



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Departamento
de Matemática

Tesis de Licenciatura

Topología de espacios finitos: un enfoque algorítmico

Ximena Laura Fernández

A Quimey.

Contenidos

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Complejos simpliciales y celulares | 9 |
| 1.1 | Introducción | 9 |
| 1.2 | Espacios topológicos: tipo homotópico y homología | 10 |
| 1.3 | Complejos simpliciales | 12 |
| 1.3.1 | Nociones básicas | 13 |
| 1.3.2 | Tipo homotópico simple | 20 |
| 1.3.3 | Tipo homotópico fuerte | 24 |
| 1.4 | CW complejos | 25 |
| 1.4.1 | Nociones básicas | 25 |
| 1.4.2 | Tipo homotópico y homotópico débil | 27 |
| 1.4.3 | Tipo homotópico simple de CW-complejos | 28 |
| 2 | Espacios finitos | 31 |
| 2.1 | Introducción | 31 |
| 2.2 | Espacios finitos y posets | 32 |
| 2.3 | Operaciones entre espacios finitos | 34 |
| 2.4 | Espacios finitos y tipo homotópico de poliedros | 37 |
| 2.4.1 | Join, producto y wedge. | 42 |
| 2.5 | Espacios finitos y tipo homotópico fuerte de complejos | 42 |
| 2.5.1 | Join, producto y wedge | 44 |
| 2.6 | Espacios finitos y tipo homotópico simple de complejos | 45 |
| 2.6.1 | Join, producto y wedge. | 49 |
| 3 | Algoritmos en espacios finitos | 53 |
| 3.1 | Introducción | 53 |
| 3.2 | Generalidades | 53 |
| 3.3 | Métodos de reducción | 57 |
| 3.3.1 | Beat points | 57 |
| 3.3.2 | Weak points | 59 |
| 3.3.3 | Reducción de un punto, arista o relación | 71 |
| 3.4 | Operaciones entre espacios finitos | 72 |
| 3.5 | Random posets | 76 |
| 4 | Conjuntos compatibles | 81 |
| 4.1 | Introducción | 81 |
| 4.2 | Definiciones | 82 |
| 4.3 | Ejemplos | 84 |
| 4.4 | Resultados generales | 90 |
| 4.4.1 | Cociente, wedge, join y producto | 93 |

| | |
|---|------------|
| 5 Métodos de reducción | 99 |
| 5.1 Introducción | 99 |
| 5.2 Tipo homotópico simple de espacios finitos | 100 |
| 5.3 Tipo homotópico débil y homología de espacios finitos | 109 |
| 6 Teoría de Morse discreta | 113 |
| 6.1 Introducción | 113 |
| 6.2 Teoría de Forman | 114 |
| 6.3 El punto de vista combinatorio de Chari | 118 |
| 6.4 Teoría de Morse para posets | 120 |
| 6.4.1 Tipo homotópico | 120 |
| 6.4.2 Homología | 126 |
| 7 Matchings acíclicos | 129 |
| 7.1 Introducción | 129 |
| 7.2 Grafos | 130 |
| 7.3 Matchings | 134 |
| 7.3.1 Generalidades | 134 |
| 7.3.2 Algoritmos | 134 |
| 7.4 Matchings acíclicos en un poset graduado | 139 |
| 7.4.1 Ciclos en \mathcal{H}_M | 140 |
| 7.4.2 Optimizando matchings acíclicos | 141 |
| 7.4.3 Reparando matchings con ciclos | 152 |
| 7.5 Algoritmos para hallar matchings acíclicos máximos | 155 |
| 7.5.1 Programación lineal entera | 155 |
| 7.5.2 Programación dinámica | 161 |
| 7.5.3 Heurísticas y metaheurísticas | 163 |

Agradecimientos

A Gabriel Minian. Gracias por enseñarme matemática con tanta pasión, por hacerme descubrir la topología, por guiarme con tanta paciencia, por dirigir esta tesis.

A Quimey, el amor de mi vida. Gracias por contenerme, por enseñarme, por decirme la palabra justa en el momento justo. Gracias por quererme, por estar siempre y por hacerme feliz.

Muchas gracias también por ser mi guía en mi incursión en Sage y la programación.

A mis padres. Gracias por bancarme y apoyarme todos estos años. A Ale y Dani, por ser mis hermanos y mis amigos.

A mi abuela. Por ser la persona más dulce y buena que conozco.

A María Luz, Claudio, Nehuén, Michay, Cuca y Tata. Gracias por quererme como de la familia, por ayudarme, aconsejarme y preocuparse por mi.

A Luli, Yanu, Julián, Javier, Vero, Pau, Ema, Lucas y todos mis amigos de la facultad. Por llenarme de recuerdos inolvidables. Gracias por tanta ayuda, consejos, horas de estudio y de risas, y por tantos lindos momentos compartidos.

A mis docentes de la carrera, especialmente a Andrea Solotar, Mariano Suarez Álvarez, Pablo De Nápoli y Pablo Amster. Gracias por transmitirme en sus clases tanto entusiasmo y dedicación por la matemática. Y por sobre todo, gracias por ser tan buenas personas.

A Jonathan Barmak, que a pesar de estar lejos estuvo siempre presente y también fue parte de esto.

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es explotar la estructura combinatoria de los espacios finitos y su fuerte relación con el tipo homotópico y homología de los poliedros compactos para reducir el estudio de estos invariantes topológicos a la aplicación de un método algorítmico.

En 1937, Alexandroff [1] explicita la estructura combinatoria de los espacios finitos T_0 y muestra su correspondencia con la de los *posets* finitos. Nota que estos dos objetos son esencialmente el mismo, mirado desde distintos puntos de vista. Esto permite manipular los espacios finitos combinando sus estructuras topológica y combinatoria.

Más tarde, en 1966, Stong [27] observa que estas estructuras pueden conjugarse para obtener información sobre invariantes topológicos. En efecto, descubre que el estudio del tipo homotópico de espacios finitos T_0 puede realizarse con métodos combinatorios aplicados a los espacios vistos como posets. Más precisamente, define los puntos *lineales* y *colineales* (que hoy, a partir de las notas de P. May y los trabajos de Barmak y Minian, se denominan *up beat points* y *down beat points*); y muestra que mediante reducciones de este tipo de puntos en cualquier orden puede obtenerse el espacio de cardinal mínimo con el mismo tipo homotópico que el original. Esto da lugar al primer *método de reducción de un punto*, que permite resolver un problema topológico de manera algorítmica.

Por su parte, en el mismo año, McCord [23] publica un interesante trabajo, que se convierte posteriormente en uno de los pilares de la teoría de espacios finitos. En él traza una conexión entre poliedros compactos y espacios finitos T_0 . Mediante este puente entre la geometría y la combinatoria, traducido en aplicaciones funtoriales que denotamos \mathcal{K} y \mathcal{X} , convierte a los espacios finitos en una poderosa herramienta para el estudio del tipo homotópico de poliedros. Más concretamente: dado un espacio finito X , define a $\mathcal{K}(X)$ como el complejo simplicial (denominado *order complex*) cuyos simplices son las cadenas en X ; y dado K un complejo simplicial finito, $\mathcal{X}(K)$ es el poset (denominado *face poset*) de los simplices de K ordenados por inclusión. Estas aplicaciones no son mutuamente inversas. Sin embargo, preservan el tipo homotópico débil. En particular, para analizar el tipo homotópico o los grupos de homología de un poliedro compacto con triangulación K , basta analizar el tipo homotópico débil o grupos de homología del poset $\mathcal{X}(K)$.

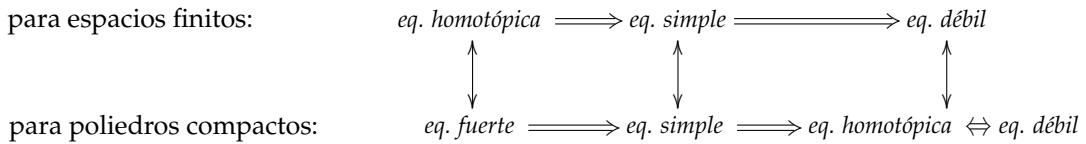
$$\{ \text{Complejos simpliciales finitos} \} \xleftrightarrow[\mathcal{X}]{\mathcal{K}} \{ \text{Espacios topológicos finitos } T_0 \}$$

Un ejemplo de aplicación de estas herramientas es el artículo [5], en el cual Barmak y Minian prueban una conjetura de May sobre los espacios de cardinal mínimo con los mismos grupos de homotopía que las esferas. Una "mala noticia" al respecto es que se ha demostrado que **no** se puede determinar completamente de manera algorítmica el tipo homotópico de un poliedro (equivalentemente, el tipo homotópico débil de un espacio finito) [21].

En [6] Barmak y Minian utilizan las aplicaciones anteriores para el estudio del tipo homotópico

simple de complejos simpliciales. La noción de *colapso simplicial* de Whitehead es el movimiento fundamental de complejos que da lugar a los tipos homotópicos simples. Siguiendo la filosofía de la teoría de Stong, ellos definen el *tipo homotópico simple de espacios finitos* en base a un movimiento fundamental: el de remover *weak points* y prueban que el tipo homotópico simple de espacios finitos T_0 se corresponde, vía las aplicaciones de McCord, con el tipo homotópico simple de los complejos simpliciales finitos. Introducen de este modo una nueva herramienta para el estudio de la colapsabilidad de poliedros; una teoría que tiene asociadas varias conjeturas topológicas importantes que aún no fueron completamente resueltas, como la de Zeeman (que implica estrictamente la de Poincaré), y la de Andrew-Curtis. Notar que el movimiento fundamental de espacios finitos inducido por los weak points es más sencillo de manipular que el simplicial, pues consiste simplemente en quitar un punto del espacio (que puede describirse de modo combinatorio). Luego, puede concretarse de manera algorítmica. Sin embargo, el estudio del tipo homotópico simple, como es de esperarse, se torna algo más complicado que en el caso de los beat points. Un año después, Barmak y Minian muestran que el tipo homotópico de espacios finitos se corresponde con el tipo homotópico fuerte de complejos simpliciales finitos [8].

La primer parte de la tesis se circumscribe en la utilización de métodos de reducción de espacios finitos para el estudio de propiedades topológicas de poliedros compactos de modo algorítmico. El capítulo 1 está destinado a repasar los conceptos de complejos simpliciales y celulares, así como las nociones de tipo homotópico, tipo homotópico simple, tipo homotópico débil y tipo homotópico fuerte. Como resumen, exponemos aquí la siguiente tabla de implicaciones:



El capítulo 2 está dedicado a la presentación de algunos de los resultados más importantes en torno a la teoría de espacios finitos; correspondientes a Alexandroff [1], McCord [23], Stong [27] y Barmak y Minian [3], [4], [5], [6], [7], [8]. Hacemos hincapié en las correspondencias entre los distintos tipos de homotopía. Presentamos al final del capítulo un estudio detallado de las relaciones entre la colapsabilidad de espacios finitos y distintas operaciones entre ellos; algunos de los resultados que allí figuran no se encuentran en la bibliografía.

En el capítulo 3 concretamos la transformación del estudio de propiedades topológicas a uno de tipo combinatorio, mediante la implementación de los algoritmos que se desprenden de los trabajos sobre tipo homotópico [27] y homotópico simple [6] de espacios finitos. Para lograrlo, utilizamos un software libre llamado Sage cuyo lenguaje de programación asociado es Python. Además de los algoritmos mencionados antes, creamos una librería de funciones asociadas a espacios finitos, teniendo como proyecto en preparación que formen parte del código de Sage.

Una definición natural que surgió del estudio del tipo homotópico simple de espacios finitos es la de *weak core*. Un *weak core* de espacio finito X es un espacio sin *weak points* que se obtiene de remover sucesivamente *weak points* de X . En general, no hay unicidad (ni siquiera salvo homeomorfismos) en los *weak cores* de un espacio. De hecho, una de las principales funciones que creamos en el capítulo 3 es la función `weak_cores`, que toma como argumento un espacio finito, descripto en forma de poset, y devuelve el conjunto de sus *weak cores*. Si consideramos la función que asigna, a cada espacio finito, el conjunto de sus *weak cores*, no resulta ser inyectiva. Si definimos su codominio como la colección de conjuntos (finitos) de espacios finitos sin *weak points* simplemente equivalentes, tampoco resulta ser suryectiva. En el capítulo 4 analizamos los conjuntos en el codominio cuya preimagen por la función anterior es no vacía. Los denominamos *conjuntos compatibles*. La idea de este estudio es entender mejor la teoría de colapsabilidad.

En el capítulo 5 realizamos un análisis exhaustivo de los métodos de reducción de espacios finitos. Exponemos otros métodos existentes, además de los inducidos por los beat y los weak points, que preservan distintas propiedades del espacio (tipo homotópico simple, grupos de homología, etc), y que consisten en la eliminación de diversos elementos (un punto, un conjunto de puntos, una relación de cubrimiento o una arista del *diagrama de Hasse* del poset asociado, etc). También proponemos algunos métodos nuevos. El objetivo de este capítulo es la búsqueda de un método de reducción que diferencie (al menos en algún caso) espacios que no son simplemente equivalentes, pero sí débilmente equivalentes. Mediante los resultados obtenidos en 5.2.1 y 5.3.1, hacemos notar que removiendo conjuntos de puntos, relaciones o aristas sin alterar el tipo homotópico débil no caracterizaremos más que el tipo homotópico simple.

En conclusión, los recursos basados en métodos de reducción con los que contamos para caracterizar tipo homotópico débil y homología de espacios finitos no son suficientes. Por ese motivo, cambiamos la estrategia para estudiar estos invariantes. Los últimos dos capítulos de la tesis están destinados a utilizar la teoría de Morse discreta como herramienta para transformar ese estudio en un problema de optimización combinatoria; e intentar resolverlo de manera algorítmica.

En el capítulo 6 realizamos una presentación de la evolución de la teoría de Morse discreta, exponiendo los resultados más importantes. La idea central es, dado un poliedro con estructura celular o simplicial fija, hallar una representación más "concisa" y "eficiente" del mismo que conserve su tipo homotópico u homología.

En 1995, Forman [15] presenta una teoría, basada en la teoría de Morse clásica, aplicable a estructuras simpliciales. De modo análogo a lo que ocurre en el contexto de variedades diferenciables, los *puntos críticos* de las *funciones de Morse* describen el tipo homotópico del espacio. Más específicamente, si f es una función de Morse asociada a K , entonces K es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con tantas p -celdas como puntos críticos de grado p tenga f . El objetivo es entonces hallar funciones de Morse con la menor cantidad de puntos críticos.

Un año más tarde, Chari [13] codifica a las funciones de Morse en forma de *matchings acíclicos* (también denominados *de Morse*) en el diagrama de Hasse del poset asociado. Recientemente, Minian [25] extiende el campo de aplicación de la teoría de Morse para posets a una clase más amplia que la de los face posets (denominados posets *admisibles*). También establece una versión homológica de la teoría para una clase más general aún (la de los posets *h-admisibles*). Uno de los resultados probados por Minian en [25] establece que las *triangulaciones de orden* de una variedad diferenciable (o más generalmente, de una variedad homológica triangulable) son posets *h-admisibles*. De este modo, permite aplicar esta nueva teoría discreta a objetos diferenciables; extendiendo, mediante herramientas combinatorias, la teoría de Morse clásica de variedades.

Un aporte original realizado en este capítulo consiste en la versión simple (6.4.17) del resultado de Minian (6.4.3). Vemos que dado un poset admisible y un matching de Morse en su diagrama de Hasse, su complejo asociado tiene el mismo tipo homotópico **simple** que un CW-complejo cuyas celdas están descriptas por los puntos críticos del matching.

El problema de estudiar el tipo homotópico y homología de poliedros compactos (y CW-complejos en general) se transforma entonces, vía la teoría de Morse discreta, en uno puramente combinatorio: el de hallar un matching acíclico máximo (es decir, con la menor cantidad de puntos críticos) en el diagrama de Hasse del poset asociado. Joswig y Pfesch [19] han demostrado que este problema es \mathcal{NP} -hard.

En el capítulo 7, desarrollamos distintas estrategias para la resolución del problema anterior. Reformulamos y generalizamos los métodos de cancelación de puntos críticos de Forman [15] y Hersh [18], obteniendo herramientas para tratar el problema con heurísticas. También lo

modelamos como uno de programación lineal entera (basados en [19]) y uno de programación dinámica, implementando los algoritmos correspondientes en Sage.

Capítulo 1

Complejos simpliciales y celulares

1.1 Introducción

Uno de los problemas más importantes de la topología algebraica es clasificar a los espacios topológicos según se puedan deformar unos en otros. Desafortunadamente, decidir si dos espacios son homotópicamente equivalentes puede resultar muy difícil.

Por ejemplo, consideremos la "casa de dos habitaciones de Bing", que se obtiene de un cubo con un piso intermedio, al que le hemos removido un cuadrado abierto de la base de la casa, un cuadrado abierto del techo, dos cuadrados abiertos del primer piso y le hemos agregado dos tubos y dos paredes (ver Figura 1.1).

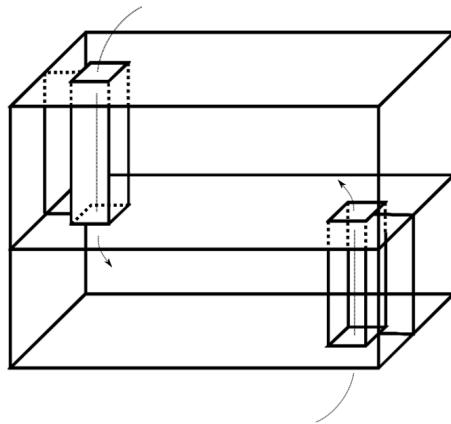


Figura 1.1: Bing's House

Notar que para ingresar a la habitación superior de la casa debemos hacerlo por el tubo de abajo y para ingresar a la habitación inferior, por el tubo de arriba. Sorprendentemente, este subespacio de \mathbb{R}^3 es contráctil siendo un retracto por deformación de un cubo.

Otro famoso espacio topológico a considerar es el "Dunce Hat", introducido por E. C. Zeeman [32]. Se obtiene identificando los lados de un triángulo como indica la Figura 1.2. Este espacio también es contráctil.

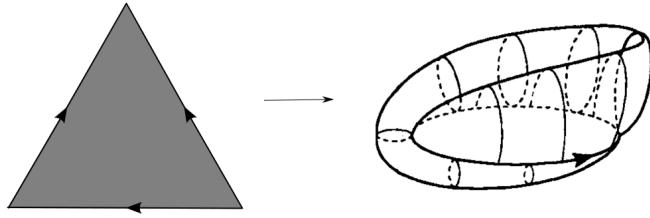


Figura 1.2: Dunce Hat

Si los espacios topológicos que son objeto de nuestro estudio tienen estructura combinatoria (de complejo simplicial o celular), ésta puede ser utilizada como herramienta para tal clasificación. La teoría de homotopía simple concentra ese espíritu.

Por ejemplo, una manera simple de demostrar que el Dunce Hat es contráctil consiste en asociarle una estructura de CW-complejo y demostrar que tiene el mismo tipo homotópico "simple" que un punto (que implica que es contráctil).

En este capítulo recordaremos las definiciones y los resultados básicos concernientes a complejos simpliciales y CW-complejos y las teorías de homotopía simple y homotopía fuerte que permiten abordar de manera combinatoria el problema anterior.

1.2 Espacios topológicos: tipo homotópico y homología

Comenzamos repasando brevemente algunos conceptos básicos sobre homotopía y fijando notación.

Denotamos al intervalo unitario $[0, 1]$ por I .

Si X es un espacio topológico, 1_X será la función identidad de X .

Recordar que si $f, g : X \rightarrow Y$ son funciones continuas entre espacios topológicos, se dice que f es *homotópica* a g , y se nota $f \simeq g$, si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. H recibe el nombre de *homotopía*. Notamos $H(-, 0) = H_0$ y $H(-, 1) = H_1$.

Si $X_0 \subset X$ es un subespacio, $f \simeq g$ rel X_0 si existe una homotopía H entre f y g tal que $H(x, t) = x$ para todo $x \in X_0$, $t \in I$.

$f : X \rightarrow Y$ es una *equivalencia homotópica* si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$.

Un caso particular de equivalencia homotópica es el de las retracciones por deformación fuerte. Si $X \subseteq Y$ subespacio, $r : Y \rightarrow X$ es una *retracción por deformación fuerte* (o X es un *retracto por deformación fuerte* de Y) si $r \circ i = 1_X$ e $i \circ r \simeq 1_Y$ rel X , donde $i : X \hookrightarrow Y$ denota la inclusión.

X e Y son *homotópicamente equivalentes* (o tienen el mismo *tipo homotópico*) si existe una equivalencia homotópica entre ellos. Lo notamos $X \xrightarrow{\text{he}} Y$.

X es *contráctil* si $X \xrightarrow{\text{he}} *$.

Presentamos a continuación otra propiedad topológica que estudiaremos a lo largo de esta Tesis: el tipo homotópico débil.

Definición 1.2.1. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos se dice que es una *equivalencia homotópica débil* si induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía; es decir, si $f_0 : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ es una biyección y $f_n : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ son isomorfismos para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo punto base $x_0 \in X$.

Notar que las equivalencias homotópicas son equivalencias homotópicas débiles, pero en general no vale la recíproca. Puede hallarse un ejemplo con espacios topológicos finitos en 2.6.6.

El teorema de Whitehead 1.4.9 afirma que vale la recíproca cuando ambos espacios son CW-complejos.

Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica débil, entonces induce, en particular, isomorfismos en todos los grupos de homología. Es decir, $f_n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ son isomorfismos para todo $n \in \mathbb{N}_0$, donde $H_n(X)$ denota la homología del espacio topológico X con coeficientes en \mathbb{Z} (ver [17], Proposición 4.21).

La equivalencias homotópicas débiles cumplen la propiedad llamada *2 de 3*: si f y g son dos funciones componibles y 2 de las 3 funciones f , g y $g \circ f$ son equivalencias homotópicas débiles, entonces también lo es la tercera.

Definición 1.2.2. Dos espacios topológicos X e Y son *débilmente equivalentes*, o tienen el mismo *tipo homotópico débil*, si existe una sucesión finita de espacios $X = X_0, X_1, \dots, X_n = Y$ tales que, para cada $0 \leq i \leq n-1$, existe una equivalencia homotópica débil $X_i \rightarrow X_{i+1}$ o $X_{i+1} \rightarrow X_i$. Lo notamos $X \approx_{\text{we}} Y$.

Claramente lo anterior define una relación de equivalencia.

Observación 1.2.3. Si dos espacios topológicos X e Y son débilmente equivalentes, entonces existe un CW-complejo Z y equivalencias homotópicas débiles $Z \rightarrow X$ y $Z \rightarrow Y$. Esto es consecuencia del teorema CW aproximaciones, ver [17] Cap. 4, 352-357.

En particular, la sucesión de espacios de la definición anterior se puede tomar con $n = 1$.

Definición 1.2.4. Un espacio topológico se dice *homotópicamente trivial* si todos sus grupos de homotopía son nulos; equivalentemente, si es débilmente equivalente a un punto.

A continuación, enunciamos el teorema de McCord, que tendrá un papel muy importante en el desarrollo de la teoría de espacios finitos, pues, entre otras cosas, permitirá establecer la conexión entre la topología de complejos simpliciales y de espacios finitos.

El resultado afirma, en esencia, que si una función es localmente una equivalencia homotópica débil, entonces lo es globalmente.

Precisamos una definición previa.

Definición 1.2.5. Sea X un espacio topológico. Un cubrimiento abierto \mathcal{U} de X se dice que es un *cubrimiento abierto tipo base* si \mathcal{U} es una base para una topología más gruesa que la de X . Equivalentemente, si $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ y $x \in U_1 \cap U_2$, $\exists U_3 \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

Teorema 1.2.6 (McCord). Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Si existe un cubrimiento abierto tipo base \mathcal{U} de Y tal que para todo $U \in \mathcal{U}$, la restricción $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ es una equivalencia homotópica débil, entonces $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica débil.

Demostración. La demostración original de McCord se encuentra en [23], Teorema 6. Una demostración para cubrimientos finitos también puede hallarse en el libro de Hatcher [17], Corolario 4K.2. \square

Finalmente exponemos algunos teoremas clásicos de la topología algebraica que resultarán herramientas necesarias. Para hallar las correspondientes demostraciones, remitimos al lector al libro de Hatcher [17].

Teorema 1.2.7 (Van Kampen). Sea X un espacio topológico con punto base x_0 .

Si X es unión de conjuntos abiertos arcoconexos A_α que contienen al punto base tales que toda intersección $A_\alpha \cap A_\beta$ es arcoconexa, entonces el morfismo $\Phi : \ast_{\alpha} \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$ (que se obtiene de extender los morfismos $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$ inducidos por las inclusiones $A_\alpha \hookrightarrow X$) es suryectivo.

Si además toda intersección $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ es arcoconexa, entonces el núcleo de Φ es el subgrupo normal N generado por los elementos de la forma $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, donde $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \hookrightarrow \pi_1(A_\alpha)$ es el morfismo inducido por la inclusión $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$, ídem para $i_{\beta\alpha}$ y $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$. Además, Φ induce un isomorfismo $\pi_1(X) \approx_{\alpha} \pi_1(A_\alpha)/N$.

Demostración. Ver [17] Teorema 1.20. \square

Teorema 1.2.8 (Mayer-Vietoris). *Sea X un espacio topológico, y sean A y B subespacios de X tales que $X = A \cup B$. Entonces las inclusiones*

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow i_1 & \curvearrowleft & \searrow j_1 & \\ A \cap B & \curvearrowleft & & & X \\ & \searrow i_2 & \curvearrowleft & \nearrow j_2 & \\ & & B & & \end{array}$$

inducen una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0$$

donde $\varphi = ((i_1)_*, -(i_2)_*)$ y $\psi = (j_1)_* + (j_2)_*$.

Demostración. Ver [17] Sección 2.2, Cap. 2, pág 149. \square

Dado un espacio topológico X , los grupos de homología reducida $\tilde{H}_n(X)$ son los grupos de homología del complejo de cadenas aumentado

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} C_2(X) \xrightarrow{\partial_1} C_1(X) \xrightarrow{\partial_0} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde $\varepsilon(\sum_i \eta_i \sigma_i) = \sum_i \eta_i$ (ver [17], 2.1).

Se deducen las siguientes igualdades: $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ y $H_n(X) = \tilde{H}_n(X)$ para todo $n > 0$ (ver [17], Cap. 2, 110).

El teorema de Mayer-Vietoris también vale para homología reducida.

Teorema 1.2.9 (Hurewicz). *Sea $n \geq 2$.*

Si X es un espacio topológico $(n-1)$ -conexo (es decir, $\pi_i(X) = 0$ para todo $i \leq n-1$) entonces $\tilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i < n$ y $\pi_n(X) \approx H_n(X)$.

Demostración. Ver [17] Teorema 4.32. \square

1.3 Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales son objetos combinatorios que permiten modelar una amplia clase de espacios topológicos (denominados poliedros), que incluye a los espacios más comúnmente estudiados en múltiples áreas de la matemática.

Informalmente, un poliedro es un espacio topológico que se deja descomponer en bloques de distintas dimensiones, denominados simplices. Los simplices, geométricamente, consisten en

celdas convexas tales como puntos, segmentos, triángulos, tetraedros, y sus análogos en dimensiones mayores (ver Figura 1.3); y se "pegan" de modo tal que si dos simplices se intersecan, la intersección consiste en una cara común (ver Figura 1.4).

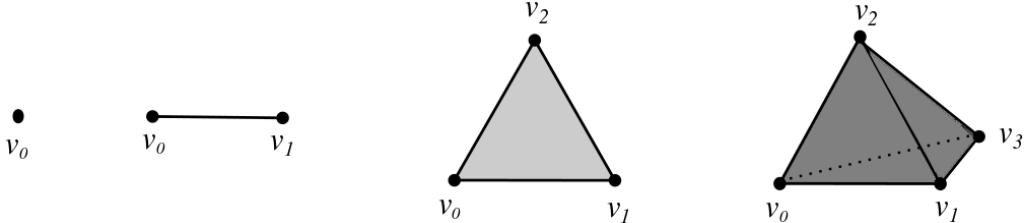


Figura 1.3: Simplices.

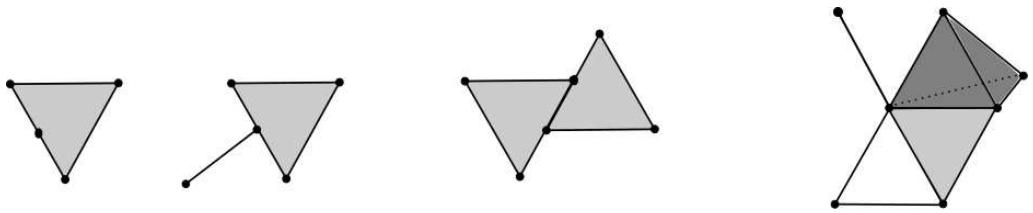


Figura 1.4: Sólo el último esquema corresponde a un complejo simplicial.

La principal ventaja de codificar un espacio topológico a través de un complejo simplicial es que la estructura combinatoria de este último preserva muchas de las propiedades e invariantes topológicos del espacio que modela.

En esta sección repasamos las definiciones y propiedades básicas concernientes a la clase de los complejos simpliciales; así como el estudio particular del tipo homotópico de poliedros mediante deformaciones que hacen uso de su estructura combinatoria (teoría de homotopía simple y fuerte).

1.3.1 Nociones básicas

Comenzamos exhibiendo dos definiciones, equivalentes, de complejo simplicial finito. La primera versión, geométrica; la segunda, abstracta.

Definición 1.3.1. Sea $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Una *combinación convexa* de los puntos de V es una combinación lineal $\sum_{i=0}^k t_i v_i$ tal que $t_i \geq 0$ para todo $0 \leq i \leq k$ y $\sum_{i=0}^k t_i = 1$.

La *cápsula convexa* de V es la colección de las combinaciones convexas de sus elementos. Equivalentemente, es el menor convexo (en el sentido de la inclusión) que lo contiene.

Se dice que V es *afínmente independiente* si cada vez que $\sum_{i=0}^k t_i v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^k t_i = 0$ se tiene que $t_i = 0$ para todo $0 \leq i \leq k$. La condición anterior implica que si dos combinaciones convexas de los puntos de V coinciden, entonces los coeficientes coinciden. Luego, si V es afínmente independiente, hay unicidad en la escritura de los elementos de su cápsula convexa.

Se dice que V está en *posición general* si todo subconjunto no vacío de V de a lo sumo $m + 1$ puntos es afínmente independiente.

Definición 1.3.2. Un *símplex geométrico* σ es la cápsula convexa de un conjunto de vértices incluído en \mathbb{R}^m , para algún m , afínmente independiente.

Si v_0, v_1, \dots, v_k son los vértices que determinan el símplex σ , notaremos $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ y diremos que σ tiene *dimensión* k o que es un k -*símplex*.

Una *cara* τ de un símplex geométrico σ es la cápsula convexa de un subconjunto de sus vértices; lo notamos $\tau \leq \sigma$.

Por ejemplo, la Figura 1.3 muestra sencillos geométricos de dimensión 0, 1, 2 y 3.

Definición 1.3.3. Un *complejo simplicial geométrico finito* K es un conjunto de sencillos geométricos cerrado por caras (es decir, si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$, entonces $\tau \in K$) tal que toda intersección no vacía de dos sencillos de K es un símplex de K .

Definición 1.3.4. Un *complejo simplicial abstracto finito* es un par (V, K) , con V un conjunto finito cuyos elementos llamaremos *vértices*, y K una colección de subconjuntos de V que satisface:

- $V \subseteq K$;
- si $\tau \in K$ y $\sigma \subseteq \tau$, $\sigma \neq \emptyset$, entonces $\sigma \in K$.

Por abuso de notación, simplemente lo llamaremos K . En ocasiones, para que no exista ambigüedad, llamaremos a los vértices V_K .

Los elementos de K se llaman *sencillos abstractos*. Si $\sigma \in K$ y $|\sigma| = k + 1$, se dice que σ tiene *dimensión* k o que es un k -*símplex*.

Si σ y τ son sencillos de K tales que $\tau \subseteq \sigma$, entonces τ es *cara* de σ . Lo notamos $\tau \leq \sigma$.

Notar que en la definición abstracta de complejo simplicial no es necesario hacer aclaración alguna respecto la intersección de dos de sus sencillos. Dado que en el caso abstracto los sencillos son conjuntos de vértices y el complejo es cerrado por subconjuntos, las intersecciones resultan trivialmente sencillos.

Ejemplo 1.3.5.

- (i) Si $V = \{a, b, c, d, e\}$, entonces

$$K_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{b, d\}\}$$

es un complejo simplicial (de dimensión 2). Seguiría siéndolo si por ejemplo faltara en K el conjunto $\{c, e\}$, aunque dejaría de serlo si faltara por ejemplo el conjunto $\{a, c\}$.

- (ii) Si $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$, y $K_2 = \mathcal{P}(V)$, K es el complejo simplicial formado por un k -símplex y todas sus caras; tiene dimensión k .

Definición 1.3.6. Sea K un complejo simplicial finito.

Se define la *dimensión* de K como $\dim(K) = \max \{\dim(\sigma) : \sigma \in K\}$.

Definición 1.3.7. Sean K y L complejos simpliciales finitos.

Un *morfismo simplicial* $\varphi : K \rightarrow L$ es una función entre sus vértices $\varphi : V_K \rightarrow V_L$ que respeta la estructura simplicial, es decir, si $\{v_0, \dots, v_k\}$ es un símplex de K , entonces $\{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_k)\}$ es un símplex de L .

Las dos definiciones exhibidas de complejo simplicial son esencialmente la misma, destacando en el caso abstracto la combinatoria, y en el caso geométrico (valga la redundancia), la geometría.

Observación 1.3.8. Sea K un complejo simplicial geométrico finito. Dado que todo simplex geométrico está generado por un único conjunto de vértices afínmente independiente, K tiene asociado un complejo simplicial abstracto.

Recíprocamente, sea K un complejo simplicial abstracto finito de dimensión n . Es posible elegir un conjunto de $|V_K|$ vértices en \mathbb{R}^m , con $m \geq 2n+1$ en posición general. Identificamos cada vértice con un punto y cada simplex con la cápsula convexa de los puntos asociados a vértices. Construimos así un complejo simplicial geométrico asociado a K , que es único salvo isomorfismo simplicial.

Obtenemos de este modo una correspondencia entre complejos simpliciales finitos geométricos y abstractos. Trabajaremos con ambos enfoques al mismo tiempo.

A partir de aquí, asumimos que los complejos simpliciales con los que trabajemos serán finitos.

Definición 1.3.9. Sea K un complejo simplicial.

Si $\tau \subsetneq \sigma$, entonces τ es *cara propia* de σ , y lo notamos $\tau \subsetneq \sigma$.

Si además $\dim(\tau) + 1 = \dim(\sigma)$, entonces τ es *cara inmediata* de σ y lo notamos $\tau \prec \sigma$.

Un simplex $\sigma \in K$ se dice *maximal* si no es cara de ningún otro simplex de K .

Veamos en qué forma modelan los complejos simpliciales a los poliedros.

Definición 1.3.10. La *realización geométrica* de un complejo simplicial geométrico K , que notaremos $|K|$, es el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es la unión de los simplices de K . Cada simplex hereda la topología subespacio del \mathbb{R}^m en el cual está incluído. Y $|K|$ tiene la topología final respecto de las inclusiones de los simplices; es decir, $U \subseteq |K|$ es abierto si y sólo si $U \cap \sigma$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$.

Si K es un complejo simplicial abstracto, "la" realización geométrica es la de algún complejo simplicial geométrico isomorfo a K . Notar que es única salvo isomorfismo lineal a trozos.

Notar que, dado que K es finito, $|K|$ resulta compacto.

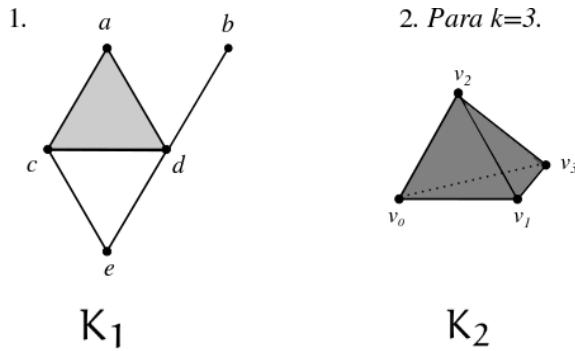


Figura 1.5: Realización geométrica de los complejos simpliciales del ejemplo 1.3.5.

Definición 1.3.11. Los espacios topológicos que son homeomorfos a la realización geométrica de algún complejo simplicial reciben el nombre de *poliedros*.

Cada complejo simplicial cuya realización geométrica es homeomorfa un espacio topológico X se denomina *triangulación* de X .

Ejemplo 1.3.12.

- (i) Para todo $n \geq 1$, el disco unitario $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es homeomorfo al n - simplex y luego, es un poliedro.

- (ii) Todo grafo¹ es un poliedro, pues consiste en la realización geométrica del complejo simplicial de dimensión 1 cuyos vértices son los nodos y cuyos 1-simplices son las aristas.
- (iii) El cuadrado unitario $I \subset \mathbb{R}^2$ es un poliedro, pues admite alguna triangulación, como se ve en la figura 1.6.

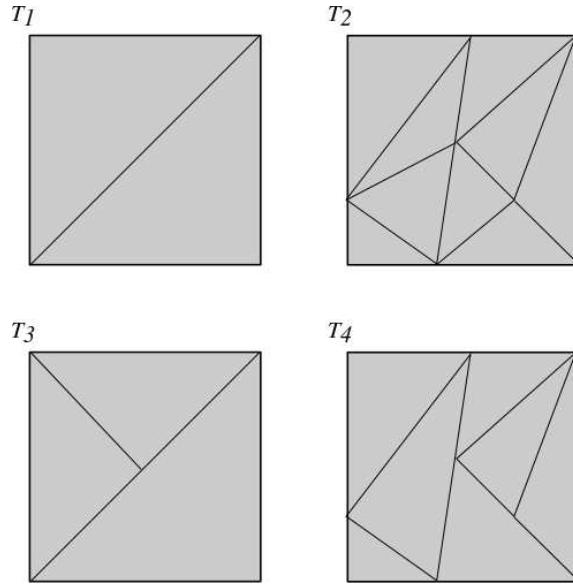


Figura 1.6: T_1 y T_2 son triangulaciones de I , T_3 y T_4 no.

Definición 1.3.13. Si $\varphi : K \longrightarrow L$ un morfismo simplicial entre complejos simpliciales. Se define la función continua $|\varphi| : |L| \longrightarrow |K|$ por:

$$|\varphi| \left(\sum_{i=0}^k t_i v_i \right) = \sum_{i=0}^k t_i \varphi(v_i)$$

La buena definición de $|\varphi|$ deriva de que todo elemento de $|K|$ se escribe de manera única como combinación convexa $\sum_{i=0}^k t_i v_i$ con $\sum_{i=0}^k t_i = 1$, $t_i \geq 0$ para todo $0 \leq i \leq k$ y $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\} \in K$.

La continuidad de $|\varphi|$ se deduce de que se obtiene de extender a φ linealmente en la realización geométrica de los simplices $|\sigma|$. En efecto, las restricciones $|\varphi|_{|\sigma|}$ resultan continuas; y como $|K|$ tiene la topología final respecto de $\{|\sigma| \hookrightarrow |K| : \sigma \in K\}$, $|\varphi|$ resulta continua.

Definición 1.3.14. Sea K un complejo simplicial.

L es un *subcomplejo* de K si L es un complejo simplicial tal que $L \subseteq K$. Lo notamos $L \leq K$.

Un subcomplejo $L \leq K$ se dice *pleno* si todo simplex de K formado por vértices de L también es simplex de L .

Ejemplo 1.3.15. Veamos algunos subcomplejos del complejo simplicial 1. del ejemplo 1.3.5.

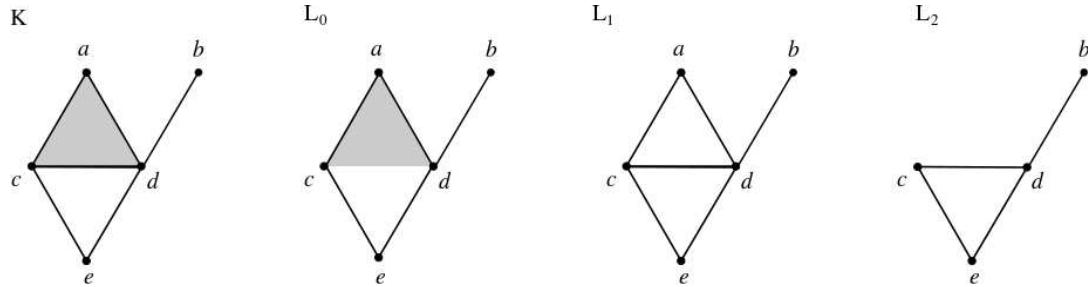
Recordar que $K = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{b, d\}\}$.

- (i) $L_0 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{b, d\}\} = K \setminus \{\{c, d\}\}$ no es un subcomplejo de K pues la cara $\{c, d\}$ del simplex $\{a, c, d\}$ no pertenece a L_0 .

¹Ver definición 7.2.1.

- (ii) $L_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{b, d\}\} = K \setminus \{\{a, c, d\}\}$ es un subcomplejo de K no pleno, pues los vértices a, b, c pertenecen a L_1 y $\{a, b, c\}$ es simplex de K , sin embargo no lo es de L_1 .
- (iii) $L_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{b, d\}\} = K \setminus \{\{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a\}\}$ es un subcomplejo pleno de K .

Gráficamente,



Definición 1.3.16. Sea σ es un simplex de un complejo simplicial K .

$\bar{\sigma}$ denota el subcomplejo de K cuyos simplices son σ y todas sus caras.

$\partial\sigma$, el *borde* de σ , es el subcomplejo de K cuyos simplices son todas las caras propias de σ (equivalentemente, $\partial\sigma = \bar{\sigma} \setminus \{\sigma\}$).

Definición 1.3.17. Sea σ un simplex.

σ° , el *interior* de σ , es el conjunto de combinaciones convexas de los vértices de σ que no pertenecen a $\partial\sigma$, es decir, que tienen coeficientes positivos.

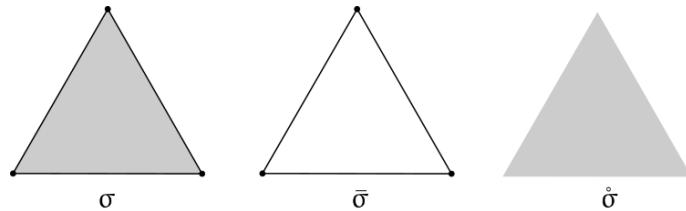


Figura 1.7: Borde e interior del 2-símplex σ .

Definición 1.3.18. Dado $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ un conjunto finito de simplices, el *complejo generado por $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$* es el complejo simplicial cuyos simplices son $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ y todas sus caras. Lo notamos $\overline{\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}}$.

Exponemos ahora una operación muy importante entre complejos simpliciales: el *join*.

Definición 1.3.19. Dados $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ y $\tau = \{u_0, u_1, \dots, u_l\}$ dos simplices disjuntos, se define el *join* entre σ y τ como el simplex $\sigma * \tau = \{v_0, v_1, \dots, v_k, u_0, u_1, \dots, u_l\}$. También se nota $\sigma \tau$.

Dados K y L dos complejos simpliciales disjuntos, se define el *join* entre K y L como el complejo simplicial $K * L$ cuyo conjunto de vértices es $V_K \cup V_L$ y cuyo conjunto de simplices es $\{\sigma * \tau : \sigma \in K, \tau \in L\} \cup K \cup L$.

Si $K = \{\emptyset, \{v\}\}$, $K * L$ se denomina el *cono* de L , y se nota vL .

Si $K = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}\}$, $K * L$ se denomina la *suspensión* de L , y se nota ΣL .

Si los complejos están inmersos en algún espacio euclídeo \mathbb{R}^n , el join claramente puede no estar inmerso en \mathbb{R}^n , pero lo estará en \mathbb{R}^m con $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

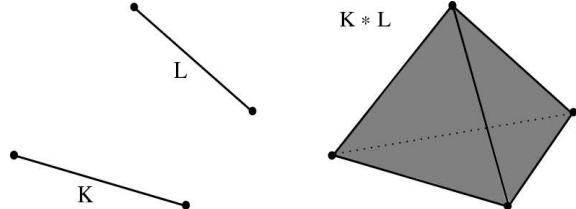


Figura 1.8: Join.

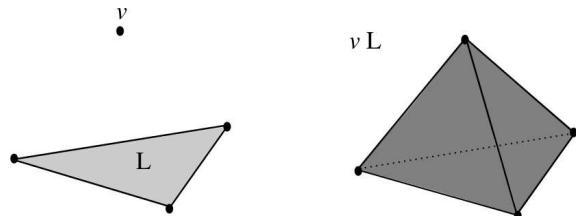


Figura 1.9: Cono de un 2-símplex.

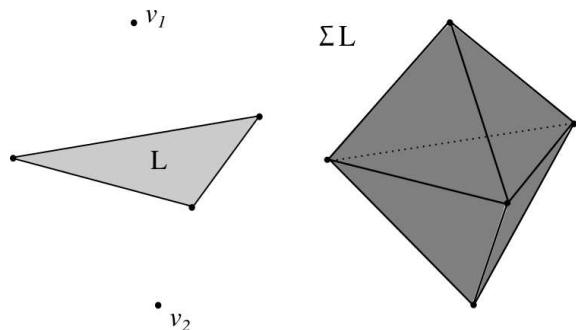


Figura 1.10: Suspensión de un 2-símplex.

A continuación presentamos las nociones de link y star, que resultan muy útiles a la hora de realizar un estudio de las propiedades locales de los complejos simpliciales.

Definición 1.3.20. Sea K un complejo simplicial y σ un símplex de K .

El *link* de σ en K es el subcomplejo $\text{lk}(\sigma, K) \subseteq K$ de simplices $\tau \in K$ disjuntos con σ tales que $\tau * \sigma \in K$.

El *star* de σ en K es el subcomplejo $\text{st}(\sigma, K) \subseteq K$ de simplices $\tau \in K$ tales que σ y τ son caras de algún simplex $\eta \in K$. Equivalentemente, es el complejo simplicial cuyos simplices son $\{\eta \in K : \sigma \prec \eta\}$.

Ejemplo 1.3.21. Consideremos el complejo simplicial K de la figura 1.4.

En la siguiente figura se muestra el link y join de un simplex de K , para distintas elecciones del mismo.

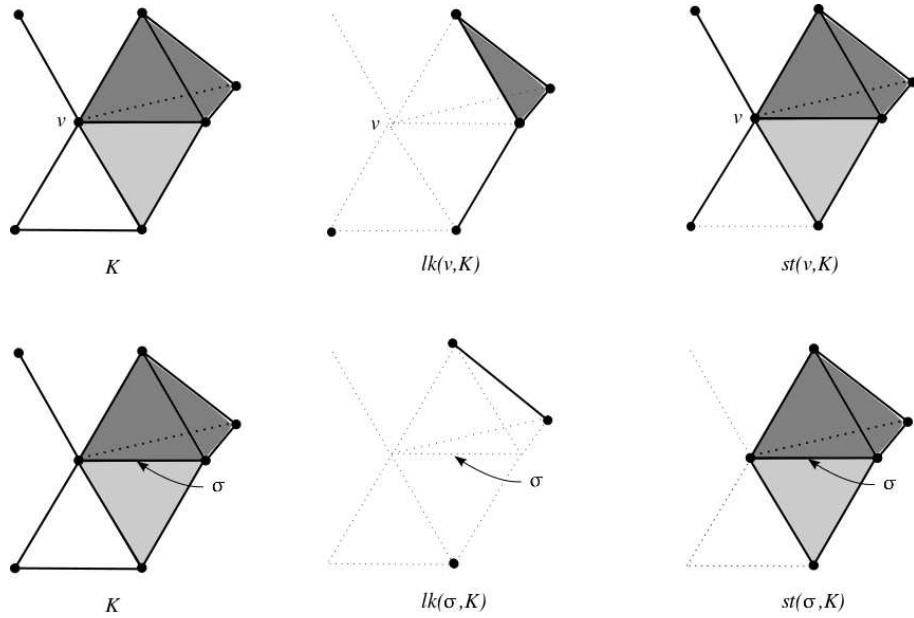


Figura 1.11: Link y star.

Dados K un complejo simplicial y $\sigma \in K$, notamos por $K \setminus \sigma$ al subcomplejo pleno de K generado por los vértices de K que no pertenecen a σ .

Observación 1.3.22. Sea K un complejo simplicial y σ un simplex de K .

Valen las siguientes igualdades:

- $st(\sigma, K) = \sigma(lk(\sigma, K))$;
- $lk(\sigma, K) = st(\sigma, K) \cap (K \setminus \sigma)$,

Definición 1.3.23. Dado K es un complejo simplicial, el *star abierto* de un simplex $\sigma \in K$ es el subespacio de $|K|$ descripto por $\overset{\circ}{st}(\sigma, K) = \bigcup_{\tau \geq \sigma} \overset{\circ}{\tau}$.

Observación 1.3.24. Notar que el star abierto de un simplex $\sigma \in K$ es un subespacio de $|st(\sigma, K)|$.

Además, es abierto en $|K|$. En efecto, dada la topología de $|K|$, basta chequear que para todo $\tau \in K$, $|\tau| \cap \overset{\circ}{st}(\sigma, K)$ es abierto.

Pero

$$|\tau| \cap \overset{\circ}{st}(\sigma, K) = \bigcup_{\tau \leq \eta \leq \sigma} \overset{\circ}{\eta}.$$

Su complemento

$$|\tau| \setminus \bigcup_{\tau \leq \eta \leq \sigma} \overset{\circ}{\eta}$$

es cerrado en $|\tau|$ por ser la realización geométrica del subcomplejo $\bigcup_{\gamma \geq \sigma, \gamma \leq \eta} \gamma$ de τ .

En el estudio de los poliedros es importante considerar diferentes triangulaciones y las relaciones entre ellas. Un complejo simplicial puede ser subdividido en simplices "más pequeños" de distintas maneras.

Definición 1.3.25. Sea K un complejo simplicial geométrico.

El *baricentro* de un simplex geométrico $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ es el punto de σ con todas sus coordenadas iguales, es decir, $b(\sigma) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} v_i$.

La *subdivisión baricéntrica* de K , que notaremos K' , es el complejo simplicial cuyos vértices son los baricentros de los simplices de K y cuyos simplices son $\{b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k)\}$ con $\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_k$ simplices de K .

Definición 1.3.26. Sea K un complejo simplicial.

La *subdivisión baricéntrica* de K , que notaremos K' , es el complejo simplicial cuyos vértices son los simplices de K y cuyos simplices son las cadenas de simplices de K .

Notar que ambas definiciones se corresponden, identificando cada simplex con su baricentro.

Ejemplo 1.3.27. En la siguiente figura se exhibe la subdivisión baricéntrica del complejo simplicial K , correspondiente al primer ítem del ejemplo 1.3.5.

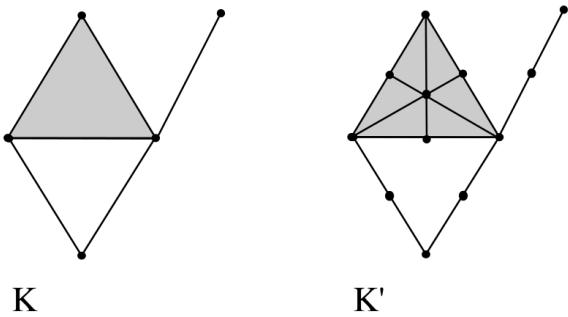


Figura 1.12: Subdivisión baricéntrica.

Observación 1.3.28. Para cualquier K complejo simplicial, $|K| = |K'|$.

En general, dado un complejo simplicial K con una realización geométrica $|K| \subset \mathbb{R}^n$ (para algún $n \in \mathbb{N}$), una *subdivisión* de K es un complejo simplicial L junto con una realización geométrica $|L| \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

- (i) para todo simplex $\sigma \in L$ existe un simplex $\tau \in K$ tal que $|\sigma| \in |\tau|$;
- (ii) para todo simplex $\tau \in K$, $|\tau|$ es unión finita de simplices de L .

1.3.2 Tipo homotópico simple

Ya hemos mencionado que uno de los problemas más importantes de la topología algebraica es clasificar a los espacios topológicos según su tipo homotópico. Si los espacios topológicos con los que trabajamos son poliedros, nos interesaría abordar este problema utilizando su estructura combinatoria.

En su artículo *Simplicial spaces, nuclei and m-groups* [28], J. H. C. Whitehead comienza el estudio de los tipos homotópicos de poliedros de manera combinatoria. Su teoría tiene como base la restricción de las deformaciones a sucesiones de ciertos movimientos especiales: el colapso y la expansión de simplices. Un colapso simplicial elemental de un complejo simplicial K es un movimiento particular que transforma a K en un subcomplejo L que es retracto por deformación fuerte de K ; el movimiento contrario se llama expansión elemental.

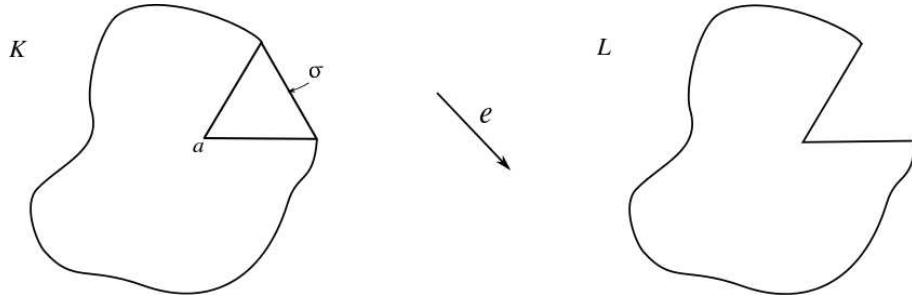


Figura 1.13: Colapso elemental.

Estos movimientos dan lugar a la noción de equivalencia homotópica simple entre complejos simpliciales. Una equivalencia homotópica simple induce una equivalencia homotópica entre las realizaciones geométricas. Whitehead se cuestionó si vale la recíproca de la afirmación anterior. Alrededor de 10 años más tarde, él mismo responde, de manera negativa, su pregunta. Más aún, mide la obstrucción para que esta implicación sea verdadera en forma algebraica; mediante lo que hoy se denomina el grupo de Whitehead de un complejo.

Las referencias standard sobre este tema son los artículos fundacionales de Whitehead [28, 29] y el libro de M. M. Cohen [14].

Definición 1.3.29. Sea L un subcomplejo de un complejo simplicial K . Se dice que hay un *colapso simplicial elemental* de K a L si existen dos simplices $\sigma, \tau \in K$ tales que $K = L \cup \{\sigma, \tau\}$ y τ es el único simplex que contiene a σ propiamente. En ese caso, se dice que σ es *cara libre* de τ .

Equivalentemente, hay un colapso simplicial elemental de K a L si existe un simplex σ de K y un vértice a de K que no pertenece a σ tal que:

- $K = L \cup a\bar{\sigma}$,
- $L \cap a\bar{\sigma} = a\dot{\sigma}$.

Para notar esta equivalencia basta tomar $\tau = a\sigma$.

Los colapsos elementales se notan $K \searrow^e L$.

Ejemplo 1.3.30. En la siguiente figura vemos distintos colapsos elementales.

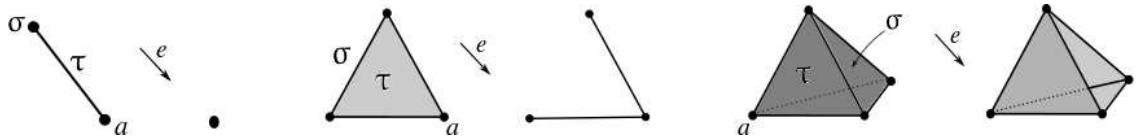


Figura 1.14: Colapsos elementales.

Proposición 1.3.31. Si $K \searrow^e L$, entonces $|L| \subset |K|$ es retracto por deformación fuerte.

La idea de la demostración es clara; y es precisamente la que da sentido al nombre de colapso que recibe este movimiento.

Supongamos que $L = K \setminus \{\sigma, \tau\}$ con σ cara libre de τ en K . Usando el hecho de que σ no es cara de ningún otro simplex, lo "empujamos" sobre las otras caras de τ y hacemos "desaparecer" ambos simplices.

En otras palabras, si $\tau = a\sigma$, llevamos $a\sigma$ hacia $a\dot{\sigma}$ empujando desde la cara libre σ .

Definición 1.3.32. Sea L un subcomplejo de un complejo simplicial K .

Se dice que K *colapsa* a L (o que L se *expande* a K) si existe una sucesión finita $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$ de complejos simpliciales tales que $K_i \searrow K_{i+1}$ para todo $0 \leq i < n$. Se nota $K \searrow L \nearrow K$.

Un complejo simplicial K se dice *colapsable* si colapsa a un vértice; se nota $K \searrow *$.

Dos complejos K y L tienen el mismo *tipo homotópico simple* (o son *simplemente equivalentes*) si existe una sucesión finita $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$ de complejos simpliciales tales que $K_i \searrow K_{i+1}$ o $K_i \nearrow K_{i+1}$ para todo $0 \leq i < n$. En tal caso, la sucesión $K = K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow \dots \rightarrow K_n = L$ se denomina *deformación*.

Se nota $K \nearrow L$.

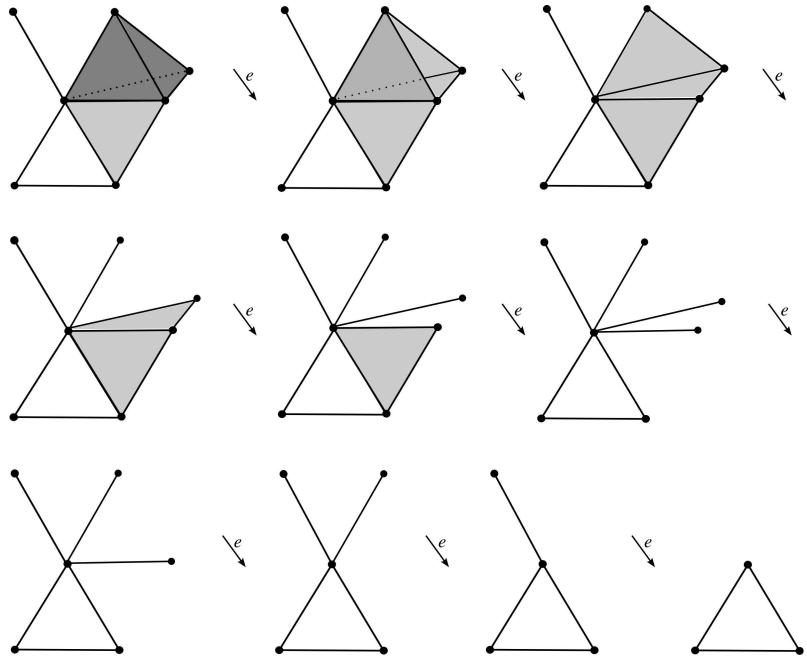


Figura 1.15: Sucesión de colapsos elementales.

Observación 1.3.33. Por 1.3.31, es claro que si $K \searrow *$ entonces $|K|$ es contráctil. La recíproca no es cierta en general. Por ejemplo, consideramos D el Dunce Hat. D es contráctil, pero cualquier triangulación de D no tiene caras libres, y luego no es colapsable (ver [32]).

Resulta sencillo notar que en un colapso simplicial, los colapsos elementales pueden ordenarse de manera decreciente en dimensión.

Proposición 1.3.34. Si $K \searrow L$, entonces toda sucesión de colapsos elementales de K a L puede reordenarse de la forma $K = K_0 \searrow K_1 \searrow \dots \searrow K_n = L$, donde $K_i = K_{i+1} \cup \{\sigma_i, a_i \sigma_i\}$ y $\dim(\sigma_i) \geq \dim(\sigma_{i+1})$.

Demuestra *rección.* Supongamos que $K \searrow K \setminus \{\sigma, \tau\} \searrow K \setminus \{\sigma, \tau, \sigma', \tau'\}$ y $\dim(\tau') > \dim(\tau)$. Por un lado, σ' es cara libre de τ' en K , porque lo era en $K \setminus \{\sigma, \tau\}$ y $\dim(\sigma') \geq \dim(\tau)$. Por el otro, σ es cara libre de τ en $K \setminus \{\sigma', \tau'\}$ porque lo era en K , y $\tau \in K \setminus \{\sigma', \tau'\}$. \square

Definición 1.3.35. Dado $n \geq 1$, y dados K y L complejos simpliciales, se dice que K se n -*deforma* en L si $K \nearrow L$ y existe alguna deformación entre ellos que involucra complejos simpliciales de dimensión a lo sumo n .

Las nociones de n -deformación y colapsabilidad tienen asociadas varias conjeturas importantes.

En [32], E. C. Zeeman muestra que el Dunce Hat D no es colapsable, pero que $D \times I$ sí lo es. Más aún, conjetura que esto ocurre para cualquier poliedro compacto contráctil de dimensión 2 y prueba que su conjetura implica la conjetura de Poincaré (que afirma que toda 3-variedad compacta simplemente conexa sin borde es homeomorfa a S^3). Si bien la conjetura de Poincaré fue probada por Perelman en 2002 con herramientas propias de la geometría diferencial, la implicación anterior permitiría una demostración alternativa con métodos combinatorios. La conjetura de Zeeman permanece abierta.

J. J. Andrews y M. L. Curtis [2] conjeturan un hecho más débil que el que afirma E. C. Zeeman: todo poliedro compacto contráctil de dimensión 2 se 3-deforma en un punto. Esta conjetura también permanece abierta.

