonces la acción adjunta inducida sobre este grupo queda dada por:

$$Ad\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \cdot e = t^2 e\,; \quad Ad\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \cdot f = t^{-2} f\,; \quad Ad\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \cdot h = 0$$

Nuestra intención es conseguir una fórmula para la dimensión de los invariantes de una representación racional finita V de SL_2, al igual que lo hicimos para grupos finitos y luego, a partir de esta fórmula obtener una forḿula análoga a la de Molien para este caso.

En este contexto, dada una representación racional V, a partir de la acción inducida por el grupo tórico $T \subset SL_2$, existe una descomposicion graduada:

$$V = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V_{(m)}$$

donde cada componente esta determinada por:

$$V_{(m)} = \{v \in V : \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \cdot v = t^m.v\}$$

Para consultar una demostración ver: [MUK, Pág. 83].

Proposición 2.3.8. Bajo la notación de las observaciones anteriores, consideremos la acción inducida de $\mathfrak{sl}_2$ sobre V y denotémosla por $\rho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow End_k(V)$, entonces:

$$\rho(e) : V_{(m)} \longrightarrow V_{(m+2)} \quad \text{y} \quad \rho(f) : V_{(m)} \longrightarrow V_{(m-2)}$$

Demostración. Sea $v \in V_{(m)}$, denotando por:

$$[t] = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

deducimos que:

$$\begin{aligned} [t] \cdot (e \cdot v) &= \epsilon_{[t]} * e * \epsilon_{[t]}(\epsilon_{[t]} \cdot v) = \epsilon_{[t]} * e * \epsilon_{[t]}(t^m.v) \\ &= Ad([t]) \cdot e(t^m.v) = (t^2.e) \cdot (t^m.v) = t^m + 2(e \cdot v) \end{aligned}$$

La prueba del resultado para el elemento f es totalmente análoga.

□

Observación 2.3.9. Si consideramos la base $B = \{e, f, h\}$ y la forma bilineal dada por ϕ que definimos anteriormente, entonces la base dual queda dada por: $B^* = \{f, e, \frac{1}{2}w\}$, y el elemento de Casimir determinado por estos elementos resulta:

$$C = \partial e * \partial f + \partial f * \partial e + \frac{1}{2}\partial h * \partial w$$

Además, se puede verificar que en el álgebra envolvente $K[SL_2]^*$ es válida la siguiente relación:

$$\partial e * \partial f - \partial f * \partial e = \partial h$$

y esto nos determina que el elemento de Casimir queda dado por:

$$C = 2\partial f * \partial e + \partial h + \frac{1}{2}\partial h * \partial h$$

Utilizando un abuso natural de notación denotaremos a C como:

$$C = e * f + f * e + \frac{1}{2}h * h$$

El siguiente resultado caracteriza a los invariantes V^{SL_2}, y nos permitirá obtener una fórmula de dimensión.

Lema 2.3.10. $V^{SL_2} = Ker\,(\rho(e) : V_{(0)} \longrightarrow V_{(2)})$

Demostración. Dado que

$$V_{(0)} = \{v \in V : \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \cdot v = v\}$$

es claro que $V^{SL_2} \subseteq V_{(0)}$, pero además, como ya hemos visto, todos los elementos de V^{SL_2} son anulados por los elementos de $\mathfrak{sl}_2$ y por lo tanto:

$$V^{SL_2} \subset Ker\,(e).$$

Veamos ahora la contención inversa. Sea $v \in Ker\,(e)$, en virtud de la fórmula que hemos dado para el elemento de Casimir, bastará probar que: $h \cdot v = 0$. Pero esto último se sigue de que $v \in V_{(0)}$, y que la acción adjunta de T sobre h es nula. □

Ahora probemos la fórmula de dimensión para SL_2:

Proposición 2.3.11. Si V es una representación finita de SL_2 entonces:

$$dim(V^{SL_2}) = dim(V_{(0)}) - dim(V_{(2)})$$

Demostración. En virtud del lema precedente bastará demostrar que el morfismo

$$e : V_{(0)} \longrightarrow V_{(2)}$$

es sobreyectivo. Para esto observemos que el morfismo

$$e^2 : V_{(-2)} \longrightarrow V_{(2)}$$

es inyectivo. Si $v \in Ker\,(e^2)$, entonces $e \cdot v \in Ker\,(e) \subseteq V_{(0)}$, con lo cual

$$e \cdot v \in V^{SL_2},$$

y luego $f * e \cdot v = 0$. Nuevamente en virtud de que $v \in V_{(-2)}$ y la acción adjunta de T sobre h es nula obtenemos que:

$$C \cdot v = (2f * e + h + \frac{1}{2} h * h) \cdot v = 0$$

Por lo tanto, $v \in Ker\,(C_V) = V^{SL_2}$, pero como también pertenece a $V_{(-2)}$, resulta obviamente nulo. De manera totalmente análoga podemos probar que $f^2 : V_{(2)} \longrightarrow V_{(-2)}$ también resulta inyectivo, y luego

$$dim V_{(2)} = dim V_{(-2)},$$

de donde resulta que e^2 y f^2 son isomorfismos, y de esto podemos deducir que e es sobreyectivo. □

Observación 2.3.12. Podemos considerar la siguiente función generadora asociada a la descomposición que induce el subgrupo $T \subset SL_2$:

$$ch_V(q) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} dim(V_{(m)}) q^m$$

que suele denominarse el carácter formal de de V. Utilizando este elemento podemos deducir que:

$$dim V^{SL_2} = -Res_{q=0}(q - q^{-1}) ch_V(q)$$

donde *res* denota al residuo de la correspondiente serie de Laurent.

2.3.4. Fórmula de Cayley Silvester

Consideremos una representación racional V de dimensión n del grupo SL_2 y la acción inducida sobre su espacio polinomial $K[V] \simeq K[x_1, .., x_n]$. Para la acción inducida del subgrupo tórico T sabemos que existe una descomposición por pesos en componentes $V_{(m)}$. Tomemos $a_1, .., a_n$ los pesos en donde las componentes resultan no nulas. y definamos:

$$\rho(q,t) = \frac{1}{(1-q^{a_1}t)\cdots(1-q^{a_n}t)} = det(Id_V - t \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}_V)^{-1}$$

Ahora mostremos una fórmula análoga a la de Molien, pero para el grupo SL_2, que caracteriza a la series de Hilbert para este caso:

Teorema 2.3.13. La serie de Hilbert asociada al anillo de invariantes $K[V]^{SL_2}$ queda determinada por:

$$P(t) = -Res_{q=0}(q - q^{-1})\rho(q,t)$$

Donde *Res* denota al resíduo de la expansión en serie de Laurent de la expresión $(q - q^{-1})\rho(q,t)$, que corresponde a su término (-1)-ésimo.

Demostración. La idea de la demostración es la misma que para el caso de grupos finitos. Consideremos una base $\{v_1, .., v_n\}$ que diagonaliza la acción de T sobre V, a partir de los pesos $a_1, .., a_n$.

Si observamos la acción inducida por T en $K[x_1, .., x_n]$ (via el isomorfismo con $K[V]$) resulta:

$$\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \cdot x_i = q^{a_i}.x_i$$

Notemos, al igual que en el caso de grupos finitos, que en el desarrollo en serie de potencias de:

$$\frac{1}{(1-x_1)\cdots(1-x_n)}$$

aparecen como sumandos todos todos los monomios de $K[x_1, .., x_n]$, luego actuando por un elemento genérico de T:

$$\frac{1}{(1-q^{a_1}x_1)\cdots(1-q^{a_n}x_n)} = \sum_{(j_1,..,j_n)\in\mathbb{Z}^n} q^{j_1a_1}\cdots q^{j_na_n}x_1^{j_1}...x_n^{j_n}$$

Si agrupamos los términos de un grado fijo e, la suma de los coeficientes que aparecen delante de estos monomios es exactamente $ch_{K[V]_e}(q)$, es decir:

$$\sum_{j_1+...+j_n=e} q^{j_1a_1}\cdots q^{j_na_n} = \sum_m dim(K[V]_{e_{(m)}})q^m$$

Por lo tanto:

$$\sum_{e=0}^{\infty} ch_{K[V]_e}(q)t^e = \frac{1}{(1-q^{a_1}t)\cdots(1-q^{a_n}t)} = \rho(q,t)$$

Por la fórmula de la dimensión para SL_2 sabemos que:

$$dim(K[V]_e^{SL_2}) = -Res_{q=0}(q - q^{-1})ch_{K[V]_e}(q)$$

y a partir del desarrollo anterior podemos deducir:

$$P(t) = \sum_{e=0}^{\infty} dim(K[V]_e^{SL_2})t^e = \sum_{e=0}^{\infty} -Res_{q=0}(q - q^{-1})ch_{K[V]_e}(q)t^e$$

$$= -Res_{q=0}(q - q^{-1})\rho(q,t)$$

□

Veamos a continuación algunos resultados sobre uno de los ejemplos más clásicos de la teoría y que corresponde a las formas binarias. Nuestra intención es detallar las fórmulas anteriores y algunos lemas técnicos que las mejoran.

Ejemplo 2.3.14. Sea $V = V_d = K[x,y]_d$ el espacio vectorial de las formas binarias de grado d. Y sobre dicho espacio tomemos la acción natural a izquierda de SL_2 dada por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f(x,y) = f(ax + cy, bx + dy)$$

Consideremos la base de V dada por los monomios $x^d, x^{d-1}y, ..., y^d$, estos elementos satisfacen, además:

$$\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \cdot x^{d-i}y^i = q^{d-2i}x^{d-i}y^i$$

por lo tanto, diagonaliza la acción inducida por T, y eso nos permite obtener la fórmula:

$$P(q,t) = \prod_{i=0}^{d} \frac{1}{1 - q^{d-2i}}$$

Podemos determinar una mejor expresión para la fórmula anterior introduciendo una generelazación del factorial de un entero $d \in \mathbb{Z}$ que depende de un elemento $q \in K^*$:

- $[d]_q = q^{d-1} + q^{d-3} + \cdots + q^{-d+3} + q^{-d+1} = \frac{q^d - q^{-d}}{q - q^{-1}}$
- $[d]_q! = \prod_{i=1}^{d}[i]_q$
- $\binom{d+e}{e}_q = \frac{[d+e]_q!}{[d]_q![e]_q!}$

Además esta generalización de los números combinatorios satisface la propiedad:

$$\prod_{i=0}^{d} \frac{1}{1 - q^{d-2i}} = \sum_{e=0}^{\infty} \binom{d+e}{e}_q t^e,$$

aunque omitiremos su demostración.

A partir de las fórmulas anteriores podemos deducir que la serie de Hilbert de SL_2 sobre el anillo de invariantes $K[y_o, .., y_d]^{SL_2}$ de formas binarias de grado fijo d resulta:

$$P(t) = -\sum_{e=0}^{\infty} (Res_{q=0}(q - q^{-1}) \binom{d+e}{e}_q) t^e$$

Para simplicar un poco más dicha fórmula podemos tomar un cambio de variables dado por $u = q^2$:

$$(q - q^{-1}) \binom{d+e}{e}_q = (q - q^{-1}) \frac{[e+1]_q [e+2]_q \cdots [e+d]_q}{[1]_q \cdots [d]_q} =$$

$$(q - q^{-1}) q^{-de} \frac{(1 - u^{e+1})(1 - u^{e+2}) \cdots (1 - u^{e+d})}{(1 - u) \cdots (1 - u^d)} =$$

$$= q^{-de-1} \frac{(1 - u^{e+1})(1 - u^{e+2}) \ldots (1 - u^{e+d})}{(1 - u^2) \cdots (1 - u^d)}$$

Fórmula de Cayley Silvester

Teorema 2.3.15. El anillo de invariantes $K[y_o, .., y_d]^{SL_2}$ determinado por la acción natural de SL_2 sobre las formas binarias de grado d, satisface la siguiente fórmula:

$$\theta(d, e) := dim(K[V_d]_e^{SL_2}) = \begin{cases} \{ \frac{(1-u^{e+1})(1-u^{e+2}) \cdots (1-u^{e+d})}{(1-u^2) \cdots (1-u^d)} \}_{de/2} & \text{si } de \ es \ par \\ 0 & \text{si } de \ es \ impar \end{cases}$$

donde $\{\}_{de/2}$ denota el coeficiente $(de/2)$-ésimo de la correpondiente serie de potencias.

Demostración. De acuerdo con las fórmulas ya desarrolladas sobre la series de Hilbert para el caso de $V = V_d$ sabemos que:

$$\theta(d, e) = Res_{q=0}(q^{-de-1} \frac{(1 - u^{e+1})(1 - u^{e+2}) \cdots (1 - u^{e+d})}{(1 - u^2) \ldots (1 - u^d)})$$

donde $u = q^2$. Si llamamos:

$$R(u) = \frac{(1 - u^{e+1})(1 - u^{e+2}) \cdots (1 - u^{e+d})}{(1 - u^2) \cdots (1 - u^d)})$$

entonces $\theta(d, e)$ resulta el coeficiente (de)-ésimo del desarollo de $R(q^2)$, y es claro que es cero en el caso en que de es impar.

Analicemos el otro caso: utilizando el Teorema del residuo de Cauchy deducimos que:

$$\theta(d, e) = \frac{1}{2\pi i} \int q^{-de-1} R(q^2) dq = \frac{1}{2\pi i} \int u^{-de/2-1} R(u) du = Res_{u=0} u^{-de/2-1} R(u)$$

De esta igualdad es claro que $\theta(d, e) = \{R(u)\}_{de/2}$ □

Observación 2.3.16. A partir de la fórmula anterior para la serie de Hilbert en formas binarias, podemos dar una lista de algunos ejemplos calculados:

d	$P_d(t)$
2	$\frac{1}{1-t^2}$
3	$\frac{1}{1-t^4}$
4	$\frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$
5	$\frac{1+t^18}{(1-t^4)(1-t^8)(1-t^12)}$
6	$\frac{1+t^15}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^10)}$

2.3.5. Aplicaciones y más ejemplos

Veamos algunas aplicaciones de los resultados anteriores al ejemplo clásico de la teoría: la acción de SL_2 sobre las formas binarias de grado homegeneo fijo d:

Ejemplo 2.3.17. Consideremos $V_d = k[x,y]_d$ con la acción natural de SL_2 que ya explicitamos anteriormente. Nuestra intención es describir el anillo de invariantes para los casos: $d = 2$, $d = 3$ y $d = 4$. Para esto recordemos las definiciones de resultante y de discriminante:

Dados dos polinomios en una variable de grados respectivos d y e:

$$f(x) = a_o x^d + \cdots + a_{d-1}x + a_d = a_0 \prod_{i=1}^{d}(x - \lambda_i)$$

$$g(x) = b_o x^e + \cdots + b_{e-1}x + b_e = b_0 \prod_{j=1}^{e}(x - \mu_j)$$

La resultante entre ambos polinomios se define por:

$$R(f,g) = a_o^e b_o^d \prod_{i,j}(\lambda_i - \mu_j).$$

Es conocido que este elemento puede expresarse a través de los coeficientes de f y g como el determinante:

$$det \begin{pmatrix} a_o & a_1 & ... & a_d & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & a_o & a_1 & ... & a_d & 0 & ... & ... & 0 \\ & & & & & & & & \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & a_0 & a_1 & ... & a_d \\ b_0 & b_1 & ... & ... & b_e & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & b_o & b_1 & ... & ... & b_e & 0 & ... & 0 \\ & & & & & & & & \\ 0 & ... & 0 & b_0 & b_1 & ... & ... & ... & b_e \end{pmatrix}$$

Si consideramos dos formas binarias de grados respectivos d y e, dadas por:

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{d} \xi_i \binom{d}{i} x^{d-i} y^i = \prod_{i=1}^{d}(p_i x + q_i y)$$

$$g(x,y)=\sum_{j=0}^{e}\mu_j\binom{e}{j}x^{e-j}y^j=\prod_{j=1}^{e}(r_jx+s_jy)$$

definimos la resultante entre dos formas de manera análoga al caso de polinomios de una variable, reemplazando en el respectivo determinante los a_i por ξ_i y los b_j por los μ_j. Además, esta resultante se corresponde con:

$$Res(f,g)=\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{e}(p_is_j-q_ir_j)$$

Para una forma binaria de grado d definimos su discriminante como:

$$D(f)=R(\frac{1}{d}\frac{\partial f}{\partial x},\frac{1}{d}\frac{\partial f}{\partial y})$$

Como dichas derivadas quedan determinadas por:

$$\frac{1}{d}\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{i=0}^{d-1}\xi_i\binom{d-1}{i}x^{d-1-i}y^i \qquad \frac{1}{d}\frac{\partial f}{\partial y}=\sum_{i=1}^{d}\xi_i\binom{d-1}{i}x^{d-i}y^{i-1}$$

podemos expresar matricialmente el discriminante de una forma binaria de grado d como:

$$det\begin{pmatrix}
\xi_o & (d-1)\xi_1 & ... & ... & \xi_{d-1} & 0 & ... & ... & ... & 0\\
0 & \xi_o & (d-1)\xi_1 & ... & ... & \xi_{d-1} & 0 & ... & ... & 0\\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ....\\
0 & ... & ... & ... & ... & 0 & \xi_0 & (d-1)\xi_1 & ... & \xi_{d-1}\\
\xi_1 & (d-1)\xi_2 & ... & ... & \xi_d & 0 & ... & ... & ... & 0\\
0 & \xi_1 & (d-1)\xi_2 & ... & ... & \xi_d & 0 & ... & ... & 0\\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ....\\
0 & ... & ... & ... & ... & 0 & \xi_1 & (d-1)\xi_2 & ... & \xi_d
\end{pmatrix}$$

Este discriminante satisface la siguiente relación bajo la acción de GL_2:

$$D(A\cdot f)=(detA)^{d(d-1)}D(f)$$

para todos elementos $A\in GL_2$ y $f\in K[x,y]_d$, (Ver [MUK, Sec. 1.3]). Por lo tanto, resultan invariantes bajo la acción de SL_2.

