UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Autovalores de problemas singulares

María José Castro

Director: Juan Pablo Pinasco

Mayo de 2011

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis estudiaremos un problema de autovalores de la forma

$$\begin{array}{rcll}(-1)^{m-1}y^{(2m)}+\lambda p(t)y &=& 0 & t\in(a,\infty)\\ y^{(i)}(a,\lambda) &=& 0 & 0\le i\le m-1\\ \lim\limits_{t\to\infty} y^{(i)}(t,\lambda) &=& 0 & m\le i\le 2m-1.\end{array} \tag{1.1}$$

con λ un parámetro positivo y p una función continua no negativa que satisface la condición de integrabilidad

$$\int_a^\infty t^{2m-1}p(t)dt<+\infty.$$

En el capítulo 2, siguiendo el trabajo de Naito [13], demostraremos mediante el método de punto fijo que para todo $\lambda>0$ existe una única solución no oscilatoria y que tiende a una constante cuando $t\to\infty$. Posteriormente, para estas soluciones analizamos las propiedades de sus ceros.

Para finalizar, demostramos la existencia de una sucesión de autovalores $\{\lambda_k\}_k$ simples, y una sucesión de autofunciones cada una con exactamente k ceros en $[a,\infty)$.

En el capítulo 3 estudiaremos el problema en un intervalo finito,

$$\begin{array}{rcll}(-1)^{m}y^{(2m)}-\lambda p(t)y &=& 0 & t\in(a,b)\\ y(a)=y'(a)=\ldots=y^{m-1}(a) &=& 0 & \\ y(b)=y'(b)=\ldots=y^{m-1}(b) &=& 0. & \end{array}$$

El objetivo es encontrar cotas inferiores para el primer autovalor para luego encontrar cotas para el primer autovalor de los problemas estudiados en el Capítulo 2.

A partir de la caracterización variacional de los autovalores del problema en el intervalo (a,b), las funciones test que utilicemos en la misma nos darán cotas superiores para el primer autovalor. El objetivo de este capítulo es lograr una cota inferior para el primer autovalor del problema.

Para $m=1$ y pesos p monótonos Z. Nehari obtuvo en [14] la cota integral

$$\lambda_p^{1/2}\int_a^b p(t)dt\ge\frac{\pi}{2},$$

con λ_p el menor autovalor. Esta cota, para pesos monótonos, mejora las que se obtienen con otras desigualdades.

Para el caso $m > 1$ extenderemos la cota encontrada por Nehari, para lo cual nos conviene plantear la solución de nuestro problema en forma integral. Para esto introducimos en el capítulo la notación necesaria.

Luego, demostraremos un Lema principal, clave para lograr la desigualdad de Nehari. El mismo garantiza que

$$\inf_g \left\{ \lambda_g^{1/2} \int_a^b g(x)dx \right\} = \inf_s \left\{ \lambda_s^{1/2} \int_a^b s(x)dx \right\},$$

donde $g \in L^2([a,b])$ es una función monótona y s es una función simple con una sola discontinuidad.

En la última sección del capítulo se extiende esta cota para el caso del p-laplaciano.

En el capítulo 4 volvemos al problema en la semirrecta y daremos una estimación asintótica para el problema de autovalores

$$\begin{aligned} y'' + \lambda p(t)y &= 0 \qquad t \in (a,\infty) \\ y(a,\lambda) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} y'(t,\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Seguiremos parcialmente el trabajo de E. Hille [9]. Introduciremos la transformada de Prüfer, analizaremos las coordenadas radiales y angulares para el problema, y finalmente demostraremos que

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\int_a^b p^{1/2}(t)dt} \right)^2 [1 + o(1)], \quad n \to \infty.$$

El objetivo del capítulo 5 es estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión de autovalores del problema (1.1) para los problemas de mayor orden.

Para esto definimos la función $N(\lambda)$ que cuenta el número de autovalores menores o iguales que λ:

$$N(\lambda) = \#\{k \in N : \lambda_k \leq \lambda\}.$$

En primer lugar estudiaremos el comportamiento de la función $N(\lambda)$ para problemas en intervalos acotados, donde podemos aplicar la teoría de Sturm en problemas de segundo orden, y para el caso de problemas de cuarto orden la teoría desarrollada por Leigthon y Nehari en [11].

Cuando el problema de autovalores se plantea sobre intervalos de la forma (a,∞) buscaremos cotas superiores e inferiores para estimar $N(\lambda)$. Las cotas inferiores las lograremos utilizando información sobre problemas en intervalos cerrados, y las cotas superiores haciendo uso de la cota de Nehari para los autovalores.

Por último, en el capítulo 6 describimos algunas extensiones de estos resultados a distintos problemas.

Capítulo 2

Un problema de autovalores

2.1. Introducción

En este capítulo comenzaremos trabajando con ecuaciones de la forma

$$y^{(2m)} + \lambda p(t) y = 0, \qquad t \in (a, \infty) \tag{2.1}$$

donde $m \geq 1$ es número natural, λ es un parámetro positivo, y $p \in C([a, \infty))$ positiva, que satisface la condición

$$\int_a^\infty t^{2m-1} p(t) dt < +\infty. \tag{2.2}$$

Las soluciones de estas ecuaciones se pueden clasificar como oscilatorias o no oscilatorias, según que tengan un número finito o infinito de ceros. Para $m = 1$, la existencia de una solución de una clase u otra garantiza que todas las demás son de la misma clase: o son todas oscilatorias, o son todas no oscilatorias. Para m general, la situación es más complicada y dependerá de la función p.

El objetivo de este capítulo es demostrar que si la función p satisface la condición (2.2), entonces para cada $\lambda > 0$ existe una solución $y(t, \lambda)$ de la ecuación (2.1) no oscilatoria y acotada que cumple con la condición

$$\lim_{t \to \infty} y(t, \lambda) = 1. \tag{2.3}$$

Posteriormente, analizaremos algunas propiedades de los ceros de las soluciones $y(t, \lambda)$. Para el caso $m = 1$ disponemos de la teoría de Sturm Liouville y de la transformada de Prüfer. Para el caso $m \geq 2$ estos métodos no funcionan, y los resultados son menos precisos.

Finalmente, estudiaremos el siguiente problema de autovalores singular

$$\begin{aligned} y^{(2m)} + \lambda p(t) y &= 0 \qquad t \in (a, \infty) \\ y(a, \lambda) &= 0 \\ \lim_{t \to \infty} y^{(i)}(t, \lambda) &= 0 \qquad 1 \leq i \leq 2m - 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

y demostraremos que existe una sucesión de autovalores $\{\lambda_k\}_k$, donde λ_k se define como el ínfimo de los λ tales que hay una solución con k ceros en $[a, \infty)$.

Estos resultados se encuentran en el trabajo de M. Naito [13], y luego fueron extendidos por U. Elías en [4].

2.2. Existencia de soluciones

El primer paso será demostrar la existencia de soluciones del problema (2.1) en (a, ∞) cuando la función $p(t)$ cumple con la condición (2.2).

Teorema 2.2.1. *Supongamos que la función $p(t)$ satisface la condición (2.2). Entonces para cada $\lambda > 0$ la ecuación (2.1) tiene una única solución $y(t, \lambda)$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} y(t, \lambda) = 1.$$

Demostración. La demostración se obtiene utilizando un argumento de punto fijo. La dificultad principal es que la condición de borde está dada en infinito, y conviene estudiar la ecuación integral equivalente a la ecuación (2.1):

$$y(t, \lambda) = 1 - \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) y(s, \lambda) ds \tag{2.5}$$

Veamos existencia local en infinito. Fijemos un valor $\Lambda > 0$ arbitrario. Como la función $p(t)$ satisface (2.2) podemos elegir $T \geq a$ de manera tal que

$$\Lambda \int_T^\infty \frac{s^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) ds \leq \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

Sea $C_{\{T,\Lambda\}}$ al espacio de Banach formado por todas las funciones y continuas y acotadas en $[T, \infty) \times (0, \Lambda]$ con la norma

$$\| y \| = \sup \{ |y(t, \lambda)| : (t, \lambda) \in [T, \infty) \times (0, \Lambda] \}.$$

Definimos el subconjunto $Y \subseteq C_{\{T,\Lambda\}}$

$$Y = \left\{ y(t, \lambda) \in C_{\{T,\Lambda\}} : \frac{1}{2} \leq y(t, \lambda) \leq 1 \quad , \quad (t, \lambda) \in [T, \infty) \times (0, \Lambda] \right\}$$

y el operador M

$$(My)(t, \lambda) = 1 - \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) y(s, \lambda) ds, \tag{2.7}$$

para $(t, \lambda) \in [T, \infty) \times (0, \Lambda]$.

Veamos que este operador satisface $M(Y) \subseteq Y$ y es contractivo.

i) $M(Y) \subseteq Y$:

Tenemos que My es una función continua, veamos que

$$\frac{1}{2} \leq (My)(t,\lambda) \leq 1$$

si $(t,\lambda) \in [T,\infty) \times (0,\Lambda]$.

Como $y \in Y$ es positiva, entonces

$$\lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) y(s,\lambda) ds \geq 0.$$

Ahora,

$$(My)(t,\lambda) = 1 - \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) y(s,\lambda) ds \leq 1.$$

Para la otra cota, dado que $t \leq T$, $\lambda \leq \Lambda$ y $s - t < s$, el término que involucra la integral se puede acotar como

$$\begin{aligned}
\lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) y(s,\lambda) ds &\leq \Lambda \int_T^\infty \frac{s^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) y(s,\lambda) ds \\
&\leq \Lambda \int_T^\infty \frac{s^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) ds \\
&\leq \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

donde en las dos últimas desigualdades utilizamos que $y(s,\lambda) \leq 1$ para todo $(s,\lambda) \in [T,\infty) \times (0,\Lambda]$ y la cota (2.6).

Por lo tanto,

$$(My)(t,\lambda) = 1 - \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) y(s,\lambda) ds \geq \frac{1}{2}.$$

ii) M es una contracción:

Basta probar que para todo $x, y \in Y$ se tiene

$$\| My - Mx \| \leq \frac{1}{2} \| y - x \| .$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
|(My)(t,\lambda) - (Mx)(t,\lambda)| &= \left| \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) [y(s,\lambda) - x(s,\lambda)] ds \right| \\
&\leq \Lambda \int_T^\infty \frac{s^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) \left| y(s,\lambda) - x(s,\lambda) \right| ds \\
&\leq \frac{1}{2} \| y - x \|,
\end{aligned}$$

utilizando igual que antes la cota (2.6) y que $| \, y(s,\lambda) - x(s,\lambda) \, | \leq \|y - x\|$.

Luego, por el teorema de punto fijo de Banach, existe una única función $\widehat{y} \in Y$ tal que $(M\widehat{y})(t,\lambda) = \widehat{y}(t,\lambda)$, con lo cual

$$\widehat{y}(t,\lambda) = 1 - \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s)\widehat{y}(s;\lambda)ds$$

y esta función $\widehat{y}(t,\lambda)$ es solución de la ecuación (2.1) para valores de $\lambda \in (0,\Lambda)$ y t en $[T,\infty)$.

Además, como $\widehat{y}(t,\lambda)$ está acotada,

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s)\widehat{y}(s,\lambda)ds = 0,$$

lo cual implica

$$\lim_{t\to\infty} \widehat{y}(t,\lambda) = 1.$$

Para los valores de $t \in [a,T]$ podemos construirnos una solución $y(t,\lambda)$ que extienda a la otra en el $[a,\infty)$ de manera que $y(t,\lambda)$ y sus derivadas se peguen en $t = T$ con la solución $\widehat{y}(t,\lambda)$.

Luego, hemos encontrado una solución para (2.1) definida para todo $t \in [a,\infty)$ y que cumple con la condición (2.3). Como $\Lambda > 0$ era un número arbitrario, el teorema queda demostrado. □

2.3. Ceros de las soluciones

En esta sección cuando hablemos de la función $y(t,\lambda)$ nos estaremos refiriendo a la solución de la ecuación (2.1).

Nuestro objetivo es analizar las propiedades de los ceros de $y(t,\lambda)$. Veremos que la solución es no oscilatoria, tiene ceros simples, y un resultado de monotonía de los ceros dentro de cualquier intervalo fijo.

Las próximas dos proposiciones están contenidas en la demostración del Teorema 2.2.1, pero conviene aislarlas pues las utilizaremos más adelante.

Proposición 2.3.1. *Para todo $\Lambda > 0$ fijo, existe $T = T(\Lambda)$ tal que $y(t,\lambda)$ no tiene ceros en el intervalo $[T,\infty)$ para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$.*

Demostración. En la demostración del Teorema (2.2.1), fijado Λ, vimos que si

$$\Lambda \int_T^\infty \frac{s^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s)ds \leq \frac{1}{2},$$

la única solución de la ecuación (2.1) satisface

$$\frac{1}{2} \leq y(t,\lambda) \leq 1$$

para $(t,\lambda) \in [T,\infty)\times(0,\Lambda]$. Por lo tanto, no tiene ceros en el intervalo $[T,\infty)$. □

Proposición 2.3.2. *Existe $\lambda_* > 0$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_*)$, la solución $y(t, \lambda)$ no se anula en el intervalo $[a, \infty)$.*

Demostración. Como la función p satisface la condición (2.2), podemos elegir λ_* tal que

$$\lambda_* \int_a^\infty \frac{s^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) ds \leq \frac{1}{2}$$

Luego, existe una solución de la ecuación (2.1) que pertenece al conjunto

$$Y = \left\{ y(t, \lambda) \in C_{\{a, \lambda_*\}} : \frac{1}{2} \leq y(t, \lambda) \leq 1 \quad \forall (t, \lambda) \in [a, \infty) \times (0, \lambda_*] \right\}$$

y no se anula en $[a, \infty)$. □

Proposición 2.3.3. *Para cada $\lambda > 0$ la solución de la ecuación (2.1) es de la forma*

$$y(t, \lambda) = 1 - \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-1}}{(2m-1)!} p(s) y(s, \lambda) ds \qquad t \geq a.$$

La $i-$ésima derivada con $1 \leq i \leq (2m-1)$ es de la forma

$$y^{(i)}(t, \lambda) = (-1)^{i+1} \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-i-1}}{(2m-i-1)!} p(s) y(s, \lambda) ds,$$

y satisface

$$\lim_{t \to \infty} y^{(i)}(t, \lambda) = 0$$

Demostración. Se verifica directamente derivando. □

El siguiente lema es una variante del Teorema del Valor Medio que lo recordamos porque se utilizará para demostrar que los ceros de las soluciones son simples.