Veamos a continuación una serie de propiedades relacionadas con la colapsabilidad de poliedros que serán necesarias en los capítulos siguientes.

Proposición 1.3.36. *Todo cono de un complejo simplicial es colapsable.*

*Demuestra*ción. Veamos que $vK \searrow *$ por inducción en la cantidad de simplices de K .

Sea $\sigma \in K$ un simplex maximal y sea $\tau = v\sigma \in vK$. Entonces τ es cara maximal de vK y σ es cara libre de τ en vK . Luego $vK \searrow vK \setminus \{\sigma, \tau\} = v(K \setminus \{\sigma\})$. Finalmente, por hipótesis inductiva, $v(K \setminus \{\sigma\}) \searrow *$. \square

Proposición 1.3.37. *Para todo K complejo simplicial, $K \nearrow K'$.*

*Demuestra*ción. Ver [28], sección 4. \square

Proposición 1.3.38. *Un árbol² finito T colapsa a cualquiera de sus vértices.*

*Demuestra*ción. Sea T un árbol finito. Razonamos inductivamente en la cantidad de aristas de T ; siendo claro el caso en el cual esa cantidad es 1. Supongamos que T tiene k aristas. Por ser T un árbol, existe $v \in T$ un vértice que es extremos de una única arista σ de T . Sea w el vértice al cual queremos colapsar T . Si $w \neq v$, entonces v es cara libre de τ y $T \searrow T \setminus \{v, \tau\}$. Por hipótesis inductiva, $T \setminus \{v, \tau\} \searrow w$. Supongamos que $w = v$. Sea $v' \in T$ el otro extremo de τ . Por hipótesis inductiva $T \setminus \{w, \tau\} \searrow v'$. Mediante la misma sucesión de colapsos elementales, $T \searrow \tau$. Luego, $T \searrow \tau \searrow w$. \square

Proposición 1.3.39. *Todo complejo simplicial colapsable colapsa a cualquiera de sus vértices.*

*Demuestra*ción. Supongamos que $K \searrow v$. Por 1.4.14, reordenamos los colapsos en orden decreciente en dimensión. Entonces existe $T < K$ tal que $K \searrow T \searrow v$, con $\dim(T) = 1$ y $V_T = V_K$. Por 1.3.38, T colapsa a cualquiera de sus vértices; y por consiguiente, también lo hace K . \square

Proposición 1.3.40. *Sea aK el cono simplicial de un complejo simplicial K , con $a \notin K$. Entonces, K es colapsable si y sólo si $aK \searrow K$.*

*Demuestra*ción. $K \searrow K \setminus \{\sigma, \tau\}$ si y sólo si σ es cara libre de τ en K si y sólo si $a\sigma$ es cara libre de $a\tau$ en aK si y sólo si $aK \searrow K \setminus \{a\sigma, a\tau\} = a(K \setminus \{\sigma, \tau\}) \cup K$.

Repetiendo el razonamiento anterior,

$$K = K_0 \searrow K_1 \searrow \dots \searrow K_n = v \text{ si y sólo si } aK = aK_0 \searrow aK_1 \cup K \searrow \dots \searrow aK_n \cup K = av \cup K.$$

Pero v es cara libre de av en $av \cup K$. Luego, $av \cup K \searrow (av \cup K) \setminus \{a, av\} = K$. \square

²Un árbol es un complejo simplicial contráctil de dimensión 1.

Proposición 1.3.41. Si K y L son subcomplejos de un complejo simplicial, entonces $K \cup L \searrow K$ si y sólo si $L \searrow K \cap L$.

*Demuestra*ón. Procedemos por inducción en $\#(L \setminus K)$, siendo la equivalencia trivial si ese número es cero.

Supongamos que $\#(L \setminus K) > 0$.

$\Rightarrow)$ Si $K \cup L \searrow K$, entonces en particular

$$K \cup L \searrow (K \cup L) \setminus \{\sigma, \tau\} \searrow K,$$

con σ cara libre de τ en $K \cup L$.

Dado que $K < (K \cup L) \setminus \{\sigma, \tau\}$, resulta $\sigma, \tau \in L \setminus K$. Luego, σ es cara libre de τ en L y $L \searrow L_1 := L \setminus \{\sigma, \tau\}$.

Por otra parte, dado que $(K \cup L) \setminus \{\sigma, \tau\} = K \cup L_1 \searrow K$, por hipótesis inductiva se tiene que $L_1 \searrow K \cap L$.

En conclusión, $L \searrow L_1 \searrow K \cap L$.

$\Leftarrow)$ El razonamiento es análogo al de la implicación anterior. Lo incluimos por completitud.

Si $L \searrow K \cap L$, entonces en particular

$$L \searrow L \setminus \{\sigma, \tau\} \searrow K \cap L,$$

con σ cara libre de τ en L .

Dado que $K \cap L < L_1 := L \setminus \{\sigma, \tau\}$ y que $\sigma, \tau \in L$, resulta $\sigma, \tau \notin K$. Luego, $L \cup K \searrow (L \cup K) \setminus \{\sigma, \tau\} = (L \setminus \{\sigma, \tau\}) \cup K = L_1 \cup K$.

Por otra parte, dado que $L_1 \searrow L \cap K = L_1 \cap K$, por hipótesis inductiva se tiene que $K \cup L_1 \searrow K$.

En conclusión, $L \cup K \searrow L_1 \cup K \searrow K$. \square

Proposición 1.3.42. Sea v un vértice de un complejo simplicial K . Entonces, $\text{lk}(v, K)$ es colapsable si y sólo si $K \searrow K \setminus \{v\}$.

*Demuestra*ón. Por 1.3.40, $\text{lk}(v, K)$ es colapsable si y sólo si $\text{st}(v, K) = v \text{lk}(v) \searrow \text{lk}(v, K) = \text{st}(v, K) \cap (K \setminus v)$. Por 1.3.41, esto último ocurre si y sólo si $K \searrow K \setminus v$. \square

1.3.3 Tipo homotópico fuerte

En este apartado presentamos una noción más fuerte que la de tipo homotópico simple: la de tipo homotópico fuerte. Esta teoría fue introducida por J. A. Barmak y E. G. Minian en [8] (ver también [4], Cap. 5).

Esta noción adquirirá mayor sentido cuando estudiemos el tipo homotópico de espacios finitos y su conexión con los poliedros compactos.

Definición 1.3.43. Sea K un complejo simplicial, y sea $v \in K$ un vértice.

Se dice que hay un *colapso fuerte elemental* de K a $K \setminus v$ si $\text{lk}(v, K)$ es un cono simplicial $v'L$. En ese caso, se dice que v está *dominado* por v' .

Se nota $K \searrow^e K \setminus v$.

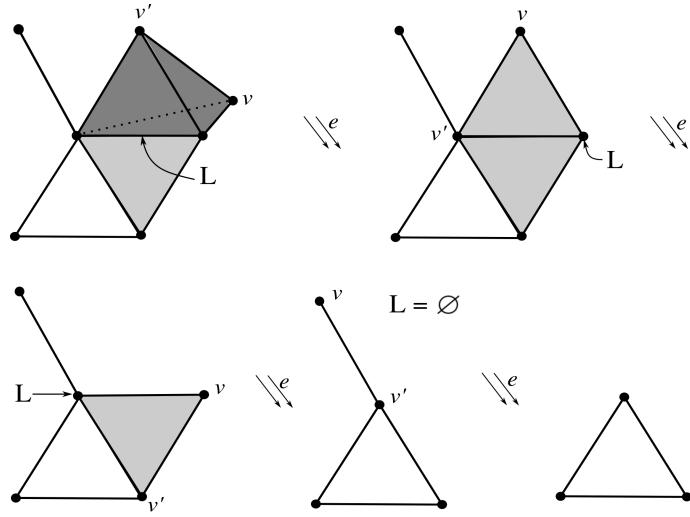


Figura 1.16: Sucesión de colapsos fuertes.

Proposición 1.3.44. Si $K \searrow^e K \setminus v$, entonces $K \searrow K \setminus v$.

*Demuestra*ón. Supongamos que $v \in K$ está dominado, es decir, $\text{lk}(v, K)$ es un cono. Entonces, por 1.3.36, resulta colapsable.

Aplicando 1.3.42, resulta $K \searrow K \setminus v$. \square

Definición 1.3.45. Sea K un complejo simplicial y $L \leq K$.

Se dice que hay un *colapso fuerte* de K a L si existe una sucesión finita de colapsos fuertes elementales que comienza en K y finaliza en L ; se nota $K \searrow L$.

La operación inversa se denomina *expansión fuerte*.

Definición 1.3.46. Sean K y L complejos simpliciales.

Se dice que K y L tienen el mismo *tipo homotópico fuerte* si existe una sucesión finita de colapsos fuertes y expansiones fuertes que comienza en K y finaliza en L . Se nota $K \sim_{\text{se}} L$.

1.4 CW complejos

Los CW-complejos fueron introducidos por J. H. C. Whitehead [30] y son una generalización de los complejos simpliciales; que les quita algo de rigidez, manteniendo la codificación combinatoria de propiedades topológicas.

1.4.1 Nocións básicas

Los CW-complejos se construyen con bloques llamados *celdas*.

Definición 1.4.1. Un espacio topológico recibe el nombre de *n-celda abierta*, o *celda abierta* de dimensión n , si es homeomorfo a D^n .

La operación básica que da lugar a la construcción de los CW-complejos es la de *adjuntar una celda*.

Definición 1.4.2. Sean X un espacio topológico y $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$ una función continua. $X \cup e := X \sqcup_f D^n$ es la unión disjunta de X y D^n cocientado por la relación $x \sim \varphi(x)$ para todo $x \in S^{n-1}$. Al referirnos a esta operación, diremos que $X \cup e$ se obtiene de *adjuntarle a X la n-celda e*.

Observar que la adjunción de una n -celda debe estar definida sobre todo S^{n-1} .

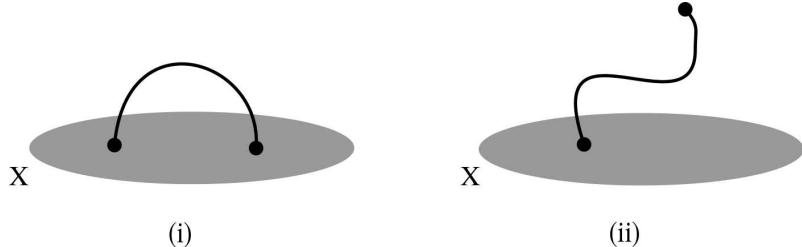


Figura 1.17: (i) corresponde a la adjunción de una 1-celda, pero (ii) no.

Definición 1.4.3. Un *CW-complejo* es un espacio topológico Hausdorff K , junto con una colección de celdas abiertas $\{e_\alpha\}$ (notamos $K^n = \cup \{e_\alpha : \dim(e_\alpha) \leq n\}$) tal que:

- $K = \cup_\alpha e_\alpha$, y $e_\alpha \cap e_\beta = \emptyset$ para todo $\alpha \neq \beta$;
- para cada n y para cada n -celda abierta e_α , existe una función $\varphi_\alpha : D^n \rightarrow X$, tal que:
 - $\varphi_\alpha|D^n$ es homeomorfo a e_α ,
 - $\varphi_\alpha(S^{n-1})$ está contenido en una unión finita de celdas abiertas de dimensión menor o igual que n ;
- un conjunto $F \subseteq X$ es cerrado en X si y sólo si $A \cap \bar{e}_\alpha$ es cerrado en \bar{e}_α para todo α .

K es un *CW-complejo finito* si la colección de celdas que tiene asociado es finita.

Equivalentemente, un *CW-complejo finito* K es un espacio topológico tal que existe una sucesión finita $\emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_m = K$ tal que para cada $0 \leq i \leq m$, X_i se obtiene de adjuntarle una celda a X_{i-1} , y las celdas se adjuntan en dimensión no decreciente.

Notar que el interior de un n -simplex es en particular una n -celda abierta, y que un complejo simplicial es un *CW-complejo* cuya descomposición en celdas es precisamente el conjunto de simplices.

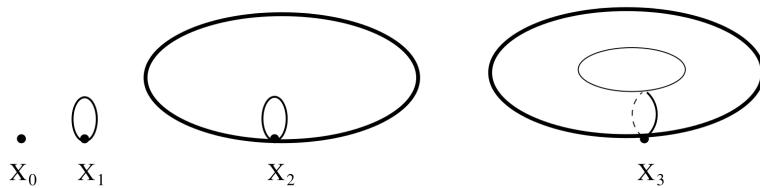


Figura 1.18: Descomposición en celdas de un 2-toro.

La función φ_α asociada a la celda e_α se denomina *función característica* de e_α ; y $\varphi_\alpha|S^{n-1}$ se denomina *función de adjunción*.

Definición 1.4.4. Un *subcomplejo* de un *CW-complejo* K es un subespacio L , junto con una subcolección $\{e_\beta\}$ de celdas de K tal que $L = \cup_\beta e_\beta$ y $\bar{e}_\beta \subset L$ para todo β .

Se deduce de la definición anterior que L es un subespacio cerrado de K y que L junto con la colección de celdas $\{e_\beta\}$ constituye un CW-complejo.

Si L es un subcomplejo de K , se nota $L < K$, y se dice que (K, L) es un CW-par.

Ejemplo 1.4.5. Si K es un CW-complejo, $K^n := \{e \in K : \dim(e) \leq n\} < K$ (con $n \in \mathbb{N}_0$) es el subcomplejo de K formado por las celdas de dimensión a lo sumo n ; se denomina n -esqueleto.

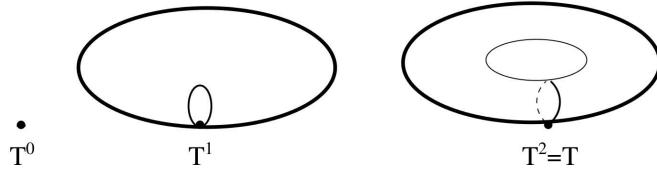


Figura 1.19: Esqueletos del 2-toro T .

Definición 1.4.6. Una función continua $f : K \rightarrow L$ entre CW-complejos se dice *celular* si $f(K^n) \subseteq L^n$ para todo n .

Finalmente, presentamos una clase particular de CW-complejos (que incluye a los complejos simpliciales), que admitirá el desarrollo de una fuerte conexión con la teoría de espacios finitos, como veremos en el siguiente capítulo.

Definición 1.4.7. Un CW-complejo K es *regular* si para cada celda (abierta), e^n , la función característica $D^n \rightarrow \bar{e}^n$ es un homeomorfismo, ó, equivalentemente, la función de adjunción $S^{n-1} \rightarrow K$ es un homeomorfismo con su imagen \bar{e}^n (el borde de e^n).

Una celda e de un CW-complejo regular K es una *cara* de una celda e' si $e \subseteq \bar{e}'$; se nota $e \leq e'$.

Definición 1.4.8. La *subdivisión baricéntrica* de K es el complejo simplicial K' cuyos vértices son las celdas de K y cuyos simplices son los conjuntos $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ de celdas tales que $e_i \leq e_{i+1}$ para todo $0 \leq i < k$.

1.4.2 Tipo homotópico y homotópico débil

Comenzamos el estudio del tipo homotópico de los CW-complejos haciendo notar que coincide con el tipo homotópico débil. En algún sentido, los grupos de homotopía son un conjunto de invariantes que describe de manera "casi completa" el tipo homotópico de estos espacios.

Teorema 1.4.9 (Whitehead). *Dos CW-complejos son débilmente equivalentes si y sólo si son homotópicamente equivalentes. En particular, los CW-complejos homotópicamente triviales son contráctiles.*

Demostración. Ver [17] Teorema 4.5. □

Otra propiedad muy importante que posee la clase de CW-complejos es la de *extensión de homotopía*.

Teorema 1.4.10 (Propiedad de extensión de homotopía). *Supongamos que $L < K$, con L, K CW-complejos. Dados X un espacio topológico y $f : K \rightarrow X$ una función continua y una homotopía $H : L \times I \rightarrow X$ tal que $H(L \times \{0\}) = f|_L$, existe una homotopía $\bar{H} : K \times I \rightarrow X$ tal que $\bar{H}(K \times \{0\}) = f|_K$ y $\bar{H}(x, t) = H(x, t)$ para todo $x \in L, t \in I$.*

Utilizando la ley exponencial, la propiedad anterior se puede expresar en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{H} & X^I \\
 i \downarrow & \nearrow \bar{H} & \downarrow p_0 \\
 K & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

donde $p_0(\xi) = \xi(0)$.

Demostración. Ver [17] Proposición 0.16. □

En otras palabras, la inclusión $i : L \hookrightarrow K$ es una *cofibración cerrada*.

1.4.3 Tipo homotópico simple de CW-complejos

La teoría de homotopía simple para complejos simpliciales fue extendida por J. H. C. Whitehead a la clase de los CW-complejos [31] (ver también el libro de Cohen [14]).

Por simplicidad, en esta sección consideraremos el homeomorfismo $(D^n, D^{n-1}) \cong (I^n, I^{n-1})$ a la hora de trabajar con las celdas de un CW-complejo.

Definición 1.4.11. Sean K un CW-complejo finito y L un subcomplejo de K . Se dice que hay un *colapso elemental de K a L* , y se nota $K \searrow^e L$, si

- $K = L \cup e^{n-1} \cup e^n$,
- existe una función $\varphi : I^n \longrightarrow K$ tal que:
 - φ es la función característica de e^n ,
 - $\varphi|_{I^{n-1}}$ es la función característica de e^{n-1} ,
 - $\varphi(J^{n-1}) \subset L^{n-1}$, donde $J^{n-1} := \overline{\partial I^n - I^{n-1}}$.

También se dice que hay una *expansión elemental de L a K* , y se nota $L \nearrow^e K$.

Geométricamente, una expansión elemental de L se corresponde con la adjunción de un n -cubo (o n -celda) a lo largo de una de sus caras, mediante una función casi sin restricciones.

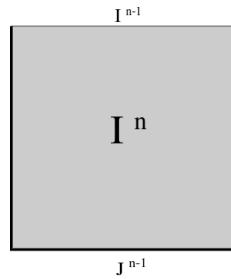


Figura 1.20: I^n .

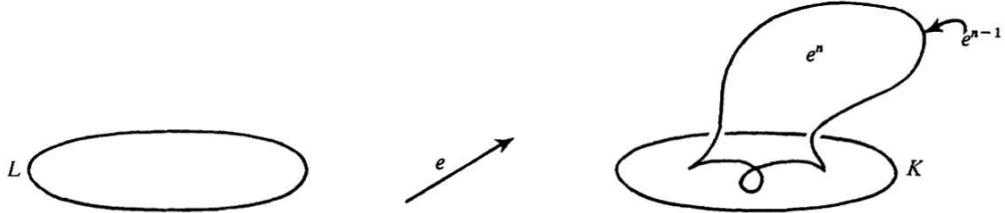


Figura 1.21: Expansión elemental.

Si $\varphi_0 := \varphi|_{J^{n-1}}$, entonces $\varphi_0 : (J^{n-1}, \partial J^{n-1}) \rightarrow (L^{n-1}, L^{n-2})$ y el CW-par (K, L) es isomorfo a $(L \cup_{\varphi_0} I^n, L)$.

Recíprocamente, dado L , cualquier función $\varphi_0 : (J^{n-1}, \partial J^{n-1}) \rightarrow (L^{n-1}, L^{n-2})$ determina una expansión elemental. En efecto, si $K := L \cup_{\varphi_0} I^n$, $\varphi : L \sqcup I^n \rightarrow K$ es la función cociente, $e^{n-1} := \varphi(I^{n-1})$ y $e^n := \varphi(I^n)$, resulta que $K = L \cup e^{n-1} \cup e^n$ y $L \not\supseteq K$.

Proposición 1.4.12. Si $K \not\supseteq L$, entonces $L \subset K$ es retracto por deformación fuerte.

Además, cualquier par de retracciones por deformación fuerte de K a L son homotópicas relativo a L .

Tenemos que $K = L \cup e^{n-1} \cup e^n$ y existe una función continua $\varphi_0 : I^{n-1} \rightarrow L^{n-1}$ tal que $(K, L) \cong (L \cup_{\varphi_0} I^n, L)$.

Para demostrar que $L \subset K$ es retracto por deformación fuerte, la idea es análoga al caso simplicial, si ahora pensamos a e^{n-1} como una celda "libre" de e^n y "empujamos" I^{n-1} hacia J^{n-1} .

La demostración completa de este hecho puede hallarse en [14], (4.1).

Por otra parte, supongamos que r_1 y $r_2 : K \rightarrow L$ son dos retracciones por deformación fuerte. Entonces $i \circ r_1 \simeq 1_K \simeq i \circ r_2$ rel L , donde $i : L \hookrightarrow K$ es la inclusión. Luego, $r_1 = r_1 \circ i \circ r_1 \simeq r_1 \circ i \circ r_2 = r_2$.

Definición 1.4.13. Sean K y L un CW-complejos finitos.

Se dice que K colapsa a L (o que L se expande a K) si existe una sucesión finita $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$ de CW-complejos finitos tales que $K_i \not\supseteq K_{i+1}$ para todo $0 \leq i < n$. Se nota $K \searrow L$ (resp. $L \nearrow K$).

Se dice que K y L tienen el mismo *tipo homotópico simple* (o son *simplemente equivalentes*) si existe una sucesión finita $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$ de CW-complejos finitos tales que para cada $0 \leq i < n$, $K_i \not\supseteq K_{i+1}$ o $K_i \not\supseteq K_{i+1}$. Se nota $K \nearrow L$.

Si durante la sucesión de colapsos y expansiones no se remueve ninguna celda de un subcomplejo K_0 común a K y L , se nota $K \nearrow L$ rel K_0 .

Una sucesión finita de expansiones o colapsos elementales se llama *deformación formal*.

Sea $K = K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow \dots \rightarrow K_n = L$ una deformación formal. Definimos $f_i : K_i \rightarrow K_{i+1}$ como: la inclusión, si $K_i \not\supseteq K_{i+1}$, y como alguna retracción por deformación fuerte de K_i en K_{i+1} si $K_i \not\supseteq K_{i+1}$.

$f := f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0$ se denomina *deformación*. Notar que f es una equivalencia homotópica celular únicamente determinada (salvo homotopía, ver 1.4.12), por la deformación formal dada.

Una *equivalencia homotópica simple* $f : K \rightarrow L$ es una función (no necesariamente celular) que es homotópica a una deformación.

Los colapsos y expansiones elementales en una deformación formal pueden ordenarse de manera particular.

Proposición 1.4.14. *Si $K \searrow L$, entonces toda sucesión de colapsos elementales de K a L puede reordenarse de la forma $K = K_0 \searrow K_1 \searrow \dots \searrow K_q = L$, donde $K_i = K_{i+1} \cup e^{n_i} \cup e^{n_i-1}$ donde $n_0 \geq n_1 \geq \dots \geq n_{q-1}$. Es decir, los colapsos elementales pueden ordenarse de manera decreciente en dimensión.*

Proposición 1.4.15. *Si $K \nearrow L$, entonces existen CW-complejos \tilde{L} y Z tales que $K \nearrow Z \searrow \tilde{L} \cong L$. Es decir, todas las expansiones pueden realizarse primero.*

Para finalizar este capítulo, simplemente observamos sin profundizar algunos hechos importantes relacionados al grupo de Whitehead. Para una exposición completa de esta teoría, remitimos al lector al libro de Cohen [14].

Observación 1.4.16. Hemos mencionado que el grupo de Whitehead mide la obstrucción para que el tipo homotópico de un espacio coincida con su tipo homotópico simple. Precisamos a continuación este hecho. Sea K un CW-complejo finito. Entonces para cualquier CW-complejo L tal que $K \subset L$ es un retracto por deformación fuerte, resulta $L \nearrow K$ rel K si y sólo si el grupo de Whitehead de K , denotado por $Wh(K)$, es nulo.

El grupo de Whitehead $Wh(K)$ de un CW-complejo conexo K es el grupo de Whitehead de su grupo fundamental $Wh(\pi_1(K))$; donde el grupo de Whitehead $Wh(G)$ de un grupo G es un cociente del primer grupo de K-teoría $K_1(\mathbb{Z}(G))$.

Por ejemplo, si G es un grupo libre, entonces $Wh(G) = 0$. En particular, los CW-complejos contráctiles son simplemente equivalentes a un punto.

Capítulo 2

Espacios finitos

2.1 Introducción

Los espacios topológicos finitos pueden ser utilizados para investigar problemas muy profundos de la Topología algebraica. Su gran utilidad se debe a que pueden conjugarse su estructura topológica y su estructura combinatoria. En este sentido, en 1937, P. S. Alexandroff muestra que los espacios finitos T_0 y los conjuntos finitos parcialmente ordenados (posets) son esencialmente los mismos objetos [1].

En 1966, M. C. McCord [23] describe una maravillosa relación entre espacios finitos y poliedros compactos, que constituye el puente fundamental entre topología y combinatoria sobre el que se basa la teoría. A cada X espacio finito T_0 le asigna un complejo simplicial, denotado por $\mathcal{K}(X)$, que verifica que $|\mathcal{K}(X)| \xrightarrow{\text{we}} X$. Recíprocamente, a cada complejo simplicial finito K le asigna un espacio finito T_0 , denotado por $\mathcal{X}(K)$, débilmente equivalente a $|K|$. La correspondencia no es biyectiva, pero alcanza para notar que los tipos homotópicos débiles de los espacios finitos se corresponden con los tipos homotópicos de los poliedros compactos.

$$\{\text{Complejos simpliciales finitos}\} \xleftrightarrow[\mathcal{X}]{\mathcal{K}} \{\text{Espacios topológicos finitos } T_0\}$$

Por su parte, en el mismo año, R. E. Stong [27] utiliza la estructura de poset asociada los espacios finitos T_0 para estudiar sus tipos homotópicos. Más tarde, en 2009, J. A. Barmak y E. G. Minian [8] prueban que éstos se corresponden con los tipos homotópicos fuertes de los complejos simpliciales finitos.

La perspectiva combinatoria de Stong fue el punto de partida de un nuevo modo de estudiar los tipos homotópicos de los espacios finitos. Valiéndose de la caracterización de Alexandroff, utiliza como herramienta para tal estudio el proceso de remover cierto tipo de puntos (que denominó *linear* y *colinear points*, luego llamados *up* y *down beat points*) del espacio finito, sin alterar su tipo homotópico.

En esa dirección, en 2008 Barmak y Minian [6] generalizan la definición de beat point, presentando a los weak points, que constituyen un elemento muy útil en el estudio del tipo homotópico simple de poliedros. En [6], se define el tipo homotópico simple de espacios finitos, que se corresponde con el tipo homotópico simple de complejos; siendo el puente para esta correspondencia las funciones de McCord.

El siguiente esquema muestra las relaciones existentes entre espacios finitos T_0 y complejos simpliciales.

$$\begin{array}{ccccc}
X \xrightarrow[\text{he}]{\simeq} Y & \xrightarrow{\quad} & X \nearrow \searrow Y & \xrightarrow{\quad} & X \xrightarrow[\text{he}]{\approx} Y \\
\uparrow \Downarrow & & \uparrow \Downarrow & & \uparrow \Downarrow \\
\mathcal{K}(X) \xrightarrow[\text{se}]{\simeq} \mathcal{K}(Y) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}(X) \nearrow \searrow \mathcal{K}(Y) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}(X) \xrightarrow[\text{he}]{\simeq} \mathcal{K}(Y) \\
\\
\mathcal{X}(K) \xrightarrow[\text{he}]{\simeq} \mathcal{X}(L) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X}(K) \nearrow \searrow \mathcal{X}(L) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X}(K) \xrightarrow[\text{we}]{\approx} \mathcal{X}(L) \\
\uparrow \Downarrow & & \uparrow \Downarrow & & \uparrow \Downarrow \\
K \xrightarrow[\text{se}]{\simeq} L & \xrightarrow{\quad} & K \nearrow \searrow L & \xrightarrow{\quad} & K \xrightarrow[\text{he}]{\simeq} L
\end{array}$$

En este capítulo expondremos los resultados más importantes sobre la teoría de espacios finitos. Las referencias de este capítulo serán los artículos [1],[23],[27],[5],[6],[7],[8] y la tesis doctoral de Barmak [4].

2.2 Espacios finitos y posets

Un conjunto finito *preordenado* es un conjunto finito dotado de una relación reflexiva y transitiva.

Veamos que los espacios finitos y los conjuntos finitos preordenados son el mismo objeto mirado desde distintas perspectivas.

Sea X un espacio finito. Definimos, para cada $x \in X$, el abierto minimal U_x como la intersección (finita) de todos los abiertos que contienen a x . Es fácil ver que $\{U_x : x \in X\}$ es una base para la topología de X . Asociamos un preorden a X definido por $y \leq x$ si y sólo si $y \in U_x$.

Recíprocamente, sea X un conjunto preordenado. Definimos una topología en X dada por la base $\{\{y \in X : y \leq x\} : x \in X\}$.

Las dos aplicaciones anteriores son mutuamente inversas, y permiten combinar en el mismo objeto dos ángulos distintos de estudio: el topológico y el combinatorio.

Notar que los conjuntos abiertos de X se corresponden con los down-sets¹ (conjuntos "cerrados por tomar menor").

Recordar que un espacio topológico X es T_0 si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe un abierto $U \subset X$ tal que o bien $x \in U$ e $y \notin U$, o bien $x \notin U$ e $y \in U$. La antisimetría de un preorden finito se corresponde exactamente (mediante esta aplicación) con el axioma de separación T_0 . Luego, los espacios finitos T_0 están en correspondencia con los posets finitos.

Ejemplo 2.2.1.

- (i) El espacio finito $X = \{x, y\}$ cuyos abiertos son $\{\emptyset, \{x, y\}\}$ se corresponde con el preorden cuyas relaciones de orden son: $x \leq x$, $y \leq y$, $x \leq y$ e $y \leq x$.
- (ii) El espacio finito $T_0 Y = \{a, b, c\}$ cuyos abiertos son $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ se corresponde con el poset cuyas relaciones de orden son: $a \leq a$, $b \leq b$, $c \leq c$, $b \leq a$ y $c \leq a$.

Notar que, mediante la correspondencia anterior, $U_x = \{y \in X : y \leq x\}$. Se denota por F_x al conjunto $\{y \in X : y \geq x\}$, que coincide con la clausura de $\{x\}$ en X . Además, $\hat{U}_x := \{y \in X : y < x\} = U_x \setminus \{x\}$ y $\hat{F}_x := \{y \in X : y > x\} = F_x \setminus \{x\}$. Si x pertenece a varios espacios finitos, colocaremos un supraíndice denotando el espacio donde estamos considerando los conjuntos anteriores; es decir, escribiremos U_x^X , F_x^X , \hat{U}_x^X , \hat{F}_x^X , etc.

¹Dado X un conjunto preordenado, $U \subseteq X$ es un down set si para todo $x \in U$, si $y \leq x$, entonces $y \in U$.

Definición 2.2.2. Sean x, y elementos de un poset finito X .

Se dice que x e y son *comparables* si y sólo si $x \leq y$ o $y \leq x$.

Se dice que y *cubre* a x si $x < y$ y no existe $z \in X$ tal que $x < y < z$. Se nota $x \prec y$.

Se nota por C_x al subespacio de X de elementos comparables con x , es decir, $C_x = U_x \cup F_x$; y por \hat{C}_x a $C_x \setminus \{x\}$.

Definición 2.2.3. Sea X un poset finito. El *diagrama de Hasse* de X es el digrafo² $\mathcal{H}(X)$ cuyos vértices son los puntos de X y cuyas aristas son los pares ordenados (x, y) , con $x \prec y$.

En la representación gráfica de un diagrama de Hasse, en lugar de dibujar una flecha desde x hacia y , ubicamos a x debajo de y .

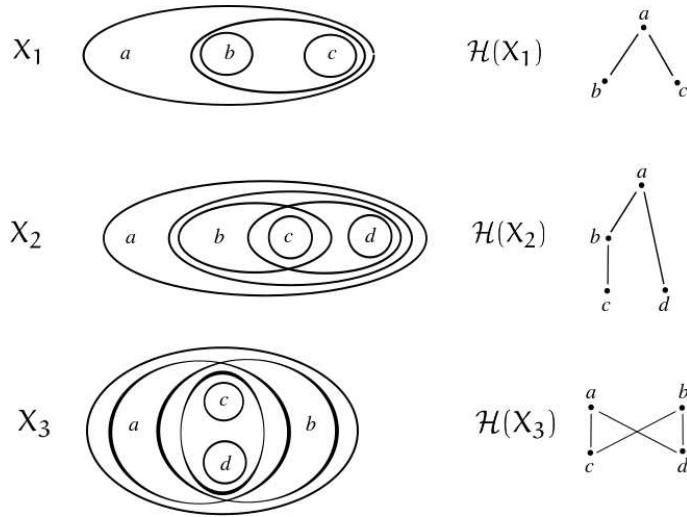


Figura 2.1: Diagramas de Hasse de espacios finitos.

Definición 2.2.4. Sea X un poset finito.

La *longitud* de una cadena $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ de X es n .

La *altura* de X , denotada por $h(X)$, es el máximo de las longitudes de las cadenas en X .

Definición 2.2.5. Un poset finito X se dice *homogéneo de dimensión n* si toda cadena maximal en X tiene longitud n .

Definición 2.2.6. Un poset finito X se dice *graduado* si U_x es homogéneo para todo $x \in X$.

En ese caso, el *grado* de x , denotado por $\deg(x)$, es la dimensión de U_x .

Dado $0 \leq p \leq h(X) - 1$, el *piso* $[p, p + 1]$ de X es el subposet de X de altura 1 determinado por los puntos de X de grado p y $p + 1$.

Por ejemplo, en la figura 2.1, los posets asociados a X_1 y X_3 son graduados, aunque el asociado a X_2 no lo es.

Definición 2.2.7. Dado X un poset finito, se define el poset *opuesto* o *dual* X^{op} como aquel que tiene el orden opuesto al de X ; es decir, $x \leq y$ en X^{op} si y sólo si $y \leq x$ en X .

De aquí en adelante trabajaremos con espacios finitos T_0 , y sus posets asociados.

A continuación exponemos dos resultados que muestran cómo traducir ciertas propiedades de espacios finitos y funciones entre ellos en términos de los preórdenes que éstos tienen asociados.

²Para un desarrollo sobre conceptos básicos de teoría de grafos, ver el capítulo 7, sección 7.2.

Proposición 2.2.8. Una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios finitos es continua si y sólo si preserva el orden.

*Demuestra*ción. \Rightarrow) Sean $x \leq x'$ puntos de X . Dado que f es continua, $f^{-1}(U_{f(x')})$ es abierto. Luego, como $x' \in f^{-1}(U_{f(x')})$ y $U_{x'}$ es el abierto minimal que contiene a x' , resulta $U_{x'} \subseteq f^{-1}(U_{f(x')})$. En conclusión, tenemos que $x \in U_{x'} \subseteq f^{-1}(U_{f(x')})$. En particular, $f(x) \leq f(x')$.

\Leftarrow) Basta ver que $f^{-1}(U_y)$ es abierto (es decir, down-set) para todo $y \in Y$.

Sea $y \in Y$, y sea $x \in f^{-1}(U_y)$. Vale que para todo $x' \leq x$ se tiene que $x' \in f^{-1}(U_y)$. En efecto, dado que f preserva orden, si $x' \leq x$, entonces $f(x) \leq f(x') \leq y$. \square

Proposición 2.2.9. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos funciones entre espacios finitos. Son equivalentes:

- (a) $f \simeq g$;
- (b) existe una sucesión finita f_0, f_1, \dots, f_n tal que $f = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots \leq f_n = g$ (donde $f_i \leq f_j$ si y sólo si $f_i(x) \leq f_j(x)$ para todo $x \in X$);
- (c) existe una sucesión finita $f = f_0, f_1, \dots, f_n = g$ tal que $\forall 0 \leq i < n, \exists x_i \in X$ que cumple:
 - f_i y f_{i+1} coinciden en $X \setminus \{x_i\}$,
 - $f_i(x_i) \prec f_{i+1}(x_i)$ o $f_{i+1}(x_i) \prec f_i(x_i)$.

Más aún, si $A \subset X$, $f \simeq g$ rel A si y sólo si ocurre (b) o (c), donde las funciones involucradas son tales que $f_i|_A = g|_A$.

*Demuestra*ción. Ver [4], Corolario 1.2.6 y Lema 2.1.1. \square

Corolario 2.2.10. Todo espacio finito con máximo o mínimo es contrátil.

*Demuestra*ción. Si c es máximo, entonces $1_X \leq \text{cte}_c$. Por la proposición anterior $1_X \simeq \text{cte}_c$. Si X tiene mínimo, el razonamiento es análogo. \square

Proposición 2.2.11. Sea X un espacio finito. La siguientes propiedades son equivalentes:

- (i) X es un espacio topológico conexo.
- (ii) X es un espacio topológico arcoconexo.
- (iii) X es conexo por orden; es decir, para todo par de puntos $x, y \in X$, existe una sucesión finita $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ de puntos de X tal que los puntos consecutivos son comparables.

*Demuestra*ción. Ver [4], Proposición 1.2.4. \square

Si X es T_0 , entonces que X sea conexo también equivale a que el diagrama de Hasse de X sea un grafo conexo.

2.3 Operaciones entre espacios finitos

Definición 2.3.1. Sean X e Y espacios finitos T_0 .

El join $X \oplus Y$ entre X e Y es el poset cuyo conjunto subyacente es $X \sqcup Y$ y cuyo orden es: entre elementos de X o de Y , el orden original; y se toma $x \leq y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Si $Y = *$, $X \oplus Y$ se denomina el *cono no Hausdorff* de Y , y se nota $C(X)$.

Si Y es el espacio discreto de dos puntos, $X \oplus Y$ se denomina la *suspensión no Hausdorff* de X , y se nota $S(X)$.

El diagrama de Hasse de $X \oplus Y$ se obtiene colocando el diagrama de Hasse de Y "arriba" del de X , y agregando una arista entre x e y para cada x maximal de X e y minimal de Y .

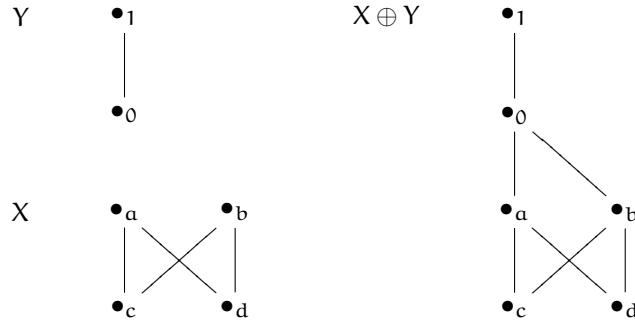


Figura 2.2: Join.

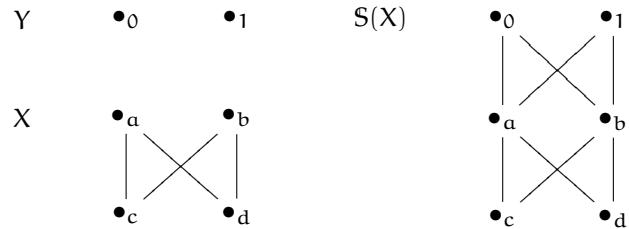


Figura 2.3: Suspensión no Hausdorff.

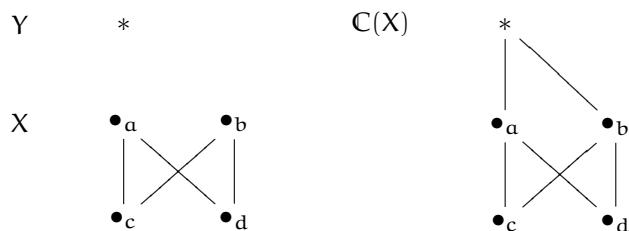


Figura 2.4: Cono no Hausdorff.

Observación 2.3.2. Si X e Y son espacios finitos T_0 , la topología producto en $X \times Y$ coincide con el poset producto. Concretamente, $X \times Y$ es el poset con elementos $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$, y cuyo orden está dado por $(x, y) \leq (x', y')$ si y sólo si $x \leq x'$ e $y \leq y'$ para todo $x, x' \in X, y, y' \in Y$.

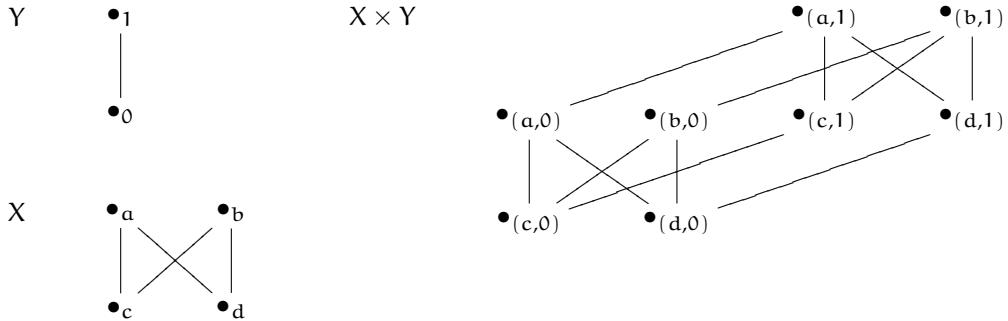


Figura 2.5: Producto.

La construcción del diagrama de Hasse de $X \times Y$ a partir de $\mathcal{H}(X)$ y $\mathcal{H}(Y)$ no es tan simple como en el caso anterior. Notar que $\mathcal{H}(X \times Y)$ no verifica que hay una arista de (x, y) a (x', y') si y sólo si hay una arista de x a x' en $\mathcal{H}(X)$ y una de y a y' en $\mathcal{H}(Y)$. Tampoco vale que hay una arista de (x, y) a (x', y') si y sólo si hay una arista de x a x' en $\mathcal{H}(X)$ o una de y a y' en $\mathcal{H}(Y)$. Para construir $\mathcal{H}(X \times Y)$ hay que considerar $\mathcal{H}(X \times \{y\})$ para cada $y \in Y$, y luego agregar una arista de (x, y) a (x, y') por cada arista de y a y' en $\mathcal{H}(Y)$.

Si X es un espacio finito T_0 y $A \subseteq X$ un subespacio, el espacio cociente X/A no necesariamente es T_0 .

Por ejemplo, sea X es el espacio finito T_0 cuyo poset asociado es $0 < 1 < 2$. Si $A = \{0, 2\}$, entonces X/A (con la topología cociente) es el espacio indiscreto de dos elementos $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ (notar que $\{\bar{0}\}$ y $\{\bar{1}\}$ no son abiertos en X/A pues $\{0, 2\}$ y $\{1\}$ resp. no lo son en X).

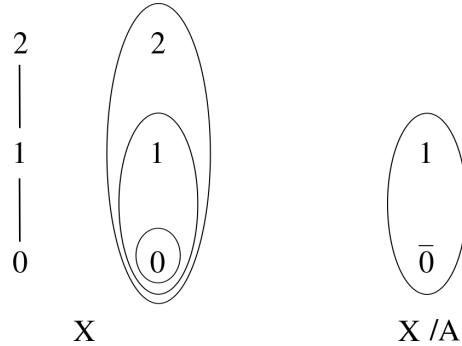


Figura 2.6: Cociente de espacios finitos T_0 no necesariamente es T_0 .

Barmak y Minian obtuvieron condiciones necesarias y suficientes para que X/A sea T_0 ([4], 2.7.8.):

Proposición 2.3.3. X/A no es T_0 si y sólo si existen $a < x < b$, con $a, b \in A$ y $x \in X \setminus A$.

Un caso particular de cociente de espacios finitos es la unión en un punto o wedge.

Definición 2.3.4. Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios puntuados.

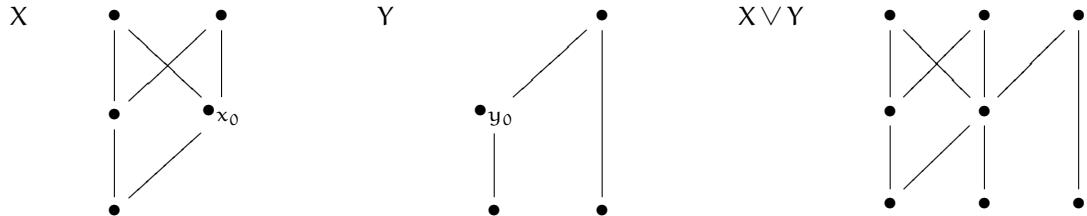
El wedge entre X e Y es el espacio finito T_0 definido por $X \vee Y = (X \sqcup Y) / \{x_0, y_0\}$.

Notaremos por \bar{x}_0 a la clase de x_0 .

Claramente $X \vee Y$ cumple las condiciones necesarias de 2.3.3 para ser T_0 .

El diagrama de Hasse de $X \vee Y$ es la unión de los diagramas de Hasse de X e Y , identificando x_0 con y_0 .

Ejemplo 2.3.5.



2.4 Espacios finitos y tipo homotópico de poliedros

En 1966, M. C. McCord [23] prueba que existe una correspondencia biunívoca entre la clase de los tipos homotópicos de los poliedros compactos y la de los tipos homotópicos débiles de los espacios finitos T_0 , mediante las aplicaciones \mathcal{K} y \mathcal{X} (ver 2.4.1, 2.4.8).

Definición 2.4.1. Sea X un espacio finito T_0 . El *complejo simplicial* $\mathcal{K}(X)$ asociado a X (también denominado *order complex*) es el complejo simplicial cuyos vértices son los puntos de X y cuyos simplices son las cadenas no vacías de X .

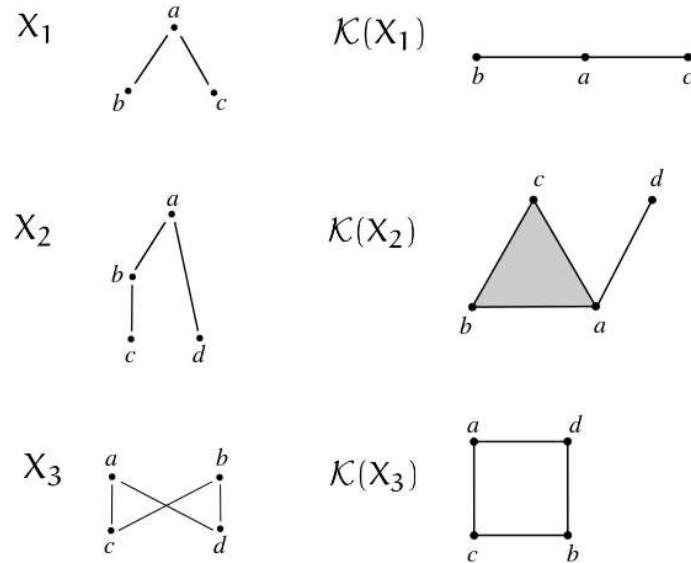


Figura 2.7: Complejos simpliciales asociados a los espacios finitos de la Figura 2.1.

Definición 2.4.2. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entre espacios finitos T_0 , la *función simplicial* asociada $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ se define por $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$.³

³Si $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es un n -simplex de $\mathcal{K}(X)$, entonces $\mathcal{K}(f)(\{x_0, x_1, \dots, x_n\}) = \{\mathcal{K}(f)(x_0), \mathcal{K}(f)(x_1), \dots, \mathcal{K}(f)(x_n)\} = \{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\}$.

Notar que si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entre espacios finitos T_0 , entonces preserva orden. Luego, manda cadenas en cadenas y $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ resulta simplicial.

Observación 2.4.3. Si X es un espacio finito T_0 , $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X^{\text{op}})$.

Sea X un espacio finito T_0 . Un punto α de la realización geométrica $|\mathcal{K}(X)|$ de $\mathcal{K}(X)$ es una combinación convexa

$$\alpha = \sum_{i=0}^r t_i x_i,$$

con $\sum_{i=0}^r t_i = 1$, $t_i > 0$ para todo $0 \leq i \leq r$ y $x_0 < x_1 < \dots < x_r$ una cadena en X .

Llamaremos *soporte* de α al subconjunto $\text{sop}(\alpha) = \{x_0, x_1, \dots, x_r\} \subseteq X$.

Definición 2.4.4. Sea X un espacio finito T_0 . Se define la función de McCord $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$ por $\mu_X(\alpha) = \min(\text{sop}(\alpha))$ para todo $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|$.

Teorema 2.4.5. Para todo X espacio finito T_0 , la función de McCord μ_X es una equivalencia homotópica débil.

La idea de la demostración es probar que para todo $x \in X$, $\mu_X^{-1}(U_x)$ es abierto y contráctil.

Que $\mu_X^{-1}(U_x)$ sea abierto implica que μ_X es continua.

Por otra parte, hay que notar que U_x es contráctil pues tiene máximo. Luego, que $\mu_X^{-1}(U_x)$ sea contráctil implica que $\mu_X|_{\mu_X^{-1}(U_x)} : \mu_X^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$ es una equivalencia homotópica débil para todo $x \in X$.

Por el Teorema de McCord 1.2.6, sigue el resultado.

La demostración completa puede hallarse en [4] Teorema 1.4.6.

Observación 2.4.6. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entre espacios finitos T_0 (es decir, que preserva orden), entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{|\mathcal{K}(f)|} & |\mathcal{K}(Y)| \\ \mu_X \downarrow & & \downarrow \mu_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

En efecto, para cada $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|$ se tiene

$$f \circ \mu_X(\alpha) = f(\min(\text{sop}(\alpha))) = \min(f(\text{sop}(\alpha))) = \min(\text{sop}(|\mathcal{K}(Y)|(\alpha))) = \mu_Y \circ |\mathcal{K}(f)|(\alpha).$$

Corolario 2.4.7. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios finitos T_0 . Entonces f es una equivalencia homotópica débil si y sólo si $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ es una equivalencia homotópica.

Demostración. Dado que μ_X es una equivalencia homotópica débil, por la propiedad 2 de 3, f es una equivalencia homotópica débil si y sólo si $f \circ \mu_X$ lo es.

Como el diagrama de la Observación 2.4.6 conmuta, $f \circ \mu_X = \mu_Y \circ |\mathcal{K}(f)|$.

Por último, dado que μ_Y es una equivalencia homotópica débil, nuevamente por la propiedad 2 de 3, $\mu_Y \circ |\mathcal{K}(f)|$ es una equivalencia homotópica débil si y sólo si lo es $|\mathcal{K}(f)|$.

Y como $|\mathcal{K}(f)|$ es una función entre CW-complejos, $|\mathcal{K}(f)|$ es equivalencia homotópica débil si y sólo si es equivalencia homotópica. \square

Definición 2.4.8. Sea K un complejo simplicial finito. El *espacio finito* T_0 asociado a K (denominado *face poset*) es el poset $\mathcal{X}(K)$ de simplices de K ordenados por la inclusión.

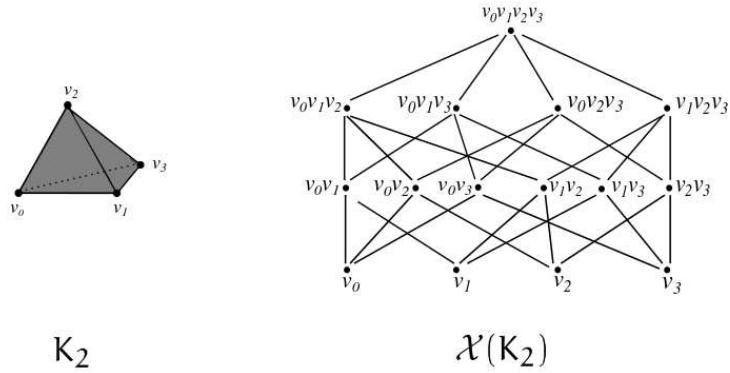
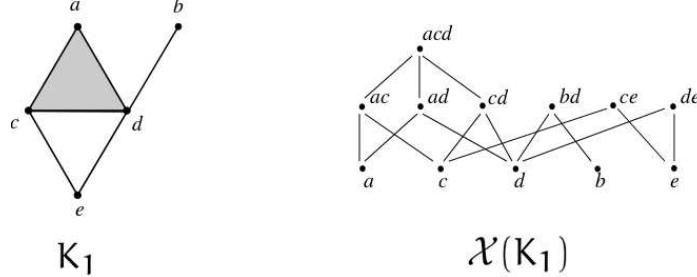


Figura 2.8: Espacios finitos asociados a los complejos simpliciales de la Figura 1.5.

Definición 2.4.9. Si $\varphi : K \rightarrow L$ es una función simplicial entre complejos simpliciales finitos, existe una función continua $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$ definida por $\mathcal{X}(\varphi)(\sigma) = \varphi(\sigma)$ para todo simplex $\sigma \in K$.

Observación 2.4.10. Si K es un complejo simplicial finito, entonces $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$, la subdivisión baricéntrica de K .

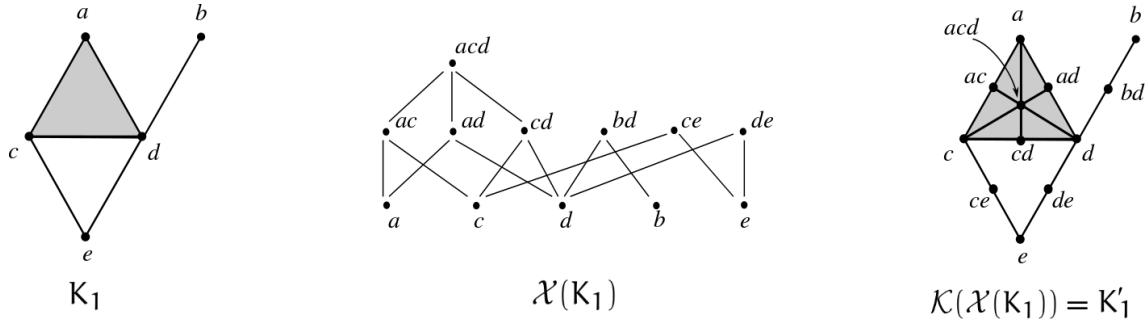


Figura 2.9: $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$.

Definición 2.4.11. Sea K un complejo simplicial finito. Sea $s_K : |K'| \rightarrow |K|$ el homeomorfismo lineal definido por $s_K(\sigma) = b(\sigma)$ para cada simplex $\sigma \in K$.

Se define la función μ_K de McCord por $\mu_K := \mu_{\mathcal{X}(K)} \circ s_K^{-1} : |K| \rightarrow \mathcal{X}(K)$.

Teorema 2.4.12. Para todo K complejo simplicial finito, la función de McCord μ_K es una equivalencia homotópica débil.

*Demuestra*cción. Sigue de notar que μ_K es, en particular, una composición de equivalencias homotópicas débiles. \square

Definición 2.4.13. Sean X un espacio finito e Y un espacio topológico. Se dice que X es un *modelo finito* de Y si $X \xrightarrow{\text{we}} Y$.

Para todo poliedro Y , si K es una triangulación de Y , entonces $\mathcal{X}(K)$ es un modelo finito de Y .

Un problema de difícil resolución es el de hallar modelos finitos de cardinal mínimo, llamados *modelos finitos minimales*. Por ejemplo, el singleton es el único modelo finito minimal de cualquier espacio homotópicamente trivial. En [5] pueden hallarse los modelos finitos minimales de las esferas.

Observación 2.4.14. De modo análogo al caso de los complejos simpliciales finitos, se puede realizar la construcción del face poset en la clase de los CW-complejos regulares.

Se define el *face poset* $\mathcal{X}(K)$ de un CW-complejo regular K como el poset de las celdas ordenadas por \leq (ver 1.4.7).

Vale que $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$ (ver definición 1.4.8) y que $\mathcal{X}(K) \xrightarrow{\text{we}} K$.

Proposición 2.4.15. Si $\varphi : K \rightarrow L$ una función simplicial entre complejos simpliciales finitos, entonces el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía.

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{|\varphi|} & |L| \\ \mu_K \downarrow & & \downarrow \mu_L \\ \mathcal{X}(K) & \xrightarrow{\mathcal{X}(\varphi)} & \mathcal{X}(L) \end{array}$$

*Demuestra*cción. Ver [4], Proposición 1.4.13. \square

Corolario 2.4.16. Sea $\varphi : K \rightarrow L$ una función simplicial entre complejos simpliciales finitos. Entonces $|\varphi|$ es una equivalencia homotópica si y sólo si $\mathcal{X}(\varphi)$ es una equivalencia homotópica débil.

De 2.4.7 y 2.4.16 se deducen las siguientes equivalencias.

Teorema 2.4.17.

(a) Sean X e Y espacios finitos T_0 . Entonces $X \xrightarrow{\text{we}} Y$ si y sólo si $|\mathcal{K}(X)| \xrightarrow{\text{he}} |\mathcal{K}(Y)|$.

(b) Sean K y L complejos simpliciales finitos. Entonces $|K| \xrightarrow{\text{he}} |L|$ si y sólo si $\mathcal{X}(K) \xrightarrow{\text{we}} \mathcal{X}(L)$.

Se tiene entonces la siguiente correspondencia:

$$\{ \text{Poliedros compactos} \} \underset{\text{he}}{\sim} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{K}} \\ \xrightarrow{\mathcal{X}} \end{array} \{ \text{Espaces topológicos finitos } T_0 \} \underset{\text{we}}{\sim}$$

Definición 2.4.18. Dado X un espacio finito T_0 se define la *subdivisión baricéntrica* de X como $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$; es decir, como el poset de las cadenas no vacías en X ordenadas por la inclusión.

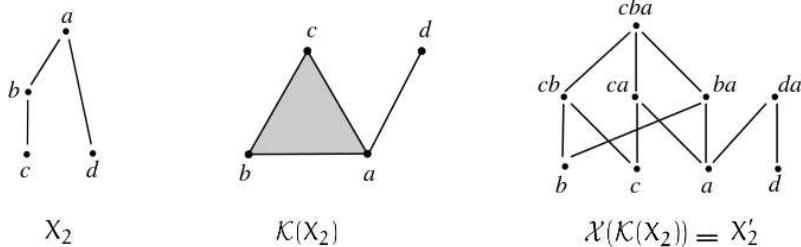


Figura 2.10: $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$.

Observación 2.4.19. Hemos visto que para cualquier complejo simplicial finito K vale que $K \bigwedge K'$.

Si X es un espacio finito, podemos afirmar que $X \approx_{\text{we}} X'$, pues la función $\mu_{\mathcal{K}(X)} \circ \mu_X : X \rightarrow X'$ es una equivalencia homotópica débil.

En la sección 2.6 expondremos la noción de homotopía simple para espacios finitos T_0 , y veremos que $X \bigwedge X'$ (ver 2.6.10).

Definición 2.4.20. Sean X un espacio finito T_0 y x un punto de X .

Se define el *link* de x en X como $\text{lk}(x, X) = \hat{C}_x$, y el *star* de x en X como $\text{st}(x, X) = C_x$.

Notar que $\hat{C}_X = U_x \oplus F_x$.

Observación 2.4.21. Sea X un espacio finito T_0 y sea x un punto de X . Valen las siguientes igualdades:

- (a) $\mathcal{K}(\text{lk}(x, X)) = \mathcal{K}(\hat{C}_x) = \text{lk}(x, \mathcal{K}(X))$;
- (b) $\mathcal{K}(\text{st}(x, X)) = \mathcal{K}(C_x) = \text{st}(x, \mathcal{K}(X))$.

Proposición 2.4.22. Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios finitos T_0 punteados. Valen las siguientes afirmaciones:

- (i) $\mathcal{K}(X \oplus Y) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y)$;
- (ii) $|\mathcal{K}(X \times Y)| \cong |\mathcal{K}(X)| \times |\mathcal{K}(Y)|$;
- (iii) $|\mathcal{K}(X/A)| \not\cong |\mathcal{K}(X)|/|\mathcal{K}(A)|$, pero $|\mathcal{K}(X'/A')| \cong |\mathcal{K}(X')|/|\mathcal{K}(A')|$;
- (iv) $|\mathcal{K}(X \vee Y)| \cong |\mathcal{K}(X)| \vee |\mathcal{K}(Y)|$ y existe una equivalencia homotópica débil $|\mathcal{K}(X)| \vee |\mathcal{K}(Y)| \rightarrow X \vee Y$.

Demostración.

(i) $\mathcal{K}(X \oplus Y)$ es el complejo simplicial cuyos vértices son los puntos de $X \oplus Y$ y cuyos simplices son las cadenas en $X \oplus Y$. Por definición de $X \oplus Y$, se puede reformular el conjunto de vértices como $X \sqcup Y$ y a los simplices como uniones de cadenas en X con cadenas en Y . Luego, sigue la igualdad $\mathcal{K}(X \oplus Y) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y)$.

(ii) Ver [4], Proposición 2.7.5.

(iii) Ver [4], Ejemplo 2.7.9 y Corolario 7.2.2.

(iv) Ver [4], Proposición 4.2.25. □

2.4.1 Join, producto y wedge.

De las equivalencias de 2.4.17 derivan algunas relaciones entre el tipo homotópico débil de espacios finitos y la operaciones expuestas en 2.3 (join, producto y wedge).

Proposición 2.4.23. *Sean X, Y son espacios finitos T_0 . Si X o Y es homotópicamente trivial, entonces $X \oplus Y$ también lo es.*

La demostración sigue de aplicar la equivalencia 2.4.17 (a) y la identidad 2.4.22 (i).

Puede hallarse en [4], Proposición 6.2.11, o en [7] Proposición 3.17.

Proposición 2.4.24. *Si X, Y son espacios finitos T_0 , entonces $X \times Y$ es homotópicamente trivial si y sólo si X e Y lo son.*

Demostración. $X \times Y$ es homotópicamente trivial si y sólo si $X \times Y \xrightarrow{\text{we}} *$.

Por 2.4.17 (a), lo anterior es equivalente a que $|\mathcal{K}(X \times Y)| \xrightarrow{\text{he}} *$.

