UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Estudio de existencia de soluciones para ecuaciones tipo Rayleigh

Paula Kuna

Director de Tesis: Dr. Pablo Amster

Lugar de Trabajo: Departamento de Matemática- FCEyN (UBA)

Buenos Aires, marzo de 2011.

Introducción

Resumen

El punto de partida de esta tesis fue estudiar el conjunto de valores $\overline{p} \in \mathbb{R}$ para los cuales existe al menos una o al menos dos soluciones para una ecuación tipo Rayleigh con condiciones periódicas

$$\begin{cases} u'' + f(u') + g(t,u,u') = \overline{p} \\ u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \end{cases} \tag{1}$$

Bajo ciertas hipótesis, estos conjuntos resultan ser intervalos, que pueden ser o no acotados.

Para ello utilizamos diversos métodos del análisis no lineal, como super y subsoluciones y teoría de grado topológico.

En general y por simplicidad supondremos que g es continua, aunque lo resultados se pueden extender para funciones Carathéodory. Donde $g : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función Carátheodory si $g(\cdot, x, y)$ es medible para todo x, $y \in \mathbb{R}$ y $g(t, \cdot, \cdot)$ es continua para casi todo $t \in [0,T]$. Decimos que g es L^1-Carathéodory si es Carathéodory y para todo $R > 0$ existe una función $h \in L^1$ tal que para casi todo $t \in [0,T]$, para todo $(x,y) \in [-R,R] \times [-R,R]$ vale $|g(t,x,y)| \leq h(t)$.

Se trabajará en los espacios

$$\tilde{X} = \left\{ u \in H^2(0,T) : u(0) = u(T), u'(0) = u'(T), \int_0^T u(t)dt = 0 \right\},$$

e

$$\tilde{Y} = \left\{ u \in L^2(0,T) : \int_0^T u(t)dt = 0 \right\}.$$

Motivaciones

El Análisis es un área de la Matemática en la cual existe un gran número de aplicaciones a otras disciplinas, tales como la Física, la Ingeniería y las Finanzas. Dentro del Análisis, ocupa un lugar destacado el estudio de problemas no lineales; en particular, el estudio de problemas de contorno para ecuaciones diferenciales no lineales. Esta clase de problemas resulta de especial importancia, tanto desde el punto de vista teórico como por sus aplicaciones y han motivado, para su resolución, el desarrollo de diversas herramientas matemáticas tales como los métodos variacionales, métodos numéricos y métodos topológicos, que emplean la teoría de grado y distintos teoremas de punto fijo. Muchos de estos problemas provienen de otras áreas de la matemática, como la geometría, y otros de aplicaciones directas a otras disciplinas. En este contexto, en la siguiente tesis se propone resolver algunos problemas no lineales por medio de técnicas topológicas.

Antecedentes

Los problemas a estudiar son de gran importancia, tanto desde el punto de vista teórico como de las aplicaciones. Por un lado, el desarrollo y la aplicación de técnicas topológicas a problemas de contorno ha sido un aspecto de creciente interés matemático en los últimos años. Por otro lado, muchos de los problemas no lineales tienen una motivación directa en la práctica, en variadas disciplinas.

Existen diversos trabajos en donde se considera la aplicación de distintas técnicas a problemas no lineales. En particular, los métodos topológicos han sido de gran importancia a partir de los trabajos de Leray y Schauder, que han permitido obtener una serie de resultados fundamentales a partir de los años treinta.

Entre los problemas propuestos, tienen especial importancia los llamados "problemas resonantes". Existe un conocido resultado elemental del análisis no lineal, que asegura la existencia de al menos una solución cuando la parte lineal del problema es un operador inversible (problema no resonante), y la no linealidad es acotada. En cambio, si se trata de un operador no inversible el problema se denomina "resonante", y la existencia de soluciones no puede asegurarse; para tales casos existe abundante literatura en donde se dan condiciones suficientes (que en ocasiones también resultan necesarias) del tipo Landesman-Lazer [7], o bien del tipo Lazer-Leach [10], cuando el núcleo del operador tiene dimensión mayor a 1. El problema de extender este tipo de condiciones a otros problemas resonantes sigue siendo de gran interés y ofrece numerosas variantes. Las condiciones de Landesman-Lazer han sido generalizadas de diversas formas. En primer lugar, se ha logrado ver que la hipótesis de existencia del límite para la no-linealidad g en el problema periódico $u'' + g(u) = p(t)$ puede debilitarse; luego L. Nirenberg [16] ha obtenido también una extensión para el caso de sistemas resonantes de ecuaciones de segundo orden, bajo una condición de existencia de límites radiales uniformes para g y una condición sobre del grado de la aplicación $g - P$, en donde P es el promedio del término forzante p. Esto ha sido generalizado en forma conveniente por Ruiz y Ward, quienes mostraron que la existencia de límites radiales puede evitarse si se asume una condición geométrica para g. Sin embargo, cabe destacar que existen todavía numerosos problemas abiertos de gran interés.

Descripción de la Tesis

Después de este capítulo introductorio, la tesis se divide en cinco capítulos.

En el capítulo 1, daremos los conocimientos preliminares necesarios para la comprensión de este trabajo. Demostrareoms algunos teoremas de punto fijo, tales como el teorema de Brouwer y el de Schauder. Introduciremos la noción de grado topológico y algunas de sus propiedades, primero el grado de Brouwer para funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ y luego el grado de Leray-Schauder para funciones definidas en espacios de Banach. Demostraremos el teorema de la función implícita para espacios de Banach, para ello introduciremos el concepto de diferenciación en espacios de Banach

En el capítulo 2 demostraremos algunos teoremas que prueban que si existen de super y subsoluciones se puede asegurar existencia de solución. Primero probaremos un resultado clásico para el caso en que la supersolución β y la subsolución α están ordenadas; luego, un caso diferente, donde no se supone que α y β estén ordenadas; finalmente, definiremos super y subsoluciones en el sentido de $W^{2,1}$ y probaremos un teorema de existencia de solución cuando existen tales super y subsolución.

En el capítulo 3 estudiaremos la estructura del conjunto de los $\overline{p} \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema (1) tiene solución. Se considerará a la función g acotada uniformemente por una función de L^2; en el caso en que g sea periódica en x , se probará la existencia de dos soluciones que no difieren de un múltiplo de 2π, dicha prueba se basa en la existencia de sub y supersoluciones estrictas en el sentido de $W^{2,1}$. Luego, se considerará que g es acotada inferiormente pensando que $g(t,x,y)$ se puede separar como $\overline{g}(t,x,y)+h(t,x,y)$, donde $\overline{g}$ es acotada inferiormente y satisface $\lim_{|x|\to+\infty} \overline{g}(t,x,y) = +\infty$ uniformemente en t e y y $h(t,x,y)$ es acotada por una función de L^2.

Como un caso particular de una ecuación tipo Rayleigh es la del péndulo, en el capítulo 4 presentaremos los distintos enfoques del análisis no lineal al estudio de la ecuación, tales como el método de Poincaré, el de Lyapunov-Schmidt, el de super y subsoluciones y la teoría de puntos críticos. Emplearemos resultados del capítulo 3 para dar una aproximación del conjunto de los $\overline{p}$ para los cuales un caso particular de la ecuación del péndulo tiene solución.

Finalmente, en el capítulo 5, presentaremos una extensión a sistemas de los resultados del capítulo 3. En particular se probará que, bajo ciertas condiciones, podemos encontrar todo un rectángulo en el conjunto de los $\overline{p}$, que ahora está en $\mathbb{R}^n$, para los cuales hay solución. Luego se aplicará un teorema de formas bilineales y el teorema de la función implícita para probar que un punto $\overline{p}$ es interior en el conjunto en estudio.

Agradecimientos

A mamá y papá por su amor y su apoyo en todo este proceso, aún en los momentos más difíciles, cuando este día parecía tan lejano. Por sus llamados de aliento antes de cada parcial. Por su ejemplo y por enseñarme que con perseverancia todo se puede, por ayudarme a no bajar los brazos. A mi hermana Andrea, por soportarme todos estos años y alegrarse conmigo cada vez que algo salía bien.

A Pablo, me sobran motivos, él creyó en que este día iba a llegar mucho antes de que yo lo imaginara. Con su generosidad, su afecto y su paciencia me dio la confianza que no tenía. Por hacer que me amigue con la matemática y alentarme a seguir. A todo el grupo "no-decreciente" de análisis no lineal, por recibirme como una más, especialmente a mi hermanitos Manu y Ro, por ayudarme con la tesis.

A Lupe, mi "compañera de banco", mi amiga del alma. Por todos estos años, por los empujoncitos que me dio cada vez que lo necesité y porque mi vida sería muy triste si no fuera mi amiga. Te quiero, Lu. Un agradecimiento extendido a su familia, por tanto cariño. Especialmente a su mamá, María Marta, quien con su ejemplo y tantas charlas también aportó para que hoy esté acá. Me hubera gustado agradecéserlo en persona.

A mi amor Fede, por animarse a conocerme, alentarme y quererme en medio de tanta locura.

A mis amigas de Posadas, Dai y Ju, por sus mensajes, mails y llamados de apoyo.

A Kari, Barbi y Julián, los primero amigos que me hice en la facu, su amistad me ayudó a seguir cuando todo se puso difícil.

A mi amigas: Anita, Carito, Flopa, Georgi, Lau, Lu, Mari y Ro. Si algo tengo que agradecerle a la facultad es haberlas conocido. Me acompañaron en los momentos feos y festejaron conmigo los momentos lindos. Las adoro!!

A mis compañeros de la facultad, por tantas horas compartidas entre meriendas, recesos y nervios antes de cada parcial, por darme ganas de venir a cursar. Son muchos para nombrarlos uno por uno, pero sepan que estoy muy agradecida por todo lo que compartimos.

Índice General

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoremas de Punto Fijo

En esta sección demostraremos algunos teoremas de punto fijo, los cuales resultan fundamentales a la hora de demostrar existencia de al menos una solución para una ecuación diferencial.

1.1.1 Teorema de Brouwer

Teorema 1.1.1 (Brouwer) *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión n, sea $C \subseteq H$ un conjunto compacto, convexo y no vacío. Si $f : C \to C$ es continua, entonces existe $x \in C$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración Veamos los casos $n = 1$ y $n = 2$:

Supongamos que $n = 1$, sea $f : [a, b] \to [a, b]$. Definimos $g(x) = x - f(x)$, $g : [a, b] \to [a, b]$ es continua. Además $g(a) \leq 0$, $g(b) \geq 0$. Luego, por el teorema de Bolzano, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $g(x_0) = 0$. Por lo tanto $f(x_0) = x_0$.

Para $\mathbb{R}^2$, por simplicidad, consideremos que $C = \overline{B_1(0)}$. Supongamos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, queremos probar que $f(z) = z$ para algún $z \in \overline{B_1(0)}$. Si $z \in \partial B_1(0)$, el resultado es cierto, así que podemos suponer que $f(z) \neq z$ en $\partial B_1(0)$.

Consideremos la función $g(z) = z - f(z)$. Recordemos que el índice de la curva $g \circ \gamma$ es el número entero definido por la integral compleja

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{g\circ\gamma}\frac{1}{z}dz,$$

donde $\gamma(t)$ parametriza el borde de $B_1(0)$, que cuenta el número de veces (con multiplicidad) que g se anula en $B_1(0)$, para el caso en que g es holomorfa. Luego, basta ver que la integral es distinta de cero.

Cosideremos la homotopía dada por

$$h(t,\lambda) = \gamma(t) - \lambda f(\gamma(t)).$$

Tenemos que $h(0,0) = 1$, $h(t,0) = \gamma(t)$. Observemos que $h(t,\lambda) \neq 0$ para todo (t,λ). Sino, $\gamma(t) = \lambda f(\gamma(t))$ para algún t, y entonces $\lambda \neq 0$. Además $1 \geq |f(\gamma(t))| = \frac{1}{\lambda}$, luego $\lambda = 1$. Pero esto es una contradicción, pues habíamos supuesto que $f(z) \neq z$ en $\partial B_1(0)$. Entonces $h(t,\lambda) \neq 0$ en $\partial B_1(0)$.

Luego,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{g\circ\gamma}\frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}i\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-it}\mathrm{e}^{it}dt = 1.$$

Por lo tanto, existe un único $z \in B_1(0)$ tal que $g(z) = 0$, luego $f(z) = z$.

Veamos ahora otra demostración, válida para $\mathbb{R}^n$, la de Milnor-Rogers. Observemos que si $f : \overline{B}_1(0) \to \overline{B}_1(0)$ es continua y sin puntos fijos, se puede construir una retracción de la siguiente manera: para cada x tomamos la semirrecta que sale de $f(x)$ y pasa por x, y definimos $r(x)$ como el punto donde dicha semirrecta corta a S^{n-1}. Esta función es claramente continua, y deja fijos los puntos de la esfera, lo que es absurdo. Luego basta ver que no existen retracciones de clase C^1 de la bola unitaria $\overline{B}$ en la esfera S^{n-1}.

En efecto, si $f : \overline{B} \to S^{n-1}$ es de clase C^1 tal que $f(x) = x$ sobre S^{n-1} podemos definir, para $t \in [0,1]$,

$$f_t(x) = (1-t)x + tf(x) = x + t(f(x) - x).$$

Es claro que para todo x vale $|f_t(x)| \leq 1$, y si $x \in S^{n-1}$.

Por otra parte, $g(x) := f(x) - x$ es de clase C^1, y entonces existe una constante c tal que $|g(x) - g(y)| \leq c\,|x - y|$, para $x, y \in \overline{B}$. En consecuencia, si $t < \frac{1}{c}$ la función f_t es inyectiva, pues si $f_t(x) = f_t(y)$ entonces

$$|x - y| = t\,|g(x) = g(y)| \leq \frac{t}{c}\,|x - y|\,.$$

veamos que si t es suficientemente pequeño, entonces f_t es también suryectiva. En efecto, observemos en primer lugar que para cierto $t_0 \in (0, \frac{1}{c})$ vale que si $t \leq t_0$ entonces la diferencial $df_t = I - tdg$ es inversible para todo x. Por el teorema de la función inversa, esto implica que $f_t(B)$ es abierto para todo $t \leq t_0$. Supongamos que $f_t(B) \neq B$, y tomemos $z \in B$ tal que $z \notin f_t(B)$. Uniendo a z con cualquier punto de $f_t(B)$ mediante un segmento, se deduce la existencia de algún $y \in B \cap \partial(f_t(B))$. Si $x_k \in B$ es una sucesión tal que $f_t(x_k) \to y$, por compacidad podemos suponer que converge a cierto x, y luego $f_t(x) = y$. Como f_t es inyectiva y vale la identidad sobre S^{n-1}, entonces $x \in B$. Por otra parte, $f_t(x) \in f_t(B)$, lo que contradice el hecho de que y es un punto de la frontera.

Definamos ahora la aplicación

$$\phi(t) := \int_B det(df_t(x))dx = \int_B det(I - tdg(x))dx.$$

Claramente, ϕ es un polinomio en t, pero además, como f_t es un difeomorfismo cuando $t \leq t_0$, por la fómula de cambio de variables se deduce que ϕ es constantemente igual al volúmen de B. En particular $\phi(1) > 0$. Pero $f_1 = f$, y a partir de la igualdad $|f(x)| = 1$ se deduce que para $j = 1, \ldots, n$ vale

$$\langle \partial_j f(x), f(x) \rangle = 0.$$

Luego $f(x) \in Ker(df(x))$, y en particular esto muestra que $det(df(x)) = 0$ para todo $x \in B$. En consecuencia $\phi(1) = 0$, lo que es absurdo.

Para concluir, veamos la siguiente generalización del teorema para el caso de cualquier conjunto homeomorfo a la bola unitaria: $h : \overline{B} \to K$ es un homeomorfismo y

$f : K \to K$ es continua, la aplicación $h^{-1} \circ f \circ h : \overline{B} \to \overline{B}$ es continua, y entonces tiene un punto fijo x. Luego $y = h(x)$ es un punto fijo de f.

En particular, podemos tomar como K a cualquier conjunto compacto y convexo en un espacio normado de dimesión finita.

Hay otra demostración de este teorema que emplea teoría de grado topológico en [1]. $\square$

1.1.2 Teorema de Schauder

Utilizaremos el teorema de Brouwer para probar el siguiente resultado.

Teorema 1.1.2 (Schauder) *Sea E un espacio normado, y sea $C \subseteq E$ un conjunto convexo, cerrado y acotado. Supongamos que $T : C \to C$ es una función continua tal que $\overline{T(C)}$ es compacto. Entonces T tiene al menos un punto fijo.*

Demostración Sea $k \in \mathbb{N}$. Por compacidad de $\overline{T(C)}$, podemos elegir $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \overline{T(C)} \subseteq C$ tales que

$$\overline{T(C)} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{1/k}(x_j)$$

Sea $C_k \subseteq C$ la cápsula convexa del conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, y definamos la función $J_k : \overline{T(C)} \to C_k$, dada por

$$J_k(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{dist(y, \overline{T(C)} - B_j)}{\sum_{i=1}^{n} dist(y, \overline{T(C)} - B_i)} x_j,$$

donde $B_j = B_{1/n}(x_j)$. J_k está bien definida, porque si $y \in \overline{T(C)}$, entonces $y \in B_j$ para algún j, así $dist(y, \overline{T(C)} - B_j) > 0$.

Por otro lado, si $y \notin B_j$, $dist(y, \overline{T(C)} - B_j) = 0$, de donde se deduce que para todo j:

$$dist(y, \overline{T(C)} - B_j) \, \|y - x_j\| \leq \frac{1}{k} dist(y, \overline{T(C)} - B_j).$$

En consecuencia, $\|J_k(y) - y\| \leq \frac{1}{k}$ para todo $y \in \overline{T(C)}$, en particular $\|J_kT(x) - Tx\| \leq \frac{1}{k}$ para todo $x \in C$.

Además, por el teorema de Brouwer $J_k \circ T|_{C_k} : C_k \to C_k$ tiene al menos un punto fijo z_k. Por compacidad, $\{Tz_k\}$ tiene una subsucesión $\left\{Tz_{k_j}\right\}$ que converge a cierto $z \in \overline{T(C)} \subseteq C$, y

$$\left\|z_{k_j} - Tz_{k_j}\right\| = \left\|(J_k \circ T)(z_{k_j}) - Tz_{k_j}\right\| \leq \frac{1}{k_j} \to 0.$$

Se deduce que $z_{k_j} \to z$, y por continuidad de T, $Tz = \lim_{j\to\infty} Tz_{k_j} = z$. □

1.2 Teoría de grado topológico

En esta sección definiremos y daremos algunas propiedades de la noción de grado topológico. A grandes rasgos puede pensarse como el "conteo algebraico" de los ceros de una función continua en un conjunto determinado. Primero definiremos el grado de Brouwer para aplicaciones en $\mathbb{R}^n$ y luego, una extensión para espacios de Banach, el grado de Leray-Schauder.

1.2.1 Grado de Brouwer, definición y propiedades

Comenzaremos con una situación conocida del análisis complejo, que nos permitirá definir el grado para el caso $N = 2$. Recordemos la definición de índice, utilizada en la demostración del teorema de Brouwer. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto acotado y simplemente conexo, cuya frontera $\gamma := \partial\Omega$ es una curva continua orientada positivamente. Dada una función $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ analítica, tal que $f \neq 0$ en γ, tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \#\left\{\text{ceros de } f \text{ en } \Omega\right\}.$$

Llamemos $d(f, \Omega)$ a esta integral. Podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Si $f = id$ y $0 \notin \partial\Omega$, entonces

$$d(f,\Omega) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \in \Omega \\ 0 & si\ 0 \notin \Omega \end{cases}$$

2. Si $d(f,\Omega) \neq 0$, entonces f se anula en Ω.

3. Invariancia por homotopía: supongamos que f y g son homotópicas, es decir, existe $h : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{C}$ continua tal que $h(z,0) = f(z)$ y $h(z,1) = g(z)$, con $h(z,\lambda) \neq 0$ para $z \in \partial\Omega$. Entonces $d(f,\Omega) = d(g,\Omega)$.

