UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Conmutadores de Ideales de Operadores

María Eugenia Rodríguez

Director: Dr. Guillermo H. Cortiñas

marzo de 2011.

Índice

1. Introducción

En este trabajo de tesis nos concentraremos en el estudio de conmutadores de ideales de operadores de acuerdo a los trabajos de C. Pearcy y D. Topping (ver [11]) y de K. Dykema, T. Figiel, G. Weiss y M. Wodzicki (ver [8]).

Sean I y J dos ideales arbitrarios en el álgebra de operadores acotados y lineales $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ denota un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert, separable y de dimensión infinita. Se define el conmutador entre I y J como:

$$[I,J] := \bigcup_{r=1}^{\infty} [I,J]_r,$$

donde

$$[I,J]_r := \left\{ T = \sum_{i=1}^{r} [A_i, B_i] : A_i \in I,\ B_i \in J \right\}$$

y

$$[A,B] := AB - BA.$$

Los principales resultados presentados en este trabajo, debidos a C. Pearcy y D. Topping, [11] y a K. Dykema, T. Figiel, G. Weiss y M. Wodzicki, [8], (caracterizaciones de ciertos conmutadores particulares, estudio de la estructura de un conmutador, número de conmutadores para describir un operador dado) son desarrollados en los Capítulos 4 al 6. En los Capítulos 2 y 3 se presentan las herramientas necesarias para obtener los resultados principales.

Una de las herramientas fundamentales es la triple correspondencia existente entre los ideales propios de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, los subespacios sólidos y simétricos de ℓ^∞ (sucesiones acotadas) y los conjuntos característicos de $c_0^\star$ (las sucesiones no crecientes de números reales que tienden a 0). Esta correspondencia se puede explicitar de la siguiente manera:

$$I \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \longleftrightarrow S(I) := \{\alpha \in \ell^\infty :\ \operatorname{diag} \alpha \in I\} \subseteq \ell^\infty \longleftrightarrow S(I)^\star := S(I) \cap c_o^\star \subseteq c_o^\star.$$

Ver Teoremas 3.7.3 y 3.6.1.
Para probar estas correspondencias definiremos, en la Sección 3.5, a los números singulares y estudiaremos sus propiedades.

Tal como se mencionó arriba, los resultados más trascendentes aparecen en los últimos tres capítulos. Por empezar, en el Capítulo 4 se calcula el espacio $[I,I]$ para dos casos particulares: el de las p-clases de Schatten, $I = \mathcal{C}_{2p}$ con $p > 1$, y el de los operadores compactos $I = \mathfrak{K}$. Estas descripciones aparecen en el trabajo de Pearcy y Topping [11].
Uno de los objetivos centrales de nuestro trabajo es presentar los resulados de K. Dykema, T. Figiel, G. Weiss y M. Wodzicki, [8] acerca del espacio de conmutadores. Estos incluyen que $[\mathfrak{B}, IJ] = [I,J]$ para todo par de ideales I, J, y que si al menos uno de ellos es propio, y $T \in IJ$ es normal, y

$$T = \sum_{n\geq 1} \alpha_n < \cdot, u_n > u_n$$

es una descomposición diagonal de T, entonces

$$T \in [I, J] \Leftrightarrow \alpha_a \in S(IJ).$$

Aquí α_a es la sucesión de sumas aritméticas:

$$(\alpha_a)_n := \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}.$$

Este es un resultado probado en [8], y el estudio de su demostración será nuestro principal objetivo (ver Capítulo 5, Teorema 5.0.16).
En dicho capítulo desarrollaremos también algunas otras consecuencias, mayormente relacionadas con los conjuntos característicos, mencionados en la triple correspondencia
Para finalizar, en el Capítulo 6 estudiaremos el mínimo r tal que $[I, J] = [I, J]_r$. Aunque los resultados probados en este capítulo son independientes del teorema principal (Teorema 5.0.16), permiten también dar una descripción más o menos explícita de los conmutadores entre ideales.

2. Preliminares: Operadores Acotados

En este capítulo se enunciarán definiciones y resultados clásicos sobre operadores compactos y autoadjuntos. En la Sección 2.2 demostraremos algunos de ellos explícitamente: el hecho de que los operadores compactos forman un ideal, el estudio de condiciones necesarias y suficientes para que un operador diagonal sea compacto o acotado y finalmente la propiedad de que cualquier ideal propio del conjunto de operadores lineales y acotados está contenido en el ideal de los operadores compactos.

Notación 2.0.1 *Denotaremos $\mathcal{H}$ a un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, separable, de dimensión infinita y $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ al conjunto de operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$.*
Si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son dos espacios de Hilbert como antes, definimos por $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ al conjunto de operadores acotados y lineales de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$. Si los espacios coinciden entonces usamos la notación anterior.

Notaremos por $\mathfrak{F}_n(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ al conjunto de operadores, entre dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, de rango menor o igual a n, para $n \geq 0$.
En el caso en que los espacios de Hilbert coincidan, lo notaremos $\mathfrak{F}_n$.

Definición 2.0.2 *Si Γ es un conjunto numerable definimos los siguientes espacios,*

- $c_0(\Gamma) := \{\lambda := (\lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} : \Gamma \to \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0,\ \#\{\gamma \in \Gamma : |\lambda_\gamma| \geq \varepsilon\} < \infty\}$
- $\ell^\infty(\Gamma) := \{\lambda := (\lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\Gamma \to \mathbb{C} : \sup\limits_{\gamma\in\Gamma} |\lambda_\gamma| < \infty\}$, *dotado de la norma infinito, o sea,* $\|\lambda\|_\infty := \sup\limits_{\gamma\in\Gamma} |\lambda_\gamma|$, *si* $\lambda \in \ell^\infty(\Gamma)$.
- *si* $0 < p < \infty$,

$$\ell^p(\Gamma) := \{\lambda := (\lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{C}^\Gamma : \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} |\lambda_\gamma|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Si $\Gamma = \mathbb{N}$ entonces notamos a los espacios anteriores como $c_0 := c_0(\mathbb{N})$, $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N})$ y $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$.

2.1. Operadores compactos y autoadjuntos

Definición 2.1.1

- *Si $B_{\mathcal{H}}$ representa a la bola unidad del espacio $\mathcal{H}$, un operador $T \in \mathfrak{B}$ se dice* ***compacto*** *si la clausura de $T(B_{\mathcal{H}})$ en $\mathcal{H}$ es un conjunto compacto.*

  Notamos $\mathfrak{K} := \mathfrak{K}(\mathcal{H})$ al subconjunto de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ de los operadores compactos.

- *Para un operador $T \in \mathfrak{B}$ definimos el* ***operador adjunto*** *de T, al que llamamos T^*, como el operador que cumple la siguiente propiedad*

$$< Th, k > = < h, T^*k >, \quad \forall k, h \in \mathcal{H}.$$

  Un operador $T \in \mathfrak{B}$ se dice ***autoadjunto*** *si $T = T^*$.*

Recordemos el Teorema de Diagonalización para operadores compactos y autoadjuntos.

Teorema 2.1.2 *Todo operador compacto y autoadjunto T admite una familia ortonormal y completa de autovectores $v_1, v_2, ...$ Sus correspondientes autovalores no nulos (contados con multiplicidad), forman una sucesión finita o infinita $\lambda_1, \lambda_2, ...$, y en este último caso $\lambda_n \to 0$, cuando $n \to \infty$. Además, podemos escribir a T como*

$$T = \sum_{v_n \notin \mathrm{Ker}(T)} \lambda_n < \ \cdot\ , v_n > v_n.$$

Demostración. Ver [12, Section I, Theorem 6]. ■

Utilizaremos con frecuencia el siguiente resultado conocido como Descomposición Polar de un operador.

Teorema 2.1.3 *Todo operador T se puede factorizar de manera única,*

$$T = U|T|,$$

donde $|T| := \sqrt{T^*T}$ y U es una isometría sobre la imagen de $|T|$ tal que si $h \perp \overline{\mathrm{Im}(T)}$ $Uh = 0$.
A esta factorización de T, es lo que llamamos su ***descomposición polar****.*

Demostración. Ver [12, Preliminaries, Theorem, pp.4]. ■

2.2. Ideales de operadores

Probemos algunos resultados sobre ideales de operadores.

Lema 2.2.1 *Sea $I \subseteq \mathfrak{B}$ un ideal a izquierda (resp. a derecha) y definamos al ideal adjunto como $I^* := \{T^* : \ T \in I\}$.*
Entonces son equivalentes:

(i) *I es un ideal bilátero de $\mathfrak{B}$*

(ii) *$I^* = I$*

Demostración. Probemos que $(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $T \in I$ y escribámoslo por su descomposición polar como $T = U|T|$, (ver el Teorema 2.1.3). Entonces $T^* = |T|U^*$ y $U^*U|T| = |T|$. Luego resulta que

$$T^* = U^*U|T|U^* = U^*TU^* \in I,$$

porque I es un ideal bilátero. Por lo tanto, probamos que $I^* \subseteq I$. Como I^* también es un ideal bilátero entonces $I^* \subseteq I$.
Veamos ahora que $(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que I es ideal a izquierda y veamos que I es ideal a derecha. Basta probar que dados $T \in I$ y $S \in \mathfrak{B}$, $TS \in I$. Tenemos $TS = (S^*T^*)^* \in I$, pues $T^* \in I^* = I$ es un ideal a izquierda. Entonces I es ideal a derecha. ■

Corolario 2.2.2 *Sean $I, J \in \mathfrak{B}$ ideales biláteros, entonces $IJ = JI$.*

Demostración. Por el Lema 2.2.1 $I = I^*$ y $J = J^*$. Por lo tanto, resulta que

$$IJ = I^*J^* = (JI)^* = JI.$$

■

Proposición 2.2.3 *El subconjunto $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{B}$ es ideal bilátero.*

Demostración. Es claro que $0 \in \mathfrak{K}$.
Supongamos que $T \in \mathfrak{K}$, $U \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ y $(h_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ una sucesión acotada. Entonces resulta que $(Uh_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada y $(Th_n)_{n\geq 1}$ tiene una sucesión convergente. Luego, tanto $(T(Uh_n))_{n\geq 1}$ como $(U(Th_n))_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente y por tanto TU y $UT \in \mathfrak{K}$.
Faltaría ver que la suma de operadores compactos es un operador compacto. Sean T_1 y $T_2 \in \mathfrak{K}$ y consideremos $B := \{h \in \mathcal{H} : \|h\| = 1\} \subseteq \mathcal{H}$, entonces $\overline{T_i(B)}$ es compacto para $i = 1,\ 2$ y por lo tanto $\overline{T_1(B)} \times \overline{T_2(B)}$ es un conjunto compacto. Como además la operación *suma* es continua, se tiene que $\overline{T_1(B)} + \overline{T_2(B)} \subseteq \overline{T_1(B) + T_2(B)}$ es un conjunto compacto. Luego $T_1 + T_2 \in \mathfrak{K}$. ■

Corolario 2.2.4 *Sea $T \in \mathfrak{B}$, entonces*

$$T \text{ es compacto} \Longleftrightarrow T^* \text{ lo es.}$$

Introduzcamos ahora algunos resultados que nos facilitará la demostración de que el ideal propio $\mathfrak{K}$ es más grande en $\mathfrak{K}$, en cuanto a la inclusión.

Teorema 2.2.5 *Sea $T \in \mathfrak{B}$. Son equivalentes*

(i) $T \in \mathfrak{K}$

(ii) *Todo subespacio cerrado $S \subseteq Im(T)$, tiene dimensión finita.*

Demostración. Ver [5, Lemma 3.1] ■

Proposición 2.2.6 *Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio cerrado de dimensión infinita, entonces S es isomorfo, unitariamente, a $\mathcal{H}$.*

Demostración. Como S es un subespacio cerrado y $\mathcal{H}$ es separable, entonces S resulta separable. Como además ambos espacios tienen dimensión infinita, se tiene que son unitariamente isomorfos (ver [7, Cap.I, Corollary 5.5]). ■

Proposición 2.2.7 *El ideal $\mathfrak{K}$ es cerrado en $\mathfrak{B}$.*

Demostración. Ver [7, Chapter II, Proposition 4.2]. ■

Teorema 2.2.8 *Sea $I \subsetneq \mathfrak{B}$ un ideal bilátero, entonces $I \subseteq \mathfrak{K}$.*

Demostración. Es suficiente probar que, si T no pertenece a $\mathfrak{K}$, entonces T tampoco pertenece a I. Supongamos entonces que $T \in I \setminus \mathfrak{K}$ y veamos que esto es absurdo. Si $T \notin \mathfrak{K}$, por el Teorema 2.2.5 existe un subespacio $S \subseteq Im(T)$ cerrado de dimensión infinita. Definamos $N := Ker(T)$ y $T_1 := T|_{N^\perp}$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} T_1^{-1}(S) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{H} = N \oplus N^\perp \arrow[d, "T"] \\ S \arrow[r, "i"'] & \mathrm{ImT} \end{tikzcd}$$

donde con la función i nos referimos a la inclusión en cada uno de los casos.
Usando la Proposición 2.2.6 existen dos isomorfismos unitarios,

$$V : \mathcal{H} \to T_1^{-1}(S) \text{ y } Z : S \to \mathcal{H}.$$

Consideremos la proyección ortogonal sobre S, o sea $P_S : S \oplus S^\perp \to S$, y el operador $W := Z \circ P_S$, entonces el isomorfismo $W \circ T \circ i \circ V \in I$, pues $T \in I$. Por lo tanto $I = \mathfrak{B}$, pero esto es absurdo ya que el ideal es propio. ■

Lema 2.2.9 *Sean I y J ideales en $\mathfrak{B}$, entonces para todo operador en $T \in IJ$ existen $R \in I$ y $S \in J$ tales que $T = RS$.*

Demostración. Como $T \in IJ$, escribimos $T = \sum_{i=1}^{m} R_i S_i$ con $R_i \in I$ y $S_i \in J$.
Elijamos un isomorfismo $\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{\oplus m}$ y definamos el operador $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{\oplus m}$ como $\Delta(v) := \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix}$.

Su operador adjunto es $\Delta^* \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = v_1 + \ldots + v_m$.

Consideremos los siguientes operadores, de $\mathcal{H}^{\oplus m}$ en sí mismo,

$$\begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 v_1 \\ \vdots \\ S_m v_m \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 v_1 \\ \vdots \\ R_m v_m \end{pmatrix}$$

para $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^{\oplus m}$.

Definamos ahora $S := \Phi^{-1} \circ \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_m \end{pmatrix} \circ \Delta$ y $R := \Delta^* \circ \begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_m \end{pmatrix} \circ \Phi$ y veamos que $T = RS$.
Si $v \in \mathcal{H}$ entonces

$$
\begin{aligned}
RS(v) &= \Delta^* \circ \begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_m \end{pmatrix} \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_m \end{pmatrix} \circ \Delta(v) \\
&= \Delta^* \circ \begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_m \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \\
&= \Delta^* \circ \begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 v \\ \vdots \\ S_m v \end{pmatrix} \\
&= \Delta^* \begin{pmatrix} R_1 S_1 v \\ \vdots \\ R_m S_m v \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{m} R_i S_i(v) = T(v).
\end{aligned}
$$

Como esto último vale para todo $v \in \mathcal{H}$, entonces $T = RS$. $\blacksquare$

Definamos ahora, al operador diagonal de una sucesión determinada en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Probemos luego las condiciones necesarias y suficientes aplicadas a la sucesión, para que dicho operador sea acotado o compacto.

Definición 2.2.10 *Sean $\{e_n\}_{n\geq 1}$ una base de Hilbert ortonormal de $\mathcal{H}$ y $\alpha := (\alpha_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Definimos el* ***operador diagonal*** $\text{diag } \alpha : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *como*

$$\text{diag } \alpha := \sum_{n\geq 1} \alpha_n < \ \cdot\ , e_n > e_n.$$

Lema 2.2.11 *Sean $\alpha := (\alpha_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos y $\{e_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{H}$ una base de Hilbert ortonormal, entonces resulta que*

(i) $\text{diag } \alpha \in \mathfrak{B} \Leftrightarrow \alpha \in \ell^\infty$. *Más aún,* $\|\text{diag } \alpha\| = \|\alpha\|_\infty$.

(ii) $\text{diag } \alpha \in \mathfrak{K} \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{c}_0$.

Demostración.

(i) Supongamos primero que $(\text{diag } \alpha) \in \mathfrak{B}$ y veamos que $\|\alpha\|_\infty < \infty$. Se tiene

$$\|\alpha\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n| = \sup_{n\geq 1} |(\text{diag } \alpha)(e_n)| \leq \sup_{\|h\|=1} (\text{diag } \alpha)(h) = \|\text{diag } \alpha\|.$$

Luego $\|\alpha\|_\infty \leq \|\text{diag } \alpha\|$ y $\alpha \in \ell^\infty$.

Por otro lado, si $\alpha \in \ell^\infty$ y consideremos $v := \sum_{i\geq 1} \lambda_i e_i$ tal que $\|v\| = 1$, entonces

$$\|(\text{diag } \alpha)(v)\|^2 = \| \sum_{i\geq 1} \lambda_i \alpha_i e_i \|^2 = \sum_{i\geq 1} |\lambda_i \alpha_i|^2 \leq \|\alpha\|_\infty^2 \sum_{i\geq 1} |\lambda_i|^2 = \|\alpha\|_\infty^2 \|v\|^2 = \|\alpha\|_\infty^2$$

Entonces tomando supremo sobre los $v \in \mathcal{H}$ de norma 1, resulta que $\|\text{diag } \alpha\| \leq \|\alpha\|_\infty < \infty$ y por lo tanto $(\text{diag } \alpha) \in \mathfrak{B}$.

(ii) Sea $\alpha \in \ell^\infty$, no nula, y supongamos que $\alpha_n \geq 0, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión α no tiende a 0 resulta que dado $\varepsilon > 0$, α tiene una subsucesión, $(\alpha_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $|\alpha_{n_k}| > \varepsilon$.

Dado que $|\alpha_{n_k}| > \varepsilon > 0$, $\alpha_{n_k} \neq 0$, luego

$$h_{n_k} := \frac{1}{\alpha_{n_k}} e_{n_k}$$

está bien definida para todo $k \geq 1$.

Además, resulta que

$$|h_{n_k}| = \frac{1}{\alpha_{n_k}} < \frac{1}{\varepsilon}$$

y por lo tanto, $(h_{n_k})_{k\geq 1}$ es una sucesión acotada.

Si el operador diag α fuera compacto, entonces $(\text{diag}\alpha)(h_{n_k}) = e_{n_k}$ tendría una subsucesión convergente. Como esto último es absurdo, probamos que diag α no es compacto.

Ahora sea $\alpha \in \ell^\infty$ es una sucesión arbitraria y no nula que no tiende a 0. Definimos una nueva sucesión $u := (u_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$u_n := \begin{cases} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} & \alpha_n \neq 0 \\ 0 & \alpha_n = 0 \end{cases}.$$

Notar que $\|u\|_\infty = 1$ y que $u_n\alpha_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si diag α es compacto y escribimos $(\text{diag } u\alpha) = (\text{diag } u)(\text{diag } \alpha)$, entonces diag $u\alpha$ es compacto, absurdo. Porque $u_n\alpha_n \geq 0$, $\forall \, n \in \mathbb{N}$ y uso el caso anterior. Por lo tanto, diag α no es compacto.

Para mostrar la recíproca, o sea que diag $\alpha \in \mathfrak{K}$ si $\alpha_n \to 0$, veamos que a dicho operador lo podemos aproximar por operadores de rango finito. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ los operadores de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \ \cdot\ , e_i > e_i$$

y mostremos que estos sirven para aproximar a diag α.

Como $\alpha \in c_0$ se tiene que

$$\|\text{diag } \alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \ \cdot\ , e_i > e_i\| = \|\sum_{i\geq n} \alpha_i < \ \cdot\ , e_i > e_i\| = \sup_{i>n} \|\alpha_i\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Entonces probamos que diag α se puede aproximar por operadores de rango finito, por lo tanto compactos, y junto con la Proposición 2.2.7 se tiene que diag $\alpha \in \mathfrak{K}$.