Lema 2.3.1. *Si $f \in C^1([t_0, \infty))$ satisface $f(t_0) = 0$ y $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$ entonces $f'(\xi) = 0$ para algún $\xi \in (t_0, \infty)$*

Proposición 2.3.4. *Para cada $\lambda > 0$, los ceros de $y(t, \lambda)$ son simples.*

Demostración. Vamos a demostrarlo por el absurdo. Supongamos que existe un $\lambda > 0$ tal que la solución correspondiente $y(t, \lambda)$ tiene al menos un cero múltiple en $[a, \infty)$.

Sea $t_f \in [a, \infty)$ el último cero de $y(t, \lambda)$. Para los valores de $t > t_f$ la solución $y(t, \lambda)$ es positiva, porque

$$\lim_{t \to \infty} y(t, \lambda) = 1.$$

Por la Proposición (2.3.3) tenemos que

$$y'(t, \lambda) = \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-2}}{(2m-2)!} p(s) y(s, \lambda) ds,$$

con lo cual en el intervalo $[t_f, \infty)$ esta derivada no se anula por ser positivo el integrando. Entonces, t_f es un cero simple de $y(t,\lambda)$.

Supongamos que t_0 es el último cero múltiple de $y(t,\lambda)$. Entonces,

$$y(t_0,\lambda) = y'(t_0,\lambda) = 0.$$

Además, supongamos también que $y(t,\lambda)$ tiene exactamente N ceros simples $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ en el intervalo (t_0, ∞), para cierto $N > 1$, donde $t_N = t_f$.

Consideremos los N intervalos $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, …, $[t_{N-1}, t_N]$. Como la función $y(t,\lambda)$ se anula en cada uno de los extremos de los intervalos, por el Teorema del Valor Medio existe $\theta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ para $i = 1, \ldots, N$ donde $y'(\theta_i, \lambda) = 0$. Como t_0 es un cero múltiple de $y(t,\lambda)$, la función $y'(t,\lambda)$ tiene al menos $N+1$ ceros en el intervalo $[t_0, t_f]$.

Sea t^* el último cero de $y'(t,\lambda)$ en el intervalo (t_0, t_f). Como

$$\lim_{t\to\infty} y'(t,\lambda) = 0,$$

existe un punto $t^{**} \in [t', \infty)$ donde $y''(t^{**}, \lambda) = 0$. Además, $t^{**} < t_f$, ya que por la Proposición (2.3.3) tenemos que

$$y''(t,\lambda) = (-1)\lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{2m-3}}{(2m-3)!} p(s) y(s,\lambda) ds,$$

y no se anula en $[t_f, \infty)$.

Entonces $t^{**} \in (t^*, t_f)$ y por lo tanto $y''(t,\lambda)$ tiene por lo menos $N+1$ ceros en (t_0, t_f) (N corresponden a los que están entre los ceros de la primer derivada).

Repitiendo este argumento podemos concluir que cada una de las derivadas $y^{(i)}(t,\lambda)$ con $i = 1, 2, \ldots, 2m-1$ tiene por lo menos $N+1$ ceros en el intervalo (t_0, t_f).

Para la última derivada $y^{(2m)}(t,\lambda)$ podemos garantizar la existencia de al menos N ceros en (t_0, t_f). Como la condición dada por la Proposición (2.3.3) vale hasta $i = 2m-1$, no podemos asegurar la existencia de un cero de la derivada $2m$ posterior al último cero de la derivada $2m-1$.

Utilizando la ecuación (2.1) resulta que

$$y^{(2m)}(t,\lambda) = -\lambda p(t) y(t,\lambda)$$

y por lo tanto $y(t,\lambda)$ tiene N ceros en el abierto (t_0, t_f). Pero además y se anula en t_f, y esto contradice nuestra suposición de que $y(t,\lambda)$ tenía sólo N ceros simples en el intervalo (t_0, ∞). □

Proposición 2.3.5 (Elías, [5]). *Sea $[\alpha, \beta] \subseteq [a, \infty]$ intervalo fijo. Entonces existe un $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in (\lambda^*, \infty)$ la solución $y(t,\lambda)$ tiene al menos un cero en el intervalo $[\alpha, \beta]$.*

Observación 2.3.1. *Si tomamos m intervalos disjuntos en $[a, \infty]$, existirá un λ^*_{max} tal que para todo $\lambda > \lambda^*_{max}$ la solución correspondiente $y(t,\lambda)$ tendrá por lo menos m ceros.*

2.4. Existencia de autovalores

Consideraremos ahora el problema de autovalores (2.4). En el siguiente teorema demostraremos la existencia de una sucesión creciente y no acotada de autovalores, y analizaremos los ceros de las autofunciones correspondientes a cada uno.

Teorema 2.4.1. *Si la función $p(t)$ satisface la condición (2.2), entonces existe una sucesión de números reales positivos $\{\lambda_k\}_k$ tales que el problema (2.4) tiene una solución $y_k(t,\lambda_k)$ no trivial, y*

(i) Los autovalores satisfacen $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots \nearrow +\infty$.

(ii) La autofunción y_k correspondiente a λ_k con $k \geq 1$ tiene exactamente $k-1$ ceros en el intervalo (a,∞), y además $y_k(a,\lambda_k) = 0$.

(iii) Si $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ con $k \geq 1$, la solución $y(t,\lambda)$ tiene a lo sumo k ceros en el intervalo (a,∞).

Demostración. Fijemos $k \geq 1$, y definamos el conjunto

$$\Lambda_k = \{\lambda \in (0,\infty) : y(t,\lambda) \text{ tiene al menos } k \text{ ceros en el intervalo } [a,\infty)\},$$

donde $y(t,\lambda)$ es la única solución de la ecuación (2.1) cuya existencia demostramos en el Teorema 2.2.1.

Este conjunto tiene las siguientes propiedades:

- *El conjunto Λ_k es no vacío:* para probar esto tomamos k intervalos disjuntos de la forma $[\alpha_i,\beta_i] \subset [a,\infty)$ con $1 \leq i \leq k$. Por la Proposición (2.3.5) existe para cada intervalo un λ_i^* tal que para todo $\lambda \in (\lambda_i^*,\infty)$ la solución $y(t,\lambda)$ tiene por lo menos un cero en dicho intervalo. Para $\lambda > \lambda^* = \max\{\lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^*\}$ tenemos por lo menos k ceros de la solución $y(t,\lambda)$ en $[a,\infty)$.

- *El conjunto Λ_k está acotado inferiormente:* por la Proposición (2.3.2) existe un $\lambda_* > 0$ tal que para $t \in [a,\infty)$ y $\lambda \in (0,\lambda_*)$ la solución $y(t,\lambda)$ no tiene ceros. Entonces para todo $\lambda \in \Lambda_k$ tenemos que
$$0 < \lambda_* < \lambda.$$

- *Existe el ínfimo de Λ_k*: es directo, pues el conjunto Λ_k está acotado inferiormente y es no vacío.

Llamemos λ_k al ínfimo de Λ_k. Tenemos, para todo k,

$$0 < \lambda_* \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1},$$

la última desigualdad como consecuencia de $\Lambda_{k+1} \subseteq \Lambda_k$.

Analicemos ahora los ceros de la solución $y_k = y(t, \lambda_k)$. Podemos tomar una sucesión decreciente $\{\lambda_k^j\}_{j\geq 1}$, con $\lambda_k^j \in \Lambda_k$, tal que

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_k^j = \lambda_k.$$

Para cada λ_k^j la solución $y(t, \lambda_k^j)$ correspondiente tiene al menos k ceros en el intervalo $[a, \infty)$, y consideremos los primeros k ceros de $y(t, \lambda_k^j)$:

$$a \leq t_k^j(1) < t_k^j(2) < \ldots < t_k^j(k) < \infty.$$

Por la Proposición (2.3.1), para λ_k^1 existe un valor T tal que la solución correspondiente no tiene ceros en el intervalo $[T, \infty)$. Como $\lambda_k^j \leq \lambda_k^1$, tenemos que los ceros $t_k^j(i)$ con $i = 1, \ldots, k$ están contenidos dentro del intervalo cerrado $[a, T]$, y el extremo superior no depende de k.

Por estar cada $t_k^j(i)$ en un compacto, tomando subsucesiones k veces, tenemos una subsucesión $\{\lambda_k^{j_h}\}_{h\geq 1}$ tal que

$$\lim_{j_h\to\infty} t_k^{j_h}(i) = t_k(i) \qquad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Los elementos de esta subsucesión verifican que $y(t_k^{j_h}(i), \lambda_k^{j_h}) = 0$ y se pueden elegir de manera que tengan el mismo orden que los ceros de $y(t, \lambda_k^j)$,

$$a < t_k^{j_h}(1) < t_k^{j_h}(2) < \ldots < t_k^{j_h}(k) < T.$$

Tomando límite para $j_h \to \infty$,

$$a \leq t_k(1) \leq t_k(2) \leq \ldots \leq t_k(k) \leq T.$$

La continuidad respecto de t y λ de la solución $y(t, \lambda)$ implica

$$y(t_k(i), \lambda_k) = \lim_{j_h\to\infty} y(t_k^{j_h}(i), \lambda_k^{j_h}) = 0,$$

es decir, $t_k(i)$ es un cero de $y(t, \lambda_k)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Demostraremos las siguientes afirmaciones:

- Los ceros $t_k(i)$ son distintos.
- El primer cero es $t_k(1) = a$.
- La solución $y(t, \lambda_k)$ tiene exactamente k ceros en $[a, \infty)$.

Veamos que todos los ceros $t_k(i)$ son distintos. Supongamos que existe un valor $m = 1, 2, \ldots, k-1$ tal que $t_k(m) = t_k(m+1)$. Entonces

$$y(t_k^{j_h}(m), \lambda_k^{j_h}) = y(t_k^{j_h}(m+1), \lambda_k^{j_h}) = 0.$$

Por el Teorema del Valor Medio existe $\xi^{j_h} \in (t_k^{j_h}(m), t_k^{j_h}(m+1))$ tal que $y'(\xi^{j_h}, \lambda_k^{j_h}) = 0$.

Como $t_k^{j_h}(m) < \xi^{j_h} < t_k^{j_h}(m+1))$, cuando $j_h \to \infty$ resulta

$$\lim_{j_h \to \infty} \xi^{j_h} = t_k(m),$$

y por dependencia continua de las soluciones,

$$y'(t_k(m), \lambda_k) = \lim_{j_h \to \infty} y'(\xi^{j_h}, \lambda_k^{j_h}) = 0.$$

Luego, $t_k(m)$ es un cero doble de $y(t, \lambda_k)$, pero por la Proposición (2.3.4) los ceros de la solución $y(t, \lambda_k)$ son simples, con lo cual

$$a \leq t_k(1) < t_k(2) < \cdots < t_k(k) \leq T.$$

Veamos ahora que el primer cero es $t_k(1) = a$. Supongamos que no, y es $a < t_k(1)$. Entonces la solución $y(t, \lambda_k)$ tiene por lo menos k ceros $t_k(1)$, $t_k(2)$, ..., $t_k(k)$ en el intervalo abierto (a, ∞). Por dependencia continua de la solución $y(t, \lambda)$ respecto de λ, para todo λ cercano a λ_k, la solución $y(t, \lambda)$ tiene por lo menos k ceros en (a, ∞). Esto contradice la propiedad de ínfimo de λ_k, y por lo tanto debe ser $a = t_k(1)$.

Veamos que $y(t, \lambda_k)$ tiene exactamente k ceros en $[a, \infty)$. Por lo anterior, tiene uno en a, y tiene al menos $k - 1$ ceros $t_k(2)$, ..., $t_k(k)$ en el intervalo (a, ∞). Si tuviera k o más ceros en (a, ∞), un argumento similar al anterior utilizando dependencia continua nos dice que para $\lambda < \lambda_k$ habría una solución con k ceros en (a, ∞), que contradice la propiedad de ínfimo de Λ_k. Luego, $y(t, \lambda_k)$ tiene exactamente $k - 1$ ceros en el intervalo (a, ∞).

Para completar la demostración del teorema, debemos demostrar las siguientes afirmaciones:

- Si $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ la solución $y(t, \lambda)$ tiene a lo sumo k ceros en el intervalo (a, ∞).
- Tenemos $\lim \lambda_k = \infty$ cuando $k \to \infty$.

Como $y(t, \lambda_k)$ tiene exactamente $k - 1$ ceros en (a, ∞), los autovalores son distintos, y forman una sucesión monótona creciente

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots.$$

Ahora, si $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ y la solución asociada $y(t, \lambda)$ tuviera al menos $k + 1$ ceros, entonces $\lambda \in \Lambda_{k+1}$ y por lo tanto debería ser $\lambda_{k+1} \leq \lambda$. Entonces, $y(t, \lambda)$ a lo sumo puede tener k ceros.

Veamos que $\lim \lambda_k = \infty$ cuando $k \to \infty$. Si no fuera así existiría λ_0 finito tal que

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \lambda_0.$$

Como antes, utilizando la Proposición (2.3.1), para todo λ cercano a λ_0 hay un $T_0 > 0$ tal que la solución $y(t, \lambda)$ no tiene ceros en el intervalo $[T_0, \infty)$.