4. $d(f,\Omega)$ está definido solamente por el valor de f en el borde de Ω. Si bien es un hecho conocido que si dos funciones holomorfas coinciden en una curva entonces son iguales, podemos verlo como una consecuencia de la observación anterior. En efecto, supongamos que f y g coinciden en $\partial\Omega$, entonces podemos definir la homotopía lineal $h(z,\lambda) = \lambda f(z) + (1-\lambda)g(z)$, cuyo valor para $z \in \partial\Omega$ es $f(z) = g(z) \neq 0$. De este modo, $d(g,\Omega)$ está definido y vale lo mismo que $d(f,\Omega)$.

En realidad, para que la invariancia por homotopía tenga sentido en el contexto anterior, habría que pedir que $h_\lambda := h(\cdot,\lambda)$ sea analítica para todo λ, de modo que $d(h_\lambda,\Omega)$ esté definido por medio de una integral para todo λ. Sin embargo, no es así, basta observar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z}dz = I(f\circ\gamma, 0).$$

Es decir que d es el índice de $f\circ\gamma$ respecto al origen. Este índice está definido para cualquier curva continua, con la condición de que no pase por el 0.

De manera que, para $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ continua tal que $f \neq 0$ en $\partial\Omega$, definimos el número $d(f,\Omega) := I(f\circ\gamma, 0)$. Las observaciones 2 y 3 (y por lo tanto 4) siguen valiendo.

En lo que sigue, extenderemos esta definición para cualquier función continua $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado. Definiremos para cualquier $y \in$

$\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$, el grado $d(f, \Omega, y)$, que será un número entero que, intuitivamente, cuenta la cantidad de soluciones que tiene la ecuación $f(x) = y$ en Ω. En el caso $N = 2$, la definición adecuada es $d(f, \Omega, y) = I(f \circ \gamma, y)$, pero este índice es igual al de la función $f - y$ respecto de 0. Por eso vamos a definir en general

$$d(f, \Omega, y) = d(f - y, \Omega, 0).$$

De acuerdo con esta definición, la primera de las propiedades anteriores, cobraría la siguiente forma:

$$d(Id, \Omega, y) = \begin{cases} 1 & si\ y \in \Omega \\ 0 & si\ y \notin \Omega \end{cases}$$

Finalmente, una de las propiedades que vamos a pedir que cumpla el grado es la aditividad: si Ω_1 y Ω_2 son disjuntos y $f : \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2} \to \mathbb{R}^n$ es continua y no toma el valor y en $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, entonces $d(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$

A continuación, caracterizaremos el conjunto de funciones "admisibles", es decir, aquellas para las cuales se puede definir $d(f, \Omega, y)$.

Definición Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1, se dice que $y \in \mathbb{R}^m$ es un *valor regular* de f cuando para todo $x \in f^{-1}(y)$ la diferencial $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es suryectiva (esto requiere $m \leq n$). Los valores que no son regulares se denominan *críticos*.

De la definición se desprende que si $y \notin f(\Omega)$ entonces y es un valor regular de f.

Estamos en condiciones de definir el grado de Brouwer para las funciones de clase C^1, tales que 0 es un valor regular.

Definición Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que 0 es valor regular y $0 \notin \partial\Omega$, se define el grado de Brouwer

$$deg(f, \Omega, 0) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} sgn(Jac(f(x)))$$

donde $Jac(f(x))$ denota el determinante del Jacobiano $Jac(f(x)) = det(Df(x))$.

Cabe observar que el grado está bien definido, debido a que se trata de una suma finita. En efecto, como 0 es un valor regular, el teorema de la función inversa asegura que para cada preimagen del cero existe un entorno para el cual f es inyectiva. Además, $f^{-1}(0)$ es compacto y, como dichos entornos se pueden tomar disjuntos, se deduce que f sólo puede anularse en finitos puntos. También resulta a partir de la definición que si $deg(f, \Omega, 0) \neq 0$ entonces f se anula en Ω.

A continuación veremos algunas propiedades que nos permitirán extender la definición para las funciones continuas que no se anulan en $\partial\Omega$. Vamos a definir como antes

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f - y, \Omega, 0)$$

si f es de clase C^1 tal que $f \neq y$ en $\partial\Omega$ y además y es un valor regular de f. Queremos extender el grado a las funciones "admisibles"

$$\mathcal{A}(y) := \left\{ f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : f \neq y \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

En primer lugar, observemos que el conjunto es abierto.

Lema 1.2.1 *Si $f \in \mathcal{A}(y)$ y $g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ satisface $\|g - f\|_\infty < dist(y, f(\partial\Omega))$, entonces $g \in \mathcal{A}(y)$.*

Demostración Dado $x \in \partial\Omega$, es claro que

$$|g(x) - y| \geq |f(x) - y| - |g(x) - f(x)| > 0$$

$\square$

Lema 1.2.2 (Teorema de Sard) *Sea $m \leq n$ y $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Entonces el conjunto de valores críticos de f tiene medida nula. En particular, el conjunto de valores regulares de f es denso en $\mathbb{R}^m$.*

Demostración Consideremos $m = n$; la prueba general puede hallarse por ejemplo en [15]. Escribiendo a Ω como una unión numerable de cubos, basta probar la propiedad para el caso en que Ω es un cubo de lado L. Dividiendo a cada lado de Ω en N partes iguales, se obtienen N^n cubos de lado L/N; además si x y x_0 pertenecen a uno de esos cubos y x_0 es un punto crítico, se tiene:

$$f(x) - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0) + R(x)$$

donde $|R(x)| \leq c_1 |x - x_0|^2 \leq c_1(\frac{L}{N})^2$, y además $Im(Df(x_0)) \subset H$ hiperplano de $\mathbb{R}^m$. Por otra parte,

$$|Df(x_0)(x - x_0)| \leq \|Df(x_0)\| . |x - x_0| \leq c_2 \frac{L}{N}.$$

De esta forma $f(x) - f(x_0) \in \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es un cilindro isométrico a $B \times [-\epsilon, \epsilon]$, con $B \in \mathbb{R}^{m-1}$ una bola de radio $C\frac{L}{N}$ y $\epsilon = C(\frac{L}{N})^2$ para cierta constante C. Observemos que podemos elegir esta constante de manera uniforme en los N^n cubos. Luego, como el conjunto VC de valores críticos se cubre por la imagen de aquellos cubos que contienen algún punto crítico, tenemos que

$$|VC| \leq N^n (C\frac{L}{N})^{n-1} C(\frac{L}{N})^2 = \frac{C^n L^{n+1}}{N} \to 0$$

cuando $N \to \infty$.

Notemos con $C^\infty_{reg}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ al conjunto de funciones de clase C^∞ para las que 0 es un valor regular. Veamos que es un conjunto denso en $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$.

Lema 1.2.3 (Densidad) *$C^\infty_{reg}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ es denso en $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$.*

Demostración Dada $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ y $\epsilon > 0$, por el teorema de Weierstrass y el lema anterior podemos tomar $\tilde{f} \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ tal que $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$, y un valor $y \in \mathbb{R}^m$ que sea valor regular de $\tilde{f}$ y tal que $|y| < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces $g = \tilde{f} - y$ es de clase C^∞, tiene al cero como valor regular, y además $\|g - f\|_\infty < \epsilon$. □

Lema 1.2.4 *Sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que 0 es un valor regular y $f \neq 0$ en $\partial\Omega$. Entonces, exite un entorno V del 0 tal que si $y \in V$, y es un valor regular de f, $f \neq y$ en $\partial\Omega$ y además*

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega, 0).$$

Demostración Si $0 \notin Im(f)$, el resultado vale por ser $Im(f)$ un conjunto cerrado. Si $f^{-1}(0) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, por el teorema de la función inversa, existe U_j entorno conexo de x_j y V_j entorno de 0 tales que $f : U_j \to V_j$ es un difeomorfismo de clase C^1. Luego, basta tomar

$$V = \bigcap_{j=1}^{k} V_j - f(\overline{\Omega} - \bigcup_{j=1}^{k} U_j).$$

En efecto, para cada $y \in V$ el cardinal de $f^{-1}(y)$ es exactamente k, y como el signo del jacobiano es constante en cada U_j, el resultado queda probado. $\square$

Lema 1.2.5 *Sea $f \in \mathcal{A}(0) \cap C^{\infty}_{reg}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Si $g \in C^{\infty}_{reg}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ verifica que $\|g - f\|_{\infty} < dist(0, f(\partial\Omega))$, entonces $g \neq 0$ en $\partial\Omega$, y además vale $deg(g, \Omega, 0) = deg(f, \Omega, 0)$.*

Demostración Para $\lambda \in [0, T]$, definimos la homotopía lineal

$$h(x, \lambda) = \lambda g(x) + (1 - \lambda) f(x).$$

Entonces, $h(x, \lambda) \neq 0$ para $x \in \partial\Omega$. Por el lema anterior, existe un entorno V de 0 tal que si $y \in V$, y es valor regular de f y g, además el grado de f y g respecto de y es el mismo que el grado en 0. Por el lema de Sard, existe $z \in V$ valor regular de $h(\cdot, \lambda)$. Entonces, si reemplazamos f, g y h por $f - z$, $g - z$ y $h - z$, podemos suponer directamente que 0 es un valor regular también para h.

Consideremos el conjunto $\mathcal{C} = h^{-1}(0) \subset \overline{\Omega} \times [0, 1]$. Por el teorema de la función implícita, cada componente conexa de $\mathcal{C}$ es una curva regular, localmente parametrizada por una función $(x(t), \lambda(t))$. Además, si una de esas componentes no es una curva cerrada, entonces tiene dos extremos, que tienen que estar en $\Omega \times \{0\}$ o en $\Omega \times \{1\}$. En consecuencia, su primera coordenada corresponde a un cero de f o a uno de g. Por otra parte, si x_0 es un cero de f o de g, entonces $(x_0, 0)$ o $(x_0, 1)$ es un cero de h. Luego, alcanza con analizar lo que ocurre en las componentes no cerradas de $\mathcal{C}$. Veremos que si una de ellas une los puntos (x_0, r_0) y (x_1, r_1), con $r_0 = 0$ o 1 (podemos suponer $r_0 \leq r_1$), entonces:

1. Si $r_0 = 0$ y $r_1 = 1$, entonces $sgn(Jac(f(x_0))) = sgn(Jac(g(x_1)))$.
2. Si $r_0 = r_1 = 0$, entonces $sgn(Jac(f(x_0))) = -sgn(Jac(g(x_1)))$.
3. Si $r_0 = r_1 = 1$, entonces $sgn(Jac(f(x_0))) = -sgn(Jac(g(x_1)))$.

De esta forma se verifica que $deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0)$, pues cada cero de f que se conecta con uno de g por medio de una componente conexa de $\mathcal{C}$ aporta el mismo signo al cálculo del grado, y para los ceros de f o de g que pertenecen a la misma componente conexa, los signos se compensan y no aportan al grado.

Basta ver el caso 1, pues los otros dos son análogos. Llamemos $\mathcal{C}_{x_0,x_1}$ a la componente conexa que une x_0 con x_1, que es una curva que empieza en $\Omega \times \{0\}$ y termina en $\Omega \times \{1\}$. En cada punto P la curva $\mathcal{C}_{x_0,x_1}$ tiene un vector tangente $T_P = (x'(t), \lambda'(t))$, para alguna parametrización local (x, λ). Además, se puede elegir T_P siguiendo una orientación fija de la curva, de forma tal que la matriz de $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ cuyas primeras n filas son las de $Dh(P) \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}$ y la última fila es T_P, tenga determinante con signo constante. Si por ejemplo pensamos a $\mathcal{C}_{x_0,x_1}$, recorrida desde $\Omega \times \{0\}$ hasta $\Omega \times \{1\}$ podemos suponer $T_{(x_0,0)} = (x'(0), 1)$, $T_{(x_1,1)} = (x'(1), 1)$, donde consideramos directamente la parametrización $(x(\lambda), \lambda)$. Esto puede hacerse cerca de $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ porque $Df(x_0)$ y $Dg(x_1)$ son inversibles, y $Dh(x, \lambda) = (\lambda Dg(x) + (1 - \lambda)Df(x), [f(x) - g(x)]^t)$.

De esta forma, tenemos que el determinante de la matriz

$$M_0 = \begin{pmatrix} Df(x_0) & -g(x_0)^t \\ x'(0) & 1 \end{pmatrix}$$

tiene el mismo signo que el de

$$M_1 = \begin{pmatrix} Dg(x_1) & -f(x_1)^t \\ x'(1) & 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, derivando la igualdad $h(x(\lambda),\lambda)=0$, se obtiene que

$$D(x_0)x'(0)^t = g(x_0)^t,$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} Df(x_0) & -g(x_0)^t \\ x'(0) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Df(x_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df(x_0)^2 & -g(x_0)^t \\ g(x_0) & 1 \end{pmatrix},$$

que es definida positiva. Esto dice que el signo del $Jac(f(x_0))$ es el mismo que el del determinante de M_0. De modo análogo se ve que $sgn(Jac(g(x_1))) = sgn(det(M_1))$, lo que concluye la demostración. $\square$

Si juntamos las definiciones y lemas anteriores, llegamos al siguiente:

Teorema 1.2.6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, y sea $y \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe una única función continua*

$$deg(\cdot,\Omega,y) : \mathcal{A}(y) \to \mathbb{Z}$$

llamada grado de Brouwer*, con las siguientes propiedades:*

1. *Normalización: si $y \in \Omega$, entonces $deg(id,\Omega,y) = 1$.*

2. *Invariancia por traslaciones:*

$$deg(f,\Omega,y) = deg(f-y,\Omega,0).$$

3. *Aditividad: si Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos y disjuntos de Ω, si $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$ vale:*

$$deg(f,\Omega,y) = deg(f|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y) + deg(f|_{\overline{\Omega}_2},\Omega_2,y).$$

4. *Escisión: si Ω_1 es un subconjunto abierto de Ω, $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash\Omega_1)$, entonces*

$$deg(f,\Omega,y) = deg(f|_{\overline{\Omega}_1},\Omega_1,y)$$

5. *Solución: si* $deg(f, \Omega, y) \neq 0$*, entonces* $y \in f(\Omega)$ *(más aún,* $f(\Omega)$ *es un entorno de* y*).*

6. *Invariancia por homotopía: si* $h : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *es continua y se verifica que*

$$h(x, \lambda) \neq y \quad \textit{para } x \in \partial\Omega, \lambda \in [0,1]$$

entonces

$$deg(h(\cdot, \lambda), \Omega, y)$$

es idependiente de $\lambda \in [0,1]$.

Demostración Las propiedades 1 y 2 se desprenden de la definición. Lo mismo ocurre con 3, cuando $f - y \in C^{\infty}_{reg}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y en consecuencia vale para cualquier $f \in \mathcal{A}(y)$. La propiedad 4 se deduce de la anterior tomando $\Omega_2 = \emptyset$, pues si el conjunto Ω es vacío, el grado de la única función posible es cero.

Veamos la propiedad 5: si $y \notin f(\Omega)$, tomando $\Omega_1 = \emptyset$ en la propiedad anterior, resulta $deg(f, \Omega, y) = 0$, lo que es absturdo. Por otra parte, como $\mathcal{A}(y)$ es abierto en $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, existe $\epsilon > 0$ tal que si $z \in \mathbb{R}^n$ verifica $\|z\| < \epsilon$, entonces $f + z \in \mathcal{A}(y)$. Como el grado es continuo, si ϵ es lo suficientemente pequeño, vale que $deg(f + z, \Omega, y) \neq 0$; de esta forma, $y - z \in Im(f)$ para todo $z \in B_\epsilon(0)$.

Finalmente, para probar la propiedad 6, basta observar que la función

$$\lambda \longmapsto deg(h(\cdot, \lambda), \Omega, y)$$

es continua, y como $\mathbb{Z}$ es discreto, resulta constante. $\square$

1.2.2 Grado de Leray-Schauder

En esta sección extenderemos la definición de grado topológico para aplicaciones definidas en la clausura de un abierto acotado $\Omega \subset E$, donde E es un espacio de Banach. Consideraremos las aplicaciones de la forma $I - K$ donde $K : \overline{\Omega} \to E$ es compacto. El grado que definiremos es el *grado de Leray-Schauder*. La técnica es aproximar a K por un operador de rango finito K_ϵ tal que $\|K(u) - K_\epsilon(u)\| < \epsilon$ para $u \in \Omega$. La existencia de dicho operador se prueba con un método similar al utilizado en la demostración del teorema de Schauder. Veamos que la definición de grado no depende del operador K_ϵ elgido, propiedad que se desprende del siguiente lema.

Lema 1.2.7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, sea $m < n$ y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Definimos $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = x - f(x)$ donde pensamos directamente a $\mathbb{R}^m$ como subespacio de $\mathbb{R}^n$ por medio de la identificación $(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Entonces para $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y \notin g(\partial\Omega)$ se verifica:*

$$deg(g, \Omega, y) = deg(g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, y).$$

Demostración Observemos en primer lugar que el término derecho de la igualdad está bien definido, pues $g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}$ tiene imagen en $\mathbb{R}^m$. Basta probar la igualdad para el caso en que f es de clase C^1, con y un valor regular para g.

Notemos que si $g(x) = y \in \mathbb{R}^m$, entonces, como $f(x) \in \mathbb{R}^m$, también vale que $x \in \mathbb{R}^m$. Esto dice que $g^{-1}(y) \subset \Omega \cap \mathbb{R}^m$, y luego las preimágenes de y en g coinciden con las de su restricción a $\mathbb{R}^m$. Por otra parte, escribiendo

$$g(x) = g(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = (x_1 - f_1(x), \dots, x_m - f_m(x), x_{m+1}, \dots, x_n)$$

resulta, para $x \in \mathbb{R}^m$:

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} I_m - (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))_{1\le i,j\le m} & -(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))_{m<j\le m} \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

donde I_j denota la matriz identidad de $\mathbb{R}^{j\times j}$. Además, para la restrición de g a $\mathbb{R}^m$, la matriz diferencial es el bloque superior izquierdo de la matriz anterior, a partir de lo cual el resultado es evidente. $\square$

Consideremos un espacio de Banach E, $\Omega \subset E$ un abierto acotado y $K : \overline{\Omega} \to E$ un operador compacto.

Lema 1.2.8 *Si $K(x) \neq x$ para todo $x \in \partial\Omega$, entonces*

$$\inf_{x\in\partial\Omega} \|x - K(x)\| > 0.$$

Demostración Supongamos que no, $K(x_n) - x_n \to 0$ para ciertos $x_n \in \partial\Omega$. Como Kx_n converge y K es compacto, podemos suponer, tomando una subsucesión de ser necesario, que x_n converge a cierto $x \in \partial\Omega$, y por la continuidad de K, se deduce que $K(x) = x$, lo cual contradice la hipótesis. □

Definimos el grado de Leray-Schauder (en $y = 0$) de la siguiente forma:

Definición Sean Ω y E como antes, $K : \overline{\Omega} \to E$ compacto tal que $K(x) \neq x$ en $\partial\Omega$, y sea $\epsilon < \frac{1}{2}\inf_{x\in\partial\Omega} \|x - K(x)\|$. Definimos

$$deg_{L-S}(I - K, \Omega, 0) = deg((I - K_\epsilon)|_{V_\epsilon}, \Omega \cap V_\epsilon, 0)$$

donde K_ϵ es una ϵ-aproximación de K con $Im(K_\epsilon) \subset V_\epsilon$ y $dim(V_\epsilon) < \infty$.