Con esto concluimos ambas equivalencias. ■

3. Espacios de Sucesiones y Números Singulares

En la Sección 3.1 empezaremos considerando para un conjunto infinito arbitrario Γ, la colección de aplicaciones inyectivas de subconjuntos $\Gamma' \subseteq \Gamma$ a valores en Γ. A dicho monoide lo notaremos $Emb(\Gamma)$. También daremos ejemplos de algunos submonoides de $Emb(\Gamma)$.
Esto nos permitirá describir una relación de equivalencia entre elementos del espacio de sucesiones $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La clase de equivalencia de un elemento en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ será lo que llamaremos la quasiórbita del elemento, y junto con el espacio de sucesiones en $c_0 := c_0(\mathbb{N})$, reales y decrecientes que notaremos $c_0^\star$, podremos definir la operación $\star$ entre c_0 y $c_0^\star$. El rol que tendrá está operación se verá en la Sección 3.6, y será precisamente la que se utiliza en la correspondencia biunívoca que hay entre los conjuntos característicos y subespacios sólidos y simétricos de ℓ^∞ contenidos en c_0.
Finalmente en la Sección 3.5 introduciremos la noción de número singular y estableceremos algunos resultados. Esto nos permitirá dar la segunda correspondencia biunívoca entre subespacios sólidos y simétricos de c_0 e ideales propios de operadores en $\mathfrak{B}$, que estudiaremos en la Sección 3.7.

3.1. Espacios de sucesiones

Definición 3.1.1 *Sea Γ un conjunto, consideremos el conjunto $Emb(\Gamma) := \{f : \Gamma' \rightarrowtail \Gamma : \Gamma' \subseteq \Gamma\}$.*

Observación 3.1.2 *Observemos que la aplicación vacía, $\emptyset : \emptyset \to \Gamma$ es un elemento de $Emb(\Gamma)$.*
La operación composición la definimos mediante el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Dom}\, g) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}\, f) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & \mathrm{Dom}\, f \arrow[d, "f"] \\
& \Gamma
\end{tikzcd}$$

de modo que la composición está bien definida, aún cuando $(\mathrm{Dom}\, g) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}\, f) = \emptyset$.

El conjunto $Emb(\Gamma)$ es un semigrupo bajo la operación composición. La aplicación identidad, id_Γ es el elemento neutro y la aplicación vacía, $\emptyset$, es el cero.
Observemos que

- *la inclusión $i : \Gamma' \hookrightarrow \Gamma$ es un elemento de $Emb(\Gamma)$.*
- *la antípoda es la aplicación $f \mapsto f^\dagger$, donde $f^\dagger : f(\Gamma) \to \Gamma$ esta definida por $f^\dagger(\gamma) := f^{-1}(\gamma)$ y resulta que $f^\dagger \circ f$ y $f \circ f^\dagger$ dan respectivamente la inclusión del dominio y del rango de f.*

Definición 3.1.3 *Definimos tres submonoides de $Emb(\Gamma)$,*

- $\mathcal{E}_\Gamma := \{f \in Emb(\Gamma) : \ \mathrm{Dom}(f) = \Gamma\}$
- $\mathcal{E}_\Gamma^\dagger := \{f^\dagger : \ f \in \mathcal{E}_\Gamma\}$

- $\mathcal{E}_\Gamma^* := \mathcal{E}_\Gamma \cap \mathcal{E}_\Gamma^\dagger$

Definición 3.1.4 *La acción de $f \in Emb(\Gamma)$ sobre $\alpha \in \mathbb{C}^\Gamma$ se define como*

$$(f_*\alpha)_\gamma := \begin{cases} \alpha_{f^{-1}(\gamma)} & \gamma \in f(\Gamma') \\ 0 & \gamma \notin f(\Gamma') \end{cases}.$$

Aquí la función $\alpha : \Gamma \to \mathbb{C}$ la pensamos como una familia indexada por Γ.
Notemos que la acción de f preserva el producto y la suma de $\mathbb{C}^\Gamma$.
En particular, cada $f_* : \mathbb{C}^\Gamma \to \mathbb{C}^\Gamma$ es morfismo de anillos.

Observación 3.1.5 *Notemos algunas propiedades acerca de la operación $*$,*

- *si $f, g \in Emb(\Gamma)$, entonces $(fg)_* = f_* g_*$,*
- *si $f \in \mathcal{E}_\Gamma \Rightarrow \; f^\dagger \circ f = id \;\Rightarrow\; f_*^\dagger \circ f_* = id$.*

3.2. Subespacios sólidos y simétricos

Definición 3.2.1 *Sea $S \subseteq \mathbb{C}^\Gamma$ un subespacio. Decimos que S es* ***sólido*** *si $\ell^\infty(\Gamma) \cdot S \subseteq S$ y que S es* ***simétrico*** *si $Emb(\Gamma)_* S \subseteq S$.*
Notar que los subespacios que son sólidos y simétricos, son los subespacios $\ell^\infty(\Gamma)$-invariantes y $Emb(\Gamma)$-invariantes.

Ejemplo 3.2.2 *El espacio de sucesiones ℓ^p, para $p > 0$, es un subespacio sólido y simétrico de ℓ^∞.*

Definamos el orden entre sucesiones de $\mathbb{R}^\Gamma$, con Γ un conjunto numerable.

Definición 3.2.3 *Si $\lambda := (\lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ y $\mu := (\mu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ son dos aplicaciones de Γ en $\mathbb{R}$, decimos que $\mu \leq \lambda$ si $\mu_\gamma \leq \lambda_\gamma$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, es el orden usual en $\mathbb{R}$ lugar a lugar.*

Notación 3.2.4 *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, la sucesión $\frac{''\mu''}{\lambda}$ en el lugar n está definida por*

$$(\frac{''\mu''}{\lambda})_n := \begin{cases} \mu_n/\lambda_n & \lambda_n \neq 0 \\ 0 & \lambda_n = 0 \end{cases}.$$

Proposición 3.2.5 *Si S es un subespacio sólido, $0 \leq \lambda, \mu \in \mathbb{R}^\Gamma$ y $\mu \leq \lambda \in S$ entonces $\mu \in S$.*

Demostración. Escribamos a $\mu_\gamma = \mu_\gamma/\lambda_\gamma \lambda_\gamma$ si $\lambda_\gamma \neq 0$ (si $\lambda_\gamma = 0 \Rightarrow \mu_\gamma = 0$). Por hipótesis tenemos que $\|\frac{''\mu''}{\lambda}\|_\infty \leq 1$. Entonces, como S es sólido tenemos que $\mu \in S$. ■

Definición 3.2.6 *Para α y $\beta \in \mathbb{C}^\Gamma$ definimos la siguiente relación de equivalencia $\sim$,*

$$\alpha \sim \beta \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{E}_\Gamma)_*\alpha \cap (\mathcal{E}_\Gamma)_*\beta \neq \emptyset.$$

Además, notamos a la clase de de equivalencia de un elemento $\alpha \in \mathbb{C}^\Gamma$ como

$$[\![\alpha]\!] := \{\beta \in \mathbb{C}^\Gamma : \; \alpha \sim \beta\},$$

y es lo que llamamos la ***cuasiórbita*** *del elemento α.*

Observación 3.2.7 *Para probar que la relación $\sim$, antes definida, es transitiva supongamos que $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$. Luego, existen $f, g, h, k \in \mathcal{E}_\Gamma$ tales que $f_*\alpha = g_*\beta$ y $h_*\beta = k_*\gamma$. Por la Observación 3.1.5 se tiene que $(g^\dagger \circ f)_*\alpha = (g_*^\dagger \circ f_*)\alpha = \beta$ y $(h^\dagger \circ k)_*\gamma = (h_*^\dagger \circ k_*)\gamma = \beta$, entonces $(h^\dagger \circ k)_*\gamma = (g^\dagger \circ f)_*\alpha$ con $g^\dagger \circ f,\ h^\dagger \circ k \in \mathcal{E}_\Gamma$ y $\alpha \sim \gamma$.*

Observación 3.2.8 *Si $\phi : \mathbb{N} \to \Gamma$ es una biyección y $\alpha \in \mathbb{C}^\Gamma$, entonces la cuasiórbita de $\alpha \circ \phi$ es independiente de la elección de ϕ.*
En efecto, dadas $\phi, \psi : \mathbb{N} \to \Gamma$ biyecciones consideremos las sucesiones $\beta := \alpha \circ \phi$ y $\gamma := \alpha \circ \psi$ y veamos que sus cuasiórbitas coinciden. Es suficiente probar que $\beta \sim \gamma$.
De las igualdades anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma \circ \psi^{-1} = \beta \circ \phi^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \gamma \circ (\psi^{-1} \circ \phi) = \beta \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma \circ (\phi^{-1} \circ \psi)^{-1} = \beta \\ &\Leftrightarrow \quad (\phi^{-1} \circ \psi)_*(\gamma) = \beta,\ (\phi^{-1} \circ \psi) \in \mathcal{E}_\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Entonces γ y β están relacionadas, y por la transitividad de $\sim$ sus cuasiórbitas coinciden.

Observación 3.2.9 *Sean $S \subseteq \mathbb{C}^\Gamma$ un subespacio simétrico y $\alpha \in S$. Si tomamos $\beta \in [\![\alpha]\!]$, entonces existen $f, g \in \mathcal{E}_\Gamma$ tal que $f_*\beta = g_*\alpha$. Entonces como $\beta = f_*^\dagger g_*\alpha \in S$ se tiene que $[\![\alpha]\!] \subseteq S$.*

Definición 3.2.10 *Sea $f \in Emb(\mathbb{N})$; consideremos la aplicación U_f, definida en la base canónica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por*

$$U_f e_n := \begin{cases} e_{f(n)} & si\ n \in \mathrm{Dom(f)} \\ 0 & si\ no \end{cases}.$$

Observemos además que $U_{fg} = U_f U_g$ y que $(U_f)^* = U_{f^\dagger}$, donde $f \mapsto f^\dagger$ es la operación antípoda introducida anteriormente.
A partir de la aplicación inyectiva

$$\ell^\infty \hookrightarrow \mathfrak{B}(\ell^2), \quad \alpha \mapsto \mathrm{diag}\ \alpha,$$

dada una función $f \in Emb(\mathbb{N})$ tenemos la siguiente identidad

$$\mathrm{diag}\ f_*(\alpha) = U_f(\mathrm{diag}\ \alpha)(U_f)^*. \tag{1}$$

3.3. Operaciones entre familias de $\mathbb{C}^\Gamma$

A continuación definiremos algunas sucesiones en particular y operaciones entre sucesiones de $\mathbb{C}^\Gamma$ que necesitaremos para estudiar, en la próxima sección, los conjuntos característicos.

Definición 3.3.1 *Se definen dos operaciones binarias sobre $\mathbb{C}^\Gamma$. La unión disjunta $(\Gamma \amalg \Gamma')$ induce la operación **suma directa***

$$\mathbb{C}^\Gamma \times \mathbb{C}^{\Gamma'} \to \mathbb{C}^{(\Gamma \amalg \Gamma')}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \oplus \beta,$$

donde

$$(\alpha \oplus \beta)_\gamma := \begin{cases} \alpha_\gamma & \gamma \in \Gamma \\ \beta_\gamma & \gamma \in \Gamma' \end{cases}$$

mientras que el producto cartesiano induce la operación ***producto tensorial***

$$\mathbb{C}^\Gamma \times \mathbb{C}^{\Gamma'} \to \mathbb{C}^{\Gamma \times \Gamma'}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \otimes \beta,$$

donde $(\alpha \otimes \beta)_{(\gamma,\delta)} := \alpha_\gamma \beta_\delta$.

Lema 3.3.2

(i) *Si* $\alpha, \lambda \in c_0 \Rightarrow \alpha \otimes \lambda \in c_0(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

(ii) *Si* $\alpha, \lambda \in \ell^p \Rightarrow \alpha \otimes \lambda \in \ell^p(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Demostración.

(i) Supongamos que $\alpha, \lambda \in c_0$ no nulas, entonces dado $\varepsilon > 0$, existen $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{N}$ subconjuntos finitos tales que

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{\|\lambda\|_\infty}, \text{ si } n \notin F_1$$

y

$$|\lambda_m| < \frac{\varepsilon}{\|\alpha\|_\infty}, \text{ si } m \notin F_2.$$

Entonces $|\alpha_n \beta_m| < \varepsilon, \text{ si } (n, m) \notin F_1 \times F_2$. Luego, $\alpha \otimes \beta \in c_0(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

(ii) Si $\alpha, \lambda \in \ell^p$ entonces

$$\sum_{n,m \geq 1} (\alpha_n \lambda_m)^p = \left(\sum_{n \geq 1} \alpha_n^p \right) \left(\sum_{m \geq 1} \lambda_m^p \right) < \infty.$$

Luego $\alpha \otimes \lambda \in \ell^p(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

■

Observación 3.3.3 *Sea* $S \subseteq \ell^\infty$ *un subespacio sólido y simétrico, entonces*

$$\text{si } \alpha, \beta \in S \Rightarrow \alpha \oplus \beta \in S.$$

Definición 3.3.4 *Definiremos dos operaciones entre sucesiones,*
la ***sucesión de sumas parciales****,*

$$\alpha \mapsto \sigma(\alpha), \quad \text{donde} \quad \sigma_n(\alpha) := \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

y la ***sucesión de la media aritmética****,*

$$\alpha \mapsto \alpha_a, \quad \text{donde}, \quad (\alpha_a)_n := \frac{\sigma_n(\alpha)}{n}$$

Definición 3.3.5 *Si $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, donde $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$, definimos la siguiente sucesión decreciente*

$$\mathrm{uni}_n(\alpha) := \sup_{i \geq n} \alpha_i, \tag{2}$$

Notación 3.3.6 *Denotamos $c_0{}^{\star}$ al conjunto de las sucesiones de números reales, no crecientes λ, tales que $\lambda \in c_0$.*
Para cada sucesión $\alpha \in c_0$, existe un único elemento $\alpha^{\star} \in [\![|\alpha|]\!] \cap c_0{}^{\star}$, (haremos su construcción en el lema que sigue a continuación). Esto define una aplicación $(\cdot)^{\star} : c_0 \to c_0{}^{\star}$ como $\alpha \mapsto \alpha^{\star}$, $\forall\ \alpha \in c_0$.

Si Γ es un conjunto numerable y $\alpha \in c_0(\Gamma)$ entonces definimos $\alpha^{\star}$ como el único elemento en $[\![|\alpha \circ \phi|]\!] \cap c_0{}^{\star}$, con $\phi : \Gamma \to \mathbb{N}$ es una biyección. Notemos que por la Observación 3.2.8 la cuasiórbita de $|\alpha \circ \phi|$ no depende de la ϕ elegida, por lo tanto $\alpha^{\star}$ está bien definida.

Lema 3.3.7 *Para una sucesión β de términos reales positivos se puede dar una descripción de la sucesión $\beta^{\star}$. Además, existe una aplicación $f \in Emb(\mathbb{N})$ tal que $f_*(\beta^{\star}) = \beta$.*

Demostración. Definimos el primer término de la sucesión $\beta^{\star}$ como

$$\beta_1^{\star} := \text{máx}\{\beta_i : i \geq 1\},$$

y

$$f(1) := \text{mín}\{i : \beta_i = \beta_1^{\star}\}.$$

De forma recursiva quedan definidos el resto de los términos. Sean

$$\beta_{n+1}^{\star} := \text{máx}\{\beta_i : i \notin \{f(1), \ldots, f(n)\}\}\ \forall\ n > 1$$

y además,

$$f(n+1) := \text{mín}\{i \notin \{f(1), \ldots, f(n)\} : \beta_i = \beta_{n+1}^{\star}\}.$$

Entonces $(f_*(\beta^{\star}))_{f(n)} = \beta_n^{\star} = \beta_{f(n)}$ para $n \geq 1$. Luego, $f_*(\beta^{\star}) = \beta$. ∎

Definición 3.3.8 *En base a la operación $(\cdot)^{\star}$ denotada antes podemos definir la* ***suma directa interna***

$$\boxplus : c_0{}^{\star} \times c_0{}^{\star} \to c_0{}^{\star}(\mathbb{N} \amalg \mathbb{N}), \quad (\lambda, \mu) \mapsto \lambda \boxplus \mu := (\lambda \oplus \mu)^{\star},$$

y el ***producto tensorial interno***

$$\boxtimes : c_0{}^{\star} \times c_0{}^{\star} \to c_0{}^{\star}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \quad (\lambda, \mu) \mapsto \lambda \boxtimes \mu := (\lambda \otimes \mu)^{\star}.$$

Ambas operaciones sobre $c_0{}^{\star}$, son asociativas y conmutativas. Además, la sucesión $\mathbf{1} := (1, 0, 0, ...)$ es el elemento neutro para la operación $\boxtimes$.

Observación 3.3.9 *Sean α y $\beta \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, escribimos a $\mathbb{N}$ como una unión disjunta de dos conjuntos infinitos, digamos $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \amalg \mathbb{N}_2$. Sean $\phi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$ y $\phi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_2$ biyecciones* *y definamos una nueva biyección $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \amalg \mathbb{N}$ como $\phi(n) := \phi_i^{-1}(n)$ si $n \in \mathbb{N}_i$, para $i = 1, 2$. Si consideramos $\alpha \oplus_\phi \beta := (\alpha \oplus \beta) \circ \phi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ se tiene que*

$$(\alpha \oplus_\phi \beta)_n = \begin{cases} \alpha_{\phi_1^{-1}(n)} & n \in \mathbb{N}_1 \\ \beta_{\phi_2^{-1}(n)} & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}.$$

Si ahora suponemos que $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \amalg \mathbb{N}$ es otra biyección entonces por la Observación 3.2.8, $[\![\alpha \oplus_\phi \beta]\!] = [\![\alpha \oplus_\psi \beta]\!]$.
En particular, $\alpha \boxplus \beta = (\alpha \oplus_\phi \beta)^\star$ no depende de la función ϕ.
Análogamente se define una biyección $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como $\chi(n) := \chi_1^{-1}(n)\chi_2^{-1}(n)$ y por lo tanto $\lambda \boxtimes \mu = (\lambda \otimes_\chi \mu)^\star$.

Lema 3.3.10 *Si $\lambda, \mu \in c_0^\star$, entonces*

$$\max\{\lambda_n, \mu_n\} \le (\lambda \boxplus \mu)_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Supongo sin pérdida de generalidad que $(\lambda \boxplus \mu)_n = \lambda_i$, luego $i \le n$. Escribamos $n = i + j$. Tenemos que ver que $\lambda_n, \mu_n \le (\lambda \boxplus \mu)_n$ para todo $n \ge 1$.
Por un lado, como λ es decreciente entonces $\lambda_n = \lambda_{i+j} \le \lambda_i$.
Por otro lado, si l es el máximo subíndice de μ que aparece en la sucesión $\lambda \boxplus \mu$ antes que λ_i, entonces $l \le i + j - 1$ y luego $\mu_n = \mu_{i+j} \le \mu_{l+1} \le \lambda_i$, pues μ es decreciente y l es el máximo. ■

Observación 3.3.11 *Sean $S \subseteq c_0$ un subespacio sólido y simétrico y $\alpha \in S$ entonces $|\alpha| \in S$ y por la Observación 3.2.9 $[\![|\alpha|]\!] \subseteq S$. Luego $\alpha^\star \in S$.*
En particular, si $\alpha \in S \cap c_0^\star$, entonces $\alpha^\star = \alpha$.

Definición 3.3.12 *Basándonos en la notación anterior definimos $S^\star := \{\alpha^\star : \ \alpha \in S\} = S \cap c_0^\star$.*

Proposición 3.3.13 *Sean $S_1, S_2 \subseteq c_0$ subespacios sólidos y símétricos, entonces*

$$si \ s \in S_1S_2 \Rightarrow s = s_1s_2, \ s_1 \in S_1, \ s_2 \in S_2.$$

Demostración. Escribimos a un elemento de $s \in S_1S_2$ como $s := r_1t_1 + \ldots + r_nt_n$, con $r_i \in S_1$ y $t_i \in S_2$, y probemos el resultado por inducción en n, la cantidad de sumandos.
Supongamos que $s := r_1t_1 + r_2t_2 \in S_1S_2$ con $r_i \in S_1$ y $t_i \in S_2$. Por el Lema 3.3.10, existe $C > 0$ una constante tal que

$$s := r_1t_1 + r_2t_2 \le C(r_1t_1 \boxplus r_2t_2),$$

y resulta que

$$r_1t_1 + r_2t_2 = \gamma(r_1t_1 \boxplus r_2t_2) = (\gamma r_1t_1 \boxplus \gamma r_2t_2) = (\gamma r_1 \boxplus \gamma r_2)(t_1 \boxplus t_2)$$

con $\gamma \in \ell^\infty$. Además, como S_i son sólidos, simétricos y por lo tanto cerrados para la suma directa por la Observación 3.3.3, se tiene que $\gamma r_1 \boxplus \gamma r_2 \in S_1$ y $t_1 \boxplus t_2 \in S_2$. Tomando $s_1 := \gamma r_1 \boxplus \gamma r_2$ y $s_2 := t_1 \boxplus t_2$ se tiene lo que queríamos probar.