Sea N un entero positivo arbitrario. Para todo $k \geq N$, la solución $y(t, \lambda_k)$ tiene por lo menos N ceros en el compacto $[a, T_0]$. Entonces, por dependencia continua igual que antes, encontramos que $y(t, \lambda_0)$ tiene por lo menos N ceros en el intervalo $[a, T_0]$. Ya que N es arbitrario, $y(t, \lambda_0)$ tiene un número infinito de ceros en el intervalo compacto $[a, T_0]$. Esto es una contradicción, y por lo tanto debe ser

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \infty.$$

El teorema queda demostrado. $\square$

Observación 2.4.1. *Observemos que para $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ no sabemos si la solución $y(t, \lambda)$ tiene necesariamente k ceros en el intervalo (a, ∞). Esto es cierto para problemas de segundo orden, pero no es cierto en general para problemas de mayor orden.*

Observación 2.4.2. *Podemos extender el Teorema 2.4.1 a la siguiente familia de problemas:*

$$\begin{array}{rcll} (-1)^{2m-j-1} y^{(2m)} + \lambda p(t) y & = & 0 & t \in (a, \infty) \\ y^{(i)}(a, \lambda) & = & 0 & 0 \leq i \leq j-1 \\ \lim\limits_{t \to \infty} y^{(i)}(t, \lambda) & = & 0 & j \leq i \leq 2m-1 \end{array}$$

La demostración es análoga y puede verse en [4].

Capítulo 3

Una desigualdad de Nehari

3.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar una cota inferior del primer autovalor del siguiente problema

$$\begin{aligned} (-1)^m y^{(2m)} - \lambda p(t) y &= 0 \qquad t \in (a,b) \\ y(a) = y'(a) = \ldots = y^{m-1}(a) &= 0 \\ y(b) = y'(b) = \ldots = y^{m-1}(b) &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde el peso $p \in L^1([a,b])$ es una función no negativa y λ es un parámetro.

En general, es difícil hallar cotas inferiores de autovalores pues en la caracterización variacional mediante el cociente de Rayleigh

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^1([a,b])} \frac{\int_a^b v'^2 dt}{\int_a^b p v^2 dt},$$

cualquier función test que se utilice da cotas superiores para el primer autovalor.

Una primer cota inferior se obtiene utilizando teoremas tipo Sturm si el peso $p \in L^\infty$. Aún para pesos acotados, perturbando localmente el peso, se obtienen cotas muy diferentes y alejadas del autovalor. Por este motivo, es interesante considerar cotas integrales. La primera de tales cotas fue obtenida con la desigualdad de Lyapunov [12] en 1888, y para $m = 1$ se tiene

$$\frac{4}{(b-a)\int_a^b p(t)dt} \leq \lambda_1, \tag{3.2}$$

donde λ_1 es el primer autovalor con condición de borde Dirichlet. Esta desigualdad se extiende a problemas de mayor orden, entre muchos otros, y a los autovalores superiores. Lamentablemente, cuando se consideran intervalos de gran longitud, la cota inferior tiende a cero, y no puede utilizarse para estimar los autovalores de problemas como el que vimos en el Capítulo 2.

En [14], para $m = 1$, Zeev Nehari obtuvo la siguiente cota para p monótona:

$$\frac{\pi/2}{\int_a^b \sqrt{p(t)}dt} \leq \lambda_1^{1/2}.$$

Esta desigualdad se puede extender a $m > 1$, como veremos al final del capítulo.

Observemos que, a partir de la desigualdad de Nehari y utilizando la desigualdad de Hölder,

$$\left(\int_a^b \sqrt{p(t)}dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b p(t)dt,$$

con lo cual tendríamos una cota mejor que la que se obtiene con la desigualdad de Lyapunov para pesos monótonos.

Para obtener la desigualdad de Nehari conviene plantear el problema en forma integral.

En primer lugar veamos como podemos expresar las soluciones de nuestro problema en forma integral.

Consideramos el problema general

$$\begin{array}{rcll} [Dy](t) & = & f(t) & , \quad t \in (a,b) \\ y^{(i)}(a) & = & 0 & , \quad i = 0, \cdots, m-1 \\ y^{(i)}(b) & = & 0, & \end{array} \tag{3.3}$$

con $f \in C([a,b])$ y D un operador diferencial.

El siguiente teorema nos asegura la existencia de una función G, conocida como la *Función de Green*, para el operador diferenciación D tal que la solución del problema (3.3) se puede expresar como

$$y(t) = \int_a^b G(t,x)f(x)dx.$$

Teorema 3.1.1. *(Ver [2]) Para el problema* (3.3) *existe una única función $G = G(t,x)$ para $a \leq t, x \leq b$ con las siguientes propiedades:*

- *Para $k = 0, \cdots, 2m-2$ existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial^k G}{\partial^k t}$ y son continuas para todo $(t,x) \in [a,b] \times [a,b]$.*

- *Para $k = 2m-1, 2m$ existen las derivadas paraciales $\dfrac{\partial^k G}{\partial^k t}$ y son continuas en (t,x) cuando $a \leq t \leq x \leq b$ y $a \leq x \leq t \leq b$.*

- *Para $k = 2m-1$, y para $x \in [a,b]$*

$$\lim_{t\to x^+} \frac{\partial^k G(t,x)}{\partial^k t} - \lim_{t\to x^-} \frac{\partial^k G(t,x)}{\partial^k t} = (-1)^m.$$

- *Como función de t, $G(t,x)$ satisface $[DG](t,x) = 0$ si $t \neq x$.*

- *Como función de t, $G(t,x)$ satisface las condiciones de borde del problema* (3.3) *para $a \leq x \leq b$.*

Observación 3.1.1. *Si en el problema* (3.3) *tomamos $Dy = (-1)^m y^{(2m)}$ la funcion de Green es simétrica.*

Ahora, si $G(t,x)$ la función del Green correspondiente al operador $Dy = (-1)^m y^{(2m)}$ podemos expresar la autofunción correspondiente al autovalor λ_1 del problema (3.1) como

$$y_1(t) = \lambda_1 \int_a^b G(t,x)p(x)y_1(x)dx,$$

y si multiplicamos la ecuación anterior por $\sqrt{p(t)}$, llamando $u(x) = y(x)\sqrt{p(x)}$, nos queda

$$u_1(t) = \lambda_1 \int_a^b G(t,x)\sqrt{p(t)}\sqrt{p(x)}u_1(x)dx. \tag{3.4}$$

Los problemas (3.1) y (3.4) son equivalentes, y los utilizaremos indistintamente según convenga.

En la Sección 2 introducimos la notación necesaria para demostrar, en la Sección 3, el lema clave que permite probar la desigualdad de Nehari, que enunciaremos directamente para ecuaciones integrales. En la Sección 4 veremos la demostración para $m = 1$, y en la Sección 5, el caso general.

3.2. Una ecuación integral

Como primer paso vamos a estudiar un caso más general, del cual (3.4) es un caso particular.

Sea $g \in L^2$ una función no negativa y sea $K \in L^2([a,b] \times [a,b])$ acotada y simétrica, tal que el operador lineal $T_K : L^2 \to L^2$,

$$[T_K u](t) = \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u(x)dx$$

sea definido positivo. Esto es,

$$\langle T_K u, u\rangle = \int_a^b \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u(t)u(x)dxdt > 0.$$

Llamaremos a la función K el *núcleo* del operador T, y a la función g un *peso*.

Diremos que μ es un *autovalor* del operador integral T_K y $u_\mu \in L^2([a,b])$ con $\|u_\mu\|_2 = 1$ la *autofunción* correspondiente a μ, normalizada, si se cumple

$$\int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u_\mu(x)dx = \mu u_\mu(t).$$

El operador T es lineal, compacto, y simétrico. El teorema espectral de von Neumann nos garantiza la existencia de una sucesión de autovalores reales y positivos $\{\mu_j\}_j$, ver Teorema 7 [6], pag. 645. Esta sucesión es monótona decreciente y tiende a cero. Además, las autofunciones son una base ortogonal de L^2.

En la demostración del teorema espectral se observa que los autovalores se caracterizan por el cociente de Rayleigh,

$$\mu_1 = \sup_{\{u\in L^2:\|u\|_2=1\}} \int_a^b \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u(t)u(x)dxdt.$$

Observemos que si G es la función de Green del Problema (3.1), entonces

$$K = G, \text{ y } g = \sqrt{p},$$

y tenemos además

$$\mu_1 = \lambda_1^{-1}.$$

3.2.1. Notación

Como sólo nos interesa acotar el primer autovalor del Problema (3.1) en función de diferentes pesos, vamos a introducir una notación más conveniente para los autovalores y autofunciones que refleje la dependencia respecto de los pesos.

Indicaremos con λ_p al primer autovalor del Problema (3.1), y u_p la autofunción correspondiente, si el peso es p.

Dado un peso g, llamaremos

$$J(g,g;u) = \int_a^b \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u(t)u(x)dxdt. \tag{3.5}$$

Tenemos

$$\mu_g = \int_a^b \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u_g(t)u_g(x)dxdt,$$

y, si $\|u\|_2 = 1$,

$$J(g,g;u) \le J(g,g;u_g) = \mu_g. \tag{3.6}$$

En particular, para $K = G$,

$$J(g,g;u) \le J(g,g;u_g) = \mu_g = \lambda_g^{-1}.$$

Observación 3.2.1. *En el caso de la ecuación diferencial sabemos que la autofunción es positiva. Para una ecuación integral arbitraria, tenemos que*

$$\begin{aligned}
\mu_g &= \sup_{\{u\in L^2:\|u\|_2=1\}} \int_a^b \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u(t)u(x)dxdt \\
&= \int_a^b \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u_g(t)u_g(x)dxdt \\
&\le \left| \int_a^b \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u_g(t)u_g(x)dxdt \right| \\
&\le \int_a^b \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)|u_g(t)||u_g(x)|dxdt,
\end{aligned}$$

con lo cual $|u_g|$ sería autofunción del mismo autovalor.

Entonces, podemos suponer que u_g es no negativa.

Dada una autofunción u_r no negativa correspondiente a un peso $r \in L^2$, entonces $J(f,g;u_r)$ es una forma bilineal, y define un producto escalar en $L^2([a,b])$. En particular, tenemos la desigualdad de Cauchy Schwartz,

$$J(f,g;u_r) \leq [J(f,f;u_r)J(g,g;u_r)]^{1/2}.$$

Observación 3.2.2. *Para ver que $J(\cdot,\cdot;u_r)$ es definido positivo, observemos que*

$$J(g,g;u_r) = \langle T_K u_r, u_r\rangle = \int_a^b \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u_r(t)u_r(x)dxdt > 0$$

pues T_K era un operador definido positivo, y estamos intercambiando los papeles de g (que antes era no negativa, pero ahora sólo está en L^2) y de u (que antes era una función de L^2 y ahora es no negativa).

3.3. El lema principal

Sea $g \in L^2([a,b])$ monótona y no negativa, vamos a considerar el siguiente problema de autovalores en $L^2([a,b])$:

$$\mu u(t) = \int_a^b K(t,x)g(t)g(x)u(x)dx. \tag{3.7}$$

Vamos a definir los siguientes conjuntos con los que vamos a trabajar:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{g : g \in L^2([a,b]) \text{ no negativa y monótona}\} \\ A_2 &= \{s : s \in L^2([a,b]) \text{ simple, monótona, con una sola discontinuidad en } [a,b]\}. \end{aligned}$$

El siguiente lema es clave para demostrar la desigualdad de Nehari:

Lema 3.3.1. *Para el problema de autovalores (3.7), tenemos*

$$\inf_{g\in A_1}\left\{\mu_g^{-1/2}\int_a^b g(x)dx\right\} = \inf_{s\in A_2}\left\{\mu_s^{-1/2}\int_a^b s(x)dx\right\}. \tag{3.8}$$

Demostración. Para demostrar el lema, vamos a utilizar un conjunto auxiliar A, definido como,

$$A = \{r : r \in L^2([a,b]) \text{ simples y monótonas}\},$$

y demostraremos primero que

$$\inf_{g\in A_1}\left\{\mu_g^{-1/2}\int_a^b g(x)dx\right\} = \inf_{r\in A}\left\{\mu_r^{-1/2}\int_a^b r(x)dx\right\}.$$

Dada $g \in A_1$, y $\varepsilon > 0$, existe una función simple r, con igual monotonía que g tal que

$$\int_a^b [g(x) - r(x)]^2\, dx < \varepsilon^2.$$

Por Hölder,

$$\Big|\int_a^b g(x)dx - \int_a^b r(x)dx\Big|^2 \leq \int_a^b [g(x)-r(x)]^2\,dx \int_a^b dx < (b-a)\cdot\varepsilon^2,$$

con lo cual,

$$\Big|\int_a^b g(x)dx - \int_a^b r(x)dx\Big| = O(\varepsilon). \tag{3.9}$$

Si reemplazamos g por r, tenemos por (3.5)

$$\begin{aligned} J(r,r;u_r) &= J(g+(r-g), g+(r-g); u_r) \\ &= J(g,g;u_r) + J(r-g,r-g;u_r) + 2J(g,r-g;u_r). \end{aligned}$$

Acotemos cada uno de los términos del lado derecho de la igualdad anterior. Para el primero tenemos, por (3.6),

$$J(g,g;u_r) \leq \mu_g.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} J(r-g,r-g;u_r) &= J(g-r,g-r;u_r) \\ &= \int_a^b\int_a^b K(t,x)[(g-r)(t)][(g-r)(x)]u_r(t)u_r(x)dxdt \\ &\leq \int_a^b\int_a^b |K(t,x)u_r(t)u_r(x)||(g-r)(t)(g-r)(x)|dxdt \\ &\leq \left[\int_a^b\int_a^b [K(t,x)u_r(t)u_r(x)]^2 dxdt\right]^{1/2} \\ &\qquad\cdot\left[\int_a^b\int_a^b [(g-r)(t)]^2[(g-r)(x)]^2 dxdt\right]^{1/2} \\ &= \left[\int_a^b\int_a^b [K(t,x)u_r(t)u_r(x)]^2 dxdt\right]^{1/2}\cdot\int_a^b [(g-r)(x)]^2\,dx \\ &< \left[\int_a^b\int_a^b [K(t,x)u_r(t)u_r(x)]^2 dxdt\right]^{1/2}\cdot\varepsilon^2 = M_1\cdot\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$J(g-r,g-r;u_r) = O(\varepsilon^2).$$

Por último, como J define un producto escalar, por Cauchy Schwartz tenemos que

$$\begin{aligned} J^2(g,g-r;u_r) &\leq J(g,g;u_r)\cdot J(g-r,g-r;u_r) \\ &\leq \mu_g\cdot J(g-r,g-r;u_r) \\ &= O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

y por lo tanto $J(g,g-r;u_r) = O(\varepsilon)$.