Veamos que la definición no depende de la aproximación elegida. Supongamos que tenemos dos ϵ-aproximaciones K_ϵ y $\tilde{K}_\epsilon$, cuyas imágenes están contenidas en los subespacios de dimensión finita V_ϵ y $\tilde{V}_\epsilon$ respectivamente. Por el Lema 1.2.7, se tiene que si $V = V_\epsilon + \tilde{V}_\epsilon$, así

$$deg((I - K_\epsilon)|_{V_\epsilon}, \Omega \cap V_\epsilon, 0) = deg((I - K_\epsilon)|_V, \Omega \cap V, 0),$$

$$deg((I - \tilde{K}_\epsilon)|_{\tilde{V}_\epsilon}, \Omega \cap \tilde{V}_\epsilon, 0) = deg((I - K_\epsilon)|_V, \Omega \cap V, 0).$$

Por otra parte, identificando V con $\mathbb{R}^n$ para n adecuado, la elección de ϵ permite ver que $I - \tilde{K}_\epsilon$ pertenece a la misma componente conexa en $\mathcal{A}(0)$ que $I - K_\epsilon$, lo que prueba que tienen el mismo grado. Por ejemplo, basta definir la homotopía

$$h(x, \lambda) = \lambda(I - K_\epsilon) + (1 - \lambda)(I - \tilde{K}_\epsilon)$$

que no se anula en el borde de $\Omega \cap V$. De esta forma,

$$deg((I - K_\epsilon)|_V, \Omega \cap V, 0) = deg((I - \tilde{K}_\epsilon)|_V, \Omega \cap V, 0),$$

y la independencia queda demostrada.

Las propiedades del grado de Leray-Schauder son análogas a las del grado de Brouwer. En particular, la propiedad de invariancia por homotopía requiere la hipótesis adicional de que h tenga la forma $h(\cdot, \lambda) = I - K_\lambda$, con K_λ compacto. Veamos una propiedad extra, la invariancia por homotopía también en el dominio, nos resultará útil en los próximos capítulos.

Teorema 1.2.9 *Sea X un espacio de Banach, $\Omega \subset [0,1] \times X$ un subconjunto abierto y acotado. Supongamos que $f : \overline{\Omega} \to X$ compacto. Denotemos con $I - f_t$ a la aplicación $x \mapsto x - f(t,x)$, y sea $\Omega_t = \{x \in X : (t,x) \in \Omega\}$. Si $p \notin f_t(\partial\Omega_t)$ para $t \in [0,1]$, entonces $deg(f_t, \Omega_t, p)$ es independiente de $t \in [0,1]$.*

Demostración Sea f^ϵ una ϵ-aproximación de f con $Im(f^\epsilon) \subset V_\epsilon$ y $dim(V_\epsilon) < \infty$. Basta ver que vale para $I - f_t^\epsilon$. Observemos que por la propiedad de invariancia por traslaciones del grado, basta ver que vale para $deg(I - f_t^\epsilon, \Omega_t \cap V_\epsilon, 0)$. Dado t_0, por continuidad de f^ϵ, existe Ω_0 tal que $\Omega_0 \subset \Omega_t$ para todo t en un entorno de t_0 y $f_t^\epsilon(x) \neq x$ para $x \in (\Omega_t \cap V_\epsilon) \backslash (\Omega_0 \cap V_\epsilon)$. Entonces, si aplicamos la propiedad de escisión del grado, luego la de invariancia por homotopía y nuevamente la propiedad de escisión, obtenemos que

$$\begin{aligned} deg(I - f_t^\epsilon, \Omega_t \cap V_\epsilon, 0) &= deg(I - f_t^\epsilon, \Omega_0 \cap V_\epsilon, 0) \\ &= deg(I - f_{t_0}^\epsilon, \Omega_0 \cap V_\epsilon, 0) = deg(I - f_{t_0}^\epsilon, \Omega_{t_0} \cap V_\epsilon, 0). \end{aligned}$$

Como t_0 era aleatorio, vale que $deg(I - f_t^\epsilon, \Omega_t \cap V_\epsilon, 0)$ es independiente de $t \in [0,1]$. $\square$

1.3 Teorema de la función implícita

En esta sección demostraremos el teorema de la función implícita para espacios de Banach. Lo usaremos en el capítulo 5. Para ello utilizaremos el Principio de contracción uniforme.

1.3.1 Diferenciación en espacios de Banach

Primero revisaremos los hechos principales del cálculo en espacios de Banach.

Sean X e Y dos espacios de Banach, denotemos con $C(X,Y)$ al conjunto de funciones continuas de X en Y y por $\mathcal{L}(X,Y) \subset C(X,Y)$ al conjunto de funciones lineales y continuas. Sea $U \subset X$ abierto. Entonces una función $F : U \to Y$ se dice *diferenciable en* $x \in U$ si existe un operador lineal $dF(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

$$F(x+v) = F(x) + dF(x)v + o(v),$$

El operador lineal $dF(x)$ se denomina la *diferencial o derivada de* F *en* x. Si F es diferenciable para todo $x \in U$ decimos que F es *diferenciable*. En este caso tenemos la aplicación

$$dF : U \to \mathcal{L}(X,Y), \quad x \mapsto dF(x).$$

Si dF es continua, decimos que F es de tipo C^1.

Sea $Y = \prod_{j=1}^{m} Y_j$, y sea $F : X \to Y$ dada por $F = (F_1, \ldots, F_m)$ donde $F_j : X \to Y_j$. Entonces $F \in C^1(X,Y)$ si y sólo si $F_j \in C^1(X,Y_j)$, $1 \leq j \leq m$, y en este caso $dF = (dF_1, \ldots, dF_m)$. De la misma forma, si $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, entonces se puede definir la derivada parcial $D_iF \in \mathcal{L}(X_i, Y)$, que es la derivada de F considerada como una función que depende sólo de la i-ésima coordenada, fijando las otras variables. Tenemos que $dFv = \sum_{i=1}^{n} D_iFv_i$, para $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $f \in C^1(X,Y)$ si y sólo si existen todas las derivadas parciales y son continuas.

Podemos iterar el proceso de diferenciación y considerar $F \in C^r(X,Y)$, $r \geq 1$, si la r-ésima derivada de F, d^rF existe y es continua.

1.3.2 Demostración del teorema de la función implícita

Definición Dados X e Y espacios de Banach, sean $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ abiertos y consideremos $F : \overline{U} \times V \to U$. Decimos que la aplicación F es una contracción uniforme si existe $\theta \in [0,1)$ tal que

$$|F(x,y) - F(\tilde{x},y)| \leq \theta\, |x - \tilde{x}|\,, \quad \forall x, \tilde{x} \in \overline{U},\ y \in V.$$

Lema 1.3.1 *Supongamos que $U \subseteq X$ y $F \in C^1(U, Y)$ si*

$$|F(x) - F(y)| \leq M\,|x - y|\,, \quad \forall x, y \in U,$$

entonces

$$\sup_{x \in U} |dF(x)| \leq M.$$

Demostración Supongamos que existe $x_0 \in U$ tal que $|dF(x_0)| = M + \delta$, con $\delta > 0$. Podemos hallar un elemento $e \in X$, $|e| = 1$ tal que $|dF(x_0)e| = M + \delta$, luego obtenemos la siguiente contradicción

$$M\epsilon \geq |F(x_0 + \epsilon e) - F(x_0)| = |dF(x_0)(\epsilon e) + o(\epsilon)| \geq (M + \delta)\epsilon - |o(\epsilon)| > M\epsilon,$$

ya que podemos suponer que $|o(\epsilon)| < \epsilon\delta$ para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. $\square$

Teorema 1.3.2 (Principio de contracción uniforme) *Sean U y V subconjuntos abiertos de los espacios de Banach X e Y, respectivamente. Sea $F : \overline{U} \times V \to U$ una contracción uniforme, y denotemos con $\xi(y) \in U$ al único punto fijo de $F(\cdot, y)$. Si $F \in C^r(U \times V, U)$, con $r \geq 0$, entonces $\xi(\cdot) \in C_r(V, U)$.*

Demostración Veamos primero que $\xi(y)$ es continua. Como

$$\begin{aligned} |\xi(y+v) - \xi(y)| &= |F(\xi(y+v), y+v) - F(\xi(y), y+v) + F(\xi(y), y+v) - F(\xi(y), y)| \\ &\leq \theta\,|\xi(y+v) - \xi(y)| + |F(\xi(y), y+v) - F(\xi(y), y)|\,, \end{aligned}$$

deducimos que

$$|\xi(y+v) - \xi(y)| \leq \frac{1}{1-\theta}\,|F(\xi(y), y+v) - F(\xi(y), y)|\,. \tag{1.1}$$

Y por lo tanto, $\xi(y) \in C(V, U)$. Ahora, supongamos que $r = 1$ y consideremos la diferencial de $\xi(y) = F(\xi(y), y)$ en y,

$$d\xi(y) = D_x F(\xi(y), y) d\xi(y) + D_y F(\xi(y), y).$$

Consideremos la ecuación de punto fijo $T(x', y) = x'$, donde $T(\cdot, y) : \mathcal{L}(Y, X) \to \mathcal{L}(Y, X)$, está dado por $x' \mapsto D_x F(\xi(y), y)x' + D_y F(\xi(y), y)$. T es una contracción uniforme pues, por el Lema 1.3.1, $|D_x F(\xi(y), y)| \leq \theta$. Entonces obtenemos una única solución continua $x'(y)$.

Falta ver que
$$\xi(y + v) - \xi(y) - x'(y)v = o(v).$$
Denotemos $u = \xi(y + v) - \xi(y)$, entonces usando la ecuación de $d\xi(y)$ y la propiedad de punto fijo de $\xi(y)$, tenemos que

$$\begin{aligned}(1 - D_x F(\xi(y), y))(u - x'(y)v) &= F(\xi(y) + u, y + v) - F(\xi(y), y) - D_x F(\xi(y), y)u \\ &\quad - D_y F(\xi(y), y)v \\ &= o(u) + o(v),\end{aligned}$$

ya que $F \in C^1(U \times V, U)$ por hipótesis. Más aún, $|(1 - D_x F(\xi(y), y))^{-1}| \leq \frac{1}{1-\theta}$, y $u = o(v)$ por (1.1). Esto implica que $u - x'(y)v = o(v)$ como queríamos ver.

Finalmente supongamos que el resultado vale para $r - 1 \geq 1$. Si $F \in C^r(U \times V, U)$, entonces $\xi(y) \in C^{r-1}(V, U)$ y la ecuación que satisface $d\xi(y)$ implica que $\xi(y) \in C^r(V, U)$. $\square$

Teorema 1.3.3 (Función Implícita) *Sean X, Y y Z espacios de Banach, y sean U y V subconjuntos abiertos de X e Y respectivamente. Sea $F \in C^r(U \times V, Z)$, $r \geq 1$. Fijemos $(x_0, y_0) \in U \times V$ y supongamos que $D_x F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Z)$ es un isomorfismo. Entonces existe un entorno abierto $U_1 \times V_1 \subseteq U \times V$ de (x_0, y_0) tal que para cada $y \in V_1$ existe un único punto $(\xi(y), y) \in U_1 \times V_1$ que satisface $F(\xi(y), y) = F(x_0, y_0)$. Además, la aplicación $\xi \in C^r(V_1, Z)$.*

Demostración Usando la traslación $F \mapsto F - F(x_0, y_0)$ podemos asumir que $F(x_0, y_0) = 0$. Definimos el operador

$$G(x, y) = x - (D_x F(x_0, y_0))^{-1} F(x, y),$$

observemos que los puntos fijos de G son las soluciones de la ecuación $F(x,y) = 0$. $G \in C^r(U \times V, Z)$, y como $|D_x G(x_0, y_0)| = 0$, podemos encontrar bolas U_1 y V_1 alrededor de x_0 e y_0 tales que $|D_x G(x,y)| \leq \theta < 1$ para todo $(x,y) \in U_1 \times V_1$. Por lo tanto, $G(\cdot, y)$ es una contracción uniforme y, en particular, $G(U_1, y) \subset U_1$ para cada $y \in V_1$. Así $G : U_1 \times V_1 \to U_1$. El resto sigue del principio de contracción uniforme.

$\square$

Capítulo 2

Super y subsoluciones

En este capítulo demostraremos tres teoremas que utilizan el método de super y subsoluciones. El primero es un resultado clásico para super y subsoluciones ordenadas, el segundo es un caso diferente para no ordenadas y para el tercero definimos las super y subsoluciones en el sentido de $W^{2,1}$.

Definición Supongamos que tenemos una ecuación de segundo orden $u'' = f(t, u, u')$, diremos que las funciones suaves α y β son, respectivamente, una sub y una supersolución de la ecuación si

$$\alpha'' \geq f(t, \alpha, \alpha'), \qquad \beta'' \leq f(t, \beta, \beta').$$

Además, como queremos resolver un problema periódico, pediremos también

$$\alpha(0) = \alpha(T) \quad \alpha'(0) \geq \alpha'(T)$$

$$\beta(0) = \beta(T) \quad \beta'(0) \leq \beta'(T)$$

2.1 Resultado clásico para super y subsoluciones ordenadas

Analicemos la ecuación

$$\begin{cases} u'' + f(t,u,u') = 0 \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T) \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $f : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua. Trabajaremos en el espacio $C^1([0,T])$, con la norma definida por

$$\|u\|_{C^1} = \max\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\}$$

Teorema 2.1.1 *Definamos el conjunto*

$$E = \left\{u \in C^1([0,T]) / \alpha \le u \le \beta, \|u'\|_\infty < R\right\}.$$

Supongamos que

1. *existen α y β sub y supersoluciones del problema (2.1) tales que $\alpha \le \beta$ en $[0,T]$,*
2. *existe $R > \max\{\|\alpha'\|_\infty, \|\beta'\|_\infty\}$ tal que cualquier solución u de $u''+f(t,u,u') = 0$, con $u'(t_0) = 0$, para algún $t_0 \in [0,T]$ y $\alpha < u < \beta$, verifica $\|u'\|_\infty < R$.*

Entonces el problema (2.1) tiene al menos una solución en E.

Demostración Consideremos el problema truncado: dado $\lambda > 0$, planteamos

$$\begin{cases} u'' - \lambda u + f(t, P(t,u), Q(u')) + \lambda P(t,u) = 0 \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T), \end{cases} \tag{2.2}$$

donde

$$P(t,u) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si} \quad \alpha(t) > u \\ u & \text{si} \quad \alpha(t) \le u \le \beta(t) \\ \beta(t) & \text{si} \quad \beta(t) < u \end{cases}$$

y

$$Q(v) = \begin{cases} -R & \text{si} \quad v < -R \\ v & \text{si} \quad |v| \leq R \\ R & \text{si} \quad v > R \end{cases}$$

Escribimos (2.2) como una ecuación integral

$$u(t) = \int_0^T G(t,s) \left[f(s, P(s,u(s)), Q(u'(s))) + \lambda P(s,u(s)) \right] ds,$$

donde $v(t) = \int_0^T G(t,s)F(s)ds$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} v'' - \lambda v + F(t) = 0 \\ v(0) = v(T), v'(0) = v'(T) \end{cases}$$

El operador $T : C^1([0,T]) \to C^1([0,T])$, definido por

$$(Tu)(t) = \int_0^T G(t,s) \left[f(s, P(s,u(s)), Q(u'(s))) + \lambda P(s,u(s)) \right] ds,$$

es compacto y acotado, pues $F(t) = f(t, P(t,u(t)), Q(u'(t))) + \lambda P(t,u(t))$ es acotada. Por el teorema de Schauder, T tiene un punto fijo $u \in C^1([0,T])$, que es una solución de (2.2).

Veamos ahora que en realidad u es solución del problema (2.1) original.

Primero veamos que u satisface

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t),$$

para todo $t \in [0,T]$. Supongamos, por ejemplo, que u no es mayor o igual a α. Entonces para algún $t_0 \in [0,T]$,

$$\min_{t \in [0,T]} (u(t) - \alpha(t)) = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0.$$

Entonces $P(t_0, u(t_0)) = \alpha(t_0)$. Además, como $u'(t_0) = \alpha'(t_0)$ y $R > \max\{\|\alpha'\|_\infty, \|\beta'\|_\infty\}$, tenemos que $Q(u'(t_0)) = \alpha'(t_0)$. Si $t_0 \in (0,T)$, obtenemos la siguiente contradicción

$$\begin{aligned} 0 \leq (u-\alpha)''(t_0) &= -f(t_0, \alpha(t_0), \alpha'(t_0)) + \lambda u(t_0) - \lambda\alpha(t_0) - \alpha''(t_0) \\ &\leq \lambda\left[u(t_0) - \alpha(t_0)\right] < 0. \end{aligned}$$

En caso que el mínimo se alcance en los bordes del intervalo

$$\min_{t\in[0,T]}(u(t) - \alpha(t)) = u(0) - \alpha(0) = u(T) - \alpha(T) < 0,$$

obtenemos

$$u'(0) - \alpha'(0) \geq 0 \geq u'(T) - \alpha'(T),$$

y, por definición de subsolución, $u'(0) - \alpha'(0) \leq u'(T) - \alpha'(T)$. Entonces, tenemos $u'(0) - \alpha'(0) = 0$ y para $t > 0$ chico

$$u'(t) - \alpha'(t) = \int_0^t \left[-f(t_0, \alpha(s), \alpha'(s)) + u(s) - \lambda\alpha(s) + \lambda u(s) - \alpha''(s)\right] ds < 0.$$

Que es una contradicción. Esto prueba que $\alpha(t) \leq u(t)$, para todo $t \in [0,T]$.

Similarmente, se prueba que $u(t) \leq \beta(t)$.

Por último, veamos que $\|u'\|_\infty < R$. Supongamos que no, entonces existe una solución u de (2.2), $t_0 \in [0,T]$ y $t_1 \in [0,T]$, con $t_0 < t_1$ tales que $u'(t_0) = 0$, $|u'(t_1)| = R$ y para cualquier $t \in [t_0, t_1]$, se verifica $|u'(t)| \leq R$, $\alpha(t) < u(t) < \beta(t)$. Por lo tanto, u satisface $u'' + f(t, u, u') = 0$ en $[t_0, t_1]$ y contradice la hipótesis 2. $\square$

Observación Podemos suprimir la hipótesis 2 si le imponemos a f la *condición de Nagumo*.

La condición consiste en pedir que sobre el conjunto

$$\mathcal{C} = \{(t,u,v) : t \in [0,T], \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), |v| \leq R\}$$

valga

$$|f(t,u,v)| \leq \psi(|v|),$$

donde ψ es una función apropiada que verifica

$$\int_0^{+\infty} \frac{s}{\psi(s)} ds = +\infty$$

(ver, por ejemplo, [1]).

2.2 Super y subsoluciones no ordenadas

En esta sección probaremos un caso diferente del resultado anterior, no pedimos que las super y subsoluciones sean ordenadas, pero si que la f sea acotada (ver [4]).

Teorema 2.2.1 *Sea $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Supongamos que existen $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ sub y supersoluciones. Entonces el problema*

$$\left\{ \begin{array}{c} u'' + f(t, u) = 0 \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T) \end{array} \right. \tag{2.3}$$

tiene al menos una solución.

Demostración Consideremos el espacio

$$X = \left\{ u \in C([0, T]) : \int_0^T u(t) dt = 0 \right\}$$

con la norma infinito. Definimos el operador compacto $K : X \to X$ tal que para cada $g \in X$, $u = Kg$ es la única solución en X de

$$\left\{ \begin{array}{c} u'' + g(t) = 0 \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T) \end{array} \right.$$

y los operadores continuos $\overline{N} : C([0, T]) \to \mathbb{R}$, $\tilde{N} : C([0, T]) \to X$ definidos por

$$\overline{N} u = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, u(t)) dt,$$

y

$$(\tilde{N}u)(t) = f(t, u(t)) - \overline{N}u.$$

Dada $u \in C([0,T])$, escribimos $\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$, y $\tilde{u} = u - \overline{u}$. Es fácil ver que $u \in C([0,T])$ es solución de (2.3) si y solo si $\overline{u} \in \mathbb{R}$ y $\tilde{u} \in X$ son soluciones de

$$\begin{cases} \tilde{u} = K\tilde{N}(\overline{u} + \tilde{u}) \\ \overline{N}(\overline{u} + \tilde{u}) = 0 \end{cases}$$

Paso 1 - Afirmación: el conjunto

$$\Sigma = \left\{(\overline{u}, \tilde{u}) \in \mathbb{R} \times X : \tilde{u} = K\tilde{N}(\overline{u} + \tilde{u})\right\}$$

es tal que para cada $a > 0$, existe un subconjunto conexo Σ_a de Σ con $proy_{\mathbb{R}}\Sigma_a = \{\overline{u}/$ existe $\tilde{u} \in X$ tal que $(\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma_a\} = [-a, a]$.