Si tuvieramos que $s := r_1t_1+\ldots+r_nt_n$ con $r_i \in S_1$ y $t_i \in S_2$ y suponemos que el enunciado vale para todo $k < n$. Consideremos $s := (r_1t_1 + \ldots + r_{n-1}s_{n-1}) + r_nt_n$ y por inducción se tiene que

$$r_1t_1 + \ldots + r_{n-1}s_{n-1} = rt,\ r \in S_1, t \in S_2.$$

Entonces $s = rt + r_nt_n$, y usando la inducción nuevamente, ahora para el caso $n = 2$, se tiene probado el resultado para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

3.4. Conjuntos característicos

A continuación daremos la definición de conjunto característico y algunos ejemplos necesarios. A partir de esto, veremos algunos resultados que usaremos en los Capítulos 5 y 6.

Definición 3.4.1 *Si $\mu \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, definimos el conjunto de sucesiones*

$$O(\mu) := \{\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \lambda = \alpha\mu + \beta,\ \alpha \in \ell^\infty \text{ y } \#|\text{sop}\beta| < \infty\},$$

donde sopβ *representa el soporte de la sucesión β.*

Observación 3.4.2 *Si $\mu \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, entonces*

$$\lambda \in O(\mu) \Leftrightarrow \frac{''\lambda''}{\mu} \in \ell^\infty.$$

En efecto, salvo finitos $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lambda_n = \alpha_n\mu_n, \quad (\alpha \in \ell^\infty)$$

si y solo si $\frac{''\lambda''}{\mu} \in \ell^\infty$.

Definición 3.4.3 *Decimos que un conjunto $\Sigma \subseteq c_0^\star$ es* ***característico*** *si cumple la siguiente propiedad:*

$$\text{si } \lambda \in \text{c}_0^\star,\ \mu, \nu \in \Sigma \text{ y } \lambda \in \text{O}(\mu \boxplus \nu) \Rightarrow \lambda \in \Sigma.$$

Proposición 3.4.4 *Si $S \subseteq c_0$ un subespacio sólido y simétrico, entonces $S^\star \subseteq c_0^\star$ es un conjunto característico.*

Demostración. Sean $\lambda \in c_0^\star,\ \mu, \nu \in S^\star$ y $\lambda \in \text{O}(\mu \boxplus \nu)$, entonces $\frac{''\lambda''}{\mu\boxplus\nu} \in \ell^\infty$. Tenemos que probar que $\lambda \in S^\star$.
Escribimos

$$\lambda = \frac{''\lambda''}{\mu \boxplus \nu}\mu \boxplus \nu \in \ell^\infty \cdot S \subseteq S,$$

si $\mu \boxplus \nu \in S$ pues S es sólido. Por lo tanto, basta ver que $\mu \boxplus \nu \in S$.
Sean ϕ, ϕ_1 y ϕ_2 como en la Observación 3.3.9. Consideremos

$$\lambda \oplus_\phi 0 = {\phi_1}_*\lambda \in S,\ (S \text{ es simétrico}),$$

y

$$0 \oplus_\phi \mu = {\phi_2}_*\mu \in S,\ (S \text{ es simétrico}),$$

Entonces $\lambda \oplus_\phi \mu \in S$. Luego $\lambda \boxplus \mu = (\lambda \oplus_\phi \mu)^\star \in S^\star$. ■

Notación 3.4.5 *Notaremos ω a la sucesión armónica $(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$.*

Definición 3.4.6 *Para dos conjuntos característicos Σ y Σ' definimos el* ***producto tensorial interno*** *entre ambos como*

$$\Sigma \boxtimes \Sigma' := \{\lambda \in c_0^\star : \lambda \leq \mu \boxtimes \mu', \textit{para algún } \mu \in \Sigma \textit{ y } \mu' \in \Sigma'\}.$$

Definición 3.4.7 *Si $\Sigma \subseteq c_0^\star$, definimos el conjunto característico*

$$\Sigma_a := \{\lambda \in c_0^\star : \lambda \in O(\theta_a), \ \textit{para algún } \theta \in \Sigma\}.$$

Aquí, θ_a es la introducida en la Definición 3.3.4.

Definición 3.4.8 *Definimos el conjunto característico $\mathcal{O}_\omega := \{\lambda \in c_0^\star : \lambda \in O(\omega \boxplus \ldots \boxplus \omega)\}$ con la sucesión ω definida previamente.*

Proposición 3.4.9 *Si $\lambda \in c_0^\star$, entonces*

$$\lambda \boxtimes \omega \leq \lambda_a \leq 2\lambda \boxtimes \omega.$$

Demostración. Para una sucesión dada $\lambda \in c_0^\star$ elegimos una función inyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad n \mapsto (i_n, j_n)$ de manera tal que $(\lambda \boxtimes \omega)_n = \lambda_{i_n}/j_n$, y que existe lo vimos en la Observación 3.3.9. Podemos suponer también que

$$\text{si } \varphi(n) = (i, j), \ \varphi(m) = (i', j), \ i' < i \text{ y} \lambda_i = \lambda_{i'} \Rightarrow m < n.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, el subconjunto $S_n := \varphi(\{1, \ldots, n\}) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tiene la siguiente propiedad:

$$\text{si } i' \leq i \text{ y } j' \leq j \text{ y además } (i, j) \in S_n \Rightarrow (i', j') \in S_n.$$

Probemos esta propiedad separando en tres casos,

- si $i' = i$ y $j' < j$, $\frac{\lambda_i}{j} = \frac{\lambda_{i'}}{j} \leq \frac{\lambda_{i'}}{j'} \Rightarrow (i', j') \in S_n$
- si $i' < i$, $j = j'$ y $\lambda_i < \lambda_{i'} \Rightarrow \frac{\lambda_i}{j} < \frac{\lambda_{i'}}{j'} \Rightarrow (i', j') \in S_n$
- si $i' < i$, $j = j'$ y $\lambda_i = \lambda_{i'} \Rightarrow (i', j') \in \operatorname{Im}(\varphi) \Rightarrow \exists\, m < n$ tal que $(i', j') = (i_m, j_m) \in S_n$ por lo que supusimos acerca de φ.
- si $i' < i$ y $j' < j$, $\frac{\lambda_i}{j} \leq \frac{\lambda_{i'}}{j} \leq \frac{\lambda_{i'}}{j'} \Rightarrow (i', j') \in S_n$.

Sean $r := \max\{i : (i, 1) \in S_n\}$ y $j(i) := \max\{j : (i, j) \in S_n\}$ y notemos que $r \leq n = \sum_{i=1}^{r} j(i)$. En efecto, si π_1 es la proyección en la primera coordenada definimos $I_n := \pi_1(S_n) = \pi_1(S_n \cap (\mathbb{N} \times \{1\}))$ y escribimos

$$S_n = \bigsqcup_{i \in I_n} (\{i\} \times \mathbb{N}) \cap S_n.$$

Tomando cardinal a esta igualdad tenemos que

$$n = \#S_n = \sum_{i=1}^{\#I_n} \#(\{i\} \times \mathbb{N}).$$

Si $(i,j) \in (i \times \mathbb{N})$ como $(i, j(i)) \in S_n$ y $j \leq j(i) \Rightarrow (i,j) \in S_n$. Como además $j(i)$ es el máximo con esa propiedad, $\#(\{i\} \times \mathbb{N}) = j(i)$.
Si $(i,1) \in I_n \times \{1\}$ como $(r,i) \in S_n$ y $i \leq r \Rightarrow (i,1) \in S_n$. Como además r es el máximo con esa propiedad, $\#I_n = r$.
Por lo tanto, $n = \sum_{i=1}^{r} j(i) \geq r$ porque $j(i) \geq 1$ para todo i.
Además,

$$(\lambda \boxtimes \omega)_n \leq \frac{\lambda_i}{j(i)} \quad (1 \leq i \leq r) \tag{3}$$

y

$$\frac{\lambda_i}{j(i)+1} \leq (\lambda \boxtimes \omega)_n \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

En base a la desigualdad (3) tenemos que

$$(\lambda \boxtimes \omega)_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} j(i)(\lambda \boxtimes \omega)_n \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \leq (\lambda_a)_n,$$

y por la desigualdad (4)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &= \lambda_{i_n} + \sum_{i \neq i_n, i=1}^{n} \lambda_i \leq \left(j(i_n) + \sum_{i \neq i_n, i=1}^{n} (j(i)+1) \right) (\lambda \boxtimes \omega)_n \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} j(i) + n - 1 \right) (\lambda \boxtimes \omega)_n = (2n-1)(\lambda \boxtimes \omega)_n \leq 2n(\lambda \boxtimes \omega)_n, \end{aligned}$$

observando que $(\lambda \boxtimes \omega)_n = \lambda_{i_n}/j(i_n)$.
Si ahora dividimos por n en la inecuación anterior, tenemos que $\lambda_a \leq \lambda \boxtimes \omega$. ■

Corolario 3.4.10 *Para cualquier conjunto característico $\Sigma \subseteq c_0^\star$, se tiene que*

$$\Sigma_a = \Sigma \boxtimes \mathcal{O}_\omega.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \Sigma_a$, entonces existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\lambda \in O(\sigma_a)$. Por lo tanto, junto con la segunda desigualdad de la Proposición 3.4.9 tenemos que

$$\exists\ C > 0 \text{ tal que } \lambda \leq C\sigma_a \leq 2C\sigma \boxtimes \omega \Rightarrow \lambda \in \Sigma \boxtimes \mathcal{O}_\omega.$$

Por otro lado, para ver la otra inclusión tomemos un elemento $\lambda \in \Sigma \boxtimes \mathcal{O}_\omega$, entonces junto con la primera desigualdad de la proposición anterior tenemos que $\exists\ \sigma \in \Sigma, \mu \in \mathcal{O}_\omega$ y constantes $C, C' > 0$ tales que

$$\lambda \leq \sigma \boxtimes \mu \leq C\sigma \boxtimes (\omega \boxtimes \ldots \boxtimes \omega) \leq C'(\sigma_a \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_a) \Rightarrow \lambda \in \Sigma_a.$$

■

3.5. Números singulares

En esta sección definiremos para cada operador acotado T, su n-ésimo número singular, notado $s_n(T)$, y daremos algunas propiedades que necesitaremos para probar el teorema principal del trabajo (Teorema 5.0.16 en el Capítulo 5).
Por un lado, empezaremos viendo dos maneras equivalentes de definir a los números singulares y una desigualdad que permitirá relacionar los números singulares de dos operadores acotados dados y los del producto de los mismos. También veremos que si tenemos un operador compacto T, sus números singulares coinciden con los de su módulo $|T| := \sqrt{T^*T}$, y también con los autovalores de $|T|$. De esta manera podremos escribir al operador como

$$|T| = \sum_{n\geq 1} s_n(T) < \ \cdot\ , v_n > v_n$$

donde $\{v_n\}_{n\geq 1}$ es un sistema ortonormal de autovectores correspondientes a los autovalores $(s_n(T))_{n\geq 1}$.

Por otro lado, estos resultados también permitirán probar la segunda correspondencia biunívoca entre los ideales en $\mathfrak{B}$ y los subespacios sólidos y simétricos $S \subseteq c_0$, de ℓ^∞.

Definición 3.5.1 *Con las notaciones anteriores definimos los siguientes subespacios asociados al espacio de Hilbert $\mathcal{H}$:*

- $\mathfrak{G}_n := \{V \subseteq \mathcal{H}$*: V es un subespacio vectorial de dimensión n*$\}$.
- $\mathfrak{G}^n := \{W \subseteq \mathcal{H}$*: W es un subespacio vectorial, cerrado, de codimensión n*$\}$.

Observación 3.5.2 *La correspondencia $V \leftrightarrow V^\perp$ establece una biyección $\mathfrak{G}_n \leftrightarrow \mathfrak{G}^n$.*

Definición 3.5.3 *Sea $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, definimos el n-ésimo número singular de T como:*

$$s_n(T) := \inf_{V\in\mathfrak{G}_{n-1}} \|P_V \circ T\| = \inf_{V^\perp\in\mathfrak{G}^{n-1}} \|P_{V^\perp} \circ T\|,$$

donde P_V es la proyección ortogonal sobre V.

Observación 3.5.4 $\inf_{V\in\mathfrak{G}_{n-1}} \|P_{V^\perp} \circ T\| = \inf_{V\in\mathfrak{F}_{n-1}} \|P_{V^\perp} \circ T\|$.

Proposición 3.5.5 *Sea $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, entonces se tiene que*

$$s_n(T) = \inf_{W\in\mathfrak{G}^{n-1}} \|T \circ i_W\| = d(T, \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)),$$

donde $i_W : W \hookrightarrow \mathcal{H}_1$ es la aplicación inclusión.

Demostración. Probemos que

$$\inf_{W\in\mathfrak{G}^{n-1}} \|T \circ i_W\| = d(T, \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)).$$

Sean $W \in \mathfrak{G}^{n-1}$ y P_W la proyección ortogonal sobre W.

Entonces
$$\|T \circ i_W\| = \|TP_W\| = \|T - TP_W^{\perp}\| \geq d(T, \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)),$$
y por lo tanto, tomando ínfimo sobre los $W \in \mathfrak{G}^{n-1}$ deducimos que
$$\inf_{W \in \mathfrak{G}^{n-1}} \|T \circ i_W\| \geq d(T, \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)).$$
Por otro lado, para todo $K \in \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, se tiene que
$$\|T - K\| \geq \|(T-K)\mid_{Ker(K)}\| = \|T\mid_{Ker(K)}\| = \|T \circ i_{Ker(K)}\| \geq \inf_{W \in \mathfrak{G}^{n-1}} \|T \circ i_W\|.$$
Tomando ínfimo sobre los $K \in \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, nos queda probada la otra desigualdad.
Tenemos que
$$\begin{aligned} d(T^*, \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)) &= \inf_{W \in \mathfrak{G}^{n-1}} \|T^* \circ P_W\| \\ &= \inf_{W \in \mathfrak{G}^{n-1}} \|(T^* \circ P_W)^*\| \\ &= \inf_{W \in \mathfrak{G}^{n-1}} \|P_W \circ T\| \\ &= \inf_{V \in \mathfrak{G}_{n-1}} \|P_{V^{\perp}} \circ T\| \end{aligned}$$
y además que $d(T, \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)) = d(T^*, \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1))$. En efecto, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathfrak{F}_n(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^*)$ ya que $(\mathrm{Im}(f^*))^{\perp} = \mathrm{Ker}(f)$ y $\|T - f\| = \|T^* - f^*\|$, entonces tomando ínfimo tenemos que las distancias coinciden. Por lo tanto, queda probada la proposición.
■

Proposición 3.5.6 *Sean $S \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, para cada n y $m \in \mathbb{N}$ se tiene la siguiente desigualdad*
$$s_{n+m-1}(TS) \leq s_n(T)s_m(S).$$

Demostración. Vimos en la demostración de la Proposición 3.5.5 que para cada n y $m \in \mathbb{N}$ vale que
$$s_n(T) = d(T, \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)) \text{ y } s_m(S) = d(S, \mathfrak{F}_{m-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)).$$
Entonces dado $\varepsilon > 0$, existen $f_{n-1} \in \mathfrak{F}_{n-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $g_{m-1} \in \mathfrak{F}_{m-1}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tales que $\|T - f_{n-1}\| < s_n(T) + \varepsilon$ y $\|S - g_{m-1}\| < s_m(S) + \varepsilon$.
Por lo tanto,
$$\begin{aligned} s_{n+m-1}(TS) &\leq \|TS - f_{n-1}S - Tg_{m-1} + f_{n-1}g_{m-1}\| \\ &= \|(T - f_{n-1})(S - g_{m-1})\| \\ &\leq \|T - f_{n-1}\|\|S - g_{m-1}\| \\ &< (s_n(T) + \varepsilon)(s_m(S) + \varepsilon). \end{aligned}$$
Luego, haciendo tender ε a 0 tenemos la desigualdad probada. ■

Proposición 3.5.7 *Sean $S \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ y $R \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4)$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*
$$s_n(RTS) \leq \|R\| s_n(T) \|S\|.$$

Demostración. Por las dos formas de describir al n-ésimo número singular de un operador acotado (ver las Proposiciones 3.5.3 y 3.5.5) tenemos que

$$\begin{aligned} s_n(RTS) &= \inf_{V\in\mathfrak{G}_{n-1}} \|\pi_V \circ (RTS)\| \\ &\leq \inf_{V\in\mathfrak{G}_{n-1}} \|\pi_V \circ (RT)\|\|S\| \\ &= \inf_{W\in\mathfrak{G}^{n-1}} \|(RT)\circ i_W\|\|S\| \\ &\leq \|R\| \inf_{W\in\mathfrak{G}^{n-1}} \|T\circ i_W\|\|S\| \\ &= \|R\|s_n(T)\|S\|, \end{aligned}$$

Luego se tiene probada la desigualdad para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposición 3.5.8 *Sea $T \in \mathfrak{B}$ y consideremos su descomposición polar (ver el Teorema 2.1.3), digamos $T = U|T|$. Entonces:*

(a) $s_n(T) = s_n(|T|)$.

(b) *Si $T \in \mathfrak{K}$, se tiene también que $s_n(T) = \lambda_n(|T|)$, donde $\lambda_n =: \lambda_n(|T|)$ (ver Teorema 2.1.2).*

Demostración.

(a) Para cada $h \in \mathcal{H}$ se tiene,

$$\|Th\|^2 =< Th, Th >=< U|T|h, U|T|h >=< |T|h, U^*U|T|h >= \||T|h\|^2.$$

Si consideramos $W \in \mathfrak{G}^{n-1}$,

$$\|TP_W\| = \sup_{\|h\|=1} \|TP_W h\| = \sup_{\|h\|=1} \||T|P_W h\| = \||T|P_W\|.$$

y tomando ínfimo sobre los $W \in \mathfrak{G}^{n-1}$ tenemos la igualdad.

(b) Como $|T|$ es un operador compacto y autoadjunto, existe un sistema ortonormal de autovectores $\{v_n\}_{n\geq 1}$ (correspondiente a autovalores $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ tal que $|T| = \sum_{n\geq 1} \lambda_n < \cdot\,, v_n > v_n$.

Llamemos $J := \overline{< v_n, v_{n+1}, ... >}$ y tenemos que

$$\inf_{S\in\mathfrak{G}_{n-1}} \|TP_{S^\perp}\| \leq \|T|_J\| = \lambda_n,$$

luego $s_n(T) \leq \lambda_n$.

Si S es de dimensión $(n-1)$ y definimos $V_n :=< v_1, ..., v_n >$, entonces existe $x \in S^\perp \cap V_n$, con $\|x\| = 1$. Esto último resulta de considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & \mathcal{H} \arrow[d, "\pi"] \\ & S \end{tikzcd}$$

(donde i y π son las aplicaciones inclusión y proyección ortogonal, respectivamente) y de notar que $\dim(V_n) = n$ y que $\dim(S) = n-1$.

Luego, como $TV_n \subseteq V_n$ y los autovalores $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ están ordenados de manera decreciente, resulta que

$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |< x, v_k >|^2 \geq \lambda_n^2 \|x\|^2.$$

Entonces $\|Tx\| \geq \lambda_n$ y por lo tanto

$$\|TP_{S^\perp}\| = \sup_{\{y \in S^\perp,\ \|y\|=1\}} \|Ty\| \geq \lambda_n.$$

Si ahora tomamos ínfimo, nos queda que $s_n(T) \geq \lambda_n$.

Esto concluye la demostración. ∎

Observación 3.5.9 *Si $P \in \mathfrak{K}$ es un operador positivo, entonces exite un sistema ortonormal $\{u_n\}_{n\geq 1}$ tal que*

$$P = \sum_{n\geq 1} s_n(P) < \cdot, u_n > u_n.$$

Luego hay una isometría V definida en la base canónica por $V(e_n) := u_n$, tal que

$$VPV^* = \operatorname{diag}\, s(P).$$

En particular, si $T \in \mathfrak{K}$ podemos aplicar lo anterior para $P := |T|$. Así, si T está en un ideal I, entonces diag $s(P)$ *también está en I.*

Observación 3.5.10 *Notemos que si $T \in \mathfrak{K}$ y autoadjunto, entonces*

$$\lambda_j = \min_{W \in \mathfrak{F}_{j-1}} \max_{f \in W^\perp, \|f\|=1} < Tf, f >$$

son los autovalores de T.