Para $d=2$ este discriminante resulta:

$$D_2(f)=\xi_0\xi_2-\xi_1^2,$$

y para $d=3$:

$$D_3(f)=\xi_o^2\xi_3^2-3\xi_1^2\xi_2^2-3\xi_o\xi_1\xi_2\xi_3+4\xi_1^3\xi_3+4\xi_0\xi_2^3.$$

Como la series de Hilbert en estos casos resultan:

$$P_2(t)=\frac{1}{1-t^2} \qquad P_3(t)=\frac{1}{1-t^4}$$

y los invariantes D_2 y D_3 son homogéneos de grados respectivos 2 y 4, a partir de la proposición 2.3.3, sabemos que los anillos

$$K[D_2] \quad \text{y} \quad K[\xi_0,\xi_1,\xi_2]^{SL_2}$$

tienen la misma serie de Hilbert, al igual que:

$$K[D_3] \quad \text{y} \quad K[\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3]^{SL_2},$$

por lo tanto:

$$K[\xi_0, \xi_1, \xi_2]^{SL_2} = K[D_2] \qquad K[\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3]^{SL_2} = K[D_3]$$

En el caso $d = 4$ la situación es un poco diferente, pues la serie de Hilbert asociada es:

$$P_4(t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)},$$

lo que sugiere la existencia de dos invariantes homogéneos generadores de grados respectivos 2 y 3 (en este caso el discrimintante tiene un grado más alto). Nuestra intención es explicitar esos invariantes generadores y ver que resultan algebraicamente independientes.

Si consideramos el cambio de variables dado por:

$$x^4 = a^2, \quad 2x^3y = ab, \quad 4x^2y^2 = b^2 = 4ac, \quad 2xy^3 = bc, \quad , y^4 = c^2$$

la ecuación determinada por la cuártica:

$$\xi(x, y) = \xi_0 x^4 + 4\xi_1 x^3 y + 6\xi_2 x^2 y^2 + 4\xi_3 x y^3 + \xi_4 y^4 = 0$$

se transforma en dos ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{cases} \xi_0 a^2 + 2\xi_1 ab + \xi_2(b^2 + 2ac) + 2\xi_3 bc + \xi_4 c^2 = 0 \\ 4ac - b^2 = 0 \end{cases}$$

que quedan definidas por las matrices:

$$\begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si consideramos el polinomio que determina:

$$detT_\lambda = det(\begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 4\lambda^3 - g_2(\xi)\lambda - g_3(\xi),$$

es esperable que los coeficientes resulten invariantes bajo la acción de SL_2. Para obtener una visión más geométrica e intuitiva de este hecho deberíamos introducir conceptos de curvas elípticas, ya que dicho polinomio determina el jacobiano de la curva elíptica definida por la ecuacion $\tau^2 = \xi(x, y)$. Estos invariantes de grados 2 y 3 son los que buscábamos:

$$g_2(\xi) = \xi_0\xi_4 - 4\xi_1\xi_3 + 3\xi_2^2$$

$$g_3(\xi) = \xi_0\xi_2\xi_4 - \xi_0\xi_3^2 - \xi_1^2\xi_4 + 2\xi_1\xi_2\xi_3 - \xi_2^3$$

Veamos que resultan invariantes bajo la acción de SL_2. Consideremos la matriz:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2$$

que transfoma las coordenadas (a, b, c) mediante la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot (a, b, c) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Es sencillo verificar que deja invariante a la cuártica $4ac - b^2$, con lo cual la transformación anterior resulta ortogonal para el producto interno descripto por:

$$\begin{pmatrix} & & 2 \\ & -1 & \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

y además resulta de determinante 1. La matriz T_λ, que define el polinomio que contiene a los invariantes g_2 y g_3 como coeficientes, se transforma según la acción de SL_2, por la conjungación:

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta+\beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix}^T T_\lambda \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta+\beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix},$$

y luego, su determinante resulta invariante.

Sólo nos resta ver que g_2 y g_3 visto como polinonios en $K[\xi_0, \xi, 1,_2, \xi_3, \xi_4]$ son algebraicamente independientes. Para esto un posible argumento podria ser restringirse al subespacio $\xi_0 = \xi_4$, $\xi_1 = \xi_3 = 0$, en donde los invarinates se reducen a:

$$g_2 = \xi_0^2 + 3\xi_2^2 \qquad g_3 = (\xi_0^2 - \xi_2^2)\xi_2$$

que es sencillo ver que resultan algebraicamente independientes, y así g_2 y g_3 no satisfacen ninguna relación polinomial. Concluimos que:

$$K[\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^{SL_2} = K[g_2(\xi), g_3(\xi)]$$

A lo largo del presente capítulo hemos discutido, en particular, diversos resultados sobre anillos de polinomios invariantes bajo la acción de los grupos $\mathbb{SL}_n$ y $\mathbb{GL}_n$, los cuales se enmarcan en lo que suele denominarse Teoría Clásica de Invariantes. Dicha teoría se encuentra completamente descripta a través de dos teoremas, que se denominan Teoremas Fundamentales. El primero de ellos describe fórmulas explicitas para el cálculo de generadores del anillo de invariantes, y el segundo desarrolla relaciones entre ellos. Para una visión más amplia de estos resultados consultar: [CIT, Sec. 4.4] y [GIT, Cáp. 1].

El ejemplo que veremos a continuación resulta una generalización de otro de los problemas importantes que se ha estudiado sobre anillos de invariantes y fue resuelto por C. Procesi, en: [PRO].

Ejemplo 2.3.18. Consideremos un espacio vectorial V, y tomemos el espacio dado por:

$$W = End_k(V)^n$$

$GL(V)$ actúa sobre este espacio por conjugación en cada coordenada, es decir, si $T \in GL(V)$ y $\{A_i\}_{i=1}^n \subset End_k(V)$ entonces:

$$T \cdot (A_1, ..., A_n) = (TA_1T^{-1}, \cdots, TA_nT^{-1}).$$

Procesi demostró que el anillo de funciones polinomiales invariantes en los coeficientes de los A_i queda generado por las trazas:

$$Tr(A_{i_1} \circ \cdots \circ A_{i_n}).$$

Una aclaración importante es que este anillo de invariantes no coincide con el anillo correspondiente a tomar invariantes en cada coordenada, es decir que:

$$K[W]^{GL(V)} \neq (K[End_k(V)]^{GL(V)})^n$$

Procesi determinó también el ideal de relaciones entre dichas trazas, y estableció cotas sobre la cantidad de índices i_j que resultan nencesarios.

Capítulo 3

Construcción de cocientes afines

Consideremos un grupo G linealmente reductivo y una G-variedad afín X. Por lo expuesto en el capítulo anterior sabemos que el anillo de invariantes $K[X]^G$ resulta finitamente generado. Y por lo tanto, existen funciones polinomiales invariantes $f_1, .., f_n$ tales que:

$$K[X]^G = K[f_1, ..., f_n].$$

El estudio de invariantes sobre una G-variedad es una herramienta fundamental para la clasificación de los elementos de X. Dicho de otro modo, a estos elementos podemos pensarlos como objetos que deseamos clasificar, y los invariantes son funciones K-valuadas que son constantes sobre las clases de equivalencia dadas por la acción de G. Una de las preguntas inmediatas que surgen a partir de esta idea es si, dados dos objetos no equivalentes, existe algún invariante que los mapea a valores distintos en K. En general, la respuesta a esta última pregunta será negativa.

El objetivo de este capítulo es formalizar las ideas anteriores en el contexto de grupos linealmente reductivos y variedades sobre ellos. Además, estudiaremos la posibilidad de definir una estructura de variedad afín sobre el espacio de las clases de equivalencias (o espacio de G-órbitas).

3.1. El espacio de órbitas

Supongamos que un grupo linealmente reductivo actúa sobre un variedad afín X y que el anillo de invariantes asociado esta generado por $f_1, .., f_n$. Consideremos la función $\phi : X \longrightarrow \mathbb{A}^n$ determinada por:

$$\phi(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)),$$

Notaremos por X/G al espacio de las G-órbitas determinadas sobre X. Como cada f_i es una función G-invariante, es claro que ϕ es constante en las órbitas, y por lo tanto se la puede pensar como una función con dominio sobre X/G. Nuestro problema principal a resolver consta de determinar si X/G admite una estructura de variedad (en cuyo caso se llamará variedad cociente) vista como la imagen $\phi(X) \subseteq \mathbb{A}^n$.

Otra de las preguntas naturales a resolver es saber si G-órbitas distintas son mapeadas a puntos afines distintos por la función ϕ. En general, la respuesta a esta última pregunta es negativa, pero podremos establecer una clase de equivalencia entre órbitas, que determina cuándo son separadas por los invariantes de $K[X]^G$.

Definición 3.1.1. Dos G-órbitas O y O' se dicen equivalentes si existe una cadena de órbitas:

$$O = O_1, O_2, ..., O_n = O'$$

que satisfacen $\overline{O_i} \cap \overline{O_{i+1}} \neq \emptyset$ para todo $i = 1.,,,.n-1$.

A continuación, veamos que la definición anterior resuelve el problema de la separación de órbitas a través de los invariantes del anillo $K[X]$ por la acción de G. El siguiente teorema se atribuye en forma conjunta a Nagata y Munford:

Teorema 3.1.2. Sea G un grupo linealmente reductivo, X una G-variedad y O,O' dos G-órbitas, entonces son equivalentes:

a) $\overline{O} \cap \overline{O'} \neq \emptyset$

b) O y O' son equivalentes.

c) Si $f \in K[X]^G$ entonces toma el mismo valor constante sobre O y O'.

Demostración. a) implica b) es inmediata a partir de la definición de equivalencia de órbitas. b) implica c) también es sencilla, pues las funciones polinomiales invariantes resultan constantes en las G-órbitas, y por continuidad lo son sobre sus clausuras, de donde obtenemos el resultado deseado.

Para demostrar c) implica a), supongamos que $\overline{O} \cap \overline{O'} = \emptyset$ y tratemos de hallar un invariante que las separa. Consideremos los ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}'$ de $K[X]$ definidos por las funciones que se anulan sobre $\overline{O}$ y $\overline{O'}$ respectivamente, entonces observemos que:

$$V(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{a}') = V(I(\overline{O})) \cap V(I(\overline{O'})) = \overline{O} \cap \overline{O'} = \emptyset$$

y por lo tanto, utilizando el teorema de los ceros de Hilbert obtenemos que:

$$K[X] = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}'$$

Como las clausuras $\overline{O}$ y $\overline{O'}$ son invariantes por la acción de G, entonces los ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}'$ resultan sub-G-representaciones de $K[X]$, pues:

$$g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x) = f(0) = 0 \quad \forall g \in G, \forall f \in \mathfrak{a}, \forall x \in \overline{O}$$

Tomemos entonces el epimorfismo de G-representaciones determinado por:

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' &\longrightarrow K[X] \\ (f, f') &\longmapsto f + f' \end{aligned}$$

.

Como el grupo G es linealmente reductivo entonces el mosfismo inducido en los invariantes:

$$\psi^G : (\mathfrak{a} \cap K[X]^G) \oplus (\mathfrak{a}' \cap K[X]^G) \longrightarrow K[X]^G$$

también resulta sobreyectivo.Entonces consideremos funciones $f \in (\mathfrak{a} \cap K[X]^G)$ y $f' \in (\mathfrak{a}' \cap K[X]^G)$ tales que: $f + f' = 1$. Luego $f \in K[X]^G$ y toma el valor cero sobre O y uno O', y de este modo resulta el invariante que buscamos. □

Corolario 3.1.3. Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, dos G-órbitas cerradas son separadas por lo invariantes $K[X]^G$, es decir que existe algún invariante $f \in K[X]^G$ que toma dos valores distintos sobre cada una de las órbitas.

Corolario 3.1.4. Cada clase de equivalencia de órbitas contiene una única órbita cerrada, que está contenida en cada una de las clausuras de órbitas de esa clase.

Demostración. A partir del teorema anterior podemos deducir que cada clase contiene, a lo sumo, una órbita cerrada. Consideremos una órbita con dimensión mínima como variedad (dentro de dicha clase), y veamos que resulta cerrada.

Supongamos que no es un conjuto cerrado. Luego $\overline{O} - O$ es no vacío, y puede escribirse como una unión de órbitas que son equivalentes a O y de menor dimensión, con lo cual arribamos a un absurdo.

Si O' es una órbita equivalente a O, entonces:

$$O \cap \overline{O'} = \overline{O} \cap \overline{O'} \neq \emptyset,$$

y además, $\overline{O'}$ puede escribirse como una unión de órbitas, de donde se sigue que: $O \subseteq \overline{O'}$. □

Otra observación importante es que dos G-órbitas son separadas por alguna función polinomial invariante si y sólo si existe algún generador del anillo de invariantes que las separa.

Veamos a continuación dos ejemplos sobre grupos algebraicos de dimensión 1, que nos muestran cómo la hipótesis de que el grupo sea linealmente reductivo es necesaria.

Ejemplo 3.1.5. Consideremos al toro algebraico de dimensión uno, G_m, actuando sobre el espacio afín $\mathbb{A}^2$ vía:

$$t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}y).$$

Las órbitas de esta acción son:

(1) $\{(0, 0)\}$,

(2) $\{(x, y) : xy = a\}$ con $a \in K^*$,

(3) $\{(x, 0) : x \neq 0\}$,

(4) $\{(0, y) : y \neq 0\}$,

y el anillo de invariantes de esta acción queda determinado por:

$$K[x, y]^{G_m} = \{f \in K[x, y] : f(x, y) = f(tx, t^{-1}y)\} = K[xy]$$

Para ver que si dos órbitas son o no separadas por invariantes basta evaluar algún punto de ellas sobre el polinomio xy. La órbita (2) es cerrada y las órbitas (1),(3) y (4) son equivalentes pues sus clausuras se intersecan. Observemos que:

$$xy|_{(1)} = xy|_{(3)} = xy|_{(4)} = 0 \qquad xy|_{(2)} = a$$

De donde se sigue que los invariantes parametrizan las clases de equivalencia asociadas.

Ejemplo 3.1.6. Consideremos ahora al grupo algebraico afín aditivo, G_a, que como sabemos no es linealmente reductivo. Y definamos la acción de este grupo sobre el espacio afín $\mathbb{A}^2$ dada por:

$$a \cdot (x, y) = (x, ax + y)$$

El anillo de invariantes de esta acción resulta $K[x] \subset K[x, y]$ y las órbitas son:

(1) $\{(x_o, y) : y \in K\}$ con $x_0 \in K^*$.

(2) $\{(0, y_0)\}$ con $y_0 \in K$

En este caso, observamos que todas las G_a-órbitas son cerradas, sin embargo:

$$x|_{\{(x_o,y):y\in K\}} = x_0 \qquad x|_{\{(0,y_0)\}} = 0$$

Por lo tanto, los imvariantes de esta acción fallan en la separación de las órbitas de tipo 2. Esto muestra que el teorema descripto anteriormente no es válido sin la hipótesis de que grupo sea linealmente reductivo.

3.2. El morfismo cociente

Considerando funciones polinomiales invariantes $f_1, .., f_n$, que generan el anillo de invariantes $K[X]^G$ sobre un grupo linealmente reductivo G, nuestra intención es probar algunas propiedades sobre el morfismo $\phi : X \longrightarrow \mathbb{A}^n$ que definimos al principio de esta sección.

Sea $Y = \overline{\phi(X)}$, la clausura Zariski de la imagen de ϕ, sabemos que:

$$Y = V(I(\phi(X))) = \{(a_1, .., a_n) \in \mathbb{A}^n : F(a_1, .., a_n) = 0 \quad \forall F \in I(\phi(X))\} =$$

$$= \{(a_1, .., a_n) \in \mathbb{A}^n : F(a_1, .., a_n) = 0 \quad \forall F : F(f_1, .., f_n) \equiv 0\}.$$

Es decir que, si tomamos el ideal $J \subset K[x_1, .., x_n]$ dado por el nucleo del morfismo:

$$\begin{aligned} \omega : K[x_1, .., x_n] &\longrightarrow K[X]^G \\ x_i &\longmapsto f_i, \end{aligned}$$

entonces $Y = V(J)$ y:

$$K[x_1, .., x_n]/J = K[Y] \simeq K[X]^G.$$

Además, como el anillo $K[X]^G$ no tiene elementos nilpotentes, se sigue que el ideal J es radical y, por lo tanto:

$$K[Y] \simeq K[X]^G$$

Proposición 3.2.1. Sea $\phi : X \longrightarrow \mathbb{A}^n$ el morfismo inducido por la acción de un grupo linealmente reductivo sobre una variedad X. Entonces su imagen es un conjunto cerrado Zariski, es decir, $\phi(X) = Y$.