Por otra parte, por 2.4.22 (ii), $|\mathcal{K}(X \times Y)| \cong |\mathcal{K}(X)| \times |\mathcal{K}(Y)|$.

Y además se tiene que $|\mathcal{K}(X)| \times |\mathcal{K}(Y)| \xrightarrow{\text{he}} *$ si y sólo si $|\mathcal{K}(X)|$ y $|\mathcal{K}(Y)|$ son contráctiles (vale para espacios topológicos en general, ver 2.5.1).

Aplicando nuevamente 2.4.17 (a), se tiene que $|\mathcal{K}(X)|$ y $|\mathcal{K}(Y)|$ son contráctiles si y sólo si X e Y son homotópicamente triviales. \square

La demostración de la siguiente propiedad se encuentra en [4], la incluimos por completitud.

Proposición 2.4.25. *Si X, Y son espacios finitos T_0 , entonces $X \vee Y$ es homotópicamente trivial si y sólo si X e Y lo son.*

Demostración. Por 2.4.22 (iv), $X \vee Y$ es homotópicamente trivial si y sólo si $|\mathcal{K}(X)| \vee |\mathcal{K}(Y)|$ es homotópicamente trivial. Por el Teorema de Whitehead 1.4.9, lo anterior equivale a que $|\mathcal{K}(X)| \vee |\mathcal{K}(Y)|$ sea contráctil.

Pero $|\mathcal{K}(X)| \vee |\mathcal{K}(Y)|$ es contráctil si y sólo si $|\mathcal{K}(X)|$ y $|\mathcal{K}(Y)|$ lo son (vale para espacios topológicos en general, ver 2.5.1).

Y por la equivalencia 2.4.17 (a), $|\mathcal{K}(X)|$ y $|\mathcal{K}(Y)|$ son contráctiles si y sólo si X e Y son homotópicamente triviales. \square

2.5 Espacios finitos y tipo homotópico fuerte de complejos

En 1966, Stong [27] estudió los tipos homotópicos de los espacios finitos T_0 utilizando su estructura combinatoria e inaugurando los métodos de reducción de un punto.

En 2009, Barmak y Minian [8] prueban que éstos se corresponden con los tipos homotópicos fuertes de los poliedros compactos, utilizando las funciones \mathcal{K} y \mathcal{X} de McCord.

Comenzamos repasando el estudio de Stong del tipo homotópico de los espacios finitos T_0 .

Definición 2.5.1. Sea X un espacio finito T_0 .

Un punto $x \in X$ es un *down beat point* si x cubre uno y sólo un elemento de X ; equivalentemente, si $\hat{U}_x := U_x \setminus \{x\}$ tiene máximo. De manera dual, $x \in X$ es un *up beat point* si x es cubierto por uno y sólo un elemento de X ; equivalentemente, si $\hat{F}_x := F_x \setminus \{x\}$ tiene mínimo.

Es fácil reconocer los beat points en el diagrama de Hasse del espacio: los down beat points son los puntos que están en el extremo superior de una única arista, y los up beat points son los que están en el extremo inferior de una única arista.

Definición 2.5.2. Sea X un espacio finito T_0 .

Si $x \in X$ es un down beat point, entonces se dice que hay un *colapso fuerte elemental* de X a $X \setminus \{x\}$, y se nota $X \searrow^e X \setminus \{x\}$. Si existe una sucesión de colapsos fuertes elementales que comienzan en X y terminan en un espacio finito Y , se dice que X *colapsa fuertemente* a Y , y se nota $X \searrow Y$.

Proposición 2.5.3. Sea X un espacio finito T_0 y $x \in X$ un beat point. Entonces $X \setminus \{x\} \subset X$ es un retracto por deformación fuerte.

*Demuestra*ción. Supongamos que x es un down beat point de X . Entonces hay una única arista en el diagrama de Hasse $\mathcal{H}(X)$ que tiene a x en el extremo superior. Sea y el extremo inferior de esa arista (formalmente, $y = \max \hat{U}_x$).

Definimos la retracción $r : X \rightarrow X \setminus \{x\}$ por $r(x) = y$ y $r|_{X \setminus \{x\}} = 1_{X \setminus \{x\}}$. Claramente r preserva orden (y luego, por 2.2.8, es continua) y $i \circ r = 1_{X \setminus \{x\}}$ (donde si $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es la inclusión). Más aún, $i \circ r \leq 1_X$ rel $X \setminus \{x\}$ y luego, por 2.2.9, $i \circ r \simeq 1_x$ rel $X \setminus \{x\}$.

La demostración si x es up beat point es análoga. \square

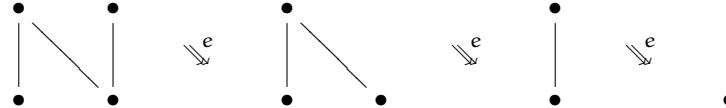
Definición 2.5.4. Un espacio finito T_0 es *minimal* si no tiene beat points. Un *core* de un espacio finito X es un espacio minimal que es retracto por deformación fuerte de X .

Teorema 2.5.5. Una equivalencia homotópica entre espacios finitos es un homeomorfismo. En particular, el core de un espacio finito es único salvo homeomorfismo y dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes si y sólo si tienen cores homeomorfos.

*Demuestra*ción. Ver [4] Corolario 1.3.7 \square

En particular, para hallar un core de un espacio finito basta remover sucesivamente beat points hasta que no quede ninguno.

Ejemplo 2.5.6. Hemos visto que un espacio finito T_0 con máximo o mínimo es contrátil. Claramente la recíproca no vale, existen infinitos contraejemplos. Vemos a continuación el más sencillo.



Ejemplo 2.5.7. Consideremos el siguiente espacio finito G , denominado el *Gato Tuerto*:

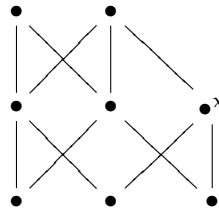


Figura 2.11: G .

G es contrátil, pero x es su único beat point. Luego, G **no** colapsa fuertemente a x .

Para espacios de altura 1 todo punto es retracto por deformación fuerte del espacio.

Proposición 2.5.8. *Los espacios finitos de altura 1 contráctiles colapsan fuertemente a cualquier punto.*

Demostración. Razonemos por el absurdo. Supongamos que existe $x \in X$ tal que X no colapsa fuertemente a x . Dado que todo core de X es un punto, existe Y tal que $X \searrow Y \searrow *$, y x es el único beat point de Y . Notar que $|Y| > 3$.

Si x es down beat point de Y , entonces existe un único punto y de Y (de grado 0) cubierto por x .

Sea $z \notin \{x, y\}$. Veamos que z no es beat point de $Y \setminus \{x\}$. Notar que z no es comparable con x , pues en tal caso debería ser $z \prec x$, pero y es el único punto cubierto por z . Entonces $\hat{C}_z^{Y \setminus \{x\}} = \hat{C}_z^Y$. Dado que x es el único beat point de Y , z no es beat point de $Y \setminus \{x\}$.

Procedemos de manera análoga, si x es up beat point de Y .

Luego, hemos visto que si Y tiene un único beat point, entonces $Y \setminus \{x\}$ tiene a lo sumo un beat point.

Dado que $|Y| > 3$ e Y es contráctil $Y \setminus \{x\}$ debe tener beat points.

Si x_1 es el único beat point de $Y \setminus \{x\}$, entonces, razonando de manera análoga, $Y \setminus \{x, x_1\}$ tiene a lo sumo un beat point.

Siguiendo este razonamiento si

$$Y \searrow Y \setminus \{x, x_1\} \searrow Y \setminus \{x, x_1, x_2\} \searrow \cdots \searrow Y \setminus \{x, x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

en cada paso los espacios tienen a lo sumo un beat point.

Pero $Y \searrow *$; el penúltimo espacio en la sucesión de colapsos fuertes debe tener dos puntos, por lo que tiene dos beat points, llegando entonces a un absurdo. \square

Finalmente, veamos la correspondencia entre tipos homotópicos fuertes de complejos simpliciales finitos y tipos homotópicos de espacios finitos T_0 .

Teorema 2.5.9.

- (a) Sean X e Y espacios finitos T_0 . Si $X \xrightarrow{\text{he}} Y$, entonces $\mathcal{K}(X) \wedge \mathcal{K}(Y)$. Más aún, si $X \searrow Y$, entonces $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(Y)$.
- (b) Sean K y L complejos simpliciales finitos. Entonces $K \xrightarrow{\text{se}} L$ si y sólo si $\mathcal{X}(K) \xrightarrow{\text{he}} \mathcal{X}(L)$. Más aún, si $K \searrow L$, entonces $\mathcal{X}(K) \searrow \mathcal{X}(L)$.

Demostración. Ver [8], Teoremas 4.13, 4.14 y 4.19 o [4] Teoremas 5.0.15 y 5.0.16. \square

Se tiene entonces la siguiente correspondencia:

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{Complejos simpliciales finitos} \} / \xrightarrow[\sim]{\text{se}} & \xleftarrow[\xrightarrow{\mathcal{X}}]{\mathcal{K}} & \{ \text{Espacios topológicos finitos } T_0 \} / \xrightarrow[\sim]{\text{he}} \end{array}$$

2.5.1 Join, producto y wedge

Existen relaciones entre la contractibilidad de los espacios finitos y las operaciones definidas en 2.3: join, producto y wedge.

Respecto del join, vale que:

Si X, Y son espacios finitos, entonces $X \oplus Y$ es contráctil si y sólo si X o Y lo es.

La demostración de este hecho puede hallarse en [4], Proposición 2.7.3.

En relación al producto, vale la siguiente equivalencia:

Si X, Y son espacios finitos, entonces $X \times Y$ es contráctil si y sólo si X e Y lo son.

Más aún, lo anterior ocurre para espacios topológicos en general.

En efecto, supongamos que $X \times Y$ es un espacio contráctil. Entonces existe una homotopía $H : X \times Y \times I \rightarrow X \times Y$ tal que $H_0 = 1_{X \times Y}$ y $H_1 = \text{cte}_{(x_0, y_0)}$. Si $p_X : X \times Y \rightarrow X$ es la proyección a la primera coordenada, entonces la función $F : X \times I \rightarrow X$ definida por $F(x, t) = p_X \circ H(x, y_0, t)$ es una homotopía entre 1_X y cte_{x_0} . Análogamente, la función $G : Y \times I \rightarrow Y$ definida por $G(y, t) = p_Y \circ H(x_0, y, t)$ es una homotopía entre 1_Y y cte_{y_0} .

Recíprocamente, si X e Y son espacios contráctiles con homotopías asociadas $F : X \times I \rightarrow X$ y $G : Y \times I \rightarrow Y$ respectivamente; entonces la función $F \times G$ definida por $(F \times G)(x, y, t) = (F(x, t), G(y, t))$ es una homotopía entre $1_{X \times Y}$ y una función constante. Luego, $X \times Y$ resulta contráctil.

Por último, respecto del wedge, vale la siguiente implicación estricta:

Si X, Y son espacios finitos tales que $X \vee Y$ es contráctil, entonces X e Y lo son.

Este hecho también ocurre para espacios topológicos en general. En efecto, sea $H : X \vee Y \times I \rightarrow X \vee Y$ una homotopía entre $1_{X \vee Y}$ y una función constante. Si $i : X \rightarrow X \vee Y$ es la inclusión, y $r : X \vee Y \rightarrow X$ la retracción que manda Y a y_0 , entonces la homotopía $r \circ H(i \times 1_I) : X \times I \rightarrow X$ entre 1_X y una constante muestra que X es contráctil. De manera análoga se ve que Y también lo es.

La recíproca no vale para espacios finitos. Para notarlo, basta considerar la unión en x (ver figura 2.12) de dos copias del espacio G de la figura 2.11, denominado *Gato Tuerto*. Cada copia es contráctil, pero $G \vee G$ no tiene beat points y luego no es contráctil.

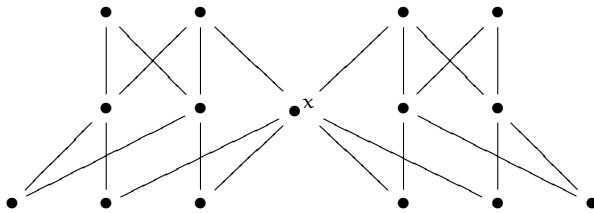


Figura 2.12: $G \vee G$.

2.6 Espacios finitos y tipo homotópico simple de complejos

En 1999, T. Osaki [26] exhibe una relación entre espacios finitos y tipo homotópico simple de complejos simpliciales. Muestra que si $X \setminus \{x\} \simeq X \setminus \{x\}$, entonces $\mathcal{K}(X) \simeq \mathcal{K}(X \setminus \{x\})$; y luego, que para cualquier par de espacios finitos $T_0 X$ e Y , si $X \simeq_{\text{he}} Y$, entonces $\mathcal{K}(X) \simeq \mathcal{K}(Y)$.

Sin embargo, más tarde se muestra que no hay una correspondencia entre estas clases⁴: existen espacios finitos que no son homotópicamente equivalentes, y sus complejos asociados tienen el mismo tipo homotópico simple. Por ejemplo, consideremos los espacios finitos de la Figura 2.13.

⁴Hemos visto en 2.5 que los tipos homotópicos de espacios finitos se corresponden con los tipos homotópicos fuertes de los complejos simpliciales.

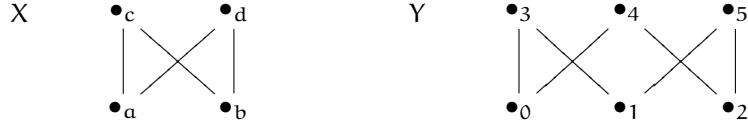


Figura 2.13: $X \not\sim_{\text{he}} Y$.

X e Y no son simplemente equivalentes. En efecto, haciendo uso de la teoría de Strong, basta afirmar que estos espacios coinciden con sus cores (ya que no tienen beat points) y no son homeomorfos.

Sin embargo, $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ son simplemente equivalentes. Para notarlo, en primer lugar vemos que estos complejos son dos triangulaciones de S^1 (ver Figura 2.14), y luego $|\mathcal{K}(X)| \simeq_{\text{he}} |\mathcal{K}(Y)|$. Pero $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$, que es libre. Luego, por 1.4.16, $\mathcal{K}(X) \nearrow \mathcal{K}(Y)$.

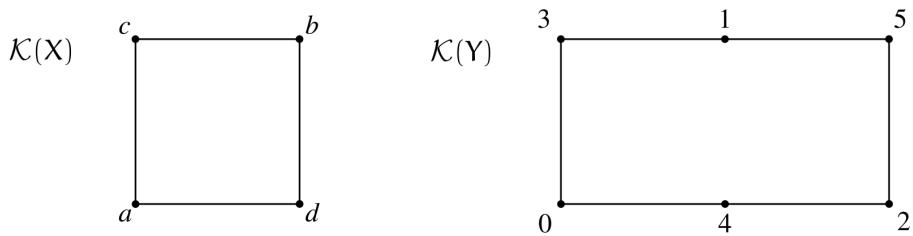


Figura 2.14: $\mathcal{K}(X) \nearrow \mathcal{K}(Y)$.

En 2008, Barmak y Minian [6] introducen el concepto de weak point, que generaliza el de beat point, dando lugar a un nuevo método de reducción de un punto que resulta la clave para hallar una correspondencia con los tipos homotópicos simples de los complejos finitos.

Definición 2.6.1. Sea X un espacio finito T_0 . Un punto $x \in X$ es un *down weak point* si \hat{U}_x es contrátil; y es un *up weak point* si \hat{F}_x es contrátil.

Dado que los espacios con mínimo o máximo son contráctiles, los beat points son en particular weak points.

Notar además que $\hat{C}_x = \hat{U}_x \oplus \hat{F}_x$. Luego, por 2.5.1, x es weak point si y sólo si \hat{C}_x es contrátil.

Proposición 2.6.2. Sea X un espacio finito T_0 . Si $x \in X$ es un weak point, entonces la inclusión $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia débil.

*Demuestra*ón. Vamos a probar que $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia débil aplicando el Teorema de McCord 1.2.6 a la base tipo cubrimiento $\{U_y : y \in X\}$.

Supongamos que x es un down weak point.

Dado $y \in X$, $i^{-1}(U_y) = U_y \setminus \{x\}$; que tiene máximo (es justamente y) si $x \neq y$, y que es contrátil (por ser x down weak point) si $x = y$.

Luego, $i|_{i^{-1}(U_y)} : i^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$ es una equivalencia débil y el resultado sigue de 1.2.6.

Si x es un up weak point, entonces es down weak point de X^{op} . Por el razonamiento anterior, $i : X^{\text{op}} \setminus \{x\} \hookrightarrow X^{\text{op}}$ es una equivalencia débil. Luego, por 2.4.7, $\mathcal{K}(i) : |\mathcal{K}(X^{\text{op}}) \setminus \{x\}| \rightarrow |\mathcal{K}(X^{\text{op}})|$ es una equivalencia homotópica. Pero $|\mathcal{K}(X^{\text{op}})| = |\mathcal{K}(X)|$. Aplicando nuevamente 2.4.7 resulta $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ equivalencia débil. \square

Definición 2.6.3. Sean X e Y espacios finitos T_0 .

Se dice que hay un *colapso elemental* de X a Y (o una *expansión elemental* de Y a X) si $Y = X \setminus \{x\}$ con x weak point de X . Se nota $X \setminus^e Y$ (resp. $Y \setminus^e X$).

Se dice que X *colapsa* a Y (o que Y se *expande* a X) si existe una sucesión finita de espacios finitos $T_0 X_0, X_1, \dots, X_n = Y$ tal que, para cada $0 \leq i < n$, $X_i \setminus^e X_{i+1}$. Se nota $X \setminus Y$ (resp. $Y \setminus X$).

Se dice que X es *colapsable* si $X \setminus *$.

Se dice que X e Y tienen el mismo *tipo homotópico simple* (o que son *simplemente equivalentes*) si existe una sucesión finita de espacios finitos $T_0 X_0, X_1, \dots, X_n = Y$ tal que, para cada $0 \leq i < n$, $X_i \setminus^e X_{i+1}$ o $X_i \setminus^e X_{i+1}$. Se nota $X \setminus \setminus Y$.

Se dice que X se n -*deforma* en Y si existe una sucesión finita de espacios finitos $(T_0) X_0, X_1, \dots, X_n = Y$ tal que, para cada $0 \leq i < n$, $X_i \setminus^e X_{i+1}$ o $X_i \setminus^e X_{i+1}$, y $h(X_i) \leq n$ para todo $0 \leq i \leq n$ (es decir, $X \setminus \setminus Y$ mediante una "deformación" que involucra sólo espacios de dimensión menor o igual a n).

De manera análoga al caso de los CW-complejos, en la sucesión de colapsos y expansiones anterior pueden realizarse primero todas las expansiones. Este resultado fue demostrado por Barmak y Minian [4] (4.4.5.).

Teorema 2.6.4. Sean X e Y espacios finitos T_0 simplemente equivalentes. Entonces, existe un espacio finito $T_0 Z$ tal que $X \setminus \setminus Z \setminus Y$.

El hecho de que los beat points sean en particular weak points tiene consecuencias interesantes.

En la clase de los complejos simpliciales, los espacios simplemente equivalentes son en particular homotópicamente equivalentes. En la clase de los espacios finitos ocurre lo opuesto: los espacios homotópicamente equivalentes son en particular simplemente equivalentes.

Además vale que los espacios finitos contráctiles son colapsables, aunque no es cierta la recíproca:

Ejemplo 2.6.5. El siguiente espacio finito W se denomina "The Wallet" (la Billetera).

W es colapsable, pues $W \setminus^e W \setminus \{x\} \setminus \setminus *$. Sin embargo, no es contráctil, pues no tiene beat points.

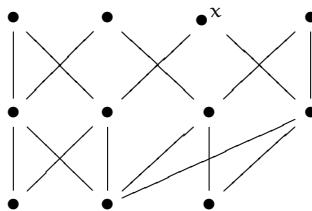


Figura 2.15: W .

Este espacio fue introducido por Barmak y Minian en [6]. Originalmente buscaban un espacio homotópicamente trivial no contráctil. Durante esa búsqueda descubrieron a los weak points; pues para construirlo idearon este método de reducción de un punto. Y sorprendentemente este método se convirtió en la clave para trasladar a los colapsos simpliciales a los espacios finitos; y con ellos, el estudio del tipo homotópico simple de poliedros.

Por otra parte, por 2.6.2 es claro que los espacios finitos colapsables son homotópicamente triviales; aunque tampoco vale la recíproca:

Ejemplo 2.6.6. Sea X un poliedro compacto contráctil tal que cualquier triangulación de X no es colapsable.

Por ejemplo, consideremos el Dunce Hat (es contráctil pero cualquier triangulación del mismo no tiene caras libres y luego no colapsa a un punto).

Sea K una triangulación de X . Dado que $|K|$ es contráctil, por 2.4.17 $\mathcal{X}(K)$ es homotópicamente trivial. Sin embargo, $\mathcal{X}(K)$ no es colapsable. Si lo fuera, entonces por 2.6.7 $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$ sería colapsable. Pero dado que K' es otra triangulación de X , llegamos a una contradicción.

En resumen, en el contexto de los espacios valen las siguientes implicaciones estrictas:

con máximo o mínimo \Rightarrow contráctil \Rightarrow colapsable \Rightarrow homotópicamente trivial.

Veamos la correspondencia entre tipos homotópicos simples de complejos simpliciales finitos y tipos homotópicos simples de espacios finitos T_0 .

Teorema 2.6.7.

- (a) Sean X e Y espacios finitos T_0 . Entonces $X \wedge Y$ si y sólo si $\mathcal{K}(X) \wedge \mathcal{K}(Y)$. Más aún, si $X \succ Y$, entonces $\mathcal{K}(X) \succ \mathcal{K}(Y)$.
- (b) Sean K y L complejos simpliciales finitos. Entonces $K \wedge L$ si y sólo si $\mathcal{X}(K) \wedge \mathcal{X}(L)$. Más aún, si $K \succ L$, entonces $\mathcal{X}(K) \succ \mathcal{X}(L)$.

Demostración. Ver [6], Teorema 3.11, o [4] Teorema 4.2.12. □

Se tiene entonces la siguiente correspondencia:

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{Complejos simpliciales finitos} \} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{K}} \\ \xrightarrow{\mathcal{X}} \end{array} & \{ \text{Espacios topológicos finitos } T_0 \} \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \end{array}$$

Observación 2.6.8. Hemos visto que si K es un complejo simplicial finito (o un CW-complejo finito), entonces $K \wedge * \equiv * \wedge K$ si y sólo si $|K| \xrightarrow{\text{he}} *$ (ver 1.4.16).

Por otra parte, por 2.6.7, $K \wedge * \equiv * \wedge K$ si y sólo si $\mathcal{X}(K) \wedge *$.

En conclusión, un poliedro X es contráctil si y sólo si para alguna triangulación K de X , $\mathcal{X}(K)$ se puede llevar a un punto agregando y quitando (finitas veces) weak points.

Corolario 2.6.9. Si X espacio finito T_0 , entonces X homotópicamente trivial si y sólo si X es simplemente equivalente a un punto.

Demostración. X homotópicamente trivial si y sólo si $X \xrightarrow{\text{we}} *$. Por 2.4.17, lo anterior es equivalente a que $\mathcal{K}(X)$ sea contráctil. Aplicando la Observación 1.4.16, $\mathcal{K}(X) \xrightarrow{\text{he}} *$ si y sólo si $\mathcal{K}(X) \wedge *$. Finalmente, por 2.6.7, $\mathcal{K}(X) \wedge * \equiv * \wedge \mathcal{K}(X)$. □

Corolario 2.6.10. Para todo X espacio finito T_0 , $X \wedge X'$.

Demostración. Por 2.6.7 $X \wedge X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$ si y sólo si $\mathcal{K}(X) \wedge \mathcal{K}(\mathcal{X}(X')) = \mathcal{K}(X)'$. Pero esto último es cierto para cualquier complejo simplicial (ver 1.3.37). □

La demostración original no utiliza 2.6.7; puede hallarse en [4], Proposición 4.2.9 o en [6] Proposición 3.8.

Corolario 2.6.11. Para cualquier espacio finito X , $X \wedge X^{\text{op}}$.

Demostración. Sea X espacio finito. Se tiene que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X^{\text{op}})$. Luego,

$$X \nearrow X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X)) = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X^{\text{op}})) = (X^{\text{op}})' \nearrow X^{\text{op}}. \quad \square$$

Corolario 2.6.12. *Si X es un espacio finito colapsable, entonces X' colapsa a todos sus puntos minimales.*

Demostración. Si $X \searrow *$, entonces, por 2.6.7, $\mathcal{K}(X) \searrow *$. Luego, por 1.3.39, $\mathcal{K}(X)$ colapsa a todos sus vértices, que son justamente los elementos de X . Nuevamente por 2.6.7, $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X)) = X' \searrow \mathcal{X}(\{x\}) = \{x\}$ para todo $x \in X$. \square

2.6.1 Join, producto y wedge.

Exhibimos a continuación algunas relaciones entre los weak points y el tipo homotópico simple de los espacios finitos, y las operaciones definidas en 2.3.

Comenzamos el análisis con el join.

Proposición 2.6.13. *Sean X, Y espacios topológicos finitos T_0 .*

Si x es weak point de X o de Y , entonces x es weak point de $X \oplus Y$.

Recíprocamente, si $x \in X$ es weak point de $X \oplus Y$, entonces x es weak point de X o Y es contráctil; si $y \in Y$ es weak point de $X \oplus Y$, entonces y es weak point de Y o X es contráctil.

Demostración. Supongamos que x es weak point de X ; es decir, que \hat{C}_x^X es contráctil. Dado que $\hat{C}_x^{X \oplus Y} = \hat{C}_x^X \oplus Y$, por 2.5.1 resulta contráctil y luego x es weak point de $X \oplus Y$. El caso para Y es análogo.

Supongamos que $x \in X$ es weak point de $X \oplus Y$; es decir, $\hat{C}_x^{X \oplus Y} = \hat{C}_x^X \oplus Y$ es contráctil. Nuevamente por 2.5.1, o bien x es weak point de X o bien Y es contráctil. El caso para $x \in Y$ es análogo. \square

Corolario 2.6.14. *Si X, Y son espacios finitos T_0 , entonces $X \oplus Y$ es colapsable si y sólo si X o Y lo es.*

Demostración. Supongamos que $X \oplus Y \searrow X \oplus Y \setminus \{x\} \searrow *$, con $x \in X$. Entonces, por 2.6.13, o bien x es weak point de X o bien Y es contráctil. En el primer caso, el resultado sigue por inducción en la cantidad de colapsos elementales desde $X \oplus Y$ a un punto. En el segundo, del hecho de que los espacios contráctiles son en particular colapsables. Si $x \in Y$, el razonamiento es análogo.

Recíprocamente, supongamos que $X = X_0 \searrow X_1 \searrow \dots \searrow X_n = x_n$. Por 2.6.13, $X \oplus Y = X_0 \oplus Y \searrow X_1 \oplus Y \searrow \dots \searrow X_n \oplus Y = x_n \oplus Y$. Pero $x_n \oplus Y$ tiene mínimo; en particular es colapsable. Si Y es colapsable, el razonamiento es similar. \square

Corolario 2.6.15. *Si X, Y, Z espacios finitos T_0 , entonces $X \searrow Y$ si y sólo si $X \oplus Z \searrow Y \oplus Z$.*

Demostración. Supongamos que $X \searrow X \setminus \{x\} \searrow Y$. Por 2.6.13, el colapso elemental $X \searrow X \setminus \{x\}$ es equivalente a que x sea weak point de $X \oplus Z$ (equivalentemente, a que $X \oplus Z \searrow (X \setminus \{x\}) \oplus Z = (X \oplus Z) \setminus \{x\}$).

El resultado sigue por inducción en la cantidad de colapsos elementales necesarios para llegar de X a Y . \square

Los siguientes resultados, referidos al producto, pueden hallarse en [4], 4.2.1.

Proposición 2.6.16. *Sean X, Y espacios finitos T_0 . Son equivalentes:*

- (i) (x, y) es down weak point de $X \times Y$;
- (ii) o bien x minimal e y es down weak point de Y , o bien x es down weak point de X e y minimal.

Demostración. (x, y) es down weak point de $X \times Y$ si y sólo si $\hat{U}_{(x,y)}^{X \times Y}$ es contráctil. Pero

$$\hat{U}_{(x,y)}^{X \times Y} = \hat{U}_x^X \times U_y^Y \sqcup \{x\} \times \hat{U}_y^Y = U_x^X \times \hat{U}_y^Y \sqcup \hat{U}_x^X \times \{y\},$$

que es contráctil si y sólo si o bien $\hat{U}_x^X = \emptyset$ e y es down weak point de Y o bien $\hat{U}_y^Y = \emptyset$ y x es down weak point de X . \square

Vale el análogo del resultado anterior para up weak points, cambiando minimal por maximal.

Proposición 2.6.17. *Sean X, Y, Z espacios finitos T_0 . Si $X \searrow Y$ entonces $X \times Z \searrow Y \times Z$.*

Demostración. Basta ver que si $x \in X$ es weak point de X , entonces $X \times Y \searrow (X \setminus \{x\}) \times Y$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que x es down weak point. Sea $y_0 \in Y$ minimal. Por 2.6.16, (x, y_0) es down weak point de $X \times Y$.

Sea ahora $y_1 \in Y \setminus \{y_0\}$ minimal. Nuevamente por 2.6.16, (x, y_1) es down weak point de $X \times (Y \setminus \{x_0\})$.

Siguiendo este razonamiento, removemos todos los puntos de $X \times Y$ de la forma (x, y) , con $y \in Y$. Luego, $X \times Y \searrow (X \setminus \{x\}) \times Y$. \square

Corolario 2.6.18. *Si X, Y son espacios finitos T_0 colapsables, entonces $X \times Y$ es colapsable.*

Demostración. Supongamos $X \searrow \{x\}$ e $Y \searrow \{y\}$. Aplicando 2.6.17 se obtiene que $X \times Y \searrow X \times \{y\} \cong X \searrow \{x\}$. \square

Exponemos a continuación propiedades que relacionan la colapsabilidad de espacios finitos con el wedge.

Proposición 2.6.19. *Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios finitos T_0 punteados. Entonces $x \neq x_0$ es weak point de $X \vee Y$ si y sólo si x es weak point de X o de Y .*

Demostración. Sea $x \neq x_0$ un punto de $X \vee Y$. Luego, $x \in (X \setminus \{x_0\}) \sqcup (Y \setminus \{y_0\})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in X \setminus \{x_0\}$. Veamos que x es down weak point de $X \vee Y$ si y sólo si x es down weak point de X .

x es down weak point de $X \vee Y$ si y sólo si $\hat{U}_x^{X \vee Y}$ es contráctil.

Si x no es mayor que x_0 , entonces $\hat{U}_x^{X \vee Y} = \hat{U}_x^X$ y el resultado es claro.

Si $x > x_0$, entonces $\hat{U}_x^{X \vee Y} = \hat{U}_x^X \vee U_{y_0}^Y$. Pero por 2.5.1, $\hat{U}_x^X \vee U_{y_0}^Y$ es contráctil si y sólo si \hat{U}_x^X y $U_{y_0}^Y$ lo son. Dado que $U_{y_0}^Y$ siempre es contráctil por tener máximo, lo anterior equivale a que x sea down weak point de X .

El caso para up weak point es análogo. \square

Corolario 2.6.20. *Sean X, Y, Z espacios finitos T_0 tales que $Y \subset X$ y sean $y_0 \in Y$ y $z_0 \in Z$. Entonces $X \searrow Y$ si y sólo si $X \vee Z \searrow Y \vee Z$.*

Demostración. Supongamos que $X \searrow X \setminus \{x\} \searrow Y$. Dado que $x \neq y_0$, por 2.6.19, el colapso elemental $X \searrow X \setminus \{x\}$ es equivalente a que x sea weak point de $X \vee Z$ (equivalentemente, a que $X \vee Z \searrow (X \setminus \{x\}) \vee Z = (X \vee Z) \setminus \{x\}$).

El resultado sigue por inducción en la cantidad de colapsos elementales necesarios para llegar de X a Y . \square

El siguiente resultado se encuentra en [4].

Proposición 2.6.21. *Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios finitos T_0 punteados conexos, con x_0 e y_0 minimales.*

Entonces x_0 es weak point de $X \vee Y$ si y sólo si $X = \{x_0\}$ e y_0 es weak point de Y , o $Y = \{y_0\}$ y x_0 es weak point de X .

Demostración. \bar{x}_0 es weak point de $X \vee Y$ si y sólo si es up weak point (pues dado que $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ son minimales, $\hat{U}_{\bar{x}_0}^{X \vee Y} \neq \emptyset$) si y sólo si $\hat{F}_{\bar{x}_0}^{X \vee Y}$ es contráctil.

Pero $\hat{F}_{\bar{x}_0}^{X \vee Y} = \hat{F}_{x_0}^X \sqcup \hat{F}_{y_0}^Y$, y es contráctil si y sólo si $\hat{F}_{x_0}^X = \emptyset$ y $\hat{F}_{y_0}^Y$ contráctil o viceversa. dado que X e Y son conexos, lo último es equivalente a que $X = \{x_0\}$ e y_0 sea weak point de Y , o que $Y = \{y_0\}$ y x_0 sea weak point de X . \square

Corolario 2.6.22. *Sean X, Y espacios finitos T_0 , $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ minimales. Si $X \vee Y$ es colapsable, entonces X e Y lo son.*

Demostración. Procedemos por inducción en n , la cantidad de colapsos elementales necesarios para llegar desde $X \vee Y$ a un punto.

Si $n = 0$, entonces $X = \{x_0\}$ e $Y = \{y_0\}$.

Supongamos vale para n . Veamos que vale para $n + 1$.

$X \vee Y \not\leq X \vee Y \setminus \{z_0\}$. Si $z_0 \in X \setminus \{x_0\}$, entonces $X \vee Y \setminus \{z_0\} = (X \setminus \{z_0\}) \vee Y$ y el resultado sigue por hipótesis inductiva. Si $z_0 \in Y \setminus \{y_0\}$ el razonamiento es análogo. Si $z_0 = \bar{x}_0$, entonces por 2.6.21 o bien $X = \{x_0\}$ e y_0 es weak point de Y , o bien $Y = \{y_0\}$ y x_0 es weak point de X . En particular, o bien $X \vee Y \cong Y$ o bien $X \vee Y \cong X$. Dado que $X \vee Y$ es colapsable, se obtiene el resultado. \square

Notar que la proposición 2.6.21 (y luego, su corolario 2.6.22) también vale para puntos base maximales; simplemente basta aplicarla al espacio dual.

Vale la siguiente generalización de 2.6.22.

Proposición 2.6.23. *Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios finitos T_0 punteados.*

*Si existe $Z \subseteq X \vee Y \setminus \hat{U}_{\bar{x}_0}^{X \vee Y}$ o $Z \subseteq X \vee Y \setminus \hat{F}_{\bar{x}_0}^{X \vee Y}$ tal que $X \vee Y \setminus Z \not\leq *$, entonces X e Y son colapsables.*

Demostración. Dado que $\bar{x}_0 \in Z$, $X \setminus_{\bar{x}_0} Y \setminus Z = \tilde{X} \setminus_{\bar{x}_0} \tilde{Y} \not\leq *$, con $\tilde{X} \subset X$ e $\tilde{Y} \subset Y$.

Si $Z \subset X \vee Y \setminus \hat{U}_{\bar{x}_0}^{X \vee Y}$, entonces \bar{x}_0 es minimal en Z ; y si $Z \subset X \vee Y \setminus \hat{F}_{\bar{x}_0}^{X \vee Y}$, entonces \bar{x}_0 es maximal en Z .

Por 2.6.22, \tilde{X} e \tilde{Y} son colapsables.

Pero, por 2.6.19, los weak points de $X \vee Y$ distintos de \bar{x}_0 son los weak points de $X \setminus \{x_0\}$ o de $Y \setminus \{y_0\}$. Luego, $X \setminus \tilde{X}$ e $Y \setminus \tilde{Y}$.

En conclusión, $X \setminus \tilde{X} \not\leq *$ e $Y \setminus \tilde{Y} \not\leq *$. \square

La recíproca de 2.6.22 no vale en general(ver [4], Ejemplo 4.2.27). El contraejemplo se construye a partir de un espacio (X, x_0) colapsable tal que $X \vee X$ no tiene weak points.

Sin embargo, bajo ciertas hipótesis adicionales es cierta.

Proposición 2.6.24. *Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios finitos punteados. Entonces $X \setminus x_0$ e $Y \setminus y_0$ si y sólo si $X \vee Y \setminus \{\bar{x}_0\}$.*

Demostración. Sigue de aplicar la caracterización de los weak points de un wedge que brinda la Proposición 2.6.19. \square

Observación 2.6.25. Hemos visto que los complejos simpliciales colapsables colapsan a cualquiera de sus puntos (1.3.39)

Este hecho no es cierto para espacios finitos.

Sea X el espacio del Ejemplo 4.2.27 [4]. Si X colapsara a cualquiera de sus puntos, entonces en particular colapsaría a x_0 (el punto identificado en el wedge). Luego, por 2.6.24, $X \vee X \setminus \bar{x}_0$, que es un absurdo.

Capítulo 3

Algoritmos en espacios finitos

3.1 Introducción

Hemos visto que los espacios finitos son una excelente herramienta para codificar información sobre el tipo homotópico de poliedros. La principal ventaja reside en que admiten un estudio de tipo puramente combinatorio. En ese sentido, el análisis de propiedades topológicas se torna, maravillosamente, algorítmico. En este capítulo nos ocuparemos de concretarlo mediante la implementación de los algoritmos que se desprenden de los estudios sobre tipo homotópico [27] y homotópico simple [6] de espacios finitos. Para lograrlo, utilizaremos un software libre llamado Sage.

Sage es una alternativa de código abierto a programas como Maple, Mathematica, Magma, y MATLAB, que combina una extensa librería con herramientas para diversas áreas de la matemática, con la posibilidad de crear nuevas, implementándolas en lenguaje Python.

Se accede al software Sage desde la página sagemath.org, donde puede descargarse o utilizarse online; así como también puede hallarse un extenso manual de referencia que explica con detalle y ejemplos todas las clases de objetos y funciones que tiene incorporados.

Por su parte, Python es un lenguaje de programación poderoso y fácil de aprender, debido a su sintaxis clara y expresión natural del código. El lector poco familiarizado puede remitirse a la página oficial python.org.

Este capítulo se organiza en tres secciones. La primera explica el modo de ingresar e implementar las cuestiones básicas relacionadas con espacios finitos que hemos tratado en 2.2 y 2.4. La segunda desarrolla la implementación de los algoritmos que infieren las teorías de Stong, y Barmak y Minian. El último trata de distintas implementaciones de funciones que calculan operaciones entre espacios finitos, así como también de la generación de posets al azar.

Los resultados y las implementaciones de algoritmos realizados en este capítulo son originales.

3.2 Generalidades

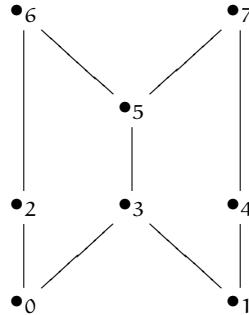
El software Sage tiene incorporados, entre sus clases de objetos, a los posets y a los complejos simpliciales; siendo este hecho de significativa utilidad.

Un poset puede ingresarse a partir de diversas formas de datos de entrada; nosotros utilizaremos principalmente los siguientes modos:

- (i) el diccionario de los elementos que cubren cada vértice;

- (ii) la lista de los elementos y una lista de un subconjunto de relaciones que genere todas las del poset.

Por ejemplo, para ingresar el poset cuyo diagrama de Hasse es:



se procede, en cada caso, del siguiente modo:

- (i) `P=Poset({0:[2,3],1:[3,4],2:[6],3:[5],4:[7],5:[6,7]})`
- (ii) `elms=[0,1,2,3,4,5,6,7]` o bien `elms=[x for x in range(8)]`
`rels=[[0,2],[0,3],[1,3],[1,4],[2,6],[3,5],[4,7],[5,6],[5,7]]`
`P=Poset((elms,rels))`

Un espacio finito también puede ser descripto por una sub-base de abiertos. Por ejemplo, consideremos X el espacio finito T_0 cuya sub-base de abiertos es $S=[['d'], ['c', 'd'], ['b', 'c'], ['a', 'b', 'c', 'd']]$.



Figura 3.1: Sub-base S y topología de X .

Para describir como poset a un espacio topológico finito dado por una sub-base, definimos una función que denominamos `poset`. Esta función toma como argumento una lista de listas S y devuelve el poset asociado al espacio finito con esa sub-base.

Programa 3.1: Función `poset`.

```

1 def poset (S):
2     l=[]
3     for U in S:l=l + U
4     elms=[x for x in set(l)]
5     rels=[]
6     U=[]
7     for i in range(len(elms)):
8         Ui=set(elms)
9         for j in range (len(S)):
10            if elms[i] in S[j]:
11                Ui=Ui & set(S[j])
12            U.append(Ui)
13    for i in range(len(elms)):

```

```

14     for j in range(len(elms)):
15         if elms[i] in U[j]: rels.append([elms[i],elms[j]])
16     return Poset((elms,rels))

```

La lista `elms` son los elementos del espacio finito y la lista `rels` son las relaciones del poset asociado. Para hallar `elms`, simplemente creamos una lista `l` que contiene los elementos de todas las listas de `X`, con repetición. Luego, consideramos a `l` como conjunto (con la instrucción `set(l)`) y creamos la lista `elms` con sus elementos. Para hallar `rels`, primero creamos la lista de listas `U`, que contiene en el lugar `i` el abierto minimal correspondiente al `i`-ésimo elemento de `elms` (es decir, si $x = elms[i]$, entonces $U_i = U_x$). Notar que para hallar U_x basta interseccar todos los abiertos de la subbase que contienen a x . Finalmente, para cada par de elementos $x = elms[i]$ e $y = elms[j]$ de `elms`, agregamos la relación $[x, y]$ a `rels` si y sólo si $x \in U_y$.

Si empleamos la función `poset` en el espacio `X` mencionado anteriormente, obtenemos:

```
X=[['d'], ['c', 'd'], ['b', 'c'], ['a', 'b', 'c', 'd']]
poset(X).show(figsize=[3.5,3.5], vertex_colors='white')
```

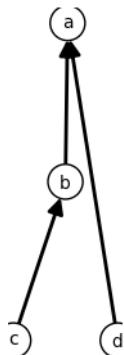


Figura 3.2: Aplicación de la función `poset` en el Notebook de Sage.

Nota: A partir de aquí, para todas las funciones que tomen como argumento un espacio finito, éste deberá encontrarse presentado en forma de poset. La misma situación se dará para las que tengan un espacio finito como output.

A partir de la función de Sage `cover_relations`, puede implementarse de manera sencilla la función que calcula el espacio opuesto a uno dado; donde `X.cover_relations()` es la lista de relaciones de cubrimiento del poset `X`.

Programa 3.2: Función `op`.

```

1 def op(X):
2     elms=[x.element for x in X.list()]
3     rels=[[r[1].element,r[0].element] for r in X.cover_relations()]
4     return Poset((elms,rels))

```

Un complejo simplicial se define en Sage de la forma `SimplicialComplex(maximal_simplices)`. Por ejemplo, el complejo simplicial K (ver Figura 3.3) puede ingresarse del siguiente modo:

```
K=SimplicialComplex( [['a','c','d'], ['c','e'], ['d','e'], ['b','d']])
```

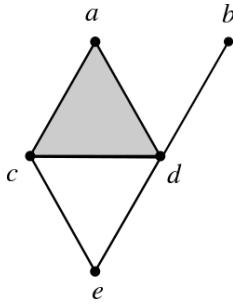


Figura 3.3: K.

Sage tiene incorporadas las funciones `K.face_poset()`, `K.homology()` para K un complejo simplicial; y `X.order_complex()`, para X un poset. Valiéndonos de las aplicaciones de McCord, definimos la función `homology(X)` que calcula la homología de un espacio finito X :

Programa 3.3: Función `homology`.

```

1 def homology(X):
2     return X.order_complex().homology()

```

Para finalizar esta introducción, exhibimos las funciones que calculan, dado un espacio finito X y un punto $x \in X$, los subespacios F_x , U_x , C_x , \hat{F}_x , \hat{U}_x y \hat{C}_x . El código resulta muy sencillo, debido a la preexistencia de las funciones booleanas `is_gequal` e `is_greater_than`. Dado un poset X y puntos $x, y \in X$, $X.is_greater_than(x, y) = \text{True}$ si y sólo si $x > y$, y $X.is_gequal(x, y) = \text{True}$ si y sólo si $x \geq y$.

Programa 3.4: Funciones F , U y C .

```

1 def F(x, X):
2     lista=[]
3     for y in X.list():
4         if X.is_gequal(y, x): lista.append(y)
5     return X.subposet(lista)
6
7 def U(x, X):
8     lista=[]
9     for y in X.list():
10        if X.is_gequal(x, y): lista.append(y)
11    return X.subposet(lista)
12
13 def C(x, X):
14     lista=[]
15     for y in X.list():
16         if X.is_gequal(x, y) or X.is_gequal(y, x): lista.append(y)
17     return X.subposet(lista)

```

Programa 3.5: Funciones $F_{\hat{}}$, $U_{\hat{}}$ y $C_{\hat{}}$.

```

1 def F_hat(x, X):
2     lista=[]
3     for y in X.list():
4         if X.is_greater_than(y, x): lista.append(y)
5     return X.subposet(lista)
6

```

```

7 def U_hat(x, X):
8     lista=[]
9     for y in X.list():
10        if X.is_greater_than(x, y): lista.append(y)
11    return X.subposet(lista)
12
13 def C_hat(x, X):
14     lista=[]
15     for y in X.list():
16        if X.is_greater_than(x, y) or X.is_greater_than(y, x): lista.append(y)
17    return X.subposet(lista)

```

3.3 Métodos de reducción

3.3.1 Beat points

El estudio de Stong sobre el tipo homotópico de espacios finitos dio lugar a un algoritmo que permite caracterizarlo de manera efectiva. En efecto, dado un espacio finito X , para obtener "el"¹ espacio finito homotópicamente equivalente a X de cardinal mínimo (denominado *core*), basta remover sucesivamente beat points **en cualquier orden** hasta llegar a un espacio *minimal*. El pseudocódigo se exhibe a continuación.

Algoritmo 1 Core de un espacio finito.

Input: Espacio finito $T_0 X$.

Output: Core de X .

```

repeat
    x beat point de X
    X  $\leftarrow$  X  $\setminus$  {x}
until no existen beat points en X
return X

```

Vamos a implementar el algoritmo anterior en Sage.

En primer lugar, creamos una función booleana `is_beat(x, X)` que toma como argumento un espacio finito X y un punto x , y devuelve `True` si y sólo si x es beat point de X . Esta función se puede implementar de diversas maneras. Si expresamos que x es beat point si y sólo si \hat{U}_x tiene máximo o \hat{F}_x tiene mínimo, entonces la función creada es:

Programa 3.6: Función `is_beat` (versión 1).

```

1 def is_beat(x, X):
2     return U_hat(x, X).has_top() or F_hat(x, X).has_bottom()

```

Si, equivalentemente, consideramos que x es beat point si y sólo si existe un único elemento que cubre a x o existe un único elemento cubierto por x , entonces no resulta necesario llamar a las funciones `U_hat` ni `F_hat`:

Programa 3.7: Función `is_beat` (versión 2).

```

1 def is_beat(x, X):
2     return len(X.upper_covers(x))==1 or len(X.lower_covers(x))==1

```

¹Es único salvo isomorfismo.

Una vez en condiciones de detectar si un punto es beat point o no, definimos la función `core(X)`, que toma como argumento un espacio finito X y devuelve su core. Su implementación se basa en el algoritmo descripto en 1, que consiste en remover sucesivamente beat points hasta llegar a un espacio minimal.

Programa 3.8: Función `core` (versión con `while`).

```

1 def core (X) :
2     bp=1
3     while bp==1:
4         for x in X.list () :
5             if is_beat (x,X) :
6                 lista=X.list ()
7                 lista.remove (x)
8                 X=X.subposet (lista)
9                 break
10            else:
11                bp=0 # otro modo es colocando 'return X'
12        return X

```

Otro modo de hallar el core de un espacio finito es mediante un algoritmo *recursivo* (es decir, que se llama a sí mismo). En efecto, dado X un espacio finito y x un beat point de X , el core de X coincide con el core de $X \setminus \{x\}$. Mostramos a continuación el pseudocódigo y la implementación en Sage.

Algoritmo 2 Core de un espacio finito (recursivo).

Function: `core`

Input: Espacio finito T_0 X .

Output: Un core de X .

```

if existe x beat point de X then
    return core (X  $\setminus \{x\}$ )
else
    return X
end if
end core

```

Lo implementamos en Sage del siguiente modo:

Programa 3.9: Función `core` (versión recursiva).

```

1 def core (X) :
2     for x in X.list () :
3         if is_beat (x,X)==True:
4             lista=X.list ()
5             lista.remove (x)
6             X=X.subposet (lista)
7             return core (X)
8     return X

```

Una vez definida la función `core`, mediante un sencillo programa podemos decidir si un espacio es contráctil o no.

Programa 3.10: Función `is_contractible`.

```

1 def is_contractible (X) :
2     if X.has_top () or X.has_bottom () : return True

```

```
3     return core(X).cardinality() == 1
```

Notar que la línea 2 del programa anterior bien podría eliminarse, pero la ventaja de que esté presente es que en ese caso el programa chequea en dos etapas la contractibilidad del espacio; ahorrando tiempo cuando no es necesario utilizar la segunda. En la primer etapa, si el espacio tiene máximo o mínimo, devuelve True. Si no, pasa a la segunda etapa, en la que calcula su core y devuelve True si y sólo si éste tiene cardinal 1.

3.3.2 Weak points

Barmak y Minian definen los weak points como herramienta para estudiar el tipo homotópico simple de complejos simpliciales finitos.

Comenzamos creando la función `is_weak(x, X)`, que devuelve True si y sólo si x es weak point de X . Nuevamente hay varios modos de implementarla:

Programa 3.11: Función `is_weak` (versión 1).

```
1 def is_weak(x, X):
2     return (is_contractible(C_hat(x, X)))
```

Programa 3.12: Función `is_weak` (versión 2).

```
1 def is_weak(x, X):
2     return (is_contractible(U_hat(x, X)) or is_contractible(F_hat(x, X)))
```

La ventaja de la segunda implementación radica en que halla primero el core de \hat{U}_x y, en caso de que no tenga un solo punto, halla el de \hat{F}_x ; quedando el programa dividido en etapas.

Realizamos algunas definiciones de nociones análogas a las de 2.5.4.

Definición 3.3.1. Sean X e Y espacios finitos T_0 .

Diremos Y es *weak minimal* si no tiene weak points.

Diremos que Y es un *weak core* de X si Y es weak minimal y $X \setminus Y$.

De manera similar al problema de hallar el core de un espacio, a la hora de hallar un weak core de un espacio finito X contamos con varias opciones:

- removiendo sucesivamente weak points hasta obtener a un espacio weak minimal;
- de manera recursiva, notando que si x es un weak point de X , entonces un weak core de X es también un weak core de $X \setminus \{x\}$.

Las implementaciones de cada una utilizando Sage se exhiben a continuación.

Programa 3.13: Función `wcore` (versión con `while`).

```
1 def wcore(X):
2     wp=1
3     while wp==1:
4         for x in X.list():
5             if is_weak(x, X):
6                 lista=X.list()
7                 lista.remove(x)
8                 X=X.subposet(lista)
9                 break
10            else:
11                wp=0 # otro modo es colocando 'return X'
12    return X
```

Programa 3.14: Función `wcore` (versión recursiva).

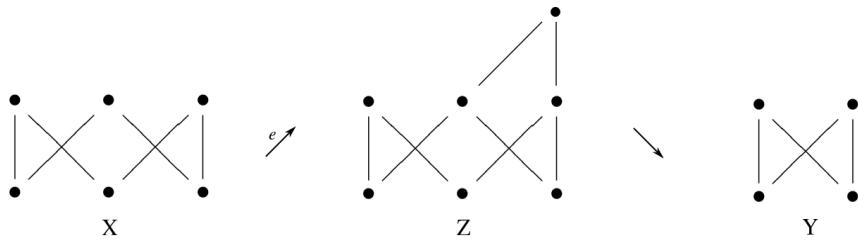
```

1 def wcore (X):
2     for x in X.list():
3         if is_weak(x,X)==true:
4             lista=X.list()
5             lista.remove(x)
6             X=X.subposet(lista)
7             return wcore(X)
8     return X

```

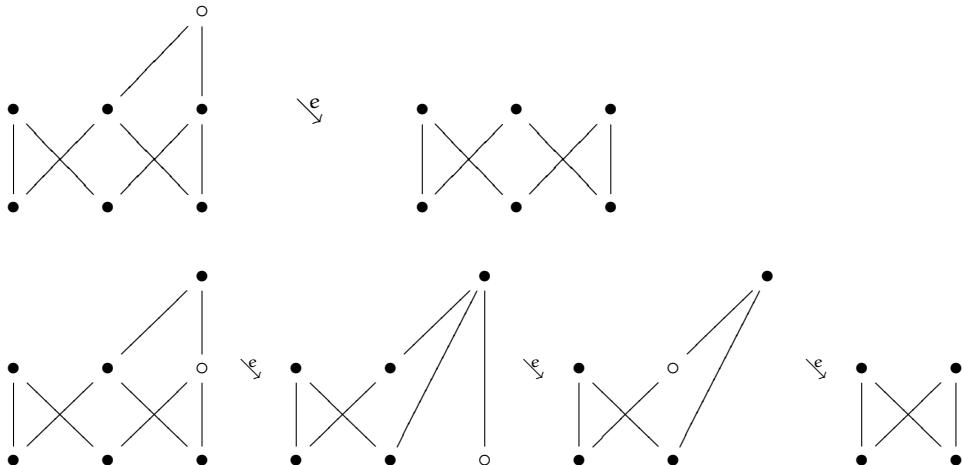
El algoritmo basado en remover weak points no es efectivo en el siguiente sentido: dado un espacio finito, no se obtiene en general un espacio simplemente equivalente a él de cardinal mínimo removiendo sucesivamente weak points en cualquier orden.

Ejemplo 3.3.2. Consideremos los espacios finitos X, Y y Z cuyos diagramas de Hasse pueden apreciarse en la siguiente figura:



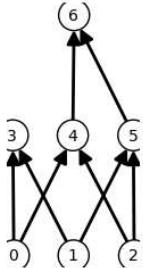
- X es weak minimal y tiene cardinal 6. Sin embargo, $Y \wedge X$, es weak minimal y tiene cardinal 4. De hecho, Y es el espacio simplemente equivalente a X de cardinal mínimo.
- El espacio simplemente equivalente a Z de cardinal mínimo puede obtenerse removiendo sucesivamente weak points, pero las reducciones no pueden hacerse en cualquier orden.

A continuación exhibimos los colapsos elementales que permiten llegar desde Z a X y a Y .



En particular, la función `wcore` puede hallar el weak core de cardinal mínimo o no. Por ejemplo, si la aplicamos a los espacios finitos Z y Z^{op} , a pesar de tener los mismos weak cores, nos devuelve distintos resultados.

```
Z=Poset({0:[3,4], 1:[3,5], 2:[4,5], 4:[6], 5:[6]})  
Z.show(figsize=[3,3], vertex_colors='white')
```



```
wcore(Z).show(figsize=[2.5,2.5], vertex_colors='white')
```



```
wcore(op(Z)).show(figsize=[2.5,2.5], vertex_colors='white')
```

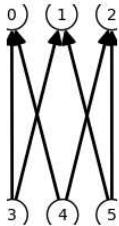


Figura 3.4: Aplicación de la función `wcore` en el Notebook de Sage.

Ejemplo 3.3.3. Sea D alguna triangulación del Dunce Hat. Dado que $|D|$ es contráctil, por 1.4.16, $D \nearrow *$. Luego, por el teorema 2.6.7, se tiene que $\mathcal{X}(D) \nearrow \mathcal{X}(*) = *$.

Por 2.6.4, existe Z tal que $* \nearrow Z \searrow \mathcal{X}(D)$.

Por otra parte, $\mathcal{X}(D)$ y $*$ son weak minimales. La afirmación es clara para $*$. Respecto de $\mathcal{X}(D)$, si tuviera algún weak point x , entonces

$$\mathcal{X}(D) \nearrow^e \mathcal{X}(D) \setminus \{x\}.$$

Luego, por teorema 2.6.7,

$$D' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(D)) \setminus \mathcal{K}(\mathcal{X}(D) \setminus \{x\}) = \mathcal{K}(\mathcal{X}(D)) \setminus \{x\} = D' \setminus \{x\}.$$

Pero D' es la subdivisión baricéntrica de D ; en particular, una triangulación del Dunce Hat. Dado que cualquier triangulación del Dunce Hat no tiene caras libres, la existencia de un weak point en $\mathcal{X}(D)$ generaría una contradicción.

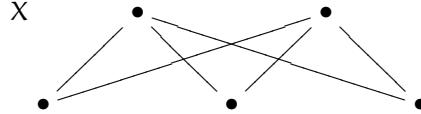
En conclusión, $*$ y $\mathcal{X}(D)$ son weak cores de Z .

En particular, existen espacios finitos colapsables que colapsan a espacios sin weak points distintos de un punto.

Establecemos como objetivo hallar, dado un espacio finito, un weak core de cardinal mínimo; que llamaremos *weak core minimal*. De este modo, podremos decidir si, por ejemplo, es colapsable.

Hemos visto que los weak cores de un espacio no verifican que son únicos salvo isomorfismo; más aún, ni siquiera hay unicidad salvo isomorfismo si fijamos su cardinal.

Ejemplo 3.3.4. Sea X el modelo finito de $S^1 \vee S^1$ cuyo diagrama de Hasse es el de la siguiente figura.



Por 2.6, $X \nearrow X^{\text{op}}$. Luego, por 2.6.4, existe Z tal que $X \nearrow Z \searrow X^{\text{op}}$. Dado que X es weak minimal (y luego, también lo es X^{op}) y que no existe modelo finito de $S^1 \vee S^1$ de cardinal menor que 5, resulta que X y X^{op} son weak cores de X de cardinal mínimo. Sin embargo, no son homeomorfos.

A continuación desarrollamos un algoritmo para hallar un weak core minimal de un espacio finito.

Dado un espacio finito, sus weak cores se construyen de a pasos; cada paso consiste en remover un weak point. Para hallar todos sus weak cores, debemos considerar todas las maneras de realizar estas reducciones. La Figura 3.5 muestra todas las posibles maneras de realizar las reducciones del espacio finito Z del ejemplo 3.3.2.

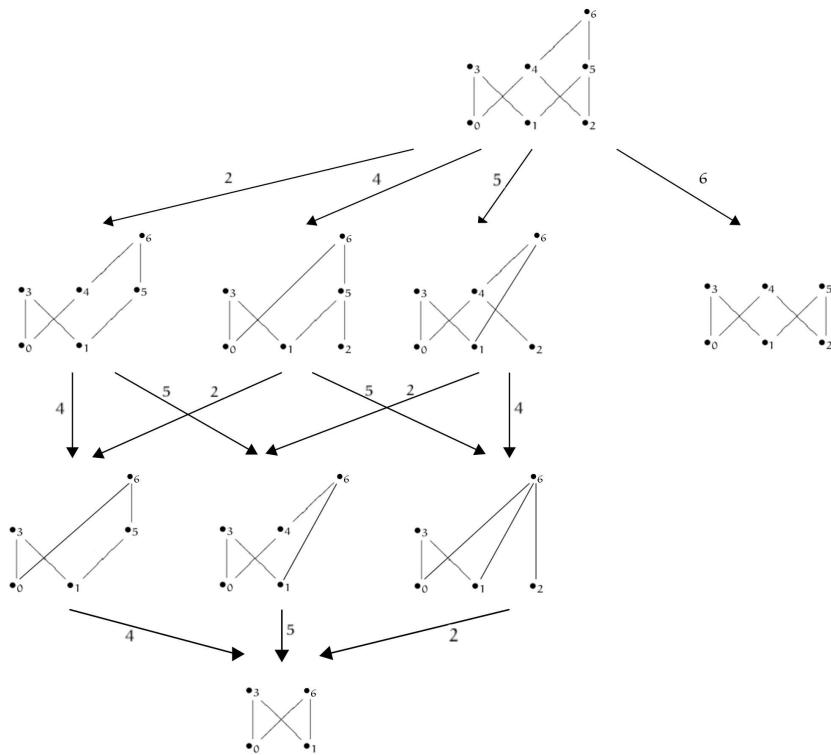


Figura 3.5: Esquema de todas las maneras de remover weak points de Z .

Para diseñar un algoritmo que recorra todos los weak cores de un espacio finito dado y devuelva el de cardinal mínimo, haremos uso de una técnica de programación denominada *backtracking*. Esta técnica proporciona una manera sistemática de generar las todas las posibles soluciones de un problema se puede resolver por etapas. Construye de a pasos soluciones parciales; abandonándolos (retrocediendo o "backtracking") cuando no sea posible completarlos a una solución válida o pensándolos como un subproblema del original cuando sí lo sea.

En nuestro caso, los pasos consisten en remover un weak point. Todas las soluciones parciales (espacio finitos a los cuales colapsa el espacio inicial) se pueden "completar" para hallar finalmente un espacio sin weak points, que será weak core del espacio original.

Conceptualmente, se puede pensar en un árbol con raíz el espacio finito inicial, y nodos que son subespacios a los que colapsa. El árbol cumple que, dado un nodo X , si $\{x_1, \dots, x_k\}$ es su conjunto de weak points, entonces las "ramas" que "salen" de X son los espacios $X \setminus \{x_1\}, X \setminus \{x_2\}, \dots, X \setminus \{x_k\}$. Una "hoja" del árbol es un weak core.