3.6. Relación entre subespacios sólidos y simétricos, y conjuntos característicos

Veamos ahora la correspondencia entre los subespacios sólidos y simétricos y los conjuntos característicos. Esta demostración está basada en la prueba de la correspondencia biunívoca, entre ideales propios de $\mathfrak{B}$ y los conjuntos característicos de $c_0^\star$, propuesta por J.W. Calkin en [6].

Teorema 3.6.1 *Existe una correspondencia biunívoca entre los subespacios $S \subseteq c_0$ sólidos y simétricos de ℓ^∞ y los conjuntos característicos $\Sigma \subseteq c_0^\star$.*
La definimos de esta manera,

$$\{S \subseteq c_0 : S \textit{ es un subespacio sólido y simétrico de } \ell^\infty\} \longleftrightarrow \{\Sigma \subseteq c_0^\star : \Sigma \textit{ es un conjunto caracteristico}\}$$

$$S \longmapsto S^\star := S \cap c_0^\star$$

$$S(\Sigma) := \{\alpha \in c_0 : [\![|\alpha|]\!] \cap \Sigma \neq \emptyset\} \longleftarrow\!\shortmid \Sigma$$

Demostración. Vimos en la Proposición 3.4.4 que $S^\star$ es un conjunto característico si S es un subespacio sólido y simétrico.
Probemos que $S(\Sigma)$ es un subespacio, sólido y simétrico. Para ver que es un suespacio consideremos α y β en $S(\Sigma)$, y definamos las sucesiones en Σ, $\lambda := |\alpha|^\star$, $\mu := |\beta|^\star$ y $\nu := |\alpha+\beta|^\star$. Notemos que

$$2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) - |\alpha+\beta|^2 = |\alpha-\beta|^2$$

pues

$$2(\overline{\alpha}\alpha + \overline{\beta}\beta) - \overline{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta) = \overline{(\alpha-\beta)}(\alpha-\beta).$$

Escribimos

$$\nu_n^2 = \min_{V\in\mathfrak{F}_{n-1}} \max_{f\in V^\perp, \|f\|=1} < |\alpha+\beta|^2 f, f >,$$

$$\lambda_j^2 = \min_{W\in\mathfrak{F}_{j-1}} \max_{f\in W^\perp, \|f\|=1} < |\alpha|^2 f, f >$$

y

$$\mu_k^2 = \min_{U\in\mathfrak{F}_{k-1}} \max_{f\in U^\perp, \|f\|=1} < |\beta|^2 f, f >$$

entonces $\nu_n^2 \leq 2(\lambda_j^2 + \mu_k^2)$ para $j+k \leq n+1$. Supongamos que esta última desigualdad no ocurre, entonces tendríamos que $\nu_n^2 > 2(\lambda_j^2+\mu_k^2)$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\nu_n^2}{2} &> \min_{W\in\mathfrak{F}_{j-1}} \max_{f\in W^\perp, \|f\|=1} < |\alpha|^2 f, f > + \min_{U\in\mathfrak{F}_{k-1}} \max_{f\in U^\perp, \|f\|=1} < |\beta|^2 f, f > \\
&\geq \min_{W+U\in\mathfrak{F}_{j+k-2}} \Big(\max_{f\in W^\perp, \|f\|=1} < |\alpha|^2 f, f > + \max_{f\in U^\perp, \|f\|=1} < |\beta|^2 f, f > \Big) \\
&\geq \min_{V\in\mathfrak{F}_{j+k-2}} \max_{f\in V^\perp, \|f\|=1} < \frac{|\alpha+\beta|^2}{2} f, f > \\
&\geq \min_{V\in\mathfrak{F}_{n-1}} \max_{f\in V^\perp, \|f\|=1} < \frac{|\alpha+\beta|^2}{2} f, f > = \frac{\nu_n^2}{2},
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo.
Consideremos la sucesión $(r_n)_{n\geq 1}$ definida como $\frac{n}{2}$ si n es par, y $\frac{n+1}{2}$ si n es impar. Entonces $r_n + r_n \leq n+1$, luego por la desigualdad anterior tenemos que $\nu_n^2 \leq 2(\lambda_{r_n}^2 + \mu_{r_n}^2)$. Para todo $n \geq 1$ tenemos por el Lema 3.3.10 que

$$\max\{\lambda_n, \mu_n\} \leq (\lambda \boxplus \mu)_n.$$

A partir de todo lo que vimos se tiene que para todo $n \geq 1$

$$\nu_n \leq 2(\lambda_{r_n}^2 + \mu_{r_n}^2) \leq 4\max\{\lambda_{r_n}, \mu_{r_n}\} \leq 4(\lambda \boxplus \mu)_{r_n},$$

como Σ es característico entonces $\lambda \boxplus \mu \in \Sigma$ y por lo tanto, $\nu \in \Sigma$. Luego $|\alpha+\beta| \in S(\Sigma)$. Probemos que $S(\Sigma)$ es sólido. Sea $\beta \in S(\Sigma)$ y $\alpha \in \ell^\infty$. Definimos $\lambda := |\beta|^\star \in \Sigma$ y $\mu := |\alpha\beta|^\star$ y probemos que $\mu \in \Sigma$. Como al igual que antes,

$$\lambda_n^2 = \min_{V \in \mathfrak{F}_{n-1}} \max_{f \in V^\perp, \|f\|=1} < |\beta|^2 f, f >$$

y

$$\mu_n^2 = \min_{V \in \mathfrak{F}_{n-1}} \max_{f \in W^\perp, \|f\|=1} < |\alpha\beta|^2 f, f >,$$

entonces si consideremos

$$< |\alpha\beta|^2 f, f >= \sum_{n \geq 1} |\alpha_n|^2 |\beta_n|^2 |f_n|^2 \leq C \sum_{n \geq 1} |\beta_n|^2 |f_n|^2 = C < |\beta|^2 f, f >$$

tenemos que $\mu \leq C\lambda \in \Sigma \Rightarrow \mu \in \Sigma$. Luego $\alpha\beta \in S(\Sigma)$.

Para ver que $S(\Sigma)$ es simétrico, tomemos $f \in Emb(\mathbb{N})$ y $\alpha \in S(\Sigma)$ y probemos que $f_*(\alpha) \in S(\Sigma)$. Supongamos primero que $\#\mathrm{Dom}(f) < \infty$, entonces la imagen también es finita y podemos considerar una biyección $g \in Emb(\mathbb{N})$ tal que $g\,|_{\mathrm{Dom}(f)} = f$ y sea $\chi \in \ell^\infty$ la función característica de $\mathrm{Dom}(f)$. Si llamo $\beta := \alpha\chi_{\mathrm{Dom}(f)} \in \ell^\infty S(\Sigma) \subseteq S(\Sigma)$, entonces notemos que $f_*(\alpha) = g_*(\beta) \in S(\Sigma)$.

Supongamos ahora que $\mathrm{Dom}(f)$ es infinito y escribámoslo como unión disjunta de dos subconjuntos infinitos, o sea, $\mathrm{Dom}(f) = B_1 \amalg B_2$. Entonces $\mathrm{Im}(f) = f(B_1) \amalg f(B_2)$ y notemos que B_i^c y $f(B_i)^c$ (los complementos en $\mathbb{N}$) son infinitos. Como en el caso anterior podemos considerar las funciones $g_i \in Emb(\mathbb{N})$ tales que $g_i\,|_{B_i} = f_i$ y $\beta_i := \alpha\chi_{B_i} \in \ell^\infty S(\Sigma) \subseteq S(\Sigma)$ para $i = 1, 2$. Luego, escribimos

$$g_{1*}(\beta_1) + g_{2*}(\beta_2) = f_*(\alpha) \in S(\Sigma).$$

Resulta entonces que $S(\Sigma)$ es simétrico.

Podemos concluir que $S(\Sigma)$ es un subespacio sólido y simétrico y por tanto, $\Sigma(S(\Sigma)) = S(\Sigma) \cap c_0^\star$.
Veamos que $S(\Sigma) \cap c_0^\star = \Sigma$. Es suficiente probar que si $\alpha \in S(\Sigma)$ entonces $[\![|\alpha|]\!] \cap \Sigma = \{\alpha\}$. En efecto, llamemos $\beta := |\alpha|$. Por el Lema 3.3.7 se tiene que existe $f \in Emb(\mathbb{N})$ tal que $f_*(\beta^\star) = \beta$, entonces $[\![|\alpha|^\star]\!] = [\![|\alpha|]\!]$, y por otro lado, $[\![|\alpha|]\!] = [\![\alpha]\!]$.
Por la Notación 3.3.6 tenemos que $\emptyset \neq [\![|\alpha|]\!] \cap \Sigma \subseteq [\![|\alpha|]\!] \cap c_0^\star = \{|\alpha|\}$ y por lo tanto, $[\![|\alpha|]\!] \cap \Sigma = \{\alpha\}$. Eso implica que $\alpha \in \Sigma$.
La otra inclusión es clara.

Veamos que la otra composición también es la identidad, o sea, si S es un subespacio sólido y simétrico entonces $S(S^\star) = S$.
Si $\alpha \in S(S^\star)$ entonces existen $\beta \in c_0$ y $f \in \mathcal{E}$ tales que $f_*(\beta) = |\alpha| \in S$, porque S es simétrico. Luego $\alpha \in S$ y por lo tanto, $S(S^\star) \subseteq S$.
Si $\alpha \in S$ entonces existe $f \in \mathcal{E}$ tal que $f_*(\alpha) = |\alpha|^\star \in S^\star$. Luego $\alpha \in S(S^\star)$. ■

3.7. Relación entre subespacios sólidos y simétricos e ideales propios de $\mathfrak{B}$

A partir de las definiciones vistas y los resultados sobre números singulares, estamos en condiciones de estudiar la correspondencia biunívoca entre subespacios sólidos y simétrico en c_0 de ℓ^∞ y los ideales del conjunto de operadores lineales y acotados.
Comencemos probando una proposición previa que facilitará la demostración de la correspondencia.

Proposición 3.7.1 *Sean* $I \subseteq \mathfrak{B}$ *un ideal propio y* $S(I) := \{\alpha \in \ell^\infty : (\text{diag } \alpha) \in I\}$. *Si llamamos* $\text{diag } S(I) := \{\text{diag } \alpha : \ \alpha \in S(I)\}$, *entonces* $I = \mathfrak{B}(\text{diag } S(I))\mathfrak{B}$, *donde el operador diagonal* diag α *fue caracterizado en la Definición 2.2.10.*

Demostración. Claramente se ve la inclusión $I \supseteq \mathfrak{B}(\text{diag } S(I))\mathfrak{B}$.
Ahora bien, tomemos un operador $T \in I$ y por medio de su descompoción polar escribamos $T = U|T|$ (ver el Teorema 2.1.3). Notemos que $U^*T = |T| \in I \subseteq \mathfrak{K}$, pues I es un ideal propio de $\mathfrak{B}$ (ver 2.2.8). Entonces $|T|$ es un operador compacto y autoadjunto, luego existe un operador unitario W de manera que $W^*|T|W$=diag α. Por lo tanto,

$$T = UW(\text{diag})\alpha W^* \in \mathfrak{B}(\text{diag } S(I))\mathfrak{B}$$

y así queda demostrada la proposición. ■

Proposición 3.7.2 *Dado un ideal* I *de* $\mathfrak{B}$, *el subespacio* $S(I) \subseteq \ell^\infty$ *definido previamente es un subespacio sólido y simétrico.*

Demostración. Para ver que $S(I)$ es sólido, tomemos dos sucesiones, $z \in \ell^\infty$ y $\alpha \in S(I)$ y veamos que $z\alpha \in S(I)$. Como diag $\alpha \in I$, entonces $(\text{diag } z\alpha) = (\text{diag } z)(\text{diag } \alpha) \in I$, pues diag $z \in \mathfrak{B}$ por Lema 2.2.11. Luego $z\alpha \in S(I)$.
Veamos ahora que $S(I)$ es un subespacio símetrico. Sean $f \in Emb(\Gamma)$ y $\alpha \in S(I)$ y veamos que $f_*\alpha \in S(I)$.
Por la ecuación (1) podemos escribir $(\text{diag } f_*\alpha) = U_f(\text{diag } \alpha)U_f^*$ y como $U_f, U_f^* \in \mathfrak{B}$ y $(\text{diag } \alpha) \in I$ entonces $(\text{diag } f_*\alpha) \in I$. Por lo tanto, $f_*\alpha \in S(I)$. ■
Debido al trabajo [9] de Garling, tenemos la siguiente correspondencia entre ideales propios de $\mathfrak{B}$ y subespacios sólidos y simétricos de c_0.

Teorema 3.7.3 *Existe una correspondencia biunívoca entre los ideales propios de* $\mathfrak{B}$ *y los subespacios sólidos y simétricos de* c_0, *o sea,*

$$\{I \subseteq \mathfrak{B} : I \textit{ es un ideal propio}\} \longleftrightarrow \{S \subseteq c_0 \subseteq \ell^\infty : S \textit{ es un subespacio sólido y simétrico de } \ell^\infty\},$$

$$I \longmapsto S(I) := \{\alpha \in \ell^\infty : \ diag\ \alpha \in I\}$$

y su inversa

$$J(S) := < diag\ \alpha : \alpha \in S > \longleftarrow\!\shortmid S\ .$$

Demostración. Probemos que efectivamente son inversos. Es claro por la Proposición 3.7.1 que $J(S(I)) = I$, para $I \subseteq \mathfrak{B}$ ideal propio.
Mostremos que si $S \subseteq c_0$ es un subespacio sólido y simétrico de ℓ^∞ se tiene que $S(J(S)) = S$.
Por definición, es claro que $S(J(S)) \supseteq S$. Veamos la otra inclusión.
Sea $\beta \in S(J(S))$, entonces existen finitos f_i y $g_i \in \mathfrak{B}$ y $\alpha_i \in S$, para $i = 1, ..., n$, tales que diag $\beta = \sum_{i=1}^n f_i(\text{diag } \alpha_i)\ g_i$.
Consideremos para cada $i = 1, ..., n$, las siguientes biyecciones entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$

$$\theta_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \theta_i(m) := n(m-1) + i.$$

Definimos para cada $i = 1, ..., n$, los operadores $X_i := U_{\theta_i}$. Notemos que $X_i^* = U_{\theta_i}^* = U_{\theta_i^\dagger}$ y por lo tanto, $X_i^* X_j = \delta_{i,j}$ para todo $i, j = 1, ..., n$.
Luego,

$$\begin{aligned}
\text{diag } \beta &= \left(\sum_{i=1}^n f_i X_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^n X_i(\text{diag } \alpha_i) X_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^n X_i g_i\right) \\
&= f\left(\text{diag } \left(\sum_{i=1}^n (\theta_i)_*(\alpha_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) g \\
&= f(\text{diag } \alpha)\ g,
\end{aligned}$$

donde $\alpha := \left(\sum_{i=1}^n (\theta_i)_*(\alpha_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $f := \sum_{i=1}^n f_i X_i^*$ y $g := \sum_{i=1}^n X_i g_i$.
Dado que S es sólido podemos suponer que $\alpha \geq 0$ y que $\beta \geq 0$. Además, dado que S es también simétrico podemos suponer que $\alpha \searrow 0$ y que $\beta \searrow 0$.
Pero entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\beta_n = s_n(\text{diag } \beta) = s_n(f(\text{diag } \alpha)\ g) \leq \|f\|\|g\| s_n(\text{diag } \alpha) = \|f\|\|g\|\alpha_n = C\alpha_n,$$

usando la Proposición 3.5.7, donde $C := \|f\|\|g\|$ es una constante.
Por lo tanto, si $\frac{''\beta''}{\alpha}$ es la sucesión definida en el n-ésimo lugar como

$$\left(\frac{''\beta''}{\alpha}\right)_n := \begin{cases} \frac{\beta_n}{\alpha_n} & \alpha_n \neq 0 \\ 0 & \alpha_n = 0 \end{cases},$$

resulta que $\|\lambda\|_\infty \leq C$, entonces $\lambda \in \ell^\infty$ y luego $\beta = \lambda \cdot \alpha \in S$. Esto prueba la inclusión que restaba ver y entonces se tiene que $S(J(S)) = S$. ■

Proposición 3.7.4 *Sean I y $J \subseteq \mathfrak{B}$ ideales propios, entonces $S(IJ) = S(I)S(J)$.*

Demostración. Tomemos una sucesión $\alpha \in S(IJ)$, entonces

$$\begin{aligned}
|\alpha| \in S(IJ) &\Leftrightarrow \exists\ f \in I, g \in J \text{ tal que } (\text{diag } \lambda) = fg \\
&\Leftrightarrow \exists\ f \in I, g \in J \text{ tal que } (\text{diag } \lambda) = |fg| \\
&\Leftrightarrow \exists\ f \in I, g \in J \text{ tal que } \lambda = s(fg).
\end{aligned}$$

Por la Proposición 3.5.6 tenemos que

$$\lambda_{2n-1}(RS) \leq \lambda_n(R)\lambda_n(S)$$

y

$$\lambda_{2n}(RS) \leq \lambda_n(R)\lambda_{n+1}(S) \leq \lambda_n(R)\lambda_n(S).$$

Entonces

$$\lambda(RS) \leq \lambda(R)\lambda(S) \oplus \lambda(R)\lambda(S) \in S(I)S(J),$$

porque $\lambda(R) \in S(I)$ y $\lambda(S) \in S(J)$ y por la Observación 3.3.3.
Luego, como $S(I)$ y $S(J)$ son subespacios sólidos y simétricos, usando la Proposición 3.2.5 tenemos que $\lambda(RS) \in S(I)S(J)$.
Para ver la otra inclusión tomemos $\alpha \in S(I)$ y $\beta \in S(J)$, entonces

$$\text{diag } \alpha\beta = (\text{diag } \alpha)(\text{diag } \beta) \in IJ \Rightarrow \alpha\beta \in S(IJ).$$

■

Proposición 3.7.5 *Sea $S \subseteq c_0$ un subespacio sólido y simétrico y*

$$J_S := \{T \in \mathfrak{B} : s(T) \in S\}.$$

Entonces $J_S = J(S)$.

Demostración. Si $T \in J_S$, por la Observación 3.5.9 se tiene que diag $s(T) \in J_S$ y por el Teorema 3.7.3 tenemos que

$$\alpha \in S(J(S)) = S,$$

por lo tanto, $T \in J(S)$. Queda probado que $J_S \subseteq J(S)$.
Sea ahora $T \in J(S)$, por la Observación 3.5.9 se tiene que diag $s(T) \in J(S)$. Entonces $s(T) \in S \Rightarrow T \in J_S$. ■
A partir de las correspondencias probadas en las Secciones 3.7 y 3.6 podemos probar que existe una correspondencia biunívoca entre los ideales propios de $\mathfrak{B}$ y los conjuntos característicos de $c_0^\star$. Esto resultado es debido al trabajo [6] de Calkin.

Corolario 3.7.6 *Existe una correspondencia biunívoca definida de la siguiente manera*

$$\{I \subseteq \mathfrak{B} : I \text{ es un ideal propio}\} \longleftrightarrow \{\Sigma \subseteq c_0^\star : \Sigma \text{ es un conjunto caracteristico}\}$$

$$I \longmapsto \sigma(I) := \{s(T) : T \in I\}$$

$$I(\Sigma) := \{T : s(T) \in \Sigma\} \longleftarrow\!\shortmid \Sigma\,.$$

Demostración. Probemos que, si I es un ideal propio entonces $\Sigma(S(I)) = \sigma(I)$. Sea $\alpha \in c_0^\star$ tal que diag $\alpha \in I$, entonces $s(\text{diag } \alpha) = \alpha \in \sigma(I)$. Esto prueba que $\Sigma(S(I)) \subseteq \sigma(I)$.
Supongamos que $s(T) \in \sigma(I)$, entonces $T \in I$ y por la Observación 3.5.9 se tiene que $s(T) \in I$. Luego, $s(T) \in S(I) \cap c_0^\star = \Sigma(S(I))$.
Falta ver que, si Σ es un conjunto característico entonces $I(\Sigma) = J(S(\Sigma))$.
Si $T \in I(\Sigma)$ entonces $s(T) \in \Sigma$, luego diag $s(T) \in J(S(\Sigma))$. Por la Observación 3.5.9 se tiene que $T \in J(S(\Sigma))$.
Para ver la otra inclusión, basta ver que los operadores de la forma (diag α) pertenecen a $I(\Sigma)$, pues $I(\Sigma)$ es un ideal. Veamos ambas afirmaciones.
Para la primera podemos suponer que $\alpha \geq 0$ y que la sucesión está ordenada de manera creciente, pues $S(\Sigma)$ es un subespacio sólido y simétrico y $J(S(\Sigma))$ es un ideal (ver Teoremas 3.7.3 y 3.6.1). En estas condiciones, se ve claramente que $s(\text{diag } \alpha) = \alpha \in \Sigma$.
Probemos ahora que $I(\Sigma)$ es un ideal. Sean $A, B \in I(\Sigma)$, veamos que $A + B \in I(\Sigma)$. Llamemos $\lambda := s(|A|)$, $\mu := s(|B|)$ y $\nu := s(|A + B|)$ y con esta misma notación, al igual que en la prueba del Teorema 3.6.1 se sigue que $\nu \in \Sigma$, que era lo que queríamos probar. De la misma forma se prueba que, si $A \in I(\Sigma)$ y $X \in \mathfrak{B}$ entonces $AX \in I(\Sigma)$. Se sigue que $I(\Sigma)$ es un ideal. ■

4. p-clases de Schatten

Este capítulo estará basado en el trabajo [11] de C. Pearcy y D. Topping. Empezaremos definiendo el conmutador entre dos ideales del anillo $\mathfrak{B}$, centrándonos en dos ejemplos concretos: el ideal de los operadores compactos y los de las p-clases de Schatten, $\mathcal{C}_p$ para $p > 1$. En este punto intervienen los números singulares que vimos en el capítulo anterior. Probaremos también que las clases de Schatten son ideales en $\mathfrak{B}$.
Por último, calcularemos explícitamente los conmutadores de los ideales $\mathcal{C}_{2p}$ para $p > 1$ y $\mathfrak{K}$, casos particulares del cálculo de conmutadores para ideales cualesquiera que se describirá en el próximo capítulo. Hacemos una distinción en cuanto a los ideales $\mathcal{C}_{2p}$ y $\mathfrak{K}$, porque las demostraciones que damos en el presente capítulo son de una naturaleza más constructiva que las del Capítulo 5.