Demostración. Sea $a = (a_1, .., a_n) \in Y$ y consideremos el morfismo G-invariante determinado por:

$$\begin{aligned} \psi : K[X] \oplus \cdots \oplus K[X] &\longrightarrow K[X] \\ (g_1, .., g_n) &\longmapsto \sum g_i(f_i - a_i) \end{aligned}$$

Si ψ^G es el morfismo inducido en los invariantes, luego su imagen queda deteminada por el ideal:

$$\langle f_i - a_i \rangle_{K[X]^G}$$

que, a su vez, resulta la imagen del ideal maximal $m_a \subset K[Y]$ (asociado al punto a) por el isomorfimo entre $K[X]^G$ y $K[Y]$. Luego $\langle f_i - a_i \rangle_{K[X]^G}$ es un ideal maximal propio de $K[X]^G$, y el morfismo ψ^G no es sobreyectivo. Como el grupo G es linealmente reductivo, recordando 2.1.17, el morfismo ψ tampoco es sobreyectivo.

Consideremos un ideal maximal $m \subset K[X]$, que contenga a la imagen de de ψ. Como el ideal $m \cap K[X]^G$ también resulta maximal y contiene a $\langle f_i - a_i \rangle_{K[X]^G}$ entonces:

$$m \cap K[X]^G = \langle f_i - a_i \rangle_{K[X]^G}$$

Sabemos que existe $x \in X$ tal que $m = m_x = I(\{x\})$, es decir que m es el ideal asociado a un punto x de la variedad, y de este hecho deducimos que:

$$f_i(x) - a_i = 0 \qquad \forall i = 1..n$$

y esto prueba que $Y = \phi(X)$. □

Hemos probado que la variedad afín dada por $\phi(X) = Y$ es isomorfa a $SpmK[X]^G$, y la denotaremos por $X//G$. Al morfismo sobreyectivo determinado por:

$$\phi : X \longrightarrow X//G$$

lo llamaremos morfismo cociente.

Proposición 3.2.2. El morfismo cociente $\phi : X \longrightarrow X//G$ es un epimorfismo de variedades afines, y determina una correspondencia entre puntos de $X//G$ y clases de equivalencia de órbitas.

Demostración. Para demostrar este resultado sólo falta probar que ϕ es un morfismo de variedades algebraicas afines. Para ello es suficiente probar que el morfismo determinado por la composición:

$$\kappa : X \xrightarrow{\phi} X//G \xrightarrow{\cong} SpmK[X]^G$$

es morfismo de variedades afines. Para esto veamos que este morfismo está inducido por la inclusión de K-álgebras:

$$K[X]^G \hookrightarrow K[X]$$

El morfismo ϕ induce el morfismo de K-álgebras:

$$\begin{aligned} K[Y] = K[x_1, .., x_n]/J &\longrightarrow K[X] \\ \overline{x_i} &\longmapsto \overline{x_i} \circ \phi = f_i \end{aligned}$$

Además, recordando lo desarrollado en el principio de esta sección, el isomorfismo de variedades $K[Y] \cong SpmK[X]^G$ está inducido por el isomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned} \omega : K[x_1, .., x_n]/J &\longrightarrow K[X]^G \\ \overline{x}_i &\longmapsto f_i \end{aligned}$$

Luego, κ coincide con la inclusión de álgebras deseada. $\square$

Proposición 3.2.3. Si $\phi : X \longrightarrow X//G$ es el morfismo cociente asociado a la acción de un grupo linealmente reductivo sobre una variedad afín, y $Z \subseteq X$ es un subconjunto cerrado y G-estable, entonces $\phi(Z) \subset X//G$ también resulta cerrado.

Demostración. Llamemos ϕ_X y ϕ_Z a los morfismos cocientes inducidos por X y Z respectivamente, e I al ideal asociado Z. La K-álgebra asociada a la clausura de la imagen de Z por el morfismo ϕ_X, queda determinada por la imagen de la composición de los morfismos:

$$K[X]^G \longrightarrow K[X] \twoheadrightarrow K[X]/K[X]/I,$$

y por lo tanto:

$$(1) \qquad K[\overline{\phi_X(Z)}] \simeq K[X]^G/(K[X]^G \cap I)$$

Ya hemos probado que la K-álgebra asociada a $Z//G = \phi_Z(Z)$ es:

$$(2) \qquad K[Z//G] \simeq K[Z]^G = (K[X]/I)^G.$$

Nuestra intención es probar que las K-álgebras expuestas en (1) y (2) son isomorfas. Como el ideal I es invariante por la acción de G, el morfismo $K[X] \longrightarrow K[X]/I$ resulta G-equivariante y sobreyectivo, por lo tanto, el morfismo inducido sobre los invariantes:

$$K[X]^G \longrightarrow (K[X]/I)^G,$$

también es sobreyectivo y su núcleo es exactamente $K[X]^G \cap I$, luego (1) $\simeq$ (2). De este modo deducimos que:

$$(3) \qquad Z//G \simeq \overline{\phi_X(Z)}$$

Recordemos que los morfismos cocientes

$$\phi_X : X \longrightarrow X//G \quad \text{y} \quad \phi_Z : Z \longrightarrow Z//G$$

estan inducidos por la inclusiones

$$i_x : K[X]^G \longrightarrow K[X] \quad \text{y} \quad i_Z : (K[X]/I)^G \longrightarrow K[X]/I,$$

y luego la restricción $\phi_{X|_Z} : Z \longrightarrow X//G$ esta inducida por el morfismo de álgebras:

$$K[X]^G \longrightarrow K[X]/I$$

A partir de la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} K[X]/I & K[X]^G \arrow[l] \arrow[d] \\ & (K[X]/I)^G \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

deducimos la conmutatividad de:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\phi_{X|_Z}"] \arrow[dr, "\phi_Z"'] & X//G \, , \\ & Z//G \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

donde f está inducido por el isomorfismo (3). Como ϕ_Z es sobreyectiva, a partir de (3), concluimos:

$$\phi_x(Z) = \overline{\phi_X(Z)}$$

$\square$

A partir de la proposición anterior puede deducirse la siguiente propiedad del morfismo cociente:

Corolario 3.2.4. Si $A \subset X//G$ es tal que $\phi^{-1}(A) \subset X$ resulta cerrado, entonces A es cerrado.

Demostración. Sea $A \subset X//G$ un conjunto con esa propiedad, entonces $\phi^{-1}(A)$ es un conjunto G-estable y cerrado. Por la proposición anterior sabemos que $\phi(\phi^{-1}(A)) = A$ (pues $\phi : X \longrightarrow X//G$ es sobreyectivo) y que, además, es cerrado. $\square$

Este resultado nos permite deducir que todo morfismo cociente es un submersión.

3.3. Estabilidad y su relación con el espacio de órbitas

Por lo expuesto en la sección anterior, el morfismo cociente $\phi : X \longrightarrow X//G$ es un morfismo de variedades afines que determina una correspondecia entre las clases de equivalencias de órbitas y los puntos de $X//G$. En virtud de que esa correspondencia sea entre órbitas distintas, y no entre clases de ellas, introduciremos el concepto de puntos estables:

Al igual que en las secciones anteriores, G denotará a un grupo linealmente reductivo, y X, una G-variedad afín.

Definición 3.3.1. Un punto $x \in X$ se dice estable si satisface:

(I) la órbita $G.x$ es un subconjunto cerrado de X.

(II) el estabilizador $S_x = \{g \in G : gx = x\}$ es un subgrupo finito.

Notaremos por X^s al conjunto de todos lo puntos estables de la variedad afín X.

Observación 3.3.2. Para cada $x \in X$ el morfismo:

$$\begin{aligned} \psi_x : G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto gx \end{aligned}$$

tiene como fibras subgrupos trasladados a partir del estabilizador $S_x \in G$. Luego, este morfismo tiene fibras finitas y determina un morfismo propio de variedades. Además, establece un biyección:

$$G/(Stab(x)) \longleftrightarrow G.x$$

Veamos a continuación un resultado importante que conecta la noción de estabilidad con el morfismo cociente asociado a la acción.

Proposición 3.3.3. Si consideramos el subconjunto de X dado por:

$$Z = \{x \in X : dim(Stab(x)) = \infty\},$$

entonces el conjunto de puntos estables resulta:

$$X^s = X - \phi^{-1}(\phi(Z))$$

.

Demostración. Supongamos que $\phi(x) \in \phi(Z)$ y veamos que x no es un punto estable. Si $x \in Z$, entonces es claro que su estabilizador no resulta finito, y luego no es estable. Si, por el contrario, $x \notin Z$, entonces existe un elemento $z \in Z$ tal que:

$$\phi(x) = \phi(z).$$

Como el estabilizador de z es un subgrupo finito y el de x no lo es, por la observación anterior, es inmediato que las órbitas $G.x$ y $G.z$ no coinciden. Por lo tanto, $\phi^{-1}(\phi(x))$ contiene al menos dos órbitas, y es claro que la asociada a z es de menor dimensión, con lo cual, a partir del corolario 3.1.4, $G.x$ no es cerrada.

Este argumento demuestra que: $\phi^{-1}(\phi(Z)) \subseteq X - X^s$, la cotención inversa se prueba con un argumento similar al anterior. $\square$

El siguiente coralario es inmediato a partir de la proposición anterior:

Corolario 3.3.4. Todos los puntos de la variedad X son estables si y solo si todos los puntos tienen estabilizador finito.

Hemos probado que el morfismo cociente $\phi : X \longrightarrow X//G$ establece una biyección entre los puntos de la variedad $X//G$ y las clases de equivalencia de órbitas.

Nuestro objetivo es probar que podemos definir un cociente afín sobre los puntos estables, $X^s//G$, que separa las órbitas de dichos puntos (en lugar de sus clases).

Proposición 3.3.5. El conjunto de puntos estables, $X^s \subseteq X$, y su imagen por el morfismo cociente, $\phi(X^s) \subseteq X//G$, son subconjuntos abiertos.

Demostración. Como ya sabemos, el morfismo cociente ϕ es una submersión (Ver 3.2.4), con lo cual bastará probar que el conjunto X^s es abierto en X. Consideremos el morfismo de variedades afines dado por:

$$\begin{aligned} \Psi : G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (x, g \cdot x) \end{aligned}$$

Luego, dado $x \in X$, su estabilizador resulta:

$$Stab(x) \simeq \Psi^{-1}((x, x)) = \{(g, y) : y = g \cdot x = x\}.$$

Aplicando el teorema de la dimensión de la fibra (ver el apéndice en A.5.8) deducimos que el conjunto $Z = \{x \in X : dim(Stab(x)) \geq 1\}$ es un subconjunto cerrado de X, de donde deducimos que

$$X^s = X - \phi^{-1}(\phi(Z)),$$

resulta abierto. $\square$

Teorema 3.3.6. Supongamos que $x \in X$ es un punto estable de la G-variedad afín X, entonces, para todo otro punto $y \in X - G.x$ existe una función polinomial invariante $f \in K[X]^G$ tal que:

$$f(x) \neq f(y)$$

.

Demostración. Sea $x \in X$ un punto estable y sea $y \in X$, tal que las órbitas $G.x$ y $G.y$ son equivalentes. Como $G.x$ es cerrada, a partir del corolorario 3.1.4, deducimos que $G.x \subset \overline{G.y}$. Como el estabilizador de x es finito, se sigue que:

$$dim(G.x) = dim(G) \geq dim(\overline{G.y}),$$

y por lo tanto, $G.x = G.y$. A partir de este hecho, las clases asociadas a puntos estables tienen una unica órbita, de donde el resultado es inmediato. $\square$

Corolario 3.3.7. La restricción del morfismo cociente al conjunto de puntos estables induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X^s \arrow[r] \arrow[d, "\phi|_{X^s}"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X^s//G \arrow[r] & X//G \end{tikzcd}$$

Además, determina una biyección entre los puntos de la variedad $X^s//G = \phi(X^s)$ y las G-órbitas de X^s.

3.4. Hipersuperficies proyectivas y Semiestabilidad

En la sección anterior hemos probado que el concepto de punto estable es el elemento clave para dar una estructura de variedad afín sobre el espacio de órbitas. Si bien este cociente afín funciona bien en muchos contextos, hay diversas generalizaciones de este concepto, que se enmarcan dentro del estudio de cocientes proyectivos, y que además son de gran utilidad para muchas aplicaciones. Si bien en el presente trabajo no abordaremos estas generalizaciones, si mostraremos uno de los ejemplos clásicos que motivan el estudio de estos cocientes más generales. Estudiaremos la construcción de cocientes y de espacios de Moduli sobre Hipersuperficies algebraicas en $\mathbb{P}^n$.

A lo largo de esta sección también discutiremos algunos conceptos que involucran estos nuevos cocientes, como el de cero formas o puntos inestables, y el concepto de punto semi-estable. Estos últimos cumplen el mismo rol que el de puntos estables dentro del caso afín. Si bien estas definiciones y construcciones serán explicitadas en el marco de hipersuperficies proyectivas, pueden ser generalizadas de forma natural a acciones de grupos linealmente reductivos sobre variedades afines.

En resumen, nuestra intención es estudiar un ejemplo clásico, que nos permita motivar una teoría de cocientes más general. Y mostrar como se relaciona esta generalización con conceptos más amplios de estabilidad.

Comenzaremos estudiando la acción clásica de $\mathbb{GL}_n$ sobre las formas homogéneas en n variables, que nos servirán para el estudio de este ejemplo motivador, y para dar nuevas definiciones.

3.4.1. Invariantes clásicos

Notaremos por $V_{n,d}$ al espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado d en $n+1$ variables. Cada elemento de dicho espacio puede ser notado:

$$(1) \qquad a(x_0,..,x_n) = \sum_{|I|} a_I x^I,$$

donde $I = (i_0, ..., i_n)$ denota un multiíndice y $|I| = \sum i_j$ su peso. Este espacio vectorial tiene dimensión $\binom{n+d}{d}$ y recibe la acción clásica del grupo linealemente reductivo $\mathbb{GL}_{n+1}$ dada por:

$$a \cdot G(x) = a(Gx).$$

Para describir la acción de este grupo sobre la K-álgebra $K[V_{n,d}] = K[\mathfrak{a}_I]_{|I|=d}$, pensaremos a las $\binom{n+d}{d}$ variables a_I como los coeficientes de una d-forma genérica (1).

Consideremos $G = (G_{ij}) \in \mathbb{GL}_{n+1}$ y apliquemos dicha transformación sobre $a \in K[a_I]$, de donde obtenemos:

$$(a \cdot G)(x) = a(Gx) = \sum_{|I|=d} a_I (\sum G_{0j}x_j)^{i_0} ... (\sum G_{nj}x_j)^{i_n} = \sum_{|I|=d} a_I(G) x^I.$$

Además, los coeficientes $a_I(G)$ pueden ser expresados por:

$$a_I(G) = \sum_{|J|=d} g_I^J \mathfrak{a}_I,$$

para ciertos polinomios $g_I^J \in K[G_{ij}]$.

Recordemos ahora la definición de invariante polinomial para este caso particular:

Definición 3.4.1. Sea $F \in K[a_I]$ un polinomio homogéneo de grado $e \in \mathbb{N}_0$. Decimos que F es un invariante clásico de las formas $V_{n,d}$ de grado e, si pertenece a $K[a_I]^{\mathbb{SL}_{n+1}}$, es decir, si:

$$F(a \cdot G) = F(a) \quad \forall G \in \mathbb{SL}_{n+1},$$

con la acción inducida de $\mathbb{SL}_{n+1}$ sobre $K[V_{n,d}]$.

Observación 3.4.2. También es usual definir a los invariantes clásicos sobre las formas homogéneas $V_{n,d}$, como polinomios homogéneos $F \in K[V_{n,d}]_e$ tales que:

$$F(a \cdot G) = det(G)^e F(a) \quad \forall G \in \mathbb{GL}_{n+1} \; \forall a \in V_{n,d}$$

.

Podemos relacionar a los invariantes clásicos de las formas homogéneas de un grado fijo con hipersuperficies invariantes en $\mathbb{P}V_{n,d}$. Esta es la conexión que anunciábamos en la introducción de la sección y que permite ver a los invariantes clásicos desde un punto de vista más geométrico.