Observemos que para cada $\overline{u}$, el operador $T\tilde{u} = K\tilde{N}(\overline{u} + \tilde{u})$ es compacto, entonces por el teorema de Schauder, existe $\tilde{u} \in X$ tal que $\tilde{u} = T\tilde{u}$. Esto implica que para cada $\overline{u}$, $\tilde{u} = K\tilde{N}(\overline{u} + \tilde{u})$ tiene solución en X, es decir $proy_{\mathbb{R}}\Sigma = \mathbb{R}$. Notemos además que como T es acotado, entonces existe $R > 0$ tal que $\Sigma \subset \mathbb{R} \times B_R(0)$.

Definimos ahora $K = \{(\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma / -a \leq \overline{u} \leq a\}$ y $K_r = \{(\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma / \overline{u} = r\}$. El conjunto K es compacto y $K_{\pm a}$ son subconjuntos no vacíos y disjuntos de K.

Supongamos que no existe un subconjunto conexo Σ_a de K uniendo K_a y K_{-a}. Entonces existen conjuntos compactos y disjuntos $C_a \supset K_a$ y $C_{-a} \supset K_{-a}$, con $K = C_{-a} \cup K_a$. Por lo tanto, podemos encontrar un conjunto abierto $\Omega \subset (-\infty, a) \times B_R(0)$ tal que

$$C_{-a} \subset \Omega \;\; y \;\; C_a \cap \overline{\Omega} = \emptyset.$$

Sean $\Omega_r := \{\tilde{u} \in X : (r, \tilde{u}) \in \Omega\}$ y $F_r(\tilde{u}) = \tilde{u} - K\tilde{N}(r + \tilde{u})$. Entonces, por el Teorema 1.2.9, sabemos que $deg(F_r, \Omega_r, 0)$ es constante si $F_r \neq 0$ en $\partial\Omega_r$. Supongamos que existe $\tilde{u} \in \partial\Omega_r$ tal que $F_r(\tilde{u}) = 0$, entonces $(r, \tilde{u}) \in \partial\Omega$, entonces $(r, \tilde{u}) \notin C_a$. Pero $C_{-a} \subset \Omega$ y es compacto, entonces $C_{-a} \cap \partial\Omega = \emptyset$, y, por lo tanto, $(r, \tilde{u}) \notin K$, lo cual es un absurdo.

Luego, tenemos

$$1 = deg(F_{-a}, B_R(0), 0) = deg(F_{-a}, \Omega_{-a}, 0) = deg(F_a, \Omega_a, 0) = 0,$$

que es un absurdo.

Observemos que si existe $(\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma$ tal que $\overline{N}(\overline{u} + \tilde{u}) = 0$, entonces $u = \overline{u} + \tilde{u}$ es solución de (2.3).

Paso 2: Existe $(\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma$ tal que $\overline{N}(\overline{u} + \tilde{u}) = 0$.

Veamos que si no existe tal par (es decir, para cada $(\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma$, $\overline{N}(\overline{u} + \tilde{u}) \neq 0$), podemos encontrar super y subsoluciones ordenadas. Para cada $a > 0$, definimos Σ_a de la afirmación del paso 1 y como $\overline{N}$ es continua, el conjunto $\{\overline{N}(\overline{u} + \tilde{u}) : (\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma_a\}$ es un intervalo que no contiene al cero. Supongamos que $\overline{N}(\overline{u} + \tilde{u}) > 0$. En ese caso, cualquier función $u = \overline{u} + \tilde{u}$ tal que $(\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma_a$ es una subsolución, ya que

$$u'' + f(t, u) = \tilde{u}'' + f(t, \overline{u} + \tilde{u}) = \overline{N}(\overline{u} + \tilde{u}) > 0,$$

$$u(0) = u(T), u'(0) = u'(T).$$

Si elegimos a lo suficientemente grande como para que

$$R - a < \beta(t),$$

donde R es tal que $\Sigma \subset \mathbb{R} \times B_R(0)$ y $\beta(t) = \overline{u} + \tilde{u}(t)$; y $\tilde{u}$ tal que $(-a, \tilde{u}) \in \Sigma_a$ tenemos una subsolución

$$\alpha_0(t) = \tilde{u}(t) - a < \beta(t).$$

Análogamente, si $\overline{N}(\overline{u} + \tilde{u}) < 0$, construimos una subsolución $\beta_0 > \alpha$. La existencia sigue del teorema de la sección anterior. □

Observación El teorema es falso si no pedimos que f sea acotada. Por ejemplo, consideremos el problema

$$\begin{cases} u'' + u = \sin t \\ u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

Observemos que si tomamos como $\alpha(t) = \alpha_0$ y $\beta(t) = \beta_0$ constantes, tales que $\alpha_0 \geq 1$ y $\beta_0 \leq -1$ obtenemos una sub y una supersolución de la ecuación. En efecto

$$\alpha''(t) = 0 \geq -1 + \sin t \geq -\alpha(t) + \sin t,$$

y

$$\beta''(t) = 0 \leq 1 + \sin t \leq -\beta(t) + \sin t.$$

Supongamos que existe u solución, multiplicamos la ecuación por $\sin t$, integramos y aplicamos partes, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} u'' \sin t\, dt + \int_0^{2\pi} u \sin t\, dt &= -\int_0^{2\pi} u' \cos t\, dt + \int_0^{2\pi} u \sin t\, dt \\ = -\int_0^{2\pi} u \sin t\, dt + \int_0^{2\pi} u \sin t\, dt = 0,\end{aligned}$$

lo cual es un absurdo.

2.3 Super y subsoluciones estrictas en el sentido de $W^{2,1}$

Consideremos el problema (2.1) donde f está definida para $(t, u, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$. Para la siguiente definición extendemos f por periodicidad para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición Una función $\alpha \in C(0, T)$ es una *subsolución estricta en el sentido de* $W^{2,1}$ de (2.1) si no es una solución en $[0, T]$ y su extensión periódica a $\mathbb{R}$, definida por $\alpha(t) = \alpha(t + T)$, es tal que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ vale que $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$, o existe un intervalo abierto I_0 y $\epsilon_0 > 0$ tales que $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ y, para casi todo $t \in I_0$, para toda u con $\alpha(t) \leq u \leq \alpha(t) + \epsilon_0$, y para todo v tal que $\alpha'(t) - \epsilon_0 \leq v \leq \alpha'(t) + \epsilon_0$, tenemos que

$$\alpha''(t) + f(t, u, v) \geq 0.$$

Del mismo modo, una función $\beta \in C(0, T)$ es una *supersolución estricta en el sentido de* $W^{2,1}$ de (2.1) si no es una solución en $[0, T]$ y su extensión periódica a $\mathbb{R}$ es tal que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, vale que $D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0)$, o existe un intervalo I_0 y $\epsilon_0 > 0$ tales que

$t_0 \in I_0$, $\beta \in W^{2,1}(I_0)$ y, para casi todo $t \in I_0$, para todo u tal que $\beta(t) - \epsilon_0 \leq u \leq \beta(t)$, y todo v tal que $\beta'(t) - \epsilon_0 \leq v \leq \beta'(t) + \epsilon_0$, tenemos que

$$\beta''(t) + f(t, u, v) \leq 0.$$

Donde,

$$D_-\phi(t_0) = \liminf_{t \to t_0^-} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}, \quad D_+\phi(t_0) = \liminf_{t \to t_0^+} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0},$$

$$D^-\phi(t_0) = \limsup_{t \to t_0^-} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}, \quad D^+\phi(t_0) = \limsup_{t \to t_0^+} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}.$$

Escribamos (2.1) como una ecuación de punto fijo. Con este objetivo, definimos el operador compacto $\mathcal{T} = K_1 N$, donde $K_1 : L^1(0,T) \to C^1([0,T])$ es el operador de Green correspondiente al problema

$$\begin{cases} u'' - u + g(t) = 0 \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T) \end{cases}$$

y $N : C^1([0,T]) \to L^1(0,T)$ definida por

$$Nu = f(\cdot, u, u') + u.$$

Con esta notación, el problema (2.1) es equivalente a $u = \mathcal{T}u$.

Teorema 2.3.1 *Sea $f : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función L^1-Carathéodory. Supongamos que*

1. *existen α y β sub y supersoluciones estrictas en el sentido de $W^{2,1}$ de la ecuación (2.1), α, $\beta \in W^{1,\infty}(0,T)$, tales que $\alpha < \beta$ en $[0,T]$,*

2. *existe* $R > \max\{\|\alpha'\|_\infty, \|\beta'\|_\infty\}$ *tal que cualquier solución* u *de* $u''+f(t,u,u')=0$, $u'(t_0)=0$ *para* $t_0 \in [0,T]$ *y* $\alpha < u < \beta$, *verifica*

$$\|u'\|_\infty < R.$$

Entonces,

$$deg(I - \mathcal{T}, \Omega, 0) = 1,$$

donde $\Omega := \{u \in C^1([0,T]) : \alpha < u < \beta, |u'| < R\}$.

Demostración Consideremos el siguente problema modificado

$$\begin{cases} u'' - u + \hat{f}(t,u,u') + \delta(\alpha(t), u, \beta(t)) = 0 \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T), \end{cases} \tag{2.4}$$

donde $\hat{f}(t,x,y) = f(t, \delta(\alpha(t), x, \beta(t)), \delta(-R, y, R))$ y

$$\delta(A,x,B) = \begin{cases} A & \text{si} \quad x \leq A \\ x & \text{si} \quad A \leq x \leq B \\ B & \text{si} \quad x \geq B. \end{cases}$$

Afirmación 1: toda solución u de (2.4) satisface $\alpha(t) < u(t) < \beta(t)$ en $[0,T]$.

En caso contrario, tendríamos que para algún $t_0 \in [0,T]$,

$$\min_{t \in [0,T]} \{u(t) - \alpha(t)\} = u(t_0) - \alpha(t_0) \leq 0.$$

Por lo tanto, $u'(t_0) - D_-\alpha(t_0) \leq 0 \leq u'(t_0) - D^+\alpha(t_0)$ y por definición de subsolución estricta en el sentido de $W^{2,1}$, $D_-\alpha(t_0) = D^+\alpha(t_0) = u'(t_0)$. A continuación, elegimos I_0 y $\epsilon_0 > 0$ de la definición de α y los tomamos lo suficientemente pequeños de forma tal que para todo $t \in I_0$

$$\alpha(t) \leq \delta(\alpha(t), u(t), \beta(t)) \leq \alpha(t) + \epsilon_0,$$

$$-R \leq \alpha'(t) - \epsilon_0 \leq u'(t) \leq \alpha'(t) + \epsilon_0 \leq R.$$

Así, para casi todo $t \in (t_0, t_1)$

$$\alpha''(t) + \hat{f}(t, u(t), u'(t)) = \alpha''(t) + f(t, \delta(\alpha(t), u(t), \beta(t), u'(t)) \geq 0.$$

Notemos que como α no es solución, podríamos haber elegido t_0 de forma que para algún $t_1 > t_0$, $t_1 \in I_0$, tendríamos que $u'(t_1) - \alpha'(t_1) > 0$. Así

$$\begin{aligned} 0 < u'(t_1) - \alpha'(t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} (u''(s) - \alpha''(s))ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} [-\hat{f}(s, u(s), u'(s)) + u - \delta(\alpha(t), u, \beta(t)) - \alpha''(s)]ds \leq 0, \end{aligned}$$

que es un absurdo.

Análogamente se prueba que para todo $t \in [0, T]$, $u(t) < \beta(t)$.

Afirmación 2: toda solución de (2.4) satisface que $|u'(t)| < R$ en $[0, T]$.

En caso contrario, existiría una solución u de (2.4), t_0, $t_1 \in [0, T]$, $t_0 < t_1$ tales que $u'(t_0) = 0$, $|u'(t_1)| = R$ y para cualquier $t \in [t_0, t_1]$, $|u'(t)| \leq R$; además $\alpha(t) < u(t) < \beta(t)$ para $t \in [t_0, t_1]$ por la afirmación anterior. Entonces u satisface $u'' + f(t, u, u') = 0$ en $[t_0, t_1]$ y contradice la hipótesis 2.

Afirmación 3: $deg(I - \mathcal{T}, \Omega, 0) = 1$.

Definimos el operador $\hat{\mathcal{T}} = K_1 \hat{N}$, donde

$$(\hat{N}u)(t) = \hat{f}(t, u(t), u'(t)) + \delta(\alpha(t), u, \beta(t)).$$

Es claro que $\hat{\mathcal{T}}$ es acotado, y para $\hat{R} > 0$ suficientemente grande y cualquier $\lambda \in [0, T]$,

$$deg(I - \hat{\mathcal{T}}, B_{\hat{R}}(0), 0) = deg(I - \lambda\hat{\mathcal{T}}, B_{\hat{R}}(0), 0) = deg(I, B_{\hat{R}}(0), 0) = 1.$$

Además, si $\hat{R}$ es lo suficientemente grande, $\Omega \subset B_{\hat{R}}(0)$, por las afirmaciones 1 y 2, y la propiedad de escisión del grado, tenemos que

$$1 = deg(I - \hat{\mathcal{T}}, B_{\hat{R}}(0), 0) = deg(I - \hat{\mathcal{T}}, \Omega, 0) = deg(I - \mathcal{T}, \Omega, 0),$$

lo cual prueba el teorema. $\square$

Capítulo 3

Estudio de existencia de soluciones para una ecuación tipo Rayleigh

En este capítulo estudiaremos una ecuación tipo Rayleigh con condiciones periódicas de contorno

$$\begin{cases} u'' + f(u') + g(t, u, u') = \overline{p} \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T). \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1 Caso g acotada

Consideraremos a la nolinealidad acotada por una función $h \in L^2(0, T)$. Los siguientes resultados describen la estructura del conjunto de $\overline{p}$ para los cuales la ecuación periódica (3.1) tiene solución.

Teorema 3.1.1 *Sea $\overline{p} \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $g : [0, T] \times \mathbb{R}^2$ una función de Carathéodory tal que existe $h \in L^2(0, T)$ y para todo $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$,*

$$|g(t, x, y)| \leq h(t).$$

Entonces existe un intervalo no vacío $[a, b]$ tal que:

1. *si* $\overline{p} \notin [a, b]$*, el problema (3.1) no tiene solución,*

2. *si* $\overline{p} \in (a, b)$*, el problema (3.1) tiene al menos una solución .*

Demostración Sea $\mathcal{M} = \{\overline{p} \in \mathbb{R} : \text{ el problema (3.1) tiene solución}\}$.
Afirmación 1: sea $R > \sqrt{T}\|h\|_2$. Entonces toda solución u de (3.1) verifica

$$\|u'\|_\infty < R.$$

En efecto, si multiplicamos la ecuación (3.1) por u'' e integramos en $[0, T]$, obtenemos:

$$\int_0^T (u'')^2 dt = -\int_{u'(0)}^{u'(T)} f(z)dz - \int_0^T g(t, u, u')u''dt + \overline{p}\int_0^T u''dt,$$

luego,

$$\|u''\|_2 \leq \int_0^T |g(t, u, u')|\, |u''|\, dt \leq \|h\|_2\|u''\|_2.$$

Así $\|u''\|_2 \leq \|h\|_2$. Y si elegimos $t_0 \in [0, T]$ tal que $u'(t_0) = 0$, tenemos que

$$|u'(t)| = \left|\int_{t_0}^t u''(s)ds\right| \leq \sqrt{T}\|u''\|_2 \leq \sqrt{T}\|h\|_2 < R.$$

Por lo tanto $\|u'\| < R$.

Un problema modificado: Consideremos la función

$$\hat{f}(y) := f(\delta(-R, y, R)),$$

con $\delta(A, y, B)$ definida en el capítulo anterior. Repitiendo lo hecho en la demostración de la Afirmación 1, es claro que cualquier solución u de

$$\begin{cases} u'' + \hat{f}(u') + g(t, u, u') = \overline{p} \\ u(0) = u(T),\ u'(0) = u'(T) \end{cases} \tag{3.2}$$

satisface (3.1). Por lo tanto, u es solución de (3.1) si y sólo si es solución de (3.2).

Afirmación 2: $\mathcal{M}$ es no vacío.

Sea $\hat{\mathcal{T}} = K(I-P)\hat{N}$, donde $K : \tilde{Y} \subset L^2(0,T) \to \tilde{X} \subset C^1([0,T])$ es el inverso compacto del operador $L : \tilde{X} \subset C^1([0,T]) \to \tilde{Y} \subset L^2(0,T)$, $Lu = -u''$, P es el proyector

$$P : L^2(0,T) \to \mathbb{R}, \ \ u \mapsto Pu = \frac{1}{T}\int_0^T u dt$$

y

$$\hat{N} : C^1([0,T]) \to L^2(0,T), \ \ u \mapsto \hat{N}u = \hat{f}(u') + g(\cdot, u, u').$$

El operador $\hat{\mathcal{T}}$ es compacto y acotado, de forma tal que el teorema de punto fijo de Schauder provee una solución de la ecuación $u = \hat{\mathcal{T}}u$. Esta ecuación es equivalente a

$$-u'' = \hat{f}(u') + g(y,u,u') - P(\hat{f}(u') + g(\cdot, u, u'))$$

$$u(0) = u(T), \ u'(0) = u'(T),$$

lo que prueba que $\overline{p} := P(\hat{f}(u') + g(\cdot, u, u')) \in \mathcal{M}$.

Afirmación 3: $\mathcal{M}$ es acotado.

Por integración directa de (3.2), tenemos que

$$T\overline{p} = \int_0^T \hat{f}(u')dt + \int_0^T g(t,u,u')dt,$$

tomamos módulo y aplicamos la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$T\,|\overline{p}| \leq \|\hat{f}\|_\infty T + \sqrt{T}\|h\|_2.$$

Luego

$$|\overline{p}| \leq \|\hat{f}\|_\infty + \frac{\|h\|_2}{\sqrt{T}}.$$

Afirmación 4: $\mathcal{M}$ es un intervalo.

Cosideremos $\overline{p}_1, \overline{p}_2 \in \mathcal{M}$, con $\overline{p}_1 < \overline{p}_2$ y sean u_1, u_2 las correspondientes soluciones de (3.1). Para $\overline{p} \in (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$, las funciones u_1 y u_2 son, respectivamente, super y subsolución de (3.2) pues

$$u_1'' + \hat{f}(u_1') + g(t, u_1, u_1') - \overline{p} = \overline{p}_1 - \overline{p} < 0$$

y

$$u_2'' + \hat{f}(u_2') + g(t, u_2, u_2') - \overline{p} = \overline{p}_2 - \overline{p} > 0.$$

Sigue del teorema de super y subsoluciones no ordenadas, visto en el capítulo anterior, que el problema (3.2), y por lo tanto, el problema (3.1) tiene solución. □

Si la función $g(t, x, y)$ es periódica en x, el teorema anterior puede mejorarse sustancialmente, como veremos en el próximo teorema. Además, por simplicidad, supondremos que g es continua, aunque también vale para funciones de tipo Carátheodory, con una hipótesis adicional (ver [5]).

Teorema 3.1.2 *Sean $\overline{p} \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas, tales que:*

1. *para casi todo $t \in [0, T]$ y todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(t, x, y) = g(t, x + 2\pi, y)$,*
2. *para alguna $h \in L^2(0, T)$, casi todo $t \in [0, T]$ y todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$|g(t, x, y)| \leq h(t).$$

Entonces, existe un intervalo no vacío $[a, b]$ tal que

- *si $\overline{p} \notin [a, b]$, el problema (3.1) no tiene solución,*
- *si $\overline{p} \in [a, b]$, el problema (3.1) tiene al menos una solución,*
- *si $\overline{p} \in (a, b)$, el problema (3.1) tiene al menos dos soluciones que no difieren en un múltiplo de 2π.*

Demostración Por el teorema anterior, sabemos que el conjunto

$$\mathcal{M} = \{\overline{p} \in \mathbb{R} : (3.1) \text{ tiene solución}\}$$

es un intervalo acotado y no vacío. Por lo tanto $\overline{\mathcal{M}} = [a, b]$.