Definición 4.0.7 *Si $A, B \in \mathfrak{B}$ son operadores lineales y acotados, escribamos $[A, B]$ como el* ***conmutador***

$$[A, B] := AB - BA.$$

Si I y $J \in \mathfrak{B}$ son ideales, definimos el conmutador como

$$[I, J] := \bigcup_{r=1}^{\infty} [I, J]_r,$$

donde

$$[I, J]_r := \left\{ T = \sum_{i=1}^{r} [A_i, B_i] : A_i \in I,\ \ B_i \in J \right\}.$$

Observación 4.0.8 *Sean $I, J \in \mathfrak{B}$ ideales, entonces por el Corolario 2.2.2 tenemos que*

$$[I, J] \subseteq IJ.$$

4.1. El ideal $\mathcal{C}_p \subseteq \mathfrak{B}$

Definición 4.1.1 *Para $0 < p < \infty$, definimos la p-clase de Schatten como*

$$\mathcal{C}_p := \left\{ T \in \mathfrak{B} : \sum_{n \geq 1} s_n(T)^p < \infty \right\}.$$

Definición 4.1.2 *Si $\alpha := (\alpha_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en el espacio ℓ^p, y $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es una base de Hilbert ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces definimos el operador $(\text{diag } \alpha)$ sobre $\mathcal{H}$ como*

$$(\text{diag } \alpha)(h) := \sum_{n\geq 1} \alpha_n < h, e_n > e_n,\ \forall\ h \in \mathcal{H}.$$

Proposición 4.1.3 *El subespacio $\mathcal{C}_p$ es igual al ideal generado por*

$$\{\text{diag } \alpha : \alpha := (\alpha_n)_{n\geq 1} \in \ell^p\}.$$

Demostración. Por la Proposición 3.7.5 tenemos que

$$< \text{diag } \alpha : \alpha \in \ell^p >=: J(\ell^p) = J_{\ell^p} = \mathcal{C}_p.$$

■

Observación 4.1.4 *Mostramos antes que $\mathcal{C}_p \subsetneq \mathfrak{B}$ es un ideal, entonces por el Teorema 2.2.8 se tiene que $\mathcal{C}_p \subseteq \mathfrak{K}$.*

Lema 4.1.5 *Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ entonces $\mathcal{C}_p\mathcal{C}_q = \mathcal{C}_r$.*

Demostración. Por la proposición 3.7.4 y el Teorema 3.7.3 tenemos que $S(\mathcal{C}_p\mathcal{C}_q) = S(\mathcal{C}_p)S(\mathcal{C}_q) = \ell^p\ell^q$.
Veamos que $\ell^p\ell^q = \ell^r$. Supongamos que $\alpha \in \ell^r$ y escribimos para u una sucesión de módulo 1,

$$\alpha = u|\alpha| = (u|\alpha|^{\frac{r}{p}})|\alpha|^{\frac{r}{q}} \in \ell^p\ell^q.$$

Para ver la otra inclusión, por el Lema 2.2.9 y el Teorema 3.7.3, basta probar que si $\alpha \in \ell^p$ y $\beta \in \ell^q$ entonces $\alpha\beta \in \ell^r$. Resulta entonces por Holder que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n\geq 1}(\alpha_n\beta_n)^r\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\sum_{n\geq 1}\alpha_n^r\beta_n^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left(\left(\sum_{n\geq 1}(\alpha_n^r)^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\sum_{n\geq 1}(\beta_n^r)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty. \end{aligned}$$

Entonces $\alpha\beta \in \ell^r$.
Por lo tanto, $S(\mathcal{C}_p\mathcal{C}_q) = \ell^r = S(\mathcal{C}_r)$ y por el Teorema 3.7.3 tenemos que $\mathcal{C}_p\mathcal{C}_q = \mathcal{C}_r$. ■

4.2. Resultados de Pearcy y Topping acerca de conmutadores

En el siguiente teorema, Pearcy y Topping calculan los conmutadores $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$ y $[\mathcal{C}_{2p}, \mathcal{C}_{2p}]$ para todo $p > 1$.

Teorema 4.2.1 *Bajo las condiciones previas valen los siguientes dos resultados:*

(a) $\mathfrak{K} = [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$.

(b) $\mathcal{C}_p = [\mathcal{C}_{2p}, \mathcal{C}_{2p}]$ *para todo* $p > 1$.

Demostración. Es posible demostrar los dos resultados de manera análoga. Cuando sea necesario distinguir cuál es el ideal al que nos referimos, lo notaremos.
Una de las inclusiones es clara, porque $\mathfrak{K} \supseteq [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$ porque $\mathfrak{K}$ es un ideal de $\mathfrak{B}$ y resta ver que

$$\mathcal{C}_p \supseteq [\mathcal{C}_{2p}, \mathcal{C}_{2p}], \text{ para todo } p > 1.$$

Por el Lema 4.1.5 tenemos que

$$\mathcal{C}_{2p}\mathcal{C}_{2p} = \mathcal{C}_p$$

pues $\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}$, entonces teenmos probada la inclusión.
Veamos la otra inclusión. Fijemos un isomorfismo unitario entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Podemos identificar un operador $T \in \mathfrak{B}$ con una matriz de tamaño 2x2, digamos $\widetilde{T} := \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$, que actua sobre $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ de la manera usual.
Escribamos

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_4 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Podemos suponer que T es un operador autoadjunto, si no escribimos a T como combinación lineal de dos operadores autoadjuntos, o sea

$$T = \frac{T + T^*}{2} + i\frac{T - T^*}{2i}$$

y probamos el resultado para cada operador autoadjunto por separado.
Ahora supogamos que T es autoadjunto y $T \in \mathfrak{K}$ (resp. en $\mathcal{C}_p$) y veamos que $T \in [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$ (resp. en $[\mathcal{C}_{2p}, \mathcal{C}_{2p}]$). Esto es equivalente a probar que la matriz $\widetilde{T}$ es suma de conmutadores de cada tipo, respectivamente, y el motivo es el isomorfismo que notamos antes.
Observemos que si los dos primeros sumandos de la ecuación (5) son una suma finita de conmutadores, eso va a implicar que los dos siguientes también. Esto es porque se puede escribir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $T_i \in \mathfrak{K}$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$ (resp. en $\mathcal{C}_p$ y esto es porque cada T_i se escribe como T compuesto a izquierda por la proyección en una coordenada y a derecha por la inclusión, luego usando la Proposición 3.5.7 queda demostrado que $T_i \in \mathcal{C}_p$). Además, junto con la observación previa que hicimos, es suficiente probar que $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\in [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$ (resp. en $[\mathcal{C}_{2p}, \mathcal{C}_{2p}]$).
Comencemos viendo que $\begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en un conmutador. Consideremos la descomposición polar de T_2, o sea, $T_2 = U|T_2|$, donde U es una isometría parcial y el conmutador

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} U|T_2|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & |T_2|^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} U|T_2|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & |T_2|^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 0 & |T_2|^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U|T_2|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & U|T_2| \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como T_2 es un operador compacto (resp. un operador en $\mathcal{C}_p$), entonces $|T_2|^{\frac{1}{2}}$ también es compacto (resp. es un operador en $\mathcal{C}_{2p}$). Para mostrar esto, consideremos la forma diagonalizada (ver el Teorema 2.1.2) de $|T_2|$, o sea , $|T_2| = \sum_{n\geq 1} s_n(|T_2|) < \cdot , v_n > v_n$ y $\{v_n\}_{n\geq 1}$ un sistema ortonormal.
Entonces

$$|T_2|^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\geq 1} \lambda_n{}^{\frac{1}{2}} < \cdot , v_n > v_n,$$

luego como $s_n(|T_2|) \to 0$, cuando $n \to \infty$ y usando el Lema 2.2.11 se tiene que $|T_2|^{\frac{1}{2}}$ es compacto.
Para el caso en que $|T_2|$ sea un operador en $\mathcal{C}_p$,
como $(s_n(|T_2|))_{n\geq 1} \subseteq \ell^p$ entonces $(s_n(|T_2|^{\frac{1}{2}}))_{n\geq 1} \subseteq \ell^{2p}$ y por lo tanto, $|T_2|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}_{2p}$.
Concluimos entonces que $\begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$ (resp. en $[\mathcal{C}_{2p}, \mathcal{C}_{2p}]$)
Para ver que $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$ (resp. en $[\mathcal{C}_{2p}, \mathcal{C}_{2p}]$) usaremos el siguiente lema.

Lema 4.2.2 *Si $S \in \mathfrak{B}$, entonces el operador $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ se puede escribir como suma de dos conmutadores, digamos $[A, B] + [C, D]$. Además, si $S \in \mathfrak{K}$ (resp. en $\mathcal{C}_p$), entonces A, B, C y D se pueden tomar en $\mathfrak{K}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ (resp. en $\mathcal{C}_{2p}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$).*

La demostración del lema la veremos al finalizar la prueba del teorema.

Si aplicamos el lema anterior para $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que es suma de dos conmutadores de la forma que queríamos probar.
Acabamos de ver entonces que

$$\mathfrak{K} \subseteq [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] \text{ y } \ \mathcal{C}_p \subseteq [\mathcal{C}_{2p}, \mathcal{C}_{2p}], \text{ para todo } p > 1.$$

Concluimos entonces la demostración del teorema. ■

Lema 4.2.3 *La sucesión $(\beta_n)_{n\geq 1}$ dada por $(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ...)$ se puede reordenar (a la reordenación la llamamos $(\alpha_n)_{n\geq 1}$), de manera que la serie $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots$ converja condicionalmente a 0 y se tenga la siguiente propiedad*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right| \leq \frac{4}{n} \qquad (1 \leq n < \infty). \tag{6}$$

Demostración. Definimos $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Sean $k_1 \in \mathbb{N}$ y $\alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_{k_1}$ términos negativos, (en el orden de aparición de la sucesión original), tales que la suma parcial $\alpha_1 + ... + \alpha_{k_1}$ es negativa. Ahora, definimos $\alpha_{k_1+1} = \frac{1}{2}$. Observar que la suma parcial $\alpha_1 + ... + \alpha_{k_1} + \alpha_{k_1+1}$ es positiva. Sea $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$, y agregamos $\alpha_{k_1+2}, ..., \alpha_{k_2}$ (nuevamente, en el orden de aparición de la sucesión original), tales que $\alpha_1 + ... + \alpha_{k_2}$ es negativa. Continuando este procedimiento, obtenemos la serie $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n + ...$, cuya suma es 0, y la podemos describir así

$$0 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - ...$$

Observamos las siguientes dos propiedades:

1- La serie no contiene dos términos positivos consecutivos.

2- La serie no contiene cuatro términos negativos consecutivos.

Esto último es consecuencia de la siguiente desigualdad elemental,

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1},$$

que vale para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto ocurre si y solo si

$$\frac{1}{k} \leq \frac{3k(3k+1) + (3k+1)(3k-1) + 3k(3k-1)}{3k(3k+1)(3k-1)}$$

si y solo si

$$3k(3k+1)(3k-1) \leq (9k^2 + 3k + 9k^2 - 1 + 9k^2 - 3k)k$$

si y solo si

$$27k^3 - 3k \leq 27k^3 + 9k^2 - k$$

si y solo si

$$0 \leq 9k^2 + 2k$$

y esto vale para todo $k \in \mathbb{N}$.
Probemos que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right| \leq \frac{4}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

por inducción en n.
Si $n = 1$ es claro.
Si $n = 2 \Rightarrow |0 + 1| = 1 \leq 4/2 = 2$.
Si $n = 3 \Rightarrow |0 + 1 - 1/2| = 1/2 \leq 4/3$.
Si $n \geq 4$, entonces consiremos la suma

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \alpha_{n+1}.$$

Notemos que α_{n+1} es de la forma $1/j_{n+1}$ o bien $-1/j_{n+1}$ con $j_{n+1} \in \mathbb{N}$ y probemos la desigualdad (6). Entonces separemos la demostración en estos dos posibles casos:

- Si $\alpha_{n+1} = -1/j_{n+1}$ (< 0) significa que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq 0$ y además $(n+1)/2 \leq j_{n+1} \leq (n+1)$.

  Entonces por hipótesis inductiva, por un lado se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \frac{1}{j_{n+1}} \leq \frac{4}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{3n+4}{n(n+1)}$$

y
$$\frac{3n+4}{n(n+1)} \leq \frac{4}{n+1} \Leftrightarrow n \geq 4,$$
lo que es cierto.

Por otro lado,
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \frac{1}{j_{n+1}} \geq -\frac{1}{j_{n+1}} \geq -\frac{2}{n+1} \geq -\frac{4}{n+1}.$$

- Si $\alpha_{n+1} = 1/j_{n+1}$ (> 0) significa que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 0$ y además $(n+1)/4 \leq j_{n+1} \leq (k+1)$.

  Entonces por hipótesis inductiva, por un lado se tiene que
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \frac{1}{j_{n+1}} \leq \frac{1}{j_{n+1}} \leq \frac{4}{n+1}.$$

  Por otro lado,
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \frac{1}{j_{n+1}} \geq -\frac{4}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{-3n-4}{n(n+1)}$$
  y
$$\frac{-3n-4}{n(n+1)} \geq -\frac{4}{n+1} \Leftrightarrow n \geq 4,$$
  lo que es cierto.

Entonces
$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \right| \leq \frac{4}{n+1}$$
y por lo tanto, queda demostrada la desigualdad (6).
En conclusión, vimos que a $(\beta_n)_{n\geq 1}$ la podemos reordenar de manera que la serie $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots$ converja condicionalmente a 0 y cumpla con la desigualdad (6). ■

Por último veamos la prueba del Lema 4.2.2 usado en el Teorema 4.2.1.

Demostración del Lema 4.2.2. Si consideramos $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ e identificamos la segunda copia de $\mathcal{H}$ con la suma de numerables copias de $\mathcal{H}$, entonces el espacio de Hilbert $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ queda identificado como $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus ...)$. Definamos ahora al operador matricial diagonal para una tira infinita de operadores, digamos $B_1, B_2, ..., B_n, ... , \in \mathfrak{B}$ como
$$\mathrm{Diag}(B_1, B_2, B_3, ...) := \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos que a partir de la identificación anterior, el operador $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es unitariamente equivalente al operador matricial diagonal

$$\mathrm{Diag}(S,0,0,0,...) = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Escribimos

$$\mathrm{Diag}(S,0,0,0,...) =$$
$$= \mathrm{Diag}(S,-S,\frac{S}{2},-\frac{S}{2},...,\frac{S}{n},-\frac{S}{n},...) + \mathrm{Diag}(0,S,-\frac{S}{2},\frac{S}{2},...,-\frac{S}{n},\frac{S}{n},...) \tag{7}$$

y si se tuviera que cada sumando es un conmutador entonces tendríamos completa la prueba del lema. Para esto, introduzcamos notación necesaria.
Supongamos que $(B_1, B_2, ..., B_n, ...)$ es una sucesión de operadores en $\mathfrak{B}$
y notemos como $\mathrm{UDiag}(B_1, B_2, ..., B_n, ...)$ o $\mathrm{UDiag}(B_n)$ al operador que ubica a $B_1, B_2, ..., B_n, ...$ en la supradiagonal, o sea

$$\mathrm{UDiag}(B_1,B_2,...,B_n,...) := \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Y denotamos $\mathrm{LDiag}(B_1, B_2, ..., B_n, ...)$ o $\mathrm{LDiag}(B_n)$ al operador que ubica a $B_1, B_2, ..., B_n, ...$ en la subdiagonal, o sea

$$\mathrm{LDiag}(B_1,B_2,...,B_n,...) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Supongamos que S es positivo (si no, a S lo escribimos como suma de cuatro operadores positivos) y notemos que si $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es una base de Hilbert ortonormal de $\mathcal{H}$ definimos el operador $\mathcal{U}_1$ sobre esta base como

$$\mathcal{U}_1(e_n) := \begin{cases} e_{n-1} & n \geq 2 \\ 0 & n = 1 \end{cases}.$$

Luego, a partir de $\mathcal{U}_1$ definimos el operador $\mathcal{U} := \mathcal{U}_1 \otimes id$.
Entonces

$$((\mathrm{diag}\ \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})\mathcal{U} = \mathrm{UDiag}(((\mathrm{diag}\ \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n), \tag{8}$$

y además

$$\mathcal{U}^*((\mathrm{diag}\ \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}}) = \mathrm{LDiag}(((\mathrm{diag}\ \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n). \tag{9}$$

Por otro lado, si $\alpha \in \ell^\infty$ observamos que

$$[\mathrm{UDiag}(((\mathrm{diag}\,\alpha)\otimes S^{\frac{1}{2}})_n), \mathrm{LDiag}(((\mathrm{diag}\,\alpha)\otimes S^{\frac{1}{2}})_n)] = \mathrm{Diag}((\alpha_1^2)S, (\alpha_2^2-\alpha_1^2)S, ..., (\alpha_{n+1}^2-\alpha_n^2)S, ...)). \tag{10}$$

En efecto,

$$[\mathrm{UDiag}(((\mathrm{diag}\ \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n), \mathrm{LDiag}(((\mathrm{diag}\ \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n)] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 S^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 S^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 S^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 S^{\frac{1}{2}} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 S^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 S^{\frac{1}{2}} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 S^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 S^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1^2 S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 S & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^2 S & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1^2 S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) S & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Diag}((\alpha_1^2)S, (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)S, ..., (\alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2)S, ...)).$$

En el caso en que la sucesión $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ se defina como,

$$\alpha_{2n} := 0 \ \text{ y } \ \alpha_{2n-1} := \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

y reemplazamos en el conmutador anterior resulta que

$$[\mathrm{UDiag}(((\mathrm{diag}\ \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n), \mathrm{LDiag}(((\mathrm{diag}\ \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n)] = \mathrm{Diag}(S, -S, \frac{S}{2}, -\frac{S}{2}, ..., \frac{S}{n}, -\frac{S}{n}, ...).$$

Veamos que los operadores involucrados en el conmutador antes mencionado pertenecen a $\mathfrak{K}$ o a $\mathcal{C}_{2p}$, dependiendo a dónde pertenezca S. O sea, lo que hay que ver es que

$$\text{si } S \in \mathfrak{K} \Rightarrow \mathrm{UDiag}(((\mathrm{diag}\ \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n) \text{ y } \mathrm{LDiag}(((\mathrm{diag}\ \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n) \in \mathfrak{K}. \tag{11}$$

y además, que

$$\text{si } S \in \mathcal{C}_p \Rightarrow \text{UDiag}(((\text{diag } \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n) \text{ y } \text{LDiag}(((\text{diag } \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n) \in \mathcal{C}_{2p} \ \text{ para } p > 1. \quad (12)$$

Y por las ecuaciones (8) y (9) es suficiente ver que

$$\text{si } S \in \mathfrak{K} \Rightarrow (\text{diag } \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{K}$$

y además,

$$\text{si } S \in \mathcal{C}_p \Rightarrow (\text{diag } \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}_{2p}, \ \text{ para } p > 1.$$

Como $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ es isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \simeq \ell^2(\mathbb{N})$, identificamos $\bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{H}$ con $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.
El operador $S^{\frac{1}{2}}$ es compacto y autoadjunto, luego por el Teorema 2.1.2 lo escribimos como

$$S^{\frac{1}{2}} = \sum_{m \geq 1} \lambda_m{}^{\frac{1}{2}} < \cdot \, , w_m > w_m.$$

Si $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Hilbert ortonormal de la primera copia de $\mathcal{H}$, en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, entonces

$$((\text{diag } \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})(h) = \sum_{n,m \geq 1} \alpha_n \lambda_m{}^{\frac{1}{2}} < h, v_n \otimes w_m > v_n \otimes w_m,$$

para $h \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.
Por el Lema 3.3.2 $(\alpha_n \lambda_m{}^{\frac{1}{2}})_{n,m \geq 1}$ tiende a 0 y por el Lema 2.2.11 entonces el operador $(\text{diag } \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}}$ es compacto.
Mostremos ahora que $(\text{diag } \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}_{2p}$.
Como

$$(\text{diag } \alpha) \otimes S^{\frac{1}{2}})(h) = \sum_{n,m \geq 1} \alpha_n \lambda_m{}^{\frac{1}{2}} < h, v_n \otimes w_m > v_n \otimes w_m, \text{ para } h \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H},$$

y por el Lema 3.3.2 $(\alpha_n \lambda_m{}^{\frac{1}{2}})_{n,m \geq 1} \in \ell^{2p}$ queda demostrado.
Concluimos con esto último que

$$\text{Diag}(S, -S, \frac{S}{2}, -\frac{S}{2}, ..., \frac{S}{n}, -\frac{S}{n}, ...)$$

es un conmutador como queríamos.