Observemos que $\mathbb{P}V_{n,d}$ puede indetificarse con un subconjunto de todas las hipersuperficies de $\mathbb{P}^n$, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}V_{n,d} &\longrightarrow \{\text{Hipersuperficies de } \mathbb{P}^n\} \\ \overline{f} &\longmapsto \{f = 0\} \end{aligned}$$

Teorema 3.4.3. Si $F \in K[V_{n,d}]_e = K[a_I]_e$, es un polinomio homogéneo sobre el espacio de formas $V_{n,d}$, entonces son equivalentes:

- F es un invariantes clásico de grado e.
- La subvariedad $\{F(a) = 0\} \subseteq \mathbb{P}V_{n,d}$ es $\mathbb{GL}_{n+1}$-invariante.

Demostración. [MUK, Sec. 5.2 a]. □

Observación 3.4.4. Es importante aclarar que la subvariedad $\{F(a) = 0\}$, está pensada como una subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}V_{n,d}$, determinada por:

$$\{F(a) = 0\} = \{\overline{a} \in \mathbb{P}V_{n,d} : F(a) = 0\}.$$

A partir de este hecho, es importante no confundir la palabra subvariedad usada en el teorema, con la identificación natural de $\mathbb{P}V_{n,d}$ con ciertas hipersuperficies, que también son subvariedades.

Ya hemos definido el discriminante para el caso de formas binarias de grado homogéneo d, como el determinante de cierta matriz que involucraba los coeficientes de las derivadas $\frac{\partial a}{\partial x_0}$ y $\frac{\partial a}{\partial x_1}$. Aprovechando la identificación anterior con subvariedades $\mathbb{GL}_{n+1}$-invariantes, podemos generalizar la noción de discriminante, y así obtener un invariante clásico para cada $V_{n,d}$.

Denotaremos por $\mathbb{P}V_{n,d}^{sing} \subseteq \mathbb{P}V_{n,d}$ al subconjunto de todas las hipersuperficies singulares. Es posible demostrar que este subconjunto es cerrado, y satisface:

$$dim(\mathbb{P}V_{n,d}^{sing}) = dim(\mathbb{P}V_{n,d}) - 1,$$

además queda definido por una única ecuación homogénea:

$$D(a) = 0,$$

para cierto polinomio $D \in K[V_{n,d}]_e$.

La última afirmación se sigue del hecho de que la variedad proyectiva $\mathbb{P}^n$ es completa. Demostraciones de estos resultados pueden encontrarse en: [MUK, Sec. 5.2 a].

Definición 3.4.5. Al polinomio $D(a) \in K[V_{n,d}]$, que define la subvariedad cerrada $\mathbb{P}V_{n,d}^{sing}$, lo llamamos discriminante de las formas de grado d en $\mathbb{P}^n$.

Observación 3.4.6. Debido a que las hipersuperficies singulares en $\mathbb{P}V_{n,d}^{sing}$ son invariantes bajo la acción del grupo $\mathbb{GL}_{n+1}$, es claro que D resulta un polinomio invariante clásico en $K[V_{n,d}]$.

Referenciar el porqué coincide con la def clasica para formas binarias

3.4.2. El espacio de Moduli de hipersuperficies suaves proyectivas

Resumamos los elementos que hemos introducido en la subsección anterior. Establecimos una identificación natural entre el espacio proyectivo $\mathbb{P}V_{n,d}$ con hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$, y además vimos que existe una función polinomial $D \in K[V_{n,d}]$ que define la subvariedad cerrada $\mathbb{P}V_{n,d}^{sing}$. Es decir que las funciones homogéneas $\overline{F} \in \mathbb{P}V_{n,d}$ tales que:

$$D(F) = 0$$

son exactamente las que determinan hipersuperficies singulares:

$$\{\overline{F} = 0\} \in \mathbb{P}^n.$$

Considerando el polinomio $D \in K[V_{n,d}]$, podemos tomar el conjunto de ecuaciones homogéneas no singulares vistas como una subvariedad abierta de $V_{n,d}$, y la denotaremos por:

$$U_{n,d} = \{f \in V_{n,d} : D(f) \neq 0\} \subseteq V_{n,d}.$$

Esta subvariedad afín tiene como anillo coordenado a la K-álgebra:

$$K[U_{n,d}] = K[a_I, D(a)^{-1}].$$

Es posible demostrar que esta subvariedad abierta resulta estable por la acción de $\mathbb{GL}_{n+1}$:

Teorema 3.4.7. Para $d \geq 3$ todos los puntos de la variedad $U_{n,d}$ tiene estabilizador finito y resultan estables por la acción del grupo $\mathbb{GL}_{n+1}$.

Demostración. Consultar: [MUK, Sec. 5.2 b]. □

Observación 3.4.8. A partir del teorema anterior, podemos deducir que las órbitas de hipersuperficies suaves $U_{n,d}$ bajo la acción de $\mathbb{GL}_{n+1}$ pueden ser parametrizadas por una variedad afín $U_{n,d}//\mathbb{GL}_{n+1}$, a partir del morfismo cociente conciente:

$$\phi : U_{n,d} \longrightarrow U_{n,d}//\mathbb{GL}_{n+1}.$$

Esto es exactamente un ejemplo del concepto de Espacio de Moduli, pues es una variedad afín que parametriza una clase de objetos geométricos. Es por eso que a este variedad afín cociente $U_{n,d}//\mathbb{GL}_{n+1}$ se la suele denominar espacio de Moduli de hipersuperficies suaves de grado d en $\mathbb{P}^n$.

Ejemplo 3.4.9. En capítulos anteriores ya hemos estudiado el ejemplo de formas binarias cuárticas bajo la acción del grupo $\mathbb{SL}_{n+1}$ (Recordar 2.3.5).

Con la notación introducida en estas secciones, estamos estudiando la acción de ese grupo sobre el espacio $V_{1,4}$. Recordemos que ya hemos probado que el anillo de invariantes de esta acción está dado por:

$$K[V_{1,4}]^{SL_2} \simeq K[a_0, ..., a_4]^{SL_2} = K[g_2(a), g_3(a)], \text{ donde}$$

$$g_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^s; \qquad g_3 = a_0a_2a_4 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3$$

También es posible verificar que el discriminante queda determinado por:

$$D(a) = g_2(a)^3 - 27g_3(a)^2.$$

Además, una forma cuártica general:

$$a(x, y) = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4$$

es no singular si y sólo si no tiene factores lineales repetidos. Es decir, en virtud de que en el caso de formas binarias conocemos fórmulas explícitas para el discriminante, es sencillo verificar que su discriminante no se anula si y sólo si al escrbir a la forma $a \in V_{1,4}$ como:

$$a(x, y) = \prod_{i=1}^{4}(b_ix + c_iy)$$

estos factores lineales no se repiten. Recordando las expresiones de los anillos invariantes:

$$K[a_0, .., a_4]^{SL_2} = K[g_2(a), g_3(a)] \qquad K[U_{1,4}] = K[a_0, .., a_4, D(a)^{-1}]$$

es sencillo verificar que la K-álgebra $K[U_{1,4}]^{GL_2}$, asociada al cociente $\phi : U_{1,4} \longrightarrow U_{1,4}//GL_2$, queda determinada por:

$$K[U_{1,4}]^{GL_2} = K[a_0, .., a_4, D(a)^{-1}]^{GL_2} = K[\frac{g_2(a)^3}{D(a)}].$$

Como el cociente ϕ queda determinado por la inclusión:

$$K[U_{1,4}]^{GL_2} = K[\frac{g_2(a)^3}{D(a)}] \hookrightarrow K[U_{1,4}] = K[a_0, .., a_4, D(a)^{-1}],$$

entonces:

$$\begin{aligned} \phi : U_{1,4} &\longrightarrow U_{1,4}//GL_2 \\ a &\longmapsto g_2(a)^3/D(a) \end{aligned}$$

Lo cual nos permite identificar al cociente $U_{1,4}//GL_2$, con el espacio afín $\mathbb{A}^1$.

Conexión con espacios cocientes proyectivos: Nuestro siguiente objetivo es construir una variedad completa que compactifique al espacio de Moduli afín dado por $U_{n,d}//\mathbb{GL}_{n+1}$. Daremos los resultados principales asociados a este hecho, pues resulta un ejemplo típico y motivacional de la construcción de cocientes proyectivos.

Consideremos el anillo clásico de invariantes:

$$R_{n,d} = K[V_{n,d}]^{\mathbb{SL}_{n+1}},$$

que admite la graduación por :

$$R_{n,d} = \bigoplus_{e=0}^{\infty} K[a_I]_e^{\mathbb{SL}_{n+1}}$$

Esto nos permite tomar la variedad proyectiva asociada: $Proy(R_{n,d})$, (ver la definición en el apendice: A.6). Sabemos que esta variedad proyectiva admite un cubrimiento por espacios afines abiertos:

$$\{SpmR_{F,0} : \ F \in R_{n,d_e} \text{ para algún } e \in \mathbb{N}_0\}.$$

Como el anillo $R_{n,d}$ es finitamente generado, el cubrimiento anterior admite un subcubrimiento finito:

$$\{SpmR_{F_1,0}, ..., SpmR_{F_n,0}\},$$

donde $F_1, .., F_n$ son invariantes clásicos que generan el anillo de invariantes $R_{n,d}$. Recordemos que la subálgebra $R_{F,0}$ esta definida por:

$$R_{F,0} = \{\frac{h}{F^n} : h \in R_{n,d},\ deg(h) = n.deg(F)\} \cup \{0\}.$$

Luego, es sencillo verificar que:

$$R_{F,0} = K[a_I, 1/F]^{\mathbb{GL}_{n+1}},$$

pues si $h \in K[a_I]$ y $A \in \mathbb{GL}_{n+1}$, entonces la condición:

$$\frac{h(A \cdot a_I)}{F(A \cdot a_I)} = \frac{h(a_I)}{F(a_I)}$$

es equivalente a:

$$h(A \cdot a_I) = det(A)^{deg(F)} h(a_I).$$

Esto nos permite deducir:

Proposición 3.4.10. Para cada invariante clásico $F \in K[V_{n,d}]^{\mathbb{SL}_{n+1}}$, la variedad afín:

$$SpmK[a_I, F(a_I)^{-1}]^{\mathbb{GL}_{n+1}}$$

está contenida en la variedad proyectiva $ProyR_{n,d}$, como una subvariedad abierta.

Definición 3.4.11. A la variedad $ProyR_{n,d}$, la llamaremos cociente proyectivo de la acción clásica de $\mathbb{SL}_{n+1}$ sobre el espacio de formas $V_{n,d}$.

Observación 3.4.12. En resumen, hemos construido el cociente proyectivo $ProyR_{n,d}$ pegando los cocientes afines de la acción de $\mathbb{GL}_{n+1}$ sobre las localizaciones $V_{n,d} - \{F_i = 0\}$, donde $F_1, ..F_n$ son generadores del anillo de invariantes clásicos.

Esta construcción puede generalizarse y motiva la definición de cocientes proyectivos. En este trabajo no daremos la presentación formal de esos cocientes más generales, sin embargo, consideramos que el ejemplo dado es lo suficientemente ilustrativo para reflejar esa idea.

Tomemos $F = D \in K[V_{n,d}]$, el discriminante de las formas de grado d, y recordemos que el espacio de las hipersuperficies suaves en $\mathbb{P}^N$ pueden interpretarse como la subvariedad afín abierta dada por:

$$U_{n,d} = \{f \in Vn, d : D(f) \neq 0\}.$$

Luego, a partir de la proposición 3.4.10, podemos deducir:

Proposición 3.4.13. Para $d \geq 3$, el espacio de Moduli $U_{n,d}//\mathbb{GL}_{n+1}$, de hipersuperficies suaves en $\mathbb{P}^n$, está contenido en $ProyR_{n,d}$ como un subconjunto abierto.

3.4.3. Cero formas y Semiestabilidad

A continuación introduciremos el concepto de semiestabilidad, siempre dentro del ejemplo de hipersuperficies de $\mathbb{P}^n$, sobre el que venimos trabajando. También mostraremos su conexión con el cociente proyectivo construído en la subsección anterior.

Definición 3.4.14. Diremos que una forma $a \in V_{n,d} = K[x_1, \cdots, x_n]_d$, es una cero forma si: $F(a) = 0$, para todo invariante clásico no constante $F \in K[V_{n,d}]^{\mathbb{SL}_{n+1}}$. Según la terminología de Mumford, a estos elementos también se los suele llamar inestables.

En un contexto general, si G es un grupo linealmente reductivo actuando algebraicamente sobre una variedad afín X, un elemento $x \in X$ es inestable si:

$$F(x) = 0 \qquad \forall F \in (K[X]^G - K^*)$$

Definición 3.4.15. Todo elemento $a \in V_{n,d}$ que no sea inestable, se dirá semiestable.

Recordemos que estos conceptos pueden ser generalizados de maner natural a acciones de grupos linealmente reductivos sobre variedades afines. En la siguiente sección abordaremos un criterio para determinar cuando un punto resulta estable o semiestable, dentro de este contexto general.

Además la definición anterior es el concepto clave que nos permitirá ver a la variedad proyectiva $ProyR_{n,d}$ como un cociente del espacio $V_{n,d}$, por la acción del grupo $\mathbb{GL}_{n+1}$. A continuación una serie de resultados que nos permitirán ver esa conexión.

Proposición 3.4.16. Una forma $a \in V_{n,d}$ es una cero forma si y solo si $0 \in \overline{\mathbb{SL}_{n+1} \cdot a}$. Es decir, si la clausura de su $\mathbb{SL}_{n+1}$-órbita contiene al origen.

Demostración. Sea $F \in R_{n,d} = K[a_I]^{\mathbb{SL}_{n+1}}$, un invariante clásico arbitrario. Consideremos su descomposición en invariantes clásicos homogéneos:

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_e,$$

donde $F_j \in K[a_I]_j^{\mathbb{SL}_{n+1}}$. Luego $a \in V_{n,d}$ es una cero forma si y solo si

$$F_i(a) = 0 \quad \forall i = 1...e.$$

Por lo tanto a resulta una cero forma si y solo si $F(a) = F(0) \quad \forall F \in R_{n,d}$. Además, esto último es equivalente a que: $0 \in \overline{\mathbb{SL}_{n+1} \cdot a}$, por lo cual queda demostrado nuestro resultado. □

Corolario 3.4.17. Si $a \in V_{n,d}$ es estable entonces en particular resulta semiestable.

Demostración. Si a es una cero forma (inestable) en el espacio $V_{n,d} - \{0\}$, entonces su $\mathbb{SL}_{n+1}$-órbita no es cerrada pues:

$$0 \in \overline{\mathbb{SL}_{n+1} \cdot a}$$

por lo tanto, todo elemento estable es en particular no inestable, que por definición implica que a es semiestable. □

Observación 3.4.18. Si consideramos dos formas a y a' en $V_{n,d}$, que pertenecen a la misma $\mathbb{SL}_{n+1}$-órbita, entonces la estabilidad de una es equivalente a la estabilidad de la otra. De manera similar, como cada invariante clásico $F \in R_{n,d}$ es constante en las $\mathbb{SL}_{n+1}$-órbitas, que dicho invariante no se anule sobre una forma es independiente de la acción de $\mathbb{SL}_{n+1}$, por lo tanto, si:

$$a \in \mathbb{SL}_{n+1} \cdot a',$$

entonces a es una cero forma si y solo si a' lo es.

Observación 3.4.19. Para todo invariante clasico $F \in K[V_{n,d}]_e$ y para toda transformación $G \in \mathbb{GL}_{n+1}$:

$$F(a \cdot G) = det(G)^e F(a),$$

Con argumentos similares a los utilizados en la observación anterior, es posible demostrar que si $a, b \in V_{n,d}$, pertenecen a la misma $\mathbb{GL}_{n+1}$-órbita, entonces a es una cero forma si y solo si b lo es.

Ejemplo 3.4.20. Analicemos cuáles son las cero formas en el ejemplo $V_{1,4}$, con el cual ya venimos trabajando. Veamos que $a \in V_{1,4}$ es una cero forma si y solo si la hipersuperficie $a(x, y) = 0$, tiene una raiz de multiplicidad ≥ 3. Primero recordemos que:

$$K[V_{1,4}]^{SL_2} = K[g_2, g_3]$$

Si dicha ecuación tiene una raiz con esa multiplicidad, entonces, bajo la acción de GL_2 es equivalente a $x^4 = 0$ o a $x^3y = 0$. En ambos casos $g_2(a) = g_3(a) = 0$, de donde concluimos que resulta una cero forma.

Si $a \in V_{1,4}$ es una cero forma, entonces en particular: $D(a) = 0$, y deducimos que la ecuación $a(x, y) = 0$ tiene una raiz múltiple. Bajo la acción de GL_2, podemos suponer que la raiz es del tipo $(0, y_0)$, y por lo tanto:

$$a(x, y) = x^2(a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2)$$

Como sabemos que $g_2(a) = 0$, y recordando que:

$$g_2(a) = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2,$$

deducimos que: $a_2 = 0$ y por lo tanto dicha raíz tiene multiplidad ≥ 3.

Semiestabilidad y el cociente proyectivo: Nuestra intención es mostrar cómo la variedad proyectiva $ProyR_{n,d}$, es en particular un cociente del espacio $V_{n,d}$, por el grupo $\mathbb{GL}_{n+1}$ y cómo se conceta esto con el concepto de semiestabilidad.