Afirmación 1: $\mathcal{M}$ es cerrado.

Sea $(p_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{M}$ que converge a p y $(u_n)_n$ las correspondientes soluciones de (3.1). Veamos que $p \in \mathcal{M}$. Por periodicidad de g, podemos suponer, sumando un múltiplo de 2π a u_n si fuera necesario, que $u_n(0) \in [0, 2\pi]$. Sigue de la Afirmación 1 del teorema anterior que

$$|u_n(t)| = \left| u_n(0) + \int_0^t u_n'(s)ds \right| \leq 2\pi + RT,$$

además, como vimos en el teorema anterior, $\|u''\| \leq \|h\|_2$, resulta que la sucesión $(u_n)_n$ es acotada en $H^2(0,T)$. Como $H^2(0,T)$ está compactamente inmerso en $C^1([0,T])$, $(u_n)_n$ tiene una subsucesión convergente a una función $u \in C^1([0,T])$. Si pasamos al límite en (3.1), con $\overline{p} = p_n$, sigue que u es solución de (3.1) con $\overline{p} = p$.

Afirmación 2: existen super y subsoluciones estrictas en sentido $W^{2,1}$ de (3.2) para $\overline{p} \in (a, b)$.

Consideremos el problema modificado (3.2) y $R > 0$ tal que $R > \sqrt{T}\|h\|_2$. Sean u_a y u_b soluciones de (3.1) con $\overline{p} = a$ y $\overline{p} = b$ respectivamente. Como g es periódica, podemos elegir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha := u_b < \beta := u_a + 2k\pi$ y para algún $t_* \in [0, T]$ valga

$$\alpha(t_*) + 2\pi \geq \beta(t_*).$$

Veamos que para $\overline{p} < b$ la función, α es una subsolución estricta en el sentido de $W^{2,1}$. Dado $t_0 \in [0, T]$, podemos elegir un intervalo abierto I_0 y $\epsilon_0 > 0$ lo suficientemente chico para que $t_0 \in I_0$, para casi todo $t \in I_0$, para todo u tal que $\alpha(t) \leq u \leq \alpha(t) + \epsilon_0$ y para todo v tal que $\alpha'(t) - \epsilon_0 \leq v \leq \alpha'(t) + \epsilon_0$, valga

$$\left| \hat{f}(v) - \hat{f}(\alpha'(t)) \right| \leq \frac{b - \overline{p}}{2},$$

y

$$|g(t,u,v) - g(t,\alpha(t),\alpha'(t))| \leq \frac{b-\overline{p}}{2}.$$

Se sigue que , para esos t, u y v, vale

$$\begin{aligned}\alpha''(t) + \hat{f}(v) + g(t,u,v) &= b + [\hat{f}(v) - \hat{f}(\alpha'(t))] + [g(t,u,v) - g(t,\alpha(t),\alpha'(t))] \\ &\geq b - (b-\overline{p}) = \overline{p}.\end{aligned}$$

Similarmente, podemos probar que $\alpha(t)+2\pi$ es una subsolución estricta en el sentido de (3.2) en el sentido de $W^{2,1}$ si $\overline{p} < b$ y que $\beta(t)$ y $\beta(t)+2\pi$ son supersoluciones estrictas en el sentido de $W^{2,1}$ si $\overline{p} > a$

Afirmación 3: Si $\overline{p} \in (a,b)$, el problema (3.1) tiene al menos dos soluciones que no difieren en un múltiplo de 2π

Definimos los siguientes conjuntos

$$\Omega_1 := \left\{u \in C^1([0,T]) : \text{ para todo } t \in [0,T], \alpha(t) < u(t) < \beta(t), |u'(t)| < R\right\},$$

$$\Omega_2 := \left\{u \in C^1([0,T]) : \text{ para todo } t \in [0,T], \alpha(t)+2\pi < u(t) < \beta(t)+2\pi, |u'(t)| < R\right\}$$

y

$$\Omega_3 := \left\{u \in C^1([0,T]) : \text{ para todo } t \in [0,T], \alpha(t) < u(t) < \beta(t)+2\pi, |u'(t)| < R\right\}.$$

Sea $\mathcal{T}u := K_1 N u$, donde $K_1 : L^1(0,T) \to C^1([0,T])$, $K_1\phi = u$, donde u es la única solución de

$$\left\{\begin{array}{c} u'' - u + \phi = 0 \\ u(0) = u(T),\ u'(0) = u'(T), \end{array}\right.$$

y $N : C^1([0,T]) \to L^1(0,T)$, $Nu = \overline{p} - \hat{f}(u') - g(\cdot,u,u') - u$. Podemos aplicar el teorema de super y subsoluciones estrictas en el sentido de $W^{2,1}$ en cada conjunto Ω_i, con $i = 1,2,3$, resulta

$$deg(I-\mathcal{T},\Omega_1,0) = deg(I-\mathcal{T},\Omega_2,0) = deg(I-\mathcal{T},\Omega_3,0) = 1,$$

por la propiedad de escisión del grado,

$$deg(I - \mathcal{T}, \Omega_3 \backslash \overline{(\Omega_1 \cup \Omega_2)}, 0) = -1.$$

Por lo tanto, obtenemos dos soluciones $u_1 \in \Omega_1$ y $u_2 \in \Omega_3 \backslash \overline{(\Omega_1 \cup \Omega_2)}$ de (3.2). Como este problema es equivalente a (3.1) en cada cunjunto Ω_i, u_1 y u_2 también son soluciones de (3.1). Notemos que $u_1 - 2n\pi \notin \Omega_3 - (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ para $n = 1, 2, \ldots$, pues, por la elección de t_* hecha en la Afirmación 2, tenemos que

$$u_1(t_*) - 2n\pi < \beta(t_*) - 2n\pi \leq \alpha(t_*) - 2(n-1)\pi \leq \alpha(t_*).$$

Además, $u_1 + 2n\pi$, con $n = 1, 2, \ldots$, no puede pertenecer al conjunto $\Omega_3 - (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ ya que $u_1 + 2n\pi > \alpha + 2\pi$.

Luego, $u_2 \in \Omega_3 - (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ no puede diferir de u_1 en un múltiplo de 2π. □

Ejemplo Supongamos que tenemos la ecuación

$$\begin{cases} u'' + cu' + \arctan u = \overline{p}, \\ u(0) = u(T),\ u'(0) = u'(T) \end{cases}$$

donde $c \neq 0$. Si multiplicamos la ecuación por u' e integramos, obtenemos

$$\|u'\|_2^2 = 0.$$

Esto implica que las soluciones son constantes, resultan ser $u(t) \equiv \tan(\overline{p})$. Por lo tanto, este problema tiene exactamente una solución para $\overline{p} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, y no tiene solución para $\overline{p} \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

En este ejemplo simple se puede calcular explícitamente el conjunto $\mathcal{M}$. Además es un caso particular del siguiente teorema.

Teorema 3.1.3 (Landesman-Lazer) *Supongamos que $p \in C([0,T])$ y que $g \in C(\mathbb{R})$ es acotada y tiene límites en $\pm\infty$. Entonces la ecuación resonante*

$$u'' + g(u) = p(t)$$

admite una solución T-periódica si

$$g(-\infty) < \overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt < g(+\infty). \tag{3.3}$$

Además, si g satisface que:

$$g(-\infty) < g(x) < g(+\infty), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

entonces (3.3) es también necesaria.

Ver la demostración en [2], [1] y [8].

3.2 Caso g acotada inferiormente

En esta sección estudiaremos la cantidad de soluciones T-periódicas de una ecuación de tipo Rayleigh con nolinearidad no acotada.

Consideremos el siguiente problema periódico

$$\begin{cases} u'' + f(u') + g(t,u,u') = \overline{p} + h(t,u,u'), \\ u(0) = u(T), \;\; u'(0) = u'(T). \end{cases} \tag{3.4}$$

Teorema 3.2.1 *Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g y $h : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Supongamos que*

1. *existen $d \geq c > 0$ tales que*
$$c \leq \frac{f(y)}{y} \leq d$$
para todo $y \in \mathbb{R}$,

2. *existen funciones $k_1, k_2 \in L^2(0,T)$ tales que para casi todo $t \in [0,T]$ y todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*
$$|h(t,x,y)| \leq k_1(t), \quad g(t,x,y) \geq k_2,$$

3. *para cada* $R \geq 0$*, existe una función* $k \in L^\infty(0,T)$*, tal que para casi todo* $t \in [0,T]$ *y todo* $(x,y) \in [-R,R] \times \mathbb{R}$*,*
$$|g(t,x,y)| \leq k(t).$$
4. $\lim_{|x|\to+\infty} g(t,x,y) = +\infty$*, uniformemente en* t *e* y*.*

Entonces, existe $a \in \mathbb{R}$ *tal que*

- *si* $\overline{p} < a$*, el problema (3.4) no tiene solución,*
- *si* $\overline{p} = a$*, el problema (3.4) tiene al menos una solución,*
- *si* $\overline{p} > a$*, el problema (3.4) tiene al menos dos soluciones.*

Demostración *Afirmación 1:* Dado $\overline{p}_0$ existen R_0, $R_1 > 0$ tales que cualquier solución u de (3.4) con $\overline{p} \leq \overline{p}_0$ verifica
$$\|u\|_\infty \leq R_0, \quad \|u'\|_\infty \leq R_1.$$

Sean $(u')^+(t) = \max\{u'(t),0\}$ y $(u')^-(t) = \max\{-u'(t),0\}$. Por la hipótesis 1, sabemos que
$$c(u')^+ \leq f((u')^+).$$
Observemos que por la definición de $(u')^+$, tenemos que
$$f((u')^+)(u')^+ = f(u')(u')^+.$$

Además, si $u' \geq 0$ en $[t_0,t_1]$ con $u'(t_0) = u'(t_1) = 0$, entonces
$$\int_{t_0}^{t_1} u''(u')^+ = \int_{t_2}^{t_1} u''u' = \frac{(u')^2}{2}|_{t_0}^{t_1} = 0.$$

De manera análoga se prueba que si $u' \leq 0$ en $[t_1, t_2]$ con $u'(t_2) = 0$, entonces $\int_{t_1}^{t_2} u''(u')^+ = 0$. Luego, si partimos el intervalo $[0, T]$ en los puntos en los que u' cambia de signo, obtenemos que

$$\int_0^T u''(u')^+ = 0.$$

Por lo tanto, si multiplicamos la ecuación (3.4) por $(u')^+$, integramos y consideramos la hipótesis 2 sobre g, obtenemos que

$$\begin{aligned} c\int_0^T [(u')^+]^2 dt &\leq \int_0^T [u''(u')^+ + f(u')(u')^+ + (g(t,u,u') - k_2(t))(u')^+]dt \\ &= \int_0^T [\overline{p} + h(t,u,u') - k_2(t)](u')^+ dt \\ &\leq (|\overline{p}_0|\sqrt{T} + \|k_1\|_2 + \|k_2\|_2)\|(u')^+\|_2. \end{aligned}$$

Esto da una cota K_1 de $\|(u')^+\|_2$ y, por lo tanto, $\|(u')^+\|_1 \leq \sqrt{T}K_1$. Además, tenemos que $0 = \int_0^T u' dt = \|(u')^+\|_1 - \|(u')^-\|_1$, entonces $\|u'\|_1 = 2\|(u')^+\|_1 \leq 2\sqrt{T}K_1$.

Ahora, tomemos $K_2 := \frac{1}{T}(\overline{p}_0 T + \|k_1\|_2\sqrt{T} + d2\sqrt{T}K_1)$. Por la hipótesis 4, existe $\nu > 0$ tal que $g(t,x,y) > K_2$ para todo $|x| > \nu$. Supongamos que u es solución de (3.4), por integración directa de la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t,u,u')dt &= T\overline{p} + \int_0^T [h(t,u,u') - f(u')]dt \\ &\leq T\overline{p}_0 + \sqrt{T}\|k_1\|_2 + d\int_0^T |u'|\, dt \\ &\leq T\overline{p}_0 + \sqrt{T}\|k_1\|_2 + d2\sqrt{T}K_1 = K_2 T. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier solución u de (3.4) podemos elegir t_0 tal que $|u(t_0)| \leq \nu$. Así,

$$|u(t)| = \left| u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s)ds \right| \leq |u(t_0)| + \int_0^T |u'(t)|\, dt \leq \nu + 2\sqrt{T}K_1 =: R_0.$$

Así, $\|u\|_\infty \le R_0$.

Por la hipótesis 3, existe una función $k \in L^\infty(0,T)$ tal que para casi todo $t \in [0,T]$ y todo par $(x,y) \in [-R_0, R_0] \times \mathbb{R}$, vale que

$$|g(t,x,y)| \le k(t).$$

Ahora, si multiplicamos la ecuación (3.4) por u'', integramos y consideramos los datos de borde que tenemos para $u(t)$, obtenemos

$$\|u''\|_2^2 = \int_0^T [h(t,u,u') - g(t,u,u')]u''dt \le (\|k_1\|_2 + \|k\|_2)\|u''\|_2.$$

Luego, $\|u''\|_2 \le \|k_1\|_2 + \|k\|_2$. Además, como existe t_0 tal que $u'(t_0) = 0$, deducimos que

$$|u'(t)| \le \int_{t_0}^t |u''|\, ds \le \sqrt{T}\|u''\|_2 \le \sqrt{T}(\|k_1\|_2 + \|k\|_2) =: R_1.$$

Por lo tanto, $\|u'\|_\infty \le R_1$.

Afirmación 2: Sea $u \in \tilde{X}$ una solución de la ecuación

$$u'' + f(u') + k_1(t) = \overline{p},$$

entonces, u verifica

$$\|u\|_\infty \le \frac{T\sqrt{T}}{2\pi}\|k_1\|_2, \text{ y } \|u'\|_\infty \le \sqrt{T}\|k_1\|_2.$$

Si multiplicamos la ecuación por u'' e integramos, obtenemos

$$\|u''\|_2 \le \|k_1\|_2.$$

Por partes, obtenemos que

$$\int_0^T (u')^2 = -\int_0^T u''u \le \|u''\|_2\|u\|_2,$$

además, por la desigualdad de Wirtinger, sabemos que $\|u\|_2 \leq \frac{T}{2\pi}\|u'\|_2$. Por lo tanto

$$\|u'\|_2 \leq \frac{T}{2\pi}\|u''\|_2 \leq \frac{T}{2\pi}\|k_1\|_2.$$

Por otro lado, como $\overline{u} = 0$, existe $t_0 \in (0,T)$ tal que $u(t_0) = 0$. Así $u(t) = \int_{t_0}^{t} u'(s)ds$. Luego

$$\|u\|_\infty \leq \sqrt{T}\|u'\|_2 \leq \frac{T\sqrt{T}}{2\pi}\|k_1\|_2.$$

Veamos ahora la cota para u'. Como $u \in \tilde{X}$, existe $t_1 \in (0,T)$ tal que $u'(t_1) = 0$. Así $u'(t) = \int_{t_1}^{t} u''(s)ds$, por lo tanto

$$\|u'\|_\infty \leq \sqrt{T}\|u''\|_2 \leq \sqrt{T}\|k_1\|_2.$$

Afirmación 3: La ecuación (3.4) tiene solución para algún $\overline{p}_0$ lo suficientemente grande.

Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} u''(t) = -f(u') + \overline{p}_1 - k_1(t) \\ u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \end{cases} \tag{3.5}$$

Si consideramos $v = u'$, el problema resulta equivalente a

$$\begin{cases} v'(t) = -f(v) + \overline{p}_1 - k_1(t) \\ v(0) = v(T), \quad \int_0^T v(s)ds = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Si v es solución de (3.6), y $w(t) = \int_0^t v(s)ds$, para cada $c \in \mathbb{R}$, $u = c + w$ es una solución de (3.5).

Para cada $\tilde{h} \in \tilde{X}$, existe un único $H(\tilde{h})$ tal que $\overline{H(\tilde{h})} = 0$, $H(\tilde{h})(0) = H(\tilde{h})(T)$ y $[H(\tilde{h})]'(t) = \tilde{h}(t)$ para casi todo $t \in [0,T]$. Explícitamente,

$$H(\tilde{h})(t) = \int_0^t \tilde{h}(s)ds - \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t \tilde{h}(s)dsdt.$$

Lema 3.2.2 *Si v es solución del siguiente problema de punto fijo en $C([0,T])$*

$$v = H[-f(v) + \overline{f(v)} + \tilde{f}] \tag{3.7}$$

entonces v es solución de (3.6) con $\overline{p}_1 + k_1(t) = -\overline{g(v)} + \tilde{f}$.

Demostración Si v es solución de (3.7), entonces $\overline{v} = 0$ y $v(0) = v(T)$. Además, para casi todo $t \in [0,T]$, tenemos que $v' = -f(v) + \overline{f(v)} + \tilde{f}(t)$. □

Corolario 3.2.3 *Para cada $\tilde{f} \in \tilde{X}$ y cada solución v del problema de punto fijo (3.7), corresponde una $\overline{f} \in \mathbb{R}$ tal que el problema (3.6) tiene una solución con $\overline{p}_1 + k_1(t) = \overline{f} + \tilde{f}$.*

Teorema 3.2.4 *Supongamos que*

$$\frac{g(v)}{|v|} \to_{|v|\to 0} 0$$

uniformemente para casi todo $t \in [0,T]$. Entonces, para cada $\tilde{f} \in \tilde{X}$, corresponde una $\overline{f} \in \mathbb{R}$ tal que el problema (3.5) tiene una solución u, con $\overline{p}_1 + k_1(t) = \overline{f} + \tilde{f}$: y, por lo tanto, una familia de soluciones $u + c$, donde $c \in \mathbb{R}$ es arbitrario.

Demostración Sea $\mathcal{T} : C([0,T]) \to C([0,T])$ definida por

$$\mathcal{T}v(t) = \int_0^t [f(v(s)) - \overline{f(v)} + \overline{p}_1 - k_1(s)]ds.$$

Es fácil ver que $\mathcal{T}$ es compacto y que

$$\frac{\|\mathcal{T}(v)\|}{\|v\|} \to_{\|v\|\to 0} 0$$

sale de la suposición.

El resultado se sigue del teorema de punto fijo de Schauder. □

Estudiemos la ecuación
$$u'' + f(u') + k_1(t) = \overline{p}_1.$$
Ahora sabemos que existe $\overline{p}_1$ para el cual la ecuación tiene una familia de soluciones T-periódicas $u + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Si u_0 es el elemento de dicha familia tal que $\overline{u_0} = 0$, usando las acotaciones de la Afirmación 2

$$\|u_0\|_\infty \leq \frac{T\sqrt{T}}{2\pi}\|k_1\|_2, \text{ y } \|u_0'\|_\infty \leq \sqrt{T}\|k_1\|_2.$$

Fijemos $\overline{p} > \overline{p}_1 + \max\left\{g(t,x,y) : |x| \leq \frac{T\sqrt{T}}{2\pi}\|k_1\|_2, |y| \leq \sqrt{T}\|k_1\|_2\right\}$.