El modo en el cual un algoritmo de backtracking recorre este árbol tácito es "en profundidad".

Algoritmo 3 Weak core minimal de un espacio finito.

Function: minwcore

Input: Espacio finito $T_0 X$.

Output: Un weak core minimal de X .

```

1: MX  $\leftarrow X$ 
2: for  $x$  weak point de  $X$  do
3:    $Y \leftarrow \text{minwcore}(X \setminus \{x\})$ 
4:   if  $|Y| < |MX|$  then
5:      $MX \leftarrow Y$ 
6:   end if
7: end for
8: return  $MX$ 
end minwcore
```

Describimos el modo en el cual funciona el algoritmo anterior. La función `minwcore` toma como argumento un espacio finito X y devuelve un weak core minimal. Para hallarlo, en primer lugar (línea 1) crea una variable MX , en la que se almacenará el weak core de X de menor cardinal en cada momento. Se inicializa con el valor X . A continuación, para cada weak point de X , se itera el siguiente bucle: considera el subespacio $X \setminus \{x\}$ (crea una rama de X) y calcula, de modo recursivo, `minwcore(X \setminus {x})`; almacenando esta información en una nueva variable Y (línea 3). Notar que, a diferencia de la implementación recursiva de `wcore`, en este caso nunca modificamos a X . Si Y tiene cardinal menor que MX , lo actualiza. Finalmente, devuelve el valor de MX .

Nuestra implementación en Sage es:

Programa 3.15: `minwcore` (versión inicial).

```

1 def minwcore(X):
2     MX=X
3     for x in X.list():
4         if is_weak(x,X):
5             lista=X.list()
6             lista.remove(x)
7             Y=minwcore(X.subposet(lista))
8             if Y.cardinality() < MX.cardinality(): MX=Y
9     return MX
```

Consideremos el espacio finito Z del ejemplo 3.3.2. El árbol tácito que el algoritmo construye a medida que recorre las soluciones no es el de la Figura 3.5, sino el siguiente:

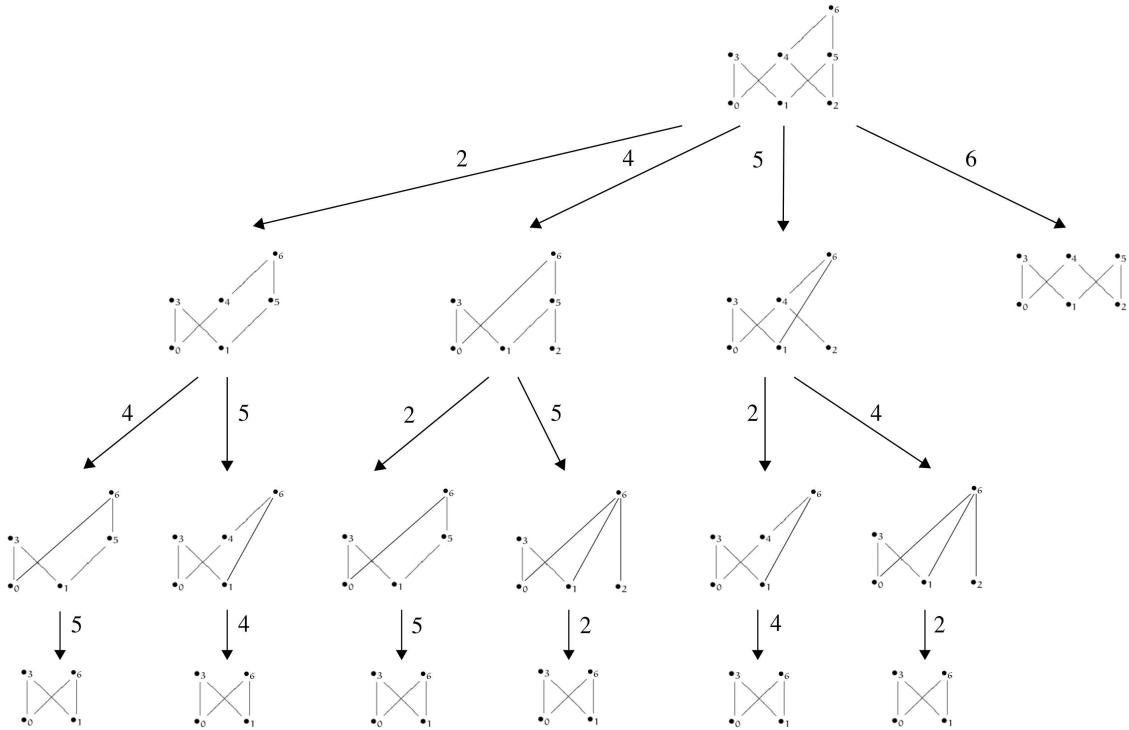


Figura 3.6: Árbol tácito asociado a la implementación de backtracking para hallar un weak core minimal de Z .

Puede observarse entonces que este algoritmo analiza varias veces los mismos subespacios del espacio input; tantas como maneras distintas haya de llegar hasta ellos efectuando colapsos elementales.

Para optimizar el algoritmo anterior, creamos una lista `visitados` que almacena los subespacios a los cuales ya les hemos calculado su weak core minimal. De este modo, "podamos" toda rama del árbol que sea idéntica a alguna que ya se haya analizado.

La siguiente es una idea **parcial** de la implementación (notar que falta definir la variable `visitados`!).

Programa 3.16: `minwcore` (versión parcial con `visitados`).

```

1 def minwcore(X):
2     MX=X
3     for x in X.list():
4         if is_weak(x,X):
5             l=X.list()
6             l.remove(x)
7             S=X.subposet(l)
8             ll=set(S.list())
9             if not ll in visitados:
10                 visitados.append(ll)

```

```

11     Y=minwcoreaux(S)
12     if Y.cardinality() < MX.cardinality(): MX=Y
13     return MX

```

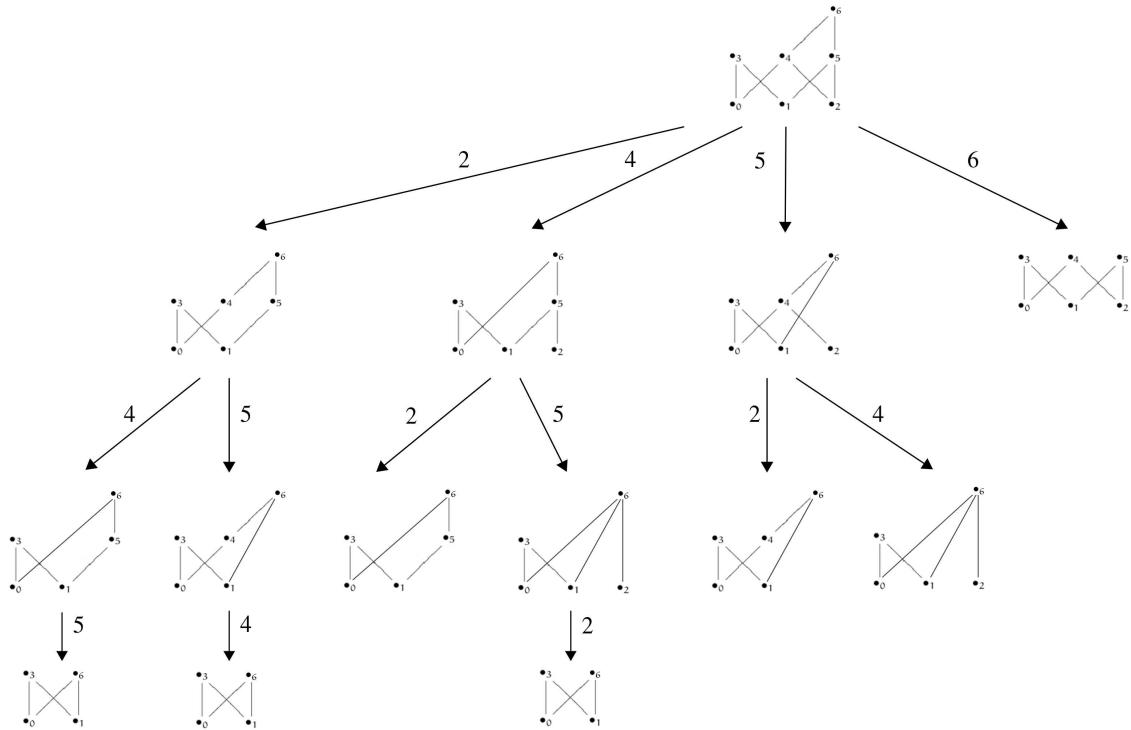


Figura 3.7: Árbol tácito podado asociado a la implementación de backtracking para hallar un weak core minimal de Z.

Un especial cuidado debe tenerse respecto de la definición de la variable `visitados`. La lista `visitados` debe ser actualizada progresivamente a medida que se recorren todos los subespacios de X a los cuales colapsa. Dado que la función `minwcore` actúa recursivamente, la variable `visitados` no debe ser propia de esta función si no que debe "trascenderla". Pero esto no se resuelve simplemente creándola fuera de la función `minwcore`, pues esta variable debe inicializarse en la lista vacía `cada vez` que calculamos el weak core minimal de un espacio. La solución entonces es denotar a la función definida en el programa 3.16 como `minwcoreaux` y crear una función principal `minwcore` que inicialice la variable `visitados` en la lista vacía y la declare como variable `global`; y luego ejecute la función auxiliar `minwcoreaux`.

Programa 3.17: `minwcore` (versión con lista `visitados`).

```

1 def minwcoreaux(X):
2     MX=X
3     for x in X.list():
4         if is_weak(x,X):
5             l=X.list()
6             l.remove(x)
7             S=X.subposet(l)

```

```

8     ll=set(S.list())
9     if not ll in visitados:
10        visitados.append(ll)
11        Y=minwcoreaux(S)
12        if Y.cardinality() < MX.cardinality(): MX=Y
13    return MX
14
15 def minwcore(X):
16     global visitados
17     visitados=[]
18     return minwcoreaux(X)

```

Una mejora adicional en la implementación consiste en utilizar la estructura diccionario para almacenar los subespacios visitados, en lugar de la estructura lista. El empleo de la estructura diccionario tiene la propiedad de que es lento quizás agregar elementos pero rápido buscarlos; ocurriendo el caso contrario para las listas.

Programa 3.18: minwcore (versión con diccionario visitados).

```

1 def minwcoreaux(X):
2     MX=X
3     for x in X.list():
4         if is_weak(x,X):
5             l=X.list()
6             l.remove(x)
7             S=X.subposet(l)
8             ll=tuple(S.list())
9             if not visitados.has_key(ll):
10                visitados[ll]=True
11                Y=minwcoreaux(S)
12                if Y.cardinality() < MX.cardinality(): MX=Y
13
14
15 def minwcore(X):
16     global visitados
17     visitados={}
18     return minwcoreaux(X)

```

Por último, queremos notar que, para cualquier espacio finito, si hallamos algún weak core de cardinal menor o igual que 5, entonces éste seguro será el de cardinal mínimo. En efecto, los espacios finitos weak minimales de cardinal menor que 6 son los que tienen diagrama de Hasse descripto por la siguiente figura.

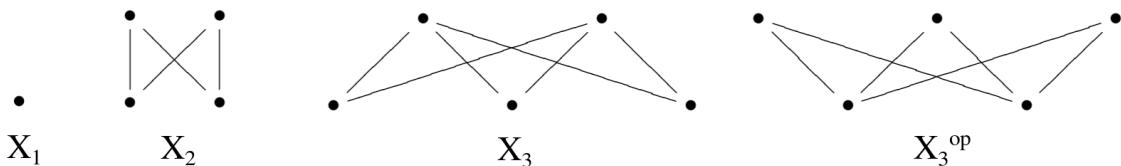


Figura 3.8: Weak minimales de cardinal menor que 6.

Notar que X_1 es modelo minimal del singleton, X_2 lo es de S^1 y X_3, X_3^{op} lo son de $S^1 \vee S^1$. Definiendo previamente la función

Programa 3.19: Función `weak_points`.

```

1 def weak_points (X):
2     l=[]
3     for x in X.list():
4         if is_weak(x,X): l.append(x)
5     return l

```

y agregando la siguiente línea de código entre las líneas 11 y 12 del programa anterior,

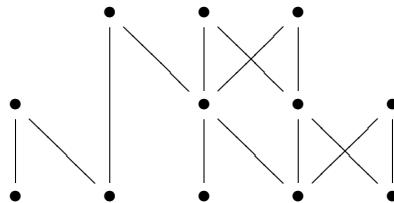
```
1 if weak_points(Y)==[] and Y.cardinality()<6: return Y
```

podemos identificar que el espacio tiene como weak core a uno de los modelos minimales de la Figura 3.8; que, luego, será el de cardinal mínimo.

Por ejemplo, para hallar el weak core minimal del espacio finito denominado "*Wallet*" (ver Figura 2.15), el programa 3.18 tarda 20.11 segundos, mientras que si implementamos este criterio de parada, tarda 0.06 segundos (ver Tabla 3.1).

Otra posible mejora en la implementación es lograr un programa que tenga "memoria" sobre los weak points que siguen vigentes ("se heredan") luego de remover alguno. Esto ocurre, por ejemplo, con los weak points no comparables con el que fue removido. Hemos implementado esta idea sin lograr mejoras significativas en los tiempos de ejecución.

A continuación exhibimos una tabla con los tiempos de ejecución de cada uno de los programas anteriores para los ejemplos: Z (ver 3.3.2) y Z^{op} W ("*Wallet*", ver 2.15), G (el "*Gato Tuerto*", ver 2.11), $G \vee G$ (ver 2.12), $\mathcal{X}(K_1)$ (ver 2.8) y el espacio finito X , elegido al azar, cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



| Espacio finito | Programa inicial | Programa con lista de visitados | Programa con diccionario de visitados | Programa con dicc. visitados + crit. de parada |
|--------------------|------------------|---------------------------------|---------------------------------------|--|
| Z | 0.14 s | 0.11 s | 0.10 s | 0.03 s |
| Z^{op} | 0.14 s | 0.10 s | 0.10 s | 0.05 s |
| W | 3278.97 s | 20.79 s | 20.11 s | 0.06 s |
| G | 21.12 s | 1.72 s | 1.71 s | 0.03 s |
| $G \vee G$ | > 12 h | 608.19 s | 531.00 s | 0.10 s |
| $\mathcal{X}(K_1)$ | 16.43 s | 2.75 s | 2.71 s | 3.50 s |
| X | 0.62 s | 0.43 s | 0.43 s | 0.56 s |

Tabla 3.1: Tabla comparativa de tiempos de ejecución de las distintas versiones de `minwcore`.

El criterio de parada es una herramienta excepcional para ahorrar tiempo en los espacios cuyo weak core minimal es alguno de los de la Figura 3.8 (como es el caso de los espacios Z , Z^{op} , W , G y $G \vee G$), pero incrementa levemente el tiempo de ejecución en los espacios que no verifican lo anterior (por ejemplo, en $\mathcal{X}(K_1)$ y X).

En todos los casos se observa una disminución en el tiempo de ejecución al implementar la variable `visitados` (siendo ésta más notable en los ejemplos con mayor cantidad de puntos).

Una vez en condiciones de hallar el weak core minimal de un espacio, un sencillo programa permite decidir si un espacio es colapsable o no.

Programa 3.20: Función `is_collapsible`.

```

1 def is_collapsible(X):
2     if is_contractible(X): return True
3     return minwcore(X).cardinality() == 1

```

La siguiente función, que denominamos `wcores`, toma como argumento un espacio finito X y devuelve la lista de los weak cores de X .

Programa 3.21: Función `wcores`.

```

1 def wcoresaux(X):
2     have_entered=False
3     for x in X.list():
4         if is_weak(x, X):
5             have_entered=True
6             l=X.list()
7             l.remove(x)
8             S=X.subposet(l)
9             ll=tuple(S.list())
10            if not visitados.has_key(ll):
11                visitados[ll]=True
12                wcoresaux(S)
13            if not have_entered and X not in WC: WC.append(X)
14
15 def wcores(X):
16     global visitados, WC
17     visitados={}
18     WC=[]
19     wcoresaux(X)
20     return WC

```

Notar que esta función es similar a `minwcore`. Las principales diferencias son:

- No aparece la variable `MX` de `minwcore`, pues no necesitamos llevar registro del weak core de menor cardinal.
- Creamos una variable global `WC`; que es una lista inicializada en `[]` a la que se le agregan sucesivamente los weak cores de X .
- Dentro de la función `wcoresaux`, creamos la variable booleana (local) `have_entered`. Esta variable permite detectar cuándo un subespacio no tiene weak points (es decir, es un weak core). Se inicializa con valor `False` (línea 2). El bucle que se encuentra entre las líneas 3 y 12 inclusive consiste en ejecutar, para cada elemento x del poset X , si `is_weak(x, X) == True`, cierto procedimiento. Si alguno de los puntos de X es weak point,

asigno `have_entered=True` (línea 5). Si no, "salgo" del bucle si modificar el valor de `have_entered`. Finalmente, en la línea 13, `not have_entered = True` si y sólo si `have_entered = False` si y sólo si `x` no tiene weak points.

Veamos el resultado de aplicar la función `wcores` al espacio `Z` del ejemplo 3.3.2.

```
Z=Poset({0:[3,4], 1:[3,5], 2:[4,5], 4:[6], 5:[6]})  
for X in wcores(Z):  
    X.show(figsize=[3,3], vertex_colors='white')
```

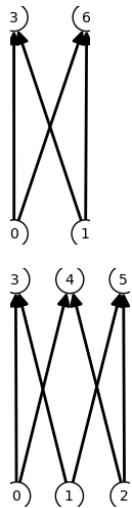


Figura 3.9: Aplicación de la función `wcores` en el Notebook de Sage.

Siguiendo el esquema básico del backtracking aplicado al problema de recorrer todas las maneras posibles de realizar reducciones de weak points en un espacio finito, la siguiente función, denominada `wtree`, devuelve en forma de árbol todos estas posibles sucesiones de weak points.

Programa 3.22: Función `wtree`.

```
1 def wtreeaux(X, pos):  
2     if X.cardinality()==1:  
3         l.append([X.list()[0].element, pos])  
4     for p in X.list():  
5         if is_weak(p, X):  
6             l.append([p.element, pos])  
7             lista=X.list()  
8             lista.remove(p)  
9             S=X.subposet(lista)  
10            n=l.index([p.element, pos])  
11            wtreeaux(S, n)  
12  
13 def wtree(X):  
14     global l  
15     l=[[]]  
16     wtreeaux(X, 0)  
17     d={}  
18     for e in l:  
19         if e!=[]:
```

```

20         key=tuple(e)
21         n=e[1]
22         value=tuple(l[n])
23         d[key]=[value]
24     g=Graph(d)
25     return g

```

Para ingresar un grafo, utilizamos la clase `Graph(datos)`, siendo `datos` el diccionario que asigna a cada vértice el conjunto de vértices que se conectan él a través de una arista.

En función auxiliar `wtreeaux(X, pos)`, los argumentos son un espacio finito `X` y un número `pos` que permite diferenciar weak points con la misma etiqueta que fueron hallados en distintos "momentos" del recorrido del árbol tácito mencionado anteriormente. En el ejemplo de la Figura 3.10, sólo la primer coordenada de los nodos es la etiqueta del weak point; la segunda. Notar la analogía de este árbol con el de la Figura 3.6.

En la misma línea de razonamiento, la siguiente función, que denominamos `wrutas`, devuelve la lista de rutas (descriptas por la sucesión de weak points) para llegar a los distintos weak cores.

Programa 3.23: Función `wrutas`.

```

1 def wrutasaux(X,lr):
2     if X.cardinality()==1:
3         rutas.append(lr+X.list())
4     have_entered=False
5     for x in X.list():
6         if is_weak(x,X):
7             have_entered=True
8             lista=X.list()
9             lista.remove(x)
10            S=X.subposet(lista)
11            wrutasaux(S,lr+[x])
12     if not have_entered:
13         rutas.append(lr)
14
15 def wrutas(X):
16     global rutas
17     rutas=[]
18     wrutasaux(X,[])
19     return rutas

```

La función auxiliar `wrutasaux(X,lr)` toma como argumentos un espacio finito `X` y una lista `lr`. `lr` consiste en la lista de rutas de weak points existentes para llegar al espacio `X` desde el espacio original (el argumento de `wrutas`). Devuelve la lista de rutas para llegar desde el espacio original a sus weak cores mediante un algoritmo recursivo.

Aplicamos las funciones anteriores al espacio `Z` del Ejemplo 3.3.2.

```
Z=Poset({0:[3,4], 1:[3,5], 2:[4,5], 4:[6], 5:[6]})  
wtree(Z).show(figsize=[6,6],vertex_colors='white')  
print wrutas(Z)
```

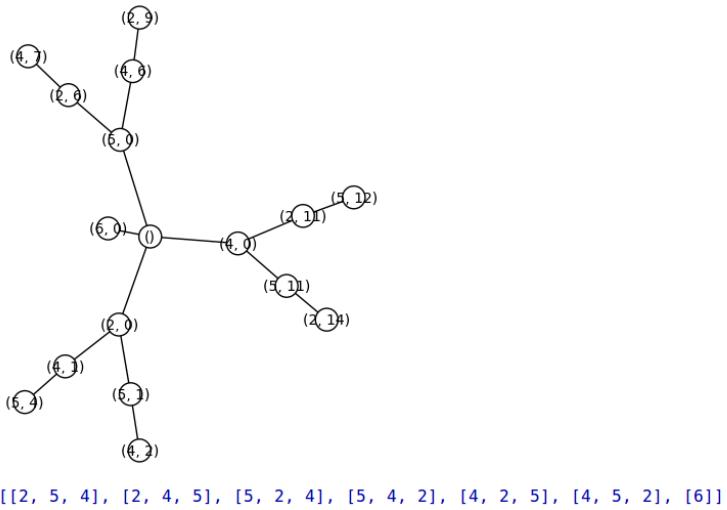


Figura 3.10: Aplicación de las funciones `wtree` y `wrutas` en el Notebook de Sage.

3.3.3 Reducción de un punto, arista o relación

Los métodos de reducción de espacios finitos no sólo se reducen a remover un punto, también puede removese una relación de cubrimiento o una arista del diagrama de Hasse. En [12] puede encontrarse un análisis de los dos últimos métodos. Las siguientes funciones calculan los espacios que se obtienen al realizar este tipo de reducciones.

Programa 3.24: Función point_reduction.

```
1 def point_reduction(X, p):  
2     elms=[x.element for x in X.list()]  
3     elms.remove(X(p).element)  
4     return X.subposet(elms)
```

Programa 3.25: Función edge_reduction.

```

1 def edge_reduction(X,e):
2     elms=[x.element for x in X.list()]
3     rels = [[x[0].element,x[1].element] for x in X.cover_relations()]
4     rels.remove([e[0],e[1]])
5     return Poset((elms,rels))

```

Programa 3.26: Función cover_relation_reduction.

```
1 def cover_relation_reduction(X,r):
2     elms=[x.element for x in X.list()]
3     rels = [[x[0].element,x[1].element] for x in X.cover_relations()]
4     for x in rels:
5         if r[1]==x[0]:
6             rels.append([r[0],x[1]])
7         if r[0]==x[1]:
```

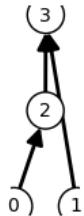
```

8         rels.append([x[0],r[1]])
9     rels.remove(r)
10    return Poset((elms,rels))

```

Realizamos una aplicación de las funciones anteriores.

```
X=Poset({0:[2], 1:[3], 2:[3]})  
X.show(figsize=[2,2], vertex_colors='white')
```



```
point_reduction(X,2).show(figsize=[1.5,1.5], vertex_colors='white')
```



```
edge_reduction(X,[2,3]).show(figsize=[1.5,1.5], vertex_colors='white')
```



Figura 3.11: Aplicación de las funciones de reducción en el Notebook de Sage.

3.4 Operaciones entre espacios finitos

Las operaciones entre espacios finitos también pueden codificarse en forma de funciones de Sage.

En primer lugar, exponemos dos versiones de la función `join`. En la primera, se trabajan las relaciones de cubrimiento de cada poset para obtener las del join. En la segunda, se trabaja con los diagramas de Hasse de cada poset para obtener el diagrama de Hasse del join, que luego se codifica en un poset (utilizamos en esta ocasión que un poset también puede ser ingresado en Sage a partir de un digrafo acíclico).

Programa 3.27: Función `join` (versión 1).

```

1 def join (X,Y):
2     elms=[(x.element,0) for x in X.list()]+[(y.element,1) for y in Y.list()]
3     rels=[[ (rx[0].element,0),(rx[1].element,0)] for rx in X.cover_relations() ] +
4     [[ (ry[0].element,1),(ry[1].element,1)] for ry in Y.cover_relations() ] +

```

```

5 [[(rx[1].element,0),(ry[0].element,1)] for rx in X.cover_relations()]
6 for ry in Y.cover_relations():
7     return Poset((elms, rels))

```

Programa 3.28: Función `join` (versión 2).

```

1 def join(X, Y):
2     X = X.hasse_diagram()
3     X.relabel(dict([(x, (x,0)) for x in X.vertices()]))
4     Y = Y.hasse_diagram()
5     Y.relabel(dict([(y, (y,1)) for y in Y.vertices()]))
6     G = X.disjoint_union(Y)
7     G.add_edges([(x,y) for x in X.vertices() for y in Y.vertices()])
8     return Poset(G)

```

Empleamos la función anterior en $X = Y = G$, siendo G el poset denominado el *Gato Tuerto*.

```

G=Poset({0:[3,4], 1:[3,5], 2:[4,5], 3:[6,7], 4:[6,7], 5:[7]})  

join(G,G).show(figsize=[6,6], vertex_colors='white')

```

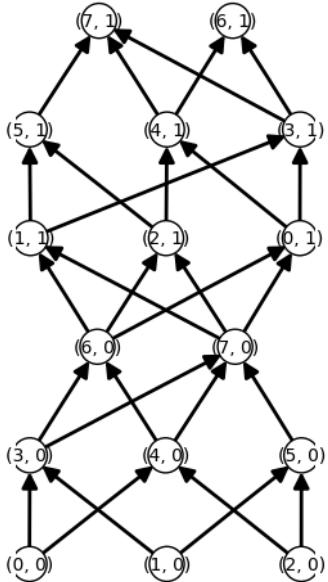


Figura 3.12: Aplicación de la función `join` en el Notebook de Sage.

La siguiente función, que denominamos `cartesian_product`, calcula el producto cartesiano de dos espacios finitos, creando la lista de sus elementos y relaciones de cubrimiento a partir de los elementos y relaciones de cubrimiento de cada uno. Para evitar ambigüedades en los elementos, a los elementos de X se les agrega una segunda coordenada 0, y a los de Y una segunda coordenada 1.

Programa 3.29: Función `cartesian_product`.

```

1 def cartesian_product (X,Y):
2     elms=[(x.element,y.element) for x in X.list() for y in Y.list()]

```

```

3     rels=[]
4     for rx in X.cover_relations():
5         for ry in Y.cover_relations():
6             rels.append([(rx[0].element,ry[0].element),(rx[1].element,ry[1].element)])
7             rels.append([(rx[0].element,ry[0].element),(rx[1].element,ry[0].element)])
8             rels.append([(rx[0].element,ry[1].element),(rx[1].element,ry[1].element)])
9             rels.append([(rx[0].element,ry[0].element),(rx[0].element,ry[1].element)])
10            rels.append([(rx[1].element,ry[0].element),(rx[1].element,ry[1].element)])
11
12     return Poset ((elms, rels))

```

Empleamos la función anterior en los espacios $X = Y = G$.

```
cartesian_product(G,G).show(figsize=[14,14], vertex_colors='white')
```

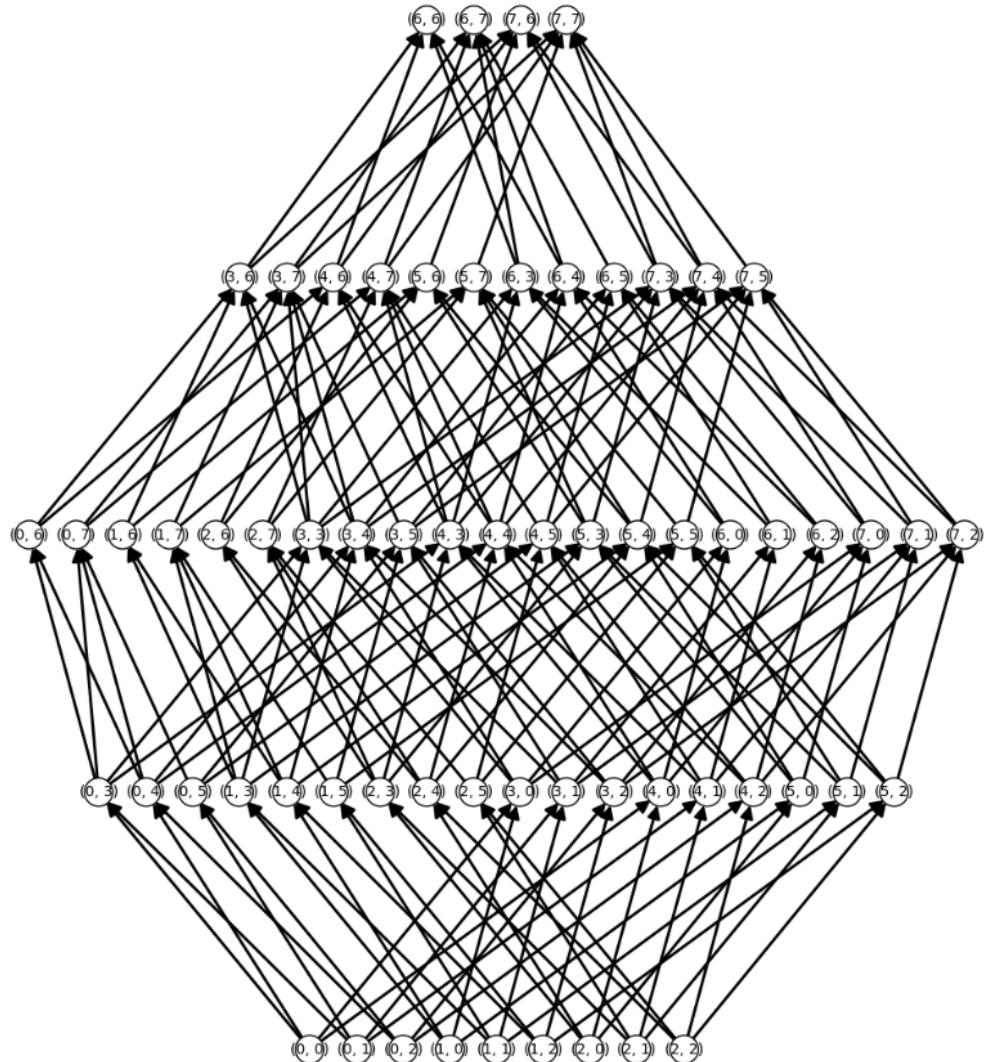


Figura 3.13: Aplicación de la función `cartesian_product` en el Notebook de Sage.

La siguiente función, denominada `wedge`, toma como argumentos una lista `Posets` de espacios finitos y una lista `puntos` de puntos, de modo que $\text{puntos}[i] \in \text{Posets}[i]$ para todo $0 \leq i \leq \text{len}(\text{Posets})$. Devuelve el wedge de esos espacios finitos en los puntos indicados; notando por $*$ a la clase de los puntos identificados. Procede de modo análogo a la función anterior, creando la lista de los elementos y relaciones de cubrimiento del wedge a partir de los elementos y relaciones de cubrimiento de cada uno.

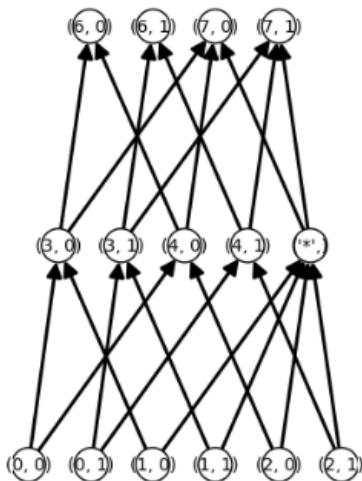
Programa 3.30: Función `wedge`.

```

1 def wedge(Posets, puntos):
2     n=len(Posets)
3     elms=[]
4     elms.append(('*',))
5     for i in range(n):
6         L=Posets[i].list()
7         L.remove(Posets[i](puntos[i]))
8         for x in L: elms.append((x.element,i))
9     rels=[]
10    for i in range(n):
11        for r in Posets[i].cover_relations():
12            if r[0]!=Posets[i](puntos[i]) and r[1]!=Posets[i](puntos[i]):
13                rels.append([(r[0].element,i),(r[1].element,i)])
14            if r[0]==Posets[i](puntos[i]):
15                rels.append([('*',), (r[1].element,i)])
16            if r[1]==Posets[i](puntos[i]):
17                rels.append([(r[0].element,i), ('*',)])
18    return Poset((elms,rels))

```

```
wedge([G,G],[5,5]).show(figsize=[5,5], vertex_colors='white')
```



3.5 Random posets

En esta sección, realizaremos varias implementaciones de algoritmos que generan posets conexos "al azar".

La función de Sage `Posets.RandomPoset(n, p)` ($n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$) devuelve un poset conexo de n vértices. Este poset se crea a partir de la construcción de un digrafo acíclico.² El digrafo se fabrica como se describe a continuación. Se comienza con un conjunto discreto de n vértices. Luego, se itera el siguiente procedimiento: dado un par de vértices (x, y) , si al agregar la arista de x en y no se genera un ciclo, se agrega una arista de x a y con probabilidad p . Desde luego, el output de esta función no necesariamente es conexo.

```
Posets.RandomPoset(30,0.05).show(figsize=[8,8], vertex_colors='white')
```

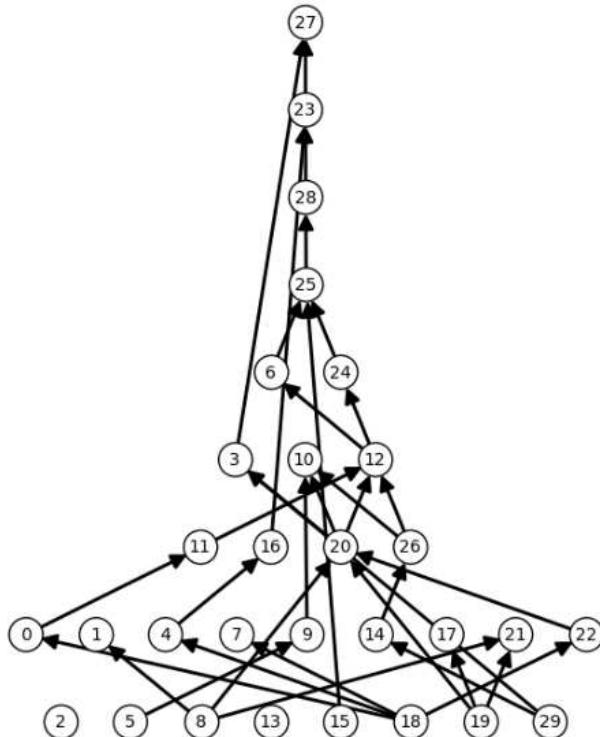


Figura 3.15: Aplicación de la función `Posets.RandomPoset` en el Notebook de Sage.

Mediante un simple programa, que itera la función anterior hasta hallar un poset conexo, podemos exigir que lo sea.

Programa 3.31: Función `random_c_poset`.

```
1 import random
2 def random_c_poset(n, p):
3     bool=False
4     while bool==False:
```

²El código de esta función se encuentra en el código fuente de Sage.

```

5      P=Posets.RandomPoset(n,p)
6      G= P.hasse_diagram()
7      bool=G.is_connected()
8
9      return P

```

```
random_c_poset(30,0.05).show(figsize=[8,8], vertex_colors='white')
```

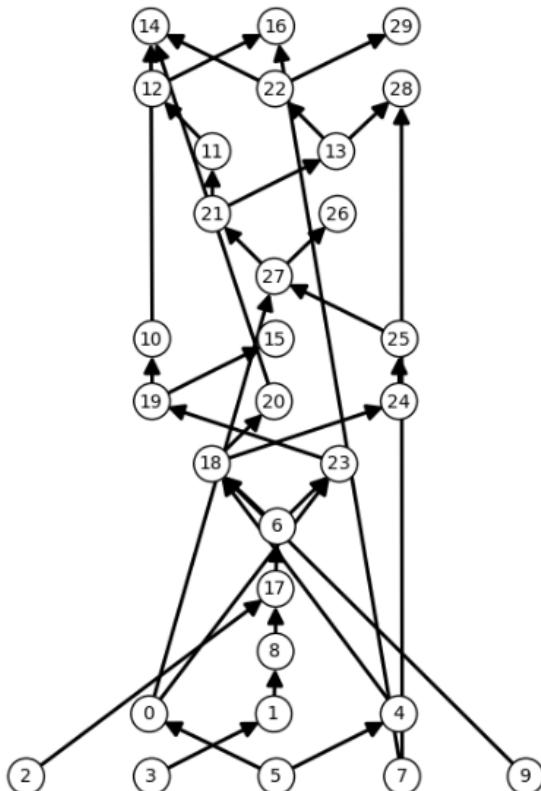


Figura 3.16: Aplicación de la función `random_c_poset` en el Notebook de Sage.

A continuación desarrollamos la función `random_c_g_poset(l, n, k, p)` ($l, n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq l \cdot k$, $p \in [0, 1]$), que devuelve un poset conexo graduado (ver definición 2.2.6) de n vértices y l niveles, con al menos k vértices en cada nivel. El parámetro p está relacionado con la probabilidad de que aparezca cada potencial arista en el diagrama de Hasse una vez organizados los vértices.

Programa 3.32: Función `random_c_g_poset`.

```

1 import random
2 def random_g_poset(l,n,k,p):
3     b=[1 for x in range(n-k*l)] + [0 for x in range(l-1)]
4     random.shuffle(b)
5     sum=[0]
6     for i in range (1,n-k*l+l-1):
7         sum.append(sum[i-1]+b[i])

```

```

8     niveles= []
9     u=0
10    if sum[0]==0:
11        niveles.append(k)
12    for i in range (n-k*l+l-1-1):
13        if sum[i]==sum[i+1]:
14            niveles.append(sum[i]-u+k)
15            u=sum[i]
16    niveles.append(sum[n-k*l+l-1-1]-u+k)
17    N=[]
18    N.append(range(niveles[0]))
19    s=0
20    for i in range(l-1):
21        s=s+niveles[i]
22        N.append([j+s for j in range (niveles[i+1])])
23    rels=[]
24    for i in range (l-1):
25        for y in N[i+1]:
26            Rels=[]
27            b=False
28            for x in N[i]:
29                Rels.append([x,y])
30                if random.random()<p:
31                    rels.append([x,y])
32                    b=True
33            if b==False: rels.append(random.choice(Rels))
34    P=Poset((range(n),rels))
35    return P
36
37 def random_g_c_poset(l,n,k,p):
38     if n==1 and n>1: return 'no existe'
39     else:
40         bool=False
41         while bool==False:
42             P=random_g_poset(l,n,k,p)
43             G= P.hasse_diagram()
44             bool=G.is_connected()
45     return P

```

La función `random_g_poset` construye un poset conexo graduado "al azar", y luego, mediante el mismo algoritmo utilizado en el Programa 3.31, la función `random_g_c_poset` itera la función anterior hasta obtener el primer poset conexo.

El programa de `random_g_poset` construye el poset que será su output en dos grandes pasos. En el primero (líneas 3 a 22 inclusive), organiza los vértices en los niveles. En el segundo (líneas 23 a 33 inclusive), agrega aristas entre los vértices de niveles consecutivos respetando la probabilidad p .

Para organizar los n vértices en los l niveles, procedemos como sigue:

1. (Líneas 3-4) Pensamos a los vértices como bolitas y a los niveles como cajas; y entonces, a las disposiciones de los vértices en los niveles como secuencias de n símbolos \bullet y $l-1$ símbolos $|$. Luego, una disposición al azar de los vértices en los niveles de modo que en cada nivel haya al menos k vértices es una permutación al azar de la secuencia



Codificando a \bullet con un 1 y a $|$ con un 0, la lista b es justamente

$$[11 \cdots 1 \underbrace{00 \cdots 0}_{1-1}]_{n-1 \cdot k}$$

La función `random.shuffle` está incorporada en Sage y devuelve una permutación al azar de la lista que toma como argumento.

2. (Líneas 5-7) La lista `sum` tiene en el lugar i la suma de los números de b entre los lugares 0 e i inclusive. Notar que hay un cero en el lugar i -ésimo de b si y sólo si $sum[i-1] = sum[i]$.
3. (Líneas 8-16) La lista `nivel` tiene en el lugar j la cantidad de vértices del nivel j . Cada lugar se construye detectando cuándo hay dos lugares de `sum` con el mismo valor, y luego restando a ese valor la cantidad de vértices de los niveles anteriores, que está almacenado en la variable `anteriores`. Un especial cuidado debe tenerse con el caso en el cual $b[0] = 0$, que significa que el primer nivel tiene k vértices (líneas 10 y 11). Dado que el nivel $1-1$ no está delimitado por ceros a ambos lados, tiene un tratamiento especial (línea 16).
4. (Líneas 17-22) La lista `N` contiene en el lugar i la lista de vértices en el nivel i . Asumiendo que los vértices de poset son $0, 1, \dots, n-1$, los niveles quedan distribuidos, según `N`, como sigue:

```
N[0]=[0, 1, ..., nivel[0]-1];
N[1]=[nivel[0], nivel[0] + 1, ..., nivel[0] + nivel[1]-1];
...
N[k] = [nivel[0] + nivel[1]+...+ nivel[k-1], ..., n-1].
```

Para agregar aristas (es decir, relaciones de cubrimiento) entre vértices de niveles consecutivos, procedemos como se describe a continuación. Creamos la lista `rels`, que finalmente será la lista de las relaciones de cubrimiento que efectivamente pertenecen al poset; la inicializamos en la lista vacía `[]`. Luego, para $0 \leq i \leq 1-1$ y para vértice y del nivel $i+1$:

1. Creamos la lista `ReLs`, que contiene todas las relaciones posibles entre y y un vértice del nivel i . Para cada potencial relación, generamos un número al azar entre 0 y 1 (mediante la función `random.random()` de Sage). Agregamos esa relación a `rels` si y sólo si ese número es menor que p .
2. Para evitar que no haya ninguna relación entre y y algún vértice del nivel i , creamos la función booleana `b`, que vale `False` al finalizar el bucle del punto anterior si y sólo si no agregamos ninguna relación a `rels`. En ese caso, elegimos una relación de la lista `ReLs` al azar, mediante la función de Sage `random.choice`.

En la siguiente figura exhibimos un ejemplo del poset que devuelve la función anterior para los siguientes valores: $1 = 4$, $n = 30$, $k = 4$, $p = 0.2$.

```
random_g_c_poset(4,30,4,0.2).show(figsize=[8,8], vertex_colors='white')
```

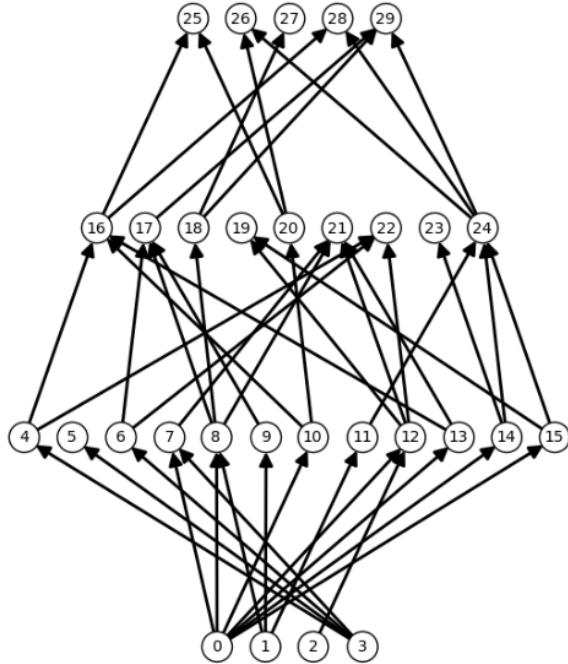


Figura 3.17: Aplicación de la función `random_g_c_poset` en el Notebook de Sage.

Capítulo 4

Conjuntos compatibles

Nota: Todos los espacios finitos con los que trabajaremos de aquí en adelante serán T_0 ; por simplicidad lo omitiremos en los enunciados.

4.1 Introducción

Hemos visto que, dado un espacio finito, en general no hay unicidad de sus weak cores, ni siquiera fijando su cardinal. Consideremos la función

$$\begin{aligned}\mathcal{W} : \{\text{espacios finitos}\} &\longrightarrow \{\text{conjuntos finitos de e.t.f. weak minimales simplemente equivalentes}\} \\ X &\longmapsto \text{weak cores}(X)\end{aligned}$$

Claramente \mathcal{W} no es inyectiva. Un problema interesante consiste en analizar su sobreyectividad; es decir, si dado un conjunto finito de e.t.f. weak minimales simplemente equivalentes, **siempre** existe un espacio X cuyo conjunto de weak cores sea el anterior.

Por otra parte, recordar que, de manera análoga a la teoría de homotopía simple clásica, si dos espacios finitos son tales que se puede llegar de uno a otro mediante una sucesión finita de colapsos y expansiones elementales, entonces se pueden efectuar primero todas las expansiones y luego todos los colapsos (ver 2.6.4). La afirmación anterior se generaliza, mediante un razonamiento inductivo, a una cantidad finita de espacios finitos simplemente equivalentes.

Luego, dado un conjunto $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de espacios finitos weak minimales simplemente equivalentes, siempre existe Z tal que $\text{weak cores}(Z) \supseteq \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. La sobreyectividad de \mathcal{W} se refiere a que valga, para algún Z , la igualdad. Veremos que \mathcal{W} no es sobreyectiva; y llamaremos *compatibles* a los conjuntos de la imagen de \mathcal{W} .

El estudio de conjuntos compatibles tiene como objetivo entender mejor la teoría de colapsabilidad, que se encuentra ligada a varias conjeturas importantes, como la de Andrew-Curtis o la de Zeeman.

A lo largo de este capítulo realizaremos un análisis de los conjuntos compatibles. Lo iniciamos con casos particulares para conocer la dinámica de las demostraciones; y lo finalizamos con resultados generales, muchos de ellos concernientes a operaciones tales como cociente, wedge, join y producto de espacios finitos.

Los resultados de este capítulo son originales.

4.2 Definiciones

En esta sección estudiaremos las definiciones que nos permitirán luego distinguir en qué casos la respuesta a nuestra pregunta es afirmativa, y en cuáles no.

Comenzamos notando que, para cualquier conjunto finito de espacios finitos simplemente equivalentes, existe un espacio que colapsa a todos ellos.

Teorema 4.2.1. *Sean $n \geq 2$, y X_1, X_2, \dots, X_n espacios finitos simplemente equivalentes. Entonces, existe un espacio finito Z tal que $Z \searrow X_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Procedemos por inducción en n .

Para $n = 2$, la afirmación es el resultado 2.6.4.

Dados $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ espacios finitos simplemente equivalentes, por hipótesis induc-tiva existe un espacio finito \bar{Z} tal que $\bar{Z} \searrow X_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Claramente, $\bar{Z}, X_1, X_2, \dots, X_n$ son simplemente equivalentes. Luego, por transitividad, \bar{Z}, X_{n+1} lo son y el resultado se obtiene aplicando el caso $n = 2$. \square

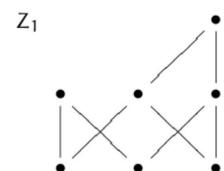
Definición 4.2.2. Dados X_1, X_2, \dots, X_n ($n \geq 2$) espacios finitos weak minimales simplemente equivalentes, diremos que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es un conjunto *compatible* si existe un espacio finito Z tal que $\text{weak cores}(Z) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Llamaremos a Z *compatibilizador* de $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Ejemplo 4.2.3. A continuación exhibimos ejemplos de conjuntos compatibles; con un conjunto compatibilizador Z para cada uno de ellos.

Nota: Un espacio compatibilizador tendrá como weak cores a espacios finitos **homeomorfos** a los del conjunto compatible. Dado que dos espacios finitos son homeomorfos si y sólo si uno de ellos se obtiene reetiquetando los puntos del otro; al describir un conjunto compatible no será necesario etiquetar los puntos de los espacios que contiene.

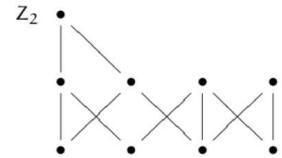
$$(1) \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ | \times | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet & \bullet \\ | \times | & | \times | \\ \bullet & \bullet \end{array} \right\}$$



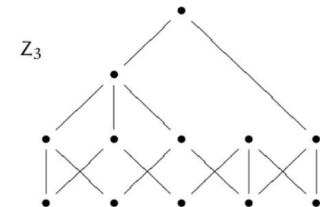
Resulta claro que el conjunto anterior es compatible con compatibilizador Z luego del análisis realizado en el capítulo anterior.

Dejamos como tarea para el lector los chequeos pertinentes a los siguientes ejemplos; todos pueden realizarse con la función `wcores` (Programa 3.21). De todos modos, en este capítulo se verán resultados generales que tendrán a la mayoría de ellos como caso particular.

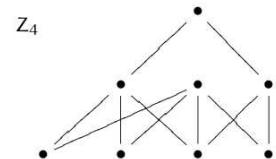
$$(2) \left\{ \begin{array}{c} \bullet | \times | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \times | \times | \bullet \end{array} \right. , \left. \begin{array}{c} \bullet | \times | \times | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \times | \times | \times | \bullet \end{array} \right\}$$



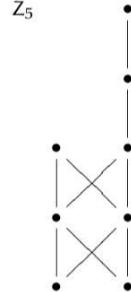
$$(3) \left\{ \begin{array}{c} \bullet | \times | \times | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \times | \times | \times | \bullet \end{array} \right. , \left. \begin{array}{c} \bullet | \times | \times | \times | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \times | \times | \times | \times | \bullet \end{array} \right. , \left. \begin{array}{c} \bullet | \times | \times | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \times | \times | \times | \bullet \end{array} \right\}$$



$$(4) \left\{ \begin{array}{c} \bullet | \times | \times | \times | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \times | \times | \times | \times | \bullet \end{array} \right. , \left. \begin{array}{c} \bullet | \times | \times | \times | \times | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \times | \times | \times | \times | \times | \bullet \end{array} \right\}$$



$$(5) \left\{ \begin{array}{c} \bullet | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \bullet \end{array} \right. , \left. \begin{array}{c} \bullet | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \bullet \end{array} \right. , \left. \begin{array}{c} \bullet | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \bullet \\ \bullet | \times | \bullet \end{array} \right\}$$



Existen conjuntos no compatibles, como se muestra en el siguiente

Ejemplo 4.2.4. Sea D una triangulación del Dunce Hat. Veamos que el conjunto $\{*, \mathcal{X}(D)\}$ no es compatible.

Por 3.3.3, $*$ y $\mathcal{X}(D)$ son simplemente equivalentes.

Además, son weak minimales. La afirmación es clara para $*$. Respecto de $\mathcal{X}(D)$, si tuviera algún weak point x , entonces

$$\mathcal{X}(D) \searrow^e \mathcal{X}(D) \setminus \{x\}.$$

Luego, por teorema 2.6.7

$$D' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(D)) \setminus \mathcal{K}(\mathcal{X}(D) \setminus \{x\}) = \mathcal{K}(\mathcal{X}(D)) \setminus \{x\} = D' \setminus \{x\}.$$

D' es la subdivisión baricéntrica de D ; en particular, una triangulación del Dunce Hat. Dado que cualquier triangulación del Dunce Hat no tiene caras libres, la existencia de un weak point en $\mathcal{X}(D)$ generaría una contradicción.

El conjunto $\{*, \mathcal{X}(D)\}$ no es compatible. En efecto, sea Z un espacio finito T_0 tal que $* \nearrow Z \setminus \mathcal{X}(D)$. En particular, $Z \searrow Y \searrow *$, para algún espacio finito T_0 Y de altura 1. Claramente, $|Y| \geq 2$.

Puesto que los espacios finitos de altura 1 colapsables colapsan a todos sus puntos (ver 2.5.8), $\text{weak cores}(Z) \supset \{*_1, *_2\}$. Luego, $\# Z$ compatibilizador de $\{*, \mathcal{X}(D)\}$.

Dado $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ un conjunto compatible, existe algún espacio compatibilizador Z . Resulta natural cuestionar si existe algún tipo de unicidad en Z . La siguiente observación muestra que: no hay, en general, unicidad en el cardinal de los espacios compatibilizadores; y fijado un número natural, no hay, en general, unicidad salvo homeomorfismo en los espacios compatibilizadores de ese cardinal.

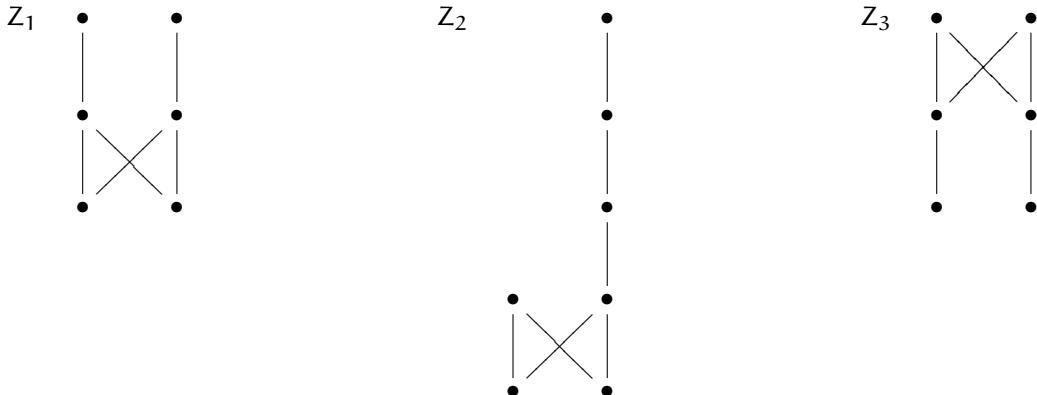
Observación 4.2.5. Si $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es un conjunto compatible, entonces

- (i) no necesariamente $\exists! k \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall Z$ compatibilizador de $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $|Z| = k$;
- (ii) dado $k = |Z| \in \mathbb{N}$ con Z compatibilizador de $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, no necesariamente $\forall \bar{Z}$ compatibilizador de $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ tal que $|\bar{Z}| = k$ resulta \bar{Z} homeomorfo a Z .

Basta considerar el conjunto compatible

$$\left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ | \diagup \diagdown | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \diagup \diagdown | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \diagup \diagdown | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \diagup \diagdown | \\ \bullet \end{array} \right\}.$$

Los siguientes espacios finitos son compatibilizadores del conjunto en cuestión.



Sin embargo,

- (i) Z_1 y Z_2 tienen distinto cardinal;
- (ii) Z_1 y Z_3 tienen el mismo cardinal pero no son homeomorfos.

Más ejemplos que ilustran la falta de unicidad salvo homeomorfismo fijado un cardinal pueden encontrarse en los conjuntos (1), (2) y (5) del Ejemplo 4.2.3. Para estos conjuntos, tanto el espacio Z_i exhibido como Z_i^{op} (con $i \in \{1, 2, 5\}$) son espacios compatibilizadores. Claramente tienen el mismo cardinal; sin embargo, no son homeomorfos.

4.3 Ejemplos

En esta sección mostraremos ejemplos de conjuntos compatibles. Tendrán un pequeño grado de generalidad que permitirá comprender la dinámica del razonamiento que realizamos para

demostrar que un conjunto es compatible. Además, analizaremos la construcción y el cardinal del espacio compatibilizador propuesto en cada caso.

Dado $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, notamos X_k^1 al modelo finito de S^1 con $2k$ puntos cuyo diagrama de Hasse es:

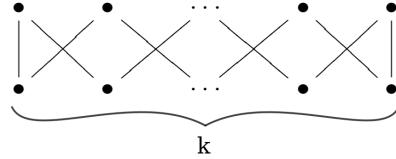


Figura 4.1: X_k^1 .

Observación 4.3.1. Por ser modelos de S^1 , $X_k^1 \xrightarrow{\text{we}} X_j^1 \forall k \leq j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Luego, $\mathcal{K}(X_k^1) \xrightarrow{\text{he}} \mathcal{K}(X_j^1)$. Pero dado que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, por 1.4.16, $X_k^1 \nearrow X_j^1$. Aplicando 4.2.1, existe Z tal que $X_k^1 \nearrow Z \searrow X_j^1$. Más específicamente, existe Z tal que $|Z| = |X_j^1| + 1$ que cumple lo anterior. Lo describimos a continuación.

Sea $Z := X_j^1 \cup \{*\}$.

Consideramos un subconjunto de $j - k + 1$ maximales de X_j^1 tales que el down set que generan sea conexo. Por ejemplo, si etiquetamos a los elementos de X_j^1 como indica la Figura 4.2 (seguiremos llamando a ese espacio, por abuso de notación, X_j^1), consideramos el subconjunto de maximales $Q = \{y_k, \dots, y_j\} \subset X_j^1$.

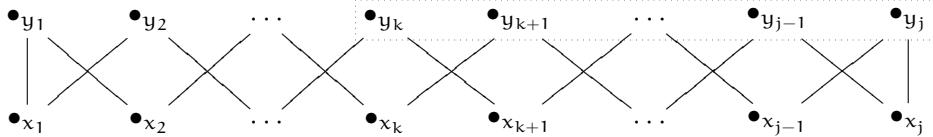


Figura 4.2: X_j^1 etiquetado.

Notar que

$$U_Q := \bigcup_{i=k}^j U_{y_i} = \{x_{k-1}, x_k, \dots, x_j, y_k, \dots, y_j\}.$$

Definimos el orden en Z del siguiente modo:

- entre elementos de X_j^1 , el inducido por ese poset;
- $x \leq *$ si y sólo si $x \in U_Q \cup \{*\}$.

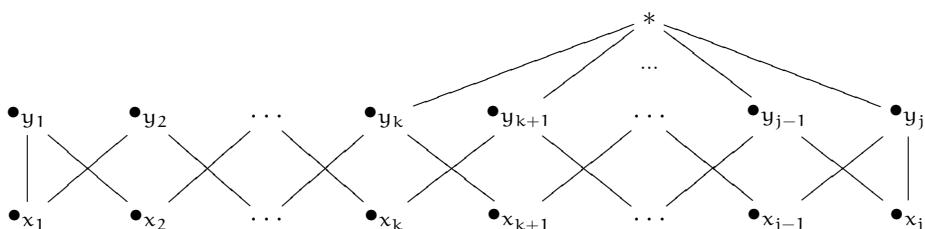


Figura 4.3: Z .

Por un lado, como $k \geq 2$, \hat{U}_*^Z es contráctil (si $k = 1$, $\hat{U}_*^Z = X_j^1$, que no es contráctil).

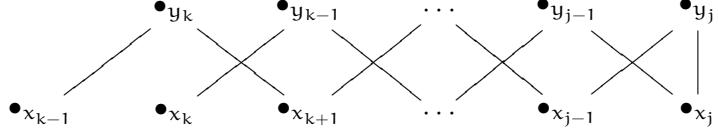


Figura 4.4: \hat{U}_*^Z .

Luego, $*$ es down weak point y $Z \searrow X_j^1$.

Por el otro, $Z \searrow X_k^1$. En efecto, $Z \searrow Z \setminus \{y_j\} \searrow Z \setminus \{y_j, x_j\} \searrow Z \setminus \{y_j, x_k, y_{j-1}\} \searrow Z \setminus \{y_j, x_k, y_{j-1}, x_{j-1}\} \searrow \dots \searrow Z \setminus \{y_j, x_j, \dots, y_{k+1}, x_{k+1}\} \searrow Z \setminus \{y_j, x_j, \dots, y_{k+1}, x_{k+1}, y_k\} = X_k^1$.

El espacio Z descrito anteriormente tiene una propiedad más fuerte: tiene como **únicos** weak cores a X_k^1 y a X_j^1 .

Proposición 4.3.2. $\forall k \leq j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, el conjunto $\{X_k^1, X_j^1\}$ es compatible. Más aún, existe Z compatibilizador del conjunto anterior tal que $|Z| = |X_j^1| + 1$.

Demostración. Sean $k \leq j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Simplemente debemos encontrar un poset (Z, \leq) tal que $\text{weak cores}(Z) = \{X_k^1, X_j^1\}$.

Sea Z el espacio finito de la Figura 4.21. Verifica que $\{X_k^1, X_j^1\} \subseteq \text{weak cores}(Z)$.

Para probar la igualdad, basta notar que:

- $\text{weak points}(Z) = \{y_k, \dots, y_j, x_{k+1}, \dots, x_j, *\}$ (ver Figura 4.5);

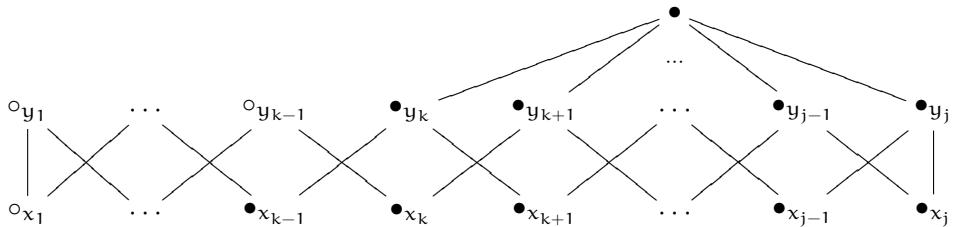


Figura 4.5: Weak points de Z , notados con \bullet .