Por su definición, es claro que si $F_1, .., F_r$ generan el anillo de invariantes $K[V_{n,d}]^{\mathbb{SL}_{n+1}}$, entonces el conjunto de puntos semiestables, al que notaremos por: $V^{ss}_{n,d}$, resulta la unión de los abiertos afines:

$$V^{ss}_{n,d} = \{a \in V_{n,d} : F_1(a) \neq 0\} \cup \cdots \cup \{a \in V_{n,d} : F_r(a) \neq 0\}$$

Notaremos a estos abiertos por : $H_j = \{a \in V_{n,d} : F_j(a) \neq 0\}$. A continuación consideremos los cocientes afines determinados por:

$$\phi_j : \{a \in V_{n,d} : F_j(a) \neq 0\} \longrightarrow U_j = Spm\, K[a_I, F_j(a)^{-1}]^{\mathbb{GL}_{n+1}}$$

y además recordemos que:

$$K[a_I, F_j(a)^{-1}]^{\mathbb{GL}_{n+1}} = K[a_I]^{\mathbb{SL}_{n+1}}_{F_j,0} = R_{F_j,0}.$$

También tomemos el morfismo cociente determinado por los invariantes clásicos:

$$\phi : V_{n,d} \longrightarrow V_{n,d}//\mathbb{SL}_{n+1} = Spm\, K[a_I]^{\mathbb{SL}_{n+1}},$$

y su restricción a los abiertos H_j:

$$\phi|_{H_j} : H_j \longrightarrow Spm\, K[H_j]^{\mathbb{SL}_{n+1}} = Spm\, K[a_I, F_j(a)^{-1}]^{\mathbb{SL}_{n+1}}.$$

La inclusión trivial de álgebras:

$$K[a_I]^{\mathbb{SL}_{n+1}}_{F_j,0} \hookrightarrow K[a_I, F_j(a)^{-1}]^{\mathbb{SL}_{n+1}}$$

determina el siguiente diagrama conmutativo de álgebras:

$$\begin{tikzcd}
K[a_I, F_j(a)^{-1}]^{\mathbb{SL}_{n+1}} \arrow[d] & K[a_I]^{\mathbb{SL}_{n+1}}_{F_j,0} \arrow[l] \arrow[dl] \\
K[a_I, F_j^{-1}] &
\end{tikzcd} .$$

Transladando este diagrama a la categoría de variedades afines, nos muestra que:

$$\begin{tikzcd} \phi(H_j) \arrow[r] & U_j = SpmR_{F_j,0} . \\ H_j \arrow[u, "\phi|_{H_j}"] \arrow[ur, "\phi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir, esto muestra que los ϕ_j se factorizan por las restricciones del morfismo ϕ a cada abierto H_j. También recordemos que la variedad $ProyR_{n,d}$, admite un cubrimiento por los abiertos

$$U_j = Spm\, R_{F_j,0} = Spm\, K[a_I, F_j(a)^{-1}]^{\mathbb{GL}_{n+1}}.$$

De este modo, pegando los morfismos ϕ_j, obtenemos un morfismo sobreyectivo:

$$\Psi : V_{n,d}^{ss} \longrightarrow Proy\, R_{n,d},$$

al que llamaremos morfismo cociente proyectivo. A la variedad:

$$V_{n,d}^{ss}//\mathbb{GL}_{n+1} := Proy\, R_{n,d}$$

la denominaremos espacio de Moduli de hipersuperficies semiestables de grado d en $\mathbb{P}^n$.

Con esto concluimos esta construcción sobre las hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$. Estos métodos son la base de la construcción de cocientes proyectivos asociados a las acciones de grupos algebraicos sobre variedades afines. Y, como ya hemos mencionado, sirve de motivación para comprender la importancia del concepto de semiestabilidad. Esta idea de "pegar" cocientes afines para construir una variedad proyectiva que compactifique el espacio de Moduli que determina un cociente afín estable es la idea principal para construir cocientes proyectivos, y funciona bien para muchos ejemplos elemetales de la teoría. Sin embargo, este método admite una generalización mucho más profunda y clásica:

Si consideramos $f_0, f_1, ..., f_n \in K[X]$, no necesariamente G-invariantes, pero tales que sus cocientes $f_i/f_j \in K(X)$ sean funciones racionales G-invariantes, entonces podemos considerar el morfismo racional al espacio proyectivo:

$$\begin{aligned} \Psi : X &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ x &\longmapsto (f_0(x) : f_1(x) : \cdots : f_n(x)), \end{aligned}$$

y tomar al "cociente proyectivo" como la imagen de dicho morfismo. A este cociente se lo suele denominar como el GIT(Geometric invariant theory)-quotient. Además, es posible recuperar el cociente afín $X//G$, tomando $f_0 = 1$, lo cual nos muestra que este nuevo concepto generaliza las estrucuturas que hemos definido a lo largo de este capítulo. Estos métodos y algunas generalizaciones están discutidos en: [MUK, Cáp. 6].

3.5. El Criterio Numérico de Hilbert-Mumford

Ya hemos introducido las nociones de estabilidad y de semiestabilidad, destacando su importancia para la construcción de cocientes afines y proyectivos. Ahora nos concentraremos en uno de los resultados centrales que se utilizan para determinar cuándo un punto resulta (semi)estable, y que es el criterio numérico de Hilbert-Munford.

Si bien este criterio puede ser enunciado de diversas formas y en varios contextos, daremos estos resultados para el caso en que $X = V$ una representación racional finita del grupo linealemente reductivo G. Recordemos que si X es una G-variedad afín, entonces existe una representación finita V y una inmersión cerrada:

$$\rho : X \longrightarrow V,$$

que además es G equivariante, (recordar: 1.2.25). Por lo tanto, como $\rho : X \longrightarrow \rho(X)$ induce un isomorfismo de variedades afines, es claro que para todo $x \in X$:

$$G \cdot x \simeq G \cdot (\rho x) \qquad Stab(x) = Stab(\rho x).$$

Por lo tanto, por lo menos en forma teórica, podemos reducir el estudio de estabilidad de puntos de una G-variedad afín al estudio respectivo sobre una representación racional finita.

Además cabe destacar que, más allá de que muchos de estos resultados vayan a ser expuestos sin su demostración explícita, es importante dar un panorama de estas ideas y criterios, pués conforman una solución moderna y muy elegante al dificultoso problema de estabilidad. Muchas de estas técnicas fueron herramientas importantes en muchos problemas no triviales que derivan del estudio de hipersuperficies suaves en $\mathbb{P}^n$ y otros ejemplos clásicos.

El trabajo realizado sobre estos conceptos es muy amplio, nuestra idea consta de exponer un breve resumen de las ideas principales y sus conexiones con los problemas ya expuestos, comenzando por tratar de entender su funcionamiento para ejemplos particulares.

3.5.1. El caso del grupo multiplicativo

Comenzaremos estudiando los resultados para el grupo multiplicativo $G = G_m$. Si V es una representación racional finita, entonces resulta diagonalizable, es decir que existe una base $B = \{v_1, .., v_n\}$ de V sobre la cual un elemento $t \in T$ actúa como:

$$t \cdot v_i = t^{m_i} v_i,$$

para ciertos pesos $m_i \in \mathbb{Z}$. Este hecho ya lo hemos utilizado con más generalidad en la sección dedicada a la fórmula de la dimensión para SL_2.

Si $x = (x_1, .., x_n) \in V$ está representado en esa base fijada B, entonces diremos que $w_i \in \mathbb{Z}$ es un peso asociado a x, si $x_i \neq 0$. Denotaremos por Z_x al conjunto de pesos asociados a dicho elemento. A partir de este conjunto asociado, podemos enunciar una versión particular del criterio de Hilbert Mumford, a través del siguiente teorema:

Teorema 3.5.1. Sea V una representación racional finita del grupo G_m y sea $x \in V$, entonces:

1. x es estable si y solo si Z_x contiene tanto enteros positivos como negativos.

2. x es inestable si y solo si Z_x contiene solo enteros negativos o solo enteros positivos.

A continuación veremos algunas defineiones, que nos permitirán, más adelante, ver una demostración de este teorema y conectar este resultado particular con la versión general del criterio de Hilbert-Mumford.

Bajo las mismas hipótesis que en el teorema anterior, consideremos un elemento $x \in V$ (o escrito en base B, $x = (x_1, ., v_n)$), y el morfismo determinado por:

$$\begin{aligned} \Psi : G_m &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto tx = (tx_1, .., tx_n) \end{aligned}$$

El espacio V puede ser embebido dentro del espacio proyectivo compacto $\mathbb{P}(V \times K) \simeq \mathbb{P}^n$, mediante:

$$\begin{aligned} V &\hookrightarrow \mathbb{P}(V \times K) \\ (x_1, .., x_n) &\longmapsto (x_1 : \cdots : x_n : 1) \end{aligned}$$

Esto nos permite pensar al morfismo Ψ con imagen en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V \times K)$, es decir:

$$(I) \qquad \Psi(t) = (t^{m_1}x_1 : \cdots : t^{m_n}x_n : 1) = (t^{m_1-m}x_1 : \cdots : t^{m_n-m}x_n : t^{-m}),$$

$$\text{donde } m = min\{0\} \cup \{m_i : xi \neq 0\} = min\{0\} \cup Z_x.$$

Observemos que debido a que $-m \geq 0$, entonces podemos extender al morfismo Ψ a $\mathbb{A}^1$, simplemente evaluando la expresión (I), en $t = 0$. Esto nos permite definir al límite de Ψ en ese punto:

- En el caso de que $\Psi(0) \in V$ (es decir que $m = 0$), diremos que: $\lim_{t\to 0} t \cdot x := \Psi(0)$.
- En caso contrario, diremos que $\lim_{t\to 0} t \cdot x$ no existe.

El hecho de poder embeber a la variedad afín V en el espacio $\mathbb{P}^n$, nos permitió poder estudiar el limíte topologico del morfismo Ψ en el punto de acumulación correspondiente al cero. Más adelante veremos que esta definición esta intimamente relacionada con el estudio de estabilidad sobre los puntos de V.

De forma totalmente análoga, y considerando:

$$M = max\{0\} \cup Z_x,$$

luego podemos definir al morfismo Ψ como:

$$(II) \qquad \Psi(t) = (t^{m_1}x_1 : \cdots : t^{m_n}x_n : 1) = (t^{m_1-M}x_1 : \cdots : t^{m_n-M}x_n : t^{-M}).$$

Y así, tomando límite cuando t tiende a infinito en la expresión (II), podemos definir también:

$$\lim_{t\to\infty} t \cdot x.$$

En general, si $\chi : G_m \longrightarrow G_m$ es un caracter del grupo multimplicativo, entoces podemos definir de forma análoga para cada $x \in V$ a:

$$\lim_{t\to 0} \chi(t) \cdot x.$$

Además, es sabido que los caracteres de G_m están en correspondencia con el grupo aditivo $\mathbb{Z}$, donde cada $m \in \mathbb{Z}$ se identifica con el caracter:

$$\chi_n(t) = t^n.$$

De este modo, obeservemos que el teorema 3.5.1 puede ser expuesto como:

Teorema 3.5.2. Sea V una representación racional finita del grupo G_m y sea $x \in V$ entonces:

1. x es estable si y solo, para todo caracter $\chi : G_m \longrightarrow G_m$, el $\lim_{t\to 0} \chi(t)x$ no existe.
2. x es inestable si y solo si, existe algún caracter $\chi : G_m \longrightarrow G_m$, tal que el $\lim_{t\to 0} \chi(t)x$ se anula.

Observación 3.5.3. En el teorema anterior, basta estudiar las condiciones que establecen todos los caracteres sólo para el caso de Id y $-Id$. Esto se corresponde con el estudio de los limites:

$$\lim_{t\to 0} t \cdot x \quad y \quad \lim_{t\to \infty} t \cdot x$$

Ya hemos introducido toda la notación necesaria para dar una demostración de los teoremas análogos 3.5.1 y 3.5.2, que detallaremos a continuación:

Demostración. Nuevamente consideremos al espacio V embebido en $\mathbb{P}(V \times K)$ y supongamos que el elemento $x \in V$ tiene sus coordenadas en la base B no nulas, de lo contrario podemos realizar el mismo argumento, pero para un subespacio de V.

En la definición de limíte que ya hemos dado, trabajamos con ciertos elementos m y M, en este caso trabajaremos con elementos sutilmente diferentes, pero los llamaremos del mismo modo. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar m y M tales que:

$$m = w_1 \leq w_2 \leq ... \leq w_n = M$$

Además existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que:

$$m = w_1 = w_2 = \cdots = w_r < w_{r+1} < \cdots < w_s = w_{s+1} = w_{s+2} = \cdots = w_n = M.$$

A continuación estudiemos los limítes en $t \to 0$ y en $t \to \infty$:

$$P = \lim_{t\to 0} t \cdot x =$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0}(x_1 : \cdots : x_r : t^{w_{r+1}-m}x_{r+1} : \cdots : t^{w_n - m}x_n : t^{-m}) = (x_1 : \cdots : x_r : 0.. : 0) & \text{si } m < 0 \\ \lim\limits_{t\to 0}(x_1 : \cdots : x_r : t^{w_{r+1}}x_{r+1} : \cdots : t^{w_n}x_n : 1) = (x_1 : \cdots : x_r : 0 : \cdots : 1) & \text{si } m = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0}(t^{w_1}x_1 : \cdots : t^{w_r}x_r : t^{w_{r+1}}x_{r+1} : \cdots : t^{w_n}x_n : 1) = (0 : \cdots : 0 : 0 : \cdots : 1) & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

$$P = \lim_{t\to\infty} t \cdot x =$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} (t^{w_1 - M}x_1 : .. : t^{w_{s-1}-M}x_{s-1} : x_s : .. : x_n : t^{-M}) = (0 : .. : 0 : x_s : x_n : 0) & \text{si } M > 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} (t^{w_1}x_1 : .. : t^{w_{s-1}}x_{s-1} : x_s : .. : x_n : 1) = (0 : .. : 0 : x_s.. : x_n : 1) & \text{si } M = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} (t^{w_1}x_1 : .. : t^{w_{s-1}}x_{s-1} : t^{w_s}x_s : .. : t^{w_n}x_n : 1) = (0 : .. : 0 : 1) & \text{si } M < 0 \end{cases}$$

Sea $Y = \overline{G_m \cdot x}$, la clausura de la órbita del punto x, dentro del espacio $\mathbb{P}(V \times K)$. Entonces:

$$Y = G_m \cdot x \bigcup_D \{p, q\}.$$

Observemos que a menos que la acción del grupo G_m sea trivial (sobre el punto), el estabilizador:

$$Stab(x) = \{t : t^{w_i} = 1 \ \forall w_i \in Z_x\},$$

siempre resulta un subgrupo finito.

Si $p, q \notin V$ (es decir que el límite no existe), entonces $G_m \cdot x = X \cap V$, y por lo tanto la órbita de x resulta cerrada, y dicho punto estable. Además, esto ocurre si y solo si $m < 0$ y $M > 0$.

De forma inversa, si el punto x es estable, entonces el estabilizador es finito y por lo tanto m y M resultan no simultáneamente nulos. Como además $G_m \cdot x$ es cerrado en V, deducimos que $p, q \notin V$, , y que $m < 0$ y $M > 0$. Así queda demostrada la primera de las equivalencias propuestas.

Veamos como quedan caracterizados los puntos inestables bajo la acción de G_m. Extendiendo el resultado 3.4.16, para puntos inestables en general, deducimos que $x \in V$ es inestable si y sólo si:

$$0 \in \overline{G_m \cdot x}.$$

Además, esto ocurre si y sólo si p o q coinciden con $(0 : ... : 0 : 1)$, lo cual es equivalente a que $m > 0$ o a que $M < 0$. En conclusión, el punto x es inestable si y sólo si Z_x contiene solo elementos positivos o solo elementos negativos, que es equivalente a que alguno de los límites:

$$\lim_{t\to 0} t \cdot x \quad o \quad \lim_{t\to\infty} t \cdot x$$

sea nulo.

De este modo quedan demostrados los dos teoremas propuestos, que corresponden al ya mencionado criterio de Hilbert Mumford, para el caso particular del grupo multiplicativo G_m. □

Ejemplo 3.5.4. Supongamos que G_m actúa sobre un espacio vectorial V de dimensión 3, mediante la acción diagonalizada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-3} \end{pmatrix}$$

Entonces, si identificamos a la K-álgebra asociada al espacio V, con $K[x_1, x_2, x_3]$, entonces:

$$V^s = V - (V(x_1) \cup V(x_3)) \quad \text{y} \quad V^{ss} = V - (V(x_1, x_2) \cup V(x_1, x_3))$$

3.5.2. El caso general y algunos ejemplos

Comencemos recordando el concepto en general de caracter asociado a un grupo lineal general G.

Definición 3.5.5. Sea G un grupo linealmente reductivo. A todo morfismo de grupos algebraicos $\chi : G \longrightarrow G_m$, lo denominaremos como carater asociado al grupo G. Y notaremos por $\chi(G)$ al conjunto de todos los caracteres asociados.