Entonces afirmamos que u_0 es una supersolución de (3.4). En efecto,

$$\begin{aligned} u_0'' + f(u_0') + g(t,u_0,u_0') - h(t,u_0,u_0') &\leq u_0'' + f(u_0') + g(t,u_0,u_0') + k_1(t) \\ &= \overline{p}_1 + g(t,u_0,u_0') < \overline{p}. \end{aligned}$$

Por otro lado, es posible hallar una subsolución ordenada considerando la ecuación

$$u'' + f(u') - k_1(t) = \overline{p}_2.$$

Si repetimos lo anterior, podemos encontrar $\overline{p}_2$ tal que la ecuación tiene una familia de soluciones T-periódicas de la forma $u + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Elegimos $u_1 := u - C$ con C lo suficientemente grande tal que para todo $t \in [0,T]$, $u_1(t) < u_0(t)$ y $g(t,u_1,u_1') + \overline{p}_2 > \overline{p}$ (esto es posible por la hipótesis 4). Entonces,

$$u_1'' + f(u_1') + g(t,u_1,u_1') - h(t,u_1,u_1') \geq u_1'' + g(u_1') + g(t,u_1,u_1') - k_1(t) = \overline{p}_2 + g(t,u_1,u_1') > \overline{p}.$$

Luego, la Afirmación 3 se sigue de la Afirmación 1 y del hecho que u_1 y u_0 son sub y supersoluciones ordenadas de la ecuación (3.4).

Afirmación 4: EL conjunto $\mathcal{M} = \{\overline{p} \in \mathbb{R} : (3.4) \text{ tiene solución}\}$ es acotado inferiormente.

Por la Afirmación 3, sabemos que $\mathcal{M}$ es no vacío. Sean $\overline{p}_0 \in \mathcal{M}$ y $u(t)$ una solución de (3.4) con $\overline{p} \leq \overline{p}_0$. Por la Afirmación 1 e integración directa de (3.4), tenemos que

$$T\overline{p} = \int_0^T [g(t,u,u') - h(t,u,u') + f(u')]dt,$$

luego,

$$\overline{p} \geq \overline{k}_2 - \overline{k}_1 - \sup\{|f(y)| : |y| < R_1\}.$$

Afirmación 5: Para todo $\overline{p}_0 \in \mathcal{M}$, el conjunto $\mathcal{M} \cap (-\infty, \overline{p}_0]$ es un intervalo compacto.

Definimos, como antes, las funciones

$$\hat{f}(y) := f(\delta(-R_1, y, R_1)),$$

y

$$\hat{g}(t,x,y) := g(t, \delta(-R_0, x, R_0), \delta(-R_1, y, R_1)),$$

donde R_0 y R_1 están dados por la Afirmación 1.

Si repetimos la prueba de la Afirmación 1 para el siguiente problema modificado

$$\begin{cases} u'' + \hat{f}(u') + \hat{g}(t,u,u') = \overline{p} + h(t,u,u') \\ \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T), \end{cases} \tag{3.8}$$

es claro que u es una solución de (3.4) con $\overline{p} \leq \overline{p}_0$ si y sólo si es una solución de (3.8).

Ahora, repitiendo la demostración de los teoremas anteriores, podemos ver que $\mathcal{M} \cap (-\infty, \overline{p}_0]$ es un intervalo cerrado. Finalmente, la Afirmacón 4 muestra que $\mathcal{M} \cap (-\infty, \overline{p}_0] = [a, \overline{p}_0]$, para algún a.

Afirmación 6: Si $p \in \mathcal{M}^\circ$, la ecuación (3.4) tiene dos soluciones.

Sean $\overline{p}_1$ y $\overline{p}_2 \in \mathcal{M}$ tales que $\overline{p}_1 < p < \overline{p}_2$, entonces, repitiendo la demostración de la Afirmación 2 del teorema anterior, probamos que la solución de (3.4) con $\overline{p} = \overline{p}_1$ es una supersolución estricta en el sentido de $W^{2,1}$, a la que llamamos $\beta(t)$. Una subsolución estricta en el sentido de $W^{2,1}$ y ordenada, $\alpha(t)$, puede obtenerse repitiendo el argumento que usamos en la demostración de la Afirmación 2. Luego, si escribimos la ecuación (3.4) como un problema de punto fijo $u = \mathcal{T}u$, usando el teorema de super y subsoluciones estrictas y ordenadas en el sentido de $W^{2,1}$, tenemos que

$$deg(I - \mathcal{T}, \Omega, 0) = 1,$$

donde $\Omega = \{u \in C^1([0,T]) : \alpha < u < \beta, |u'| < R_1\}$, y R_1 es el que obtuvimos en la Afirmación 1.

Supongamos que tenemos el operador T_λ definido por

$$T_\lambda : C^1([0,T]) \to C^1([0,T]), \quad v \mapsto u = T_\lambda v$$

donde u es la única solución de

$$u'' - u = -f(v') - v + \lambda(\overline{p} + h(t,v,v') - g(t,v,v')) - (1-\lambda)(v^2 + C)$$

y C es una constante a determinar.

Dado $\overline{p}_1$, sea u una solución de la ecuación de punto fijo $u = \mathcal{T}_\lambda u$, para $\overline{p} \leq \overline{p}_1$. Entonces u satisface

$$u'' + f(u') + \lambda g(t,u,u') + (1-\lambda)(u^2 + C) = \lambda(\overline{p} + h(t,u,u')). \tag{3.9}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} c\int_0^T [(u')^+]^2 dt &\leq \int_0^T [u''(u')^+ + f(u')(u')^+ + \lambda(g(t,u,u') - k_2(t))(u')^+ + (1-\lambda)(u^2 + C)(u')^+] dt \\ &= \lambda \int_0^T [\overline{p} + h(t,u,u') - k_2(t)](u')^+ dt \\ &\leq \lambda(|\overline{p}_1|\sqrt{T} + \|k_1\|_2 + \|k_2\|_2)\|(u')^+\|_2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Luego, $\|(u')^+\|_2 \leq \frac{1}{c}(|\overline{p}_1|\sqrt{T} + \|k_1\|_2 + \|k_2\|_2) := R_0$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Por lo tanto, $\|(u')^+\|_1 \leq \sqrt{T}R_0$. Además, como $0 = \int_0^T u' dt = \|(u')^+\|_1 - \|(u')^-\|_1$, entonces

$$\|u'\|_1 \leq 2\sqrt{T}R_0 := K_0.$$

Por otro lado, existe $t_0 \in (0,T)$ tal que $u(t)-\overline{u} = \int_{t_0}^{t} u'(s)ds$. Así, $|u(t)-\overline{u}| \leq T\|u'\|_1$. Luego
$$\|u-\overline{u}\|_\infty \leq T\|u'\|_1 \leq TK_0 := K_1.$$

Además, si integramos la ecuación (3.9), obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^T f(u')dt + \lambda\int_0^T g(t,u,u')dt + (1-\lambda)\int_0^T (u^2+C)dt &= \lambda(\overline{p}T + \int_0^T h(t,u,u')dt) \\ &\leq |\overline{p}_0|\,T + \sqrt{T}\|k_1\|_2.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Por la hipótesis 1, sabemos que $\left|\frac{f(u')}{u'}\right| \leq d$, entonces $|f(u')| \leq d\,|u'|$, así

$$\left|\int_0^T f(u')dt\right| \leq d\|u'\|_1 \leq dK_0.$$

Por lo tanto

$$\lambda\int_0^T g(t,u,u')dt + (1-\lambda)\int_0^T (u^2+C)dt \leq dK_0 + |\overline{p}_0|\,T + \sqrt{T}\|k_1\|_2 := R_2.$$

Pero, por la hipótesis 4,

$$\lim_{|\overline{u}|\to 0} \lambda\int_0^T g(t,u-\overline{u}+\overline{u},u')dt + (1-\lambda)\int_0^T ((u-\overline{u}+\overline{u})^2+C)dt = +\infty$$

uniformemente en $\lambda \in [0,1]$, entonces existe $K_2 > 0$ tal que $|\overline{u}| \leq K_2$.

Multiplicando la ecuación (3.9) por u'' e integrando, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|u''\|_2^2 &= \lambda\int_0^T [h(t,u,u')-g(t,u,u')]u''dt + (\lambda-1)\int_0^T u^2u''dt \\ &\leq (\|k_1\|_2 + \|k_1\|_2)\|u''\|_2 + (K_1+K_2)^2\sqrt{T}\|u''\|_2.\end{aligned}$$

Además, como existe t_1 tal que $u'(t_1) = 0$, deducimos que

$$|u'(t)| \leq \int_0^T |u''| \leq \sqrt{T}\|u''\|_2 \leq \sqrt{T}\left(\|k_1\|_2 + \|k_1\|_2) + (K_1 + K_2)^2\sqrt{T}\right) := R_3.$$

Así $\|u'\|_\infty \leq R_3$. Luego, $u \neq \mathcal{T}_\lambda u$ si $u \in \partial B_R(0)$, para R lo suficientemente grande.

Finalmente, si $\lambda = 0$ y $C > dK_0$, tenemos la ecuación $u'' + f(u') + u^2 + C = 0$. Si la integramos, obtenemos que

$$\int_0^T u^2 dt + C = \int_0^T f(u')dt \leq d\|u'\|_1 = dK_0.$$

Por la elección de C, obtenemos que $\int_0^T u^2 < 0$, absurdo. Entonces, no hay solución para $\lambda = 0$.

Además, podemos elegir $R > 0$ lo suficientemente grande tal que $\Omega \subset B_R(0)$ y que para todo $\overline{p} \leq \overline{p}_1$ el problema (3.4) no tenga solución en $\partial B_R(0) \subset C^1([0,T])$. Entonces, por la propiedad de invariancia por homotopía,

$$deg(I - \mathcal{T}, B_R(0), 0) = deg(I - \mathcal{T}_1, B_R(0), 0) = deg(I - \mathcal{T}_0, B_R(0), 0) = 0.$$

Y ahora, la existencia de una segunda solución en $B_R(0)\backslash\Omega$ se sigue de la propiedad de escisión del grado, ya que si no hubiera solución en $B_R(0)\backslash\Omega$, entonces

$$0 = deg(I - \mathcal{T}, B_R(0), 0) = deg(I - \mathcal{T}, \Omega, 0) = 1,$$

lo cual es absurdo. $\square$

Capítulo 4

Un caso particular: la ecuación del péndulo

4.1 La ecuación del péndulo

Consideremos la ecuación del péndulo con fricción

$$u'' + cu' + a \sin u = h(t) \tag{4.1}$$

donde, sin pérdida de generalidad, $c \geq 0$, $a > 0$, y h es T-periódica, para algún período T y correspondiente frecuencia $\omega := \frac{2\pi}{T}$. Por simplicidad, supongamos que h es continua.

Una solución T-periódica de la ecuación (4.1) es una solución $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $u(t+T) = u(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si integramos la ecuación (4.1) en $[0, T]$, vemos inmediatamente que una condición necesaria para la existencia de una solución T-periódica de la ecuación (4.1) es

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T h(t)dt \right| \leq a.$$

Algunas preguntas que pueden hacerse sobre el problema T-periódico (4.1) son las siguientes:

1. Determinar las propiedades que tiene el conjunto

$$\mathcal{M} = \{h \in C([0,T]) \ T\text{-periódica} : \ (4.1) \text{ tiene solución}\}.$$

   Es decir, la imagen del operador no lineal

$$\frac{d^2}{dt^2} + c\frac{d}{dt} + a\sin(\cdot)$$

   en el espacio de funciones C^2 T-periódicas.

2. Para $h \in \mathcal{M}$, estudiar la multiplicidad de las soluciones T-periódicas.

3. Para $h \in \mathcal{M}$, estudiar la estabilidad de las soluciones T-periódicas.

4. Buscar la existencia de otras soluciones y estudiar las propiedades del conjunto de todas las soluciones.

Respecto a la multiplicidad, es claro que si u es una solución T-periódica de la ecuación (4.1), lo mismo vale para $u = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, consideramos que u_1 y u_2 son soluciones T- periódicas distintas de la ecuación (4.1) si no difieren de un múltiplo de 2π.

4.1.1 El método de Poincaré

Sea $u(t,x)$ una solución de (4.1) tal que

$$u(0,x) = x_1, \ \ u'(0,x) = x_2,$$

y sea

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ x \mapsto [u(T,x), u'(T,x)].$$

Entonces $u(t,x)$ es una solución T-periódica de (4.1) si y sólo si x es un punto fijo de P. P se conoce como el *operador de Poincaré*. Observemos que P está definido en $\mathbb{R}^2$ pues $\sin u$ es una función acotada.

4.1.2 El método de Lyapunov-Schmidt

El método de Lyapunov-Schmidt se basa en el siguiente resultado elemental.

Lema 4.1.1 *$u = \overline{u} + \tilde{u}$ es una solución T-periódica de la ecuación (4.1) si y sólo si es solución del siguiente sistema*

$$\begin{aligned} \tilde{u}'' + c\tilde{u}' + a\sin(\overline{u} + \tilde{u}) &= \overline{a\sin(\overline{u} + \tilde{u})} + \tilde{h}(t), \\ \overline{a\sin(\overline{u} + \tilde{u})} &= \overline{h}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

En el método clásico de Lyapunov-Schmidt, la primer ecuación de (4.2) se resuelve para $\tilde{u}$ con $\overline{u}$ fijo (usando algún teorema de punto fijo, de la función implícita o la teoría de puntos críticos) y esa solución se reemplaza en la segunda ecuación , lo cual la convierte en una ecuación de bifurcación unidimensional. El sistema equivalente (4.2) se puede estudiar directamente con teoría de grado o de puntos críticos.

4.1.3 Método de super y subsoluciones

El método de super y subsoluciones para las soluciones periódicas de la ecuación (4.1) consiste en la siguiente afirmación.

Lema 4.1.2 *Si α y β son de clase C^2, T-periódicas y tales que, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

1. $\alpha(t) \leq \beta(t)$
2. $\alpha''(t) + c\alpha'(t) + a\sin\alpha(t) \geq h(t) \geq \beta''(t) + c\beta'(t) + a\sin\beta(t)$,

entonces (4.1) tiene al menos un solución T-periódica u tal que $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ y $|u'| < R$ para algún $R > 0$.

4.1.4 Teoría de puntos críticos

El punto de inicio para el uso de un método variacional o de la teoría de puntos críticos para las soluciones periódicas de la ecuación del péndulo es la siguiente observación clásica.

Lema 4.1.3 *u es una solución T-periódica de*

$$u'' + a \sin u = h(t) \tag{4.3}$$

si y sólo si u es un punto crítico del siguiente funcional

$$A_h : H_T^1 \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_0^T \left(\frac{u'^2(t)}{2} + a \cos u(t) + h(t)u(t) \right) dt.$$

Se pueden aplicar varias herramientas de la teoría de puntos críticos a la ecuación (4.3), como por ejemplo lema del paso de montaña, teoría de Lyusternik-Schnirelmann, teoría de Morse, minimización. Para este mtódo, se prueba que

1. A_h es acotado inferiormente,
2. A_h es T-periódico.

Por ser acotado inferiormente tiene un ínfimo, y por lo tanto, una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge al ínfimo. Por la periodicidad, se pueden sumar constantes de manera que la sucesión resulte acotada. Por lo tanto, tiene una subsucesión convergente a la solución.

4.1.5 Resultados válidos para cualquier c, a, T y h

Reescribimos la ecuación (4.1) de la siguiente manera

$$u'' + cu' + a \sin u = \overline{h} + \tilde{h}(t). \tag{4.4}$$

Los siguientes resultados son ahora clásicos, sus demostraciones usan el argumento de Lyapunov-Schmidt, teoría de grado topológico y super y subsoluciones.

Teorema 4.1.4 *Para cada $\tilde{h} \in L^1$, T-periódica, existen*

$$m_{\tilde{h}} = m_{\tilde{h}}(c, a, T) \leq M_{\tilde{h}} = M_{\tilde{h}}(c, a, T)$$

tales que vale lo siguiente

1. $-a \leq m_{\tilde{h}} \leq M_{\tilde{h}} \leq a$, *y* $-a = m_0 < M_0 = a$.
2. $m_{\tilde{h}_k} \to m_{\tilde{h}}$ *y* $M_{\tilde{h}_k} \to M_{\tilde{h}}$ *si* $\tilde{h}_k \to \tilde{h}$ *uniformemente en* $\mathbb{R}$.
3. *La ecuación (4.4) tiene al menos una solución T-periódica si y sólo si* $\overline{h} \in [m_{\tilde{h}}, M_{\tilde{h}}]$.
4. *La ecuación (4.4) tiene al menos dos soluciones T-periódicas distintas si* $\overline{h} \in (m_{\tilde{h}}, M_{\tilde{h}})$.
5. *Si* $m_{\tilde{h}} = M_{\tilde{h}}$, *la ecuación (4.4) tiene, para cada* $\xi \in \mathbb{R}$, *al menos una solución T-periódica u con* $\overline{u} = \xi$.

En particular, el conjunto $\mathcal{M}$ es cerrado y

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\tilde{h} \in \tilde{C}_T} [m_{\tilde{h}}, M_{\tilde{h}}] \times \left\{\tilde{h}\right\} \subset [-a, a] \times \tilde{C}_T,$$

donde $\tilde{C}_T = \left\{h \in C(\mathbb{R}) : h(t+T) = h(t) \text{ para casi todo } t \in \mathbb{R}, \text{ y } \overline{h} = 0\right\}$.

4.1.6 Problemas abiertos y resultados parciales: encontrar un elemento explícito en $[m_{\tilde{h}}, M_{\tilde{h}}]$

Teorema 4.1.5 *Si $c = 0$, entonces* $0 \in [m_{\tilde{h}}, M_{\tilde{h}}]$.

El teorema se prueba mostrando la existencia de un mínimo global para el funcional A_h, donde A_h es el definido anteriormente. La razón del éxito del método de minimización es que $A_h(u + 2\pi) = A_h(u)$ si y sólo si $\overline{h} = 0$. Esta propiedad y la coercividad de

A_h respecto de $\tilde{h}$ permiten obtener fácilmente una sucesión minimizante acotada para A_h. La propiedad de periodicidad de A_h cuando $\overline{h} = 0$ permite además el uso de un argumento de tipo Lusternik-Schnirelmann para probar directamente que A_h tiene dos puntos críticos distintos. Otra prueba distinta de este hecho usa el teorema generalizado de Poincaré-Birkoff.

Utilizando teoría de grado se ve que si $\overline{h} \in (m_{\tilde{h}}, M_{\tilde{h}})$, entonces el problema tiene dos soluciones, pero no se conocen prebas del Teorema 4.1.5 que usen teoría de grado.

Teorema 4.1.6 *Si* $\frac{c}{T} > \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\|\tilde{h}\|_2$*, entonces* $0 \in (m_{\tilde{h}}, M_{\tilde{h}})$

Este resultado se prueba utilizando argumentos de teoría de grado topológico.

La pregunta se extiende entonces a saber si $0 \in [m_{\tilde{h}}, M_{\tilde{h}}]$ para cada $c > 0$. Una respuesta negativa fue dada por un contraejemplo de Ortega, mejorado luego por uno de Alonso, muestra que para cada $c > 0$ existe $T_0 = T_0(a, c)$ tal que para cada $T > T_0$, $0 \notin [m_{\tilde{h}}, M_{\tilde{h}}]$.

4.1.7 Problemas abiertos y resultados parciales: probar o refutar la existencia de alguna $\tilde{h}$ para la cual $m_{\tilde{h}} = M_{\tilde{h}}$

Este problema sigue abierto. Se conocen los siguientes resultados parciales.

Teorema 4.1.7 *El conjunto* $\left\{\tilde{h} \in \tilde{C}_T : m_{\tilde{h}} < M_{\tilde{h}}\right\}$ *es un abierto denso.*

Esto se prueba utilizando varios argumentos, en particular con una versión generalizada del teorema de Sard-Smale. Por lo tanto, en general, $[m_{\tilde{h}}, M_{\tilde{h}}]$ es un intervalo no degenerado.

Teorema 4.1.8 *Para* $c = 0$*, el conjunto*

$$\left\{\tilde{h} \in \tilde{C}_T : \lim_{|\lambda|\to\infty} m_{\lambda\tilde{h}} = \lim_{|\lambda|\to\infty} M_{\lambda\tilde{h}} = 0\right\}$$

contiene un subconjunto abierto denso de $\tilde{C}_T$*.*

Esto fue probado por Kannan y Ortega, quien además dio un ejemplo que muestra que este conjunto no es abierto en general. La demostración utiliza un lema de Riemann-Lebesgue y técnicas de análisis asintótico.