- $\text{weak points}(Z \setminus P) = \{y_k, \dots, y_j, x_{k+1}, \dots, x_j\} \setminus P$, $\forall P \subset \{y_k, \dots, y_j, x_{k+1}, \dots, x_j\}$, $P \neq \emptyset$. \square

Dados $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, denotamos X_{k_1, k_2}^2 al modelo finito de $S^1 \vee S^1$ con $2(k_1 + k_2 - 1)$ puntos cuyo diagrama de Hasse es el de la siguiente figura. Se obtiene de identificar una arista de $X_{k_1}^1$ con una arista de $X_{k_2}^1$.

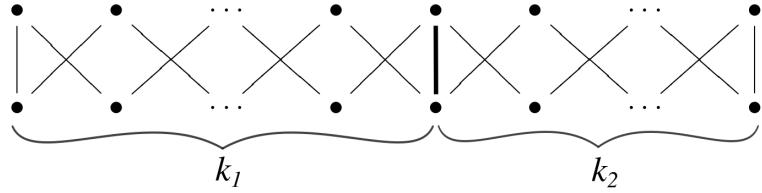


Figura 4.6: X_{k_1, k_2}^2 .

El siguiente resultado es el análogo de la proposición 4.3.2 .

Proposición 4.3.3. $\forall k_1, k_2, j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, los conjuntos $\{X_{k_1, k_2}^2, X_{k_1, j}^2\}$ y $\{X_{k_1, k_2}^2, X_{j, k_2}^2\}$ son compatibles. Más aún, en cada caso existe Z compatibilizador con exactamente un elemento más que el espacio de mayor cardinal del conjunto que compatibiliza.

*Demuestra*cción. Sean $k_1, k_2, j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, con $k_2 \leq j$. Veamos que el conjunto $\{X_{k_1, k_2}^2, X_{k_1, j}^2\}$ es compatible (el razonamiento para el otro conjunto es análogo).

De manera similar a la demostración de la proposición anterior, sea $Z := X_{k_1, j}^2 \cup \{*\}$.

Consideramos un subconjunto de $j - k_2 + 1$ maximales de $X_{k_1, j}^2$ tales que el down set que generan sea conexo y cada uno cubra exactamente dos puntos. Por ejemplo, si etiquetamos a los elementos de $X_{k_1, j}^2$ como indica la Figura 4.7. consideramos el subconjunto de maximales $Q = \{y_{k_2}, \dots, y_j\} \subset X_{k_1, j}^2$.

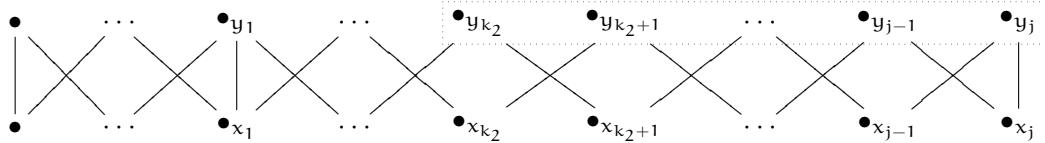


Figura 4.7: $X_{k_1, j}^2$ etiquetado.

Notar que

$$U_Q := \bigcup_{i=k_2}^j U_{y_i} = \{x_{k_2-1}, x_{k_2}, \dots, x_j, y_{k_2}, \dots, y_j\}.$$

El orden en Z es:

- entre elementos de $X_{k_1, j}^2$, el inducido por ese poset;
- $x \leq *$ si y sólo si $x \in U_Q \cup \{*\}$.

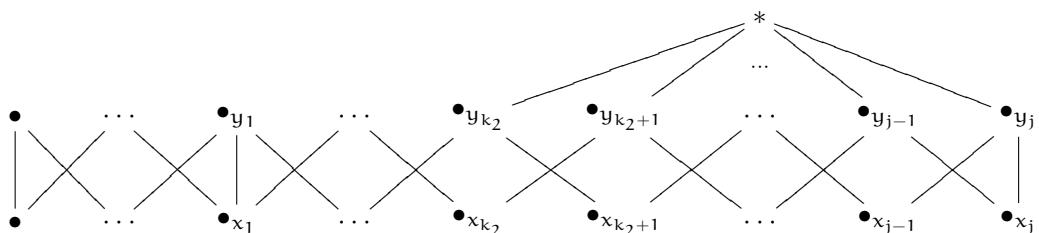


Figura 4.8: Z .

Se prueba que $\text{weak cores}(Z) = \{X_{k_1, k_2}^2, X_{k_1, j}^2\}$ con un razonamiento análogo al realizado en la demostración de 4.3.2. \square

Sea Y^2 el siguiente modelo de $S^1 \vee S^1$:

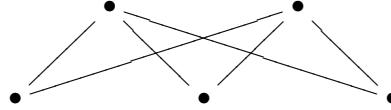


Figura 4.9: Y^2 .

Proposición 4.3.4. $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, el conjunto $\{Y^2, X_{k_1, k_2}^2\}$ es compatible. Más aún, existe un espacio compatibilizador Z tal que $|Z| = |X_{k_1, k_2}^2| + 1$.

*Demuestra*ón. Sea $Z := X_{k_1, k_2}^2 \cup \{*\}$.

Consideramos Q el subconjunto de maximales de X_{k_1, k_2}^2 que cubren exactamente 2 puntos. Por ejemplo, si etiquetamos a los elementos de $X_{k_1, j}^2$ como indica la Figura 4.10, entonces $Q = \{y_1, y_2, \dots, y_{k_1-1}, y'_1, \dots, y'_{k_2}\} \subset X_{k_1, k_2}^2$.

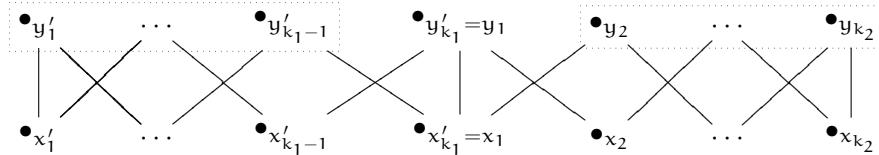


Figura 4.10: X_{k_1, k_2}^2 etiquetado.

Notar que

$$U_Q := \left(\bigcup_{i=1}^{k_1-1} U_{y'_i} \right) \cup \left(\bigcup_{i=2}^{k_2} U_{y_i} \right) = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_{k_1} = x_1, x_2, \dots, x_{k_2}\} \cup Q.$$

El orden en Z es:

- entre elementos de X_{k_1, k_2}^2 , el inducido por ese poset;
- $x \leq *$ si y sólo si $x \in U_Q \cup \{*\}$.

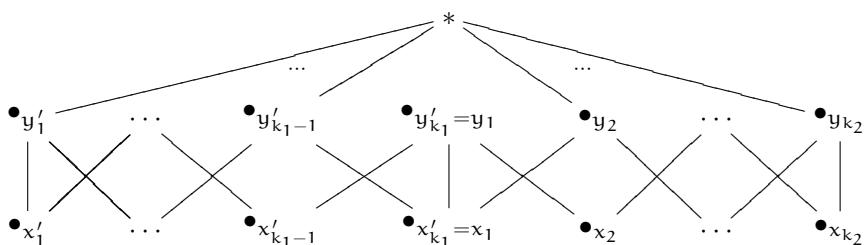


Figura 4.11: Z .

Claramente, \hat{U}_*^Z es contráctil. Luego, $*$ es down weak point de Z y $Z \setminus^e X_{k_1, k_2}^2$.

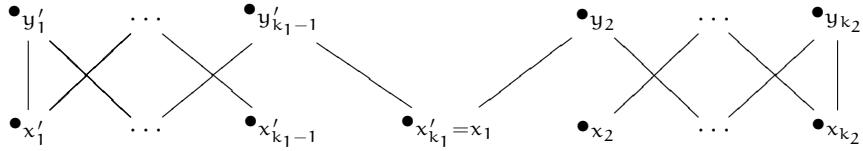


Figura 4.12: \hat{U}_*^Z .

Por otra parte, se verifica que:

- weak points(Z) = $\{y'_1, \dots, y'_{k_1-1}, y_2, \dots, y_{k_2}, x'_1, \dots, x'_{k_2-2}, y_3, \dots, y_{k_2}, *\}$;

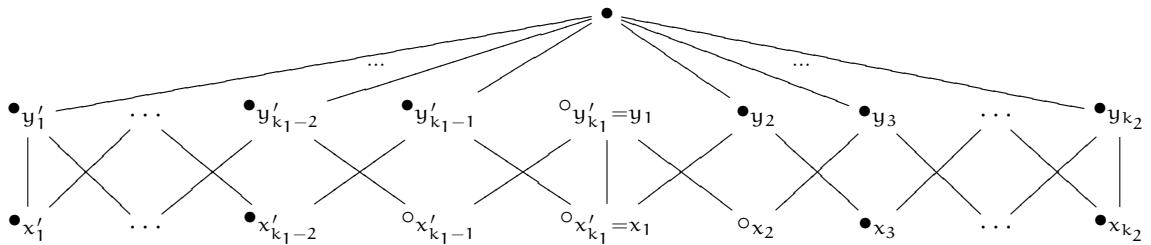


Figura 4.13: Weak points de Z , denotados con \bullet .

- weak points($Z \setminus P$) = $\{y'_1, \dots, y'_{k_1-1}, y_2, \dots, y_{k_2}, x'_1, \dots, x'_{k_2-2}, y_3, \dots, y_{k_2}\} \setminus P$,
 $\forall P \subset \{y'_1, \dots, y'_{k_1-1}, y_2, \dots, y_{k_2}, x'_1, \dots, x'_{k_2-2}, y_3, \dots, y_{k_2}\}$, $P \neq \emptyset$.

Notar además que Y^2 es homeomorfo al subespacio de Z con elementos $\{*, y'_{k_1} = y_1, x'_{k_1-1}, x'_{k_1} = x_1, x_2\}$.

De lo anterior se deduce que weak cores(Z) = $\{Y^2, X_{k_1, k_2}^2\}$. □

En general, dados $n \in \mathbb{N}, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, notamos $X_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n$ al modelo de $\underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n \text{ veces}}$ de la siguiente figura.

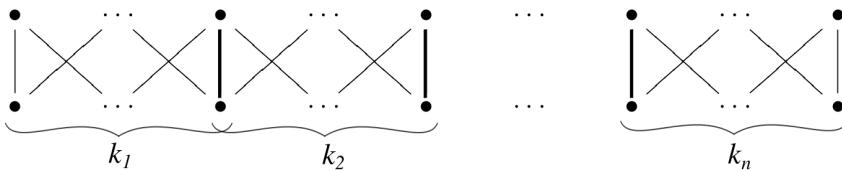


Figura 4.14: $X_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n$.

Notar que $X_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n$ se obtiene de "concatenar" (identificando las aristas marcadas con línea gruesa) los espacios $X_{k_1}^1, X_{k_2}^1, \dots, X_{k_n}^1$. El siguiente resultado, una generalización de 4.3.3, afirma que dado un modelo de $S^1 \vee S^1 \vee \dots \vee S^1$ construido de la manera anterior, si reemplazamos $X_{k_1}^1$ ó $X_{k_n}^1$ por un modelo de S^1 de otro cardinal, el espacio original y el nuevo forman un conjunto compatible.

Proposición 4.3.5. Sean $n \in \mathbb{N}, k_1, k_2, \dots, k_n, j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Los conjuntos $\{X_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n, X_{j, k_2, \dots, k_n}^n\}$ y $\{X_{k_1, \dots, k_{n-1}, k_n}^n, X_{k_1, \dots, k_{n-1}, j}^n\}$ son compatibles.

Para demostrarlo, basta seguir el mismo esquema de la demostración de 4.3.3, ajustando el espacio compatibilizador. Por ejemplo, para el conjunto $\{X_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n, X_{k_1, k_2, \dots, j}^n\}$, suponiendo que $k_n \leq j$, consideramos el espacio $Z = X_{k_1, k_2, \dots, j}^n \cup \{*\}$ cuyo diagrama de Hasse es el de la siguiente figura:

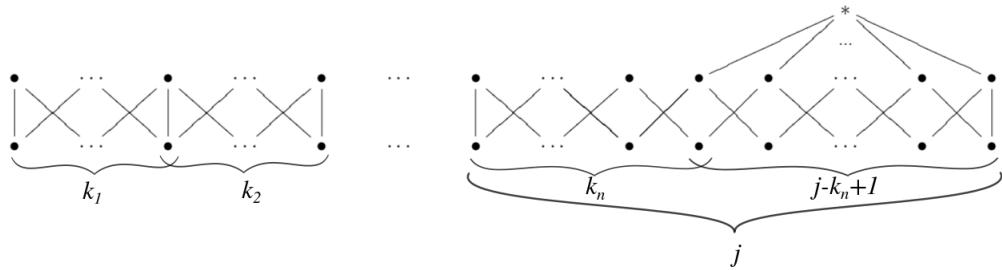


Figura 4.15: Compatibilizador de $\{X_{k_1, k_2, \dots, k_n}^n, X_{k_1, k_2, \dots, j}^n\}$.

4.4 Resultados generales

Proposición 4.4.1. El conjunto $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es compatible si y sólo si el conjunto $\{X_1^{\text{op}}, X_2^{\text{op}}, \dots, X_n^{\text{op}}\}$ lo es.

Demostración. Sigue del hecho de que $Z \searrow X$ si y sólo si $Z^{\text{op}} \searrow X^{\text{op}}$. \square

Proposición 4.4.2. Si X es un espacio weak minimal, entonces $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ el conjunto $\underbrace{\{X, X, \dots, X\}}_{n \text{ veces}}$ es compatible.

Demostración. Definimos un poset $Z := X \cup \{*_1, *_2, \dots, *_n\}$.

Para definir el orden, consideramos un elemento maximal x_0 de X . El orden en Z es:

- entre elementos de X , el inducido por ese poset;
- $*_i \leq *_j$ si y sólo si $i \leq j$;
- $x < *_i$ si y sólo si $x \in \cup_{x_0}^X$.

En otras palabras, si llamamos Y al conjunto totalmente ordenado $*_1 < *_2 < \dots < *_n$, Z se obtiene de identificar los puntos x_0 y $*_1$ en los espacios X e Y respectivamente.

Respecto de los weak points, la situación es la siguiente:

- $\text{weak points}(Z) = \{x_0, *_1, \dots, *_n\}$;
- $\text{weak points}(Z \setminus P) = \{x_0, *_1, \dots, *_n\} \setminus P, \forall P \subsetneq \{x_0, *_1, \dots, *_n\}$;

Luego, los procesos de colapso de Z a un poset weak minimal son de la forma:

$$Z \searrow Z \setminus \{z_1\} \searrow Z \setminus \{z_1, z_2\} \searrow \dots \searrow Z \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\},$$

con $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\} = P \subsetneq \{x_0, *_1, \dots, *_n\}$. Entonces $Z \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ será:

- o bien el espacio X (si $P = \{*_1, \dots, *_n\}$),

- o bien el subespacio de Z con elementos $X \setminus \{x_0\} \cup \{x_i\}$ (si P es el conjunto de puntos $\{x_0, *_1, \dots, *_i-1, *_i+1, \dots, *_n-1\}$).

Notar que todos los anteriores son isomorfos; se obtienen de etiquetar de distintas maneras al elemento maximal x_0 de X . Podemos deducir entonces que el conjunto de weak cores de Z es un conjunto de n espacios finitos distintos homeomorfos a X , que es lo que queríamos probar. \square

El espacio compatibilizador construido en la demostración de 4.4.2 **no necesariamente** es de cardinal mínimo. Para notarlo, basta considerar el conjunto compatible exhibido en 4.2.5.

La siguiente proposición es una sencilla generalización del ejemplo 4.2.4.

Proposición 4.4.3. *Si $X \neq \{*\}$ es un espacio weak minimal tal que $X \nearrow *$, entonces $\{X, *\}$ no es compatible.*

Demuestra. Supongamos que $\{X, *\}$ es compatible. Sea Z compatibilizador de $\{X, *\}$. En particular, $Z \nearrow *$. Más aún, existe Y de altura 1 (y entonces $|Y| \geq 2$) tal que $Z \nearrow Y \nearrow *$. Pero los espacios finitos de altura 1 colapsables colapsan a todos sus puntos (2.5.8). Luego, $\{*, *\} \subset \text{weak cores}(Z)$; generando una contradicción. \square

A continuación realizamos definiciones relacionadas con la "dependencia" de los weak points de un espacio.

Definición 4.4.4. Sean X un espacio finito T_0 , y $x \in e \in y$ weak points de X . Diremos que:

- $x \in e$ son *dependientes* si x no es weak point de $X \setminus \{y\}$ ó y no es weak point de $X \setminus \{x\}$;
- x es *independiente* si $\forall w$ weak point de X , x es weak point de $X \setminus \{w\}$.
- x es *inocuo* si $\forall w$ weak point de X , w es weak point de $X \setminus \{x\}$.

Ejemplo 4.4.5. Sea X el espacio finito cuyo diagrama de Hasse es el de la siguiente figura:

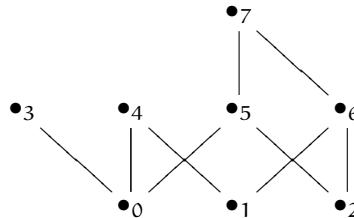


Figura 4.16: X .

Los weak points de X son 2, 3, 5, 6 y 7. Valen las siguientes afirmaciones:

- Los weak points 4 y 6 son dependientes; del mismo modo que 5 y 6, y 2 y 6.
- 3 es inocuo e independiente.
- 5 es inocuo, pero 2 no.

Sea $\{X_1, X_2\}$ un conjunto compatible y Z un compatibilizador de cardinal mínimo. Entonces los weak points de Z quedan clasificados en dos grupos, que llamaremos W_1 y W_2 , tales que al remover cualquier weak point w de W_i , el espacio resultante $Z \setminus \{w\}$ colapsa a un único espacio: \tilde{X}_i ($i \in \{1, 2\}$).

Proposición 4.4.6. Sean X_1, X_2 espacios finitos tales que $\{X_1, X_2\}$ es compatible. Sea Z compatibilizador de $\{X_1, X_2\}$ de cardinal mínimo. Entonces Z tiene las siguientes propiedades:

(i) $\text{weak points}(Z) = \mathcal{W}_1 \sqcup \mathcal{W}_2$,

con $\mathcal{W}_i := \{w_i \text{ weak point de } Z \text{ tal que } \text{weak cores}(Z \setminus \{w_i\}) = \{X_i\}\} \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$.

(ii) $\forall w_1 \in \mathcal{W}_1, \forall w_2 \in \mathcal{W}_2, w_1$ y w_2 son dependientes. En particular, no existe ningún weak point de Z independiente e inocuo.

Demostración.

(i) Sea $z \in Z$ weak point. Como $\text{weak cores}(Z) = \{X_1, X_2\}$, en particular $\text{weak cores}(Z \setminus \{z\}) \subseteq \{X_1, X_2\}$.

Por otra parte, debido a la minimalidad de Z , no pueden ocurrir simultáneamente $Z \setminus \{z\} \setminus X_1$ y $Z \setminus \{z\} \setminus X_2$. Luego, o bien $\text{weak cores}(Z \setminus \{z\}) = X_1$, o bien $\text{weak cores}(Z \setminus \{z\}) = X_2$.

Por último, $\forall i \in \{1, 2\}, \mathcal{W}_i \neq \emptyset$ pues $Z \setminus X_i$.

(ii) Razonemos por el absurdo. Supongamos que existen $w_1 \in \mathcal{W}_1$ y $w_2 \in \mathcal{W}_2$ no dependientes. Entonces w_1 es weak point de $Z \setminus \{w_2\}$ y w_2 es weak point de $Z \setminus \{w_1\}$. Luego, $Z \setminus (Z \setminus \{w_1\}) \setminus (Z \setminus \{w_1, w_2\}) \setminus X_1$ y $Z \setminus (Z \setminus \{w_2\}) \setminus (Z \setminus \{w_2, w_1\}) \setminus X_2$.

Por otra parte, del hecho de que $\text{weak cores}(Z) = \{X_1, X_2\}$ se deduce que, en particular, $\text{weak cores}(Z \setminus \{w_1, w_2\}) \subset \{X_1, X_2\}$.

En conclusión $\text{weak cores}(Z \setminus \{w_1, w_2\}) = \{X_1, X_2\}$, contradiciendo la minimalidad de Z .

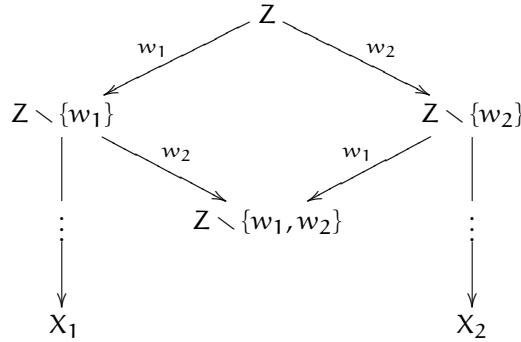


Figura 4.17: Colapsos existentes en Z .

Finalmente, probemos la afirmación particular. Supongamos que $\exists x \text{ weak point de } Z$ independiente e inocuo. Dado que $x \in \mathcal{W}_1 \sqcup \mathcal{W}_2$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x \in \mathcal{W}_1$. Como $\mathcal{W}_2 \neq \emptyset, \exists y \in \mathcal{W}_2$. Pero entonces x e y no serían dependientes, generando un absurdo. \square

Por ejemplo, para el conjunto compatible del ejemplo (1) de 4.2.3, el espacio compatibilizador Z_1 exhibido es de cardinal mínimo. Si etiquetamos sus vértices como muestra la Figura 4.18, entonces $\mathcal{W}_1 = \{2, 4, 5\}$ y $\mathcal{W}_2 = \{6\}$. Este hecho puede apreciarse claramente en el esquema de la Figura 3.5.

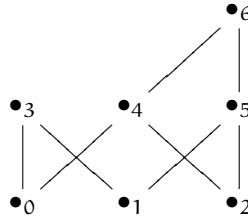


Figura 4.18: Z_1 .

4.4.1 Cociente, wedge, join y producto

En este apartado nos ocuparemos de decidir si, dados un conjunto compatible y una operación (cociente, wedge, join), el conjunto que se obtiene de "combinarlos" es compatible.

Dado X un espacio weak minimal, queremos ver si es posible hallar un espacio finito Y que se obtenga de cocientar a X por algún subespacio (y alguna operación adicional para mantener el tipo homotópico simple) de modo tal que $\{X, Y\}$ resulte compatible. La siguiente proposición da una respuesta a este interrogante para un caso particular de X .

Proposición 4.4.7. *Sea X un espacio finito weak minimal de altura 1.*

Si x_1, \dots, x_n (con $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) son elementos maximales tales que $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$ es contráctil, entonces el conjunto $\{X, (X/A) \setminus B\}$ es compatible, donde $A := \{x_1, \dots, x_n\}$ y $B := \{x \in X : F_x^X \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}\}$.

Demuestra. En primer lugar veamos que $Y = (X/A) \setminus B$ es weak minimal. Procedemos por el absurdo. Supongamos que tiene algún weak point w . Hay dos opciones: $w = \bar{x}_1$ (la clase de x_1 en Y) ó $w \in X \setminus (A \cup B)$.

En el primer caso, $\hat{U}_{\bar{x}_1}^Y = (\bigcup_{i=1}^n \hat{U}_{x_i}^X) \setminus B$ es un subconjunto de puntos de X de grado 0. Supongamos que $|\hat{U}_{\bar{x}_1}^Y| = 1$, es decir, existe un único punto y_0 de X minimal tal que $F_{y_0}^X \not\subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Entonces existe un punto maximal $x_0 \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ de X tal que $y_0 \prec x_0$. Pero en ese caso $U_{x_0}^X = \{y_0\}$ (el resto de los puntos minimales son cubiertos sólo por puntos de $\{x_1, \dots, x_n\}$); contradiciendo la weak minimalidad de X . Luego, $|\hat{U}_{\bar{x}_1}^Y| = 1$.

Analicemos el segundo caso. Si $F_w^X \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$, entonces $F_w^Y = F_w^X$. Como X es weak minimal, w debe ser cubierto por al menos 2 elementos y entonces no puede ser weak point. Si $F_w^X \cap \{x_1, \dots, x_n\} \neq \emptyset$, dado que $F_w^X \not\subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, $F_w^Y \supseteq \{\bar{x}_1, x_0\}$, para algún punto maximal $x_0 \notin \{x_1, \dots, x_n\}$; y luego, no es posible que w sea weak point.

Definiremos ahora un conjunto compatibilizador. Sea $Z := X \cup \{*\}$, dotado del siguiente orden:

- entre elementos de X , el inducido por ese poset;
- $x \leq *$ si y sólo si $x \in U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} \cup \{*\}$.

La situación de los weak points de Z es análoga a la de los espacios compatibilizadores construidos en las demostraciones de las proposiciones 4.3.4, 4.3.2 y 4.3.3:

- $\text{weak points}(Z) = A \cup B \cup \{*\}$;
- $\text{weak points}(Z \setminus \{*\}) = \emptyset$;
- $\text{weak points}(Z \setminus P) = (A \cup B) \setminus P, \forall P \subset (A \cup B)$.

Luego, los únicos espacios weak minimales a los cuales colapsa Z son:

- $Z \setminus \{*\} = X$ y
- $Z \setminus (A \cup B) = ((X \cup \{*\}) \setminus A) \setminus B = (X/A) \setminus B$.

Luego, $\text{weak cores}(Z) = \{X, (X/A) \setminus B\}$. □

Corolario 4.4.8. *Sea X espacio finito weak minimal de altura 1.*

Si x_1, \dots, x_n (con $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) son elementos minimales tales que $F_{x_1} \cup F_{x_2} \cup \dots \cup F_{x_n}$ es contráctil, entonces el conjunto $\{X, (X/A) \setminus B\}$ es compatible, donde $A := \{x_1, \dots, x_n\}$ y $B := \{x \in X : \hat{U}_x^X \subset \{x_1, \dots, x_n\}\}$.

Demuestra. Sigue de aplicar el resultado anterior al conjunto $\{X^{\text{op}}, ((X/A) \setminus B)^{\text{op}}\}$ y luego la equivalencia de la proposición 4.4.1. □

Ejemplo 4.4.9. Sea X el siguiente modelo de $S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

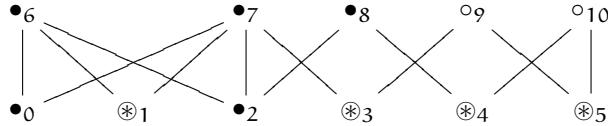


Figura 4.19: X .

Consideremos los siguientes subconjuntos de puntos, que satisfacen las hipótesis de 4.4.8:

$$A := \{1, 3, 4, 5\};$$

$$B := \{9, 10\}.$$

Por 4.4.8, $\{Y = (X/A) \setminus B, X\}$ es compatible.

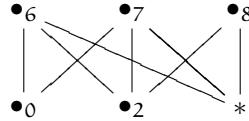


Figura 4.20: Y .

Notar además que ya hemos visto varios ejemplos en la sección 4.2.3 a los cuales puede aplicarse este resultado. Por ejemplo, los conjuntos (1), (2) y (4) del Ejemplo 4.2.3 son compatibles por la proposición anterior, y el compatibilizador exhibido es el que se define en la demostración de la misma. Lo mismo ocurre con los conjuntos de las proposiciones 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4 y 4.3.5.

Dados un conjunto compatible y un espacio finito weak minimal, bajo ciertas hipótesis el conjunto que se obtiene de hacer wedge (en puntos a determinar) entre los espacios del conjunto compatible y el nuevo espacio weak minimal resulta compatible.

Proposición 4.4.10. *Sean $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ compatible y Z un compatibilizador de $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.*

Si existe $z_0 \in X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \cap Z$ minimal (ó maximal), entonces $\forall X_0$ weak minimal, $\forall x_0 \in X_0$ minimal (resp. maximal), $\{X_0 \vee X_1, X_0 \vee X_2, \dots, X_0 \vee X_n\}$ es compatible (donde identificamos en cada caso x_0 con z_0).

Demuestra. Notar que $X_0 \vee X_i$ es weak minimal $\forall 1 \leq i \leq n$. En efecto, dado que X_i es weak minimal $\forall 0 \leq i \leq n$, la afirmación sigue de las proposiciones 2.6.19 y 2.6.21.

Sea $\bar{Z} := X_0 \vee Z$, donde los puntos identificados son x_0 y z_0 .

Veamos que $\text{weak cores}(\bar{Z}) = \{X_0 \vee X_1, X_0 \vee X_2, \dots, X_0 \vee X_n\}$.

Por 2.6.20, $\bar{Z} \setminus X_0 \vee X_i \forall 1 \leq i \leq n$.

Por otra parte, no existe $\bar{V} \notin \{X_0 \vee X_1, X_0 \vee X_2, \dots, X_0 \vee X_n\}$ weak minimal tal que $\bar{Z} \setminus \bar{V}$. En efecto, dado que $\bar{Z} = X_0 \vee Z$ y X_0 es weak minimal, por 2.6.19 y 2.6.21, los weak points de \bar{Z} son:

- o bien weak points de $Z \setminus \{z_0\}$,
- o bien $X_0 = \{x_0\}$ y z_0 es weak point de Z ;

(la opción $Z = \{z_0\}$ y x_0 es weak point de X_0 queda descartada pues X_0 es weak minimal).

Si $X_0 = \{x_0\}$, \bar{Z} es homeomorfo a Z y $X_0 \vee X_i$ es homeomorfo a $X_i \forall 1 \leq i \leq n$. Como $\text{weak cores}(Z) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, un tal \bar{V} no puede existir.

Si $\{x_0\} \subsetneq X_0$, ya hemos observado que los weak points de \bar{Z} son los de $Z \setminus \{z_0\}$. Más aún, vale que $\bar{Z} \setminus \bar{V}$ si y sólo si $\bar{V} = X_0 \vee V$ y $Z \setminus V$ para algún V weak minimal. Nuevamente, puesto que $\text{weak cores}(Z) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, no puede existir un tal \bar{V} . \square

Analicemos ahora situaciones análogas respecto del join y el producto.

Observación 4.4.11. Dados X, Y espacios finitos, no vale en general que: si $\{X, Y\}$ es compatible, entonces $\forall W$ weak minimal el conjunto $\{X \oplus W, Y \oplus W\}$ es compatible. Para notarlo, consideramos $W = \{*\}$. Para cualquier espacio finito, $X \oplus *$ no es weak minimal por ser un espacio con más de un elemento que tiene máximo (y luego, contráctil).

Sin embargo, éste es el único caso en el cual la afirmación anterior no es verdadera.

Proposición 4.4.12. Sean X, Y espacios finitos T_0 tales que $\{X, Y\}$ es compatible y $|X| > 1, |Y| > 1$. Sea W un espacio weak minimal. Entonces el conjunto $\{X \oplus W, Y \oplus W\}$ es compatible si y sólo si $W \neq \{*\}$.

Demuestra \Rightarrow) Si el conjunto $\{X \oplus W, Y \oplus W\}$ es compatible, en particular $X \oplus W$ e $Y \oplus W$ son weak minimales. Si $W = \{*\}$, entonces $X \oplus W$ e $Y \oplus W$ tienen máximo (el punto $*$), lo cual contradice su weak minimalidad.

\Leftarrow) Sea $W \neq \{*\}$ weak minimal, veamos que el conjunto $\{X \oplus W, Y \oplus W\}$ es compatible.

En primer lugar, observemos que $X \oplus W$ e $Y \oplus W$ son weak minimales. En efecto, basta notar que W, X e Y son weak minimales y aplicar la caracterización de los weak points de un join descripta en 2.6.13.

A continuación, definiremos \bar{Z} tal que $\text{weak cores}(\bar{Z}) = \{X \oplus W, Y \oplus W\}$. Si Z es compatibilizadora de $\{X, Y\}$, sea $\bar{Z} := Z \oplus W$.

Por 2.6.15, resulta que $\bar{Z} \setminus X \oplus W$ y $\bar{Z} \setminus Y \oplus W$.

Resta ver que no existe $\bar{V} \notin \{X \oplus W, Y \oplus W\}$ weak minimal tal que $\bar{Z} \setminus \bar{V}$. Como W, X e Y son espacios finitos T_0 weak minimales con más de un punto, de 2.6.13 deducimos que los weak points de $\bar{Z} = Z \oplus W$ son los weak points de Z . Más aún, vale que $\bar{Z} \setminus \bar{V}$ si y sólo si $\bar{V} = V \oplus W$ y $Z \setminus V$ para algún V weak minimal. Dado que $\text{weak cores}(Z) = \{X, Y\}$, no puede existir un tal \bar{V} . \square

Observación 4.4.13. Sean X, Y espacios finitos tales que $\{X, Y\}$ es compatible, sea W weak minimal. Si bien $X \times W$ y $Y \times W$ resultan weak minimales y dado Z tal que $\text{weak cores}(Z) = \{X, Y\}$, ocurren los siguientes colapsos: $Z \times W \setminus X \times W$ y $Z \times W \setminus Y \times W$; **no necesariamente** $\text{weak cores}(Z \times W) = \{X \times W, Y \times W\}$.

Veamos con detalle cada una de estas afirmaciones.

- Por lema 2.6.16 vale la siguiente inclusión de conjuntos:

$$\text{weak points}(X \times W) \subset \text{weak points}(X) \times Y \cup X \times \text{weak points}(W) = \emptyset$$

Como X y W son weak minimales, el último conjunto es vacío.

Para $Y \times W$ el razonamiento es análogo.

- Sea Z es un compatibilizador de $\{X, Y\}$. Por lema 2.6.17 es claro que $Z \times W \searrow X \times W$ y $Z \times W \searrow Y \times W$. En otras palabras,

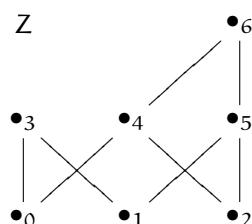
$$\text{weak cores}(Z \times W) \supset \{X \times W, Y \times W\}.$$

- Sin embargo, no vale la igualdad en general.

A modo ilustrativo, consideremos el siguiente (contra)ejemplo.

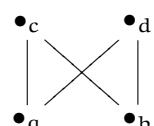
Conjunto compatible: $\{X_2^1, X_3^1\}$

Compatibilizador:



Weak minimal:

W



```

Z=Poset({0:[3,4], 1:[3,5], 2:[4,5], 4:[6], 5:[6]})  

W=Poset({'a':['c','d'], 'b':['c','d']})  

ZxW=cartesian_product (Z,W)  

ZxW.show(figsize=[11,11], vertex_colors='white')
evaluate

```

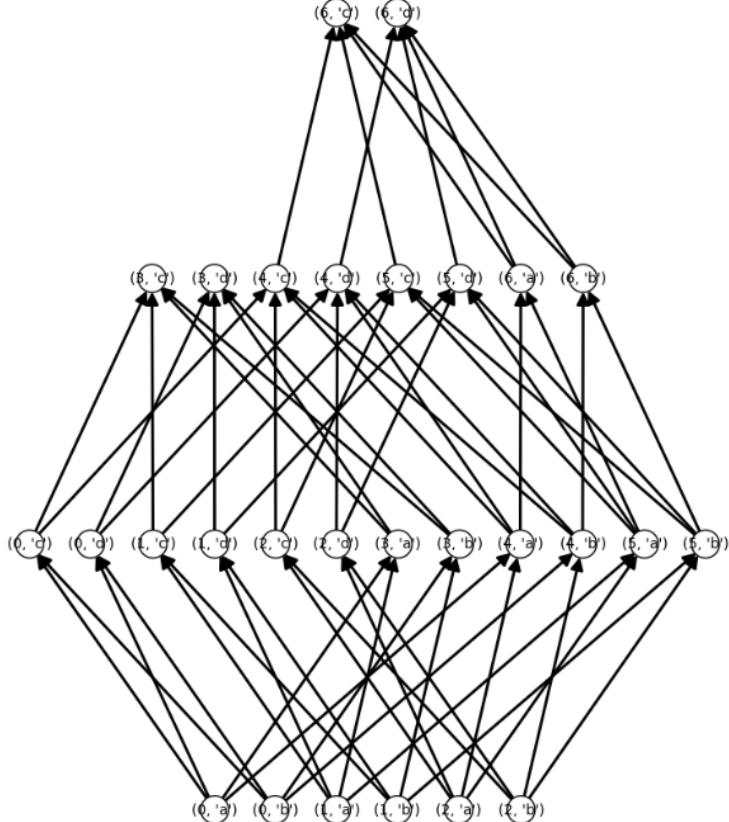


Figura 4.21: $Z \times W$

Utilizando la función `wcores`, vemos que el espacio

$$Y := Z \times W \setminus \{(6, a), (6, b), (6, d), (5, c), (4, c), (3, c)\},$$

de 22 puntos, también es weak core de $Z \times W$.

Más aún, puede llegarse a él mediante la siguiente sucesión de colapsos elementales:

$$\begin{aligned} Z \times W &\setminus^e Z \times W \setminus \{(6, a)\} \setminus^e Z \times W \setminus \{(6, a), (6, b)\} \setminus^e Z \times W \setminus \{(6, a), (6, b), (6, d)\} \setminus^e \\ &Z \times W \setminus \{(6, a), (6, b), (6, d), (5, c)\} \setminus^e Z \times W \setminus \{(6, a), (6, b), (6, d), (5, c), (4, c)\} \setminus^e \\ &Z \times W \setminus \{(6, a), (6, b), (6, d), (5, c), (4, c), (3, c)\} = Y. \end{aligned}$$

Capítulo 5

Métodos de reducción

5.1 Introducción

Un **método de reducción** de un espacio finito es una técnica que permite disminuir el cardinal de alguno de los "elementos" que éste tiene asociado (uno o más puntos, relaciones de cubrimiento, aristas del diagrama de Hasse, etc.) sin alterar alguna propiedad.

Las propiedades que nos interesarán preservar serán el tipo homotópico, homotópico simple, homotópico débil y los grupos de homología.

Una clase de métodos de reducción muy importante son los métodos de reducción de un punto, es decir, aquellos que consisten en remover exactamente un punto del espacio de modo tal que esta reducción no afecte la propiedad que queremos conservar.

En el capítulo 2 ya hemos presentado dos métodos de reducción de un punto muy importantes: los beat points y los weak points.

Remover beat points fue el primer método de reducción para espacios finitos. Fue introducido por Stong [27], quien en realidad llamaba a estos puntos *lineales* y *colineales*; el nombre actual se debe a P. May [22]. La propiedad que preservan es el tipo homotópico.

Los weak points, introducidos por Barmak y Minian [6], permiten caracterizar el tipo homotópico simple de espacios finitos.

Respecto del tipo homotópico débil de un espacio finito, se ha demostrado que no existe un método de reducción que permita caracterizarlo [21]. Si existiera, en particular sería posible decidir con un algoritmo si un espacio finito es homotópicamente trivial. Luego, podría determinarse si un complejo simplicial finito es contráctil (aplicando \mathcal{X}), y es esto último lo que no es posible.

Otros métodos de reducción de un punto fueron estudiados por Barmak y Minian [7]; a saber: remover γ -points y H -points. Los H -points preservan los grupos de homología. Los γ -points preservan el tipo homotópico simple, su inconveniente es que no existe algoritmo para identificarlos, pues para ello es necesario decidir si un espacio es homotópicamente trivial o no.

Existen otro tipo de métodos de reducción, que no necesariamente consisten en remover un punto. Por ejemplo, T. Osaki introdujo un método que consiste en cocientar el espacio original por un subespacio, manteniendo el tipo homotópico débil. Por otra parte, los que consisten en remover una arista del diagrama de Hasse o una relación de cubrimiento fueron estudiados en [12] y fueron implementados en 3.25 y 3.26.

En este capítulo haremos un pequeño estudio de los métodos de reducción conocidos, e introduciremos algunos nuevos.

| Método de reducción | Beat points | Weak points | ? |
|---------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| Espacio finito | Tipo homotópico | Tipo homotópico simple | Tipo homotópico débil |
| Complejo simplicial | Tipo homotópico fuerte | Tipo homotópico simple | Tipo homotópico |

Tabla 5.1: Métodos de reducción.

5.2 Tipo homotópico simple de espacios finitos

El método de reducción de espacios finitos más importante asociado al tipo homotópico simple de poliedros es remover weak points.

Dado un complejo simplicial K , para hallar su tipo homotópico simple basta con hallar el del espacio finito $\mathcal{X}(K)$. En efecto, si $\mathcal{X}(K) \searrow Y$ (es decir, si se puede llegar a Y desde $\mathcal{X}(K)$ agregando y removiendo weak points), entonces $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) \searrow \mathcal{K}(Y)$, pero $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K' \searrow K$. Luego, $K \searrow \mathcal{K}(Y)$.

Observación 5.2.1. Existe una estrecha conexión entre los weak points y el teorema de McCord (1.2.6).

Sea X un espacio finito, y sea $x \in X$. Considero $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ la inclusión. Por el teorema de McCord, si para todo $y \in X$, $i^{-1}(U_y)$ es contrátil o para todo $y \in X$, $i^{-1}(F_y)$ es contrátil, entonces i es una equivalencia homotópica débil.

Pero $i^{-1}(U_y) = U_y \setminus \{x\}$ es contrátil para todo $y \in X$ si y sólo si $i^{-1}(U_x) = \hat{U}_x$ es contrátil si y sólo si x es down weak point de X . De manera análoga, $i^{-1}(F_y) = U_x \setminus \{x\}$ es contrátil para todo $y \in X$ si y sólo si x es up weak point de X .

Una pregunta natural es si se puede hallar, con la misma idea, un método de reducción de **varios puntos** que preserve el tipo homotópico débil pero no necesariamente el tipo homotópico simple. La respondemos a continuación.

Utilizaremos el teorema de McCord para dar condiciones suficientes que debe cumplir un subconjunto de puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de X para que la inclusión $i : X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \hookrightarrow X$ sea una equivalencia homotópica débil.

En este caso, $i^{-1}(U_y) = U_y \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es contrátil para todo $y \in X$ si y sólo si $i^{-1}(U_{x_1}) = U_{x_1} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es contrátil para todo $1 \leq i \leq n$. Veamos que esto último induce que $X \setminus X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Supongamos que $U_{x_i} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es contrátil para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces, en particular, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que x_i es minimal del subespacio $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $U_{x_i} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \hat{U}_{x_i}$ es contrátil. Luego, los minimales del subespacio $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son down weak points de X . Los llamamos \mathcal{M}_1 . Dado que no son comparables dos a dos, $X \setminus X \setminus \mathcal{M}_1$.

Ahora, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que x_i es minimal de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \setminus \mathcal{M}_1$, $U_{x_i}^X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \hat{U}_{x_i}^{X \setminus \mathcal{M}_1}$ es contrátil. Es decir, los minimales de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \setminus \mathcal{M}_1$ son down weak points de $X \setminus \mathcal{M}_1$. Los llamamos \mathcal{M}_2 . Resulta entonces que $X \setminus \mathcal{M}_1 \setminus X \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$. Continuamos así este procedimiento. Dado que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es finito, el procedimiento termina y se tiene que $X \setminus X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

En conclusión, la respuesta a la pregunta anterior es negativa.

Remover weak points no es el único método de reducción que no afecta el tipo homotópico simple. A continuación exhibimos algunos ejemplos de métodos de reducción que preservan esta propiedad y **no** consisten en remover un punto.

- **Métodos de Osaki:** Son los métodos de reducción más antiguos que preservan tipo homotópico débil. Fueron introducidos por T. Osaki [26] en 1999. Más tarde, Barmak y Minian ([4], 6.2.10.) prueban que en realidad preservan el tipo homotópico simple. Los métodos se basan en el siguiente resultado:

Sea X un espacio finito. Si existe $x \in X$ tal que, para cada $y \in X$, $U_x \cap U_y$ es vacío u homotópicamente trivial, entonces la función cociente $q : X \longrightarrow X/U_x$ es equivalencia débil.

El mismo sigue del teorema de McCord, aplicado a la base minimal $\{U_{q(y)} : y \in X\}$ de X/U_x .

$$\text{En efecto, } q^{-1}(U_{q(y)}) = \begin{cases} U_y & \text{si } U_x \cap U_y = \emptyset \\ U_x \cup U_y & \text{si } U_x \cap U_y \text{ es homotópicamente trivial} \end{cases}$$

Si $U_x \cap U_y$ es homotópicamente trivial, dado que U_x y U_y son contráctiles, obtenemos: de la sucesión de Mayer-Vietoris que $\tilde{H}_n(U_x \cup U_y) = 0 \forall n \geq 0$; y aplicando el teorema de Van Kampen, que $U_x \cup U_y$ es simplemente conexo. Luego, por el teorema de Hurewicz, $U_x \cup U_y$ es homotópicamente trivial.

Vale el análogo para \hat{F}_x , simplemente aplicando el resultado anterior a X^{op} .

Observación 5.2.2. En [4] se desarrollan una noción de equivalencia simple entre espacios finitos y la siguiente versión simple del Teorema de McCord 1.2.6 para espacios finitos:

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre espacios finitos. Si $f^{-1}(U_y)$ es homotópicamente trivial para todo $y \in Y$, entonces f es una equivalencia simple.

Si aplicamos este resultado a la función cociente q , obtenemos que, en realidad, q es una equivalencia simple y, en particular, $X \nearrow X/U_x$.

El proceso de obtener X/U_x de X se denomina *reducción abierta*, y el de obtener X/F_x , *reducción cerrada*.

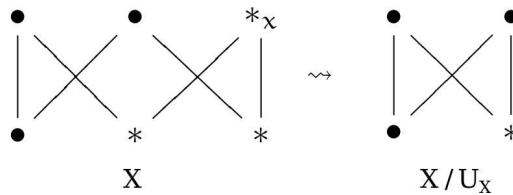
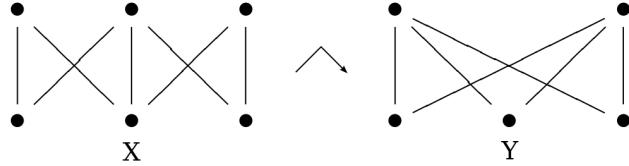


Figura 5.1: Reducción abierta.

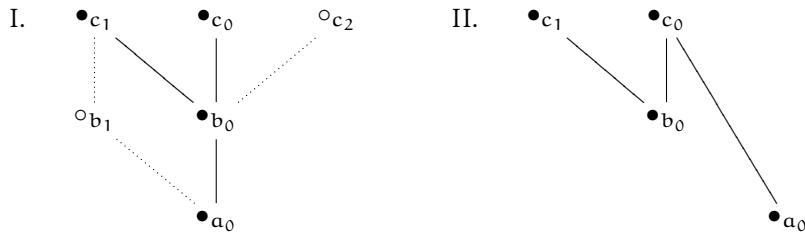
Dado un espacio finito, estos métodos no permiten, en general, obtener el espacio de cardinal mínimo con el mismo tipo homotópico simple. Para notarlo, describimos un ejemplo expuesto en [3]. Sean X e Y los modelos de $S^1 \vee S^1$ de la siguiente figura. Si bien a X no se le puede efectuar ninguna de las reducciones descriptas por Osaki, $Y \nearrow X$ y $|Y| = |X| - 1$. De hecho, Y es un espacio de cardinal mínimo simplemente equivalente a X .



- **Reducción del árbol:** Es un modo de reducir aristas; se basa en la siguiente idea de Barmak:

Sea X un espacio finito. Si $a_0 \prec b_0 \prec c_0$ y $a_0 \prec b_0 \prec c_1$ son cadenas maximales de X distintas tales que: $\nexists b_1 \in X$ tal que $a_0 < b_1 < c_1$, y $\nexists c_2 \notin \{c_0, c_1\}$ tal que $c_2 > b_0$; entonces $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{a_0 \prec b_0, a_0 \prec c_1\})$. Si $Y := X \setminus \{a_0 \prec b_0, a_0 \prec c_1\}$, entonces, en particular, $X \nearrow Y$.

La siguiente figura (I.) ilustra la situación descripta anteriormente. Con puntos y líneas rellenos se muestran los puntos y relaciones que deben existir, con puntos sin relleno y líneas punteadas los que no. La figura II. muestra cómo queda el poset luego de la reducción.



La sucesión de colapsos elementales existente es

$$\mathcal{K}(X) \searrow^e \mathcal{K}(X \setminus \{a_0 b_0 c_1, a_0 c_1\}) \searrow^e \mathcal{K}(X \setminus \{a_0 b_0 c_1, a_0 c_1, a_0 b_0 c_0, a_0 b_0\}).$$

Para el primer colapso elemental: dado que $a_0 \prec b_0 \prec c_1$ es una cadena maximal de X , $a_0 b_0 c_1$ es simplex maximal de $\mathcal{K}(X)$. Como $\nexists b_1 \in X$, $a_0 < b_1 < c_1$, $a_0 c_1$ es cara libre.

Para el segundo: por un lado, $a_0 b_0 c_0$ es simplex maximal de $\mathcal{K}(X \setminus \{a_0 b_0 c_1, a_0 c_1\})$. Por el otro, dado que $\nexists c_2 \notin \{c_0, c_1\}$ tal que $c_2 > b_0$, y que $a_0 b_0 c_1 \notin \mathcal{K}(X \setminus \{a_0 b_0 c_1, a_0 c_1\})$, $a_0 b_0$ resulta cara libre.

Una consecuencia interesante es que $Y = X \setminus \{a_0 \prec b_0, a_0 < c_1\}$ tiene una relación de cubrimiento $a_0 \prec c_0$, con a_0 minimal y c_0 maximal; y luego, $\mathcal{K}(Y) \simeq \mathcal{K}(Y \setminus \{a_0 \prec c_0\}) \vee S^1$ (ver [12], 4.2.1.).

Por ejemplo, el espacio X de la Figura 5.2 tiene los mismos grupos de homología del toro (ver figura 5.3). Sin embargo, no es un modelo finito del toro. Efectuando la reducción anterior para los vértices 2, 4, 7, 8, obtenemos el espacio Y . Dado que Y tiene una relación de cubrimiento entre un vértice maximal y uno minimal, $\pi_1(Y) = G * \mathbb{Z}$ para algún grupo G . En particular, es no abeliano (y luego, no puede ser igual a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

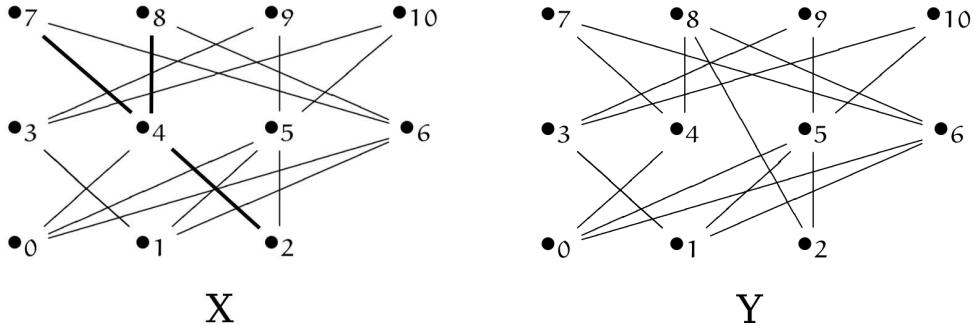


Figura 5.2: Reducción del espacio X.

```
X=Poset({0:[3,4,5,6],1:[3,5,6],2:[4,5],3:[9,10],4:[7,8],5:[9,10],6:[7,8]})  
print homology(X)  
{0: 0, 1: Z x Z, 2: Z}
```

Figura 5.3: Grupos de homología de X, calculados por Sage.

Notamos que existe un modo análogo de reducir relaciones para cadenas maximales de longitud 3.

Sea X espacio finito T_0 . Sean

$$a_0 \prec b_0 \prec c_0 \prec d_0,$$

$$a_0 \prec b_0 \prec c_0 \prec d_1,$$

$$a_0 \prec b_0 \prec d_2$$

cadenas maximales de X distintas.

Si

$$\nexists c_1 \in X, b_0 < c_1 < d_0,$$

$$\nexists c_2 \in X, b_0 < c_2 < d_0,$$

$$\nexists b_1 \in X, a_0 < b_1 < d_2,$$

$$\nexists d_3 \in X, d_3 > b_0,$$

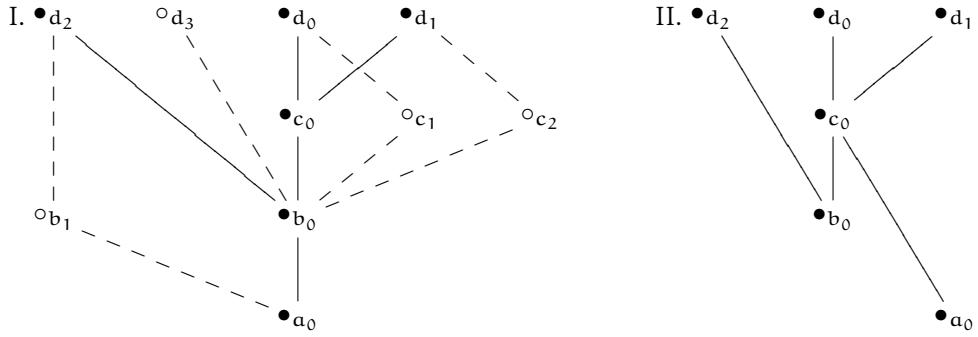
$$\nexists d_4 \in X, d_4 > c_0,$$

entonces

$$\mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{K}(X \setminus \{a_0 \prec b_0, a_0 < d_2\}).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(X) &\setminus \mathcal{K}(X \setminus \{a_0 b_0 c_0 d_0, a_0 b_0 d_0\}) \setminus \mathcal{K}(X \setminus \{a_0 b_0 c_0 d_0, a_0 b_0 d_0, a_0 b_0 c_0 d_1, a_0 b_0 d_1\}) \setminus \\ &\mathcal{K}(X \setminus \{a_0 b_0 c_0 d_0, a_0 b_0 d_0, a_0 b_0 c_0 d_1, a_0 b_0 d_1, a_0 b_0 d_2, a_0 d_2\}) \setminus \\ &\mathcal{K}(X \setminus \{a_0 b_0 c_0 d_0, a_0 b_0 d_0, a_0 b_0 c_0 d_1, a_0 b_0 d_1, a_0 b_0 d_2, a_0 d_2, a_0 b_0 c_0, a_0 b_0\}). \end{aligned}$$



- **qc-reducción:** Fue introducida por Barmak y Minian. Se basa en la siguiente proposición ([4], 9.1.):

Sea X espacio finito de altura a lo sumo 2. Si a y b son puntos maximales tales que $U_a \cup U_b$ es contráctil, entonces $X \xrightarrow{e} Y = X \cup \{c\} \setminus Y \setminus \{a, b\}$, con $a < c > b$. En particular, $\mathcal{K}(X)$ se 3-deforma en $\mathcal{K}(Y \setminus \{a, b\})$.

Notar que $X \xrightarrow{e} Y = X \cup \{c\} \setminus Y \setminus \{a, b\}$ que pues c es down weak point de Y , y a y b son up weak points de Y . El movimiento que lleva de X a $Y \setminus \{a, b\}$ se denomina qc-reducción.

Las qc-reducciones permiten (bajo las hipótesis anteriores) disminuir, de a uno, la cantidad de maximales del espacio. Se dice que X es qc-reducible si puede obtenerse un espacio con máximo mediante una sucesión de qc-reducciones de X .

Puesto que los espacios finitos con máximo son contráctiles, si X es qc-reducible, entonces $X \nearrow *$ donde todos los espacios involucrados en la transformación tienen altura menor o igual a 3. Luego, $\mathcal{K}(X)$ se 3-deforma a un punto (ver definición 2.6.3).

Los siguientes ejemplos que muestran a las qc-reducciones como un método alternativo al de los colapsos.

- D es un espacio simplemente equivalente a un punto (homotópicamente trivial), no colapsable. Pero admite una qc-reducción a \tilde{D} , y \tilde{D} es colapsable.

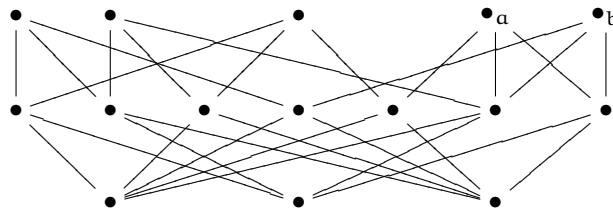


Figura 5.4: D.

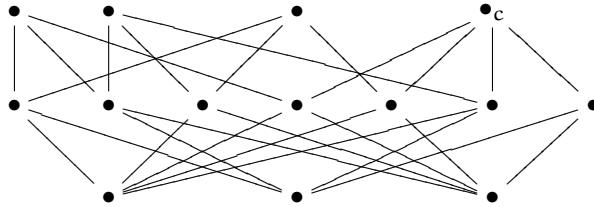
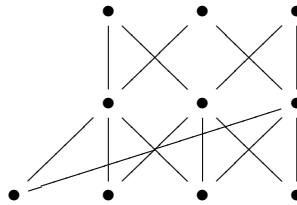


Figura 5.5: \tilde{D} .

- El siguiente espacio es colapsable; pero no qc-reducible, pues no admite ninguna qc-reducción.



Vale el análogo de este método para a, b puntos minimales tales que $F_a \cup F_b$ es contráctil; operación que se denomina qc^{op} -reducción.

- Hemos visto en 4.4.7 un método de reducción de espacios finitos de altura 1 que conserva el tipo homotópico simple (que en este caso, coincide con en tipo homotópico); lo reescribimos del siguiente modo:

Sea X un espacio finito de altura 1. Si x_1, \dots, x_n (con $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) son elementos maximales tales que $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$ es contráctil, entonces el espacio $Y := (X/A) \setminus B$ es simplemente equivalente a X , donde $A := \{x_1, \dots, x_n\}$ y $B := \{x \in X : \hat{F}_x^X \subset \{x_1, \dots, x_n\}\}$. Si X es minimal, entonces Y también lo es y $\{X, Y\}$ es compatible.

Podrá hallarse una generalización de los dos últimos métodos en 5.2.13.

Los últimos métodos descriptos son muy interesantes pero un tanto particulares.

Otro método de reducción de un punto que mantiene el tipo homotópico simple del espacio original consiste en remover **γ -points**, una generalización de los weak points. Fue desarrollado por Barmak y Minian en [7].

Definición 5.2.3. Un punto x de un espacio finito X es un γ -point si \hat{C}_x es homotópicamente trivial. Si $x \in X$ es un γ -point, entonces decimos que hay un γ -colapso elemental de X a $X \setminus \{x\}$.

Decimos que X γ -colapsa a Y , y lo denotamos por $X \searrow Y$ si existe una secuencia de γ -colapsos elementales que comienza en X y termina en Y .

Proposición 5.2.4. Si $x \in X$ es un γ -point, entonces $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil.

Demostración. Ver [7] 3.10. □

Los γ -points dan lugar a un método de reducción de un punto muy general, ya que $X \searrow X \setminus \{x\}$ es "casi" equivalente a que $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ sea una equivalencia homotópica débil.

Teorema 5.2.5. Si X es un espacio finito, y x es un punto que no es ni maximal ni minimal de X tal que $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil. Entonces x es un γ -point.

Demostración. Ver [7] 3.13. □

El teorema falla si x es maximal o minimal. Para notarlo, basta considerar el siguiente ejemplo ([7] 3.14). Sea X un espacio acílico con grupo fundamental no trivial y $S(X) = X \oplus \{-1, 1\}$ la suspensión no Hausdorff de X . $S(X)$ es acílico y simplemente conexo (aplicando Mayer-Vietoris y Van Kampen respectivamente). Luego, por Hurewicz, es homotópicamente trivial y entonces $X \cup \{1\} \hookrightarrow S(X)$ es una equivalencia débil. Pero -1 no es un γ -point de $S(X)$, pues $\hat{C}_{-1}^{S(X)} = X$, que no es simplemente conexo por hipótesis (y luego, no es homotópicamente trivial).

El siguiente resultado afirma que remover γ -points no altera el tipo homotópico simple del espacio finito.

Proposición 5.2.6. *Si $X \setminus Y$, entonces $X \setminus Y$.*

Demostración. Se deduce de 5.3.1. □

A diferencia de los colapsos, los γ -colapsos no inducen colapso simplicial entre los complejos asociados. Por ejemplo, si D es una triangulación del Dunce Hat, $C(\mathcal{X}(D)) \setminus Y \not\sim \mathcal{X}(D)$, pero, por 1.3.40, $\mathcal{K}(C(\mathcal{X}(D))) = aD' \setminus K'$.

Otra "desventaja" de los γ -points es que no pueden identificarse mediante un algoritmo, pues para hacerlo es necesario decidir de manera algorítmica si \hat{C}_x es homotópicamente trivial, lo cual no es posible.

Definimos un nuevo método de reducción de un punto más general que los weak points, pero menos general que los γ -points, que puede calcularse mediante un algoritmo e induce colapso a nivel simplicial. La definición es recursiva.

Definición 5.2.7. Sean X un espacio finito y x un punto de X .

Diremos que x es un 0-weak point si x es un beat point. Diremos que X es 0-colapsable si X es contrátil.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Diremos que x es un n -weak point si \hat{C}_x es $(n-1)$ -colapsable. En ese caso, diremos que hay un n -colapso elemental de X a $X \setminus \{x\}$.

Diremos que X es n -colapsable existe una sucesión finita de n -colapsos elementales que comienza en X y termina en un punto.

Notar que los 1-weak points son los weak points definidos por Barmak y Minian, y que si x es un n -weak point para algún $n \in \mathbb{N}_0$, entonces en particular es un γ -point. Además si x es un n weak point, en particular es un $(n+1)$ -weak point.