Ahora definamos un concepto dual al de caracteres, que nos permitirá dar el enunciado general del criterio, reduciendo el estudio de estabilidad de puntos en general al caso del grupo multiplicativos G_m:

Definición 3.5.6. A un morfismo de grupos algebraicos $\rho : G_m \longrightarrow G$ lo denominaremos como subgrupo de 1-parámetro. Y notaremos como $\rho(G)$ al conjunto compuesto por dichos elementos.

Observación 3.5.7. Observemos que para el caso del grupo miltiplicativo G_m, los conceptos de caracter y de subgrupo de 1-parámetro coinciden.

A continuación enunciaremos, aunque sin demostración, el resultado general del criterio ya mencionado para grupos linealmente reductivos:

Teorema 3.5.8. Sea G un grupo linealmente reductivo, actuando sobre una representación racional finita V, entonces los puntos estables y semiestables quedan caracterizados por:

- Un punto $x \in V$ resulta estable si y sólo si para todo subgrupo de 1-parámetro $\rho \in \rho(G)$ el punto resulta estable bajo la acción de G_m inducida por dicho elemento, es decir si para cada $\rho \in \rho(G)$:
$$\nexists \lim_{t \to 0} \rho(t) \cdot x.$$
- Un punto $x \in V$ resulta semiestable si y sólo si para todo subgrupo de 1-parámetro $\rho \in \rho(G)$ el punto resulta semiestable bajo la acción de G_m inducida por dicho elemento, es decir, si para cada $\rho \in \rho(G)$ el límite:
$$\lim_{t \to 0} \rho(t) \cdot x \neq 0.$$

Para ampliar estos resultados más generales y sus demostraciones consultar: [GIT, Cáp. 2].

Para concluir esta sección dedicada a este criterio, veamos algunos ejemplos clásicos en donde puede aplicarse. Comencemos por unos de los ejemplos que más hemos estudiado a lo largo del trabajo y que consiste en las formas binarias homogéneas de un grado fijo.

Ejemplo 3.5.9. Consideremos $V = K[x,y]_n$, el espacio de formas binarias homogéneas de grado n, con la acción clásica de SL_2. Notaremos a una forma genérica de dicho espacio como:

$$f(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + ... + a_ny^n.$$

Todo subgrupo de 1-parámetro $\rho : G_m \longrightarrow SL_2$, a menos de conjugación resulta de la forma:

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Para una demostración de este hecho consultar: [MUK, Sec. 7.1 a, Cáp.7]. Actuando por dicha matriz sobre una forma genérica se obtiene:

$$a_0t^nx^n + a_1t^{n-2}x^{n-1}y + ... + a_jt^{n-2j}x^{n-j}y^j + ... + t^{-n}y^n$$

Por lo tanto, es sencillo verificar que esta acción se diagonaliza en la base canónica, por la matriz:

$$\begin{pmatrix} t^n & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & t^{n-2} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & t^{-n} \end{pmatrix}$$

Los pesos no negativos de esta acción son:

$$n, n-2, ..., n-2[n/2]$$

y los no positivos resultan:

$$n - 2([n/2]+1), ..., -n$$

En conclusión, en el caso que n sea impar, no hay pesos nulos, por lo tanto, los puntos estables y semiestables coinciden. En dicho caso, los puntos inestables son de la forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + ... + a_{[n/2]}x^{n-[n/2]}y^{[n/2]} \quad \text{o}$$

$$a_{[n/2]+1}x^{n-[n/2]-1}y^{[n/2]+1} + ... + y^n$$

Y obviamente los estables resultan su complemento.

En el caso en que $n = 2k$ sea par, sí obtenemos un peso nulo (el correspondiente a $n - 2[n/2]$). Y por lo tanto, en este caso, los puntos inestables son de la forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + ... + a_{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1} \quad \text{o}$$

$$a_{k+1}x^{n-k-1}y^{k+1} + ... + y^n$$

Y nuevamente los puntos semiestables corresponden a su complemento. La única diferencia que tenemos en este caso, es que el complemento de los puntos estables resultan:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + ... + a_kx^{n-k}y^k \quad \text{o}$$

$$a_kx^{n-k}y^k + ... + y^n$$

En resumen, y dicho de otro modo una forma binaria genérica $f(x, y)$ resulta estable si y sólo cada uno de sus factores lineales tiene multiplicidad $< n/2$. Y además, resulta semiestable si y sólo si cada uno de sus factores lineales tiene multimplidad $\leq n/2$. Donde la multiplicidad (moviendose dentro de una GL_2-órbita) puede ser tomada en un cero en $y = 0$. Para una demostración distinta de este último resultado también se puede consultar: [MUK, Sec. 7.2].

Corolario 3.5.10. En el caso $n = 4$, una forma binaria cuártica resulta estable si y sólo si no tiene factores lineales repetidos. Es decir, que las formas que determinan hipersuperficies suaves (no singulares) en $\mathbb{P}^n$ cubren todas las formas estables.

Siguiendo la línea del ejemplo anterior, daremos la caracterización general, que surge al aplicar el criterio sobre el espacio general de formas homoegéneas en n variables y de grado fijo:

Proposición 3.5.11. Sea $f \in K[x_1, .., x_n]_d$, entonces es cierto que:

- f es una cero forma, bajo la acción de $\mathbb{GL}_n$ sobre dicho espacio, si y sólo si existe un vector $(r_1, .., r_n) \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$, tal que $a_I = 0$, para todo multi-índice I tal que $\langle I, (r_1, ..., r_n)\rangle \geq 0$.
- f es no estable , nuevamente bajo la acción de $\mathbb{GL}_n$ sobre dicho espacio, si y sólo si existe un vector $(r_1, .., r_n) \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$, tal que $a_I = 0$, para todo multi-índice I tal que $\langle I, (r_1, ..., r_n)\rangle > 0$.

Demostración. Ver: [MUK, Prop. 7.11, Sec. 7.2 a]. □

Terminaremos el capítulo, estudiando el ejemplo clásico del grupo $\mathbb{SL}_n$ actuando en el espacio general de matrices, via conjugación. Aunque en este caso, no será necesaria la aplicación del criterio de Hilbert-Mumford. Recordemos que el anillo de invariantes esta determinado por los coeficientes del polinomio característico de cada matriz, y que las órbitas estan caracterizadas por sus formas de Jordan asociadas.

Ejemplo 3.5.12. Sea $V = K^{n \times n}$, el espacio vectorial general de matrices n-dimensionales, en donde consideraremos la acción por conjugación del grupo $\mathbb{GL}_n$. Consideremos $A \in V$ y su polinomio característico dado por:

$$\chi_A(x) = x^n + e_1(A)x^{n-1} + ... + e_n(A)x^0.$$

Entonces, la matriz A resulta inestable si y sólo si:

$$e_1(A) = ... = e_n(A) = 0$$

Además, esto último es equivalente a que la matriz sea nilpotente. Así nos quedan caracterizadas las matrices inestables y semiestables de este espacio.

Veamos ahora, cual es la situación de los puntos estables. Es posible demostrar, que la órbita asociada a una matriz es cerrada, si y solo si resulta diagonalizable. Por ejemplo, en el caso $n = 2$, esto es sencillo de ver, pues:

de acuerdo a la forma de Jordan asociada tenemos tres tipos de órbitas, con matrices respectivas iguales a:

$$(1)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \qquad (3)\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

Si A es diagonalizable con autovalores distintos (primer caso), entonces todas las matrices de su órbita $BAB^{-1} \in GL_2 \cdot A$, tiene igual polinomio caraterístico. Por la tanto, si $B_t \in GL_2 \cdot A$ tiende a B, esta última tendrá un polinomio característico que se factoriza linealmente, con autovalores iguales a los de A. De donde se sigue que $B \in GL_2 \cdot A$, y por lo tanto la órbita resulta cerrada.

En el segundo caso, es claro que la órbita es puntual y cerrada. Y por último, el tercer caso, tiene al segundo en su clausura. Es decir, a través de la conjugación:

$$\begin{pmatrix}t^{-1} & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ t & \lambda\end{pmatrix}$$

se sigue que la matriz:

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

esta en la clasura de su órbita. Esto nos prueba que las únicas matrices cuyas órbitas son cerradas son las diagonalizables. Este argumento puede ser extendido para la acción del grupo general $\mathbb{GL}_n$.

En conclusión, las matrices diagonalizables tienen órbitas ceradas, sin embargo sus estabilizadores nunca resultan finitos. Consideremos matrices del tipo:

$$\begin{pmatrix}t_1 & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & t_2 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & t_3 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & ... & 0 & t_n\end{pmatrix},$$

donde $t_1 ... t_n = 1$. Si conjugamos a una matriz diagonal A por este tipo de matrices, volvemos a obtener la matriz A. Por lo tanto, las matrices diagonalizables, como ya mencionamos, nunca tienen establizadores finitos, incluso bajo la acción del grupo $\mathbb{SL}_n$. Luego:

$$V^s = \emptyset$$

.

Apéndice A

Aspectos básicos de Geometría Algebraica

El objetivo principal de este apéndice es exponer un breve resumen de las definciones básicas y los resultados principales de la teoría de variedades algebraicas. En principio, este apartado permite recordar y ampliar muchos conceptos dentro del contexto de las variedades afines, y también resulta una ayuda para una mejor comprensión de los temas abordados durante todo el trabajo, especialmente en el capítulo 2. Dicho de otro modo, conforma un refuerzo y resumen de las bases necesarias para una mejor comprensión de los elementos con los que hemos trabajado.

En general, sólo expondremos las demostraciones que consideramos importantes por su contenido intrínseco, es decir, aquellas que en su propio contenido muestren algún elemento importante que pretendamos destacar. Para un visión más amplia sobre este tema tan importante se sugiere consultar: [HAR], [SHA] y [MUM].

A.1. Introducción

A lo largo de este sección, así como también a lo largo de todo el trabajo, supondremos que K es un cuerpo algebraicamente cerrado. Comenzaremos con algunas definiciones elementales.

Definición A.1.1. Consideremos la K-álgebra de funciones polinomiales con coeficientes en K, es decir, tomemos $A = K[x_1, ..., x_n]$ y sobre ella definamos:

1. $I(X) = \{f \in A : f(x) = 0 \, \forall x \in X\}$, para cada $X \subseteq K^n$.
2. $V(S) = \{x \in K^n : f(x) = 0 \, \forall f \in S$, para cada subconjunto $S \subseteq A$.

Observación A.1.2. Continuando con la notación de las definición anterior:

- A todos los subconjuntos de K^n que son de la forma $V(S)$, para algún subconjunto $S \subset K[x_1, ...x_n]$, los llamaremos subconjuntos algebraicos de K^n. Además quedan completamente determinados por los ideales de $K[x_1, ...x_n]$, en el siguiente sentido:

$$\text{Si } S \subset K[x_1, ...x_n], \text{ luego } V(\langle S\rangle) = V(S)$$
$$(\text{donde } \langle S\rangle \text{ denota al ideal generado por el subconjunto S})$$

- Dado $X \subseteq K^n$, es claro que $I(X)$ es un ideal de $K[x_1, ...x_n]$. Recordemos que dado un ideal S, podemos definir el radical de S como:

  $$\sqrt{S} = \{f \in K[x_1, ...x_n] : f^n \in S\},$$

  y que un ideal S se dice radical si $S = \sqrt{S}$. Bajo estas observaciones, es posible demostrar que $I(X)$ siempre resulta un ideal radical.

Tenemos definidas dos aplicaciones V e I entre subconjuntos algebraicos de K^n e ideales de $K[x_1, ...x_n]$. Sin embargo estas aplicaciones no son inversas, de hecho para ver como se relacionan entre sí debemos recurrir al famoso teorema de los ceros de Hilbert (Nullstellensatz), que nos afirma lo siguiente:

Teorema A.1.3. Para cada ideal $S \subseteq K[x_1, ...x_n]$ es cierto que:

$$I(V(S)) = \sqrt{S}.$$

Más aún, $X = \{p\} \Leftrightarrow I(X)$ es un ideal maximal

Demostración. [SHA, Apéndice 6]. □

A continuación nos concentraremos en los conjuntos algebraicos y ciertas propiedades sobre ellos que nos permitirán definir una topología especial en K^n.

Proposición A.1.4. Los conjutos algrebraicos tiene las siguientes propiedades:

I) $V(\{o\}) = K^n$ y $V(K[x_1, ..x_n]) = \emptyset$

II) Si $\{S_1, ...S_n\}$ es una familia finita de ideales de $K[x_1, ..x_n]$, luego: $V(\bigcap S_i) = \bigcup V(S_i)$

III) Si $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia arbitraria de ideales de $K[x_1, ..x_n]$, luego: $V(\sum S_\alpha) = \bigcap V(S_\alpha)$

Demostración. Las demostraciones de estos resultados son argumentos directos y sencillos, y por lo tanto serán omitidos. Para un desarrollo de ellos consultar: [SHA, Cáp. 1] o [HAR, Cáp. 1].

□

La proposición anterior nos muestra que los conjuntos algebraicos nos definen una topología en K^n, que coresponde a tomar a dichos conjuntos como los cerrados. A esta topología la llamaremos Topología Zariski. A menos que sea aclarado, a los conjuntos algebraicos los dotaremos con la topología de subespacio, que heredan de K^n.

Ahora, a partir de estos resultados, estamos en condionces de describir la relación entre las funciones V e I:

Proposición A.1.5. Para todo subconjunto X de K^n se tiene que:

$$V(I(X)) = \bar{X},$$

donde $\bar{X}$ denota su clausura en la Topolgá Zariski.

Demostración. Es claro que $X \subseteq V(I(X))$, como $V(I(X))$ es un cerrado de la topología, tenemos que $\bar{X} \subseteq V(I(X))$.

Sea W un cerrado que contiene a X . Luego $W = V(a)$, para cierto ideal a, entonces:

$$I(V(a)) \subseteq I(X)$$

. Pero además, sabemos que $a \subseteq I(V(a))$, de donde deducimos que $a \subseteq I(x)$. Aplicando la función V a dicha contensión: $V(I(X)) \subseteq V(a) = W$, de donde se concluye $\bar{X} = V(I(X))$.

□

La proposición anterior, junto con el teorema de los ceros de Hilbert, nos determina una correspondencia entre conjuntos algebraicos (o cerrados Zariski) e ideales radicales de $K[x_1, ..., x_n]$:

$$\{\text{Conjuntos algebraicos}\} \underset{V}{\overset{I}{\longleftrightarrow}} \{\text{Ideales radicales de} K[x_1, ..., x_n]$$

Enunciaremos ciertas propiedades sobre la topología que estamos definiendo a partir de los conjuntos algebraicos. Veremos que esta nueva topología es T_1, Noetheriana y compacta:

Proposición A.1.6. Sea $X \subset K^n$ un conjunto algebraico, las siguientes afirmaciones son válidas para dicho conjunto y su topología:

I) La topología Zariski en X es T_1.

II) Toda familia no vacía de subconjuntos cerrados de X contiene un elemento minimal.

III) Para toda cadena de cerrados descendente con la inclusión, ie $X_1 \supseteq X_2 \supseteq .... \supseteq X_n \supseteq X_{n+1}.....$ donde cada X_i es un cerrado en X, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $X_k = X_m$ $\forall k \geq m$.

IV) X es una espacio topológico compacto.

Demostración. Si $a = (a_1, ..., a_n) \in X = V(S)$, entonces a es el único elemento de K^n que es cero del ideal dado por:

$$S_a = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle.$$

Por lo tanto para demostrar que X es T_1, basta observar que

$$\{a\} = V(S_a) \cap \mathcal{V}(S)$$

, es un cerrado de X. Luego todos los puntos de X son cerrados, y dicho espacio resulta T_1.

Las propiedades ii) y iii), son equivalentes y resultan las defînciones clásicas y más usadas para espacios topológicos Noetherianos. Por lo tanto, solo demostraremos ii).

Recordemos que el anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$ es un anillo Noetheriano, donde esto se deduce del Teorema de Hilbert que afirma que: Si A es un anillo Noetheriano entonces $A[x]$ también lo es.

Por lo tanto el anillo $K[x_1, ...x_n]$ cumple que toda familia no vacía de ideales admite un elemento maximal. Luego, si $\{F_i\}_{i\in I}$, es una familia de cerrados en el conjunto algebraico X, entonces $\{I(F_i)\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de ideales radicales de $K[x_1, ...x_n]$. Así dicha familia admite un elemento maximal al que podemos llamar $I(F_{i_o})$. Aplicando V a ese elemento y a la familia $\{I(F_i)\}_{i\in I}$, y usunado que V invierte las incluisiones, obtenemos que $V(I(F_{i_o})) = F_{i_0}$ (pues es cerrado) es un elemento minimal de la familia $\{F_i\}_{i\in I}$. Con lo cual queda demostrado ii).