4.2 Aproximación del conjunto $\mathcal{M}$

Supongamos que tenemos la siguiente ecuación más general

$$u'' + f(u') + A\sin(u) = \overline{p} + \tilde{p}(t). \tag{4.5}$$

Proposición 4.2.1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, $A \in \mathbb{R}$ y $K \in (0,\pi)$. Entonces para todo $\tilde{p} \in \tilde{Y}$ que verifique $\|\tilde{p}\|_2 \leq K\frac{2\pi}{T\sqrt{T}}$, existe $\overline{p}_0 \in \mathbb{R}$ (independiente de A) con*

$$|\overline{p}_0| \leq \max\left\{|f(y)| : |y| \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|\tilde{p}\|_2\right\}$$

tal que (4.5) tiene al menos una solución T-periódica para todo $\overline{p}$ tal que

$$|\overline{p} - \overline{p}_0| \leq A\sin\frac{\pi - K}{2}$$

y dos solucionces T-periódicas si la desigualdad es estricta.

Demostración Sea $\mathcal{T} = K(I-P)N$ donde $K : \tilde{Y} \subset L^2(0,T) \to \tilde{X} \subset C^1([0,T])$ es el inverso compacto del operador $Lu = u''$,

$$P : L^2(0,T) \to \mathbb{R}, \ \ u \mapsto Pu = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

es la proyección y

$$N : C^1([0,T]) \to L^2(0,T), \ \ u \mapsto Nu = \tilde{p} - f(u').$$

El operador $\mathcal{T}$ es compacto y acotado entonces, por el teorema de punto fijo de Schauder, existe $u_0 \in \tilde{X}$ tal que $u_0 = \mathcal{T}u_0$. Esta ecuación es equivalente a

$$u_0'' = \tilde{p} - f(u_0') + Pf(u_0). \tag{4.6}$$

Multiplicamos por u_0'' e integramos, obtenemos

$$\|u_0''\|_2^2 = \int_0^T \tilde{p}(t)u_0''(t)dt \leq \|\tilde{p}\|_2\|u_0''\|_2,$$

luego $\|u_0''\|_2 \leq \|\tilde{p}\|_2$.

Por otro lado, como $u_0 \in \tilde{X}$, por el teorema de Rolle, existe $t_0 \in (0,T)$ tal que $u_0'(t_0) = 0$. Entonces $u_0(t) = \int_{t_0}^t u_0'(s)ds$. Como $\int_0^T u_0(s)ds = 0$, $\int_0^T (u_0')^+ = \int_0^T (u_0')^- = \frac{1}{2}\int_0^T |u_0'|$. Entonces

$$|u_0(t)| \leq \int_{t_0}^t (u_0')^+ \leq \frac{1}{2}\int_{t_0}^t |u_0'| \leq \frac{1}{2}\int_0^T |u_0'| \leq \frac{1}{2}\sqrt{T}\|u_0'\|_2.$$

Además, por la desigualdad de Wirtinger, sabemos que $\|u_0\|_2 \leq \frac{T}{2\pi}\|u_0'\|_2$. Y, por partes, $\int_0^T (u_0')^2 = -\int_0^T u_0''u_0 \leq \|u_0''\|_2\|u_0\|_2$. Luego, tenemos que

$$\|u_0'\|_2^2 \leq \frac{\sqrt{T}}{2\pi}\|u_0'\|_2\|u_0''\|_2.$$

Entonces $\|u_0'\|_2 \leq \frac{T}{2\pi}\|u_0''\|_2$. Por lo tanto

$$\|u_0\|_\infty \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|u_0'\|_2 \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\frac{T}{2\pi}\|u_0''\|_2 = \frac{T\sqrt{T}}{4\pi}\|u_0''\|_2.$$

Así $\|u_0\|_\infty \leq \frac{T\sqrt{T}}{4\pi}\|\tilde{p}\|_2$.

Luego, para todo t_1 y t_2,

$$|u_0(t_1) - u_0(t_2)| \leq |u_0(t_1)| + |u_0(t_2)| \leq \frac{T\sqrt{T}}{2\pi}\|\tilde{p}\|_2 \leq K.$$

Sea $\overline{p}_0 := Pf(u_0')$. Por integración directa de (4.6), obtenemos que $T\overline{p}_0 = \int_0^T f(u_0')dt$. La cota para $|\overline{p}_0|$ se sigue de que $\int_0^T u_0'' = 0$, entonces $\int_0^T (u_0'')^+ = \int_0^T (u_0'')^- = \frac{1}{2}\int_0^T |u_0''|$. Por Rolle, existe $t_0 \in (0,T)$ tal que $u_0''(t_0) = 0$ por lo tanto

$$|u_0'(t)| = \left|\int_{t_0}^t u_0''(s)ds\right| \leq \int_{t_0}^t (u_0''(s))^+ ds \leq \frac{1}{2}\int_{t_0}^t |u_0''(s)|\, ds \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|u_0''\|_2.$$

Luego $\|u_0'\|_\infty \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|u_0''\|_2 \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|\tilde{p}\|_2$.

Elegimos constantes c_1 y c_2 tales que $\alpha(t) := u_0(t) + c_1 \in [\frac{\pi}{2} - \frac{K}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{K}{2}]$ y $\beta(t) := u_0(t) + c_2 \in [\frac{3\pi}{2} - \frac{K}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{K}{2}]$. También fijamos $\overline{p}$ tal que $|\overline{p} - \overline{p}_0| \leq A\sin\frac{\pi-K}{2}$. Veamos que α es subsolución de la ecuación (4.5), en efecto, por la elección que hicimos de c_1, tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha'' + f(\alpha') + A\sin\alpha &= u_0'' + f(u_0') + A\sin(u_0 + c_1) = \tilde{p} + \overline{p}_0 + A\sin(u_0 + c_1)\\ &\geq \tilde{p} + \overline{p} - A\sin\frac{\pi - K}{2} + A\sin(u_0 + c_1) \geq \tilde{p} + \overline{p}_0.\end{aligned}$$

Analogamente se prueba que β es supersolución de la ecuación. Además observemos que $\alpha(t) \leq \beta(t)$ para todo $t \in [0,T]$. Aplicando el resultado clásico de super y subsoluciones, obtenemos la existencia de al menos una solución T-periódica de la ecuación (4.5).

Finalmente, el resultado de multiplicidad es consecuencia directa del teorema visto en el capítulo anterior; ya que en nuestro caso, el intervalo $(a,b) = (\overline{p}_0 - A\sin\frac{\pi-K}{2}, \overline{p}_0 + A\sin\frac{\pi-K}{2})$.

$\square$

Si f es una función lineal, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.2.2 *Sean c y $A \in \mathbb{R}$, y $K \in (0,\pi)$. Entonces, para todo $\tilde{p} \in \tilde{Y}$ tal que $\|\tilde{p}\|_2 \leq K\frac{2\pi}{T\sqrt{T}}$ y cualquier $\overline{p}$ tal que*

$$|\overline{p}| \leq A\sin\frac{\pi - K}{2},$$

la ecuación

$$u'' + cu' + A\sin u = \overline{p} + \tilde{p}(t)$$

tiene al menos una solución T-periódica, y dos si la desigualdad es estricta.

Demostración Repetimos la prueba anterior, en este caso $\overline{p}_0 = P(cu_0') = cP(u_0') = 0$, pues u_0 es T-periódica. $\square$

Observación El corolario dice que, en particular, el conjunto

$$\{\tilde{p} : 0 \in (m_{\tilde{p}}, M_{\tilde{p}})\}$$

es un entorno del 0 en L^2

Capítulo 5

Aplicaciones a sistemas

5.1 Existencia de soluciones periódicas para ciertos sistemas no lineales

En este capítulo estudiaremos una generalización de lo visto en el Capítulo 3. Dado el problema

$$\left\{ \begin{array}{c} u'' + f(u') + g(t,u) = \overline{p} \\ u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T), \end{array} \right. \tag{5.1}$$

donde $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ y $g : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ son funciones continuas y $\overline{p}$ es un vector de $\mathbb{R}^N$. Además supondremos que f es acotada y g es acotada por una función de L^2 en el siguiente sentido: existe alguna $h \in L^2(0,T)$ tal que $|g(t,x)| \leq h(t)$ para casi todo $t \in [0,T]$ y todo $x \in \mathbb{R}^N$. Consideramos el conjunto

$$\mathcal{I} = \left\{ \overline{p} \in \mathbb{R}^N / \text{ el problema (5.1) tiene solución} \right\}$$

Proposición 5.1.1 *$\mathcal{I}$ es un conjunto no vacío, acotado y conexo de $\mathbb{R}^N$*

Demostración Veamos que el conjunto $\mathcal{I}$ es no vacío. Consideremos los espacios

$$\tilde{X} = \left\{ x \in H^2((0,T), \mathbb{R}^N) : x(0) = x(T),\ x'(0) = x'(T),\ \int_0^T x(t)dt = 0 \right\}$$

$$\tilde{Y} = \left\{ x \in L^2((0,T), \mathbb{R}^N) : \int_0^T x(t)dt = 0 \right\}$$

Sea $\mathcal{T} = K(I-P)N$, donde $K : \tilde{Y} \subseteq L^2(0,T) \to \tilde{X} \subseteq C^1([0,T])$ es el inverso compacto del operador $L : \tilde{X} \subseteq C^1([0,T]) \to \tilde{Y} \subseteq L^2(0,T)$, $Lx = -x''$,

$$P : L^2(0,T) \to \mathbb{R}^N \text{ es el proyector } x \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T x dt$$

y

$$N : C^1([0,T]) \to L^2(0,T), \quad x \mapsto f(x') + g(\cdot, x).$$

$\mathcal{T}$ es un operador compacto y acotado, entonces el teorema de punto fijo de Schauder nos da una solución de la ecuación $u = \mathcal{T}u$. Esta ecuación es equivalente a

$$-u'' = f(u') + g(t,u) - P(f(u') + g(\cdot, u))$$

$$u(0) = u(T), u'(0) = u'(T).$$

Lo que prueba que $\overline{p} = P(f(u') + g(\cdot, u)) \in \mathcal{I}$.

Veamos que $\mathcal{I}$ es acotado. Supongamos que u es una solución de (5.1), si integramos el sistema obtenemos

$$\int_0^T f(u')dt + \int_0^T g(t,u)dt = T\overline{p}$$

Así

$$T\,|overlinep| \le T\|f\|_\infty + \int_0^T |h(t)|\, dt \le T\|f\|_\infty + \|h\|_2 T^{\frac{1}{2}}$$

Luego, obtenemos que si la ecuación (5.1) tiene solución, entonces

$$|\overline{p}| \leq \|f\|_\infty + \frac{\|h\|_2}{\sqrt{T}}$$

Falta ver que $\mathcal{I}$ es conexo. Consideremos

$$X = \left\{ u \in C([0,T]) / \int_0^T u(t)dt = 0 \right\}$$

$K : X \to X$ tal que, para cada $\varphi \in X$, $u = K\varphi$ es la única solución en X de

$$u'' = \varphi$$

$$u(0) = u(T), u'(0) = u'(T),$$

$\overline{N} : C([0,T]) \to \mathbb{R}^N$, $\overline{N}u = \frac{1}{T}\int_0^T(-f(u') - g(t,u))dt$, $\tilde{N} : C([0,T]) \to X$ $(\tilde{N}u)(t) = -f(u') - g(t,u) - \overline{N}u$. Para cada $u \in C([0,T])$, $\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$, $\tilde{u} = u - \overline{u}$. Entonces, el problema (5.1) es equivalente a

$$\begin{cases} \tilde{u} = K\tilde{N}(\overline{u} + \tilde{u}) \\ \overline{N}(\tilde{u} + \overline{u}) = 0. \end{cases}$$

Sea

$$\Sigma = \left\{ (\overline{u}, \tilde{u}) \in \mathbb{R}^N \times X / \ \tilde{u} = K\tilde{N}(\overline{u} + \tilde{u}) \right\}$$

Afirmamos que para cada $A \in \mathbb{R}^N$, existe un subconjunto conexo $\Sigma_A \subseteq \Sigma$ con $proy_{\mathbb{R}^N}\Sigma_A = \{\overline{u}/ \ (\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma_A\} = tA$, donde $t \in [-1, 1]$.

En efecto, para cada $\overline{u}$ el operador $\mathcal{T} : X \to X$ $\mathcal{T}\tilde{u} = K\tilde{N}(\overline{u}, \tilde{u})$ es acotado y compacto. Entonces, por el Teorema de Schauder, existe $\tilde{u} \in X$ tal que $\tilde{u} = \mathcal{T}\tilde{u}$. Así, $proy_{\mathbb{R}^N}\Sigma = \mathbb{R}^N$. Además, como $\mathcal{T}$ es acotado, existe $R \geq 0$ tal que $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N \times B_R$.

Sean

$$K = \{(\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma / \ \overline{u} = tA \text{ para algún } t \in [-1, 1]\}$$

$$K_r = \{(\overline{u}, \tilde{u}) \in \Sigma / \ \overline{u} = r\}$$

El conjunto K es compacto y $K_{\pm A}$ son subconjuntos no vacíos y disjuntos de K.

Supongamos que no existe un subconjunto conexo Σ_A de K uniendo K_A y K_{-A}. Entonces existen compactos disjuntos $C_A \supset K_A$ y $C_{-A} \supset K_{-A}$ con $K = C_{-A} \cup C_A$. Así podemos encontrar un abierto $\Omega \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N / \ x = tA, \text{con } t \leq 1\right\} \times B_R$ tal que $C_{-A} \subseteq \Omega$ y $C_A \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Sea

$$\Omega_r = \{\tilde{u} \in X / \ (r, \tilde{u}) \in \Omega\}$$

Si definimos $F_r(\tilde{u}) = \tilde{u} - K\tilde{N}(\tilde{u} + r)$, entonces $deg(F_r, \Omega_r, 0)$ es constante si $F_r(\tilde{u}) \neq 0$ para toda $u \in \partial\Omega_r$. Supongamos que existe $\tilde{u} \in \partial\Omega_r$ tal que $F_r(\tilde{u}) = 0$, entonces $(r, \tilde{u}) \in \partial\Omega$. Así $(r, \tilde{u}) \notin C_A$. Pero $C_{-A} \subset \Omega$, con C_{-A} compacto, entonces $C_{-A} \cap \partial\Omega = \emptyset$, luego $(r, \tilde{u}) \notin K$; lo cual lleva a un absurdo, que provino de suponer la existencia de una tal $\tilde{u}$. Por lo tanto, $deg(F_r, \Omega_r, 0)$ es constante para todo r. Entonces, por propiedades del grado, tenemos que

$$1 = deg(F_{-A}, B_R, 0) = deg(F_{-A}, \Omega_{-A}, 0) = deg(F_A, \Omega_A, 0) = 0$$

que lleva a una contradicción. Luego $\mathcal{I}$ es conexo. □

En el caso de que la función $g(t, u)$ sea periódica en u podemos dar más información sobre el conjunto $\mathcal{I}$, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 5.1.2 *Supongamos que tenemos el sistema (5.1) con las mismas hipótesis de la proposición anterior, y además $g_j(t, u + T_j e_j) = g_j(t, u)$, donde $T_j \in \mathbb{R}$, para $j = 1, ..., N$ y $\{e_j\}_{j=1}^N$ es la base canónica de $\mathbb{R}^N$. Entonces $\mathcal{I}$ es no vacío, conexo y compacto.*

Demostración Por la Proposición 1.1, el conjunto $\mathcal{I}$ de $\overline{p}$ para los cuales el sistema tiene solución es no vacío, acotado y conexo en $\mathbb{R}^N$. Para ver que es un conjunto compacto, basta ver que es cerrado.

Afirmamos que si u es solución de (5.1), entonces la i-ésima coordenada de u' está acotada en norma infinito. En efecto, si consideramos la i-ésima ecuación de (5.1)

$$u_i'' + f(u')_i + g(t,u)_i = \overline{p}_i$$

la multiplicamos por u_i'' e integramos obtenemos la siguiente estimación

$$\|u_i''\|_2^2 \leq \|f\|_\infty \sqrt{T}\,\|u_i''\|_2 + \|h\|_2\,\|u_i''\|_2$$

Así

$$\|u_i''\|_2 \leq \sqrt{T}\,|f| + \|h\|_2$$

Por otro lado, como $u(0) = u(T)$, sabemos por el teorema de Rolle que existe $t_0 \in (0,T)$ tal que $u'(t_0) = 0$. Entonces

$$|u_i'(t)| = \left|\int_{t_0}^t u_i''(s)ds\right| \leq \sqrt{T}\,\|u_i''\|_2 \leq T\,|f| + \sqrt{T}\,\|h\|_2 := K_i$$

Luego $\|u_i'\|_\infty \leq K_i$ como queríamos ver.

Probemos que $\mathcal{I}$ es cerrado. Sea $(p^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{I}$ tal que $p^k \to p$ cuando $k \to +\infty$, y sean $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ las correspondientes soluciones de (5.1). Por periodicidad de g_i, podemos suponer (sumando un múltiplo de T_i si fuera necesario) que la i-ésima coordenada de $u^k(0)$ verifica que $u_i^k(0) \in [0, T_i]$. Entonces

$$\left|u_i^k(t)\right| = \left|u_i^k(0) + \int_0^t (u_i^k)'(s)ds\right| \leq T_i + T\left\|(u_i^k)'\right\|_\infty \leq T_i + TK_i$$

Así, la i-ésima coordenada de cada u^k está acotada en norma infinito, luego la sucesión $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H^2(0,T)$. Como $H^2(0,T)$ tiene clausura compacta en $C^1([0,T])$, existe una subsucesión convergente a una función $u \in C^1([0,T])$ y pasando al límite en (5.1) con $\overline{p} = p^k$, se sigue que u es solución de (5.1) con $\overline{p} = p$. $\square$

5.2 Geometría de $\mathcal{I}$

Estudiaremos la geometría del conjunto $\mathcal{I}$ para un problema particular. Por simplicidad, supondremos que $N = 2$. Tenemos la siguiente genrealización a sistemas del teorema de sub y supersoluciones. La demostración para el caso f Lipschitz se encuentra en [20], el caso en que f es continua se prueba como en [1].

Teorema 5.2.1 *Dado el sistema*

$$u'' = f(t, u),$$

bajo condiciones periódicas

$$u(0) = u(T), u'(0) = u'(T).$$

Donde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *es continua. Supongamos que existen* α *y* β *sub y supersoluciones periódicas del sistema respectivamente, es decir*

$$\alpha_j'' \geq f(t, A_1, ..., A_{j-1}, \alpha_j, A_{j+1}, ..., A_N)$$

$$\beta_j'' \leq f(t, A_1, ..., A_{j-1}, \beta_j, A_{j+1}, ..., A_N)$$
$$\forall A_i \in \mathbb{R} /\ \alpha_i(t) \leq A_i \leq \beta_i(t), i \neq j,$$

de manera que $\alpha_j \leq \beta_j$, $\forall j = 1, ..., N$. *Entonces el problema tiene al menos una solución* u*, con* $\alpha \leq u \leq \beta$.

Utilizaremos el resultado anterior para probar que, bajo ciertas hipótesis, podemos encontrar un rectángulo no trivial en el conjunto $\mathcal{I}$.