Entonces,

$$\mu_r \le \mu_g + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon).$$

Si intercambiamos el papel de g y r tenemos

$$\mu_g \le \mu_r + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon).$$

Luego,

$$|\mu_r - \mu_g| = O(\varepsilon). \tag{3.10}$$

Hasta ahora tenemos que si r y g están cerca en L^2, también lo estarán sus integrales y los primeros autovalores asociados a cada peso. Luego, demostramos que

$$\inf_{g\in A_1}\left\{\mu_g^{-1/2}\int_a^b g(x)dx\right\} = \inf_{r\in A}\left\{\mu_r^{-1/2}\int_a^b r(x)dx\right\}. \tag{3.11}$$

Veamos ahora que podemos reemplazar A por A_2, las funciones simples y mónotonas, con una sola discontinuidad en $[a, b]$.

Supongamos que r es creciente. Sean $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m < b$ los puntos de discontinuidad de la función $r(x)$.

Sea r_j el valor de la función r en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$. Definimos

$$\begin{aligned} C_1 &= r_1 \\ C_j &= r_j - r_{j-1} \quad j = 2, \ldots, m \end{aligned}$$

La función r la podemos expresar como combinación de funciones características:

$$r(x) = \sum_{j=1}^m C_j \chi_{[x_j,b]} = \sum_{j=1}^m C_j(b - x_j)\frac{\chi_{[x_j,b]}}{b - x_j} = \sum_{j=1}^m c_j s_j,$$

con $c_j = C_j(b - x_j)$ y $s_j = \frac{\chi_{[x_j,b]}}{b-x_j}$ función simple con una sola discontinuidad y con integral igual a 1.

Luego,

$$\int_a^b r(x)dx = \int_a^b \sum_{j=1}^m c_j s_j(x)dx = \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b s_j(x)dx = \sum_{j=1}^m c_j.$$

Sea μ_{s_j} el mayor autovalor del problema (3.7) con peso $p = s_j$. Podemos relacionar estos autovalores con μ_r de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mu_r = J(r,r;u_r) &= \int_a^b \int_a^b K(t,x) \left(\sum_{i=1}^m c_i s_i(t)\right) \left(\sum_{j=1}^m c_j s_j(x)\right) u_r(t) u_r(x) dx dt \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j \int_a^b \int_a^b K(t,x) s_i(t) s_j(x) u_r(t) u_r(x) dx dt \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j J(s_i, s_j; u_r) \\
&\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j \left[J(s_i, s_i; u_r) J(s_j, s_j; u_r)\right]^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m c_j \left[J(s_j, s_j; u_r)\right]^{1/2}\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^m c_j \mu_{s_j}^{1/2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Si llamamos $\mu_s = \max[\mu_{s_1}, \ldots, \mu_{s_m}]$,

$$\sum_{j=1}^m c_j \mu_{s_j}^{1/2} \leq \sum_{j=1}^m c_j \mu_s^{1/2} = \mu_s^{1/2} \sum_{j=1}^m c_j = \mu_s^{1/2} \int_a^b r(x) dx.$$

Entonces

$$\mu_r^{1/2} \leq \mu_s^{1/2} \int_a^b r(x) dx.$$

Finalmente, como $\int_a^b s(x)dx = 1$

$$\mu_s^{-1/2} \int_a^b s(x) dx \leq \mu_r^{-1/2} \int_a^b r(x) dx.$$

Luego, nos queda

$$\inf_{s \in A_2} \left\{ \mu_s^{-1/2} \int_a^b s(x) dx \right\} \leq \inf_{r \in A} \left\{ \mu_r^{-1/2} \int_a^b r(x) dx \right\},$$

y como $A_2 \subset A$, vale la igualdad. Junto con (3.11) obtenemos

$$\inf_{s \in A_2} \left\{ \mu_s^{-1/2} \int_a^b s(x) dx \right\} = \inf_{g \in A_1} \left\{ \mu_g^{-1/2} \int_a^b g(x) dx \right\},$$

y el lema queda demostrado. □

3.4. Cota del menor autovalor para m=1

El lema de la sección anterior nos da una herramienta para poder encontrar una cota inferior del autovalor, ya que cuando las funciones son simples podemos calcular fácilmente una cota. Por eso, antes de demostrar el caso para $m = 1$ vamos a calcular la cota cuando consideramos una función simple con una sola discontinuidad.

Lema 3.4.1. *Sea $s \not\equiv 0$ una función simple, no negativa, con una sola discontinuidad en $[a, b]$, y λ_s el menor autovalor del problema*

$$\begin{aligned} y'' + \lambda s(t) y &= 0 \\ y(a) &= 0 \\ y(b) &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Entonces,

$$\lambda_s^{1/2} \int_a^b \sqrt{s(x)}dx > \frac{\pi}{2}.$$

Demostración. Sea $\lambda_s = \eta^2$. Sin perder generalidad podemos escribir la función s como

$$s(x) = \begin{cases} \alpha^2 & \text{si} \quad x \in [a, t_1] \\ \beta^2 & \text{si} \quad x \in (t_1, b] \end{cases}$$

para algún $t_1 \in (a, b)$, con $\alpha, \beta \geq 0$.

Dado que conocemos la expresión de la función s, podemos escribir específicamente cuanto vale la expresión que queremos acotar inferiormente:

$$\begin{aligned} \lambda_s^{1/2} \int_a^b \sqrt{s(x)}dx &= \eta \left(\int_a^{t_1} \sqrt{s(x)}dx + \int_{t_1}^b \sqrt{s(x)}dx \right) \\ &= \eta \int_a^{t_1} \alpha dx + \eta \int_{t_1}^b \beta dx \\ &= \eta\alpha(t_1 - a) + \eta\beta(b - t_1). \end{aligned}$$

Tenemos

$$y_s(t) = \begin{cases} y_1(t) & \text{si} \quad t \in [a, t_1] \\ y_2(t) & \text{si} \quad t \in (t_1, b], \end{cases}$$

donde cada una es solución de los siguientes problemas,

Problema 1: si $t \in [a, t_1]$

$$\begin{aligned} y'' + \eta^2\alpha^2 y &= 0 \\ y(a) &= 0, \end{aligned}$$

Problema 2: si $t \in (t_1, b]$

$$\begin{aligned} y'' + \eta^2\beta^2 y &= 0 \\ y(b) &= 0, \end{aligned}$$

resolvamos explícitamente cada uno.

Si $\alpha, \beta > 0$, las soluciones para cada uno de los problemas son, respectivamente, múltiplos de

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sin[\eta\alpha(t-a)] \\ y_2(t) &= \sin[\eta\beta(b-t)]. \end{aligned}$$

Para $t = t_1$ se pegan en forma continua y diferenciable. Al ser restricciones de la primer autofunción, tenemos:

$$\begin{aligned} y_1(t_1) &= cy_2(t_1) \\ y_1'(t_1) &= cy_2'(t_1). \end{aligned} \tag{3.13}$$

para alguna constante $c \neq 0$.

Las condiciones pedidas en (3.13) son equivalentes a

$$\begin{aligned} \sin[\eta\alpha(t_1-a)] &= c\sin[\eta\beta(b-t_1)] \\ \eta\alpha\cos[\eta\alpha(t_1-a)] &= -\eta c\beta\cos[\eta\beta(b-t_1)]. \end{aligned}$$

Dividiendo miembro a miembro tenemos que

$$\frac{1}{\eta\alpha}\tan[\eta\alpha(t_1-a)] = -\frac{1}{\eta\beta}\tan[\eta\beta(b-t_1)],$$

y por lo tanto

$$\beta\tan[\eta\alpha(t_1-a)] + \alpha\tan[\eta\beta(b-t_1)] = 0. \tag{3.14}$$

Por ser la autofunción del menor autovalor, $y_s(t_1) > 0$ en (a, b). Entonces, los argumentos de los senos que la definen deben tomar valores en el intervalo $(0, \pi)$.

Por otro lado, ya que $\alpha + \beta > 0$, para que exista solución de la ecuación (3.14) las tangentes deben tener signo opuesto.

La tangente es positiva en $(0, \pi/2)$, y negativa en $(\pi/2, \pi)$, entonces:

$$\eta\alpha(t_1-a) \in (0, \pi/2), \quad \text{y} \quad \eta\beta(b-t_1) \in (\pi/2, \pi),$$

o si no,

$$\eta\alpha(t_1-a) \in (\pi/2, \pi), \quad \text{y} \quad \eta\beta(b-t_1) \in (0, \pi/2).$$

En ambos casos,

$$\lambda_s^{1/2}\int_a^b \sqrt{s(x)}dx = \eta\alpha(t_1-a) + \eta\beta(b-t_1) > \frac{\pi}{2}.$$

Si $\alpha = 0$ y $\beta > 0$, las soluciones para cada uno de los problemas son, respectivamente, múltiplos de

$$\begin{aligned} y_1(t) &= t-a \\ y_2(t) &= \sin[\eta\beta(b-t)]. \end{aligned}$$

Como antes, llegamos a

$$t_1 - a = -\frac{1}{\eta\beta}\tan[\eta\beta(L-t_1)],$$

y por lo tanto,

$$\eta\beta(t_1 - a) + \tan[\eta\beta(b - t_1)] = 0.$$

Como el primero es positivo, debe ser negativa la tangente, y por mismo argumento de antes,

$$\eta\beta(b - t_1) > \frac{\pi}{2}.$$

El mismo argumento vale si $\alpha > 0$ y $\beta = 0$, con lo cual el lema queda demostrado. $\square$

Observación 3.4.1. *No es necesario considerar los casos $t_1 = a$ ó $t_1 = b$. Si fuera $t_1 = a$ tenemos que $s(x) = \beta^2$ en $[a, b]$ y una solución del problema (3.12) es*

$$y(t) = sen[\eta\beta(t - a)].$$

Como $y(b) = 0$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

$$\eta\beta(b - a) = k\pi,$$

y el menor autovalor es igual a

$$\lambda_s = \left(\frac{\pi}{(b - a)\beta}\right)^2.$$

Entonces, tenemos directamente que

$$\lambda_s^{1/2} \int_a^b \sqrt{s(x)}dx = \frac{\pi}{(b - a)\beta} \int_a^b \beta dx = \pi > \frac{\pi}{2}.$$

El caso $t_1 = b$ es análogo.

Observación 3.4.2. *Del Lema 3.4.1 se deduce que*

$$\inf_{s \in A_2} \lambda_s^{1/2} \int_a^b s(x)dx > \frac{\pi}{2}.$$

Ahora estamos en condiciones de probar la desigualdad de Nehari para problemas de segundo orden.

Teorema 3.4.1. *Sea $p \in L([a, b])$ no negativa y mónotona. Sea λ_p el menor autovalor del problema*

$$\begin{aligned} y'' + \lambda p(t)y &= 0 \\ y(a) &= 0 \\ y(b) &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Entonces

$$\lambda_p^{1/2} \int_a^b \sqrt{p(x)}dx > \frac{\pi}{2}.$$

Demostración. Sea $G(t,x)$ la función de Green del problema (3.15). Como antes, con el cambio $u_p(t) = y_p(t)\sqrt{p(t)}$, la autofunción y_p correspondiente a λ_p se puede expresar de la forma

$$u_p(t) = \lambda_p \int_a^b G(t,x)\sqrt{p(t)}\sqrt{p(x)}u_p(x)dx. \tag{3.16}$$

Como G es núcleo admisible para las hipótesis del Lema (3.3.1), tenemos

$$\lambda_p^{1/2} \int_a^b \sqrt{p(t)}dt \geq \inf_{s \in A_2} \left\{ \lambda_s^{1/2} \int_a^b s(x)dx \right\}.$$

Ahora, por el Lema 3.4.1,

$$\inf_{s \in A_2} \left\{ \lambda_s^{1/2} \int_a^b s(x)dx \right\} > \frac{\pi}{2}$$

y el teorema queda demostrado. $\square$

3.5. Nehari - Ecuacion de orden 2m

Para la demostración en el caso de mayor orden vamos a modificar la demostración de Nehari. Como ninguno de los dos métodos nos da la constante explícita, no podemos asegurar que sea mejor que la propuesta por Nehari, si bien veremos que en caso $m = 1$ coincide con $\pi/2$, y por lo tanto da una demostración alternativa.

En el caso de Nehari, la constante inferior es solución de una ecuación trascendente relacionada con las autofunciones (para $m = 1$ es la ecuación (3.14)), mientras que en nuestro caso utilizaremos el primer autovalor de un problema mixto.

Teorema 3.5.1. *Sea $p \in C([a,b])$, no negativa y mónotona. Sea λ_p el menor autovalor del problema (3.1). Entonces,*

$$\lambda_p^{1/2m} \int_a^b \sqrt[2m]{p(x)}dx \geq \Lambda_{[0,1]}^{1/2m}, \tag{3.17}$$

donde $\Lambda_{[0,1]}$ es el primer autovalor del problema

$$\begin{array}{rcl} (-1)^m y^{(2m)} - \lambda p(t) y &=& 0 \\ y(0) = y'(0) = \ldots = y^{m-1}(0) &=& 0 \\ y^m(1) = y^{m+1}(1) = \ldots = y^{2m-1}(1) &=& 0. \end{array} \tag{3.18}$$

Demostración. El caso $m = 1$ corresponde a lo demostrado en el teorema (3.4.1). Vamos a suponer $m > 1$.