Proposición 5.2.8. *Sean X un espacio finito y x un punto de X . Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, si x es un n -weak point de X , entonces $\mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{K}(X \setminus \{x\})$. En particular, $X \setminus X \setminus \{x\}$.*

Demostración. Por inducción en n .

Si $n = 0$, x es un 0-weak point si y sólo si es un beat point, es decir, $X \setminus X \setminus \{x\}$. Luego, por 2.5.9, $\mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{K}(X \setminus \{x\})$.

Supongamos que la afirmación vale para n . Sea x un $(n+1)$ -weak point. Entonces \hat{C}_x es n -colapsable, es decir, existe una sucesión finita de n -colapsos elementales que comienza en \hat{C}_x y termina en un punto. Luego, por hipótesis inductiva, $\mathcal{K}(\hat{C}_x) = lk(x, \mathcal{K}(X)) \setminus *$. Pero esto es equivalente (1.3.42) a que $\mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{K}(X \setminus \{x\})$. □

Ejemplo 5.2.9. Sea W el espacio finito denominado *Wallet* (ver Figura 2.15). Dado que W es colapsable pero no es contrátil, resulta que $C(W)$ no 1-colapsa a W , pero sí 2-colapsa a W , y entonces $\mathcal{K}(C(W)) \setminus \mathcal{K}(W)$.

Resumiendo, las principales ventajas de los n -weak points son:

- son más generales que los weak points;
- existe un algoritmo para detectarlos;
- inducen colapso en el complejo simplicial asociado.

Observación 5.2.10. Para complejos simpliciales vale que si $K \searrow L$, los colapsos pueden ordenarse de manera decreciente en dimensión. Más precisamente, si

$$K \searrow^e K \setminus \{\sigma, \tau\} \searrow^e K \setminus \{\sigma, \tau, \sigma', \tau'\} \text{ y } \dim(\tau') > \dim(\tau),$$

entonces

$$K \searrow^e K \setminus \{\sigma', \tau'\} \searrow^e K \setminus \{\sigma', \tau', \sigma, \tau\}.$$

La situación no es tan sencilla en el ámbito de los espacios finitos. Supongamos que

$$X \searrow^e X \setminus \{x_1\} \searrow^e X \setminus \{x_1, x_2\}, \text{ con } x_1 < x_2.$$

Veamos cuándo $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{x_2\}) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{x_2, x_1\})$:

- x_1 es **down weak point** de X , x_2 es **up weak point** de $X \setminus \{x_1\}$. Dado que $\hat{F}_{x_2}^X = \hat{F}_{x_2}^{X \setminus \{x_1\}}$ y $\hat{U}_{x_1}^{X \setminus \{x_2\}} = \hat{U}_{x_1}^X$, claramente $X \searrow^e X \setminus \{x_1\} \searrow^e X \setminus \{x_1, x_2\}$.

- x_1 es **down weak point** de X , x_2 es **down weak point** de $X \setminus \{x_1\}$.

Dado que $\hat{U}_{x_2}^{X \setminus \{x_1\}} = \hat{U}_{x_2}^X$, x_1 es down weak point de $X \setminus \{x_2\}$ y entonces $X \setminus \{x_2\} \searrow^e X \setminus \{x_2, x_1\}$.

Además, por un lado, $\hat{U}_{x_1}^{\hat{U}_{x_2}^X} = \hat{U}_{x_1}^X$ es contráctil y entonces $\hat{U}_{x_2}^X \searrow^e \hat{U}_{x_2}^X \setminus \{x_1\}$. Por el otro, $\hat{U}_{x_2}^X \setminus \{x_1\} = \hat{U}_{x_2}^{X \setminus \{x_1\}}$ también es contráctil. Luego, $\hat{U}_{x_2}^X \searrow^e \hat{U}_{x_2}^X \setminus \{x_1\} \searrow^e *$. En particular, $\hat{U}_{x_2}^X$ es colapsable. En otras palabras, x_2 es 2-down weak point de X y $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{x_2\})$.

- x_1 es **up weak point** de X , x_2 es **up weak point** de $X \setminus \{x_1\}$.

Claramente x_2 es up weak point de X y entonces $X \searrow^e X \setminus \{x_2\}$.

Veamos condiciones para que x_1 sea weak point de $X \setminus \{x_2\}$.

- Dado que $\hat{F}_{x_1}^X$ es contráctil, si x_2 fuera beat point de $\hat{F}_{x_1}^X$ resultaría $\hat{F}_{x_1}^{X \setminus \{x_2\}}$ contráctil y x_1 up weak point de $X \setminus \{x_2\}$. Pero x_2 es up beat point de $\hat{F}_{x_1}^X$ si y sólo si ya era up weak point de X (lo descartamos pues este caso no es interesante). Y x_2 es down point de $\hat{F}_{x_1}^X$ si y sólo si $\{y \in X : x_1 < y < x_2\}$ tiene máximo.
- Notar que $\{y \in \hat{F}_{x_1}^{X \setminus \{x_2\}} : y \text{ comparable con } x_2\} = \{y \in X : x_1 < y < x_2\} \oplus \hat{F}_{x_2}^X$, que es contráctil pues x_2 es up weak point de X y join de espacios contráctiles es contráctil.

En conclusión, x_1 resulta up weak point de $X \setminus \{x_2\}$ si o bien $\{y \in X : x_1 < y < x_2\}$ tiene máximo o bien $\nexists y > x_1$ no comparable con x_2 .

- x_1 es **up weak point** de X , x_2 es **up weak point** de $X \setminus \{x_1\}$. Este es el caso más difícil de analizar.

Hallemos condiciones para que $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{x_2\})$.

Dado que $\hat{U}_{x_2}^{X \setminus \{x_1\}} = \hat{U}_{x_2}^X \setminus \{x_1\}$ es contráctil, para que $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{x_2\})$ basta pedir que x_1 sea n -weak point de $\hat{U}_{x_2}^X$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Pero x_1 es n -down weak point de $\hat{U}_{x_2}^X$ si

y sólo si lo es de X ; y x_1 es n -up weak point de $\hat{U}_{x_2}^X$ si y sólo si $\{y \in X : x_1 < y < x_2\}$ es $(n-1)$ -colapsable.

Veamos ahora condiciones para que $\mathcal{K}(X \setminus \{x_2\}) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{x_2, x_1\})$.

(i) Dado que $\hat{F}_{x_1}^X$ es contráctil, si x_2 es (down) beat point de $\hat{F}_{x_1}^X$ (o sea, si $\{y \in X : x_1 < y < x_2\}$ tiene máximo), resulta $\hat{F}_{x_1}^{X \setminus \{x_2\}}$ contráctil y luego $X \setminus \{x_2\} \searrow^e X \setminus \{x_2, x_1\}$.

(ii) Notar que

$$\begin{aligned}\hat{F}_{x_1}^{X \setminus \{x_2\}} &= \{y \in \hat{F}_{x_1}^{X \setminus \{x_2\}} : y \text{ comparable con } x_2\} \cup \{y > x_1 : y \text{ no comparable con } x_2\} \\ &= \{y \in X : x_1 < y < x_2\} \oplus \hat{F}_{x_2}^X \cup \{y > x_1 : y \text{ no comparable con } x_2\}.\end{aligned}$$

Si $\nexists y > x_1$ no comparable con x_2 , asumiendo que $\{y \in X : x_1 < y < x_2\}$ es n -colapsable, resulta $\hat{F}_{x_1}^{X \setminus \{x_2\}}$ n -colapsable.

Resumiendo, para que $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{x_2\}) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{x_2, x_1\})$ basta que $\{y \in X : x_1 < y < x_2\}$ tenga máximo o que $\{y \in X : x_1 < y < x_2\}$ sea n -colapsable para algún $n \in \mathbb{N}_0$ y $\nexists y > x_1$ no comparable con x_2 .

Del razonamiento anterior puede deducirse la siguiente

Proposición 5.2.11. *Sean X un espacio finito, y $x_1 < x_2 \in X$ tales que $X \searrow^e X \setminus \{x_1\} \searrow^e X \setminus \{x_1, x_2\}$. Si o bien $\{y \in X : x_1 < y < x_2\}$ tiene máximo o bien $\nexists y > x_1$ no comparable con x_2 y $\{y \in X : x_1 < y < x_2\}$ es n -colapsable para algún $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{x_2\}) \searrow \mathcal{K}(X \setminus \{x_2, x_1\})$.*

Valen resultados similares para $x_1 > x_2$. Notar que si x_1 y x_2 no fueran comparables, claramente se puede revertir el orden de los colapsos.

Definición 5.2.12. Sean X, Y espacios finitos T_0 .

Diremos que X n -colapsa a Y si existe una sucesión de n -colapsos elementales que parten de X y terminan en Y . Lo notamos $X \searrow^n Y$.

Valen resultados que relacionan la n -colapsabilidad con el join, producto y wedge análogos a 2.6.14, 2.6.18, y 2.6.22. Se prueban por inducción, bajo las mismas ideas que las proposiciones que generalizan.

La noción de n -colapsabilidad permite generalizar las qc-reducciones.

Proposición 5.2.13. *Sea X espacio finito.*

Si a_1, \dots, a_n son puntos de X no comparables dos a dos tales que $\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$ es k -colapsable, entonces $X \searrow^e Y = X \cup \{c\} \searrow_k Y \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, con $c > a_i \forall i$.

Si además a_1, \dots, a_m son puntos máximos, entonces

$$X \searrow^e Y = X \cup \{c\} \searrow Y \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_r\},$$

donde $b_i \in X$ cumple $\hat{F}_{b_i} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

En particular, si $n =$ longitud máxima de las cadenas en X , entonces

$$\mathcal{K}(X) \text{ se } (n+1)\text{-deforma en } \mathcal{K}(Y \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_r\}).$$

Notar que vale el análogo de la proposición anterior para minimales.

*Demuestra*ón. Sigue de combinar la demostración de 4.4.7 con la del resultado que da origen a las qc-reducciones. \square

Para finalizar, queremos notar que existen definiciones análogas a las de 5.2.7 y 5.2.12 en el contexto de los complejos simpliciales [8].

Definición 5.2.14. Sea K un complejo simplicial. Diremos que K es 0 -colapsable si $K \searrow *$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $v \in V_K$, diremos que hay un n -colapso elemental de K a $K \setminus \{v\}$ si $\text{lk}(v, K)$ es $(n-1)$ -colapsable.

Diremos que K es n -colapsable existe una sucesión finita de n -colapsos elementales que comienza en K y termina en un punto.

Dados K y L complejos simpliciales, diremos que K n -colapsa a L si existe una sucesión de n -colapsos elementales que parten de K y terminan en L . Lo notamos $K \searrow^n L$.

Los complejos n -colapsables son, en particular, $(n+1)$ -colapsables. Vale que esta implicación es estricta para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Observación 5.2.15. Si hay un n -colapso elemental de K a $K \setminus \{v\}$, entonces, en particular, hay un colapso elemental de K a $K \setminus \{v\}$ (es decir, $K \searrow K \setminus \{v\}$).

Este resultado se prueba por inducción en n .

El caso $n = 0$ es la proposición 1.3.44.

Veamos el paso inductivo. Si hay un n -colapso elemental de K a $K \setminus \{v\}$, entonces $\text{lk}(v, K)$ es $(n-1)$ -colapsable. Por hipótesis inductiva, dado que todo $(n-1)$ -colapso elemental implica uno simplicial, $\text{lk}(v, K)$ es colapsable. Por proposición 1.3.42, $K \searrow K \setminus \{v\}$.

Definición 5.2.16. Un complejo simplicial se dice *no evasivo* si es n -colapsable para algún $n \in \mathbb{N}_0$.

Notar que todo complejo no evasivo es, en particular, colapsable simplicialmente.

En la siguiente proposición relacionamos las nociones de n -colapsabilidad de espacios finitos y de complejos simpliciales, ofreciendo un resultado más preciso que 5.2.8, con demostración análoga.

Proposición 5.2.17. Sean X e Y espacios finitos. Si $X \searrow^n Y$, entonces $\mathcal{K}(X) \searrow^n \mathcal{K}(Y)$.

*Demuestra*ón. Lo vemos por inducción en n . El caso $n = 0$ es el teorema 2.5.9, (a). Veamos el paso inductivo. Supongamos que $X \searrow^n X \setminus \{x\}$. Entonces \hat{C}_x es $(n-1)$ -colapsable. Por hipótesis inductiva, $\mathcal{K}(\hat{C}_x) = \text{lk}(x, \mathcal{K}(X))$ es $(n-1)$ -colapsable. Luego, $\mathcal{K}(X) \searrow^n \mathcal{K}(X \setminus \{x\})$. El resultado sigue por inducción en la cantidad de n -colapsos elementales necesarios para llegar de X a Y . \square

5.3 Tipo homotópico débil y homología de espacios finitos

El siguiente teorema muestra que los métodos de reducción de un punto, una arista o una relación no son suficientes para describir todos los tipos homotópicos débiles de los espacios finitos. En efecto, utilizando estos métodos no podremos obtener espacios débilmente equivalentes que no sean simplemente equivalentes. El ítem (i) se encuentra en [7]. Los ítems (ii) e (iii) son originales.

Teorema 5.3.1. Sea X un espacio finito.

- (i) Sea $x \in X$. Si la inclusión $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil, entonces induce una equivalencia homotópica simple $|\mathcal{K}(X \setminus \{x\})| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)|$. En particular, $X \setminus \{x\} \searrow X$.

- (ii) Sea $x \prec y$ relación de cubrimiento en X . Si la inclusión $i : X \setminus \{x \prec y\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil, entonces induce una equivalencia homotópica simple $|\mathcal{K}(X \setminus \{x \prec y\})| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)|$. En particular, $X \setminus \{x \prec y\} \wedge X$.
- (iii) Sea (x, y) una arista del diagrama de Hasse de X . Sea Y el espacio finito que tiene como diagrama de Hasse a $\mathcal{H}(X) \setminus \{(x, y)\}$. Si la inclusión $i : Y \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil, entonces induce una equivalencia homotópica simple $|\mathcal{K}(Y)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)|$. En particular, $Y \wedge X$.

Para demostrar el teorema anterior necesitamos el siguiente resultado de Whitehead, cuya demostración puede hallarse en [14], 20.1.

Lema 5.3.2. *Sea (K, L) es un CW-par tal que L es retracto por deformación fuerte de K . Si las componentes conexas de $K \setminus L$ son simplemente conexas, entonces $L \hookrightarrow K$ es una equivalencia homotópica simple.*

Demostración de 5.3.1.

- (i) Por un lado, dado que $X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil, $|\mathcal{K}(X \setminus \{x\})| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)|$ es una equivalencia homotópica entre CW-complejos. Luego, $|\mathcal{K}(X \setminus \{x\})|$ es un retracto por deformación fuerte de $|\mathcal{K}(X)|$ (ver [17], 0.20).

Por el otro,

$$|\mathcal{K}(X)| \setminus |\mathcal{K}(X \setminus \{x\})| = \text{st}(\{x\}),$$

que es contráctil pues es estrellado en x .

- (ii) De manera análoga a (i), $|\mathcal{K}(X \setminus \{x \prec y\})|$ es un retracto por deformación fuerte de $|\mathcal{K}(X)|$.

Además,

$$|\mathcal{K}(X)| \setminus |\mathcal{K}(X \setminus \{x \prec y\})| = \bigcup_{\substack{c \text{ cadena de } X \\ c > \{x, y\}}} c = \text{st}(\{x, y\})$$

(notar que $\{x, y\}$ es un 1-símplex de $\mathcal{K}(X)$). Luego, es contráctil (por ser estrellado en cualquier punto de $\text{st}(\{x, y\})$).

- (iii) De manera análoga a (i), $|\mathcal{K}(Y)|$ es un retracto por deformación fuerte de $|\mathcal{K}(X)|$.

Dado que quitar una arista del diagrama de Hasse es quitar un conjunto de relaciones, el conjunto de relaciones en el espacio Y es un subconjunto de las relaciones en X ; y luego, el conjunto de cadenas en Y es un subconjunto de las cadenas en X .

Partimos de la siguiente igualdad

$$|\mathcal{K}(X)| \setminus |\mathcal{K}(Y)| = \left\{ \sum_i t_i x_i : t_i > 0, \sum_i t_i = 1, x_1 < \dots < x_n \text{ cadena en } X \text{ pero no en } Y \right\}.$$

Notar que las cadenas en X cuyos elementos no son comparables con x e y son cadenas en Y . Luego, $|\mathcal{K}(X)| \setminus |\mathcal{K}(Y)| \subset \text{st}(\{x, y\})$. Pero de las cadenas con elementos comparables con x e y , hay algunas que continúan siendo cadenas en Y , y otras que no. Por ejemplo, si el mínimo de una cadena c es mayor que y , o el máximo es menor que x , entonces c es cadena en Y .

Llamamos $\mathcal{C}_Y(x, y)$ al conjunto de cadenas de Y con elementos comparables con x e y . Vale que

$$|\mathcal{K}(X)| \setminus |\mathcal{K}(Y)| = \text{st}(\{x, y\}) \setminus \mathcal{C}_Y(x, y).$$

El espacio anterior es contráctil (por ser estrellado en cualquier punto de $\text{st}(\{x, y\}) \subset \text{st}(\{x, y\}) \setminus \mathcal{C}_Y(x, y)$). \square

Para concluir, queremos destacar que no es posible hallar algoritmo que decida si un espacio finito es homotópicamente trivial. Esto se deduce de que no existe un algoritmo que decida si una esfera homológica es una esfera [21].

Veamos a continuación un método de reducción de un punto que preserva los grupos de homología.

Definición 5.3.3. Un punto x de un espacio finito $T_0 X$ es un H -*point* si \hat{C}_x es acíclico.

Proposición 5.3.4. *Sea x un punto de un espacio finito $T_0 X$. La inclusión $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ induce isomorfismos en todos los grupos de homología si y sólo si x es un H -point.*

Demostración. Ver [7], 3.11. □

Dado un espacio finito, no es posible, en general, mediante una sucesión de reducciones de H -points, un espacio de cardinal mínimo con los mismo grupos de homología.. En efecto, el espacio finito D (Figura 5.4) es acíclico, pero no tiene ningún H -point.

Las herramientas con las que contamos hasta el momento, basadas en métodos de reducción, para analizar el tipo homotópico débil y la homología de los espacios finitos no son suficientes.

Existe otro tipo de herramienta que permite analizar de manera combinatoria estas propiedades: la teoría de Morse discreta para posets. Mediante la misma, el problema de obtener información sobre el tipo homotópico débil y homología de un espacio finito se reduce a hallar matchings acíclicos en su diagrama de Hasse.

Realizamos un estudio de este otro modo de acercarnos al problema en los siguientes capítulos.

Capítulo 6

Teoría de Morse discreta

6.1 Introducción

La teoría de Morse (clásica) es una de las teorías más poderosas y bellas utilizadas para el estudio de la topología de las variedades diferenciables. Existe una íntima relación entre la topología de una variedad diferenciable M y los puntos críticos de las funciones diferenciables de M a valores reales. Un ejemplo básico de esto es el hecho que si M es compacta, entonces la función alcanza máximo y mínimo. La teoría de Morse clásica investiga la topología de las variedades compactas por medio de ciertas funciones diferenciables, llamadas funciones de Morse. Concretamente, una función de Morse permite describir el tipo homotópico de la variedad como el de un CW-complejo con una p -celda por cada punto crítico de índice p de una función de Morse. Para una exposición completa de la teoría de Morse clásica, remitimos al lector a [24].

En 1995, R. Forman [15] desarrolla una adaptación de la teoría de Morse clásica aplicable a los complejos simpliciales (o, más generalmente, a los complejos celulares). Esta teoría recibió el nombre de teoría de Morse discreta, y presenta resultados en el contexto discreto, análogos a los de la teoría clásica.

Poco después, M. Chari [13] interpreta la teoría de Forman en el contexto de los posets. Recientemente, G. Minian [25] extiende el campo de aplicación de la teoría de Morse para posets a una clase más extensa que los face posets de CW- complejos regulares: los denominados posets admisibles. Introduce también una versión homológica de la teoría, aplicable a una clase más general aún, los posets h -admisibles. Esta última clase contiene a los posets cuyos complejos asociados son variedades homológicas triangulables. De esta forma, esta teoría discreta puede ser aplicada en el contexto de las variedades (topológicas, diferenciables), permitiendo de este modo desarrollar nuevas herramientas discretas para analizar problemas topológicos o diferenciables. Como aporte original, exhibiremos la validez de la versión para homotopía simple de uno de sus teoremas principales (6.4.1).

A lo largo de este capítulo, repasaremos los resultados principales del desarrollo de esta teoría, enfocándonos en las ideas. No será una exposición exhaustiva. Por el contrario, constituirá un nexo entre el estudio del tipo homotópico y homología (desarrollado mediante métodos de reducción en capítulos anteriores) y el problema de optimización combinatoria en el cual lo convierte la teoría de Morse para posets (que será estudiado en el siguiente capítulo).

6.2 Teoría de Forman

Dado K un complejo simplicial finito, es esperable que K tenga una descomposición como CW-complejo con menos celdas que la descomposición original como complejo simplicial. ¿Cómo hallar una descomposición "eficiente" de K como CW-complejo? En esta sección, presentaremos una teoría muy útil en ese sentido: la teoría de Morse discreta, desarrollada por R. Forman en la década del '90.

Nota: las ideas que desarrollaremos pueden aplicarse, de manera idéntica, a un complejo celular finito. Sin embargo, por simplicidad, centraremos la explicación en los complejos simpliciales finitos.

Comenzamos exponiendo las definiciones necesarias para la presentación de la teoría.

Uno de los conceptos principales es el de función de Morse discreta, que jugará el papel análogo al de las funciones de Morse diferenciables en la teoría clásica.

Dado K un complejo simplicial finito, una función de Morse discreta en K es, a grandes rasgos, una aplicación que asigna un número real a cada simplex de K , tal que a mayor dimensión del simplex más alto el número asignado, pero con un permiso restringido de que esta relación "falle". Más precisamente,

Definición 6.2.1. Sea K un complejo simplicial finito.

Una función

$$f : K \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una *función de Morse discreta* si para cada $\alpha \in K$ se cumplen las siguientes condiciones:

- $|\{\beta \in K : \beta \succ \alpha, f(\beta) \leq f(\alpha)\}| \leq 1$
- $|\{\gamma \in K : \gamma \prec \alpha, f(\gamma) \geq f(\alpha)\}| \leq 1$.

En otras palabras, f es una función de Morse discreta sobre K si para cada simplex $\alpha \in K$, f decrece hacia las caras inmediatas de α con excepción de, quizás, una de ellas y crece hacia los simplices de los que α es cara inmediata con excepción de, quizás, uno de ellos.

Ejemplo 6.2.2.

Consideramos el complejo simplicial K de la siguiente figura:

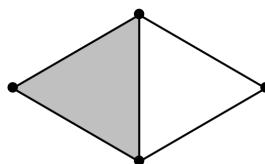
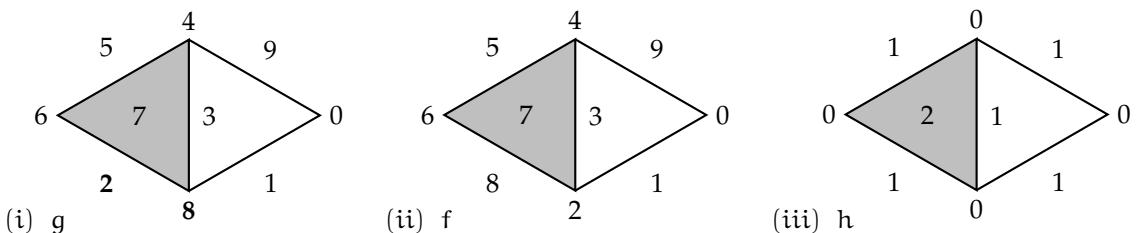


Figura 6.1: K .

y las siguientes funciones a valores reales en el conjunto de sus simplices:



(i) g no es una función de Morse, pues las dos caras de $g^{-1}(2)$ tienen valores mayores que 2. Además $g^{-1}(8)$ es cara de dos 1-simplices con valores menores que 8.

(ii) f es una función de Morse.

(iii) $h(\alpha) = \dim(\alpha)$ es la función de Morse trivial.

Otro concepto que constituye un pilar en la teoría de Morse discreta es el de punto crítico de una función de Morse discreta. Hace referencia a los simplices de K para los cuales la relación de crecimiento descripta anteriormente no "falla". Más formalmente,

Definición 6.2.3. Sea K un complejo simplicial con una función de Morse f .

Un simplex α de K es *crítico* si cumple las siguientes condiciones:

- $|\{\beta \in K : \beta \succ \alpha, f(\beta) \leq f(\alpha)\}| = 0$
- $|\{\gamma \in K : \gamma \prec \alpha, f(\gamma) \geq f(\alpha)\}| = 0$.

Un simplex α es *regular* si no es crítico, es decir, si α no cumple alguna de las condiciones anteriores.

Notar que, si nos situamos en el baricentro de un p -simplex crítico, la función decrece en p direcciones (correspondientes a las caras del simplex) y crece en $\dim(K) - p$ direcciones (correspondientes a los simplices de los cuales el simplex es cara). Esto es lo que sucede exactamente en el caso diferenciable con los puntos críticos de índice p .

En el ejemplo anterior, la función f tiene como únicos puntos críticos al 1-simplex $f^{-1}(9)$ y al 0-simplex $f^{-1}(0)$; por su parte, la función h tiene a todos los simplices del dominio como puntos críticos.

Resulta pertinente notar que, dadas las condiciones que cumple una función de Morse, los puntos regulares **no cumplen sólo una** de las dos condiciones de crecimiento anteriores. Esto es lo que enuncia el siguiente

Lema 6.2.4. Si K es un complejo simplicial con una función de Morse f , entonces para cada simplex α

- o bien $|\{\beta \in K : \beta \succ \alpha, f(\beta) \leq f(\alpha)\}| = 0$,
- o bien $|\{\gamma \in K : \gamma \prec \alpha, f(\gamma) \geq f(\alpha)\}| = 0$.

Nos encontramos en condiciones de enunciar el teorema principal de la teoría de Morse discreta.

Teorema 6.2.5 (Forman). Sea K un complejo simplicial con una función de Morse. Entonces K es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con exactamente una celda de dimensión p por cada simplex crítico de dimensión p .

La idea entonces es hallar funciones de Morse discretas con la menor cantidad de simplices críticos.

No expondremos la demostración del Teorema anterior aquí (puede hallarse en [15]). Simplemente repasaremos las ideas principales de la misma.

Una función de Morse sobre un complejo simplicial K nos provee una manera de construirlo adjuntando simplices en el orden descripto por la misma: agregando primero los simplices con valores asignados más pequeños.

Más precisamente, para cada complejo simplicial K con una función de Morse f , y para cada número real c , definimos el subcomplejo de nivel $K(c)$ como

$$K(c) = \bigcup_{\alpha \in K : f(\alpha) \leq c} \bigcup_{\beta \leq \alpha} \beta = \overline{\{\alpha \in K : f(\alpha) \leq c\}};$$

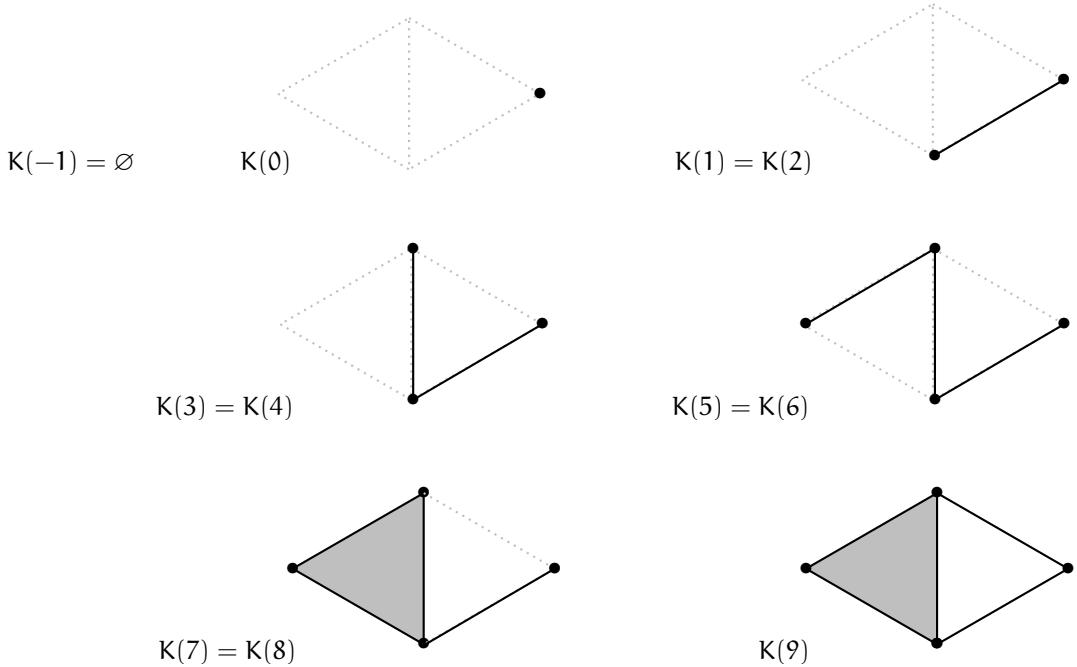
es decir, $K(c)$ es el subcomplejo que consiste en los simplices α de K tales que $f(\alpha) \leq c$ y todas sus caras.

El Teorema 6.2.5 sigue de los siguientes Lemas.

Lema 6.2.6. *Si no existen simplices críticos α tales que $f(\alpha) \in (a, b]$, entonces $K(b) \simeq K(a)$. Más aún, $K(b) \searrow K(a)$.*

Lema 6.2.7. *Si existe un único simplex crítico α tal que $f(\alpha) \in (a, b]$, entonces existe una función $\psi : S^{d-1} \rightarrow K(a)$, donde $d = \dim(\alpha)$, tal que $K(b) \simeq K(a) \cup_{\psi} B^d$.*

Mostramos a continuación los subcomplejos de nivel correspondientes a la función de Morse f definida en el ejemplo 6.2.2.



Notar que en la transición de $K(-1)$ a $K(0)$, agregamos un 0-símplex crítico (adjuntamos una 0-celda); y en la transición de $K(8)$ a $K(9)$, agregamos un 1-símplex crítico (adjuntamos una 1-celda).

Lo anterior ocurre en general. En efecto, sea α un p -símplex crítico. Por definición, cada cara inmediata de α tiene asignado un valor menor que el de α , y entonces toda cara inmediata (y luego, toda cara) de α "aparece" en un subcomplejo de nivel anterior. Por lo tanto, todo el borde de α "aparece" en un subcomplejo nivel anterior, y entonces cuando llega el momento de añadir α , hay que "pegarlo" a lo largo de todo su borde. Este es, precisamente, el proceso de adjunción de un p -cela.

El resto de las transiciones, en las que agregamos simplices regulares, se corresponden con expansiones elementales. Veamos por qué ocurre lo anterior. Sea α un p -símplex regular que "aparece" por primera vez en el subcomplejo de nivel $K(r)$. Por definición de simplex regular, dado que todos los simplices de los cuales es cara tienen valores no inferiores a r , existe (exactamente) una cara inmediata τ de α con valor superior a r . Dado que $K(r)$ debe ser subcomplejo de K , debemos agregar también τ . Luego, τ resulta cara libre de α en $K(r)$.

Finalizamos de este modo el análisis de la demostración del Teorema 6.2.5.

Sea \mathbb{F} un cuerpo y $b_j = \dim H_p(K, \mathbb{F})$ el número de Betti de K de dimensión j sobre \mathbb{F} . De modo análogo a la teoría clásica, la teoría de Morse discreta nos provee las siguientes cotas en el número c_j de simplices críticos de dimensión j de una función de Morse en K .

Teorema 6.2.8 (Forman). *Las desigualdades de Morse débiles.*

- Para cada $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, donde n es la dimensión de K ,

$$c_p \geq b_p.$$

- $c_0 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^n c_n = b_0 - b_1 + b_2 - \dots + (-1)^n b_n = \chi(K)$.

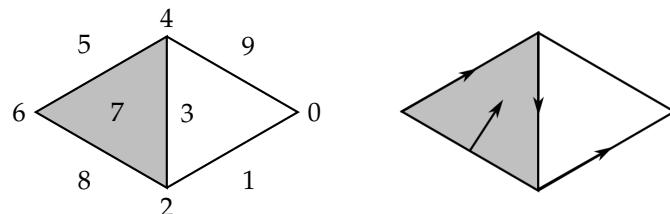
Las desigualdades de Morse fuertes. Para cada $p \in \{0, 1, 2, \dots, n, n+1\}$,

$$c_p - c_{p-1} + \dots + (-1)^p c_0 \geq b_p - b_{p-1} + \dots + (-1)^p b_0.$$

En la práctica no es necesario hallar funciones de Morse, pues basta con dar un *campo vectorial gradiente*. Describiremos a continuación los campos gradientes, que son los análogos a los inversos (i.e. con signo contrario) a los campos gradientes clásicos ya que apuntan para la dirección donde la función decrece.

En el estudio de la demostración de 6.2.5, notamos que los simplices regulares vienen de a pares (τ, α) , con $\tau \prec \alpha$ y $f(\alpha) < f(\tau)$. Si indicamos con una flecha (en la dirección donde la dimensión crece) estos pares, las mismas indicarían las deformaciones que tienen asociados.

Por ejemplo, si consideramos la función de Morse f de 6.2.2, los pares de simplices regulares son: $(f^{-1}(6), f^{-1}(5))$, $(f^{-1}(8), f^{-1}(7))$, $(f^{-1}(2), f^{-1}(1))$ y $(f^{-1}(4), f^{-1}(3))$. En la siguiente figura mostramos el esquema de flechas que f tiene asociado.



En conclusión, cada función de Morse tiene asociado un diagrama de flechas en el esquema del complejo simplicial.

Si ahora, partiendo del esquema de un complejo simplicial, deseamos graficar flechas que representen deformaciones del tipo considerado, entonces existen ciertas restricciones a tener en cuenta:

- Cada simplex es origen de al menos una flecha.
- Cada simplex "contiene" a lo sumo una flecha.
- Un simplex no puede "contener" una flecha y ser origen de otra.
- No debe haber ciclos dirigidos de flechas.

Estos requisitos son obligatorios para que las deformaciones subyacentes estén bien definidas. Veremos que estas propiedades son suficientes para garantizar que un diagrama de flechas sobre un esquema de un complejo simplicial representa deformaciones consideradas por esta teoría (inducidas por alguna función de Morse).

Comenzamos formalizando la idea del diagrama de flechas con las restricciones anteriores, en la siguiente

Definición 6.2.9. Sea K un complejo simplicial finito.

Un *campo vectorial discreto* en K es una colección de pares de simplices $V = \{(\alpha, \beta) : \alpha \prec \beta\}$ de K tal que cada simplex está en a lo sumo un par de V .

Si f es una función de Morse sobre K , el *campo gradiente* de f es el campo vectorial $V_f = \{(\alpha, \beta) : \alpha \prec \beta \in K, f(\alpha) \geq f(\beta)\}$.

Dado un campo vectorial continuo en una variedad suave, es natural estudiar el sistema dinámico inducido por el flujo a lo largo del campo vectorial. Los campos vectoriales discretos también admiten este tipo de estudio.

Definición 6.2.10. Dado un campo vectorial discreto V en un complejo simplicial K , un V - *camino* es una sucesión finita de simplices

$$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \dots, \beta_r, \alpha_{r+1}$$

tal que para cada $i \in \{0, 1, \dots, r\}$, $(\alpha_i, \beta_i) \in V$ y $\beta_i \succ \alpha_{i+1} \neq \alpha_1$.

El camino se dice *no trivial* si y sólo si $r > 0$; y se dice *cerrado* si $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$.

Si V es el campo gradiente de una función de Morse f , entonces los V - caminos son llamados *caminos gradientes*.

La principal idea que se esconde detrás de la definición anterior es el siguiente resultado.

Teorema 6.2.11 (Forman). *Sea K un complejo simplicial finito con una función de Morse f , y V_f el campo gradiente asociado.*

Una sucesión de simplices de K $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \dots, \beta_r, \alpha_{r+1}$ es un camino gradiente si y sólo si $\alpha_i \prec \beta_i \succ \alpha_{i+1} \forall 0 \leq i \leq r$ y $f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) \geq \dots \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1})$.

En otras palabras, los caminos gradientes de f son sucesiones "continuas" de simplices de dimensiones alternadas a lo largo de las cuales f decrece. En particular, si V es un campo gradiente, entonces no admite V - caminos cerrados no triviales.

El hecho de gran importancia, que permite desligarnos de las funciones de Morse, es que vale la recíproca.

Teorema 6.2.12 (Forman). *Un campo vectorial discreto V es el campo gradiente de una función de Morse f si y sólo si no admite V - caminos cerrados no triviales.*

6.3 El punto de vista combinatorio de Chari

La noción de campo gradiente tiene una descripción puramente combinatoria debida a M. Chari [13] mediante la cual podemos reformular la teoría de Morse de una manera más versátil.

Nota: La teoría puede desarrollarse en el ámbito de los face posets de CW-complejos regulares finitos. Por simplicidad, centraremos la explicación en los face posets de complejos simpliciales finitos.

Comenzamos con el face poset asociado a un complejo simplicial K , es decir, el conjunto parcialmente ordenado de simplices de K ordenado por la relación "ser cara de". Consideramos el

diagrama de Hasse de $\mathcal{X}(K)$ como un grafo dirigido, con las aristas orientadas hacia arriba. Los vértices del digrafo $\mathcal{H}(\mathcal{X}(K))$ están en correspondencia 1 – 1 con los simplices de K , y hay es una arista dirigida de α a β si y sólo si α es cara inmediata de β .

Sea V un campo vectorial discreto sobre K . Modificamos la dirección de las aristas del diagrama de Hasse de $\mathcal{X}(K)$ del siguiente modo. Si $(\alpha, \beta) \in V$ entonces invertimos la orientación de la arista entre α y β , es decir, ahora va de β a α . Llamamos a este digrafo $\mathcal{H}_V(\mathcal{X}(K))$.

Por ejemplo, si consideramos en el complejo K de la siguiente figura

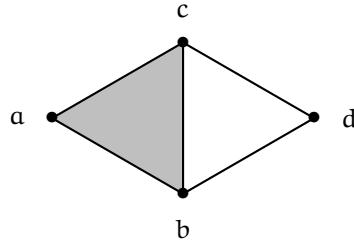


Figura 6.2: K .

el campo vectorial discreto $V = \{(c, bc), (b, bd), (a, ac), (ab, abc)\}$,

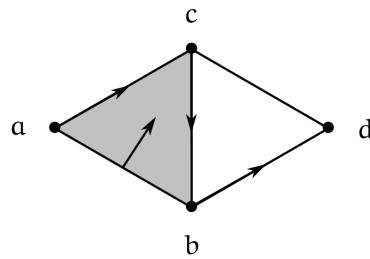


Figura 6.3: V .

entonces el digrafo asociado es

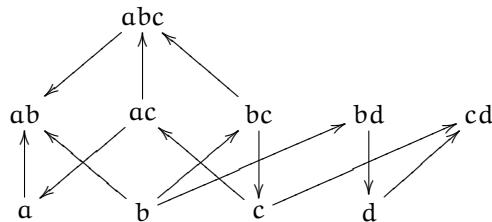


Figura 6.4: $\mathcal{H}_V(\mathcal{X}(K))$.

Luego, los V - caminos pueden pensarse como caminos en el diagrama de Hasse modificado. Sin embargo, hay caminos en el diagrama de Hasse modificado que no son V - caminos. La relación que vale es la siguiente:

Teorema 6.3.1 (Chari). *Sea K un complejo simplicial y V un campo vectorial discreto. No existen V -caminos no triviales cerrados en K si y sólo si no existen caminos dirigidos cerrados no triviales en el diagrama de Hasse modificado.*

En virtud del resultado anterior, traducimos las nociones centrales de la teoría de Morse discreta en términos puramente combinatorios. Un campo vectorial discreto V es un matching en $\mathcal{H}(\mathcal{X}(K))$; y un campo gradiente es un matching acíclico en el sentido anterior¹. Llamaremos a este último tipo de matching, **matching de Morse**.

Reformulemos los teoremas centrales de Forman en este lenguaje.

Teorema 6.3.2. *Sea K un complejo simplicial finito, M un matching acíclico en $\mathcal{H}(\mathcal{X}(K))$. Sea c_p el número de p -símplices libres. Entonces K es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con exactamente c_p celdas de dimensión p , para cada $p \geq 0$.*

Un caso especial importante se da cuando existe un matching acíclico M con un único simplex crítico, pues en tal caso el simplex crítico debe ser de dimensión 0 y K es colapsable.

Teorema 6.3.3. *Si existe M un matching acíclico en el diagrama de Hasse de $\mathcal{X}(K)$ con un único punto crítico, entonces $K \simeq *$.*

Mediante el Teorema 6.3.2 podemos esperar una representación "concisa" de la topología de K (salvo homotopía) calculando un matching Morse con pocos puntos críticos. Esta es la principal motivación para el problema de optimización combinatoria estudiado en el siguiente capítulo.

6.4 Teoría de Morse para posets

La teoría de Forman-Chari se desarrolla en el ámbito de los face posets de complejos simpliciales (o, en general, de CW-complejos regulares).

En 2010, Minian [25] extiende el campo de aplicación del teorema principal de esta teoría a una clase más extensa de posets (que llamó *admisibles*); pero con una demostración basada en la teoría de espacios finitos, que proporciona una nueva visión de la teoría de Morse discreta.

Además, desarrolla una versión homológica de esta teoría, que puede ser aplicada a una clase aún más extensa de posets, denominada *h-admisibles* (que incluye además a los posets cuyo complejo asociado en una variedad homológica cerrada). Afirma que los grupos de homología de un poset homológicamente admisible se pueden calcular mediante un complejo de cadenas construido a partir de los puntos críticos de un matching acíclico en $\mathcal{H}(X)$.

En esta sección repasaremos estos dos teoremas, detallando la demostración del primero para luego exhibir que, con las mismas hipótesis, vale la versión simple; siendo éste último un aporte original.

6.4.1 Tipo homotópico

La versión de la teoría de Morse discreta de Charí permite obtener información sobre tipo homotópico de un complejo simplicial o, en general, de un CW-regular K mediante un matching acíclico en $\mathcal{H}(\mathcal{X}(K))$. Concretamente, dado K complejo celular regular, los puntos críticos de un matching acíclico en $\mathcal{H}(\mathcal{X}(K))$ dan lugar a una descomposición de K como CW-complejo más concisa (salvo homotopía).

La teoría de Morse para posets de Minian se desarrolla en el contexto de los posets *admisibles* (que incluyen, en particular, a los face posets). Sostiene, como resultado principal, que dado un poset admisible X , el tipo homotópico de $\mathcal{K}(X)$ se puede describir con un CW-complejo con tantas p -celdas como puntos críticos de grado p haya en un matching acíclico en $\mathcal{H}(X)$.

Esta teoría extiende a la de Forman-Charí. En efecto, consideremos un espacio topológico K triangulable o, más generalmente, que admite estructura de CW-complejo regular. Entonces $\mathcal{X}(K)$

¹ Para mayor detalle sobre las nociones de grafos y matchings, ver capítulo 7, secciones 7.2 y 7.3.

es admisible, y $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K' \cong K$ tiene el tipo homotópico de un CW-complejo descripto por los puntos críticos de un matching acíclico en $\mathcal{X}(K)$.

Definición 6.4.1. Un poset finito X es *homotópicamente admisible* (o *admissible*) si es graduado² y para todo $x \in X$ y para todo elemento maximal y de \hat{U}_x , el poset $\hat{U}_x \setminus \{y\}$ es homotópicamente trivial.

Observación 6.4.2. Dado K un CW-complejo regular, su poset asociado $\mathcal{X}(K)$ es homotópicamente admisible. Veámoslo:

- $\mathcal{X}(K)$ es graduado, pues para cada celda $e \in \mathcal{X}(K)$, todas las cadenas maximales en U_e son de la forma $e_0 \subset e_1 \subset \dots \subset e_{n-1} \subset e_n = e$, con e_i celda de dimensión i y $n = \dim(e)$.
- Sean $e \in \mathcal{X}(K)$, \tilde{e} maximal en \hat{U}_e . Por ser K un CW-complejo regular, $|\mathcal{K}(\hat{U}_e)|$ es el borde de la celda regular e , y luego es homeomorfo a una esfera. Entonces $|\mathcal{K}(\hat{U}_e \setminus \tilde{e})| = |\mathcal{K}(\hat{U}_e)| \setminus \text{st}(\tilde{e})$, que es retracto de sacarle un punto a la esfera. Deducimos entonces que es contráctil.

El siguiente resultado es una generalización de 6.3.2 a posets homotópicamente admisibles; permite caracterizar el **tipo homotópico** de su complejo simplicial asociado.

Teorema 6.4.3 (Minian). *Sean X un poset homotópicamente admisible y M un matching de Morse en $\mathcal{H}(X)$.*

Entonces $\mathcal{K}(X)$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con exactamente una p -celda por cada punto crítico de X de grado p .

Incluiríremos la demostración del Teorema anterior, junto con los resultados previos que fueron necesarios para realizarla, pues seguiremos el mismo lineamiento en la demostración de su versión simple (6.4.17).

Lema 6.4.4. *Sea*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

un pushout de espacios topológicos y funciones continuas, en el cual i es cofibración cerrada y f equivalencia homotópica. Entonces g es equivalencia homotópica.

Demostración. Ver [11], 7.4.2.o [20], 7.4. □

La siguiente consecuencia del Lema anterior es uno de los resultados que se utilizarán durante la demostración del Teorema 6.4.3.

Corolario 6.4.5. *Sean X un poset finito y $x \in X$ tal que \hat{C}_x es homotópicamente trivial.*

Entonces la inclusión $|\mathcal{K}(X \setminus \{x\})| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)|$ es una equivalencia homotópica.

Demostración. Basta considerar el siguiente pushout:

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(\hat{C}_x)| & \hookrightarrow & |\mathcal{K}(C_x)| \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ |\mathcal{K}(X \setminus \{x\})| & \longrightarrow & |\mathcal{K}(X)| \end{array}$$

²Ver Definición 2.2.6.

Por un lado, $|\mathcal{K}(\hat{C}_x)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X \setminus \{x\})|$ es inclusión de CW-complejos y luego cofibración cerrada.

Por el otro, dado que C_x es contrátil (en particular homotópicamente trivial) y \hat{C}_x es homotópicamente trivial por hipótesis, las realizaciones geométricas de los complejos simpliciales asociados son contráctiles. Luego, $|\mathcal{K}(\hat{C}_x)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(C_x)|$ es una equivalencia homotópica.

El resultado se sigue de la Proposición anterior. \square

Notar que, en realidad ya hemos visto que vale un resultado más general que 6.4.5 en 5.3.1.

El siguiente resultado también se obtiene como corolario de 6.4.4. La demostración puede hallarse en [11], 7.4.3. La incluimos con gran detalle a modo de referencia, pues en el siguiente apartado veremos su versión simple y haremos notar las diferencias y similitudes (ver 6.4.14).

Corolario 6.4.6. *Sean K un complejo simplicial, y K_1, K_2 dos subcomplejos cuyos poliedros asociados son contráctiles y tales que $K = K_1 \cup K_2$. Entonces $|K| \simeq |\Sigma(K_1 \cap K_2)|$, donde $\Sigma(K_1 \cap K_2)$ denota la suspensión del complejo.*

Demostración. Como $|K_1|$ es contrátil (es decir, $\text{id}_{|K_1|} \simeq \text{cte}$), la inclusión $i : |K_1 \cap K_2| \hookrightarrow |K_1|$ es homotópica a una constante ($\text{id}_{|K_1|} \circ i \simeq \text{cte} \circ i = \text{cte}$).

Luego, se extiende a una función continua $f : |v(K_1 \cap K_2)| \hookrightarrow |K_1|$; donde en el cono $v(K_1 \cap K_2)$, $v \notin K$. En efecto, si $H : i \simeq \text{cte}$, $H(|K_1 \cap K_2| \times \{1\}) = *$; y entonces induce una función desde el cono de $|K_1 \cap K_2|$ que coincide con i en $H(|K_1 \cap K_2| \times \{0\})$.

Además, dado que f es una función entre espacios contráctiles, es una equivalencia homotópica.

De manera análoga, existe una función continua $g : |w(K_1 \cap K_2)| \hookrightarrow |K_2|$, con $w \notin K$, que extiende a la inclusión $|K_1 \cap K_2| \hookrightarrow |K_2|$ y resulta equivalencia homotópica.

Consideremos el siguiente diagrama de pushouts

$$\begin{array}{ccccc}
 |K_1 \cap K_2| & \xhookrightarrow{i} & |v(K_1 \cap K_2)| & \xrightarrow{\sim} & |K_1| \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 |w(K_1 \cap K_2)| & \xhookrightarrow{j} & |\Sigma(K_1 \cap K_2)| & \xrightarrow{\sim} & |K_1 \cup w(K_1 \cap K_2)| \\
 \downarrow g \sim & & & & \downarrow \bar{g} \sim \\
 |K_2| & \xrightarrow{\quad} & |K_1 \cup K_2| = |K| & &
 \end{array}$$

Como $v(K_1 \cap K_2)$ es un subcomplejo de $\Sigma(K_1 \cap K_2)$ (y entonces la inclusión es cofibración cerrada) y f es equivalencia homotópica; por 6.4.4, $\bar{f} : |\Sigma(K_1 \cap K_2)| \hookrightarrow |K_1 \cup w(K_1 \cap K_2)|$ es una equivalencia homotópica.

La función $\bar{f}j : |w(K_1 \cap K_2)| \hookrightarrow |K_1 \cup w(K_1 \cap K_2)|$ es también una inclusión; y entonces cofibración cerrada. Como g es equivalencia homotópica, nuevamente por 6.4.4, \bar{g} también lo es.

Luego, la composición $\bar{g}\bar{f} : |\Sigma(K_1 \cap K_2)| \hookrightarrow |K_1 \cup K_2| = |K|$ es equivalencia homotópica. \square

La siguiente propiedad es una característica muy fuerte que tienen los posets homotópicamente admisibles.

Proposición 6.4.7. *Sea X un poset homotópicamente admisible. Entonces para todo $x \in X$ de grado n , \hat{U}_x es un modelo de la esfera S^{n-1} (es decir, $\mathcal{K}(\hat{U}_x) \simeq S^{n-1}$).*

Demostración. Procedemos por inducción en n .

El caso $n = 1$ es evidente.

Supongamos que la Proposición es verdadera para los puntos de X de grado n . Sea $x \in X$ de grado $n + 1$. Sea y un elemento maximal de \hat{U}_x . Notar que $\hat{U}_x = \hat{U}_x \setminus \{y\} \cup U_y$. Por un

lado, por hipótesis, $\hat{U}_x \setminus \{y\}$ es homotópicamente trivial. Por el otro, U_y es contrátil, y luego homotópicamente trivial. Además, $\hat{U}_x \setminus \{y\} \cap U_y = \hat{U}_y$, que es un modelo de S^{n-1} por hipótesis inductiva. Luego, aplicando 6.4.6 a $K = K(\hat{U}_x)$, $K_1 = K(\hat{U}_x \setminus \{y\})$ y $K_2 = K(U_y)$, resulta que $K(\hat{U}_x) \simeq \Sigma(\hat{U}_y) \simeq \Sigma(S^{n-1}) = S^n$. \square

En la demostración del Teorema 6.4.3 juega un rol fundamental el siguiente Teorema, que permite obtener una nueva equivalencia homotópica a partir de un cubo commutativo que cumple ciertas condiciones.

Teorema 6.4.8 (Gluing Theorem). *Sea*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A_0 & \longrightarrow & A_1 \\
 & \swarrow h_0 & \downarrow f & \searrow h_1 & \\
 B_0 & \longrightarrow & B_1 & & \\
 \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \searrow h_2 & & \longrightarrow & h \\
 & B_2 & \longrightarrow & B &
 \end{array}$$

un cubo commutativo de espacios topológicos y funciones continuas; donde los cuadrados de adelante y atrás son pushouts, y las flechas verticales f y g son cofibraciones cerradas.

Si h_0, h_1, h_2 son equivalencias homotópicas, entonces h también lo es.

Demostración. Ver [11], 7.5.7 o y [20], 7.1. \square

Ya estamos en condiciones de exponer la demostración del Teorema 6.4.3.

Demostración del Teorema 6.4.3. Procedemos por inducción en $|X|$.

Si $|X| = 1$, el resultado es evidente.

Supongamos que vale para $|X| = k$. Sea X tal que $|X| = k + 1$, con $n :=$ dimensión de X . Sea $x \in X$ un sumidero³ de $\mathcal{H}_M(X)$ de grado máximo.

Si x es maximal, entonces es crítico (si no lo fuera, entonces incidiría en él una arista cuyo otro extremo tiene grado una unidad mayor, contradiciendo el hecho de que x tiene grado maximal).

Por un lado, notar que $X \setminus \{x\}$ es un subposet admisible de X , y que el matching de Morse M se restringe a un matching de Morse en $\mathcal{H}_M(X \setminus \{x\})$. Luego, podemos usar la hipótesis inductiva en $X \setminus \{x\}$.

Por el otro, utilizaremos el Teorema 6.4.8 para demostrar que $K(X) \simeq K(X \setminus \{x\}) \cup e^n$. Como X es homotópicamente admisible, por 6.4.7, \hat{U}_x es un modelo de S^{n-1} . Puesto que $K(X) = K(X \setminus \{x\}) \cup K(U_x)$, con $K(X \setminus \{x\}) \cap K(U_x) = K(\hat{U}_x)$, tenemos el siguiente cubo commutativo con las caras de adelante y atrás pushouts

³Un sumidero de un digrafo es un nodo al cual sólo llegan aristas.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathcal{K}(\hat{U}_x) & \longrightarrow & \mathcal{K}(X \setminus \{x\}) \\
& \swarrow \sim & \downarrow & \searrow = & \downarrow \\
S^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}(X \setminus \{x\}) & & \\
& \uparrow & \downarrow & & \downarrow \\
& & \mathcal{K}(U_x) & \longrightarrow & \mathcal{K}(X) \\
& \swarrow \sim & \downarrow & \searrow h & \downarrow \\
D^n & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}(X \setminus \{x\}) \cup e^n & &
\end{array}$$

Aplicando 6.4.8, obtenemos la equivalencia homotópica deseada.

Analicemos ahora el caso en el cual x no es maximal en X .

Dado que x es sumidero, $\forall y \succ x, (y, x) \in M; \forall z \prec x, (x, z) \notin M$. Como M es matching, hay un único y elemento que cubre a x .

Veamos que $\deg(x) = n - 1$. Por el absurdo. Supongamos que $\deg(x) < n - 1$. Dado que x es sumidero de grado máximo, todos los elementos de grado n y $n - 1$ no son sumideros. Realicemos entonces el siguiente procedimiento. Tomo y de grado n . Como no es sumidero, existe y_1 de grado $n - 1$ tal que $(y, y_1) \in M$ (es decir, hay una flecha $y \rightarrow y_1$). Como y_1 no es sumidero y M es matching, existe y_2 de grado n tal que $y_1 \prec y_2$ (es decir, hay una flecha $y_1 \rightarrow y_2$). Como y_2 no es sumidero, existe y_3 de grado $n - 1$ tal que $(y_2, y_3) \in M$, y así siguiendo. Dado que el poset es finito, en algún momento $y_i = y$, obteniendo un ciclo y contradiciendo la aciclicidad de M .

En conclusión, $\hat{F}_x = \{y\}$, con y un elemento maximal de X tal que $(y, x) \in M$.

Por un lado, de manera análoga al caso anterior, $X \setminus \{x\}$ es un subposet admisible de X y el matching de Morse M se restringe a un matching de Morse en $\mathcal{H}_M(X \setminus \{x, y\})$. Usaremos la hipótesis inductiva en $X \setminus \{x\}$.

Por el otro, $\hat{C}_x = \text{lk}(x, X) = \hat{U}_x \oplus \hat{F}_x = \hat{U}_x \oplus \{y\}$ un cono, que es contráctil (en particular, homotópicamente trivial). Por 6.4.5, $\mathcal{K}(X \setminus \{x\}) \subset \mathcal{K}(X)$ es un retracto por deformación fuerte.

Además, $\hat{C}_y^{X \setminus \{x\}} = \hat{U}_y^{X \setminus \{x\}} = \hat{C}_y^X \setminus \{x\}$, que es homotópicamente trivial por ser X homotópicamente admisible. Nuevamente por 6.4.5, tenemos $\mathcal{K}(X \setminus \{x, y\}) \subset \mathcal{K}(X \setminus \{x\})$ retracto por deformación fuerte.

Resumiendo, $\mathcal{K}(X \setminus \{x, y\}) \simeq \mathcal{K}(X \setminus \{x\}) \simeq \mathcal{K}(X)$. Es decir, podemos quitar los puntos x e y sin afectar el tipo homotópico de $\mathcal{K}(X)$. \square

Observación 6.4.9. Si llamamos *down* homotópicamente admisible a un poset X que verifica 7.4.9; y *up* homotópicamente admisible a un poset X que verifica el análogo de 7.4.9 para \hat{F}_x (es decir, X es graduado y para todo $x \in X$ y para todo elemento minimal y de F_x , el poset $\hat{F}_x \setminus \{y\}$ es homotópicamente trivial); entonces hay una versión del Teorema 6.4.3 que vale para este último tipo de poset.

En efecto, el Teorema está enunciado para posets **down** homotópicamente admisibles. Supongamos que X es un poset **up** homotópicamente admisible. Entonces X^{op} es *down* homotópicamente admisible. Dado M un matching de Morse en $\mathcal{H}(X)$, también es un matching de Morse en $\mathcal{H}(X^{\text{op}})$ (con los mismos puntos críticos). Por el Teorema 6.4.3, $\mathcal{K}(X^{\text{op}})$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con exactamente una p -celda por cada punto crítico de X^{op} de grado p . Pero $\mathcal{K}(X^{\text{op}}) = \mathcal{K}(X)$.

En resumen, si X es un poset **up** homotópicamente admisible, entonces $\mathcal{K}(X)$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con exactamente una p -celda por cada punto crítico de $X^{\circ p}$ de grado p .

Observación 6.4.10. En la parte de la demostración anterior que se refiere al estudio de x no maximal, resultando $\hat{F}_x = \{y\}$; en realidad se obtiene que

$$\mathcal{K}(X \setminus \{x, y\}) \nearrow \mathcal{K}(X \setminus \{x\}) \nearrow \mathcal{K}(X).$$

Para notarlo, basta recordar la Proposición 5.3.1.

Inspirados en la Observación anterior, nos cuestionamos si valdrá la versión simple del Teorema 6.4.3. Lo estudiamos en la siguiente sección.

Versión simple

El objetivo de este apartado es mostrar que **con las mismas hipótesis** vale la versión simple del Teorema 6.4.3; este resultado es original.

Basta seguir el mismo esquema de su demostración. Pero para poder hacerlo, necesitamos primero la versión simple de todos los resultados previos que se utilizan en la misma.

Observación 6.4.11. Si K y L son contráctiles, entonces todo morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ es una equivalencia simple. Esto sucede porque el grupo de Whitehead de un complejo contráctil es trivial y por lo tanto la torsión de f es nula (ver [14]).

Lema 6.4.12. *Sea*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

un pushout de CW-complejos y funciones celulares, en el cual i es cofibración cerrada y f equivalencia homotópica simple. Entonces g es equivalencia homotópica simple.

Demostración. Ver [20] pág. 361 o [14], 5.9. □

Corolario 6.4.13. Sean X un poset finito y $x \in X$ tal que \hat{C}_x es homotópicamente trivial. Entonces la inclusión $|\mathcal{K}(X \setminus \{x\})| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)|$ es una equivalencia homotópica simple.

Demostración. Es análoga a la demostración de 6.4.5. Basta observar que, dado que C_x y \hat{C}_x son homotópicamente triviales, por la Observación 6.4.11, $|\mathcal{K}(\hat{C}_x)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(C_x)|$ resulta una equivalencia homotópica simple, y el resultado sigue del Lema anterior. □

Corolario 6.4.14. Sean K un complejo simplicial, y K_1, K_2 dos subcomplejos contráctiles tales que $K = K_1 \cup K_2$. Entonces $K \nearrow \Sigma(K_1 \cap K_2)$.

Demostración. Análoga a 6.4.6. Sólo hay que notar que, por 1.4.16 y 6.4.11, las funciones f y g resultan equivalencias homotópicas simples y aplicar 6.4.12 □

Proposición 6.4.15. Sea X un poset homotópicamente admisible. Entonces para todo $x \in X$ de grado n , $\mathcal{K}(\hat{U}_x) \nearrow S^{n-1}$.

Demostración. De modo similar a la demostración de 6.4.7, sigue de aplicar 6.4.14 a $K = \mathcal{K}(\hat{U}_x)$, $K_1 = \mathcal{K}(\hat{U}_x \setminus \{y\})$ y $K_2 = \mathcal{K}(U_y)$. □

Teorema 6.4.16 (Simple Gluing Theorem). *Sea*

$$\begin{array}{ccccc}
 & A_0 & \xrightarrow{\quad} & A_1 & \\
 h_0 \swarrow & \downarrow f & & \searrow h_1 & \\
 B_0 & \xrightarrow{\quad} & B_1 & & \\
 \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \\
 & A_2 & \xrightarrow{\quad} & A & \\
 h_2 \swarrow & & \searrow h & & \\
 B_2 & \xrightarrow{\quad} & B & &
 \end{array}$$

un cubo commutativo de CW-complejos finitos y funciones celulares; donde los cuadrados de adelante y atrás son pushouts, y las flechas verticales f y g son cofibraciones cerradas.

Si h_0, h_1, h_2 son equivalencias homotópicas simples, entonces h también lo es.