Por último, veamos la propiedad iv). Queremos probar que si $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia arbitraria de ideales de $K[x_1, ..X_n]$,tales que:

$$\bigcap V(S_\alpha) = \emptyset,$$

entonces existen finitos $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \Lambda$ tales que: $V(S_{\alpha_1}) \cap .... \cap V(S_{\alpha_m}) = \emptyset$.

Bajo esas hipótesis podemos deducir que

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} V(S_\alpha) = K[x_1, ..., x_n],$$

luego, existen finitos $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \Lambda$ tales que $1 \in \sum(S_j)$, lo cual implica que

$$V(S_{\alpha_1}) \cap .... \cap V(S_{\alpha_m}) = \emptyset.$$

□

A.2. Conjutos Algebraicos y Algebras Afines

Hasta ahora hemos definido conjuntos algebraicos y les hemos dado un topología. Veremos que dichos conjuntos y su topología quedan completamente determinados por un álgebra de funciones polinomiales que podremos asociarle.

Definición A.2.1. Sea $X \subseteq K^n$ un conjunto algebraico, y sean $f_1, f_2 \in K[x_1, .., x_n]$. Entonces $f_1|_X = f_2|_X$ si y solo si $f_1 - f_2 \in I(X)$. Luego la restricción a X induce un morfismo sobreyectivo:

$$\phi : K[x_1, .., x_n] \longrightarrow K[x_1, .., x_n]/(I(X).$$

Se define la K-álgebra afín asociada a X como:

$$K[X] := K[x_1, .., x_n]/(I(X).$$

Observación A.2.2. Dicho espacio K[X] es una K-álgebra conmutativa, que cumple:

- Si X es un conjuto algebraico entonces $K[X]$ es una K-álgebra afín, es decir es finitamente generada y sin elementos nilpotentes.
- Si A es un k-algebra afín, entonces existe un conjuto algebraico $X \subset K^r$ tal que $A \simeq K[X]$ (isomorfismo de K-álgebras conmutativas).

Demostración. Ver: [HAR, Remark 1.4.6]. □

En la siguiente proposición veremos que un conjunto algebraico X y su topología inducida quedan determinadas por la K-álgebra $K[X]$.

Proposición A.2.3. Sea $X \subseteq K^n$ un conjunto algebraico y sea $K[X]$ su K-álgebra afín asociada. Si llamamos $Max\{K[X]\}$ al conjunto de ideales maximales de $K[X]$, entonces:

I Existe una biyección entre los puntos de X y los ideales maximales de $K[X]$, dada por:

$$\phi : X \longrightarrow Max\{K[X]\}, \quad \text{donde } \phi(x) = I(\{x\}).$$

II Los cerrados de X, con su topología inducida, son de la forma $V(S)$, con S recorriendo el conjunto de todos los ideales de $K[X]$.

Demostración. Para comenzar, observaremos que la flecha ϕ esta bien defenida, en el sentido que efectivamente $\phi(x) \in Max\{K[X]\}$. Como:

$$K[X]/(I\{x\}) = K[X]/(\langle X_1 - x_1, ...X_n - x_n\rangle) \simeq K,$$

el ideal $I(\{x\})$ resulta maximal.

Debido a que:

$$K[X] \simeq K[x_1, .., X_n]/(I(X)),$$

los ideales maximales de $K[X]$ estan en correspondencia con de $K[x_1, .., x_n]$ que contienen a $I(X)$. Además, ya sabemos que los ideales maximales de $K[x_1, .., x_n]$ estan en correspondencia con lo puntos de K^n (recordar A.2.3), y la condición de que dicho ideal contenga a $I(X)$ es pedirle a dichos puntos que pertenezcan a la variedad X.

La afirmación II) es una consecuencia inmediata de que X tenga la topología de subespacio. □

Observación A.2.4. Del inciso II) de la proposición anterior se deduce inmediatamente que todo cerrado de X es el conjunto de ceros de un número finito de funciones en $K[X]$; es decir:

$$\text{Si } F \subseteq X \text{ es un cerrado luego: } F = I(\langle f_1, ..., f_n\rangle) \text{ para ciertos } f_i \in K[X]$$

Ahora que tenemos definida la K-álgebra afín asociada a la variedad X, podemos dar un mejor caracterización de la topología Zariski sobre un conjunto algebraico X.

Definición A.2.5. Sea X un conjunto algebraico y sea $K[X]$ su K-álgebra asociada. Para cada $\mathfrak{f} \in K[X]$ definimos:

$$D_X(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Estos conjuntos son abiertos de la topología y los llamaremos: *abierto asociado a la función f.*

Proposición A.2.6. Dado un conjunto algebraico X, $\{D_X(f) : f \in K[X]\}$ forma una base de abiertos de la topología de X.

Demostración. Consultar: [SPR, Lemma 1.3.6, Cáp 1]. □

A.3. Variedades Algebraicas Afines y Funciones Regulares

En esta sección definiremos al objeto principal de estudio en este apéndice, que son las variedades algebraicas afines. Además, veremos una caracterización de ellas como espacios topológicos anillados, lo cual es de gran utilidad para dar definiciones más generales de variedad.

Definición A.3.1. Sea $X \subseteq K^n$ un conjunto algebraico, $K[X]$ su K-álgebra afín y sea τ su topología Zariski inducida. Diremos que la terna

$$(X, K[X], \tau)$$

o simplemente X (cuando esten claros todos los demás datos por el contexto), es una variedad algebraica afín.

Definición A.3.2. Diremos que un subconjunto $Y \subseteq X$, de una variedad algebraica afín es constructible, si puede describirse como uniones e intersecciones finitas de cerrados y abiertos de X.

En las secciones anteriores hemos discutido y demostrado varias propiedades topolǵicas de las variedades afines. Nuestro próximo objetivo es enunciar propiedades básicas de la categoría que definen. Pero antes, veremos una última propiedad topológica que permite descomponer las variedades en ciertas componentes, que en muchos casos facilitan su estudio. Para eso definamos:

Definición A.3.3. Sea $(X, K[X], \tau)$ una variedad algebraica afín, diremos que X es irreducible si toda vez que $X = Y_1 \cup Y_2$, con Y_1 e Y_2 cerrados, entonces o bien $Y_1 = X$ o bien $Y_2 = X$.

En general, una variedad algebraica afín no tendrá por que ser irreducible, pero, por el hecho de que como espacio topológico sea noetheriano, puede descomponerse en finitas componentes irreducibles.

Enunciaremos las siguientes proposiciones para espacios topológicos abstractos, para que queden expuestas en su contexto más general, pero obviamente nuestra única intención es su aplicación a las variedades que hemos definido, una breve descripción de estos puede encontrar en la introduccción de: [SPR, Sec. 1.2].

Lema A.3.4. Sean X e Y espacios topológicos.

1. $U \subseteq X$ es irreducible (con su topología de subespacio) si y solo si $\bar{U}$ es irreducible.
2. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, sobreyectiva y X es irreducible entonces Y también lo es.

Definición A.3.5. Diremos que F es un componente irreducible de un espacio topológico X, si F es un conjunto irreducible y maximal (con respecto a la inclusión).

De acuerdo a la siguiente proposición, veremos que todo espacio topológico es la unión de componentes irreducibles.

Proposición A.3.6. Sea X un espacio topológico abstracto, luego son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) Todo subconjunto irreducible de X esta contenido en una componente irreducible de X.

b) X es la unión de sus componentes irreducibles, y dichas componentes resultan ser subespacios cerrados.

Hasta aquí no fue necesario ninguna hipótesis adicional sobre el espacio topológico X, pero como veremos a continuación, si nuestro espacio satisface la condición de ser noetheriano (como en el caso de nuestras variedades afines) la cantidad de componentes irreducibles será finita.

Proposición A.3.7. Todo espacio topológico noetheriano tiene un nḿero finito de componentes irreducibles.

Retornando al contexto de variedads algebraicas, daremos ahora una caracterización para que una variedad afín sea irreducible en términos completamente algebraicos, a través de su K-álgebra asociada.

Proposición A.3.8. Sea $(X, K[X], \tau)$ una variedad algebraica afín cualesquiera, luego X es irreducible como espacio tológico si y solo si $K[X]$ es una K-álgebra íntegra.

Demostración. Primero supongamos que X es irreducible y veamos que $K[X]$ resulta íntegra. Si esto último no fuera cierto, existirían $f, g \in K[X] - \{0\}$ tales que: $f.g = 0$. Por lo tanto, vistos como funciones polinomiales restrigidas a X, también resultan nulas. Luego:

$$X = I(\{f\}) \cup I(\{g\}),$$

lo cual resulta un absurdo debido a que ambos conjuntos que descomponen a X son cerrados propios (pues f y g son no nulos), y X es irreducible.

Supongamos ahora que la K-álgebra $K[X]$ es íntegra, pero que por el contrario X resulta reducible. En ese caso, existirían dos cerrados propios

$$F_1 = I(\{f_1, .., f_n\}) \quad \text{y} \quad F_2 = I(\{g_1, .., g_m\})$$

tales que: $X = F_1 \cup F_2$. Sea $x_1 \in X \backslash F_1$, entonces existe un $k \leq n$ tal que

$$f_{i_j}(x_1) \neq 0 \, \forall j = 1...k.$$

Análogamente existe $x_2 \in X \backslash F_2$ y $l \leq m$ tal que:

$$g_{i_j}(x_2) \neq 0 \, \forall j = 1...l.$$

Tomando $f = f_{i_1}...f_{i_k}$ y $g = g_{i_1}....g_{i_l}$, ambos resultan no nulos en $K[X]$, pues no se anulan en x_1 y x_2 respectivamente, pero:

$$I(\{f_1,..,f_n\} \subseteq I(f) \quad \text{y} \quad I(\{g_1,..,g_m\}) \subseteq I(g)$$

De donde podemos deducir que: $f.g = 0$ en $K[X]$, lo cual contradice la integridad de $K[X]$ y concluye la demostración. □

Corolario A.3.9. Si $X \subset K^n$ es una variedad algebraica afín, luego, X es irreducible si y sólo si $I(X) \leq K[x_1,.,x_n]$ es un ideal primo.

Demostración. Se sigue inmediatamente de la proposición anterior recordando que:

$$K[X] \simeq K[x_1,..,x_n]/I(X)$$

□

Para culminar con la presente sección, daremos una presentación de las variedades algebraicas afines como espacios topológicos anillados. Para ello, recordemos primero las principales definiciones de haces de funciones sobre un espacio topológico.

Haces de funciones: Sea X un espacio topológico arbitrario, recordemos que un haz de funciones K-valuadas sobre X es una asignación que a cada abierto U de X, le asigna una K-álgebra de funciones K-valuadas, $\mathcal{O}(U)$, que satisfacen lo siguiente:

I Si $U \subseteq V$ son dos abiertos no vacios de X, luego la restricción define un morfismo de K-álgebras $\phi_{|_U} : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$.

II Sea $\{U_{a \in A}\}$ es un cubriento abierto de un cierto abierto $U \subseteq X$. Supongamos que para cada $a \in A$ tenemos dada una función K-valuada $f_a \in \mathcal{O}(U_a)$, cumpliendo que:

- si $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, luego f_a y f_b restringidas a $U_a \cap U_b$ definen la misma función en $\mathcal{O}(U_a \cap U_b)$.

Entonces, existe una única función $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que su restricción a cada U_a es f_a.

Recordemos que si X es un espacio topológico se puede definir en general un prehaz de anillos como un funtor contravariante entre la categoría que definen sus abiertos, y la categoría de anillos con unidad.

Además, un prehaz de anillos es un haz cuando además se cumple la propiedad II) del enunciado anterior, donde las "restricciones" son la imagen por el funtor de las restricciones entre los abiertos de X.

Definición A.3.10. Un par $(X, \mathcal{O})$, donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}$ es un haz de funciones (o más en general de anillos) sobre X, es llamado un espacio anillado.

Definición A.3.11. Sea $(X, \mathcal{O})$ un espacio anillado. Si Y es un subespacio de X, definimos el espacio anillado inducido $(Y, \mathcal{O})|_Y$, del siguiente modo: A Y le otorgamos topología de subespacio. Si U es un abierto de Y, luego, $\mathcal{O}|_Y(U)$ consite en todas las funciones f definidas en U tales que:

- exite un cubrimiento abierto $U \subset \bigcup U_\alpha$ de U por abiertos de X, y funciones $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$, tals que su restrcción a $U \cap U_\alpha$ coincide con la restriccion de f.

Ahora construiremos un haz de funciones sobre una variedad afín:

Definición A.3.12. Sea X una variedad afín, y sea $U \subseteq X$ un entorno abierto de cierto $x \in X$. Una función $f : U \longrightarrow K$ se dice regular en ese punto, si existen $g, h \in k[X]$ y otro entorno de x, $V \subseteq U \cap D_X(h)$ tal que $f = gh^{-1}$ en V.

Una función definida en un abierto $U \subseteq X$ se dirá regular, si es regular en todos los puntos de dicho abierto.

Ahora definiendo $\mathcal{O}(U)$ (para cada abierto U) como la K-álgebra de funciones regulares en U, es inmediato chequear que dicha construcción cumple con las propiedades I y II de la definición de haces. De este modo, a toda variedad afín X se la puede ver como un caso particular de espacios anillados.

Definición A.3.13. Sea X una variedad afín y sea $\mathcal{O}$ su haz de funciones regulares asociado. Definimos, para cada $x \in X$, a $\mathcal{O}_x$ como la K-álgebra de funciones regulares en x, con la relación de equivalencia que determina que dos funciones regualares definidas en un entornod de x, son iguales, si coinciden en un entorno más chico. Esto último, puede expresarse de un modo más categórico, como el germen de funciones regulares en dicho punto:

$$\mathcal{O}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}(U)$$

Para culminar esta sección veamos una definición un poco más general de variedades:

Definición A.3.14. Un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ se dice un prevariedad, si para cada punto de X existe un entorno abierto U, tal que el subespacio anillado $(U, \mathcal{O}|_U)$ es isomorfo (como espacio anillado) a una K-variedad afín.

Observación A.3.15. Los morfismos entre prevariedades y las sub-prevariedades pueden definirse de forma natural recordando que en particular son espacios anillados.

Definición A.3.16. Diremos que una prevariedad $(X, \mathcal{O}_X)$, es una variedad si satisface el axioma de separación, que requiere que la diagonal:

$$\Delta : X \longrightarrow X \times X$$

sea un inmersión cerrada.

Observación A.3.17. Si bien es posible definir estructuras de subvariedad sobre todos los subconjuntos cerrados y abiertos de una variedad dada (Ver [HAR, Cáp 1] o [SPR, Sec. 1.4 y Sec. 1.5, Cáp. 1]). También es cierto que todo subespacio cerrado de una variedad afín resulta nuevamente una variedad afín. Sin embargo, no es cierto que todo subespacio abierto de una variedad afín sea afín. Por ejemplo, el abierto $X = \mathbb{A}^2 - \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{A}^2$, no admite una estructura de subvariedad afín.

A.4. Morfismos

Ahora estamos en condiciones de poder definir morfismos entre variedades afines, y para esto será vital ver a dichas variedades como un caso particular de espacios anillados.

Definición A.4.1. Sean X e Y dos variedades algebraicas afines, y $\phi : X \longrightarrow Y$ una función continua. Diremos que ϕ es un morfismo de variedades, si para cada $V \subseteq Y$ abierto y para cada función regular $f : V \longrightarrow K$, la función:

$$f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \longrightarrow K$$

resulta regular.

Observación A.4.2. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dos espacios anillados, y $\phi : X \longrightarrow Y$ una función continua. Para cada abierto $V \subset Y$ y cada $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ definimos:

$$\phi_V^*(f) := f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \longrightarrow K.$$

Decimos que ϕ es un morfismo de espacios anillados, si la imagen de ϕ_V^* esta contenida en $\mathcal{O}_X(\phi^{-1}(V))$.

Por lo tanto, en el caso particular en que X e Y son variedades afines la definición anterior coincide con la que dimos para morfismos entre variedades.

Observación A.4.3. Claramente la composición de dos morfismos entre variedades afines es un morfismo, y por lo tanto tenemos bien definida la categoría de variedades afines. Por lo tanto, en particular, tenemos bien definida una noción de isomorfismo (categórico) entre variedades afines,

Según las definiciones que acabamos de realizar, es claro que si reemplazamos una variedad $(X, \mathcal{O})$ por otra variedad isomorfa entonces las correspondientes K-álgebras $\mathcal{O}(U)$ y $\mathcal{O}_x$, resultan también isomorfas. Es por eso que decimos que dichas K-álgebras son invariantes de las variedades afines.

Nuestro próximo objetivo es relacionar $\mathcal{O}(X)$ y $\mathcal{O}_x$, con la K-álgebra afín $K[X]$ asociada.

Teorema A.4.4. Sea $(X, K[X])$ un variedad afín arbitraria, y sea $\mathcal{O}$ su haz de funciones regulares asociado. Entonces:

a) $\mathcal{O}(X) \simeq K[X]$

b) Para cada $x \in X$, sea I_x el ideal de $K[X]$ dado por todas las funciones que se anulan en x. Luego $\mathcal{O}_x \simeq K[X]_{I_x}$ donde esto último representa la localización del ideal I_x.

c) Sea $D_X(f)$ un abierto principal de X, entonces $\mathcal{O}(D_X(f)) \simeq K[X]_f = K[X][T]/(1-fT)$ (la localizacion de $S = \{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Consultar: [HAR, Sec. 3 (Morphisms)] y [SPR, Theorem 1.4.5, Cáp.].