Sea $G(x,t)$ la función de Green para el operador $L(y) = (-1)^m y^{(2m)}$. La autofunción correspondiente la podemos escribir

$$u_p(t) = \lambda_p \int_a^b G(t,x)\sqrt{p(t)}\sqrt{p(x)}u_p(x)dx. \tag{3.19}$$

donde $u_p(t) = y_p(t)\sqrt{p(t)}$.

Vamos a verificar primero que

$$\inf_{p\in A_1} \sqrt[2m]{\lambda_p}\int_a^b \sqrt[2m]{p(x)}dx = \inf_{s\in A_2} \sqrt[2m]{\lambda_s}\int_a^b \sqrt[2m]{s(x)}dx.$$

Para esto, fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Ahora, reescribiendo

$$\sqrt{p(t)}\sqrt{p(x)} = \left[\sqrt[2m]{p(t)}\sqrt[2m]{p(x)}\right]^{m-1}\sqrt[2m]{p(t)}\sqrt[2m]{p(x)},$$

y llamando $K_1(t,x) = G(t,x)\left[\sqrt[2m]{p(t)}\sqrt[2m]{p(x)}\right]^{m-1}$, la ecuación (3.19) nos queda

$$u_p(t) = \lambda_p\int_a^b K_1(t,x)\sqrt[2m]{p(t)}\sqrt[2m]{p(x)}u_p(x)dx. \tag{3.20}$$

La función K_1 satisface las condiciones del Lema 3.4.1, y con $g = \sqrt[2m]{p}$, que es monótona, el primer autovalor μ_p del problema

$$\mu u(t) = \int_a^b K_1(t,x)\sqrt[2m]{p(t)}\sqrt[2m]{p(x)}u(x)dx$$

verifica

$$\frac{1}{\mu_p} = \lambda_p$$

y además,

$$\inf_{p\in A_1}\left(\mu_p^{-1/2}\int_a^b \sqrt[2m]{p(x)}dx\right) = \inf_{s\in A_2}\left(\mu_s^{-1/2}\int_a^b \sqrt[2m]{s(x)}dx\right)$$

donde μ_s es el mayor autovalor del problema

$$\mu u(t) \;=\; \int_a^b K_1(t,x)\sqrt[2m]{s(t)}\sqrt[2m]{s(x)}u(x)dx, \tag{3.21}$$

con $s(t)$ una función simple, con igual monotonía que p, con una sola discontinuidad.

Fijemos una $\sqrt[2m]{s_1}$ tal que está a menos de ε/m de realizar el ínfimo,

$$\left|\mu_{s_1}^{-1/2}\int_a^b \sqrt[2m]{s_1(x)}dx - \inf_{s\in A_2}\left(\mu_s^{-1/2}\int_a^b \sqrt[2m]{s(x)}dx\right)\right| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

La ecuación integral (3.21) la podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mu u(t) &= \int_a^b G(t,x)\left[\sqrt[2m]{p(t)}\sqrt[2m]{p(x)}\right]^{m-1}\sqrt[2m]{s_1(x)}\sqrt[2m]{s_1(t)})u(x)dx \\
&= \int_a^b \left\{G(t,x)\left[\sqrt[2m]{p(t)}\sqrt[2m]{p(x)}\right]^{m-2}\sqrt[2m]{s_1(x)}\sqrt[2m]{s_1(t)}\right\} \\
&\qquad\qquad \times \sqrt[2m]{p(t)}\sqrt[2m]{p(x)}u(x)dx \\
&= \int_a^b K_2(t,x)\sqrt[2m]{p(t)}\sqrt[2m]{p(x)}u(x)dx,
\end{aligned}$$

con $K_2(t,x) = G(t,x)\left[\sqrt[2m]{p(t)}\,\sqrt[2m]{p(x)}\right]^{m-2}\,\sqrt[2m]{s_1(x)}\,\sqrt[2m]{s_1(t)}$.

Volvemos a tener un problema similar al inicial donde lo que cambia es la función que juega el papel del núcleo, e incorpora a s_1 en lugar de una de las p. Con el mismo argumento, utilizando el Lema (3.4.1), podemos hallar una función simple $\sqrt[2m]{s_2}$ monótona y con una sola discontinuidad tal que está a menos de ε/m de realizar el ínfimo.

Aplicando iterativamente este procedimiento, en el i-ésimo paso partimos del problema

$$\mu u(t) = \int_a^b K_i(t,x)\,\sqrt[2m]{p(t)}\,\sqrt[2m]{p(x)}u(x)dx \tag{3.22}$$

con

$$K_i(t,x) = \left[\sqrt[2m]{p(t)}\,\sqrt[2m]{p(x)}\right]^{m-i}\cdot\prod_{k=1}^{i-1}\sqrt[2m]{s_k(t)}\,\sqrt[2m]{s_k(x)},$$

donde para cada $1 \le k \le i-1$, s_k es una función simple, monótona, con una sola discontinuidad en $[a,b]$, y con el Lema (3.4.1) obtenemos otra función s_k.

En el m-ésimo paso tenemos el problema

$$\mu_{s_m}u(t) = \int_a^b K_m(t,x)\,\sqrt[2m]{s_m(t)}\,\sqrt[2m]{s_m(x)}u(x)dt \tag{3.23}$$

donde $\sqrt[2m]{s_m}$ es una función con igual características que cada una de las $\sqrt[2m]{s_k}$, el núcleo es

$$K_m(t,x) = G(t,x)\prod_{k=1}^{m-1}\sqrt[2m]{s_k(t)}\,\sqrt[2m]{s_k(x)},$$

y está a menos de ε/m de realizar el ínfimo.

Entonces, intercalando los problemas auxiliares,

$$\left|\mu_{s_m}^{-1/2}\int_a^b \sqrt[2m]{s_m(x)}dx - \inf_{p\in A_1}\left(\mu_p^{-1/2}\int_a^b \sqrt[2m]{p(x)}dx\right)\right| < \varepsilon.$$

Tenemos que μ_{s_m} es el primer autovalor del problema

$$\mu u(t) = \int_a^b G(t,x)\prod_{k=1}^{m}\sqrt[2m]{s_k(t)}\,\sqrt[2m]{s_k(x)}u(x)dx, \tag{3.24}$$

o, equivalentemente, del problema diferencial con $p = \prod_{k=1}^m s_k$, con lo cual $\mu_{s_m}^{-1} = \lambda_{\prod_{k=1}^m s_k}$.

Sea μ_{s_m} el mayor autovalor y u_{s_m} y la autofunción normalizada correspondiente de la ecuación integral (3.24). Luego,

$$\mu_{s_m} = \int_a^b\int_a^b G(t,x)\prod_{k=1}^{m}\sqrt[2m]{s_k(t)}\,\sqrt[2m]{s_k(x)}u_{s_m}(t)u_{s_m}(x)dxdt. \tag{3.25}$$

Como G y u_m son positivas,

$$G(x,t)u_{s_m}(x)u_{s_m}(t) = [G(x,t)u_{s_m}(x)u_{s_m}(t)]^{1/m}\cdots[G(x,t)u_{s_m}(x)u_{s_m}(t)]^{1/m},$$

entonces la ecuación (3.25) es igual a

$$\mu_{s_m} = \int_a^b \int_a^b \prod_{k=1}^{m} \left[G(t,x) u_{s_m}(t) u_{s_m}(x) \sqrt{s_k(t)} \sqrt{s_k(x)} \right]^{1/m} dx dt. \tag{3.26}$$

Aplicando Hölder y elevando a la m,

$$\mu_{s_m}^m \leq \prod_{k=1}^{m} \int_a^b \int_a^b G(t,x) u_{s_m}(t) u_{s_m}(x) \sqrt{s_k(t)} \sqrt{s_k(x)} dx dt. \tag{3.27}$$

Consideremos ahora el problema

$$\mu u(t) = \int_a^b G(t,x) \sqrt{s_k(t)} \sqrt{s_k(x)} u(x) dx$$

que sólo involucra al peso $\sqrt{s_k}$.

Sea μ_k el primer autovalor y u_k la autofunción correspondiente. Este problema es equivalente a resolver

$$\begin{array}{rcl} (-1)^m y^{(2m)} - \lambda s_k(t) y &=& 0 \\ y(a) = y'(a) = \ldots = y^{m-1}(a) &=& 0 \\ y(b) = y'(b) = \ldots = y^{m-1}(b) &=& 0, \end{array} \tag{3.28}$$

el primer autovalor es $\lambda_{s_k} = \mu_k^{-1}$ y la autofunción y_{s_k} está dada por $u_k = \sqrt{s_k} y_{s_k}$.

Como

$$\mu_k = J(\sqrt{s_k}, \sqrt{s_k}; u_k) \geq J(\sqrt{s_k}, \sqrt{s_k}; u_{s_m}),$$

volviendo a (3.27) podemos acotar superiormente μ_m^m por

$$\mu_m^m \leq \prod_{k=1}^{m} \mu_k \leq \prod_{k=1}^{m} \text{máx} \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m\}.$$

Luego, $\mu_m \leq \mu_s = \text{máx} \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m\}$, y los autovalores del lado derecho corresponden a pesos simples con una sola discontinuidad, sea s la que alcanza este máximo. Para estimarlos, conviene considerar el problema diferencial (3.28).

La función s puede representarse como

$$s(t) = \begin{cases} \alpha^{2m} & \text{si} \quad t \in [a, t_1] \\ \\ \beta^{2m} & \text{si} \quad t \in (t_1, b], \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \geq 0$.

En este caso, el problema diferencial nos queda

$$(-1)^m y_s^{(2m)} - \lambda_s s(t) y_s = 0,$$

y si multiplicamos por y_s, e integramos por partes llegamos a

$$\int_a^b [y_s^{(m)}]^2 dx - \lambda_s \alpha^{2m} \int_a^{t_1} y_s^2 dx - \lambda_s \beta^{2m} \int_{t_1}^b y_s^2 dx = 0.$$

Separando la primera integral,

$$\int_a^{t_1} [y_s^{(m)}]^2 + \int_{t_1}^b [y_s^{(m)}]^2 - \lambda_s \left[\alpha^{2m} \int_a^{t_1} y_s^2 dx + \beta^{2m} \int_{t_1}^b y_s^2 dx\right] = 0.$$

Entonces, agrupando queda

$$\left[\int_a^{t_1} [y_s^{(m)}]^2 dx - \lambda_s \alpha^{2m} \int_a^{t_1} y_s^2 dx\right] + \left[\int_{t_1}^b [y_s^{(m)}]^2 dx - \lambda_s \beta^{2m} \int_{t_1}^b y_s^2 dx\right] = 0,$$

y ambos términos deben ser nulos, o uno de ellos será negativo.

Supongamos que

$$\int_a^{t_1} [y_s^{(m)}]^2 dx - \lambda_s \alpha^{2m} \int_a^{t_1} y_s^2 dx \leq 0.$$

Entonces,

$$\lambda_s \alpha^{2m} \geq \frac{\displaystyle\int_a^{t_1} [y_s^{(m)}]^2 dx}{\displaystyle\int_a^{t_1} y_s^2 dx}.$$

Como la función y_s pertenece al espacio de Sobolev

$$H = \{y \in H^{m,2}([a, t_1]) \, : \, y^{(j)}(a) = 0, \, 0 \leq j \leq m-1\},$$

es admisible en la caracterización variacional del primer autovalor del problema

$$\begin{array}{rcl} (-1)^m y^{(2m)} - \Lambda p(t) y & = & 0 \\ y(a) = y'(a) = \ldots = y^{m-1}(a) & = & 0 \\ y^m(b) = y^{m+1}(b) = \ldots = y^{2m-1}(b) & = & 0, \end{array}$$

con lo cual,

$$\lambda_s \alpha^{2m} \geq \inf_{y \in H} \frac{\displaystyle\int_a^{t_1} [y^{(m)}]^2 dx}{\displaystyle\int_a^{t_1} y^2 dx} = \Lambda_{[a,t_1]} = \frac{\Lambda_{[0,1]}}{(t_1 - a)^{2m}},$$

por cómo escala el autovalor respecto de la longitud del intervalo.

Ahora

$$\lambda_s^{1/2m} \int_a^b \sqrt[2m]{s(x)} dx \geq \lambda_s^{1/2m} \int_a^{t_1} \alpha dx = \lambda_s^{1/2m} \alpha (t_1 - a) \geq \Lambda_{[0,1]}^{1/2m}.$$

El teorema queda entonces demostrado. $\square$

3.6. Problema del p-Laplaciano

En esta sección vamos a buscar una cota inferior para el problema cuasilineal del p-laplaciano,

$$\begin{aligned} -(|u'|^{p-2}u')' &= \lambda g(t)|u|^{p-2}u \qquad t \in (a,b) \\ u(a) &= 0 \\ u(b) &= 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde como antes, $1 < p < \infty$, λ es un parámetro real, y $g \in L^1([a,b])$ es una función monótona.

Sea λ_g y u_g el menor autovalor y la autofunción correspondiente del problema (3.29).

Una extensión a este problema de lo visto en las secciones anteriores es el siguiente teorema que es el punto principal de esta sección.

Teorema 3.6.1. *Sea $g \in L^1([a,b])$ una función monótona no negativa, y sea λ_g el menor autovalor del problema* (3.29)*. Entonces,*

$$\lambda_g^{1/p} \int_a^b \sqrt[p]{g(t)}dt \geq \frac{\pi_p}{2}, \tag{3.30}$$

donde π_p se define a partir del primer cero positivo de la función generalizada $\sin_p$.