Demostración. Ver [20], pág. 362. □

Ya hemos reunido las herramientas necesarias para notar que vale la versión simple del Teorema 6.4.3.

Teorema 6.4.17. Sean X un poset homotópicamente admisible y M un matching de Morse en $\mathcal{H}(X)$.

Entonces $\mathcal{K}(X)$ es **simplemente** equivalente a un CW-complejo con exactamente una p -celda por cada punto crítico de X de grado p .

Demostración. Análoga a la del Teorema 6.4.3. □

6.4.2 Homología

En esta sección, citamos algunos resultados sobre la variante homológica de la teoría de Morse para posets, desarrollados por Minian [25].

Como es usual, la idea es: dado un poset, obtener información sobre los grupos de homología de su complejo simplicial asociado a partir de los puntos críticos de un matching acíclico en su diagrama de Hasse.

Nota: Durante esta sección, todos los grupos de homología serán reducidos y con coeficientes enteros.

De manera similar a lo ocurrido en las secciones anteriores, será necesario establecer una clase de posets para la cual valdrá la teoría. La definimos a continuación.

Definición 6.4.18. Un poset finito X es *homológicamente admisible* (o h -admissible) si es graduado y para todo $x \in X$ y para todo elemento maximal y de U_x , el poset $\hat{U}_x \setminus \{y\}$ es acíclico.

Ejemplo 6.4.19.

- Todo poset homotópicamente admisible es homológicamente admisible.
 - Una *variedad finita cerrada* es un poset X tal que $\mathcal{K}(X)$ es una variedad combinatoria cerrada. Las variedades finitas cerradas son homotópicamente admisibles.
- Una *variedad homológica finita cerrada* es un poset X tal que $\mathcal{K}(X)$ es una variedad homológica cerrada. Las variedades homológicas finitas cerradas son homológicamente admisibles.

Enunciamos a continuación el teorema principal de esta sección, que extiende la teoría de Forman a la clase de posets homológicamente admisibles.

Teorema 6.4.20 (Minian). *Sean X un poset homológicamente admisible, y M un matching de Morse en $\mathcal{H}(X)$.*

Entonces la homología de X se puede calcular con un complejo de cadenas (\tilde{C}, \tilde{d}) , donde \tilde{C}_p es el grupo abeliano libre generado por los puntos críticos de X de grado p .

En particular, valen las desigualdades fuertes de Morse (y luego, las desigualdades débiles de Morse).

Demostración. Ver [25], 3.15. □

Los resultados más importantes de teoría de Morse para posets permiten obtener, a partir de un matching acíclico en su diagrama de Hasse, información acerca del tipo homotópico y homología del complejo simplicial asociado. Cuanto menor sea la cantidad de puntos críticos del matching, más precisa será la información a obtener.

De este modo, el problema de caracterizar estos invariantes topológicos en poliedros se reduce a un problema de optimización combinatoria: el de hallar un matching de acíclico con la menor cantidad de puntos críticos. Se obtiene así un nuevo nexo entre topología y combinatoria. Estudiaremos este último problema en el siguiente capítulo.

Capítulo 7

Matchings acíclicos

7.1 Introducción

Hemos visto en el capítulo anterior que el problema de hallar información sobre el tipo homotópico simple (u homología) de un poset admisible (resp. h -admisible) se reduce, vía la teoría de Morse para posets, a un problema de optimización combinatoria: el de hallar un matching acíclico en su diagrama de Hasse con la menor cantidad de puntos críticos. En 2004, Joswig y Pfetsch [19] prueban que este problema es \mathcal{NP} -hard [19]. En particular, si éste pudiera resolverse en tiempo polinomial, entonces $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ¹.

Dado un poset graduado X , podemos encontrar un matching acíclico maximal en su diagrama de Hasse de modo muy simple mediante un algoritmo goloso. Basta agregar sucesivamente aristas al matching vacío, manteniendo las condiciones de matching y aciclicidad, hasta llegar a uno en el cual cualquier adición altera alguna de estas condiciones. Este matching no necesariamente será máximo. Sin embargo, existen resultados que permiten, mediante pequeñas modificaciones, "mejorarlo". Entre ellos se encuentran los métodos de cancelación de Forman [15] y de Hersh [18]; que se desarrollan en el ámbito de los face posets de complejos simpliciales finitos.

Por otra parte, queremos destacar que el problema de hallar un matching máximo (no necesariamente acíclico) puede resolverse de manera polinomial, mediante un algoritmo basado en un teorema de C. Berge [10]. El resultado afirma que un matching en un grafo finito G es máximo si y sólo si no existe en G ningún camino "aumentativo" (ver definición 7.3.6).

Hemos notado que los métodos de reducción de Forman y Hersh valen para posets graduados en general, y pueden reformularse en un lenguaje más simple, en términos de caminos aumentativos. Esta reformulación permite generalizarlos de manera natural y sencilla.

Otro modo de construir un matching acíclico máximo es construir uno máximo (no necesariamente acíclico) y luego "repararlo" intentando que su cardinal disminuya la menor cantidad posible.

Los enfoques descriptos en los párrafos anteriores permite atacar el problema mediante distintas heurísticas.

Existen otras formas de enfocar la resolución del problema. Una de ellas es modelarlo como un problema de programación lineal entera [19]. Otra es mediante una resolución inductiva, implementando un algoritmo de programación dinámica.

En este capítulo repasamos los resultados existentes que permiten abordar el problema, los reformulamos y generalizamos. Proponemos luego distintos modos de abordar e implementar su resolución (heurísticas y metaheurísticas, programación lineal entera, programación dinámica).

¹La verdad de esta igualdad constituye aún un problema abierto (uno de los principales problemas no resueltos de las ciencias de la computación), aunque "se sospecha" [16] que es falsa.

7.2 Grafos

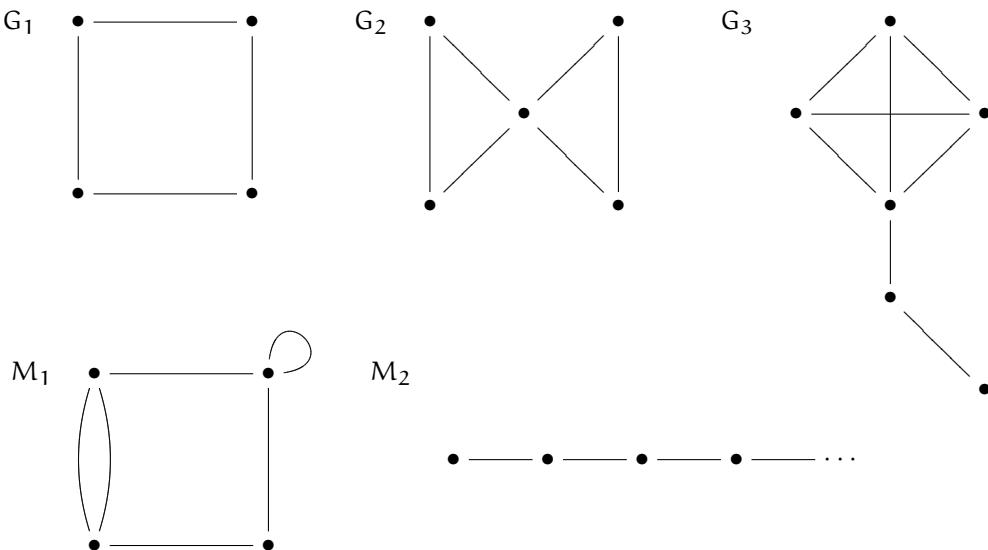
Dedicamos esta sección a recordar las definiciones básicas sobre grafos que serán necesarias para el posterior estudio de nuestro problema.

Definición 7.2.1. Un *grafo simple finito* G es un par $G = (V, E)$, con V un conjunto finito y $E \subset \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$ una colección de subconjuntos de dos elementos distintos de V . Los elementos de V se llaman *vértices* de G , y los elementos de E , *aristas* de G .

Dada $e = \{x, y\}$ una arista de G , los *extremos* de e a los vértices x e y .

Observación 7.2.2. Un grafo simple $G = (V, E)$ es un complejo simplicial finito de dimensión 1; V es el conjunto de 0-símplices y E el conjunto de 1-símplices.

Ejemplo 7.2.3.



G_1 , G_2 y G_3 son grafos simples finitos.

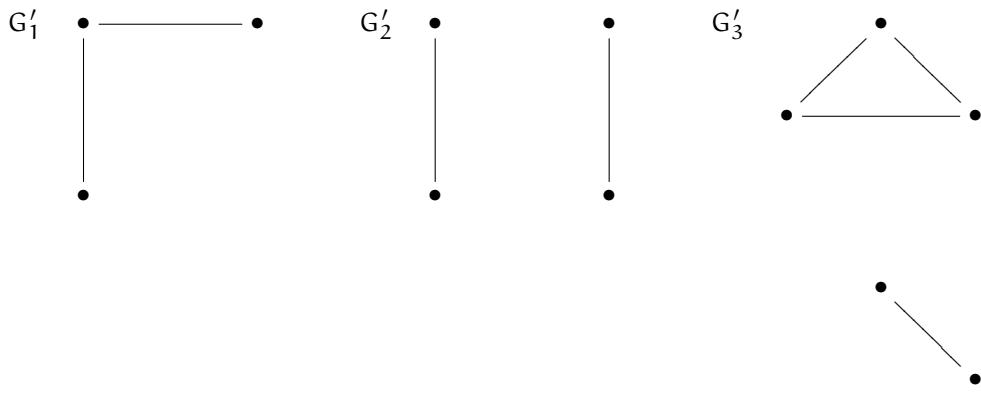
M_1 y M_2 no lo son. M_1 tiene varias aristas entre los mismos puntos, y además tiene una arista con extremos iguales (llamada bucle). En M_1 no cumple la condición de simplicidad. Por su parte, M_2 no es finito.

En lo que sigue, trabajaremos con *grafos simples finitos* y los llamaremos por simplicidad *grafos*.

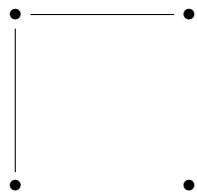
Definición 7.2.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo.

Un par $G' = (V', E')$ es un *subgrafo* de G si $V' \subseteq V$ y $E' = \{\{x, y\} \in E : x, y \in V'\}$; es decir, si G' es un subcomplejo simplicial pleno de G .

A continuación vemos un subgrafo de cada de cada grafo del ejemplo 7.2.3.



Notar además que, por ejemplo, el siguiente subconjunto de puntos y aristas de G_1 **no** es un subgrafo de G_1 (pues es un subcomplejo simplicial no pleno de G_1).



Definición 7.2.5. Sea $G = (V, E)$ un grafo.

Dados $x \in V$ y $e \in E$, se dice que e *incide* en x si x es cara de e .

Dos aristas e y e' son *adyacentes* si comparten alguna cara; ó, equivalentemente, existe algún vértice que incide en ambas.

Si etiquetamos los vértices de G_2 como en la Figura 7.1, entonces se tiene que, por ejemplo, $\{a, c\}$ incide en a y en c ; y que $\{b, c\}$ incide en b y en c . En particular, $\{a, c\}$ y $\{b, c\}$ son adyacentes.

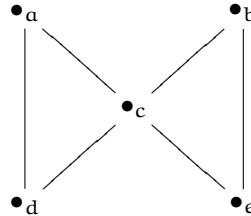
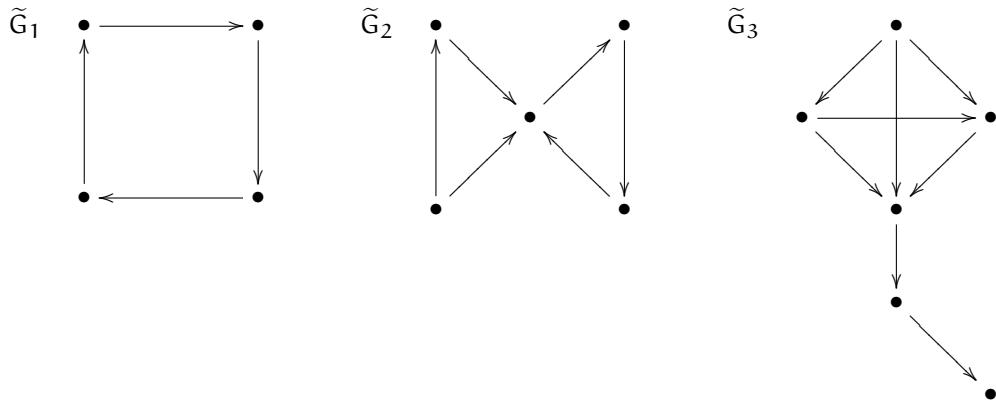


Figura 7.1: G_2 .

Definición 7.2.6. Un grafo *dirigido*, o *digrafo*, es un grafo $G = (V, E)$ en el cual *además* fijamos un orden en los extremos de cada arista; es decir una *orientación* en los 1-simplices. En otras palabras, $E \subseteq V \times V$.

Ejemplo 7.2.7. Mostramos una orientación para las aristas de los grafos del ejemplo 7.2.3.



Definición 7.2.8. Sea $G = (V, E)$ un grafo.

Un *camino* en G es una sucesión $(x_1, x_2)(x_2, x_3) \cdots (x_{r-1}, x_r)$, donde $x_i \in V \forall 1 \leq i \leq r$, y $\{x_i, x_{i+1}\} \in E \forall 1 \leq i \leq r-1$.

Llamamos *extremos* del camino a los vértices x_1 y x_r .

Si además G tiene sus aristas orientadas, es decir, es un digrafo; un *camino dirigido* en G es una sucesión $(x_1, x_2)(x_2, x_3) \cdots (x_{r-1}, x_r)$, donde $x_i \in V \forall 1 \leq i \leq r$, $\{x_i, x_{i+1}\} \in E \forall 1 \leq i \leq r-1$ y el orden en los extremos de $\{x_i, x_{i+1}\}$ es x_i, x_{i+1} . En otras palabras, un camino dirigido es un camino cuya aristas respetan la orientación.

Nota. Cuando trabajemos con un digrafo, para acentuar la diferencia, llamaremos caminos *no dirigidos* a los caminos cuyas aristas no necesariamente respetan la orientación.

Si etiquetamos los vértices de \tilde{G}_2 como en la Figura 7.2, entonces, por ejemplo, se tiene que $(d, a)(a, c)(c, b)(b, e)$ es un camino dirigido, y que $(a, d)(d, c)(c, e)(e, b)$ es un camino no dirigido.

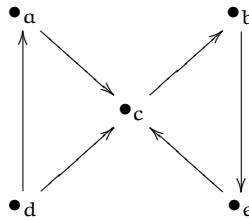


Figura 7.2: \tilde{G}_2 .

Definición 7.2.9. Sea $G = (V, E)$ un grafo.

Un *ciclo* en G es un camino $(x_1, x_2)(x_2, x_3) \cdots (x_{r-1}, x_r)$ en G tal que $x_r = x_1$; es decir, un camino con extremos iguales.

G es *acíclico* si no tiene ciclos.

Si el grafo tiene sus aristas orientadas, podemos considerar las versiones dirigidas de las definiciones anteriores.

Definición 7.2.10. Sea $G = (V, E)$ un digrafo.

Un *ciclo dirigido* en G es un camino dirigido con extremos iguales.

G es *acíclico* como digrafo si no tiene ciclos dirigidos.

Por ejemplo, en el grafo de la Figura 7.2, $(b, e)(e, c)(c, b)$ en un ciclo dirigido (y también no dirigido); $(d, a)(a, c)(c, d)$ y $(d, a)(a, c)(c, b)(b, e)(e, c)(c, d)$ son ciclos no dirigidos.

Luego, G_2 no es acíclico como grafo ni como digrafo.

Por su parte, G_3 es acíclico como digrafo, pero no como grafo.

Notar que en un camino se permite pasar varias veces por un mismo vértice. En la siguiente definición restringimos este aspecto, permitiendo pasar sólo una vez.

Definición 7.2.11. Sea $G = (V, E)$ un grafo.

Un *camino simple* en G es un camino $(x_1, x_2)(x_2, x_3) \cdots (x_{r-1}, x_r)$ en G tal que $x_i \neq x_j \forall i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$.

Un *ciclo simple* en G es un ciclo $(x_1, x_2)(x_2, x_3) \cdots (x_{r-1}, x_1)$ en G tal que $x_i \neq x_j \forall i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r-1$.

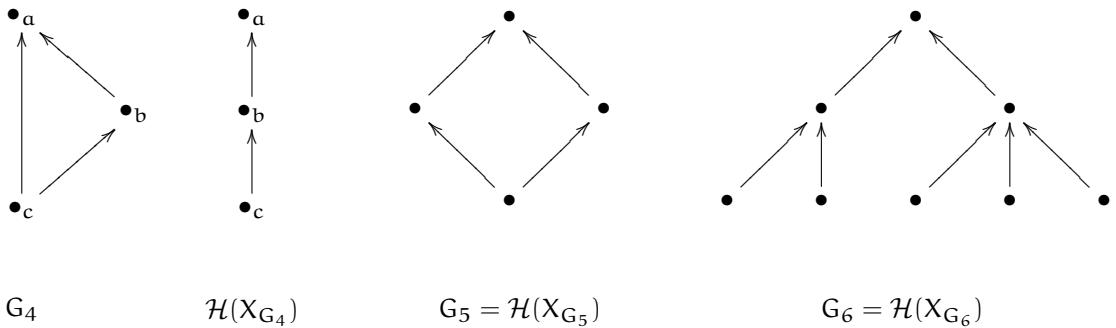
Si en la definición anterior G es un digrafo y consideramos caminos dirigidos, los llamaremos *caminos dirigidos simples* y *ciclos dirigidos simples*.

Por ejemplo, en el grafo de la Figura 7.2, los caminos $(b, e)(e, c)(c, b)$ y $(d, a)(a, c)(c, d)$ son ciclos simples (el primero, dirigido; el segundo no); pero el ciclo (no dirigido) $(d, a)(a, c)(c, b)(b, e)(e, c)(c, d)$ no es simple.

Observación 7.2.12. Existe una correspondencia entre grafos dirigidos acíclicos y posets.

En efecto, dado un digrafo acíclico $G = (V, E)$, le asociamos el poset $X_G = (V, \leq)$, donde \leq es la relación de orden *generada* por: $x \leq y$ si y sólo si la arista $\{x, y\} \in E$ y el orden entre sus extremos es x, y . En otras palabras, \leq es la relación de orden descripta por $x \leq y$ si y sólo si existe un camino dirigido $(x_1, x_2) \cdots (x_{r-1}, x_r)$ en G , con $x_1 = x$, $x_r = y$.

Notar que no necesariamente $\mathcal{H}(X_G) = G$. En efecto, G puede tener "aristas de más". A modo ilustrativo, veamos a continuación tres digrafos acíclicos con sus respectivos posets asociados (representados por su diagrama de Hasse):



Resulta $\mathcal{H}(X_G) = G$ si y sólo si G es *irreducible*, es decir, cuando $\nexists u, v \in V$ tales que $(u, v) \in E$ y existe un camino dirigido de u a v distinto de (u, v) . Notar que la condición de irreducibilidad condiciona a que exista una arista sólo entre vértices que forman parte de una relación de cubrimiento.

En particular, si G es acíclico como grafo no dirigido (como ocurre, por ejemplo, con G_6), entonces $\mathcal{H}(X_G) = G$.

Recíprocamente, dado (X, \leq) un poset, le asociamos el digrafo $G = (X, E)$ con $E = \{(x, y) : x \prec y\}$; es decir, su diagrama de Hasse $\mathcal{H}(X)$ con las aristas orientadas hacia arriba.

7.3 Matchings

Esta sección está destinada a recordar las definiciones sobre los distintos tipos de matchings, y estudiar los algoritmos existentes para hallar cada uno de ellos. Nos dará la base necesaria para abordar, en la siguiente sección, el problema de hallar un matching acíclico máximo en el diagrama de Hasse de un poset graduado.

7.3.1 Generalidades

Definición 7.3.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo (no necesariamente dirigido).

Un *matching* M en G es un subconjunto de aristas de G no adyacentes entre sí.

Llamaremos *vértices correspondidos* de M a los vértices de G en los que inciden aristas del matching, y *vértices libres* a los vértices en los que no.

Ejemplo 7.3.2. Consideremos el grafo G de la siguiente figura.

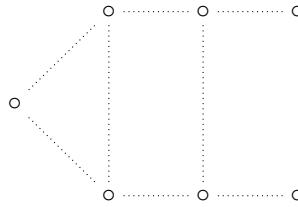
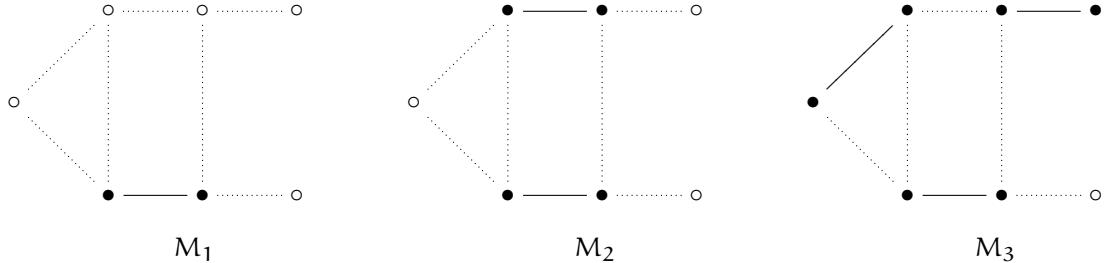


Figura 7.3: G .

Vemos a continuación tres matchings en G . Notamos: con línea rellena a las aristas en el matching y punteada a las que no; con \bullet a los vértices correspondidos, y con \circ a los libres.



Definición 7.3.3. Sea $G = (V, E)$ un grafo (no necesariamente dirigido).

Un *matching maximal* es un matching M tal que no existe otro matching M' que lo incluya estrictamente; es decir, $\nexists M' / M \subsetneq M'$.

Un *matching máximo* es un matching M tal que para cualquier otro matching M' , $|M'| \leq |M|$; donde denotamos entre $| |$ a la cantidad de elementos del conjunto.

Observación 7.3.4. Todo matching máximo es maximal, pero no vale la recíproca.

Por ejemplo, respecto de los matchings del ejemplo 7.3.2: M_1 no es maximal, M_2 es maximal pero no es máximo, y M_3 es máximo.

7.3.2 Algoritmos

Presentamos algunos algoritmos para hallar matchings de cada clase.

Matchings maximales

Para hallar **matchings maximales**, simplemente implementamos un algoritmo *goloso*². Comenzamos con el matching $M := \emptyset$. En cada paso, elegimos una arista del grafo con vértices libres, y la agregamos al matching. Lo hacemos hasta que toda arista tenga alguno de sus extremos correspondidos, es decir, hasta que no quede ninguna arista que se pueda agregar. En ese caso, claramente habremos llegado a un matching maximal. Pero éste, por cierto, no necesariamente será máximo; esto dependerá de la elección que hagamos en cada paso.

Algoritmo 4 (Goloso) Matching maximal.

Input: Grafo G

Output: Matching maximal M en G .

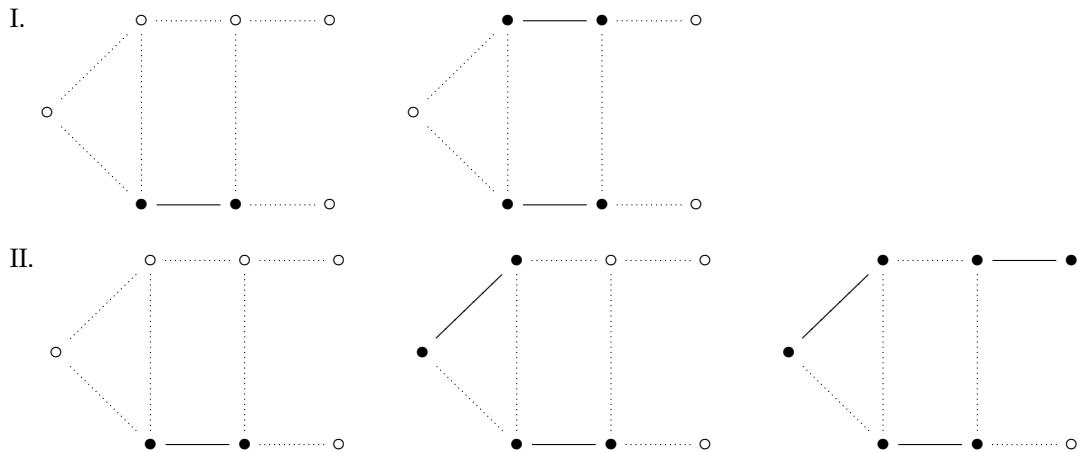
```

 $M \leftarrow \emptyset$ 
repeat
   $e$  una arista de  $G$  con aristas con extremos  $M$ -libres
   $M \leftarrow M \cup e$ 
until no existen caminos aristas con extremos  $M$ -libres
return  $M$ 

```

Notar la analogía existente entre el anterior y el algoritmo que permite hallar un weak core de un espacio finito X .

Utilizamos el algoritmo anterior en el grafo G (Figura 7.3), para diferentes sucesiones de elecciones, obteniendo distintos matchings maximales. Omitimos el paso inicial, en el que simplemente se considera el matching vacío.



Matchings máximos

En esta sección presentamos un conocido algoritmo en teoría de grafos, que permite hallar un **matching máximo** de un grafo. Previamente necesitamos algunas definiciones.

Fijamos $G = (V, E)$ un grafo finito (no necesariamente dirigido), M un matching en G .

²Un algoritmo *goloso* o *greedy* es un algoritmo que reacciona frente a una sucesión de decisiones tomando aquella que le provee beneficio inmediato, sin importar lo que ocurra más tarde.

Si bien en algunos casos un algoritmo goloso puede ser óptimo, en general provee a lo sumo una mala aproximación. Sin embargo, es muy rápido y por eso es un buen punto de partida para el estudio de un problema.

Definición 7.3.5. Un *camino M-alternante* en G es un camino no dirigido simple en G cuyas aristas, de manera alternada, pertenecen y no pertenecen al matching M .

Definición 7.3.6. Un *camino M-aumentativo* en G es un camino M -alternante en G entre vértices libres (que resultarán distintos).

Por ejemplo, en el matching M_2 del ejemplo 7.3.2, el camino $(x_1, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_4)$ (ver Figura 7.4) es M_2 -aumentativo.

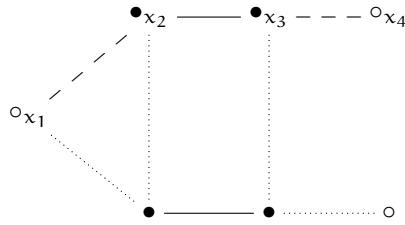


Figura 7.4: Camino aumentativo.

Dado $\mathcal{P} = (x_1, x_2)(x_2, x_3) \cdots (x_{r-1}, x_r)$ un camino no dirigido en G , notaremos también por \mathcal{P} al conjunto de aristas involucradas; es decir, $\mathcal{P} = \{ \{x_1, x_2\} \{x_2, x_3\} \cdots \{x_{r-1}, x_r\} \}$.

Lema 7.3.7. Si M es un matching en un grafo G y $\mathcal{P} = (x_1, x_2)(x_2, x_3) \cdots (x_{r-1}, x_r)$ es un camino M -aumentativo, entonces $M' = \mathcal{P} \triangle M$ también es un matching en G y $|M'| = |M| + 1$.

*Demuestra*ción. Debemos chequear que en todo vértice de G incide a lo sumo una arista de M' .

Notar que M' se construye simplemente revirtiendo la condición (de pertenencia) del subconjunto \mathcal{P} de aristas. En particular, las aristas de M por las que no pasa el camino \mathcal{P} pertenecen a M' .

Luego, en los vértices por los que no pasa \mathcal{P} (es decir, $V \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$), dado que M es matching, incide a lo sumo una arista de M' .

Por otra parte, dado que x_1 y x_r son vértices libres de M distintos, incide en ellos exactamente una arista de M' (las aristas (v_1, v_2) y (v_{r-1}, v_r) respectivamente). Dada la construcción de M' , en los vértices restantes del camino v_2, v_3, \dots, v_{r-1} sigue incidiendo una única arista de M' (ver Figura 7.5).

$$\circ_{x_1} - \overbrace{M'}^-- \bullet_{x_2} - \overbrace{M}^- \bullet_{x_3} - \overbrace{M'}^-- \bullet_{x_4} \quad \cdots \quad \bullet_{x_{r-2}} - \overbrace{M}^- \bullet_{x_{r-1}} - \overbrace{M'}^- - \circ_{x_r}$$

Figura 7.5: \mathcal{P} . □

Notación 7.3.8. Notaremos \mathcal{P}^{rev} al camino M' -alternante inducido por \mathcal{P} .

$$\mathcal{P} \quad \circ - \overbrace{M'}^- - \bullet - \overbrace{M}^- \bullet - \overbrace{M'}^- - \bullet \quad \cdots \quad \bullet - \overbrace{M'}^- - \bullet - \overbrace{M}^- \bullet - \overbrace{M'}^- - \circ$$

$$\mathcal{P}^{\text{rev}} \quad \bullet - \overbrace{M'}^- - \bullet - \overbrace{M}^- \bullet - \overbrace{M'}^- - \bullet \quad \cdots \quad \bullet - \overbrace{M'}^- - \bullet - \overbrace{M}^- \bullet - \overbrace{M'}^- - \bullet$$

El algoritmo para hallar matchings máximos se basa en el siguiente resultado de Berge [10]:

Teorema 7.3.9 (Berge). Sean $G = (V, E)$ un grafo y M un matching en G . Entonces, M no es un matching máximo si y sólo si existe algún camino M -aumentativo.

Demuestra. \Rightarrow) Sea \mathcal{P} un camino M -aumentativo. Sea $M' := \mathcal{P} \Delta M$. Por 7.3.7 M' es matching y $|M'| = |M| + 1$.

\Leftarrow) Sea M^* matching máximo, $|M^*| > |M|$. Considero $M \Delta M^*$.

Como M y M^* son matchings, en cada vértice de G incide a lo sumo una arista de M y una de M^* .

Si consideramos el subcomplejo simplicial de G inducido por $M' := \mathcal{P} \Delta M$ (cerrando por caras), sus componentes conexas son caminos M y M^* -alternantes. Como $|M^*| > |M|$, existe alguna componente \mathcal{P} con más aristas pertenecientes a M^* que a M . Claramente, \mathcal{P} es un camino M -aumentativo. \square

Algoritmo 5 (Berge) Matching máximo.

Input: Grafo G

Output: Matching máximo M en G .

$M \leftarrow \emptyset$

repeat

\mathcal{P} un camino M -aumentativo

$M \leftarrow M \Delta \mathcal{P}$

until no existen caminos M -aumentativos

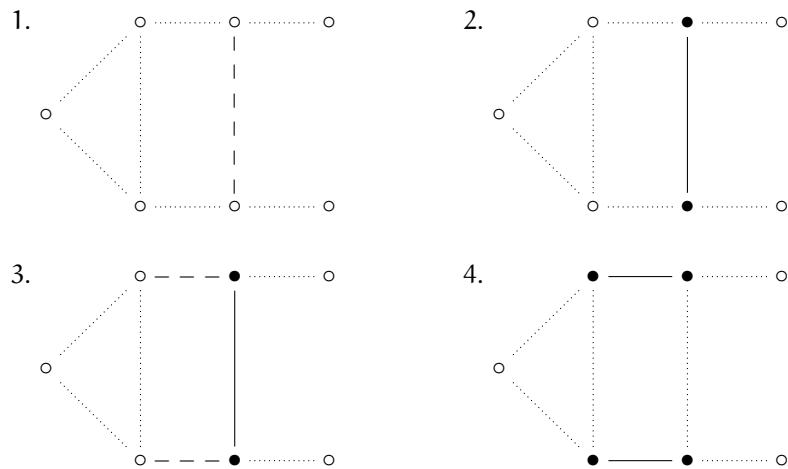
return M

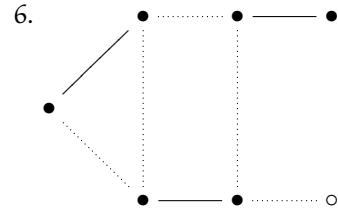
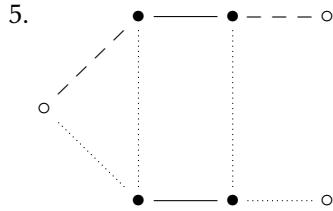
Notar que el algoritmo anterior es similar al que permite hallar un matching maximal.

Para hallar un matching maximal: comenzamos con el matching vacío y, en cada paso *elegimos* una arista con extremos libres y la agregamos al matching (es decir, revertimos un camino aumentativo con una única arista).

Para hallar un matching máximo, realizamos un procedimiento análogo; la diferencia radica en que nos permitimos revertir caminos aumentativos con cualquier cantidad de aristas. El teorema 7.3.9 nos asegura que llegaremos a un matching máximo, independientemente de las elecciones realizadas.

A modo ilustrativo, implementamos el algoritmo anterior en el grafo G (Figura 7.6), y obtenemos el matching máximo M_3 . Los caminos aumentativos considerados en cada paso se encuentran marcados con línea punteada-rellena.





Matchings acíclicos

Definición 7.3.10. Sea G un digrafo. Un matching M en G es *acíclico* si el digrafo G_M que se obtiene de revertir la orientación de las aristas de G que pertenecen a M no tiene ciclos dirigidos.

Ejemplo 7.3.11. Consideremos el digrafo G de la siguiente figura.

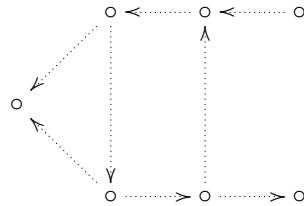
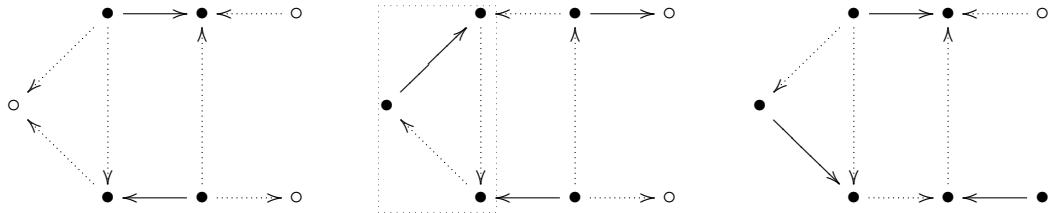


Figura 7.6: G .

Vemos a continuación el digrafo *asociado* a distintos matchings en G (es decir, el digrafo que se obtiene de revertir, en cada caso, la orientación de las aristas de cada matching):



Notar que el primero es un matching acíclico no máximo, el segundo un matching máximo no acíclico, y el tercero un matching acíclico máximo.

Del ejemplo anterior se deduce:

Observación 7.3.12. No todo matching acíclico es máximo. No todo matching máximo es acíclico.

De manera análoga al caso no dirigido (en el que nos propusimos hallar matchings máximos), para hallar un matching *acíclico* maximal podemos proceder utilizando un algoritmo goloso.

Algoritmo 6 (Goloso) Matching acíclico maximal.

Input: Poset graduado X .

Output: Matching maximal M en X .

$M = \emptyset$

repeat

e arista con extremos M -libres tal que $M \cup e$ es acíclico.

$M \leftarrow M \cup e$

until no existe ninguna arista e con extremos M -libres tal que $M \cup e$ es acíclico.

return M

Si bien las condiciones de aciclicidad y de matching pueden ser chequeadas individualmente de manera simple, el problema de optimización que se obtiene de combinarlas (es decir, el de hallar un matching acíclico máximo) resulta de gran dificultad.

De hecho, este problema de optimización es \mathcal{NP} -hard.³ (ver [19], sección 4).

En la siguiente sección nos centraremos en un caso particular del problema: el de hallar un matching acíclico máximo en un digrafo que es el diagrama de Hasse de un poset graduado finito.

7.4 Matchings acíclicos en un poset graduado

En el marco del problema de hallar un matching acíclico máximo de un grafo, estamos especialmente interesados en el caso particular de los grafos la forma $\mathcal{H}(X)$, el diagrama de Hasse de un poset X admisible ó h -admisible; debido a su relación, vía la teoría de Morse discreta para posets, con el tipo homotópico y homología de complejos celulares.

El primer enfoque que consideraremos para abordar el problema es el de intentar hallar de manera más o menos simple un matching acíclico "cercano al máximo" (aunque esto quizás no pueda probarse). Esto puede concretarse de diversas formas.

Una es considerar un matching acíclico maximal, y luego "mejorarlo". En ese sentido, Hersh [18] y Forman [15] han desarrollado métodos de cancelación de puntos críticos que pueden aplicarse a matchings acíclicos en face posets.

Otra forma consiste en hallar un matching máximo, y luego "repararlo" para que se convierta en acíclico, de modo "eficiente" (es decir, intentando "perder" la menor cantidad de aristas).

En los próximos apartados estudiaremos en profundidad ambas maneras. Reformularemos los resultados existentes en un lenguaje más claro que permitirá generalizaciones naturales. Desarrollaremos la teoría para diagramas de Hasse de posets graduados finitos en general, aunque centraremos nuestra atención en los ejemplos para posets admisibles ó h -admisibles.

³ En optimización combinatoria, se clasifican los problemas a tratar en problemas de optimización y de decisión. En un problema de decisión se desea decidir cuándo una afirmación es verdadera o falsa; en uno de optimización, hallar la solución con el "mejor valor" posible, de acuerdo cierto régimen de valores de las soluciones, determinado por la función objetivo. Pueden ser de maximización o de minimización.

Existen varias clases de problemas de decisión. Entre ellas:

- \mathcal{P} : es el conjunto de problemas de decisión que puede resolverse en tiempo polinomial. Intuitivamente, \mathcal{P} es el conjunto de problemas que pueden resolverse "rápido".
- \mathcal{NP} : es el conjunto de problemas de decisión con la siguiente propiedad: para cada instancia cuya respuesta es Sí, hay un algoritmo polinomial que comprueba si una posible solución es correcta. Intuitivamente, \mathcal{NP} es la clase de problemas de decisión para los cuales podemos verificar rápido una respuesta Sí si tenemos la solución en frente nuestro.
- \mathcal{NP} -completo: un problema de decisión pertenece a esta clase si todo problema \mathcal{NP} puede reducirse a él.

Los problemas de optimización cuyas versiones de decisión son \mathcal{NP} -completos se llaman \mathcal{NP} -hard. Vale que: existe un algoritmo polinomial para resolver algún problema \mathcal{NP} -hard si y sólo si $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

A lo largo de esta sección, consideraremos X un poset finito graduado y $\mathcal{H}(X)$, su diagrama de Hasse; al que llamaremos \mathcal{H} para simplificar notación.

Dado M un matching en \mathcal{H} , denotaremos \mathcal{H}_M al grafo dirigido que se obtiene de revertir la orientación de las aristas de \mathcal{H} que pertenecen a M .

7.4.1 Ciclos en \mathcal{H}_M

Queremos dar condiciones para determinar si un matching es acíclico. Basta centrar nuestra atención en los ciclos dirigidos simples. A partir de aquí, llamaremos ciclos a los ciclos simples.

Debido a la construcción particular de la que proviene \mathcal{H}_M , sus ciclos dirigidos tienen características especiales:

Lema 7.4.1. *Sean X un poset finito graduado, M un matching en \mathcal{H} . Si c es un ciclo dirigido en \mathcal{H}_M , entonces:*

- c está incluido en algún piso $[p, p+1]$ de X , donde el piso $[p, p+1]$ de X es el subgrafo de \mathcal{H} con vértices los puntos de X de grado p y $p+1$;
- $|c|$ es par.

Demuestra. Si c es un ciclo dirigido en \mathcal{H}_M , entonces c será una sucesión finita de aristas $(x_1, y_1)(y_1, x_2) \cdots (y_{r-1}, x_r)$, con $x_r = x_1$; a las que llamaremos en forma simplificada U ó D según estén orientadas hacia arriba ó hacia abajo respectivamente. Luego, el camino se podrá representar mediante una palabra con las letras $\{U, D\}$. Como es un ciclo simple y el poset es graduado, la palabra debe tener igual cantidad de letras U y D . Y como las aristas orientadas hacia abajo pertenecen al matching M , no hay dos letras D consecutivas. Entonces, la palabra será de la forma $UDUD \cdots UD$ ó $DUDU \cdots DU$, por lo que el ciclo tiene altura 1 y cardinal par.

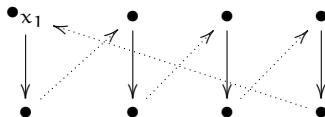


Figura 7.7: Ciclo descripto por DUDUDUDU. □

Como consecuencia del lema anterior se obtiene un resultado que permite chequear la aciclicidad de un matching.

Corolario 7.4.2. *Sean X un poset finito graduado, y M un matching en X . Entonces, c es un ciclo dirigido en \mathcal{H}_M si y sólo si c es un ciclo no dirigido en $[p, p+1] \subseteq \mathcal{H}$ para algún $0 \leq p < h(X)$ y $|c \cap M| = \frac{|c|}{2}$.*

La siguiente proposición da otra caracterización de los ciclos en \mathcal{H}_M , que también permitirá chequear la aciclicidad de M .

Proposición 7.4.3. *Sean X un poset finito graduado, M un matching en X y $[p, p+1]$ algún piso de X . Sean $\{(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq r\}$ las aristas de ese piso que pertenecen al matching M , donde $\deg(x_i) = p+1$ y $\deg(y_i) = p \ \forall 1 \leq i \leq r$. Entonces, existe algún ciclo dirigido en el piso $[p, p+1]$ si y sólo si existe alguna permutación $\sigma \neq \text{id}$ de $\{1, 2, \dots, r\}$ tal que $\{(y_i, x_{\sigma(i)}) : 1 \leq i \leq r\} \subseteq \mathcal{H}_M$.*

Demuestra. \Rightarrow) Supongamos que existe algún ciclo c en el piso $[p, p+1]$.

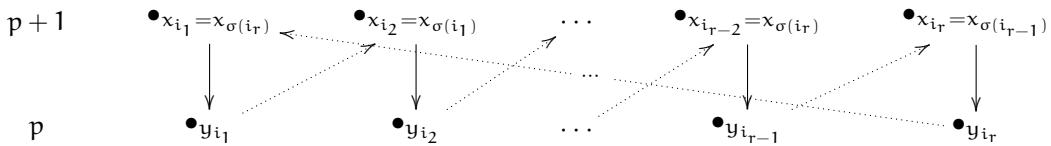
De acuerdo con la demostración de 7.4.1, c se puede representar, sin pérdida de generalidad, como una palabra de la forma $D_{i_1} U_{i_1} D_{i_2} U_{i_2} \cdots D_{i_k} U_{i_k}$. Como $\{D_{i_j}\}$ son algunas de las aristas del matching en el piso $[p, p+1]$, se dejan escribir de la siguiente manera: $D_{i_j} = (x_{i_j}, y_{i_j})$. Y como $U_{i_j} \notin M$, $U_{i_j} = (y_{i_j}, x_{i_{j+1}})$.

Luego, la permutación σ buscada se define por: $\sigma(i_j) = i_{j+1} \forall 1 \leq j \leq k-1$; $\sigma(i_k) = i_1$; $\sigma(i) = i$ si $i \neq i_j$.

\Leftarrow) Sea $\sigma \in S_r$, $\sigma \neq \text{id}$ tal que $\{(y_i, x_{\sigma(i)}) : 1 \leq i \leq r\} \subseteq \mathcal{H}_M$. Notar que las aristas $\{(y_i, x_{\sigma(i)}) : 1 \leq i \leq r\}$ también están incluidas en el piso $[p, p+1]$.

En la descomposición de σ en ciclos disjuntos, existe algún ciclo $(i_1 i_2 \cdots i_k)$ con $k > 1$ ⁴.

Luego, el ciclo dirigido buscado es $(x_{i_1}, y_{i_1})(y_{i_1}, x_{i_2})(x_{i_2}, y_{i_3})(y_{i_3}, x_{i_4}) \cdots (x_{i_k}, y_{i_1})(y_{i_1}, x_{i_1})$.



□

Observación 7.4.4. Adoptamos por un momento la siguiente notación: si A es un subconjunto de aristas de \mathcal{H} y $p \leq h(X)$, A_p son los extremos de las aristas en A a altura p . La proposición anterior se puede reformular como:

Sean X un poset finito graduado, M un matching en X y $[p, p+1]$ algún piso de X . Entonces, existe algún ciclo dirigido en el piso $[p, p+1] \subseteq \mathcal{H}_M$ si y sólo si existe $A \subseteq [p, p+1]$ un subconjunto de aristas (ó 1-simplices) de \mathcal{H} , tal que $A \neq M$, $|A| = |M|$, $A_p = M_p$ y $A_{p+1} = M_{p+1}$.

7.4.2 Optimizando matchings acíclicos

El objetivo de esta sección es hallar métodos para "mejorar" un matching acíclico dado en el diagrama de Hasse de un poset graduado.

Utilizamos como punto de partida los métodos desarrollados por Forman [15] y Hersh [18].

Caminos aumentativos que no generan ciclos

Este apartado tiene como punto de partida el *método de cancelación de puntos críticos*, desarrollado por Forman ([15], 11.1), que describe el siguiente teorema:

Teorema 7.4.5 (Forman). *Sea f una función de Morse discreta en K . Si β y α son simplices críticos, con $\dim(\alpha) = p$ y $\dim(\beta) = p+1$, y hay exactamente un camino gradiente desde β a α , entonces hay otra función de Morse g en K con los mismos simplices críticos que f , con excepción de α y β , que ya no lo son. Más aún, el campo gradiente asociado a g es igual al campo gradiente asociado a f , excepto sobre ese único camino gradiente de β a α .*

⁴Es decir, $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma(i_r) = i_1$



Figura 7.8: Cancelación de los simplices críticos α y β .

Reformularemos el teorema 7.4.5 en términos puramente combinatorios. Esto nos permitirá estudiar el problema desde un punto de vista más claro y obtener generalizaciones de modo natural.

Recordar que, dado un matching M en X , un camino M -aumentativo es un camino (no dirigido, simple) M -alternante entre vértices libres distintos. Debido a la construcción particular de la que proviene el grafo \mathcal{H}_M , sus caminos M -aumentativos tienen características especiales.

Proposición 7.4.6. *Sean X un poset finito graduado y M un matching en X .*

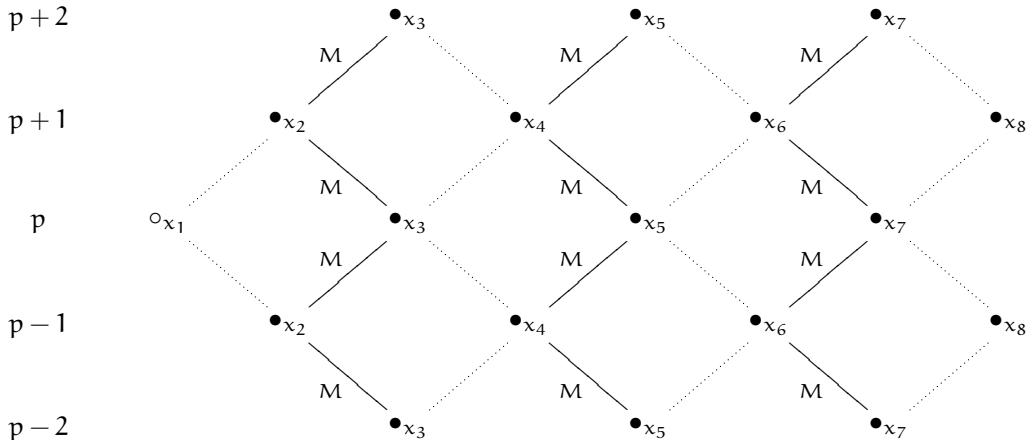
Si $\mathcal{P} = (x_1, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_4) \cdots (x_{r-1}, x_r)$ es un camino M -aumentativo entre los vértices libres x_1 y x_r , entonces $\deg(x_1) \neq \deg(x_r)$.

*Demuestra*ón. Si $\deg(x_1) = p$, $\deg(x_2) = p+1$ ó $p-1$, $\deg(x_3) = p+2$, p ó $p-2$, etc.

Inductivamente se demuestra que

$$\deg(x_k) \in \begin{cases} \{p+i : -k < i < k, k \text{ par}\} & \text{si } k \text{ es impar} \\ \{p+i : -k < i < k, k \text{ impar}\} & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

Pero como \mathcal{P} es M -aumentativo, r es par. Luego $\deg(x_r) \neq p$.



□

Recordar que, dado \mathcal{P} camino no dirigido, notamos también por \mathcal{P} al conjunto de aristas que éste involucra.

Definición 7.4.7. Sea \mathcal{P} un camino M -aumentativo, decimos que *revertir \mathcal{P} no genera ciclos* si el matching $M' = \mathcal{P} \Delta M$ es acíclico.

Proposición 7.4.8. *Sean X poset finito graduado y M un matching acíclico en X . Si existe un camino M -aumentativo tal que revertirlo no genera ciclos, entonces M no es máximo.*

*Demuestra*o. Sea \mathcal{P} un camino M -aumentativo tal que revertirlo no genera ciclos. Consideramos $M' = \mathcal{P} \Delta M$. Por 7.3.7, M' es matching y $|M'| = |M| + 1$. Finalmente, M' es acíclico por hipótesis. \square

Ejemplo 7.4.9. Consideremos poset admisible X , descripto por su diagrama de Hasse:

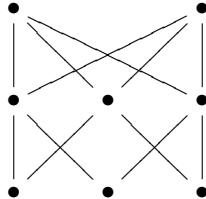


Figura 7.9: X .

y el siguiente matching M en él:

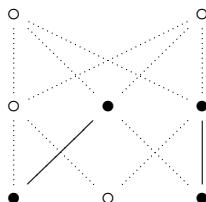
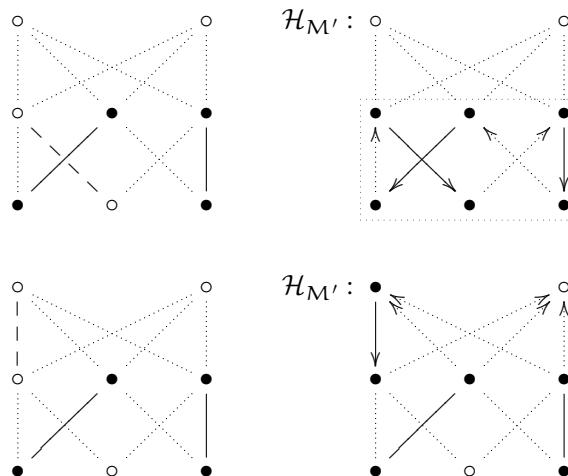
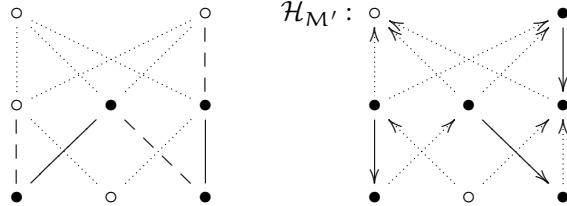


Figura 7.10: M .

Por 6.4.17, $\mathcal{K}(X)$ tiene el tipo homotópico simple de un CW-complejo con una 0-celda, una 1-celda y dos 2-celdas.

Mostramos a continuación tres caminos M -aumentativos. Notamos por M' al matching que se obtiene de revertirlos, en cada caso.





Por simplicidad, sólo hemos marcado la orientación de las aristas cuando esta información resultó relevante.

Notar que en el primer caso, el camino aumentativo marcado genera un ciclo dirigido en $\mathcal{H}_{M'}$; en el segundo y tercer caso, no. Luego, aplicando en ambos nuevamente el resultado 6.4.17, obtenemos que $\mathcal{K}(X)$ tiene el tipo homotópico simple de un CW-complejo con una 0-celda y una 2-celda, es decir, de una esfera de dimensión 2. En conclusión, optimizando el matching con este método, pudimos determinar completamente el tipo homotópico simple de $\mathcal{K}(X)$.

A continuación, presentaremos propiedades que nos permiten decidir si revertir un camino aumentativo genera ciclos o no.

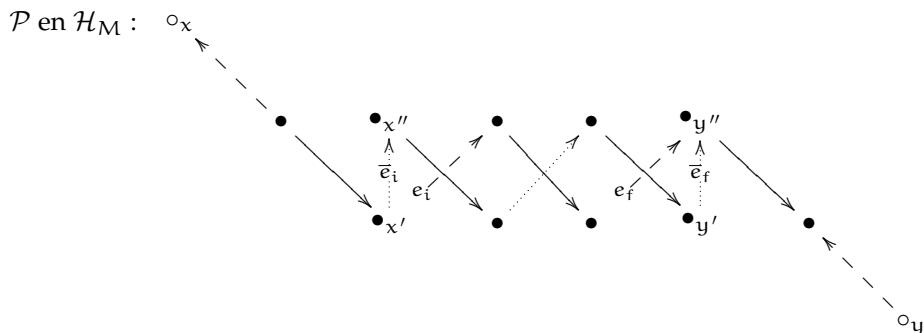
Proposición 7.4.10. *Sea \mathcal{P} un camino M -aumentativo entre x e y . Si revertir \mathcal{P} genera ciclos, entonces existe $\mathcal{P}' \neq \mathcal{P}$ otro camino M -aumentativo entre x e y . Si $\mathcal{P} \subseteq [p, p+1]$ para algún $0 \leq p \leq h(X) - 1$, entonces $\mathcal{P}' \subseteq [p, p+1]$.*

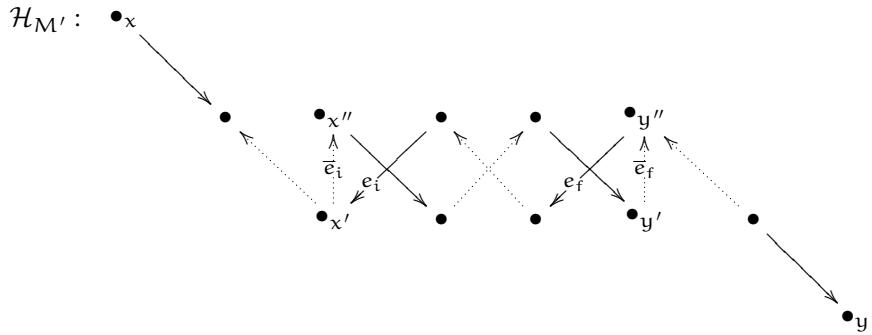
Demuestra. Sea \mathcal{P} camino aumentativo entre x e y . Sea $M' = \mathcal{P} \Delta M$. $\mathcal{H}_{M'}$ tiene ciclos. Luego, por 7.4.1, existe c ciclo dirigido en $\mathcal{H}_{M'}$ y $0 \leq p \leq h(X) - 1$ tal que $c \subseteq [p, p+1]$.

Sean $e_i = \{x', x''\}$ la primera arista de \mathcal{P} que pertenece a c , $e_f = \{y', y''\}$ la última; donde x' es el primer vértice de \mathcal{P} en c , y y'' el último.

Notar que $e_i, e_f \notin M$. En efecto, o bien $x' = x$, o bien $x' \neq x$. El primer caso es claro. En el segundo; si $e_i \in M$, entonces $e_i \notin M'$. Como c es un ciclo dirigido en $\mathcal{H}_{M'}$, la arista \bar{e}_i de c adyacente a e_i por x' pertenece a M' . Pero $\bar{e}_i \notin \mathcal{P}$ (por ser x' el primer vértice de \mathcal{P} en c). Como en las aristas por las que no pasa \mathcal{P} el matching no cambia, $\bar{e}_i \in M$. Luego, en x' inciden las aristas $\bar{e}_i, e_i \in M$, lo que contradice la condición de matching de M . Para e_f se procede de manera análoga.

Ilustramos la situación en las siguientes figuras:

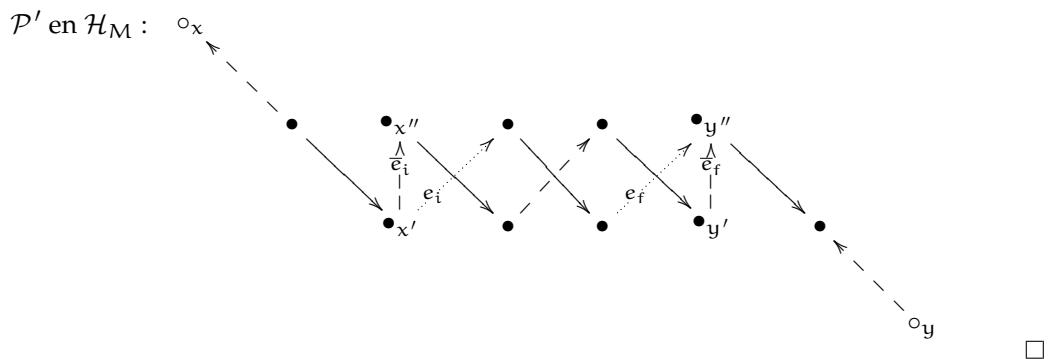




Luego, las aristas $e_i, e_f \in M'$. Como c es un ciclo dirigido en $\mathcal{H}_{M'}$, $\bar{e}_i, \bar{e}_f \notin M'$. Pero fuera de \mathcal{P} , $M = M'$. Luego, $\bar{e}_f \notin M$.

Consideramos el siguiente camino: $x \sim_{\mathcal{P}} x' - \bar{e}_i \rightarrow x'' \sim_c y' - \bar{e}_f \rightarrow y'' \sim_{\mathcal{P}} y$, que denominamos \mathcal{P}' .

Claramente, \mathcal{P}' es un camino M -alternante y sus extremos son libres (ver la siguiente figura).



Observación 7.4.11. No vale la recíproca de la proposición anterior, como se puede ver en el matching del ejemplo 7.4.9.

Entre los vértices libres x e y existe un camino M -aumentativo \mathcal{P} (ver figura 7.11)

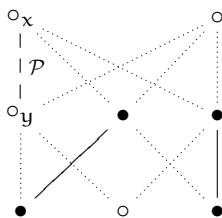


Figura 7.11: \mathcal{P} .

que no es único, pues \mathcal{P}' es otro camino M -aumentativo con los mismos extremos que \mathcal{P} (ver figura 7.12).

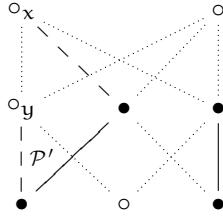


Figura 7.12: \mathcal{P}' .

Sin embargo, revertir \mathcal{P} (ó \mathcal{P}'), no genera ciclos.

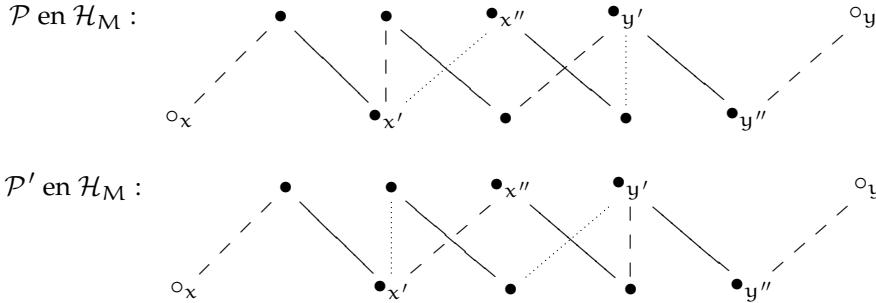
El siguiente resultado muestra que bajo hipótesis adicionales vale la recíproca de 7.4.10.

Proposición 7.4.12. Sean X un poset finito graduado, y M un matching en X . Sean x e y son dos vértices libres tales que $\deg(x) = p$, $\deg(y) = p + 1$ y existe $\mathcal{P} \subseteq [p, p + 1]$ un camino M -aumentativo entre ellos. Si existe $\mathcal{P}' \neq \mathcal{P} \subseteq [p, p + 1]$ otro camino M -aumentativo entre x e y , entonces revertir \mathcal{P} genera ciclos.

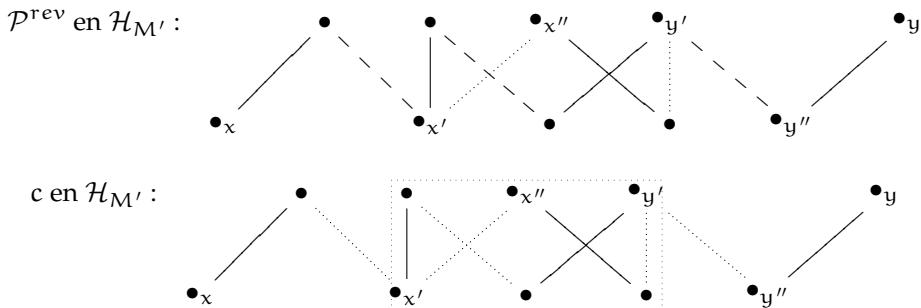
*Demuestra*ión. Queremos hallar un ciclo dirigido en $\mathcal{H}_{M'}$, con $M' = \mathcal{P} \Delta M$.

Sean $e_i = \{x', x''\} \in \mathcal{P}'$ la primer arista que no pertenece a \mathcal{P} , $e_f = \{y', y''\} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ la primer arista posterior a e_i en la cual ambos caminos comienzan a solaparse nuevamente.

La siguiente figura ilustra la situación:



Tenemos dos caminos $x' \xrightarrow{\mathcal{P}} y'$, $x' \xrightarrow{\mathcal{P}'} y' \subseteq [p, p + 1]$ M -alternantes distintos entre x' e y' . Además, como M es matching, ambos caminos comienzan y terminan con aristas que no pertenecen a M . Luego, $c: x' \xrightarrow{\mathcal{P}^{\text{rev}}} y' \xrightarrow{\mathcal{P}'} x'$ es un ciclo en $\mathcal{H}_{M'}$ (ver la siguiente figura).