Proposición 5.2.2 *Supongamos que tenemos el siguiente problema:*

$$\begin{cases} u'' + g(u_1) + h(u_2) = \tilde{p}(t) + \overline{p} \\ u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T), \end{cases} \tag{5.2}$$

donde $u = (u_1, u_2)$ *y* $g = g(u_1)$, $h = h(u_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *son funciones continuas y periódicas, es decir, existen* $T_1, T_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *tales que* $g(u_1 + T_1) = g(u_1)$ *y* $h(u_2 + T_2) = h(u_2)$. *Supongamos que* $\overline{p}'$, $\overline{p}'' \in \mathcal{I}$ *de forma tal que* $\overline{p}'_i \geq \overline{p}''_i$, $i = 1, 2$ *y además*

$$K_1 = \sup_{\alpha_2 \leq u_2 \leq \beta_2} h_1 - \inf_{\alpha_2 \leq u_2 \leq \beta_2} h_1 \leq \frac{\overline{p}'_1 - \overline{p}''_1}{2}$$

$$K_2 = \sup_{\alpha_1 \leq u_1 \leq \beta_1} g_2 - \inf_{\alpha_1 \leq u_1 \leq \beta_1} g_2 \leq \frac{\overline{p}'_2 - \overline{p}''_2}{2}.$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, *y* $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ *son soluciones de (**??**) con* $\overline{p}'$ *y* $\overline{p}''$ *respectivamente.*

Entonces el conjunto $[\overline{p}''_1 + K_1, \overline{p}'_1 - K_1] \times [\overline{p}''_2 + K_2, \overline{p}'_2 - K_2] \subseteq \mathcal{I}$.

Demostración Como $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ son soluciones de (5.2) para $\overline{p} = \overline{p}'$ y $\overline{p} = \overline{p}''$ respectivamente, entonces

$$\alpha''_1 + g_1(\alpha_1) + h_1(\alpha_2) = \tilde{p}_1(t) + \overline{p}'_1$$

$$\alpha''_2 + g_2(\alpha_1) + h_2(\alpha_2) = \tilde{p}_2(t) + \overline{p}'_2$$

Así

$$\alpha''_1 + g_1(\alpha_1) + h_1(v) = \alpha''_1 + g_1(\alpha_1) + h_1(\alpha_2) + h_1(v) - h_1(\alpha_2) \geq \tilde{p}_1(t) + \overline{p}'_1 - H_1$$

$$\alpha''_2 + g_2(v) + h_2(\alpha_2) = \alpha''_2 + g_2(\alpha_1) + h_2(\alpha_2) + g_2(v) - g_2(\alpha_1) \geq \tilde{p}_2(t) + \overline{p}'_2 - H_2$$

Para todo $v \in C^1([0, T])/\alpha(t) \leq v \leq \beta(t)$.

Luego $\alpha(t)$ es subsolución de

$$u'' + g(u_1) + h(u_2) = \tilde{p}(t) + \overline{p}$$

$$u(0) = u(T), u'(0) = u'(T)$$

para todo $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ tal que $\overline{p}_i \leq \overline{p}'_i - K_i$, $i = 1, 2$

Análogamente, se prueba que $\beta(t)$ es supersolución de

$$u'' + g(u_1) + h(u_2) = \tilde{p}(t) + \overline{p}$$

$$u(0) = u(T), u'(0) = u'(T)$$

para todo $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ tal que $\overline{p}_i \geq \overline{p}_i'' + K_i$ para $i = 1, 2$.

Por periodicidad de g y h, podemos elegir los mínimos k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $\alpha_i \leq \beta_i + k_i T_i := \tilde{\beta}_i$, $i = 1, 2$ y siga valiendo la definición de K_1 y K_2. Así α y $\tilde{\beta}$ son, respectivamente, sub y supersolución de

$$\left\{ \begin{array}{c} u'' + g(u_1) + h(u_2) = \tilde{p}(t) + \overline{p} \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T), \end{array} \right.$$

para todo $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ tal que $\overline{p}_1'' + K_1 \leq \overline{p}_1 \leq \overline{p}_1' - K_1$ y $\overline{p}_2'' + K_2 \leq \overline{p}_2 \leq \overline{p}_2' - K_2$. Luego, por el teorema anterior, existe $u \in C^1([0, T])$, $\alpha(t) \leq u(t) \leq \tilde{\beta}(t)$, solución de (5.2). $\square$

5.3 Aplicación de un teorema de formas bilineales a un sistema de ecuaciones no lineales

Supongamos que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\left\{ \begin{array}{c} u'' + \nabla G(u) = \tilde{p}(t) + \overline{p} \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T) \end{array} \right. \tag{5.3}$$

donde $G \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\overline{p} \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{p} \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ de promedio nulo.

Queremos estudiar el conjunto

$$\mathcal{I}(\tilde{p}) = \{\overline{p} \in \mathbb{R}^n / \text{ la ecuación (5.8) tiene solución } \}.$$

Para ello emplearemos un teorema de formas bilineales, que requiere los siguientes lemas algebraicos previos y propiedades de series de Fourier.

Lema 5.3.1 *Sea V un espacio vectorial real y sea $H : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica en V. Supongamos que $V = X \oplus Z$ tal que $H(x,x) > 0$ si $x \in X, x \neq 0$ y $H(z,z) < 0$ si $z \in Z, z \neq 0$. Si $H(v,w) = 0$ para todo $v \in V$, entonces $w = 0$.*

Demostración Supongamos que V tiene dimensión infinita. Sea $w \in V$ y $H(v,w) = 0$ para todo $v \in V$.Como V es suma directa de X y Z, existe $x \in X$ y $z \in Z$ tales que $w = x + z$. Por la bilinealidad y simetría de H, tenemos que

$$0 = H(w, x - z) = H(x + z, x - z) =$$

$$H(x,x) - H(x,z) + H(z,x) - H(z,z) = H(x,x) - H(z,z)$$

entonces $H(x,x) = H(z,z)$, como $H(x,x) \geq 0$ y $H(z,z) \leq 0$, $H(x,x) = H(z,z) = 0$. Entonces, por las hipótesis del lema $x = z = 0$ y por lo tanto $w = 0$. $\square$

Lema 5.3.2 *Sea V un espacio vectorial tal que existen subespacios X e Y con $V = X \oplus Y$. Si Y es de dimensión finita y Z es un subespacio de V tal que $X \cap Z = \{0\}$ y $dim(Y) = dim(Z)$ entonces $V = X \oplus Z$.*

Demostración Consideremos la siguiente sucesión de aplicaciones lineales

$$Z \xrightarrow{i} V \xrightarrow{j} V/X$$

donde i es la inclusión y j es la proyección canónica de V en el espacio cociente V/X. Como el núcleo de la composición $j \circ i$ es $X \cap Z = \{0\}$, entonces $j \circ i$ es inyectivo. Pero como $V = X \oplus Y$ y $dim(Y) < \infty$,

$$dim(V/X) = dim(Y) = dim(Z)$$

así que $j \circ i$ es sobreyectivo. Sea $\theta = (j \circ i)^{-1}$. Por la conmutatividad del siguiente triángulo

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "Id"] & \\ V \arrow[rr, "\theta \circ j"'] & & Z \end{tikzcd}$$

sigue del teorema universal para grupos abelianos que

$$V = Im(i) \oplus Ker(\theta \circ j) = Z \oplus X$$

$\square$

Definición Sea $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, decimos que M es *positiva* si

$$vMv^t \geq 0, \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^n.$$

Y lo notamos $M \geq 0$.

Teorema 5.3.3 *Sea $Q : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, continua y $2\pi-$periódica. Supongamos que existen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétricas tal que*

$$A \leq Q(t) \leq B, \quad t \in [0, 2\pi], \tag{5.4}$$

es decir, $Q(t) - A$, $B - Q(t) \geq 0$, y vale

$$N_k^2 < \lambda_k \leq \mu_k < (N_k + 1)^2. \tag{5.5}$$

Para ciertos enteros $N_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$, en donde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ y $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ son los autovalores de A y de B respectivamente.

Entonces la única solución $2\pi-$periódica del sistema

$$w'' + Q(t)w = 0 \tag{5.6}$$

es la trivial.

Demostración Sean $v_1, \dots, v_n$ y $w_1, \dots, w_n$ los autovectores de A y B respectivamente tales que

$$Av_k = \lambda_k v_k, \quad \langle v_k, v_j\rangle = \delta_{kj},$$
$$Bw_k = \mu_k w_k, \quad \langle w_k, w_j\rangle = \delta_{kj},$$

para j, $k = 1, \dots, n$, donde $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$. Sea

$$V = \left\{x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : x \text{ es } 2\pi\text{-periódica}\right\}.$$

Definimos los siguientes subespacios X, Y y Z de V:

1. $x \in X$ si
$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t) w_k,$$
donde
$$f_k(t) = \sum_{r=N_k+1}^{\infty} (c_{k_r} \cos rt + d_{k_r} \sin rt),$$
donde N_k verifica (5.5), además f_k y la serie de sus derivadas término a término convergen uniformemente en $\mathbb{R}$;

2. $y \in Y$ si
$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t) w_k,$$
donde
$$g_k(t) = c_{k_0} + \sum_{r=1}^{N_k} (c_{k_r} \cos rt + d_{k_r} \sin rt).$$

3. $z \in Z$ si
$$z(t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(t) v_k,$$
donde
$$h_k(t) = p_{k_0} + \sum_{r=1}^{N_k} (p_{k_r} \cos rt + q_{k_r} \sin rt),$$
donde v_k son los autovectores de A.

Claramente $V = X \oplus Y$. En efecto, si $v \in V$, $v(t) = \sum_{k=1}^{n} \langle v(t), w_k \rangle w_k$. Como $\langle v(t), w_k \rangle \in V$, se sigue de la teoría de series de Fourier que $\langle v(t), w_k \rangle = g_k(t) + f_k(t)$ donde f_k y g_k están determinadas de forma única y tiene la forma dada anteriormente. Definimos la forma bilineal simétrica real H en V de la siguiente manera:

Si u, $v \in V$,

$$H(u,v) = \int_0^{2\pi} (\langle u'(t), v'(t)\rangle - \langle u(t), Q(t)v(t)\rangle)dt.$$

Afirmación 1: H es definida positiva en X.

En efecto, sea $x \in X$, por (5.4) tenemos que

$$H(x,x) \geq \int_0^{2\pi} (\langle x'(t), x'(t)\rangle - \langle x(t), Bx(t)\rangle)dt. \tag{5.7}$$

Pero, como $x \in X$, se escribe de la forma $x(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)w_k$, usando que $\{w_k\}_{k=1}^n$ es una base ortonormal de autovectores de B, la definición de f_k y la fórmula de Parseval, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (\langle x'(t), x'(t)\rangle - \langle x(t), Bx(t)\rangle)dt &= \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} f_k'(t)^2 dt - \sum_{k=1}^n \mu_k \int_0^{2\pi} f_k(t)^2 dt \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{r=N_k+1}^{\infty} \pi(r^2 - \mu_k)(c_{k_r}^2 + d_{k_r}^2) \geq 0\end{aligned}$$

donde la igualdad vale si $c_{k_r} = d_{k_r} = 0$, para $k = 1, \ldots, n$ y $r \geq N_k + 1$ ya que, de acuerdo con (5.5), $r^2 \geq \mu_k$ si $r \geq N_k + 1$. Por (5.7) vemos que $H(x,x) > 0$ si $x \in X$ y $x \neq 0$.

Afirmación 2: H es definida negativa en Z. En efecto, $z \in Z$, se escribe de la forma $z(t) = \sum_{k=1}^n h_k(t)v_k$. Por la definición de H, la de h_k, (5.4) y que $\{v_k\}_{k=1}^n$ es una base ortonormal de autovectores de A, se sigue que

$$\begin{aligned}
H(z,z) &\leq \int_0^{2\pi} (\langle z'(t), z'(t)\rangle - \langle z(t), Az(t)\rangle)dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} h_k'(t)^2 dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_0^{2\pi} h_k(t)^2 dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{N_k} \frac{2\pi}{2} r^2 (p_{k_r}^2 + q_{k_r}^2) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(2\pi p_{k_0}^2 + \sum_{r=1}^{N_k} \pi (p_{k_r}^2 + q_{k_r}^2) \right) \leq 0
\end{aligned}$$

donde la igualdad vale sólo si $p_{k_r} = 0$ para $k = 1 \dots, n$, $r = 0, \dots, N_k$ y $q_{k_r} = 0$ para $k = 1 \dots, n$, $r = 1, \dots, N_k$ pues, por (5.5), $r^2 < \lambda_k$ si $r \leq N_k$. Esto muestra que H es definida negativa en Z.

Como H es definida positiva en X y definida negativa en Z, tenemos que $X \cap Z = \{0\}$. Más aún, comparando $y(t)$ y $g_k(t)$ con $z(t)$ y $h_k(t)$, se ve que

$$dim(Y) = dim(Z) = \sum_{k=1}^{n} (2N_k + 1).$$

Como vimos anteriormente, $V = X \oplus Y$, aplicando el Lema **??** que demostramos previamente, se sigue que $V = X \oplus Z$. Podemos aplicar el Lema **??** para concluir que si $H(v, w) = 0$ para todo $v \in V$ entonces $w = 0$.

Para finalizar la demostración el teorema, supongamos que $w \in V$ satisface (5.6). Si $v \in V$ es arbitrario, entonces

$$\int_0^{2\pi} (-\langle v(t), w''(t)\rangle - \langle v(t), Q(t)w(t)\rangle)dt = 0.$$

Integrando el primer término por partes y considerando la periodicidad de v y w, tenemos que

$$H(v, w) = \int_0^{2\pi} (\langle v'(t), w'(t)\rangle - \langle v(t), Q(t)w(t)\rangle)dt = 0.$$

Como $v \in V$ es arbitraria, $w(t) = 0$ para todo t. Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

Observemos que si tenemos un período T cualquiera el teorema sigue valiendo, pero en vez de tener directamente los N_k, tendríamos $\frac{2\pi N_k}{T}$,para $N_k \in \mathbb{N}_0$.

Recordemos que queremos estudiar el conjunto

$$\mathcal{I}(\tilde{p}) = \{\overline{p} \in \mathbb{R}^n / \text{ la ecuación (5.8) tiene solución } \}.$$

Proposición 5.3.4 *Dado el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:*

$$\begin{cases} u'' + \nabla G(u) = \tilde{p}(t) + \overline{p} \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T), \end{cases} \tag{5.8}$$

donde $G \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\overline{p} \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{p} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ de promedio nulo. Supongamos que tenemos $\overline{p}_0 \in \mathcal{I}(\tilde{p})$, sea u_0 solución de (5.8) para $\overline{p} = \overline{p}_0$. Si existen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétricas tales que

$$A \leq d^2G(u_0) \leq B, \quad t \in [0,T]$$

de manera que si $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ y $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n$ son los autovalores de A y de B respectivamente, entonces existen enteros $N_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$ tal que

$$\left(\frac{2\pi N_k}{T}\right)^2 < \lambda_k \leq \mu_k < \left(\frac{2\pi(N_k+1)}{T}\right)^2.$$

Entonces, $\overline{p}_0$ es un punto interior de $\mathcal{I}(\tilde{p})$, es decir, existe V entorno abierto de $\overline{p}_0$ tal que $V \subset \mathcal{I}(\tilde{p})$.

Demostración Definamos el siguiente operador

$$F : H^2_{per} \times \mathbb{R}^n \to L^2, \quad (u, \overline{p}) \mapsto u'' + \nabla G(u) - \tilde{p} - \overline{p}.$$

Observemos que, como u_0 es solución para $\overline{p} = \overline{p}_0$,

$$F(u_0, \overline{p}_0) = 0.$$

Por otro lado, la diferencial de F respecto de u en $(u_0, \overline{p}_0)$ es

$$\begin{aligned} D_uF(u_0,\overline{p}_0)(\phi) &= \lim_{t\to 0} \frac{F(u_0+t\phi,\overline{p}_0)-F(u_0,\overline{p}_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{u_0''}+t\phi''+\nabla G(u_0+t\phi)-\cancel{\tilde{p}}-\cancel{\overline{p}_0}-\cancel{u_0''}-\nabla G(u_0)+\cancel{\tilde{p}}+\cancel{\overline{p}_0}}{t} \\ &= \phi'' + \lim_{t\to 0} \frac{\nabla G(u_0+t\phi)-\nabla G(u_0)}{t} \\ &= \phi'' + d^2G(u_0)\phi. \end{aligned}$$

Como suponemos que $d^2G(u_0)$ cumple las hipótesis del Teorema 5.3.3, $D_uF(u_0,\overline{p}_0) : H^2_{per} \to L^2$ es un monomorfismo. Por la Alternativa de Fredholm (ver [3]), $D_uF(u_0,\overline{p}_0)$ también resulta epimorfismo, luego es un isomorfismo. Entonces, por el Teorema 1.3.3, existe V entorno abierto de $\overline{p}_0$ y una función $u : V \to H^2_{per}$ tal que

$$F(u(\overline{p}),\overline{p}) = 0, \quad \text{para todo } \overline{p} \in V,$$

por lo tanto $V \subset \mathcal{I}(\tilde{p})$. □

Observación Otra forma de ver que $D_uF(u_0,\overline{p}_0)$ es un ismomorfismo es cuando el Hessiano de G es definido negativo estrictamente, en un conjunto de medida positiva. Puede verse multiplicando por u e integrando por partes.

Observación Supongamos que G es periódica en cada coordenada, podemos probar, utilizando métodos variacionales, que $0 \in I(\tilde{p})$. Para ello definimos el operador

$$A : \mathbb{R}^n \oplus H^1_0((0,T),\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto \int_0^T \left(\frac{(u')^2}{2} - G(u) + \tilde{p}u\right) dt$$

y procedemos como en el Lema 4.1.3 con el método de minimización.

Bibliografía

[1] Amster, P.: *Métodos Topológicos en el Análisis no Lineal*. Publicações matemáticas, IMPA (2009)

[2] Amster, P. y De Nápoli, P.: *Landesman-Lazer type conditions for a system of p-Laplacian like operators*. J. Math. Anal. and Appl. 326, No 2 (2007) 1236-1243.

[3] Conway, J.: *A Course in Functional Analysis*. 2da edición, Springer-Verlag, New York, 1990.

[4] De Coster, C. y Habets, P.: *Upper and Lower Solutions in the Theory of ODE Boundary Value Problems: Classical and Recent Results*. Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, F. Zanolin ed., Springer, 1996, CISM Courses and Lectures, 371.

[5] Habets, P. y Torres, P.J.: *Some multiplicity results for periodic solutions of a Rayleigh differential equation*. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Serie A: Mathematical Analysis 8, No. 3 (2001), 335-347.

[6] Krasnosel'skii A. M. y Mawhin, J.: *Periodic solutions of equations with oscillating nonlinearities*. Mathematical and Computer Modelling, 32 (2000), 1445-1455.

[7] E. Landesman y A. Lazer: *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*. J. Math. Mech. 19 (1970), 609-623.

[8] Lazer, A. C.: *A second look at the first result of Landesman-Lazer type Electron.* J. Diff. Eqns., Conf. 05, 2000, pp. 113-119.

[9] Lazer, A.C.: *Application of a lemma on bilinear forms to a problem in nonlinear oscillation.* Amer. Math. Soc., 33, (1972), 89-94.

[10] Lazer, A. y Leach, D.: *Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance.* Ann. Mat. Pura Appl. 82 (1969), 49-68.

[11] Lloyd, N. G.: *Degree Theory.* Cambridge University Press. London (1978)

[12] Mawhin, J.: *A simple approach to Brouwer degree based on differential forms.* Université de Louvain, Belgium (2005)

[13] Mawhin,J. y Willem, M.: *Critical point theory and Hamiltonian systems.* New York: Springer- Verlag, 1989. MR 90e58016.

[14] Mawhin, J.: *Seventy-five years of global analysis around the forced pendulum equation.* Proc. Equadiff 9, Brno 1997.

[15] Milnor, J.: *Topology from de Differential Viewpoint.* Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[16] Nirenberg, L.: *Generalized degree and nonlinear problems. Contributions to nonlinear functional analysis.* Ed. E. H. Zarantonello, Academic Press New York (1971), 1-9.

[17] Ortega, R. y Sánchez, L.: *Periodic solutions of forced oscillators with several degrees of freedom.* Bull. London Math. Soc. 34 (2002), 308-318.

[18] Schmitt, K. y Thompson, R. C.: *Nonlinear Analysis and Differential Equations, An Introduction.* University of Utah. November 11, 2004.

[19] Teschl, G: *Nonlinear functional analysis.* Lecture notes in Math, Vienna Univ., Austria, 2001.

[20] Yang, X.: *Upper and lower solutions for periodic problems*. Appl. Math. Comput. 137 (2003), no. 2-3, 413-422.