Observación 3.6.1. *Para mas detalles sobre π_p puede verse [3] o [7].*

La demostración del teorema la haremos en base a la caracterización variacional [8] del primer autovalor del problema(3.29)

$$\lambda_g^{-1} = \max_{\{u \in W_0^{1,p} \,:\, \|u'\|_p = 1\}} \int_a^b g(x)u^p(x)dx.$$

Como una consecuencia directa tenemos

$$\lambda_g^{-1} = \int_a^b g(x)u_g^p(x)dx \geq \int_a^b g(x)u_r^p(x)dx \tag{3.31}$$

para cualquier autofunción normalizada correspondiente a un peso diferente r. Este argumento se utilizará muchas veces en la demostración del Teorema 3.6.1

Vamos a demostrar una serie de resultados que se utilizaran en la demostración del Teorema (3.6.1)

Proposición 3.6.1. *Sea $\{r_j\}_j$ una sucesión de funciones de $L^2([a,b])$. Supongamos que $r_j \to g$ in $L^1([a,b])$ cuando $j \to \infty$. Entonces,*

$$(i) \quad \lim_{j\to\infty} \lambda_{r_j} = \lambda_g,$$

$$(ii) \quad \lim_{j\to\infty} \int_a^b r_j^{1/p}(x)dx = \int_a^b g^{1/p}(x)dx.$$

Demostración. Por definición del primer autovalor tenemos que

$$\lambda_g^{-1} = \int_a^b g(x)u_g^p(x)dx = \int_a^b r_j(x)u_g^p(x)dx + \int_a^b (g(x) - r_j(x))u_g^p(x)dx.$$

La primer integral está acotada superiormente por $\lambda_{r_j}^{-1}$, debido a la desigualdad (3.31).

Ya que las autofunciones se encuentran normalizadas de modo que

$$\|u_g'\|_p = \|u_{r_j}'\|_p = 1,$$

por la desigualdad de Ponicaré y la inclusión de $W_0^{1,p}([a,b])$ en $L^\infty([a,b])$, tenemos que las autofunciones están uniformemente acotadas en L^∞ por cierta constante positiva C.

Luego, la segunda integral se puede acotar por

$$\int_a^b |g(x) - r_j(x)| \|u_g\|_\infty^p dx \le C \int_a^b |g(x) - r_j(x)|dx = O(\|g - r_j\|_1).$$

Intercambiando los roles de g y r_j, tenemos que

$$\left|\lambda_{r_j}^{-1} - \lambda_g^{-1}\right| = O(\|g - r_j\|_1),$$

y (i) está probado, ya que ambas integrales están acotadas por debajo por cero.

Para demostrar (ii), por las desigualdades de Minkowski y Hölder tenemos que:

$$\int_a^b |r_j^{1/p}(x) - g^{1/p}(x)|dx \le \int_a^b |r_j(x) - g(x)|^{1/p} dx \le (b-a)^{1/p'} \|r_j - g\|_1^{1/p},$$

y la convergencia de las integrales está probada. □

Lema 3.6.1. *Dada r una función simple no negativa, existe una función simple no negativa s con a lo sumo una discontinuidad tal que*

$$\int_a^b r^{1/p}(x)dx = \int_a^b s^{1/p}(x)dx, \quad \textit{and} \quad \lambda_s \le \lambda_r.$$

Demostración. Tomemos r tal que $\int_a^b r^{1/p}(x)dx = 1$ (el caso general se sigue normalizando).

Escribimos $r^{1/p} = \sum_{i=1}^n c_i\sigma_i$, donde cada σ_i es una función simple con a lo sumo una discontinuidad, $\int_a^b \sigma_i(x)dx = 1$, y $\sum_i^n c_i = 1$.

Entonces

$$\lambda_r^{-1} = \int_a^b r(x)u_r^p(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n c_i\sigma_i(x)\right)^p u_r^p(x)dx.$$

Usando la desigualdad de Jensen,

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n c_i\sigma_i(x)\right)^p u_r^p(x)dx \leq \int_a^b \sum_{i=1}^n c_i\sigma_i^p(x)u_r^p(x)dx,$$

obtenemos

$$\lambda_r^{-1} \leq \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b \sigma_i^p(x)u_r^p(x)dx \leq \sum_{i=1}^n c_i\lambda_{\sigma_i}^{-1} \leq \max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_{\sigma_i}^{-1}\} = \lambda_\sigma^{-1},$$

donde σ es la función que tiene el mayor autovalor entre las σ_i.

Así, para $s = \sigma^p$ tenemos

$$\lambda_s^{1/p}\int_a^b s^{1/p}(x) \leq \lambda_r^{1/p}\int_a^b r^{1/p}(x)dx,$$

y la demostración queda terminada. □

Veamos como podemos acotar el primer autovalor del problema (3.29) cuando la función g es reemplazada por función simple con a lo sumo una discontinuidad.

Lema 3.6.2. *Sea $s \not\equiv 0$ una función simple, no negativa, con una sola discontinuidad en $[a,b]$, y λ_s el menor autovalor del problema*

$$\begin{array}{rcll} (|u'|^{p-2}u')' &=& \lambda s(t)|u|^{p-2}u & \quad t\in(a,b) \\ u(a) &=& 0 & \\ u(b) &=& 0. & \end{array} \tag{3.32}$$

Entonces,

$$\lambda_s^{1/p}\int_a^b s^{1/p}(x)dx > \frac{\pi_p}{2}.$$

Demostración. Supongamos que s está dada por

$$s(t) = \begin{cases} \alpha^p & \text{if} \quad t\in[a,t_1] \\ \beta^p & \text{if} \quad t\in(t_1,b], \end{cases}$$

con α, β constantes no negativas, con $\alpha+\beta > 0$.

Sea u_s la autofunción correspondiente al primer autovalor λ_s del problema (3.32). Multiplicando por u_s e integrando por partes tenemos que

$$\int_a^b u_s'^p(x)dx - \lambda_s\alpha^p\int_a^{t_1} u_s^p(x)dx - \lambda_s\beta^p\int_{t_1}^b u_s^p(x)dx = 0,$$

entonces

$$\left[\int_a^{t_1} u_s'^p(x)dx - \lambda_s\alpha^p\int_a^{t_1} u_s^p(x)dx\right] + \left[\int_{t_1}^b u_s'^p(x)dx - \lambda_s\beta^p\int_{t_1}^b u_s^p(x)dx\right] = 0.$$

Ahora, uno de los dos terminos debe ser no positivo. Supongamos que

$$\int_a^{t_1} u_s'^p(x)dx - \lambda_s \alpha^p \int_a^{t_1} u_s^p(x)dx \leq 0,$$

el otro caso es similar. Entonces,

$$\lambda_s^{-1}\alpha^{-p} \leq \frac{\int_a^{t_1} u_s^p(x)dx}{\int_a^{t_1} u_s'^p(x)dx}.$$

Ya que u_s pertenece al espacio de Sobolev

$$W = \{u \in W^{1,p}([a,t_1]) \, : \, u(a) = 0\},$$

es una función admisible en la caracterización variacional del primer autovalor del siguiente problema mixto

$$\begin{array}{rcl} -(|u'|^{p-2}u')' &=& \lambda g(x)|u|^{p-2}u \\ u(a) &=& 0 \\ u'(b) &=& 0, \end{array}$$

y tenemos

$$\lambda_s^{-1}\alpha^{-p} \leq \max_{u\in W} \frac{\int_a^{t_1} u^p(x)dx}{\int_a^{t_1} u'^p(x)dx} = \frac{2^p(t_1-a)^p}{\pi_p^p}.$$

Finalmente,

$$\lambda_s^{1/p}\int_a^b s^{1/p}(x)dx \geq \lambda_s^{1/p}\int_a^{t_1} \alpha dx > \frac{\pi_p}{2},$$

y el Lema queda demostrado. □

Demostración del Teorema (3.6.1). Por la Proposición (3.6.1) y el Lema (3.6.1) y la densidad de las funciones simples en L^1, dado cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, y una función monótona no negativa $g \in L^1([a,b])$, existe una función simple no negativa s con una sola discontinuidad tal que

$$\lambda_s^{1/p}\int_a^b s^{1/p}(x)dx \leq \lambda_g^{1/p}\int_a^b g^{1/p}(x)dx + \varepsilon,$$

y por la cota obtenida en el Lema (3.6.2) tenemos que

$$\frac{\pi_p}{2} \leq \lambda_g^{1/p}\int_a^b g^{1/p}(x)dx + \varepsilon$$

lo que demuestra el teorema. □

Capítulo 4

Estimaciones para orden 2

4.1. Introducción

En el problema de segundo orden, los autovalores pueden estimarse asintóticamente utilizando el método de Prüfer. Veremos rápidamente aquí en qué consiste. Para eso, estudiemos primero el siguiente problema de valores iniciales,

$$\begin{array}{rcll} y'' + \lambda p(t)y & = & 0 & \qquad t \in (a,\infty) \\ y(a,\lambda) & = & 0 & \\ y'(a,\lambda) & = & 1 & \end{array} \tag{4.1}$$

donde $p(t)$ es una función derivable en $[a,\infty)$ que podemos escribir de la forma

$$p(t) = \frac{1}{(t+1)^2\omega(t)},$$

con $\omega(t)$ una función positiva, no acotada, y creciente en $[a,\infty)$ (se puede relajar y pedir que sea creciente a partir de un t_0 arbitrario).

Vamos a suponer, por ahora, que

$$I = \int_a^\infty [p(t)]^1/2dt = \int_a^\infty \frac{1}{(t+1)[\omega(t)]^1/2}dt < \infty \tag{4.2}$$

Observemos que la condición (2.2) del capítulo 2 no garantiza que esta integral converge, pero sí la condición

$$\int_a^\infty t^2 p(t)dt < +\infty, \tag{4.3}$$

pues aplicando Holder se tiene

$$I = \int_a^\infty [p(t)]^1/2dt = \int_a^\infty \frac{t[p(t)]^1/2}{t}dt < \left(\int_a^\infty t^2p(t)dt\right)^1/2 \left(\int_a^\infty t^{-2}dt\right)^1/2 < \infty.$$

Los resultados del capítulo 2 son válidos para el problema de autovalores singulares de segundo orden, y Einar Hille los había obtenido antes en [9] utilizando la transformada de Prüfer. Además, estimó el comportamiento asintótico de los autovalores. De todos modos, podemos ver que es más restrictiva la hipótesis de derivabilidad del peso.

En este capítulo seguiremos parcialmente su trabajo, y vamos a introducir la transformada de Prüfer. Luego, analizaremos las coordenadas radiales y angulares para el problema (4.1), y finalmente demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 4.1.1. *Sea $\{\lambda_n\}_n$ la sucesión de autovalores del problema*

$$\begin{aligned} y'' + \lambda p(t) y &= 0 \qquad t \in (a, \infty) \\ y(a, \lambda) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} y'(t, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Si la función $p(t)$ cumple con la condición (4.2), entonces

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{I}\right)^2 [1 + o(1)]$$

cuando $n \to \infty$.

Observación 4.1.1. *Observemos que este problema se incluye dentro del problema de autovalores singulares (2.4) estudiado en el Capítulo 2, con lo cual tenemos garantizada la existencia de la sucesión de autovalores.*

Para $m = 1$ se puede demostrar la existencia de los autovalores utilizando la transformada de Prüfer. Más aún, con muy pocas modificaciones se puede tratar el problema no lineal para el $p-$laplaciano,

$$\begin{aligned} (|y'|^{p-2} y')' + \lambda p(t) |y|^{p-2} y &= 0 \qquad t \in (a, \infty) \\ y(a, \lambda) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} y'(t, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Este problema fue estudiado en [7], si bien no se consideró el comportamiento asintótico de los autovalores.

4.2. La Transformada de Prüfer

Sea $y(t, \lambda)$ solución del problema (4.1) con $\lambda > 0$. Queremos reescribirla en el plano de fase y, y' en coordenadas polares, y para esto introducimos las nuevas coordenadas $R(t)$, $\Theta(t)$.

Proponemos las siguientes ecuaciones para y, y':

$$y(t, \lambda) = [p(t)]^{-\frac{1}{4}} R(t) \sin[\Theta(t)], \tag{4.4}$$

$$y'(t, \lambda) = \lambda^{1/2} [p(t)]^{\frac{1}{4}} R(t) \cos[\Theta(t)]. \tag{4.5}$$

Operando con las ecuaciones anteriores obtendremos ecuaciones diferenciales que deben satisfacer las funciones $R(t)$ y $\Theta(t)$.