Analicemos el segundo sumando de la igualdad (7), o sea

$$\text{Diag}(0, S, -\frac{S}{2}, \frac{S}{2}, ..., -\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, ...).$$

Consideremos $(\beta_n)_{n \geq 1}$ la sucesión $(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ...)$ y notemos que

$$\text{Diag}(0, S, -\frac{S}{2}, \frac{S}{2}, ..., -\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, ...) = (\text{diag } \beta) \otimes S.$$

Lo que falta demostrar ahora, es que diag $(\beta) \otimes S$ es un conmutador de operadores de la forma que enuncia el lema.
Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la reordenación de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construida en el Lema 4.2.3. El operador (diag $\beta)\otimes$ S es unitariamente equivalente al operador (diag $\alpha) \otimes S$, entonces es suficiente probar el resultado para el operador (diag $\alpha) \otimes S$.
Definimos una sucesión, de números complejos, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que

$$\gamma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_n.$$

A partir de esta definición es claro, por la fórmula (10), que

$$(\text{diag } \alpha) \otimes S = \Big[\text{UDiag}(((\text{diag } \gamma) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n), \text{LDiag}(((\text{diag } \gamma) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n)]$$

En virtud de la desigualdad (6), se tiene que

$$|\gamma_n| \leq \frac{2}{\sqrt{n}},\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$\sum_{n\geq 1} |\gamma_n|^{2p} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{4^p}{\sqrt{n}^{2p}} < \infty,\ \text{si } p > 1.$$

Luego $\gamma \in \ell^{2p}$ si $p > 1$, y de la misma manera que probamos las implicaciones (11) y (12), usando el Lema 3.3.2, se demuestra que

si $S \in \mathfrak{K} \Rightarrow (\text{diag } \gamma) \otimes S^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{K} \Rightarrow \text{UDiag}(((\text{diag } \gamma) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n)$ y $\text{LDiag}(((\text{diag } \gamma) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n) \in \mathfrak{K}$

y

si $S \in \mathcal{C}_p \Rightarrow (\text{diag } \gamma) \otimes S^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}_{2p} \Rightarrow \text{UDiag}(((\text{diag } \gamma) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n)$ y $\text{LDiag}(((\text{diag } \gamma) \otimes S^{\frac{1}{2}})_n) \in \mathcal{C}_{2p}$, para $p > 1$.

Resulta entonces que diag $\beta)\otimes S$ es un conmutador de operadores en los respectivos ideales.
Luego

$$\text{Diag}(0, S, -\frac{S}{2}, \frac{S}{2}, ..., -\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, ...)$$

es un conmutador como queríamos.
Esto concluye la demostración, porque probamos que $\text{Diag}(S, 0, 0, 0, 0, ...)$ es suma de dos conmutadores de la forma que queríamos, dependiendo a cuál de los dos ideales ($\mathfrak{K}$ *o* $\mathcal{C}_p$) pertenezca S. Esto finaliza la demostración del Lema 4.2.2. ■

5. Conmutadores de Ideales de Operadores

Este capítulo se basará príncipalmente en el resultado más importante de este trabajo: la relación que existe entre la pertenencia de un operador normal $T \in IJ$ al conmutador $[I, J]$, con la pertenencia de la media aritmética de una cierta sucesión al subespacio sólido y simétrico $S(IJ)$. Dicha relación fue desarrollada en el trabajo [8] por K. Dykema, T. Figel, G. Weiss y M. Wodzicki.
Probaremos entonces que estos dos hecho son equivalentes y más aún, que existen otras maneras de describirlos.
Como consecuencia del teorema principal (Teorema 5.0.16), se destacarán algunos resultados importantes, como por ejemplo que son suficientes cuatro conmutadores de operadores para escribir a un operador en $[I, J]$ y el hecho de que el módulo de un operador T pertenezca a $[I, J]$ es equivalente a que el generado por T lo esté.
Por último, probaremos que el morfismo

$$\mathrm{diag} : S(I) \to I,\ \alpha \mapsto \mathrm{diag}\ \alpha$$

nos permitirá caracterizar el cociente $I/[\mathfrak{B}, I]$.

Definición 5.0.4 *Sea k un cuerpo, $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$, y consideremos el anillo*

$$k[\mathcal{E}] := \{\sum_{i=1}^{m} a_i f_i : a_i \in k,\ \ f_i \in \mathcal{E}\}.$$

Definimos como $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ al núcleo del morfismo de k-álgebras

$$\sum_{i=1}^{m} a_i f_i \in k[\mathcal{E}] \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_i \in k.$$

Para un ideal $I \subseteq \mathfrak{B}$ consideremos $S(I)$ su subespacio sólido y simétrico correspondiente (ver Teorema 3.7.3) y observamos que

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(I) = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} (\mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(I))_r$$

donde

$$(\mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(I))_r := \left\{ \sum_{i=1}^{r} (f_i - f_i')_* \lambda_i : f_i, f_i' \in \mathcal{E}, \lambda_i \in S(I) \right\}.$$

En efecto, supongamos que $w := \sum_{i=1}^{m} a_i f_{i*} v \in \mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(I)$. En particular, $\sum_{i=1}^{m} a_i = 0$ y por lo tanto podemos escribir

$$w = \left(-\sum_{i=2}^{m} a_i f_1 + \sum_{i=2}^{m} a_i f_i \right)_* v = \left(\sum_{i=2}^{m} (f_i - f_1) \right)_* (a_i v).$$

Si $\sum_{i=1}^{r} (f_i - f_i')_* \lambda_i \in (\mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(I))_r$ para algún r, como $f_i, f_{i'} \in \mathcal{E}$ tenemos que $f_i - f_i' \in \mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ y eso concluye la prueba de igualdad.

Definamos $S(I)_{\mathcal{E}}$ como el cociente $S(I)/\mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(I)$.

Lema 5.0.5 *Sean $\beta', \beta'' \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $f, g \in \mathcal{E}$ y $\beta := \beta'\beta''$. Se tiene que*

$$\text{diag }((f-g)_*\beta) = [U_f(\text{diag }\beta')U_{g^\dagger}, U_g(\text{diag }\beta'')U_{f^\dagger}],$$

donde la operación $*$ fue introducida en la Definición 3.1.4.

Demostración. Por un lado, se tiene que

$$(f-g)_*\beta = f_*\beta - g_*\beta = U_f\beta U_{f^\dagger} - U_g\beta U_{g^\dagger},$$

luego

$$\text{diag }(f-g)_*\beta = U_f(\text{diag }\beta)U_{f^\dagger} - U_g(\text{diag }\beta)U_{g^\dagger}.$$

Si calculamos el conmutador de la derecha de la igualdad del lema tenemos que

$$\begin{aligned}
[U_f(\text{diag }\beta')U_{g^\dagger}, U_g(\text{diag }\beta'')U_{f^\dagger}] &= U_f(\text{diag }\beta')U_{g^\dagger}U_g(\text{diag }\beta'')U_{f^\dagger} - U_g(\text{diag }\beta'')U_{f^\dagger}U_f(\text{diag }\beta')U_{g^\dagger} \\
&= U_f(\text{diag }\beta'\beta'')U_{f^\dagger} - U_g(\text{diag }\beta''\beta')U_{g^\dagger} \\
&= U_f(\text{diag }\beta)U_{f^\dagger} - U_g(\text{diag }\beta)U_{g^\dagger}.
\end{aligned}$$

Como acabamos de ver que coinciden ambos lados de la igualdad del lema, tenemos probado en lema. ■

A partir de ahora asumamos que $\Gamma = \mathbb{N}$ y que $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$.
Del lema previo se sigue el siguiente corolario.

El siguiente resultado es consecuencia del lema anterior y la Proposición 3.7.4.

Corolario 5.0.6 *Sean I y J ideales en $\mathfrak{B}$ con al menos uno de ellos propio, entonces tenemos*

$$(\mathcal{I}_{\mathcal{E}}S(IJ))_r \hookrightarrow [I, J]_r,$$

donde $S(IJ) \subseteq c_0$ es el subespacio sólido y simétrico asociado al ideal IJ, definido en la Proposición 3.7.1.

Observación 5.0.7 *Consideremos la aplicación **shift**, $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$, entonces para cada sucesión $\alpha \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tenemos la siguiente identidad*

$$\alpha = (id - s)_*\sigma(\alpha), \tag{13}$$

donde $\sigma(\alpha)$ es la sucesión de sumas parciales introducida en la Definición 3.3.4.

Definición 5.0.8 *Sea $T \in \mathfrak{K}$ un operador normal, entonces existe $U \in \mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathcal{H})$, o sea, en el grupo de unidades, tal que $UTU^* = \text{diag }\alpha$. La **quasiórbita** de T se define como $[\![T]\!] := [\![\alpha]\!]$.*
Veamos que está bien definida. Supongamos que $[\![T]\!] = [\![\alpha]\!]$ y $[\![T]\!] = [\![\beta]\!]$ y probemos que las clases de α y β coinciden. Resulta que

$$T = U(diag\ \alpha)U^*$$

y
$$T = V(diag\ \beta)V^*$$
donde U y V son unitarios.
Si evaluamos en la base canónica tenemos que
$$T(U(e_i)) = U(diag\ \alpha)(e_i) = U(\alpha_i e_i) = \alpha_i U(e_i).$$
Entonces $U(e_i)$ es un autovector correspondiente al autovalor α_i.
Definamos para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ el conjunto
$$I_\lambda := \{i : \alpha_i = \lambda\},$$
entonces
$$Ker(\lambda Id - T) = \overline{< e_i : i \in I_\lambda >}.$$
Si $\alpha_i \neq 0$ entonces aparece en la sucesión un número finito de veces, porque la sucesión α tiende a 0. Más aún, esa cantidad es la dimensión de
$$Ker(\alpha_i Id - T)$$
, que solo depende de T, entonces α_i aparece la misma cantidad de veces en β. Si $\alpha_i = 0$ entonces aparece infinitas veces tanto en α como en β. Por lo tanto, existe una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de manera que $\alpha = f_*(\beta)$. Entonces están en la misma clase.
Para un subconjunto $\Sigma \subseteq c_0^\star$ definimos el conjunto
$$[\![T]\!]_\Sigma := \{\alpha \in [\![T]\!] : \ uni(|\alpha|) \in \Sigma\},$$
donde $uni(|\alpha|)$ fue definida por la igualdad (2).

Definición 5.0.9 *Para cada ideal $I \subsetneq \mathfrak{B}$ definimos el conjunto característico*
$$\Sigma(I) := S(I) \cap c_0^\star.$$

Proposición 5.0.10 *Si $\alpha \geq 0$ es una sucesión en c_0, entonces*
$$\alpha^\star \leq \text{uni }(\alpha).$$

Demostración. Llamemos $\beta_n := \text{uni }(\alpha)_n$. Supongamos que la desigualdad no es cierta y consideremos
$$i := \min\{n : \beta_n < \alpha_n^\star\}.$$
Entonces tenemos que $\beta_i < \alpha_i^\star = \alpha_j$ para algún j, y afirmamos que $i < j$. Si $i \geq j$, entonces
$$\alpha_j \leq \sup_{n \geq j} \alpha_n \leq \sup_{n \geq i} \beta_n = \beta_i < \alpha_i^\star = \alpha_j,$$
absurdo.
Denotemos $\alpha_{n_k} = \alpha_k^\star (\leq \beta_k)$ para $k = 1, \dots, i-1$ y observemos que $n_k \geq i$ para algún k. Sino $n_k \geq i-1$ y como $n_k \neq j$, para todo $k = 1, \dots, i-1$ entonces $j \geq i$, absurdo.
Por lo tanto, tenemos que
$$\sup_{n \geq i} \alpha_n = \beta_i \geq \alpha_{n_k} \geq \alpha_j = \alpha_i^\star,$$
lo cuál es absurdo. Luego $\alpha^\star \leq \text{uni }(\alpha)$. ■

Proposición 5.0.11 *Dado un ideal* $I \subsetneq \mathfrak{B}$ *consideramos* $\Sigma := \Sigma(I)$, *el conjunto característico dado en la Definición 5.0.9, entonces*

$$[\![T]\!]_\Sigma \neq \emptyset \Leftrightarrow T \in I.$$

Demostración. Supongamos que $T \in I$, entonces $(s_n(T))_{n\geq 1} \in [\![T]\!]$ y además, $(s_n(T))_{n\geq 1} = \text{uni}((s_n(T))_{n\geq 1}) \in \Sigma$, luego $(s_n(T))_{n\geq 1} \in [\![T]\!]_\Sigma$.
Para probar la otra implicación supongamos que existe un elemento $\alpha \in [\![T]\!]_\Sigma$. Entonces $\alpha \in [\![T]\!]$ y $\text{uni}(|\alpha|) \in \Sigma$, pero como $|\alpha|^\star \leq \text{uni}|\alpha|$ por la proposición anterior, y Σ es un conjunto característico, se tiene que $s(T) = |\alpha|^\star \in \Sigma$. Por lo tanto, $T \in I$. ■

Definamos ahora la traza de un operador T y algunos resultados previos, necesarios para la Proposición 5.0.17.

Definición 5.0.12 *Si* $T \in \mathfrak{B}$ *es un operador tal que* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} s_n(T) < \infty$ *y* $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *una base de Hilbert ortonormal de* $\mathcal{H}$, *entonces definimos la* ***traza*** *de* T *como*

$$\text{tr}(T) := \sum_{n\geq 1} < Te_n, e_n > .$$

La serie converge absolutamente y no depende de la base elegida (ver [10, Chapter 30, Theorem 3]).

Proposición 5.0.13 *Sean* A *y* B *operadores de rango finito, entonces* $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Demostración. Ver [10, Chapter 30, Theorem 4(iv)]. ■

Proposición 5.0.14 *Sean* E *una proyección ortogonal de rango finito y* $T \in \mathfrak{B}$, *entonces* $\text{tr}(ETE) = \text{tr}(ET)$.

Demostración. Tanto E como ET son operadores de rango finito, entonces usando la proposición anterior y que $E^2 = E$ tenemos que $\text{tr}(ETE) = \text{tr}(EET) = \text{tr}(ET)$. ■

Proposición 5.0.15 *Sea* A *un operador de rango finito, entonces*

$$|\text{tr(A)}| \leq \|\text{A}\|\text{rg(A)}$$

Demostración. A partir de la demostración de la Proposición 3.5.5, sabemos que $s_1 = \text{d}(A, \mathfrak{F}_0) = \|A\|$. Como además la sucesión de números singulares es una sucesión decreciente, y $|\text{tr}(A)| \leq \displaystyle\sum_{n\geq 1} s_n(A)$ (ver [10, Chapter 30, Theorem 4(i)]), tenemos la desigualdad. ■

El siguiente resultado es el principal estudio de este trabajo y fue probado en [8]. Nos permitirá relacionar las sumas aritméticas de sucesiones con la pertenecia de operadores a un conmutador de ideales, bajo de ciertas hípotesis.

Teorema 5.0.16 *Sean* I *y* $J \in \mathfrak{B}$ *ideales de operadores lineales y acotados, al menos alguno de ellos propio. Sea* $T \in IJ$ *un operador normal en* $\mathfrak{B}$. *Entonces son equivalentes,*

(i) $T \in [I, J]$

(ii) $T \in [I, J]_3$

(iii) *Existe una sucesión* $\alpha \in [\![T]\!]$ *tal que* $\alpha_a \in S(IJ)$.

Antes de demostrar el teorema, enunciaremos dos resultados preliminares. Uno de ellos es una proposición que será probada a continuación.

Proposición 5.0.17 *Sea* $T := \sum_{i=1}^{r} [A_i, B_i] \in \mathfrak{B}$, *entonces para toda proyección* $P \in \mathfrak{B}$ *de rango* $p < \infty$, *se tiene la desigualdad*

$$\frac{|\mathrm{tr}(PTP)|}{p} \leq (8r+2) \sum_{i=1}^{r} s_{p+1}(A_i) s_{p+1}(B_i) + 4r \| \, P^{\perp} T P^{\perp} \|.$$

Demostración. Para la demostración de la proposición es conveniente usar que, si $A \in \mathfrak{B}$

$$s_{n+1}(A) = d(A, \mathfrak{F}_n) = \min_{V \in \mathfrak{G}_n} \|P_V^{\perp} A\| = \min_{V \in \mathfrak{G}_n} \|A P_V^{\perp}\|,$$

donde P_V es la proyección ortogonal sobre el subespacio $V \subseteq \mathcal{H}$.
Entonces existen proyecciones $E_{ij}, \; 1 \leq i \leq r, \; 1 \leq j \leq 4$, de rango a lo sumo p tal que

$$\|E_{i1}^{\perp} A_i\| = s_{p+1}(A_i), \; \|E_{i3}^{\perp} B_i\| = s_{p+1}(B_i) \tag{14}$$

Definamos a la proyección $E := P + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{4} E_{ij}$, entonces

$$\mathrm{Im}(E) = \mathrm{Im}(P) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{4} \mathrm{Im}(E_{ij}).$$

Notemos que el rango de E es a lo sumo $p + 4rp$. Además, como $\mathrm{tr}(ETE) = \mathrm{tr}(ET)$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\mathrm{tr}(ETE)| &= \left| \sum_{i=1}^{r} \mathrm{tr}([EA_i, EB_i]) + \sum_{i=1}^{r} \mathrm{tr}(EA_i E^{\perp} B_i) - \mathrm{tr}(EB_i E^{\perp} A_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} (\|A_i E^{\perp}\| \|E^{\perp} B_i\| + \|B_i E^{\perp}\| \|E^{\perp} A_i\|) \mathrm{rg}(E) \\ &\leq (8r+2)p \sum_{i=1}^{r} s_{p+1}(A_i) s_{p+1}(B_i). \end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a que $\|A_i E^{\perp}\| \leq s_{\mathrm{rg}(E)+1}(A_i) \leq s_{p+1}(A_i)$ y análogamente con la otra norma de las ecuaciones dadas en (14).
Por otro lado, como P y E son proyecciones ortogonales e $\mathrm{Im}(P) \subseteq \mathrm{Im}(E)$, entonces $EP = P$ y $PE = P^* E^* = P^* = P$.

Luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(PTP) &= \mathrm{tr}(ETE) - (\mathrm{tr}(ETE) - \mathrm{tr}(PTP) - \mathrm{tr}(PTP) + \mathrm{tr}(PTP)) \\
&= \mathrm{tr}(ETE) - (\mathrm{tr}(ETE) - \mathrm{tr}(PPT) - \mathrm{tr}(PPT) + \mathrm{tr}(PTP)) \\
&= \mathrm{tr}(ETE) - (\mathrm{tr}(ETE) - \mathrm{tr}(EPT) - \mathrm{tr}(PET) + \mathrm{tr}(PTP)) \\
&= \mathrm{tr}(ETE) - \mathrm{tr}((E-P)T(E-P)) \\
&= \mathrm{tr}(ETE) - \mathrm{tr}((E-P)^2T(E-P)^2) \\
&= \mathrm{tr}(ETE) - \mathrm{tr}((E-P)(E-EP)T(E-PE)(E-P)) \\
&= \mathrm{tr}(ETE) - \mathrm{tr}((E-P)EP^{\perp}TP^{\perp}E(E-P)) \\
&= \mathrm{tr}(ETE) - \mathrm{tr}((E-P)(P^{\perp}TP^{\perp})(E-P)) \\
&= \mathrm{tr}(ETE) - \mathrm{tr}((E-P)(P^{\perp}TP^{\perp}))
\end{aligned}$$

y esto implica que

$$\begin{aligned}
|\mathrm{tr}(PTP)| &\leq |\mathrm{tr}(ETE)| + \|P^{\perp}TP^{\perp}\|\mathrm{rg}(E-P) \\
&\leq (8r+2)p\sum_{i=1}^{r} s_{p+1}(A_i)s_{p+1}(B_i) + 4rp\,\|P^{\perp}TP^{\perp}\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, dividiendo ambos lados de la desigualdad por p, tenemos probada la proposición. ■

Enunciemos ahora el Lema de Steinitz (ver [2, 3, 4]).

Lema 5.0.18 (Steinitz). *Sea $E := (\mathbb{R}^n, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-ev normado, con $n < \infty$. Entonces existe una constante $C > 0$ con la propiedad de que, para toda colección finita de vectores $v_1, ..., v_r \in E$ con $\|v_i\| \leq 1$, $(1 \leq i \leq r)$ y $\sum_{i=1}^{r} v_i = 0$, existe una permutación $\rho \in S_r$ tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} v_{\rho(i)} \right\| \leq C, \quad (1 \leq m \leq r).$$

Demostración del Teorema 5.0.16. El esquema de la demostración consistirá en probar que (i)⇒(iii)⇒(ii)⇒ (i).

(i)⇒(iii). Como $T \in IJ \subseteq \mathfrak{K}$ sabemos por la Proposición 5.0.11 que existe $\alpha \in [\![T]\!]_{\Sigma(IJ)}$ y como T es un operador compacto y podemos suponer que es autoadjunto (sino escribimos a T como combinación lineal de autoadjuntos), entonces consideremos la sucesión de autovectores $\{v_n\}_{n\geq 1}$ correspondientes a la sucesión de autovalores α, de modo que $T = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \alpha_n < \ \cdot \ , v_n > v_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea P_n la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $\{v_1, ..., v_n\}$, entonces

$$\mathrm{tr}\left(\frac{P_nTP_n}{n}\right) = \frac{\alpha_1 + ... + \alpha_n}{n} = (\alpha_a)_n.$$

Si $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{r}[A_i, B_i]$ con $A_i \in I$ y $B_i \in J$, entonces usando la Proposición 5.0.17 tenemos que

$$|(\alpha_a)_n| \leq (8r+2)\sum_{i=1}^{r} s_{n+1}(A_i)s_{n+1}(B_i) + 4r\mathrm{uni}_{n+1}(|\alpha|) \tag{15}$$

pues

$$\|P_n^{\perp}TP_n^{\perp}\| = |\alpha_{n+1}| \leq \mathrm{uni}_{n+1}(|\alpha|).$$

Ahora bien, como $\alpha \in [\![T]\!]_{\Sigma(IJ)}$ a partir de la desigualdad (15) tenemos que $\alpha_a \in S(IJ)$.

(iii)$\Rightarrow$(ii)
Sea $\alpha \in [\![T]\!]$ tal que $|\alpha| \searrow 0$ y $\alpha_a \in S(IJ)$, entonces existe $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que $T = U(\mathrm{diag}\ \alpha)U^*$. Entonces para probar que $T \in [I,J]_3$ basta ver que $(\mathrm{diag}\ \alpha) \in [I,J]_3$.
Consideremos la función $e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\ e(n) := 2^{[log_2 n]+1}$ (donde $[log_2 n]$ denota la parte entera). Notar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}e(n) \leq n < e(n)$.
Sea

$$\beta_n := \frac{1}{e(n)}\sigma_{e(n)-1}(\alpha),$$

entonces

$$|\beta_n| \leq \frac{1}{e(n)}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right| + \left|\sum_{i=n+1}^{e(n)-1}\alpha_i\right|\right) \leq$$

$$(*) \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right| + \frac{1}{2}\,\mathrm{máx}\{|\alpha_i| : n < i < e(n)\} = |(\alpha_a)_n| + \frac{1}{2}|\alpha_{n+1}|.$$

Veamos por qué vale la desigualdad $(*)$.
Como

$$\frac{1}{e(n)}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right| + \left|\sum_{i=n+1}^{e(n)-1}\alpha_i\right|\right) \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right| + \frac{1}{2}\,\mathrm{máx}\{|\alpha_i| : n < i < e(n)\}$$

es equivalente a que

$$\frac{1}{e(n)}\left|\sum_{i=n+1}^{e(n)-1}\alpha_i\right| \leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{e(n)}\right)\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right| + \frac{1}{2}|\alpha_{n+1}|,$$

probemos esto último.
En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{e(n)}\left|\sum_{i=n+1}^{e(n)-1}\alpha_i\right| &\leq \left(\frac{e(n)-n-1}{e(n)}\right)|\alpha_{n+1}| \\
&= \left(1-\frac{n+1}{e(n)}\right)|\alpha_{n+1}| \\
&\leq \frac{1}{2}|\alpha_{n+1}| \\
&\leq \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{e(n)}\right)\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right|+\frac{1}{2}|\alpha_{n+1}|.
\end{aligned}
$$

Veamos que $\left(1-\frac{n+1}{e(n)}\right)<\frac{1}{2}$. Como

$$\frac{1}{2}\leq\frac{n}{e(n)}<\frac{n+1}{e(n)}\Rightarrow 1-\frac{n+1}{e(n)}<\frac{1}{2}.$$

Con esto probamos $(*)$.
A partir de lo que acabamos de ver podemos concluir que

$$|\beta_n|\leq|(\alpha_a)_n|+\frac{1}{2}\mathrm{uni}_n(|\alpha|).$$

Por lo tanto, $\beta\in S(IJ)$ si α_a y $\mathrm{uni}(|\alpha|)$ pertenecen a $S(IJ)$.
Consideramos las siguientes funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$,

$$f':\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n\mapsto 2n,$$

y

$$f'':\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n\mapsto 2n+1.$$

A partir de estas funciones definimos μ como

$$\mu:=(2Id-f'-f'')_*\beta=(Id-f')_*\beta+(Id-f'')_*\beta. \tag{16}$$

Notemos que $e(2n)=e(2n+1)=2e(n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y que

$$\mu_n=\begin{cases}\alpha_1=2\beta_1, & \text{n=1}\\ 2\beta_n-\beta_{\frac{n}{2}}, & \text{n es par}\\ 2\beta_n-\beta-\frac{n-1}{2}, & \text{n}>1\text{ e impar}\end{cases}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_{2n} &= 2\beta_{2n} - \beta_n \\
&= \frac{2}{e(2n)} \sum_{i=1}^{e(2n)-1} \alpha_i - \frac{1}{e(n)} \sum_{i=1}^{e(n)-1} \alpha_i \\
&= \frac{2}{2e(n)} \sum_{i=1}^{2e(n)-1} \alpha_i - \frac{1}{e(n)} \sum_{i=1}^{e(n)-1} \alpha_i \\
&= \frac{2}{e(2n+1)} \sum_{i=1}^{e(2n+1)-1} \alpha_i - \frac{1}{e(n)} \sum_{i=1}^{e(n)-1} \alpha_i \\
&= 2\beta_{2n+1} - \beta_n = \mu_{2n+1}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $0 \leq i < 2^k$ con $k \in \mathbb{N}$,

$$e(2^k + i) = 2^{k+1},$$

y en particular se tiene que

$$\mu_{2^k} = \mu_{2^k+1} = ... = \mu_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2^k} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \alpha_i.$$

Entonces $\forall\ k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} (\mu_i - \alpha_i) = 0. \tag{17}$$

Además, para todo $i \in \{2^k, ..., 2^{k+1} - 1\}$ podemos hacer la siguiente estimación

$$|\mu_i - \alpha_i| \leq |\mu_i| + |\alpha_i| \leq |\alpha_{2^k}| + |\alpha_i| \leq 2\mathrm{uni}_{2^k}(|\alpha|). \tag{18}$$

Ahora definamos

$$v_i := \frac{\mu_i - \alpha_i}{2|\alpha_{2^k}|}, \text{ si } |\alpha_{2^k}| \neq 0,$$

sino la defino como 0 y a partir de las ecuaciones (17) y (18) y el Lema 5.0.18 (de Steinitz) sabemos que existen permutaciones ρ_k, del conjunto $\{2^k, ..., 2^{k+1} - 1\}$ tales que

$$\left| \sum_{i=2^k}^{l} \mu_{\rho_k(i)} - \alpha_{\rho_k(i)} \right| \leq 2C|\alpha_{2^k}| \leq 2C\mathrm{uni}_{2^k}(|\alpha|), \tag{19}$$

para $l = 2^k, ..., 2^{k+1} - 1$ y $k \in \mathbb{N}$.
Sea $\rho := \amalg_{k\in\mathbb{N}} \rho_k$ la unión disjunta y notar que $\rho(1) = 1$.
Observar que para $l \in \{2^k, ..., 2^{k+1} - 1\}$

$$|\alpha_{2^k}| = (|\alpha| \boxplus |\alpha|)_{2^{k+1}} \leq (|\alpha| \boxplus |\alpha|)_l,$$

pues $(|\alpha| \boxplus |\alpha|)$ es una sucesión decreciente, entonces deducimos de la desigualdad (19) que

$$|\sigma(\rho_*^{-1}(\mu - \alpha))| \leq 2C(\mathrm{uni}(|\alpha|) \boxplus \mathrm{uni}(|\alpha|)).$$

En particular, si $\alpha \in [\![T]\!]_{\Sigma(IJ)}$, $\sigma(\rho_*^{-1}(\mu - \alpha)) \in S(IJ)$. A partir de la identidad (13) y la definición del shift s dada en la Observación 5.0.7, tenemos que

$$\rho_*^{-1}(\mu - \alpha) = \sigma(\rho_*^{-1}(\mu - \alpha)) - s_*\sigma(\rho_*^{-1}(\mu - \alpha))$$

y aplicando ρ_* vemos que

$$\alpha - \mu = (\rho s - \rho)_*(\gamma), \tag{20}$$

donde $\gamma := \sigma(\rho_*^{-1}(\mu - \alpha))$.
Como consecuencia de las ecuaciones (16) y (20), mostramos que

$$\alpha = (Id - f')_*\beta + (Id - f'')_*\beta + (\rho s - \rho)_*(\gamma)$$

con $\beta, \gamma \in S(IJ)$ si $\alpha_a \in S(IJ)$ y $\mathrm{uni}(|\alpha|) \in \Sigma(IJ)$.
Podemos concluir que $(\mathrm{diag}\ \alpha) \in [I, J]_3$ a partir del Corolario 5.0.6.
Para terminar la prueba del teorema notemos que la implicación (ii)⇒(i) es clara por la definición de $[I, J]$. ■

Además de las equivalencias que acabamos de ver, existen otras que son más sencillas de probar a partir del teorema anterior. Las explicitaremos en el siguiente resultado.

Teorema 5.0.19 *Sean I y $J \in \mathfrak{B}$ ideales de operadores lineales y acotados, de manera que, al menos alguno de los dos es propio. Sea $T \in IJ$ un operador normal en $\mathfrak{B}$. Entonces son equivalentes,*

(i) $T \in [I, J]$

(ii) $[\![T]\!]_{\Sigma(IJ)} \subseteq \{\alpha \in c_0 : \alpha_a \in S(IJ)\}$

(iii) $[\![T]\!]_{\Sigma(IJ)} \cap \{\alpha \in c_0 : \alpha_a \in S(IJ)\} \neq \emptyset$

(iv) $[\![T]\!] \subseteq (\mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(IJ))_3$

(v) $[\![T]\!] \cap \mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(IJ) \neq \emptyset$

(vi) $[\![T]\!] \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(IJ)$.

Demostración. Para probar (i)⇒(ii) tomamos una sucesión $\alpha \in [\![T]\!]_{\Sigma(IJ)}$ y copiando la demostración de la implicación (i)⇒(iii) del Teorema 5.0.16 tenemos que $\alpha \in \{\beta \in c_0 : \beta_a \in S(IJ)\}$.

Veamos (ii)⇒(iii). Por la Proposición 5.0.11 y por (ii) sabemos que $\emptyset \neq [\![T]\!]_{\Sigma(IJ)} \subseteq \{\alpha \in c_0 : \alpha_a \in S(IJ)\}$ y claramente la intersección es no vacía.

La implicación (iii)⇒(iv) es la implicación (iii)⇒(ii) del Teorema 5.0.16.

Supongamos que vale (iv) y veamos (v). Existe $\alpha \in [\![T]\!]_{\Sigma(IJ)}$, en particular tenemos que $\alpha \in [\![T]\!]$. Como vale (iv), $\alpha \in [\![T]\!] \cap \mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(IJ)$.

Mostremos que (v)⇒(vi). Sean $\beta \in [\![T]\!]$, y $\alpha \in [\![T]\!] \cap \mathcal{I}_{\mathcal{E}} S(IJ)$, que existe por hipótesis, entonces hay una función $f \in \mathcal{E}$ tal que $\beta = f_*(\alpha)$. Escribimos $\beta = f_*(\alpha) - \alpha + \alpha =$

$(f-id)_*(\alpha)+\alpha$, tanto $(f-id)_*(\alpha)$ como α pertenecen a $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}S(IJ)$, y como $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}S(IJ)$ es un espacio vectorial $\beta \in \mathcal{I}_{\mathcal{E}}S(IJ)$

Por último, (vi) implica (i) se sigue del Corolario 5.0.6.

Esto concluye la demostración del teorema. ■

Ahora que probamos el Teorema principal y sus equivalencias, podemos enunciar y mostrar algunas de sus consecuencias.

Teorema 5.0.20 *Sean $I, J \subseteq \mathfrak{B}$ ideales de operadores lineales y acotados, al menos uno de ellos propio, entonces*

(i) $[\mathfrak{B}, IJ] = [I, J]$.

(ii) $[I, J] = [I, J]_4$.

Demostración. Sea $T = X + iY \in [I, J]$ de manera que $X = X^*$ y $Y = Y^*$. Consideremos U y V los operadores unitarios tales que diagonalizan a X y a Y respectivamente, digamos

$$UXU^* = \text{diag } \alpha \text{ y } VYV^* = \text{diag } \beta$$

para $\alpha, \beta \in S(IJ)$. Entonces tenemos que

$$T = U^*(\text{diag } (\alpha + i\beta))U + i(V^*(\text{diag } \beta)V - U^*(\text{diag } \beta)U).$$

El operador $A := U^*(\text{diag } (\alpha + i\beta))U$ es normal, pues

$$AA^* = U^*(\text{diag } |\alpha + i\beta|^2)U = A^*A.$$

Además $A \in U^*(\text{diag } S(IJ))U \subseteq IJ$, entonces por el Teorema 5.0.16 se tiene que $A \in [I, J]_3 \cap [\mathfrak{B}, IJ]_3$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned} V^*(\text{diag } \beta)V - U^*(\text{diag } \beta)U &= [V^*U, U^*(\text{diag } \beta)V] \ (\in [\mathfrak{B}, IJ]) \\ &= [V^*(\text{diag } \alpha_1)U, U^*(\text{diag } \alpha_2)V] \ (\in [I, J]) \end{aligned}$$

donde $\alpha_1 \in S(I)$ y $\alpha_2 \in S(J)$ son tales que $\beta = \alpha_1.\alpha_2$, usando la Proposición 3.3.13. ■

Proposición 5.0.21 *Para $\lambda \in (\mathbb{R}_{>0})^{\mathbb{N}}$ y $m \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$(\lambda^{\boxplus m})_a \leq m\lambda_a.$$

Demostración. Tenemos que probar $\forall\ n \in \mathbb{N}$ que $((\lambda^{\boxplus m})_a)_n \leq m(\lambda_a)_n$. Sea n fijo y supongamos que $n = mk + r$ donde $0 \leq r < m$ es el resto de la división por m, entonces

$$((\lambda^{\boxplus m})_a)_n = \frac{1}{mk+r} \sum_{i=1}^{mk+r} (\lambda^{\boxplus m})_i = \frac{1}{mk+r} \left(m \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + r\lambda_{k+1} \right),$$

y además

$$m(\lambda_a)_n = \frac{m}{mk+r}\sum_{i=1}^{mk+r}\lambda_i.$$

Entonces

$$((\lambda^{\boxplus m})_a)_n \leq m(\lambda_a)_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{mk+r}\left(m\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + r\lambda_{k+1}\right) \leq \frac{m}{mk+r}\sum_{i=1}^{mk+r}\lambda_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{mk+r}\lambda_{k+1} \leq \frac{m}{mk+r}\sum_{i=k+1}^{mk+r}\lambda_i,$$

y esto último es cierto porque $r < m$ y los términos de la suma de la derecha son positivos. ■

Teorema 5.0.22 *Para un operador $T \in \mathfrak{B}$, $I, J \subseteq \mathfrak{B}$ ideales y alguno distinto de $\mathfrak{B}$, las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) $<T>\subseteq [I,J]$,

(b) $|T| \in [I,J]$.

Demostración. Si escribimos a T a partir de su descomposición polar, se tiene que $T = U|T|$ y $|T| = U^*T$. Entonces $<|T|>=<T>$ y queda demostrado que (a) implica (b).
Supongamos que vale (b) y veamos (a). Tomemos un operador $R \in <T>$ y supongamos que R es positivo. Como $|T| \in [I,J] \subseteq IJ$ por la Observación 4.0.8, tenemos que $R \in IJ$. Luego podemos aplicar el Teorema 5.0.19 (ii) y tenemos que

$$R \in [I,J] \Leftrightarrow s(R)_a \in \Sigma(IJ). \tag{21}$$

Entonces veamos que $s(R)_a \in \Sigma(IJ)$.
Como $R \in <T> \Rightarrow s(R) \in \Sigma(<T>) \Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $s(R) \in O(s(T)^{\boxplus m})$.
Por otro lado, por el Teorema 5.0.16 tenemos que

$$|T| \in [I,J] \Leftrightarrow s(T)_a \in \Sigma(IJ).$$

Además, por la Proposición 5.0.21 tenemos que

$$s(R)_a \leq C(s(T)^{\boxplus m})_a \leq Cms(T)_a \in \Sigma(IJ).$$

Luego $s(R)_a \in \Sigma(IJ)$ y por la equivalencia (21) esto implica que $R \in [I,J]$. ■

Teorema 5.0.23 *Sean I, J y L ideales en $\mathfrak{B}$, supongamos que al menos uno de ellos es propio. Entonces son equivalentes:*

(a) $I \subseteq [J,L]$

(b) $\Sigma(I)_a \subseteq \Sigma(JL)$

(c) $\Sigma(I) \boxtimes O_\omega \subseteq \Sigma(JL)$.

Demostración. Notemos que por el resultado probado en el Corolario (3.4.10) vale la siguiente igualdad
$$\Sigma(I)_a = \Sigma(I) \boxtimes O_\omega.$$
Por lo tanto, la equivalencia $(b) \Leftrightarrow (c)$ es clara.
Probemos que $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $\lambda \in \Sigma(I)_a$, entonces existe $\tau \in \Sigma(I)$ tal que $\lambda \in O(\tau_a)$. Como $\tau_a \in \Sigma(I)$ y vale (a), tenemos que $\tau_a \in \Sigma(JL)$ y como este último es un conjunto característico $\lambda \in \Sigma(JL)$.
Para ver ahora que $(b) \Rightarrow (a)$ tomemos un operador $T \in I \Rightarrow |T| \in I$ y $s(|T|)_a \in \Sigma(I)_a$ y por lo tanto, $s(|T|)_a \in \Sigma(JL)$. Aplicando el Teorema 5.0.16, $|T| \in [J, L]$ y usando la equivalencia del Teorema 5.0.22, $<T> \subseteq [J, L]$. ■

A partir del Teorema 5.0.22, se pueden deducir fácilmente los resultados probados por Pearcy y Topping, que estudiamos en el Capítulo 4.

Corolario 5.0.24

- $\mathfrak{K} \subseteq [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$,
- $\mathcal{C}_p \subseteq [\mathcal{C}_{2p}, \mathcal{C}_{2p}]$, *para* $p > 1$.