□

Observación A.4.5. Si bien no todo abierto de una variedad afín es afín, observemos que el teorema anterior nos muestra que es posible definir una estructura de variedad afín sobre los abiertos básicos $D_X(f)$, y que su K-álgebra asociada resulta la localización $K[X]_f$.

Observación A.4.6. Por definición un morfismo $\phi : X \longrightarrow Y$ de variedades afines define un morfismo de k-algebras: $\phi_Y^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$. Luego, esto nos define un morfismo entre las álgebreas afines asociadas del siguiente modo:

$$\phi^* = (\Psi^X)^{-1} \circ \phi_Y^* \circ \Psi^Y : K[Y] \longrightarrow K[X]$$
$$\phi^*(p) = (\Psi^X)^{-1}(\phi_Y^*(\Psi^Y(p))) = (\Psi^X)^{-1}(p \circ \phi), \quad \forall p \in K[Y].$$

En la fórmula dada, estamos identificando naturalmente a la función polinomial p con $\Psi^Y(p)$. Ahora tratemos de hacer una construcción en el sentido contrario al realizado en el desarrollo anterior.

Dado un morfismo de K-álgebras $T : K[Y] \longrightarrow K[X]$, buscaremos construir un morfismo entre variedades $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$ tal que : $\tilde{T}^* = T$. Para ver esto primero vamos a necesitar la siguiente correspondencia.

Lema A.4.7. Dada una variedad algebraica afín X hay una correspondencia natural entre:

$$\Omega_X : X \longrightarrow \{\alpha : K[X] \to K : \alpha \textit{ es un morfismo de k-algebras}\}$$

Demostración. La demostración de este hecho es sencilla y radica en una corresponcia que ya hemos probado, entre los puntos de X y los ideales maximales de $K[[X]$. Es claro, que tomando el núcleo de los morfismos de K-álgebras entre $K[X]$ y K, tenemos una correspondencia entre dichos morfismos y los ideales maximales de $K[X]$, es decir:

- $\Omega_X(x) = \varphi_{I_x}$, donde $\varphi_{I_x} : K[X] \longrightarrow K$ es el morfismod de k-algebras que tiene a I_x (el ideal de las funciones que se anulan en x) como nucleo.
- ${\Omega_X}^{-1}(\alpha) = V(\mathit{Ker}\,(\alpha))$, pues como $\mathit{Ker}\,(\alpha)$ es un ideal maximal, sus ceros determinan un único punto.

□

Ahora, estamos en condiciones de realizar la construcción que anuanciamos: dado un morfismo de k-algebras $T : K[Y] \longrightarrow K[X]$, podemos definir un morfismo de variedades $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$ del siguiente modo:

- $\tilde{T} = \Omega_Y^{-1} \circ (\_ \circ T) \circ \Omega_X$
- $\tilde{T}(x) = \Omega_Y^{-1} \circ (\_ \circ T)(\phi_{I_x}) = \Omega_Y^{-1} \circ (\phi_{I_x} \circ T) = V(Ker\,(\phi_{I_x} \circ T)) \in Y$

Nuestra intención es probar que $(\tilde{T})^* = T$. Es decir, queremos ver que para todo $x \in X$ y para todo $p \in K[Y]$, es cierto que

$$(\tilde{T})^*(p)(x) = T(p)(x).$$

Además, como:

$$(\tilde{T})^*(p) = \Psi_Y^{-1}(p \circ \tilde{T}),$$

nos bastará probar que

$$\Psi_Y \circ T(p) = p \circ \tilde{T},$$

nuevamente haciendo una identificación natural y evaluando en cada punto x de la variedad X, probaremos que:

$$T(p)(x) = p(\tilde{T}(x))$$

Para esto, veremos que ambos puntos de K (espacio afín de dimensión 1) definen el mismo ideal maximal en $K[x]$ (polinomios de una variable con coeficientes en K), es decir, que se anulan sobre los mismos polinomios de $K[x]$. Recordemos que si $f \in K[x]$ entonces:

$$\tilde{T}(x) = V(Ker\,(\phi_{I_x} \circ T))$$

de donde deducimos que:

$$f(p(\tilde{T}(x))) = 0 \iff f \circ p \in I(\tilde{T}(x)) \iff \phi_{I_x}(T(f \circ p)) = 0 \iff$$

$$T(f \circ p) \in I_x \iff T(f \circ p)(x) = 0$$

A esto último, lo queremos comparar con el conjunto de todas las $f \in K[x]$ tales que $f(T(p)(x)) = 0$. Como T es un morfismo de álgebras, es claro que

$$f(T(p)(x)) = T(f \circ p)(x),$$

de donde se sigue el resultado deseado.

Corolario A.4.8. Todo morfismo de variedades afines queda completamente determinado por dar un morfismo entre sus K-álgebras afines asociadas (en el sentido contrario).

Podemos formalizar el corolario anterior de forma categórica, a partir del siguiente teorema:

Teorema A.4.9. El funtor contravariante: $X \mapsto K[X]$ y $(f : X \longrightarrow Y) \mapsto (f^* : K[Y] \longrightarrow K[X])$; define un isomorfismo entre la categoría de variedades afines y la cateogoría de k-algebras afines.

Demostración. Ver: [HAR, Corrolary 3.8, Cáp. 1] o [FSR, Sec. 4.1, Cáp. 1]. □

Para culminar esta sección dedicada a los morfismo entre variedades algebraicas, veremos un útimo resultado clásico adicional:

Proposición A.4.10. Sea $\phi : X \longrightarrow Y$ un morfismo de variedades. Entonces $\phi(X)$ contiene un abierto no vacío de su clausura $\overline{\phi(X)}$.

Demostración. Consultar: [SPR, Sec 1.9, Cáp. 1]. □

Además, a partir de la definición de subconjutos constructibles A.3.2, es posible enunciar un resultado más general que el anterior, atribuido al matemático Chevalley:

Teorema A.4.11. Sea $\phi : X \longrightarrow Y$ un morfismo de variedades algebraicas, entonces su imagen $\phi(X) \subseteq Y$ es construtible.

Demostración. Ver: [FSR, Theorem 4.90, Sec. 4.5, Cáp. 4]. □

A.5. Dimensión de variedades

Dada un variedad algebraica, es posbile definir sobre ella una noción de dimensión, aunque sin embargo las deficiones equivalentes que pueden darse de este concepto son muchas.

Por ejemplo, tomando su K-álgebra afín asociada pueden definirse varias nociones algebraicas de dimensión equivalentes, o también teniendo en cuenta su topología Zariski inducida puede darse una definición topológica de dimensión. Lo importante es que estos conceptos son equivalentes y además resultan coherentes desde un puntos de vista geométrico, ya que por ejemplo todas las curvas resultan tener dimensión uno.

Definición A.5.1. Si X es un espacio topológico, entonces podemos definir la dimensión de X como el supremos sobre todos los enteros $m \in \mathbb{N}$ tales que existe una cadena cerrados irreducibles:

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_m$$

Definición A.5.2. Si X es una variedad afín . definimos su dimensión como la que le corresponde de acuerdo a su topología. Debido a que X es un espacio topológio notheriano, podemos además deducir que es finita.

Veamos a continuación algunas equivalencias algebraicas de este concepto:

Definición A.5.3. Si A es un anillo, e I un ideal primo, entonces podemos definir el peso de dicho ideal $H(I)$, como el supremos sobre todos los enteros $n \in \mathbb{N}$, tales que existe una cadena de ideales primos que resuelve a I:

$$P_0 \subset \cdots \subset P_{n-1} \subset P_n = I.$$

Definimos la dimensión de Krull del anillo A como:

$$dim(A) = Sup\{H(I) : I \text{ es un idela primo de A}\}$$

Proposición A.5.4. Si $(x, K[X])$ es un variedad algebraica afín, entonces su dimensión coincide con la dimensión de Krull de $K[X]$.

Demostración. Ver: [HAR, Sec.1, Cáp. 1], o [SPR, Sec. 1.8 (Dimension), Cáp. 1]. □

Además, en el caso de que la variedad afín sea irreducible, es decir, que su K-álgebra asociada sea un dominio íntegro, también tenemos el siguiente resultado:

Teorema A.5.5. Sea X una variedad algebraica afín irreducible, entonces su dimensión coincide con el grado de transcendencia del cuerpo de fracciones $K(X) := Fracc(K[X])$ sobre el cuerpo K.

Demostración. Nuevamente puede consultarse: [HAR, Sec. 1, Cáp. 1]. □

Finalizaremos esta sección enunciando algunos resultados clásicos sobre la dimensión de las fibras de morfismos:

Definición A.5.6. Decimos que un morfismo de variedades algebracias, $\phi : X \longrightarrow Y$, es dominante si su imagen es densa en la variedad Y.

Teorema A.5.7. Sea $\phi : X \longrightarrow Y$ un morfismo dominante de variedades algebraicas irreducibles, y sea $r = dim(X) - dim(Y)$. Entonces, existe un abierto no vacio $U \subseteq Y$, y contenido en $\phi(X)$, tal que:

$$dim(\phi^{-1}(y) = r \qquad \forall\ y \in U)$$

.

Demostración. [MUM, Sec. 8, Cáp. I]. □

Por último, enunciemos un resultado que es conocido como la propiedad de semicontinuidad superior de la dimensión:

Teorema A.5.8. Sea $\phi : X \longrightarrow Y$ un morfismo arbitrario de variedades algebraicas. Para cada $x \in X$, podemos definir:

$$e(x) = max\{dim(Z) : Z \text{ es una componente de } \phi^{-1}(\phi(x))\}$$

Entonces esta función e es semicontinua superiormente, es decir que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto:

$$S_n(e) = \{x \in X : e(x) \geq n\}$$

resulta un cerrado de X.

Demostración. Ver: [MUM, Corrolary 3, Sec. 8, Cáp. I]. □

Para una descripción más profunda sobre teoremas de dimensión sobre morfismos, se puede consultar nuevamente: [MUM, Sec. 8, Cáp. 1].

A.6. Pegado de variedades afines y la variedad *Proy*

Si bien a lo largo de este apéndice, no hemos desarrollado específicamente la teoría de variedades proyectivas, abordaremos un breve resumen referente a la construcción de variedades proyectivas, a partir del pegado de variedades afines asociados a una cierta graduación de un determinado anillo.

Veamos primero un ejemplo de como podemos construir al espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ de este modo:

Ejemplo A.6.1. Sea K el cuerpo de funciones racionales en n-variables sobre el cuerpo k, es decir:

$$K = k(x_1, \dots, x_n)$$

Y consideremos $n+1$-variables $X_0, \dots, X_n$, tales que: $x_i = X_i/X_0$. Ahora tomemos los anillos polinomiales determinados por:

$$R_{X_i} = k[X_0/X_i, .., X_{i-1}/X_i, X_{i+1}/X_i, \dots, X_n/X_i].$$

Estos resultan subálgebras de K, tales que ese mismo K resulta su cuerpo de fracciones. Por lo tanto, determinan variedades afines:

$$SpmR_{X_i} \simeq \mathbb{A}^n.$$

Si notamos por: $R_{X_iX_j} = R_{X_i}R_{X_j}$, a la subálgebra de K generada por R_{X_i} y R_{X_j}, entonces, las variedades $SpmR_{X_i}$ y $SpmR_{X_j}$ tienen a la variedad afín $SpmR_{X_iX_j}$, como un subconjunto abierto común. A partir de la definición de variedad abstracta general que dimos en A.3.14, es posible verificar que podemos construir una variedad algebraica X a partir del pegado topológico de las variedades $SpmR_{X_i}$. Además, la variedad construída X coincide con el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$.

Para un versión rigurosa del pegado de variedades afines, consultar: [MUK, Sec. 3.2 a, Cáp. 3].

La variedad Proy: Sea R un anillo, que además sea un dominio íntegro y con una graduación:

$$R = \bigoplus_{e \in \mathbb{N}_0} R_e.$$

Diremos que un elemento f/g en el cuerpo de fracciones K de R es homogéneo, si tanto f como g lo son a partir de la graduación dada en R, y definimos su grado como:

$$deg(f/g) = deg(f) - deg(g).$$

A partir de esta última definición, consideraremos al subcuerpo $K_0 \subset K$ de los elementos de grado cero:

$$K_0 = \{f/g : f, g \in R,\ g \neq 0 \text{ y } deg(f) = deg(g)\} \cup \{0\}.$$

Análogamente, para cada elemento homogéneo no nulo $h \in R$ definimos la subálgebra:

$$R_{h,0} = \{f/h^n : f \in R\ , deg(f) = ndeg(h)\} \cup \{0\}.$$

Definición A.6.2. Sea $R = \bigoplus_{e=0}^{\infty} R_e$ un anillo graduado finitamente generado. La variedad algebraica con cuerpo de funciones K_0, obtenida a partir del pegado de las variedades afines dadas por $SpmR_{h,0}$, recorriendo todos los elementos homogéneos $h \in R$, se denotará como:

$$\mathrm{Proy}R.$$

Proposición A.6.3. Si $h_1, \cdots, h_n$ son generadores homogeneos del anillo R, entonces la variedad Proy$R$ se encuentra cubierta por las subvariedades afines y abiertas:

$$SpmR_{h_1,0} \cdots SpmR_{h_n,0}.$$

Demostración. Ver [MUK, Secc.3.2]. □

De este modo concluimos con este breve resumen de conceptos básicos de geometría algebraica, que fueron utilizados a lo largo de nuestro trabajo, y que sirven como apoyo para una mejor compresión del texto y de la teoría en general abordada.

Bibliografía

[HAR] Robin Hartshorne. Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics: 52, Springer.1997.

[SHA] Igor.R.Shafarevich. Basic Algebraic Geometry I, Second, revised and Expanded Edition. Springer-Verlag.

[MUM] David Mumford. The Red Book of Varieties and Schemes. Lectures Notes in Mathematics 1358. Springer.

[SPR] T.A. Springer. Linear Algebraic Groups, Second Edition. Birkhäuser, Boston. 1988.

[HUM] James.E.Humphreys. Linear Algebraic Groups. Springer-Verlag.

[JST] G. JerÃşnimo, J. Sabia, S. Tesauri. ÃĄlgebra lineal, FascÃŋculo 2 - Cursos de Grado, Departamento de MatemÃątica, FCEN - UBA, 2008

[FUL] W.Fulton, J.Harris. Representation Theory: A first Course. Graduate Texts in Mathematics, vol.129. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg, 1991.

[HUM2] James.E.Humphreys. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Third printing, Revised. Springer-Verlag.1980.

[BRI] Michel Brion. Introduction to actions of algebraics groups. Les cours du C.I.R.M. Vol 1 n1 (2010) 1-22.

[FSR] Walter Ferrer Santos, Alvaro Rittatore. Actions and Invariants of Algebraics Groups. Champman and Hall/CRC. 2005 CRC Press.

[CIT] Harm Derksen, Gregor Kemper. Computational Invariant Theory.Enciclopedia of Mathematical Sciences. Springer.

[MUK] Shigeru Mukai. W.M Oxbury. An Introduction to Invariants and Moduli. Cambridge University Press. 2003.

[GIT] D.Mumford, J.Fogarty, F.Kirwan. Geometric Invariant Theory, Third enlarge edition. Springer-Verlag.1994.

[PSH] A.N Parshin, I.R.Shafarevich Algebraic Geometry IV, Linear Algebraic Groups- Invariant Theory. Enciclopedia of Matematical Sciences, volume 55. Springer-Verlag.

[NAM] M.Nagata, T.Miyata. Note on semi reductive groups. J.Math, Kyoto University. 3 (1963/1964) 379-382 pp.

[NAG] M.Nagata. On the Fourteenth Problem of Hilbert. Proc. I.C.M. 1958. Cambridge University Press, 1960, pp. 459-462.

[FRE] G.Freudenburg. Locally Nilpotent Derivations and Ga-Actions. Springer-Verlag, New York.

[MUK2] S.Mukai. Geometric realization of T-shaped root systems and counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, Algebraic Transformation groups and Algebraic Varieties, 123-129. Springer-Verlag, Berlin. 2004.

[CNE] A.A'Campo-Neuen. Note on a counterexample to Hilbert's fourteenth problem given by P.Roberts. Indag. Math.,N.S. 5. 1994.

[STE] R.Steinberg. Nagata's example, Algebraic Groups and Lie Groups. Cambridge University Press. 1997.

[TAN] R.Tanimoto. Linear counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert, J. Algebra, 275. 2004.

[FRE2] G. Freudenburg. A linear counterexample to the Fourteenth Problem of Hilbert in dimension eleven. University of Southern Indiana. 2005.

[PRO] C.Procesi. Non Commutative affine rings. Atti, Acc. Naz. Lincei 8, 239. 1967.