Comenzamos derivando la ecuación (4.4)

$$\begin{aligned} y'(t,\lambda) &= -\tfrac{1}{4}[p(t)]^{-\frac{5}{4}}p'(t)R(t)\sin[\Theta(t)] \\ &\quad +[p(t)]^{-\frac{1}{4}}R'(t)\sin[\Theta(t)]+t)]^{-\frac{1}{4}}R(t)\cos[\Theta(t)]\Theta'(t), \end{aligned} \tag{4.6}$$

y la igualamos a la ecuación (4.5):

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{1}{2}}[p(t)]^{\frac{1}{4}}R(t)\cos[\Theta(t)] &= \frac{1}{4}[p(t)]^{-\frac{5}{4}}p'(t)R(t)\sin[\Theta(t)] \\ &\quad +[p(t)]^{-\frac{1}{4}}R'(t)\sin[\Theta(t)] \\ &\quad +[p(t)]^{-\frac{1}{4}}R(t)\cos[\Theta(t)]\Theta'(t). \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\dfrac{[p(t)]^{\frac{1}{4}}\cos[\Theta(t)]}{R(t)}$ nos queda

$$\begin{aligned} [\lambda p(t)]^{1/2}\cos^2[\Theta(t)] &= -\frac{1}{4}[p(t)]^{-1}p'(t)\sin[\Theta(t)]\cos[\Theta(t)] \\ &\quad +\frac{R'(t)}{R(t)}\sin[\Theta(t)]\cos[\Theta(t)]+\cos^2[\Theta(t)]\Theta'(t) \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \cos^2[\Theta(t)]\Theta'(t) &= [\lambda p(t)]^{1/2}\cos^2(\Theta(t))+\tfrac{1}{4}[p(t)]^{-1}p'(t)\sin[\Theta(t)]\cos[\Theta(t)] \\ &\quad -\frac{R'(t)}{R(t)}\sin[\Theta(t)]\cos[\Theta(t)], \end{aligned}$$

y como $\sin[2\Theta(t)] = 2\sin[\Theta(t)]\cos[\Theta(t)]$ nos queda

$$\cos^2[\Theta(t)]\Theta'(t) = [\lambda p(t)]^{1/2}\cos^2[\Theta(t)] + \left\{\frac{1}{8}[p(t)]^{-1}p'(t) - 1/2\frac{R'(t)}{R(t)}\right\}\sin[2\Theta(t)]. \tag{4.7}$$

Si derivamos la expresión (4.5) (es decir, derivamos la expresión de la derivada primera de la solución de nuestro problema), tenemos que y'' se escribe en función de las nuevas coordenadas como:

$$\begin{aligned} y''(t,\lambda) &= \lambda^{1/2}\Big\{\frac{1}{4}[p(t)]^{-\frac{3}{4}}p'(t)R(t)\cos[\Theta(t)] \\ &\quad +[p(t)]^{\frac{1}{4}}R'(t)\cos[\Theta(t)]-[p(t)]^{\frac{1}{4}}R(t)\sin[\Theta(t)]\Theta'(t)\Big\}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por ser y solución del problema (4.1) se cumple que $y''(t,\lambda) = -\lambda p(t)y$, y utilizando la expresión (4.4) para y llegamos a

$$y''(t,\lambda) = -\lambda[p(t)]^{\frac{3}{4}}R(t)\sin[\Theta(t)]. \tag{4.9}$$

Igualando las expresiones (4.8) y (4.9), tras simplificar en ambos miembros $\lambda^{1/2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} -\lambda^{1/2}[p(t)]^{\frac{3}{4}}R(t)\sin[\Theta(t)] &= \frac{1}{4}[p(t)]^{-\frac{3}{4}}p'(t)R(t)\cos[\Theta(t)] \\ &\quad +[p(t)]^{\frac{1}{4}}R'(t)\cos[\Theta(t)] \\ &\quad -[p(t)]^{\frac{1}{4}}R(t)\sin[\Theta(t)]\Theta'(t). \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por

$$\frac{[p(t)]^{-\frac{1}{4}}\sin[\Theta(t)]}{R(t)}$$

y usando nuevamente el hecho de que $\sin[2\Theta(t)] = 2\sin[\Theta(t)]\cos[\Theta(t)]$ nos queda

$$\begin{aligned} -[\lambda p(t)]^{1/2}\sin^2[\Theta(t)] &= \frac{1}{8}[p(t)]^{-1}p'(t)\sin[2\Theta(t)] \\ &\quad +1/2\frac{R'(t)}{R(t)}\sin[2\Theta(t)] - \sin^2[\Theta(t)]\Theta'(t)\}, \end{aligned}$$

y entonces

$$\sin^2[\Theta(t)]\Theta'(t) = [\lambda p(t)]^{1/2}\sin^2[\Theta(t)] + \left\{\frac{1}{8}[p(t)]^{-1}p'(t) + 1/2\frac{R'(t)}{R(t)}\right\}\sin[2\Theta(t)]. \tag{4.10}$$

Sumando las ecuaciones (4.7) y (4.10) obtenemos una ecucación diferencial de primer orden para la función $\Theta(t)$,

$$\Theta'(t) = [\lambda p(t)]^{1/2} + \frac{1}{4}\frac{p'(t)}{p(t)}\sin[2\Theta(t)] \tag{4.11}$$

que no involucra a R.

A la ecuación anterior le agregamos la siguiente condición inicial,

$$\Theta(a,\lambda) = k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$, pues

$$0 = y(a,\lambda) = [p(a)]^{-\frac{1}{4}}R(a)\sin[\Theta(a,\lambda)].$$

Observemos que si $R(a) = 0$, no se cumpliría entonces que $y'(a,\lambda) = 1$.

Un cálculo similar nos permite hallar una ecuación diferencial para R. Igualamos las ecuaciones (4.5) y (4.6), y las multiplicamos por

$$\frac{[p(t)]^{1/2}\sin[\Theta(t)]}{R(t)},$$

y a la ecuación (4.10) la multiplicamos por

$$-\frac{\lambda^{-1/2}\cos[\Theta(t)]}{R(t)}.$$

Así, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\lambda^{1/2}[p(t)]^{\frac{3}{4}}\sin[\Theta(t)]\cos[\Theta(t)] &= -\frac{1}{4}[p(t)]^{-\frac{3}{4}}p'(t)\sin^2[\Theta(t)] \\ &\quad +[p(t)]^{\frac{1}{4}}\frac{R'(t)}{R(t)}\sin^2[\Theta(t)] \\ &\quad +[p(t)]^{\frac{1}{4}}\sin[\Theta(t)]\cos[\Theta(t)]\Theta'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{1/2}[p(t)]^{\frac{3}{4}}\sin[\Theta(t)]\cos[\Theta(t)] &= -\frac{1}{4}[p(t)]^{-\frac{3}{4}}p'(t)\cos^2[\Theta(t)] \\ &\quad -[p(t)]^{\frac{1}{4}}\frac{R'(t)}{R(t)}\cos^2[\Theta(t)] \\ &\quad +[p(t)]^{\frac{1}{4}}\sin[\Theta(t)]\cos[\Theta(t)]\Theta'(t)\}\end{aligned}$$

Restándolas,

$$0=-\frac{1}{4}p^{-\frac{3}{4}}(t)p'(t)\left\{\cos^2[\Theta(t)]-\sin^2[\Theta(t)]\right\}-[p(t)]^{\frac{1}{4}}\frac{R'(t)}{R(t)}$$

con lo cual obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{R'(t)}{R(t)}=-\frac{1}{4}\frac{p'(t)}{p(t)}\cos[2\Theta(t)]. \tag{4.12}$$

Obtuvimos una ecuación diferencial que nos permite encontrar quien es nuestra función $R(t)$, y debemos agregarle una condición inicial. Si bien la ecuación no depende de λ, la condición inicial sí, pues

$$1=y'(a,\lambda)=\lambda^{1/2}[p(a)]^{\frac{1}{4}}R(a)\cos[\Theta(a)]=\lambda^{1/2}[p(a)]^{\frac{1}{4}}R(a),$$

ya que $\Theta(a)=0$. Entonces, la condición inicial es

$$R(a)=\lambda^{-1/2}[p(a)]^{-\frac{1}{4}}.$$

4.2.1. Estudio de la coordenada $R(t)$

Para obtener las ecuaciones diferenciales de R y Θ hemos dividido por R, obtengamos cotas de la función y verifiquemos que esta función no se anula.

Proposición 4.2.1. *Para todo $t \geq a$, se tiene*

$$\left[\frac{p(t)}{p(a)}\right]^{\frac{1}{4}} \leq \left|\frac{R(t)}{R(a)}\right| \leq \left[\frac{p(t)}{p(a)}\right]^{-\frac{1}{4}}.$$

Demostración. Recordemos que la función p es de la forma
$$p(t) = \frac{1}{(t+1)^2\omega(t)},$$
con lo cual
$$\frac{p'(t)}{p(t)} = \frac{-2(t+1)\omega(t) - (t+1)^2\omega'(t)}{(t+1)^2\omega(t)}.$$
Teniendo en cuenta que ω y ω' son funciones positivas para todo valor de t, resulta que
$$\frac{p'(t)}{p(t)} < 0.$$

Como $|\cos(\Theta)| \leq 1$, tenemos:
$$\frac{1}{4}\frac{p'(t)}{p(t)} \leq -\frac{1}{4}\frac{p'(t)}{p(t)}\cos[\Theta(t)] \leq -\frac{1}{4}\frac{p'(t)}{p(t)}$$
y nos queda
$$\frac{1}{4}\frac{p'(t)}{p(t)} \leq \frac{R'(t)}{R(t)} \leq -\frac{1}{4}\frac{p'(t)}{p(t)}.$$
Integrando esta expresión entre a y t,
$$\frac{1}{4}\int_a^t \frac{p'(s)}{p(s)}ds \leq \int_a^t \frac{R'(s)}{R(s)}ds \leq -\frac{1}{4}\int_a^t \frac{p'(s)}{p(s)}ds$$
$$\ln\left[\frac{p(t)}{p(a)}\right]^{\frac{1}{4}} \leq \ln\left|\frac{R(t)}{R(a)}\right| \leq \ln\left[\frac{p(t)}{p(a)}\right]^{-\frac{1}{4}}$$
y finalmente obtenemos la desigualdad deseada:
$$\left[\frac{p(t)}{p(a)}\right]^{\frac{1}{4}} \leq \left|\frac{R(t)}{R(a)}\right| \leq \left[\frac{p(t)}{p(a)}\right]^{-\frac{1}{4}}.$$
□

Proposición 4.2.2. *Para todo $t \geq a$, $R(t) > 0$.*

Demostración. Como $R(a) > 0$, si hubiera algun punto donde la función tomara un valor negativo, existiría un valor $t_0 > a$ tal que $R(t_0) = 0$, con lo cual, por la Proposición 4.2.1,
$$\left[\frac{p(t_0)}{p(a)}\right]^{\frac{1}{4}} \leq \left|\frac{R(t_0)}{R(a)}\right| = 0.$$

Esto es un absurdo ya que por definición la función p es estrictamente positiva.
□

Observación 4.2.1. *Por la Proposición 4.2.1 y la condición inicial tenemos*
$$[\lambda p(a)]^{-1/2}[p(t)]^{\frac{1}{4}} \leq R(t) \leq \lambda^{-1/2}[p(t)]^{-\frac{1}{4}}$$
La función R nos queda acotada inferioremente por una función que siempre toma valores positivos.

4.2.2. Estudio de la variable angular $\Theta(t)$

Queremos estudiar ahora la variable angular $\Theta(t)$, pues el estudio del número de ceros de $y(t,\lambda)$ dependerá del crecimiento de esta función.

Consideremos el problema de valores iniciales que resuelve $\Theta(t)$:

$$\begin{cases} \Theta'(t) &= [\lambda p(t)]^{1/2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{p'(t)}{p(t)}\sin[2\Theta(t)] \\ \Theta(a) &= 0 \end{cases}$$

Integrando la ecuación diferencial y utilizando la condición de borde nos queda

$$\Theta(t) = \lambda^{1/2}\int_a^t [p(s)]^{1/2} + \frac{1}{4}\int_a^t \frac{p'(s)}{p(s)}\sin[2\Theta(s)]ds. \tag{4.13}$$

Lema 4.2.1. *Sea λ_n el enésimo autovalor, y $t_k = t_k(\lambda_n)$ el k-ésimo cero de la autofunción asociada $y(t,\lambda_n)$ en (a,∞). Entonces*

$$\Theta(t_k,\lambda_n) = k\pi$$

Demostración. Si t_k es un cero de $y(t,\lambda_n)$ en (a,∞)

$$0 = y(t_k,\lambda_n) = [p(t_k)]^{-\frac{1}{4}}R(t_k)\sin[\Theta(t_k,\lambda_n)].$$

Como p y R toman valores positivos, y $\Theta(a,\lambda_n) = 0$, para que se cumpla la igualdad anterior debe valer $\sin[\Theta(t_k,\lambda_n)] = 0$. Entonces, $\Theta(t_k,\lambda_n)$ debe ser un múltiplo positivo de π,

$$\Theta(t_k) = j\pi, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, entre dos ceros consecutivos, Θ puede variar a lo sumo en π, es decir,

$$|\Theta(t_k) - \Theta(t_{k-1})| \le \pi,$$

de lo contrario, por la continuidad de Θ, habría otro cero de la autofunción.

Si bien no podemos garantizar que Θ es creciente, cuando cruza por un múltiplo de π tiene derivada estrictamente positiva,

$$\Theta'(k\pi) = [\lambda p(k\pi)]^{1/2},$$

con lo cual de un cero a otro aumenta en π. □

Lema 4.2.2. *Sea λ_n el enésimo autovalor, y $t_n = t_n(\lambda_n)$ el último cero de la autofunción asociada $y(t,\lambda_n)$. Entonces, $\Theta(t_n) = n\pi$. Además, si $t > t_n$,*

$$n\pi < \Theta(t,\lambda_n) < (n+1/2)\pi$$

Demostración. Por el lema (4.2.1) sabemos que

$$\Theta(t_n) = n\pi.$$

Veamos el caso $t > t_n$:

- $n\pi < \Theta(t, \lambda_n)$

  Ya que $\sin[2\Theta(t_n, \lambda)] = \sin[2n\pi] = 0$, tenemos

  $$\Theta'(t_n, \lambda) = [\lambda p(t)]^{1/2} + \frac{1}{4}\frac{p'(t)}{p(t)}\sin[2\Theta(t_n, \lambda)] = [\lambda p(t)]^{1/2} > 0.$$

  Para t suficientemente cerca de t_n tenemos que $\Theta'(t) > 0$, por lo tanto Θ es creciente en un entorno de t_n y

  $$n\pi = \Theta(t_n, \lambda) < \Theta(t, \lambda)$$

  Para valores mayores a t_n, la función $\Theta(t, \lambda)$ no puede ser menor a $n\pi$. Si hubiera un valor t donde la función Θ tomara un valor más chico que $n\pi$, existiría $t^* > t_n$ donde $\Theta(t^*, \lambda) = n\pi$. Pero esto es equivalente a decir que $y(t^*, \lambda_n) = 0$, lo que es un absurdo, puesto que t_n es el último cero de $y(t, \lambda_n)$.