Demostración. Recordemos que ω es la sucesión armónica. Del Lema 3.3.2 resulta que $c_0^\star \boxtimes O_\omega \subseteq c_0^\star$ y $\ell^{p\star} \boxtimes O_\omega \subseteq \ell^{p\star}$.
Además, por el Teorema 3.7.3 tenemos que

$$\Sigma(\mathfrak{K}) \boxtimes O_\omega = c_0^\star \boxtimes O_\omega \subseteq c_0^\star = \Sigma(\mathfrak{K}\mathfrak{K})$$

y

$$\Sigma(\mathcal{C}_p) \boxtimes O_\omega = \ell^{p\star} \boxtimes O_\omega \subseteq \ell^{p\star} = \Sigma(\mathcal{C}_p) = \Sigma(\mathcal{C}_{2p}\mathcal{C}_{2p}).$$

Como consecuencia de las equivalencias del Teorema 5.0.22, queda demostrado el corolario.
■
Por último, caractericemos el cociente $I/[\mathfrak{B}, I]$ para un ideal $I \subseteq \mathfrak{B}$.

Teorema 5.0.25 *En base a la notación expresada en la Definición 5.0.4, para todo ideal* $I \subseteq \mathfrak{B}$ *el morfismo dado por*

$$diag : S(I) \to I,\ \alpha \mapsto diag\ \alpha$$

induce un isomorfismo
$$\Theta : S(I)_{\mathcal{E}} \to I/[\mathfrak{B}, I].$$

Demostración. Veamos que el morfismo Θ es suryectivo. Sean $T = X + iY \in J$, $\alpha \in [\![X]\!]$, $\beta \in [\![Y]\!]$, U y V operadores unitarios, entonces como en la demostración del Teorema 5.0.20 escribimos

$$T = U^*(\text{diag }(\alpha + i\beta))U + i(V^*(\text{diag }\beta)V - U^*(\text{diag }\beta)U)$$

donde $V^*(\text{diag }\beta)V - U^*(\text{diag }\beta)U = [V^*U, U^*(\text{diag }\beta)V]$ $(\in [\mathfrak{B}, I])$.
Luego, la clase de T y la de $(\text{diag }(\alpha + i\beta))$ son iguales en $J/[\mathfrak{B}, I]$.
Para ver que es monomorfismo, supongamos que $\Theta(\overline{\lambda}) = \overline{\text{diag }\lambda} = 0$ entonces $(\text{diag }\lambda) \in [\mathfrak{B}, \mathrm{I}]$. Además, por el Teorema 5.0.19 tenemos que $\lambda \in \mathcal{I}_{\mathcal{E}}(S(J))$ y por lo tanto, $\overline{\lambda} = 0$. ∎

6. El Mínimo Número de Conmutadores

En este último capítulo veremos algunos resultados sobre ideales de operadores que no se relacionan directamente con el teorema principal del trabajo [8](ver Teorema 5.0.16). Probaremos que un operador $T \in \mathfrak{B}$, bajo ciertas hipótesis, lo podremos escribir como suma de conmutadores y analizaremos cuál es la cantidad que necesitamos.
Dos resultados serán los destacados: probaremos primero la identidad

$$[I, J] = [I, J]_2 + [\mathfrak{B}, IJ]_1,$$

y además que si $|T| \in [I, J]$ entonces vale que

$$T \in [I, J]_1 + [\mathfrak{B}, IJ]_1.$$

Antes de probar el primer resultado mencionado arriba mostremos algunos hechos preliminares.

Lema 6.0.26 *Sean A un anillo con unidad y $r_1, \ldots, r_n \in A$ tales que si llamamos $\sigma_j := r_1 + \ldots + r_j$, para $j = 1, \ldots, n$ $\sigma_n = 0$. Entonces se tiene la siguiente identidad entre elementos del anillo de matrices $M_n(A)$:*

$$\begin{pmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & & & \\ & 0 & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \sigma_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Demostración. Notemos que $r_1 = \sigma_1$, $r_j = \sigma_j - \sigma_{j-1}$ para $j = 1, \ldots, n$ y además que $r_n = \sigma_n - \sigma_{n-1} = -\sigma_{n-1}$. Calculemos el conmutador del enunciado.
Se tiene entonces que

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & & & \\ & 0 & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \sigma_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & & & \\ & 0 & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \sigma_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & & & \\ & 0 & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \sigma_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{n-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \sigma_1 & & & \\ & & \sigma_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 - \sigma_1 & & & \\ & & \sigma_3 - \sigma_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\sigma_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 & & & & \\ & r_2 & & & \\ & & r_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r_n \end{pmatrix}.$$

■

Lema 6.0.27 *Supongamos que el operador $T \in [I, J]$ y que el subespacio cerrado* $\mathrm{Ker}(T)$ *es de dimensión infinita. Entonces*

$$T = [R, S] + [N, X] \tag{22}$$

para algún $R \in I,\ S \in J,\ X \in IJ$ y $N \in \mathfrak{B}$ tales que $N^3 = X^3 = 0$. Además, si $I = \mathfrak{B}$ N y X se pueden elegir de manera que $N^2 = X^2 = 0$.
En particular,

$$T \in [I, J]_1 + [\mathcal{B}, IJ]_1.$$

Demostración. Como $T \in [I, J]$ escribimos $T = \sum_{i=1}^{m} [R_i, S_i]$.
Por hipótesis, sabemos que existe un isomorfismo $\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{\oplus m}$ tal que

$$\Phi T \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} [R_i, S_i] & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

en $M_m(\mathfrak{B})$.
Llamemos $r_1 := \sum_{i=2}^{m} [R_i, S_i]$ y $r_j := -[R_j, S_j]$ para $j = 2, \ldots, m$ y observemos que a partir de esto $r_1 + \ldots + r_m = 0$. Si $\sigma_j := r_1 + \ldots + r_j$ para $j = 1, \ldots, m$ y usamos el Lema 6.0.26 tenemos que

$$\Phi T \Phi^{-1} - \begin{pmatrix} [R_1, S_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [R_m, S_m] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{m} [R_i, S_i] & & & \\ & -[R_2, S_2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & -[R_m, S_m] \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=2}^{m} [R_i, S_i] & & & \\ & 0 & \sum_{i=3}^{m} [R_i, S_i] & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \sum_{i=m-1+1}^{m} [R_i, S_i] \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Por otro lado, observemos que

$$\begin{pmatrix} [R_1,S_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [R_m,S_m] \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_m \end{pmatrix} \right]$$

Luego

$$\Phi T \Phi^{-1} = \left[\begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_m \end{pmatrix} \right] -$$

$$- \left[\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=2}^m [R_i,S_i] & & & \\ & 0 & \sum_{i=3}^m [R_i,S_i] & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \sum_{i=m-1+1}^m [R_i,S_i] \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \right],$$

y si además definimos los operadores

$$R := \Phi^{-1} \circ \begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_m \end{pmatrix} \circ \Phi, \quad S := \Phi^{-1} \circ \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_m \end{pmatrix} \circ \Phi,$$

$$X := \Phi^{-1} \circ \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=2}^m [R_i,S_i] & & & \\ & 0 & \sum_{i=3}^m [R_i,S_i] & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \sum_{i=m-1+1}^m [R_i,S_i] \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \circ \Phi \text{ y } N := -\Phi^{-1} \circ \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \Phi,$$

mostramos que $T = [R,S] + [N,X]$ con $R \in I$, $S \in J$, $X \in IJ$ y $N \in \mathfrak{B}$, donde $N^m = X^m = 0$. En particular,

$$T \in [I,J]_1 + [\mathfrak{B}, IJ]_1.$$

Probemos que

$$[\mathfrak{B}, IJ]_1 \subseteq [I,J]_2. \tag{23}$$

En efecto, sean $A \in \mathfrak{B}$ y $T \in IJ$. Por el Lema 2.2.9 supongamos que $T = RS$ con $R \in I$ y $S \in J$. Tenemos

$$[AR,S] - [R,SA] = ARS - SAR - RSA + SAR = [A,RS] = [A,T]$$

entonces $[A,T] \in [I,J]_2$.
En general, a partir de lo que acabamos de ver tenemos que

$$[I,J]_1 + [\mathfrak{B}, IJ]_1 \subseteq [I,J]_3.$$

Por otro lado, en el caso en que $I = \mathfrak{B}$ se tiene que

$$[\mathfrak{B}, J]_1 + [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}J]_1 = [\mathfrak{B}, J]_2.$$

Por lo tanto, probamos que $m \leq 3$ y repitiendo la primera parte de la prueba para $m = 2$ (si $I = \mathfrak{B}$) y para $m = 3$ (en el caso general) obtenemos una representación para T como en la ecuación (22) de T. ■

Teorema 6.0.28 *Si I y J son ideales en $\mathfrak{B}$, entonces*

$$[I, J] = [I, J]_2 + [\mathfrak{B}, IJ]_1. \tag{24}$$

En particular, si elegimos $I = \mathfrak{B}$

$$[\mathfrak{B}, J] = [\mathfrak{B}, J]_3.$$

Demostración. Sea $T \in [I, J] \subseteq IJ$ por la Observación **??**.Por el Lema 2.2.9 existen operadores $R \in I$ y $S \in J$ tales que $T = RS$. Sea V una isometría de $\mathcal{H}$ en un subespacio que notamos $V\mathcal{H}$, tal que $(V\mathcal{H})^{\perp}$ es un subespacio de dimención infinita. Entonces

$$[RV^*, VS] + VSRV^* = RV^*VS - VSRV^* + VSRV^* = RS = T.$$

Como $VSRV^* = V(T - [R, S])V^*$, si además escribimos $T = \sum_{i=1}^{m}[R_i, S_i]$ para $m \in \mathbb{N}$, $R_i \in I$ y $S_i \in J$, tenemos que

$$VSRV^* = \sum_{i=1}^{m}[VR_iV^*, VS_iV^*] - [VRV^*, VSV^*] \in [I, J].$$

Por el Lema 6.0.27 $VSRV^* \in [I, J]_1 + [\mathfrak{B}, IJ]_1$. Luego $T \in [I, J]_2 + [\mathfrak{B}, IJ]_1$. ■

Si combinamos el Teorema 6.0.28 con la inclusión (23) tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.0.29 *Si I y J son ideales en $\mathfrak{B}$,*

$$[I, J] = [I, J]_4. \tag{25}$$

Este resultado fue probado en el Teorema 5.0.20 de la sección anterior de manera más constructiva. En esta sección probamos resultados más concretos, como el Teorema 6.0.28, que nos permite ver al corolario como una clara consecuencia.

Recapitulando, las igualdades (24) y (25) nos permiten dar el número de conmutadores, a lo sumo, que describen a un operador en $[I, J]$, donde I y J son ideales en $\mathfrak{B}$. Veamos ahora que será suficiente suponer que $|T| \in [I, J]$, para probar que T es suma de dos conmutadores.

Teorema 6.0.30 *Si I y J son ideales en $\mathfrak{B}$ y suponemos que $|T| \in [I, J]$, entonces*

$$T \in [I, J]_1 + [\mathfrak{B}, IJ]_1.$$

Dejemos la demostración del teorema para el final del capítulo. Previamente daremos algunos corolarios, y lemas necesarios para la prueba.

Corolario 6.0.31 *Si I y J son ideales en $\mathfrak{B}$ tales que $I \subseteq [\mathfrak{B}, J]$, se tiene que*

$$I \subseteq [\mathfrak{B}, J]_2$$

Demostración. Tomemos un operador $T \in I \subseteq [\mathfrak{B}, J]$ y usando su descomposión polar se tiene que $|T| \in I \subseteq [\mathfrak{B}, J]$.
Si ahora usamos el teorema anterior, tenemos que $T \in [\mathfrak{B}, J]_2$. ■

Notemos que usando el Corolario 6.0.31 y el Teorema 5.0.23 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 6.0.32 *Si I y J son ideales en $\mathfrak{B}$, son equivalentes:*

(a) $I \boxtimes (\omega) \subseteq J$

(b) $I \subseteq [\mathfrak{B}, J]_2$.

En base a la inclusión (23) tenemos un corolario que involucra a tres ideales de $\mathfrak{B}$.

Corolario 6.0.33 *Si I, J y L son ideales en $\mathfrak{B}$ y suponemos que $I \subseteq [J, L]$, entonces*

$$I \subseteq [J, L]_3.$$

Demostración. Tomemos un operador $T \in I \subseteq [J, L]$ y usando su descomposión polar se tiene que $|T| \in I \subseteq [J, L]$. Entonces

$$T \in [J, L]_1 + [\mathfrak{B}, JL]_1 \subseteq [J, L]_1 + [J, L]_2 = [J, L]_3.$$

■

La demostración del Teorema 6.0.30 estará basada en dos lemas que probaremos previamente.

Lema 6.0.34 *Sean A un anillo con unidad, $n \in A$ un elemento nilpotente y $u \in A$ un elemento inversible que conmuta con n. Para todo ideal $I \subseteq A$, la aplicación*

$$\Phi_{n,u}(t) := ut + [n, t] \ \forall t \in I,$$

es biyectiva.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $n^m = 0$ y consideremos tres morfismos del grupo aditivo de I, ρ, L y $R : I \to I$ definidos por:

$$\rho(t) := ut, \quad L(t) := nt \ \text{ y } \ R(t) := tn, \quad t \in I.$$

Dichos morfismos conmutan entre ellos pues n y u conmutan. Observemos que $\Phi_{n,u} = \rho + L - R$ y como $L^m = R^m = 0$, entonces $(R-L)^m = 0$.
Veamos que $\Theta := \displaystyle\sum_{i=0}^{2m-1} \rho^{-i-1}(R-L)^i$ es el morfismo inverso de $\Phi_{n,u}$.
Para cada $i = 0, \ldots, 2m-1$ tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \rho^{-i-1} \circ (R-L)^i \circ (\rho - (R-L)) &= \rho^{-i} \circ (R-L)^i - \rho^{-i-1} \circ (R-L)^{i+1} \\ &= (\rho - (R-L)) \circ \rho^{-i-1} \circ (R-L)^i \end{aligned}$$

$$\rho^{-i-1} \circ (R-L)^i \circ (\rho - (R-L)) = .$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Theta \circ \Phi_{n,u} &= \sum_{i=0}^{2m-1} \rho^{-i} \circ (R-L)^i - \rho^{-i-1} \circ (R-L)^{i+1} \\ &= \rho^0 \circ (R-L)^0 - \rho^{-(2m-1)-1} \circ (R-L)^{2m-1+1} \\ &= Id \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \Phi_{n,u} \circ \Theta &= \sum_{i=0}^{2m-1} \rho^{-i} \circ (R-L)^i - \rho^{-i-1} \circ (R-L)^{i+1} \\ &= \rho^0 \circ (R-L)^0 - \rho^{-(2m-1)-1} \circ (R-L)^{2m-1+1} \\ &= Id \end{aligned}$$

Entonces $\Phi_{n,u}^{-1} = \Theta$. ■

Lema 6.0.35 *Sean I y J ideales de $\mathfrak{B}$ y un operador $T \in IJ$. Supongamos que tenemos una identificación entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^{\oplus k}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ tal que, si vemos a $T = (T_{ij})_{1 \le i,j \le k}$ como elemento de de $M_k(\mathfrak{B})$ y tenemos que $T_{ii} \in [I, J]$ de manera que, los subespacios cerrados* $\mathrm{Ker}(T_{ii})$ *son de dimensión infinita para todo $i = 1, \ldots, k$.*
Entonces

$$T \in [I, J]_1 + [\mathfrak{B}, IJ]_1.$$

Demostración. A partir del Lema 6.0.27 podemos escribir a cada uno de los elementos de la diagonal de $(T_{ij})_{1 \le i,j \le k}$ como $T_{ii} = [R_i, S_i] + [N, X_i]$ para $R_i \in I$, $S_i \in J$, $X_i \in IJ$ y $N \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_o^i)$. Podemos elegir el mismo operador N para todo $i = 0, \ldots, k$ y $N^3 = 0$. Llamemos $X_{ii} := X_i$.
Sabemos que $T_{ij} \in IJ$ para cada i, j por la Observación **??**. Consideremos el anillo de matrices $A = M_k(\mathfrak{B})$, el elemento nilpotente N y (para todo $i \neq j$) el operador que es

multiplicar por $(j-i)$. Por el Lema 6.0.34 para todo $i \neq j$, existen operadores $X_{ij} \in IJ$ tal que $T_{ij} = (j-i)X_{ij} + [N, X_{ij}]$.
Definamos a la matriz $X := (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ y podemos escribir a T de la siguiente manera,

$$\left[\begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_k \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 1+N & & \\ & \ddots & \\ & & k+N \end{pmatrix}, X\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} R_1 - S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_k - S_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_1 - R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_k - R_k \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} (1+N)X_1 & & (1+N)X_{1k}) \\ & \ddots & \\ (k+N)X_{k1} & & (k+N)X_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1(1+N) & & X_{1k}(k+N) \\ & \ddots & \\ X_{k1}(1+N) & & X_k(k+N) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [R_1, S_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [R_k, S_k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [N, X_1] & & ((1-k)X_{1k} + [N, X_{1k}]) \\ & \ddots & \\ ((k-1)X_{k1} + [N, X_{1k}]) & & [N, X_k] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [R_1, S_1] + [N, X_1] & & ((1-k)X_{1k} + [N, X_{1k}]) \\ & \ddots & \\ ((k-1)X_{k1} + [N, X_{1k}]) & & [R_k, S_k] + [N, X_k] \end{pmatrix} = (T_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} = T.$$

Por lo tanto, $T \in [I, J]_1 + [\mathfrak{B}, IJ]_1$. ■

Demostración del Teorema 6.0.30. Por [1, Theorem 2, y la demostración de Theorem 3] se puede identificar $\mathcal{H}$ con $\mathcal{H}^{\oplus 4}$ de manera que al operador T lo podemos pensar con una matriz $(T_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ tal que para cada uno de los coeficientes de la diagonal existe un espacio de dimensión infinita en el cuál vale 0.
Cada coeficiente T_{ij} de la matriz, pertenece al ideal generado $<T>$, el cuál está contenido en el conmutador $[I, J]$. Esto último es consecuencia de la hipótesis $|T| \in [I, J]$ y las equivalencias del Teorema 5.0.22.
Ahora bien, si aplicamos el Lema 6.0.35 para el caso en que $k = 4$ tenemos que

$$T \in [I, J]_1 + [\mathfrak{B}, IJ]_1.$$

■

Referencias

[1] J.H. Anderson, J.G. Stampfli, *Commutators and compressions*, Israel J. Math. 10 (1971), pp. 433-441. MR47#874.

[2] W. Banaszczyk, *The Steinitz constant of the plane*, J. reine Angew. Math. 373 (1987), pp. 218-220. MR88e:52016.

[3] W. Banaszczyk, *The Steinitz theorem on rearrangement of series for nuclear spaces*, J. Reine Angew. Math. 403 (1990), pp. 187-200. MR90k:46010.

[4] W. Banaszczyk, *A note on the Steinitz constant of the Euclidean plane*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canadá 12 (1990), pp. 97-102. MR91g:52005.

[5] J.W. Calkin, *Abstract symmetric boundary conditions*, Transactions of the American Mathematical Society, 45 (1939), pp. 369-442.

[6] J.W. Calkin, *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol.42,No4 (Oct.,1941), pp. 839-873.

[7] J.B. Conway, *A course in functional analysis*, Graduate Texts in Math. 96, Springer, New York, 1985.

[8] K. Dykema, T. Figiel, G. Weiss, M. Wodzicki, *Commutator structure of operator ideals*, Advances in Mathematics, 185 (2004), pp. 1-79.

[9] D. J. H. Garling, *On ideals of operators in Hilbert space*, Proc. London Math. Soc. (3) 17 (1967), pp. 115-138.

[10] P.D. Lax, *Functional analysis*, John Wiley and Sons, (2002).

[11] C. Pearcy, D. Topping, *On commutators in ideals of compact operators*, Michigan J. Math. 18 (1971), pp. 247-252. MR44♯2077.

[12] R.Schatten, *Norm ideals of completely continuous operators*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft, Vol.27, Springer, Berlin, (1960). MR22#9878.

A Mari, Justo, Dani, Neli, Juan, Conce, Leo, . . .

. . . Manu, Pat, Pablin, Marto, Adrián, Nico, Santi, Gisela, Pablo S., . . .

. . . Miguel Ottina, Julián Bonder, Gabriel Acosta, Esteban Andruchow, Daniel Carando y Willie Cortiñas

GRACIAS, Euge.