□

A continuación presentamos una reformulación de 7.4.5⁵. Se obtiene como corolario de 7.4.8 y 7.4.12, considerando caminos aumentativos de altura 1 y traduciendo la condición de no generar ciclos a este caso.

Teorema 7.4.13 (Forman). *Sean X un poset finito graduado, $0 \leq p \leq h(X) - 1$ y M un matching acíclico en X . Si existe un único camino M -aumentativo $\mathcal{P} \subseteq [p, p+1]$ entre dos vértices libres, entonces M no es máximo.*

Utilizando el resultado anterior, se puede elaborar una heurística que permite hallar matchings acíclicos maximales (ver el apartado 7.5.3). De hecho, es la que tomaron como referencia Joswig y Pfetsch [19] para comparar los resultados de su implementación de este problema como uno de programación lineal entera (ver el apartado 7.5.1).

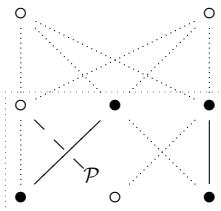
Daremos una condición general que caracteriza cuándo revertir un camino aumentativo genera ciclos.

Definición 7.4.14. Sea $\mathcal{C} := \{c : c \text{ ciclo no dirigido en } \mathcal{H} \text{ de altura 1}\}$.

Un ciclo $c \in \mathcal{C}$ se dice M -saturado si $\frac{|c|}{2}$ de sus aristas pertenecen M .

Sea \mathcal{P} camino M -aumentativo, $c \in \mathcal{C}$, $M' = \mathcal{P} \Delta M$. Decimos que \mathcal{P} *satura* a c si c es un ciclo M' -saturado.

Recordar el ejemplo 7.4.9 en el que consideramos un poset admisible X y un matching acíclico M en él.



El camino M -aumentativo \mathcal{P} (marcado con línea a rayas) satura el ciclo $c \in \mathcal{C}$ (marcado con recuadro).

Observación 7.4.15. Notar que, por 7.4.2, $c \in \mathcal{C}$ es M -saturado si y sólo si c forma un ciclo dirigido en \mathcal{H}_M .

Se deduce la siguiente

Proposición 7.4.16. *Sean \mathcal{P} camino M -aumentativo, $M' = \mathcal{P} \Delta M$. \mathcal{P} genera ciclos si y sólo si existe $c \in \mathcal{C}$ tal que \mathcal{P} satura a c .*

Si recordamos que restando un camino aumentativo que no genera ciclos obtenemos un matching con más aristas (7.4.8), podemos concluir lo siguiente.

Corolario 7.4.17. *Sean X poset finito graduado y M un matching acíclico en X . Si existe un camino M -aumentativo tal que \mathcal{P} no satura a $c \forall c \in \mathcal{C}$, entonces M no es máximo.*

⁵Forman llama *caminos gradientes* a los caminos aumentativos de altura 1.

Revirtiendo caminos aumentativos simultáneamente

Sea X un poset graduado X y M un matching acíclico en X .

Puede ocurrir que existan en \mathcal{H}_M varios caminos M -aumentativos que no generen ciclos, pero que luego de revertir alguno, los demás pasen a generar ciclos y no sea posible revertirlos. Veremos que bajo ciertas condiciones, podremos revertirlos **simultáneamente**.

Más aún, puede ocurrir que existan en \mathcal{H}_M varios caminos M -aumentativos que **no** puedan revertirse **individualmente**, pues generan ciclos. Pero bajo ciertas condiciones, podrán revertirse **simultáneamente** sin generarlos.

Utilizamos como punto de partida el siguiente resultado de Hersh ([18], 2.1).

Proposición 7.4.18. *Sea f una función de Morse discreta en un CW-complejo regular K .*

Supongamos que existen celdas críticas β_i de dimensión $p_i + 1$ y α_i de dimensión p_i (con $\beta_i \neq \beta_j$ y $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$) y un único camino gradiente \mathcal{P}_i desde β_i a α_i para $1 \leq i \leq r$. Si no existe permutación $\pi \in S_r$ distinta de la identidad tal que hay un camino gradiente desde β_i a $\sigma_{\pi(i)}$ para $1 \leq i \leq r$, entonces revertir simultáneamente los caminos gradientes \mathcal{P}_i no crea ningún ciclo dirigido.

A continuación presentamos una reformulación algo más general del resultado anterior, utilizando la terminología desarrollada.

Teorema 7.4.19. *Sean X poset finito graduado, $0 \leq p < h(X)$ y M un matching acíclico en X .*

Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r \subseteq [p, p+1]$, donde \mathcal{P}_i camino M -aumentativo entre x_i e y_i , $\deg(x_i) = p$, $\deg(y_i) = p+1$ y $r \geq 2$. Si revertirlos individualmente no genera ciclos y no existe permutación $\sigma \neq \text{id}$ de $\{1, 2, \dots, r\}$ tal que existe un camino M -aumentativo $\mathcal{Q}_i \subseteq [p, p+1]$ entre x_i e $y_{\sigma(i)}$ $\forall 1 \leq i \leq r$, entonces revertir simultáneamente los caminos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$ no genera ciclos⁶.

Observación 7.4.20. El lema 7.4.3 se puede obtener como corolario del teorema anterior. Basta considerar el matching acíclico $M := \emptyset$ y los caminos M -aumentativos $\mathcal{P}_i := (x_i, y_i)$.

Presentamos las siguientes generalizaciones:

Proposición 7.4.21. *Sean X poset finito graduado y M un matching acíclico en X .*

Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$, donde \mathcal{P}_i camino M -aumentativo entre x_i e y_i (con $x_i \neq x_j$ e $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$) y $r \geq 2$.

Si revertirlos individualmente no genera ciclos y no existe permutación $\sigma \neq \text{id}$ de $\{1, 2, \dots, r\}$ tal que existe un camino M -aumentativo entre x_i e $y_{\sigma(i)}$ $\forall 1 \leq i \leq r$, entonces revertir simultáneamente los caminos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$ no genera ciclos.

Demostración. En primer lugar, notemos que los caminos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$ no se intersecan. En efecto, si $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \neq \emptyset$ para algún $i \neq j$, consideramos \mathcal{Q} una componente conexa de $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j$. Como \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_j son caminos M -alternantes, \mathcal{Q} lo es. Dado que \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_j son caminos simples, los extremos de \mathcal{Q} son distintos. Llamamos x_0 e y_0 a sus extremos. Sean x'_i, y'_i tales que $\{x'_i, x_0\}, \{y_0, y'_i\} \in \mathcal{Q}^c \cap \mathcal{P}_i$. De manera análoga, sean x'_j, y'_j tales que $\{x'_j, x_0\}, \{y_0, y'_j\} \in \mathcal{Q}^c \cap \mathcal{P}_j$. Por último, sean x'_0, y'_0 tales que $\{x_0, x'_0\}, \{y'_0, y_0\} \in \mathcal{Q}$ (ver Figura 7.13).

⁶Revertir simultáneamente los caminos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$ es considerar el matching $M' = M \Delta (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots \cup \mathcal{P}_r)$. Que no generen ciclos significa que M' es acíclico.

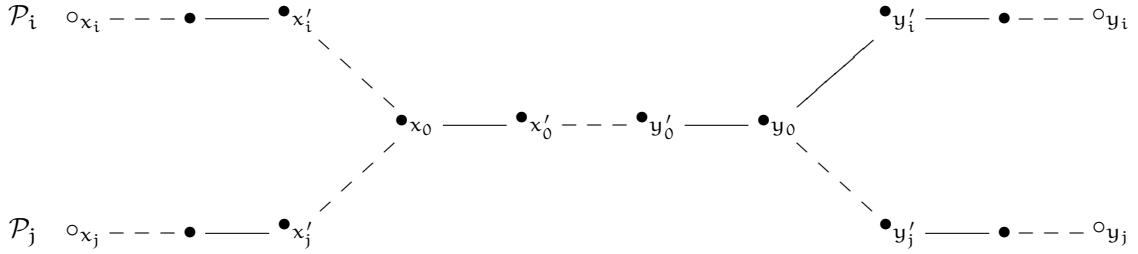


Figura 7.13: \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_j .

Notar que $\{x_0, x_0'\}, \{y_0', y_0\} \in M$ (pues \mathcal{P}_i y \mathcal{P}_j son M -alternantes y M es matching). Luego, existen los siguientes caminos M -alternantes

$$x_i \sim_{\mathcal{P}_i} x_0, \quad x_j \sim_{\mathcal{P}_j} x_0, \quad y_0 \sim_{\mathcal{P}_i} y_i, \quad y_0 \sim_{\mathcal{P}_j} y_j, \quad x_0 \sim_{\mathcal{Q}} y_0.$$

Finalmente, los caminos M -aumentativos

$$x_i \sim_{\mathcal{P}_i} x_0 \sim_{\mathcal{Q}} y_0 \sim_{\mathcal{P}_j} y_j \quad y \quad x_j \sim_{\mathcal{P}_j} x_0 \sim_{\mathcal{Q}} y_0 \sim_{\mathcal{P}_i} y_i$$

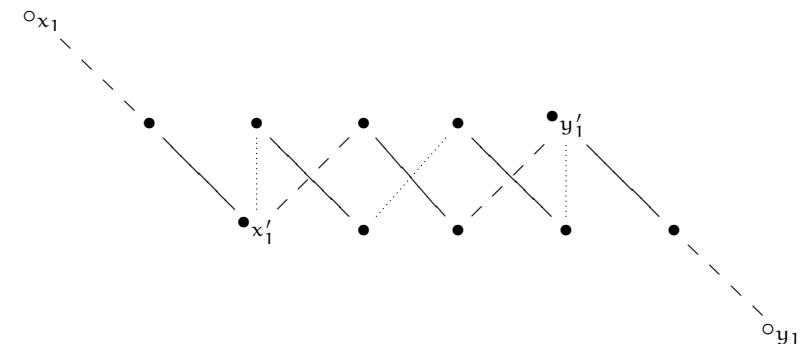
dan lugar a la permutación $\sigma = (ij) \in S_r$, que contradice las hipótesis.

Veamos ahora que revertir los caminos simultáneamente no genera ciclos. Supongamos que existe un ciclo dirigido c en \mathcal{H}_M' . Notar que c involucra aristas de varios de los caminos $\{\mathcal{P}_i\}_i$, pues si involucrara aristas de un único camino estaría contradiciendo. Supongamos que c involucra aristas de exactamente los caminos $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$ para algún $2 \leq k \leq r$.

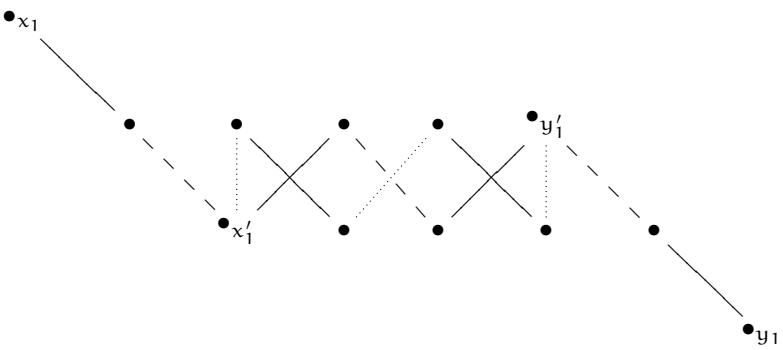
Hacemos el caso $k = 2$; es decir, para todo $j \in \{1, 2\}$, $P_{i_j} \cap c \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, $i_1 = 1$ y $i_2 = 2$.

Consideremos Q_j alguna componente conexa de $P_j \cap c$. Q_j es un camino M -alternante, llamamos x_j' e y_j' a sus extremos (que serán distintos pues Q_j es un camino simple). Además, notemos que las aristas de Q_j adyacentes a los extremos no pertenecen a M . las siguientes figuras ilustran la situación.

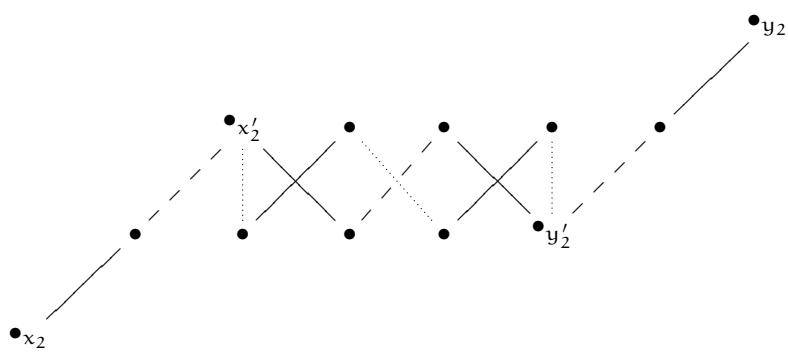
\mathcal{P}_1 en \mathcal{H}_M :



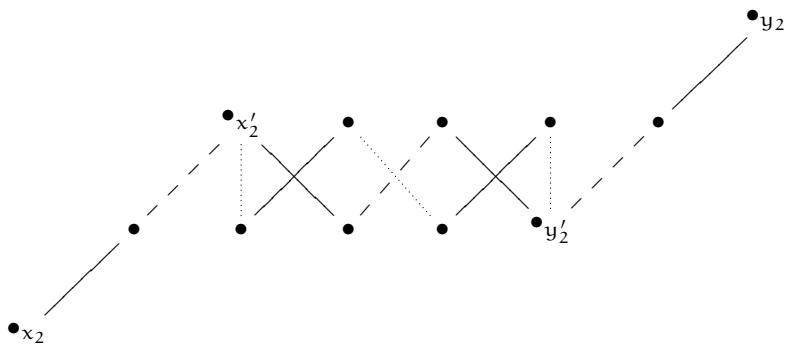
$\mathcal{P}_1^{\text{rev}}$ en $\mathcal{H}_{M'}$:



\mathcal{P}_2 en \mathcal{H}_M :



$\mathcal{P}_2^{\text{rev}}$ en $\mathcal{H}_{M'}$:



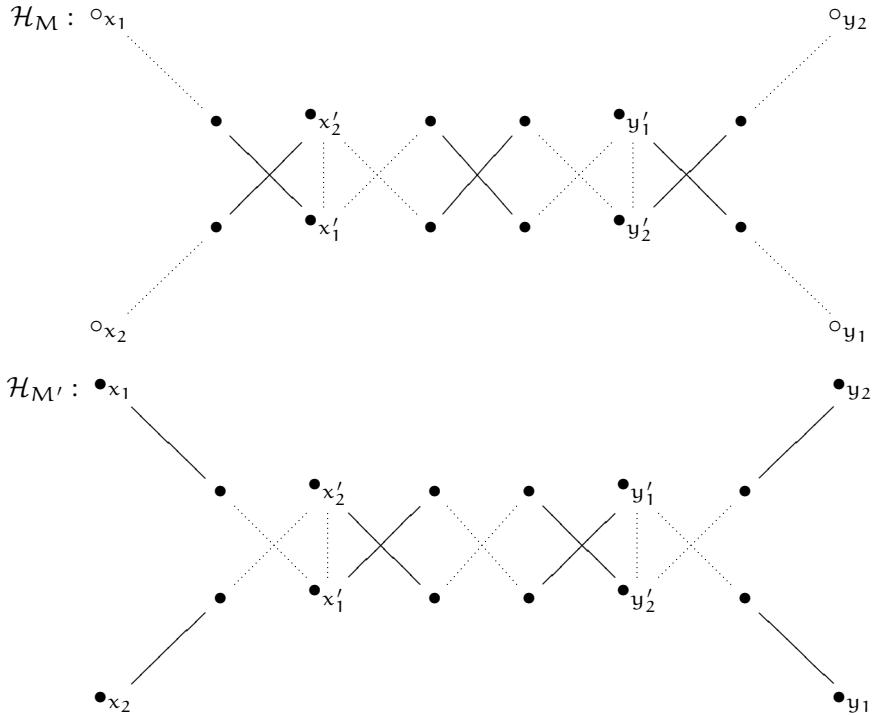
Como c es un ciclo simple y $\{Q_1, Q_2\} \subseteq c$, existen caminos M -alternantes con ambos extremos libres en $(Q_1 \cup Q_2)^c$

$$y'_1 \rightsquigarrow_{c} y'_2 \quad \text{y} \quad x'_2 \rightsquigarrow_{c} x'_1$$

tales que, salvo cambio de notación de los extremos de cada Q_j , c se puede describir como

$$x'_1 \rightsquigarrow_{Q_1} y'_1 \rightsquigarrow_c y'_2 \rightsquigarrow_{Q_2} y'_1 \rightsquigarrow_c x'_2 \rightsquigarrow_{Q_2} x'_1.$$

Ilustramos la situación mediante nuevas figuras:



Luego, los caminos M -aumentativos

$$x_1 \xrightarrow{\mathcal{P}_1} x'_1 \xrightarrow{c} x'_2 \xrightarrow{\mathcal{Q}_2} y'_2 \xrightarrow{\mathcal{P}_2} y_2 \quad \text{y} \quad x_2 \xrightarrow{\mathcal{P}_2} x'_2 \xrightarrow{c} y'_2 \xrightarrow{c} y'_1 \xrightarrow{\mathcal{P}_1} y_1$$

dan lugar a la permutación $(12) \in S_r$, que contradice la hipótesis. En conclusión, podemos revertir simultáneamente los caminos sin generar ciclos.

En el caso general se procede de manera análoga. \square

Los siguientes resultados dan condiciones para revertir **simultáneamente** caminos aumentativos sin generar ciclos, cuando revertirlos **individualmente** genera ciclos quizás. El primero trata el caso particular en el cual los caminos aumentativos están incluidos en algún piso. El segundo, el caso general.

Proposición 7.4.22. *Sean X poset finito graduado, $0 \leq p < h(X)$ y M un matching acíclico en X .*

Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r \subseteq [p, p+1]$, con \mathcal{P}_i un camino M -aumentativo entre x_i e y_i (con $x_i \neq x_j$ e $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$), donde $\deg(x_i) = p$, $\deg(y_i) = p+1$ y $r \geq 2$.

Supongamos que para todo $1 \leq i \leq r$ y para todo camino M -aumentativo $\mathcal{P}'_i \neq \mathcal{P}_i \subseteq [p, p+1]$ entre x_i e y_i , existe $j \neq i$ tal que $\mathcal{P}'_i \cap \mathcal{P}_j \neq \emptyset$.

Si no existe permutación $\sigma \neq \text{id}$ de $\{1, 2, \dots, r\}$ tal que para todo $1 \leq i \leq r$ existe algún un camino M -aumentativo $\mathcal{P}''_i \subseteq [p, p+1]$ entre x_i e $y_{\sigma(i)}$, entonces revertir simultáneamente los caminos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$ no genera ciclos.

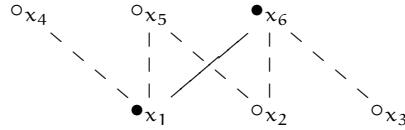
Demostración. En primer lugar, notamos que los caminos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$ no se intersecan (ver demostración de 7.4.21).

Veamos que pueden revertirse simultáneamente sin generar ciclos. Supongamos que existe un ciclo c en M' y que involucra aristas de $\mathcal{P}_{i_1}^{\text{rev}}, \mathcal{P}_{i_2}^{\text{rev}}, \dots, \mathcal{P}_{i_k}^{\text{rev}}$ para algún $1 \leq k \leq r$.

Notar que $k \neq 1$. En efecto, supongamos que $k = 1$, es decir, c involucra sólo aristas de $\mathcal{P}_{i_1}^{\text{rev}}$. Para simplificar notación, $\mathcal{P}_i := \mathcal{P}_{i_1}$, $x_i := x_{i_1}$ e $y_i := y_{i_1}$. Por 7.4.10, existe $\mathcal{P}'_i \neq \mathcal{P}_i$ otro camino M -aumentativo entre x_i e y_i . Y éste puede descomponer como $\mathcal{P}'_i = (\mathcal{P}'_i \cap \mathcal{P}_i) \sqcup (\mathcal{P}'_i \cap (c \setminus \mathcal{P}_i))$. Por hipótesis, existe $j \neq i_1$ tal que $\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}'_i \neq \emptyset$. Pero por otra parte, como $\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_i = \emptyset$, utilizando la decomposición anterior deducimos que $\mathcal{P}_j \cap (\mathcal{P}'_i \cap (c \setminus \mathcal{P}_i)) \neq \emptyset$. Pero esto es un absurdo, que proviene de suponer $k = 1$.

El razonamiento sigue de manera análoga al realizado en la demostración de 7.4.21. \square

Ejemplo 7.4.23. Supongamos que tenemos en algún piso la siguiente situación:



El camino $\mathcal{P}_1 = (x_2, x_5)$ no puede ser revertido pues genera ciclos (hay otro camino entre x_2 y x_5 en ese piso: $\mathcal{P}'_1 = (x_2, x_6)(x_6, x_1)(x_1, x_5)$). Sin embargo, se interseca con $\mathcal{P}_2 = (x_3, x_6)(x_6, x_1)(x_1, x_4)$ en la arista (x_6, x_1) . La condición de la permutación se cumple. Luego, \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 pueden revertirse simultáneamente sin generar ciclos.

Proposición 7.4.24. Sean X poset finito graduado y M un matching acíclico en X .

Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$, con \mathcal{P}_i camino M -aumentativo entre x_i e y_i (con $x_i \neq x_j$ e $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$) y $r \geq 2$.

Supongamos que para todo $1 \leq i \leq r$ y para todo $c \in \mathcal{C}$ ciclo saturado por \mathcal{P}_i , $(c \setminus \mathcal{P}_i) \cap \mathcal{P}_j \neq \emptyset$ para algún $j \neq i$.

Si no existe permutación $\sigma \neq \text{id}$ de $\{1, 2, \dots, r\}$ tal que para todo $1 \leq i \leq r$ existe un camino M -aumentativo entre x_i e $y_{\sigma(i)}$, entonces revertir simultáneamente los caminos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$ no genera ciclos.

Demostración. Los caminos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$ no se intersecan (ver demostración de 7.4.21).

Supongamos que existe un ciclo c en M' y que involucra aristas de $\mathcal{P}_{i_1}^{\text{rev}}, \mathcal{P}_{i_2}^{\text{rev}}, \dots, \mathcal{P}_{i_k}^{\text{rev}}$ para algún $1 \leq k \leq r$.

Notar que $k \neq 1$. En efecto, si $k = 1$, entonces $c \in \mathcal{C}$ es un ciclo saturado por \mathcal{P}_{i_1} . Por hipótesis, $(c \setminus \mathcal{P}_{i_1}) \cap \mathcal{P}_j \neq \emptyset$ para algún $j \neq i_1$. Pero esto contradice que $k = 1$.

El razonamiento sigue de manera análoga al realizado en la demostración de 7.4.21. \square

Finalmente, exponemos un resultado general que resume todos los anteriores.

Teorema 7.4.25. Sean X poset finito graduado y M un matching acíclico en X .

Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r$, donde \mathcal{P}_i camino M -aumentativo entre x_i e y_i (con $x_i \neq x_j$ e $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$) y $r \geq 2$.

Si para todo $0 \leq i \leq r$ y para todo $c \in \mathcal{C}$ ciclo saturado por \mathcal{P}_i , $(c \setminus \mathcal{P}_i) \cap \mathcal{P}_j \neq \emptyset$ para algún $j \neq i$; y no existe permutación $\sigma \neq \text{id}$ de $\{1, 2, \dots, r\}$ tal que existe un camino M -aumentativo entre x_i e $y_{\sigma(i)}$ para todo $1 \leq i \leq r$, entonces M no es máximo. Más aún, existe un matching M' tal que $|M'| = |M| + r$.

Demostración. Sea $M' = M \Delta (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots \cup \mathcal{P}_r)$. Claramente, M' es un matching, $|M'| = |M| + r$ y por 7.4.24 es acíclico. \square

7.4.3 Reparando matchings con ciclos

El objetivo de esta sección es hallar métodos para "reparar" un matching (máximo) no necesariamente acíclico en el diagrama de Hasse de un poset graduado.

Sean X poset finito graduado y M un matching en X no necesariamente acíclico. Definimos

$$\mathcal{C}^M := \left\{ c \in \mathcal{C} : c \text{ ciclo dirigido en } \mathcal{H}_M \right\} = \left\{ c \in \mathcal{C} : c \text{ ciclo no dirigido en } \mathcal{H} \text{ tal que } |c \cap M| = \frac{|c|}{2} \right\}.$$

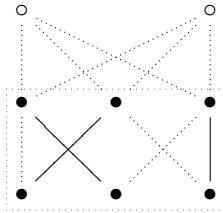
el conjunto de ciclos dirigidos en \mathcal{H}_M . M es acíclico si y sólo si \mathcal{C}^M tiene cardinal cero.

Existen varias nociones de caminos en \mathcal{H}_M que nos resultarán de utilidad.

Definición 7.4.26. Un camino M -equitativo es un camino M -alternante \mathcal{P} entre un vértice libre y uno correspondido con igual cantidad de aristas en M que en M^c (es decir, $|\mathcal{P} \cap M| = |\mathcal{P} \cap M^c|$).

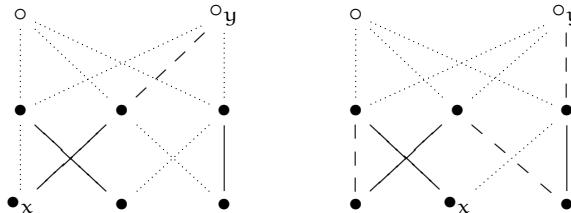
Definición 7.4.27. Un camino M -disminuyente es un camino M -alternante \mathcal{P} entre dos vértices correspondidos tal que $|\mathcal{P} \cap M| + 1 = |\mathcal{P} \cap M^c|$.

Ejemplo 7.4.28. Consideremos el siguiente matching (máximo) M en el poset admisible X de la figura 7.9:

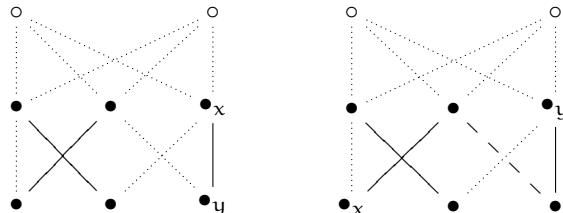


Notar que \mathcal{H}_M tiene un ciclo en el piso $[0, 1]$.

Veamos ejemplos de caminos M -equitativos (notamos x al extremo correspondido e y al libre):



y de caminos M -disminuyentes (notamos x e y a sus extremos):



Observación 7.4.29. Si \mathcal{P} es un camino M -equitativo ó M -disminuyente, entonces $M' = \mathcal{P} \Delta M$ es un matching.

Proposición 7.4.30. Sean X poset finito graduado y M un matching en X . Sea \mathcal{P} camino M -equitativo, disminuyente ó aumentativo. Si $c \in \mathcal{C}^M$ y $c \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, entonces $c \notin \mathcal{C}^{M'}$, donde $M' = \mathcal{P} \Delta M$.

Demuestra. Basta chequear que $|c \cap M'| < \frac{|c|}{2}$.

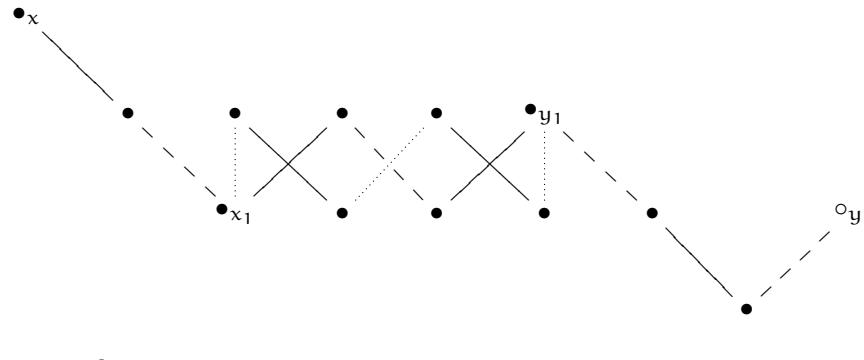
Dado \mathcal{P} , c se deja descomponer como $c = (c \cap \mathcal{P}) \cup (c \cap \mathcal{P}^c)$.

Por un lado, $c \cap \mathcal{P}^c \cap M' = c \cap \mathcal{P}^c \cap M$, pues para las aristas que no pertenecen a \mathcal{P} , su condición respecto de los matchings es la misma.

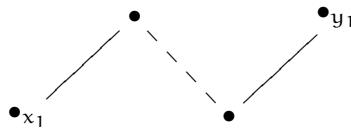
Por el otro, las componentes conexas de $c \cap \mathcal{P}$ son caminos M -disminuyentes.

En efecto, sea \mathcal{Q} una la componente conexa de $c \cap \mathcal{P}$. \mathcal{Q} es un camino M -alternante pues \mathcal{P} lo es. Sean x_1 e y_1 los extremos de \mathcal{Q} . Notar que $x_1 \neq y_1$ y que no pueden ser vértices libres pues c es ciclo dirigido en \mathcal{H}_M .

\mathcal{P} en \mathcal{H}_M :

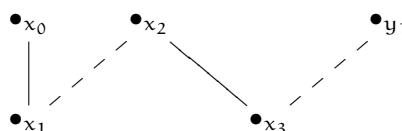


\mathcal{Q} :

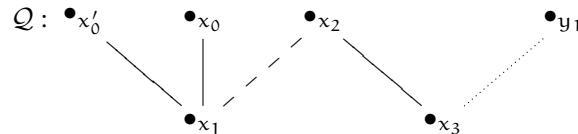


Sea $e = \{x_1, x_2\} \in \mathcal{Q}$. Supongamos que $e \notin M$. Entonces existen $(x_0, x_1), (x_2, x_3) \in M \cap c$.

\mathcal{Q} :



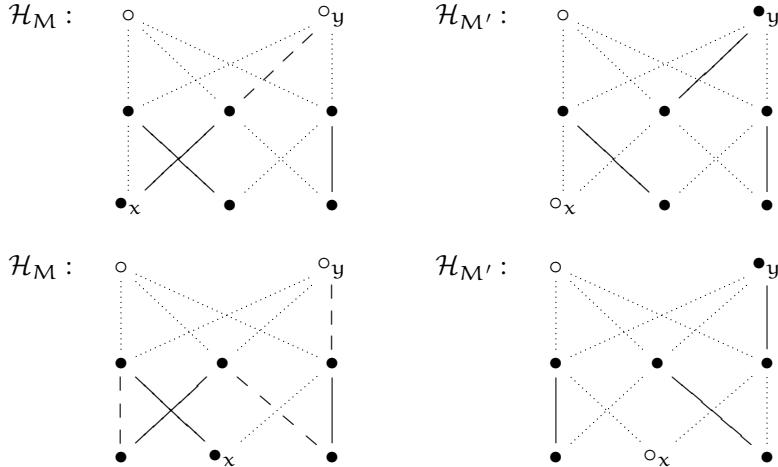
Como \mathcal{P} es camino M -disminuyente, equitativo ó aumentativo, x_1 no es extremo de \mathcal{P} . Luego, existe $x'_0 \in X$ tal que $\{x'_0, x_1\} \in \mathcal{P} \cap M$. $(x'_0, x_1) \notin c$, pues x_1 es extremo de \mathcal{Q} . Pero entonces $x_0 \neq x'_0$, y $\{x'_0, x_1\}, \{x_0, x_1\}$ son dos aristas del matching M que inciden en x_1 , que es un absurdo. Luego, $e = \{x_1, x_2\} \in \mathcal{Q} \cap M$. Para y_1 se procede de manera análoga.



Entonces, $|\mathcal{Q} \cap M'| = |\mathcal{Q} \cap M| - 1$. En particular, $|c \cap \mathcal{P} \cap M'| < |c \cap \mathcal{P} \cap M|$.

En conclusión $|c \cap M'| = (c \cap \mathcal{P} \cap M') \cup (c \cap \mathcal{P}^c \cap M') < (c \cap \mathcal{P} \cap M) \cup (c \cap \mathcal{P}^c \cap M') = |c \cap M| = \frac{|c|}{2}$. \square

Como aplicación, consideramos el matching máximo **no acíclico** M del ejemplo 7.4.28. Si revertimos los caminos M -equitativos allí expuestos, obtenemos matchings acíclicos máximos.



Luego, revertir caminos equitativos, disminuyentes ó aumentativos de un matching máximo hasta que se convierta en acíclico es otra técnica para hallar matchings acíclicos máximos.

7.5 Algoritmos para hallar matchings acíclicos máximos

Joswig y Pfetsch [19] demuestran que el problema de hallar matchings acíclicos máximos asociados a posets de la forma $X = \mathcal{X}(K)$, con K complejo celular, es \mathcal{NP} -hard (y lo modelan como un problema de programación lineal entera).

En esta sección presentamos distintos algoritmos orientados a hallar matchings acíclicos máximos, cuya base teórica se encuentra en la sección anterior 7.4.

7.5.1 Programación lineal entera

Modelando el problema

La *programación lineal entera* es una técnica que consiste en expresar el problema como la **maximización** de una función lineal con variables enteras sujeta a una serie de **restricciones** lineales.

Los problemas de programación lineal entera se expresan de manera canónica de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax \leq b \end{array}$$

donde x representa el vector de variables enteras (a ser determinado), c y b son vectores con coeficientes enteros (conocidos), y A es una matriz de coeficientes enteros (conocidos). La expresión a ser maximizada se llama **función objetivo** ($c^T x$ en este caso, donde c^T denota la matriz transpuesta de c). Las ecuaciones $Ax \leq b$ son las restricciones lineales.

Por ejemplo, un problema de programación lineal entera es el de:

$$\text{maximizar } x_1 + 2x_2$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 7 \end{cases}$$

cuya formulación matricial es:

$$\text{maximizar } (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{sujeto a } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Mostramos la formulación del problema de hallar un matching acíclico máximo como un problema de programación lineal entera realizada por Joswig y Pfetsch [19], con una presentación más clara y concreta.

Sea $G = (V, E) = \mathcal{H}(X)$, con X graduado de altura h .

Describimos a G por su matriz de incidencia. Ordenamos totalmente al conjunto de aristas de G : e_1, e_2, \dots, e_m (con $m = |E|$); y al conjunto de sus vértices: v_1, v_2, \dots, v_n (con $n = |V|$). La matriz de incidencia I de G tiene sus filas indexadas por las aristas y sus columnas por los vértices. $I \in \{0, 1\}^{m \times n}$ y $I[i, j] = 1$ si y sólo si la arista e_i incide en el vértice v_j .

Tenemos también como dato cuáles son los ciclos no dirigidos de G incluidos en $[p, p+1]$ para algún $0 \leq p \leq h-1$. Están presentados en forma de una matriz C con sus filas indexadas por las aristas, y las columnas por los ciclos c_1, c_2, \dots, c_r . $C \in \{0, 1\}^{m \times r}$ y $C[i, k] = 1$ si y sólo si $e_i \in c_k$.

Representamos a un subconjunto M de aristas de G como un vector x de largo m de 0's y 1's; es decir, $x \in \{0, 1\}^m$ y $x[i] = 1$ si y sólo si $e_i \in M$. x es el *vector de incidencia* de M .

Debemos poner condiciones a las coordenadas de x de modo tal que el subconjunto de aristas asociado a él sea un matching acíclico máximo.

Condición de matching:

$$\sum_{i=1}^m I[i, j].x[i] \leq 1 \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

Condición de aciclicidad:

$$\sum_{i=1}^m C[i, k].x[i] \leq \frac{\sum_{i=1}^m C[i, k]}{2} - 1 \quad \forall 1 \leq k \leq r$$

Queremos hallar $x \in \mathbb{Z}^m$ tal que resuelva el problema de:

$$\text{maximizar } \sum_{i=1}^m x[i]$$

$$\text{sujeto a: } 0 \leq x[i] \leq 1 \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

$$\sum_{i=1}^m I[i, j].x[i] \leq 1 \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^m C[i, k].x[i] \leq \frac{\sum_{i=1}^m C[i, k]}{2} - 1 \quad \forall 1 \leq k \leq r$$

Implementación en Sage

Sea X el diagrama de Hasse de un poset graduado, en forma de grafo no dirigido.

En primer lugar creamos la función `incidence_matrix`, que devuelve la matriz de incidencia de X en forma de lista. En base al orden en sus aristas dado por la función de Sage `edges`, y al orden en sus vértices dado por `vertices`, vale que $I_{i,j} = \text{incidence_matrix}(X)[j+i*m]$.

Programa 7.1: Función `incidence_matrix`.

```
1 def incidence_matrix(X):
2     E=X.edges(labels=False)
3     V=X.vertices()
4     I=[]
5     for i in range(len(E)):
6         for j in range(len(V)):
7             if V[j]==E[i][0] or V[j]==E[i][1]: I.append(1)
8             else: I.append(0)
9     return I
```

El próximo objetivo es crear la matriz de ciclos. Para eso, necesitamos la lista de los ciclos no dirigidos en cada piso. La función `cycle_edges_1` toma como argumento el diagrama de Hasse de un poset graduado de altura 1, en forma de grafo no dirigido, y devuelve la lista de sus ciclos.

Programa 7.2: Función `cycle_edges_1`.

```
1 def cycle_edges_1(X):
2     cycle_V=[]
3     for c in X.to_directed().all_simple_cycles():
4         if len(c)>3: cycle_V.append(c[0:len(c)-1])
5     r=len(cycle_V)
6     cycle_E=[]
7     for k in range(r):
8         n=len(cycle_V[k])
9         l=set([()])
10        for i in range(n-1):
11            l=l| set([(cycle_V[k][i],cycle_V[k][i+1])])
12            l=l| set([(cycle_V[k][n-1],cycle_V[k][0])])
13            lrev=set([(s[1],s[0]) for s in l])
14            if lrev not in cycle_E: cycle_E.append(l)
15    return cycle_E
```

La función `cycle_edges` toma como argumentos: X , el diagrama de Hasse de un poset graduado cualquiera en forma de grafo no dirigido, y L la lista de listas de elementos de cada grado. utilizando como herramienta la función anterior, devuelve la lista de sus ciclos.

Programa 7.3: Función `cycle_edges`.

```
1 def cycle_edges(X,L):
2     for i in range(len(L)-1):
3         Y=X.subgraph(L[i]+L[i+1])
4         cycles=cycles + cycle_edges_1(Y)
5     return cycles
```

Finalmente, la función `cycle_matrix` toma los mismos argumentos X y L , y devuelve la matriz de ciclos no dirigidos incluidos en los distintos pisos en forma de lista. En base al orden en las aristas dado por la función de Sage `edges`, y al orden en sus ciclos dado por `cycle_edges`, vale que $C_{i,k} = \text{cycle_matrix}(X, L)[k+i*r]$.

Programa 7.4: Función `cycle_matrix`.

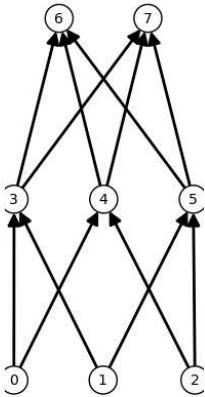
```

1 def cycle_matrix(X, L):
2     E=X.edges(labels=False)
3     C=[]
4     c=cycle_edges(X, L)
5     for i in range(len(E)):
6         for k in range(len(c)):
7             if (E[i][0],E[i][1]) in c[k] or (E[i][1],E[i][0]) in c[k]:
8                 C.append(1)
9             else: C.append(0)
10    return C

```

Implementamos las funciones anteriores en un pequeño ejemplo.

```
X=Graph({0:[3,4], 1:[3,5], 2:[4,5], 3:[6,7], 4:[6,7], 5:[6,7]})  
Poset({0:[3,4], 1:[3,5], 2:[4,5], 3:[6,7], 4:[6,7], 5:[6,7]}).show(figsize=[5,5],vertex_colors='white')
```



```

print X.vertices()
print X.edges(labels=False)
print incidence_matrix(X)

[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
[(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 6),
(4, 7), (5, 6), (5, 7)]
[1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0,
0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]

print X.edges(labels=False)
print cycle_edges(X,[[0,1,4],[2,3,5],[6,7]])
print cycle_matrix(X,[[0,1,4],[2,3,5],[6,7]])

evaluate
[(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 6),
(4, 7), (5, 6), (5, 7)]
[set([(1, 5), (0, 3), (3, 1), (5, 2), (2, 4), (4, 0)]), set([(7, 3), (5,
7), (6, 5), (3, 6)])]
[1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1]
```

Figura 7.14: Implementación en Sage de las funciones `incidence_matrix`, `cycle_edges` y `cycle_matrix`.

Ya tenemos las herramientas necesarias para implementar el problema como uno de Programación Lineal Entera. Para lograrlo, utilizamos la clase `MixedIntegerLinearProgram` incorporada en Sage.

Programa 7.5: Función `maximum_acyclic_matching_ILP`.

```

1 def maximum_acyclic_matching_ILP (X, L):
2     I=incidence_matrix(X)
3     C=cycle_matrix(X, L)
4     n=len(X.vertices())
5     m=len(I)/n #len(X.edges())
6     if m==0: return []
7     r=len(C)/m #len(cycle_edges(X))
8     p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=True)
9     x = p.new_variable(integer=True)
10    for j in range(n):
11        p.add_constraint(sum([I[j+i*n]*x[i] for i in range(m)]) <= 1)
12    for k in range(r):
13        p.add_constraint(sum([C[k+i*r]*x[i] for i in range(m)]) <=
14 (sum([C[k+i*r] for i in range(m)]))/2 - 1)
15    for i in range (m):
16        p.add_constraint(x[i]<=1)
17    p.set_objective(sum([x[i] for i in range(m)]))
18    p.solve()
19    M=[]
20    for i in range(m):
21        if p.get_values(x)[i]==1: M.append(X.edges(labels=False)[i])
22    return M

```

Veamos cómo procede cada línea del código.

Línea 8: Creamos `p` un problema de programación lineal entera. Especificamos, mediante `maximization=True`, que queremos maximizar la función objetivo.

Línea 9: Creamos el vector `x` de variables enteras mediante `p.new_variable(integer=True)`.

Líneas 10-16: Agregamos las distintas condiciones que deben satisfacer las variables mediante la función `add_constraint`. Por default, se asume que todas las variables son mayores o iguales que 0 (esta condición se puede omitir mediante `p.set_min(x, None)`).

Línea 17: Creamos la función objetivo mediante la función `set_objective`.

Línea 18 : Resolvemos `p` mediante la función `solve()`.

Líneas 19-21 : Creamos la lista `M` de aristas en el matching acíclico máximo.

Línea 22: La función devuelve `M`, la lista de aristas en un matching acíclico máximo.

Podemos ver en detalle el planteo del problema y la solución obtenida reemplazando la línea 18 por las siguientes instrucciones:

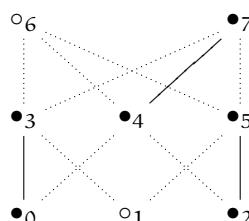
```

1     p.show()
2     print 'Cardinal del matching aciclico maximo:', p.solve()
3     for i, v in p.get_values(x).iteritems():
4         print 'x_%s = %s =%s' % (i, X.edges(labels=False)[i] ,int(round(v)))

```

En la Figura 7.15 para ver la aplicación de la función anterior al ejemplo `X` con el que trabajamos anteriormente.

El matching que devuelve la función es `[(0, 3), (2, 5), (4, 7)]`:



Dado que este poset es admisible, concluimos que $\mathcal{K}(X)$ tiene el mismo tipo homotópico simple que un CW-complejo con una 0-celda y una 2-celda.

```
maximum_acyclic_matching_ILP(X,[[0,1,2],[3,4,5],[6,7]])
```

```
Maximization:
  x_0 +x_1 +x_2 +x_3 +x_4 +x_5 +x_6 +x_7 +x_8 +x_9 +x_10 +x_11
Constraints:
  x_0 +x_1 <= 1
  x_2 +x_3 <= 1
  x_4 +x_5 <= 1
  x_0 +x_2 +x_6 +x_7 <= 1
  x_1 +x_4 +x_8 +x_9 <= 1
  x_3 +x_5 +x_10 +x_11 <= 1
  x_6 +x_8 +x_10 <= 1
  x_7 +x_9 +x_11 <= 1
  x_0 +x_1 +x_2 +x_3 +x_4 +x_5 <= 2
  x_6 +x_7 +x_8 +x_9 <= 1
  x_6 +x_7 +x_10 +x_11 <= 1
  x_8 +x_9 +x_10 +x_11 <= 1
  x_0 <= 1
  x_1 <= 1
  x_2 <= 1
  x_3 <= 1
  x_4 <= 1
  x_5 <= 1
  x_6 <= 1
  x_7 <= 1
  x_8 <= 1
  x_9 <= 1
  x_10 <= 1
  x_11 <= 1
Variables:
  x_0 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_1 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_10 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_11 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_2 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_3 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_4 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_5 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_6 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_7 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_8 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
  x_9 is an integer variable (min=0.0, max=+oo)
Cardinal del matching acíclico máximo: 3.0
x_0 = (0, 3) =1
x_1 = (0, 4) =0
x_2 = (1, 3) =0
x_3 = (1, 5) =0
x_4 = (2, 4) =0
x_5 = (2, 5) =1
x_6 = (3, 6) =0
x_7 = (3, 7) =0
x_8 = (4, 6) =0
x_9 = (4, 7) =1
x_10 = (5, 6) =0
x_11 = (5, 7) =0
[(0, 3), (2, 5), (4, 7)]
```

Figura 7.15: Implementación en Sage de la función `maximum_acyclic_matching_ILP`.

Observación 7.5.1. Sea M un matching acíclico y x su vector de incidencia.

Notar que $v = v_j$ es un vértice M -libre si y sólo si

$$\sum_{e:v \in e} x_e = \sum_{i:v_j \in e_i} x[i] = \sum_{i=1}^m I[i, j] \cdot x[i] = 0.$$

Luego, podemos calcular la cantidad de vértices M -libres de la siguiente manera:

$$|\text{vértices } M\text{-libres}| = \sum_{v \in V} (1 - \sum_{e:v \in e} x_e) = |V| - 2 \sum_{e \in E} x_e = n - 2|M|.$$

Utilizando coordenadas de manera explícita

$$|\text{vértices } M\text{-libres}| = \sum_{j=1}^n (1 - \sum_{i:v_j \in e_i} x[i]) = \sum_{j=1}^n (1 - \sum_{i=1}^m I[i, j] \cdot x[i]) = |V| - 2 \sum_{i=1}^m x[i] = n - 2|M|.$$

Más aún, si X es h -admisible, aplicando las desigualdades débiles de Morse obtenemos la siguiente cota:

$$c_p = |\text{vértices críticos de grado } p| = \sum_{v \in V: \deg(v)=p} (1 - \sum_{e:v \in e} x_e) \geq b_p.$$

7.5.2 Programación dinámica

En esta sección utilizaremos la técnica de programación dinámica para el diseño de un algoritmo que resuelva de manera exacta el problema de hallar un matching acíclico máximo de un grafo de la forma $\mathcal{H}(X)$, con X graduado.

Resolución inductiva

Sea X poset graduado de altura h . Queremos construir un matching acíclico máximo M en $\mathcal{H}(X)$.

Para cada $0 \leq p \leq h$, sea X_p el conjunto de vértices de X a altura p , que llamaremos *nivel* p .

Para cada $0 \leq p < q \leq h$, $A \subseteq X_p$, $B \subseteq X_q$, notamos por $M[p, q]_A^B$ a un matching acíclico máximo en el subposet de X cuyos vértices son $A \sqcup X_{p+1} \sqcup \dots \sqcup X_{q-1} \sqcup B$.

Un matching acíclico máximo en X es un matching con la mayor cantidad de aristas entre los siguientes:

$$\left\{ M[0, h-1]^T \cup M[h-1, h]_{T^c} : T \subseteq X_{h-1} \right\},$$

(todo matching acíclico máximo en X cumple la descomposición anterior para algún $T \subseteq X_{h-1}$).

Sea $T \subseteq X_{h-1}$. Si $T^c = \emptyset$, $M[h-1, h]_{T^c} = \emptyset$. Si no, el subposet de X con vértices $T^c \sqcup X_h$ tiene altura 1. Suponemos que contamos con un programa que permite un matching acíclico máximo de un poset de altura 1.

Ahora bien, cómo hallar $M[0, h-1]^T$? Vale una recursión análoga. Un matching acíclico máximo en el subposet de X con vértices $X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_{h-2} \sqcup T$ es un matching con la mayor cantidad de aristas entre los siguientes:

$$\left\{ M[0, h-2]^{S^c} \cup M[h-1, h]_S^T : S \subseteq X_{h-2} \right\}.$$

En general, para $2 \leq p \leq h - 1$, para cada $T \subseteq X_{p+1}$, $M[0, p]^T$ es un matching con la mayor cantidad de aristas entre los siguientes:

$$\left\{ M[0, p]^{S^c} \cup M[p, p+1]_S^T : S \in X_p \right\} \quad (*)$$

Es interesante notar que para hallar un matching máximo hasta el nivel p , sólo alcanza saber cómo es ese matching hasta el nivel $p - 1$ y luego completarlo hasta el nivel p mediante algún algoritmo que resuelva el problema para altura 1.

Implementación en Sage

La Programación Dinámica es una técnica de diseño de algoritmo. Se aplica a problemas de optimización cuya solución puede construirse mediante una secuencia de decisiones que cumple una característica particular: *el principio de optimalidad*. Este principio, enunciado por Bellman en 1957, dicta que:

"En una secuencia de decisiones óptima toda subsecuencia ha de ser también óptima".

El diseño de un algoritmo de Programación Dinámica consta de los siguientes pasos:

1. Planteamiento de la solución como una sucesión de decisiones y verificación de que éste cumple el principio de optimalidad.
2. Definición recursiva de la solución.
3. Cálculo del valor de la solución óptima mediante una tabla en donde se almacenan soluciones a problemas parciales para reutilizar los cálculos.
4. Construcción de la solución óptima haciendo uso de la información contenida en la tabla anterior.

Nota: Para un desarrollo completo de las características generales de esta técnica, ver [9]. Puesto que ese no es nuestro objetivo, simplemente la aplicaremos a este problema en particular.

Hemos visto en el apartado anterior un modo de resolver plantear el problema en el cual encontrar una solución puede plantearse como una sucesión de decisiones. Cada decisión consiste en hallar, para cada S subconjunto de X_p , el matching acíclico máximo del subposet de X con vértices $X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_{p-1} \sqcup S$; que claramente cumple el principio de optimalidad. Además, vimos que la solución se puede definir de modo recursivo.

Asumimos que contamos con un algoritmo que resuelve el problema para un poset de altura 1 (en este caso `maximum_acyclic_matching_ILP`).

Nuestra implementación en Sage del problema como uno de programación dinámica es la siguiente:

Programa 7.6: Función `maximum_acyclic_matching_DP`.

```

1 def maximum_acyclic_matching_DP(X, L):
2     l={ }
3     for S in Subsets(L[0]): l[tuple(S)]=[]
4     for p in range(len(L)-1):
5         for T in Subsets(L[p+1]): l[tuple(T)]=[]
6         for S in Subsets(L[p]):
```

```

7     if len(S)>0:
8         for T in Subsets(L[p+1]):
9             if len(T)>0:
10                M=maximum_acyclic_matching_ILP(X.subgraph(S+T), [S, T])
11                Tc=[]
12                for x in L[p+1]:
13                    if x not in T: Tc.append(x)
14                Tc=Subsets(L[p+1])(Tc)
15                if len(M)+len(l[tuple(S)])> len(l[tuple(Tc)]):
16                    l[tuple(Tc)]=l[tuple(S)]+M
17
17     return l[()]

```

l es la "tabla" (en nuestro caso, un diccionario) en la que almacenamos la información. Si S es un subconjunto de elementos de X (de grado p), l[tuple(S)] es un matching acíclico máximo del subposet de X que en el último nivel tiene los vértices de S^c , y en los niveles anteriores coincide con X. En la notación del apartado anterior, $l[tuple(S)] = M[0, p]^{S^c}$.

Notar que en la implementación fue es necesario aclarar en qué nivel se encuentra incluido S.

En las líneas 3-5 inicializamos todos los valores de l en []. En las líneas 4 y 6-16 actualizamos los valores de l[tuple(T)] para cada subconjunto de vértices T incluído en algún nivel. Para hacerlo, utilizamos la recursión dada por (*).

La solución es l[()].

Utilizamos la función anterior en poset del ejemplo de la figura 7.14.

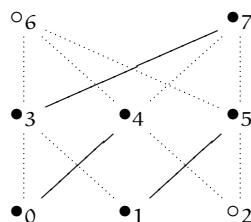
```

maximum_acyclic_matching_DP(X, [[0,1,2], [3,4,5], [6,7]])
[(0, 4), (1, 5), (3, 7)]

```

Figura 7.16: Implementación en Sage de la función maximum_acyclic_matching_DP.

Obtenemos otro matching acíclico máximo:



7.5.3 Heurísticas y metaheurísticas

En esta subsección comentaremos brevemente algunas formas de abordar el problema mediante heurísticas y metaheurísticas. Dejamos a cargo del lector la implementación de los algoritmos correspondientes.

Una heurística es una técnica de diseño de algoritmo para resolver un problema (de optimización, por ejemplo) que ignora si la solución que devuelve es la óptima, pero que por lo general produce una "buena" solución.

Las heurísticas están concebidas para conseguir rendimiento de cómputo o simplicidad conceptual, a costa de la exactitud y precisión.

La siguiente heurística se construye utilizando 7.4.13. Es la que utilizan Joswig y Pfetsch en [19] para comparar su implementación como problema de Programación Lineal Entera.

Algoritmo 7 Heurística para hallar matchings acíclicos maximales.

Input: Poset de la forma $\mathcal{X}(K)$, con K complejo simplicial.

Output: Matching acíclico maximal M en X .

$M = M_{\text{maximal}}$ {Lo hallamos con un algoritmo goloso, ver 4.}

repeat

\mathcal{P} un camino M -gradiente, único entre sus extremos

$M \leftarrow \mathcal{P} \Delta M$

until todo camino M -gradiente entre cada par de puntos libres no es único

return M

Si utilizamos la versión generalizada del resultado de Forman, 7.4.17, podemos elaborar la siguiente heurística.

Algoritmo 8 Heurística generalizada para hallar matchings acíclicos maximales.

Input: Poset graduado X , \mathcal{C} el conjunto de ciclos no dirigidos de altura 1 de $\mathcal{H}(X)$.

Output: Matching maximal M en X .

$M = M_{\text{maximal}}$ {lo hallamos con un algoritmo goloso (ver 4)}

repeat

\mathcal{P} un camino M -aumentativo tal que $|c \cap (\mathcal{P} \Delta M)| < \frac{|c|}{2} \forall c \in \mathcal{C}$ {es decir, \mathcal{P} no satura a ningún ciclo $c \in \mathcal{C}$ }

$M \leftarrow \mathcal{P} \Delta M$

until todo camino M -aumentativo satura algún ciclo $c \in \mathcal{C}$

return M

Una metaheurística es un método de diseño de algoritmo para resolver un problema de optimización, que tampoco garantiza que se halle una solución óptima. Para crear un algoritmo de este tipo (basado en el *local search*, ver más abajo) es necesario, inicialmente, identificar las siguientes componentes:

- \mathcal{S} el espacio solución.
- Si $s \in \mathcal{S}$, $\mathcal{N}(s) \subset \mathcal{S}$ es el conjunto de soluciones vecinas de s .
- $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ la función objetivo.
- $s_0 \in \mathcal{S}$ la solución inicial.

Veamos la idea central de un *local search*. \mathcal{S} es el conjunto de soluciones del problema (por ejemplo, \mathcal{S} el conjunto de matchings acíclicos en el grafo). Fijamos una solución inicial s_0 (por ejemplo, un matching acíclico maximal M_0 hallado con un algoritmo greedy). Consideramos el espacio de sus vecinos $\mathcal{N}(s_0)$, (que deben ser soluciones "parecidas" a s_0 ; por ejemplo, matchings acíclicos que se obtengan de revertir algún camino M_0 -aumentativo que no genere ciclos). Si existe alguna solución en $\mathcal{N}(s_0)$ "mejor" (esto es medido por la función objetivo, que en nuestro caso puede ser la cantidad de aristas en el matching) que s_0 , entonces nos "movemos" a ella (es decir, actualizamos la mejor solución). Para esta nueva solución, realizamos el mismo proceso. Iteramos este procedimiento hasta llegar a una solución para la cual todas sus soluciones vecinas no la mejoran.

Notar que la solución obtenida será el primer máximo local, no necesariamente absoluto, con el que nos encontremos; que depende fuertemente de la solución inicial. Para evitar esto, existen varias versiones mejoradas del local search que permiten salir de un máximo local. Entre ellas: simmulated annealing, tabú search, GRASP.

A continuación presentamos un planteo alternativo del problema.

Chequear que un matching es acíclico es bastante "costoso" computacionalmente. La principal diferencia del nuevo planteo radica en que el espacio solución \mathcal{S} es ahora el conjunto de matchings (no necesariamente acíclicos). Los vecinos de un matching M son los que se obtienen de revertir algún camino M -equitativo, disminuyente ó aumentativo. Es ahora la función objetivo g la que se encarga de que la cantidad de ciclos en el matching sea nula. La constante R se regula al momento de la implementación. Utilizamos como solución inicial un matching máximo.

- *Espacio solución:* $\mathcal{S} = \{M \subseteq E(\mathcal{H}) : M \text{ matching}\}$.
- *Solución inicial:* M_{\max} .
- *Función objetivo:* La función objetivo planteada en el ejemplo era $f(M) = |M|$.

Quiero maximizar f sujeto a que $|\mathcal{C}^M| = 0$. Construimos una nueva función objetivo a maximizar en la que no haya niguna restricción a considerar.

$$g(M) = |M| + R \cdot |\mathcal{C}^M|, \text{ con } R \text{ alguna constante positiva}$$

- *Vecinos:* $\mathcal{N}(M) = \{\mathcal{P} \Delta M : \mathcal{P} \text{ camino } M\text{-equitativo, disminuyente ó aumentativo}\}$.

Bibliografía

- [1] P.S. Alexandroff. *Diskrete Räume*. MathematicskiiSbornik (N.S.) **2** (1937), 501-518.
- [2] J.J. Andrews, M.L. Curtis. *Free groups and handlebodies*. Proc. Amer. Math Soc. **16** (1965), 192-195.
- [3] J.A. Barmak. *Espaces topológicos finitos*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires (2006).
- [4] J.A. Barmak. *Topología Algebraica de Espacios Topológicos Finitos y Aplicaciones*. Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires (2009).
- [5] J.A. Barmak, E.G. Minian. *Minimal finite models*. J. Homotopy Relat. Struct. **2** (2007), No. 1, 127-140.
- [6] J.A. Barmak, E.G. Minian. *Simple homotopy types and finite spaces*. Adv. Math. **218** (2008), Issue 1, 87-104.
- [7] J.A. Barmak, E.G. Minian. *One-point reductions of finite spaces, h-regular CW- complexes and collapsibility*. Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), 1763-1780.
- [8] J.A. Barmak, E.G. Minian. *Strong homotopy types, nerves and collapses*. arXiv:0907.2954 (2009).
- [9] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press (1957).
- [10] C. Berge. *Two theorems in graph theory*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **43** (9) (1957), 842-844.
- [11] R. Brown. *Topology and groupoids*. BookSurge LLC (2006).
- [12] M.A. Cerdeiro. *Pequeñas perturbaciones en espacios finitos*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires (2010).
- [13] M. Chari. *On Discrete Morse Functions and Combinatorial Decompositions*. Discrete Math. **217** (2000), 101-113.
- [14] M.M. Cohen. *A Course in Simple Homotopy Theory*. Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin (1970).
- [15] R. Forman. *Morse theory for cell complexes*. Advances in Mathematics **134** (1998), 90-145.
- [16] W. I. Gasarch. *The P=?NP poll*. SIGACT News **33**(2) (2002), 34-47.
- [17] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002).
- [18] P. Hersh. *On optimizing discrete Morse functions*. Adv. in Appl. Math. **35** (2005), no. 3, 294-322.

- [19] M. Joswig, M.E. Pfetsch. *Computing optimal Morse matchings*. SIAM J. Discrete Math. **20** (1) (2006), 11–25.
- [20] K.H. Kamps, T. Porter. *Abstract Homotopy and Simple Homotopy Theory*. World Scientific (1997).
- [21] J. Matoušek, M. Tancer, U. Wagner. *Hardness of embedding simplicial complexes in \mathbb{R}^d* . arXiv:0807.0336v2 (2009).
- [22] J.P. May. *Finite topological spaces*. Notes for REU (2003). Disponibles en <http://www.math.uchicago.edu/~may/MISCMaster.html>
- [23] M.C. McCord. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. Duke Math. J. **33** (1966), 465–474.
- [24] J.S. Milnor. *Morse theory*. Annals of Mathematics Study, Vol. **51**, Princeton University Press (1962).
- [25] E.G. Minian. *Some remarks on Morse theory for posets, homological Morse theory and finite manifolds*. arXiv:1007.1930 (2010).
- [26] T. Osaki. *Reduction of finite topological spaces*. Interdisciplinary Information Sciences **5** (1999), 149–155.
- [27] R.E. Stong. *Finite topological spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1966), 325–340.
- [28] J.H.C Whitehead. *Simplicial spaces, nuclei and m -groups*. Proc. London Math. Soc. **45** (1939), 243–327.
- [29] J.H.C Whitehead. *On incidence matrices, nuclei and homotopy types*. Ann. of Math. **42** (1941), 1197–1239.
- [30] J.H.C Whitehead. *Combinatorial homotopy, I*, Bull AMS, **55** (1949), 213–245.
- [31] J.H.C Whitehead. *Simple homotopy types*. Amer. J. Math. **72** (1950), 1–57.
- [32] E.C. Zeeman. *On the dunce hat*. Topology **2** (1964), 341–358.