- $\Theta(t, \lambda_n) < (n + 1/2)\pi$.

  Esta desigualdad es equivalente a probar que la derivada primera de la solución $y(t, \lambda)$ no cambia de signo en el intervalo $[t_n, \infty)$. Supongamos que existe $t^* > t_n$ donde la solución toma un valor $y(t^*, \lambda_n) > 0$ y

  $$0 = y'(t^*, \lambda_n) = \lambda^{1/2}[p(t^*)]^{\frac{1}{4}} R(t^*) \cos[\Theta(t^*, \lambda_n)].$$

  Por ser p y R funciones positivas, la igualdad anterior se satisface sólo cuando

  $$\cos[\Theta(t^*, \lambda_n)] = 0$$

  y por lo tanto

  $$\Theta(t^*, \lambda_n) = (k + 1/2)\,\pi$$

  para algún k entero. Como $n\pi < \Theta(t, \lambda_n)$ para todo $t > t_n$, el menor valor de k que satisface lo anterior es

  $$\Theta(t^*, \lambda) = (n + 1/2)\,\pi.$$

  En el punto t^* la solución $y(t, \lambda)$ alcanza un máximo ya que

  $$y''(t^*, \lambda) = -\lambda p(t^*) y(t^*, \lambda) < 0.$$

  Para todo $t > t_n$ la solución no se anula, y como existe un punto donde toma un valor positivo se deduce que $y(t, \lambda)$ es positiva para todo $t > t_n$, y como consecuencia inmediata tenemos que $y''(t, \lambda_n) < 0$ para todo $t > t_n$.

  Pero en el límite, cuando $t \to \infty$, la solución tiende a un valor finito, teniendo que cambiar de concavidad en algún t. Esto es imposible ya que la derivada segunda tiene el mismo signo para todo $t \in (t_n, \infty)$. Concluímos que la derivada de la solución y' no se puede anular en $[t_n, \infty)$, y entonces Θ debe satisfacer

$$\Theta(t, \lambda_n) < (n + 1/2)\, \pi \quad \text{para } \ t \in (t_n, \infty)$$

ya que el primer cero de y' después de t_n es $t = (n + 1/2)\, \pi$.

$\square$

Sabemos entonces que la función $\Theta(t, \lambda)$ está acotada para valores de $t > t_n$, veamos ahora que pasa en el límite cuando $t \to \infty$.

Lema 4.2.3. *Si $y(t, \lambda_n)$ es una autofunción asociada a λ_n del problema, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \Theta(t, \lambda_n) = (n + 1/2)\, \pi.$$

Demostración. Por ser $y(t, \lambda_n)$ una autofunción, está acotada y existe una constante $C > 0$ tal que $|y(t, \lambda_n)| \leq C$ para todo t, y además vale que

$$\lim_{t\to\infty} y'(t, \lambda) = 0. \tag{4.14}$$

Despejando de la ecuación (4.1) $y''(t, \lambda_n) = -\lambda p(t) y(t, \lambda_n)$ e integrando desde t, obtenemos

$$y'(t, \lambda_n) = \lambda_n \int_t^\infty p(s) y(s, \lambda_n) ds$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|y'(t, \lambda_n)| &= |\lambda \int_t^\infty p(s) y(s, \lambda_n) ds| \\
&\leq \lambda_n \int_t^\infty p(s) |y(s, \lambda_n)| ds \\
&\leq \lambda_n\, C \int_t^\infty p(s) ds \\
&= \lambda_n\, C \int_t^\infty \frac{ds}{(s+1)^2 w(s)} \\
&\leq \lambda_n\, C \int_t^\infty \frac{ds}{(s+1)^2 w(t)} \\
&= \frac{\lambda_n\, C}{(t+1) w(t)}.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $[p(t)]^{-1/2}$ nos queda

$$\begin{aligned} 0 &\leq [p(t)]^{-1/2}|y'(t,\lambda_n)| \\ &= (t+1)[w(t)]^{1/2}|y'(t,\lambda_n)| \\ &\leq (t+1)[w(t)]^{1/2}\frac{\lambda_n C}{(t+1)w(t)} \\ &= \frac{\lambda_n C}{[w(t)]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Como la función w es positiva y no está acotada,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_n C}{[w(t)]^{1/2}} = 0,$$

y por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty}[p(t)]^{-1/2}|y'(t,\lambda_n)| = 0.$$

Por otra parte, de acuerdo a la expresión (4.5) para la derivada y', tenemos

$$[p(t)]^{-1/2}|y'(t,\lambda_n)| = \lambda_n^{1/2}[p(t)]^{-\frac{1}{4}}R(t,\lambda_n)\cos[\Theta(t,\lambda_n)].$$

Si verificamos que el término que esta multiplicando al coseno está acotado, como el lado izquierdo tiende a cero, será necesario que el coseno lo haga. Al analizar la coordenada R obtuvimos la acotación de la Proposición (4.2.2),

$$[\lambda_n p(a)]^{-1/2}[p(t)]^{\frac{1}{4}} \leq R(t,\lambda_n) \leq \lambda_n^{-1/2}[p(t)]^{-\frac{1}{4}},$$

y multiplicando las desigualdades anteriores por $\lambda_n^{1/2}[p(t)]^{-\frac{1}{4}}$ nos queda

$$[p(a)]^{-1/2} \leq \lambda_n^{1/2}[p(t)]^{-\frac{1}{4}}R(t,\lambda_n) \leq [p(t)]^{-1/2},$$

y como $p(a) > 0$, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty}\cos[\Theta(t,\lambda_n)] = 0.$$

Entonces, debe ser

$$\lim_{t\to\infty}\Theta(t,\lambda_n) = (k+1/2)\,\pi$$

para algún k, pero por el lema (4.2.2) la única posibilidad es que sea

$$\lim_{t\to\infty}\Theta(t,\lambda_n) = (n+1/2)\,\pi,$$

y queda demostrado el lema. $\square$

4.3. Estimación de los autovalores

En esta sección demostraremos el Teorema 4.1.1.

Para la demostración necesitamos el siguiente resultado auxiliar demostrado por E. Hille en [10], pag 245.

Proposición 4.3.1. *Sea $a > 0$. Dadas las ecuaciones diferenciales en $[a, \infty)$,*

$$y'' + F(t)y = 0, \tag{4.15}$$

$$y'' + f(t)y = 0, \tag{4.16}$$

si para a suficientemente grande las soluciones de (4.15) tienen a lo sumo un cero, y si para $t \geq a$

$$t\int_t^\infty F(x)dx \geq t\int_t^\infty f(x)dx,$$

las soluciones de la segunda ecuación también tendrán a lo sumo un cero en $[a, \infty)$.

Observación 4.3.1. *Si $F(t) = \frac{1}{4}x^{-2}$, la solución general de la ecuación (4.15) es*

$$y(t) = x^{1/2}\left(A + B\log x\right),$$

que tiene a lo sumo un cero en el intervalo (a, ∞). Además,

$$t\int_t^\infty \frac{1}{4}x^{-2}dx = \frac{1}{4}.$$

Entonces, si f es una función tal que

$$t\int_t^\infty f(x)dx < \frac{1}{4}$$

la solución general de la ecuación (4.16) tendrá a lo sumo un cero en (a, ∞).

Lema 4.3.1. *Sea $\xi(\lambda)$ tal que*

$$w(\xi(\lambda)) = 4\lambda.$$

Entonces, la solución del problema (4.1) tiene a lo sumo un cero en el intervalo $[\xi(\lambda), \infty)$.

Demostración. Supongamos que $\xi(\lambda) < t$. Dado que w es una función creciente

$$\begin{aligned}
t\int_t^\infty \lambda p(x)dx &= t\int_t^\infty \frac{\lambda}{(x+1)^2\omega(x)}dx \\
&\leq \frac{t\lambda}{w(\xi(\lambda))}\int_t^\infty \frac{1}{(x+1)^2}dx \\
&= \frac{t\lambda}{4\lambda(t+1)} \\
&\leq \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Luego, por la Observación (4.3.1) la solución del problema (4.1) tiene a lo sumo un cero en el intervalo $[\xi(\lambda), \infty)$. □

Si elegimos $\xi(\lambda)$ tal que $w(\xi(\lambda)) = 4\lambda$, aplicando el Lema (4.3.1), el penúltimo cero de la autofunción $y(t, \lambda_n)$ satisface

$$x_{n-1}(\lambda_n) \leq \xi(\lambda_n) = \omega^{-1}(4\lambda_n),$$

donde $\omega^{-1}(\cdot)$ es la inversa de la función $\omega(\cdot)$.

Demostración del Teorema 4.1.1. Partiendo de la expresión (4.13) para la función Θ,

$$\Theta(t, \lambda) = \lambda^{1/2} \int_a^t [p(s)]^{1/2} ds + \frac{1}{4} \int_a^t \frac{p'(s)}{p(s)} \sin[2\Theta(s, \lambda)] ds,$$

la separamos de la siguiente manera:

$$\Theta(t, \lambda) = \lambda^{1/2} I(t) + S(t, \lambda)$$

donde

$$I(t) = \int_a^t [p(s)]^{1/2} ds \qquad \text{y} \qquad S(t, \lambda) = \frac{1}{4} \int_a^t \frac{p'(s)}{p(s)} \sin[2\Theta(s, \lambda)] ds$$

Si evaluamos en $\lambda = \lambda_n$ y $t = t_{n-1}$ (el n-ésimo autovalor y el $(n-1)$-ésimo cero de la autofunción correspondiente) por el lema (4.2.1) tenemos que

$$(n-1)\pi = \Theta(t_{n-1}, \lambda_n) = \lambda_n^{1/2} I(t_{n-1}) + S(t_{n-1}, \lambda_n). \tag{4.17}$$

Como

$$I(t_{n-1}) = \int_a^{t_{n-1}} [p(s)]^{1/2} ds = \int_a^{\infty} [p(s)]^{1/2} ds - \int_{t_{n-1}}^{\infty} [p(s)]^{1/2} ds$$

nos queda para λ_n grande

$$I(t_{n-1}) = I[1 + o(1)].$$

Por otro lado,

$$|S(t_{n-1}, \lambda_n)| = \left| \frac{1}{4} \int_a^{t_{n-1}} \frac{p'(s)}{p(s)} \sin[2\Theta(s, \lambda_n)] ds \right| \leq \frac{1}{4} \int_a^{t_{n-1}} \left| \frac{p'(s)}{p(s)} \right| ds,$$

y esta integral podemos calcularla como sigue:

$$\int_a^{t_{n-1}} \left| \frac{p'(s)}{p(s)} \right| ds = \int_a^{t_{n-1}} -\frac{p'(s)}{p(s)} ds = -[\ln(p(t_{n-1})) - \ln(p(a))] = \ln \left(\frac{p(a)}{p(t_{n-1})} \right).$$

Entonces,

$$|S(t_{n-1}, \lambda_n)| \leq \frac{1}{4} \ln \left(\frac{p(a)}{p(t_{n-1})} \right). \tag{4.18}$$

Veamos que este término es de orden $o(\lambda_n^{1/2})$ cuando $n \to \infty$.

Como $t_{n-1} < \xi(\lambda_n)$ tenemos que $p(\xi(\lambda_n)) < p(t_{n-1})$, y por lo tanto

$$\ln\left(\frac{p(a)}{p(t_{n-1})}\right) < \ln\left(\frac{p(a)}{p(\xi(\lambda_n))}\right).$$

Entonces, es suficiente mostrar que

$$\ln\left(\frac{p(a)}{p(\xi(\lambda_n))}\right) = o(\lambda_n^{1/2}). \tag{4.19}$$

Como la función $\omega(t)$ es creciente,

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{t}}^{t} [p(s)]^{1/2} ds &= \int_{\sqrt{t}}^{t} \frac{1}{(s+1)\sqrt{\omega(s)}} ds \\
&> \frac{1}{\sqrt{\omega(t)}} \int_{\sqrt{t}}^{t} \frac{1}{(s+1)} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{\omega(t)}} \ln \frac{t+1}{\sqrt{t}+1} \\
&> \frac{1}{\sqrt{\omega(t)}} \ln(t+1).
\end{aligned}$$

Cuando $t \to \infty$, la primer integral tiende a cero ya que I es finita. En particular, para $t = \xi(\lambda_n)$ tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{\omega(\xi(\lambda_n))}} \ln[\xi(\lambda_n)+1] < \int_{\sqrt{\xi(\lambda_n)}}^{\xi(\lambda_n)} [p(s)]^{1/2} ds$$

y como $\xi(\lambda_n) = \omega^{-1}(4\lambda_n)$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \xi(\lambda_n) = \infty.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \ln[\xi(\lambda_n)+1] = 0.$$

Volviendo a la expresión (4.19),

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{p(a)}{p(\xi(\lambda_n))}\right) &= \ln p(a) - \ln \frac{1}{p(\xi(\lambda_n))} \\
&= \ln p(a) - \ln\left[(\xi(\lambda_n)+1)^2 \omega(\xi(\lambda_n))\right] \\
&= \ln p(a) - 2\ln[\xi(\lambda_n)+1] - \ln(4\lambda_n),
\end{aligned}$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln p(a)}{\sqrt{\lambda_n}} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} = 0,$$

obtenemos que

$$\ln\left(\frac{p(a)}{p(t_{n-1})}\right) = o(\lambda_n^{1/2}),$$

y por la cota (4.18)

$$|S(t_{n-1}, \lambda_n)| = o(\lambda_n^{1/2}).$$

La ecuación (4.17) es equivalente entonces a

$$(n-1)\pi = \lambda_n^{1/2}\left[I(t_{n-1}) + \frac{S(t_{n-1}, \lambda_n)}{[\lambda_n]^{1/2}}\right],$$

con lo cual

$$\begin{aligned} (n-1)\pi &= \lambda_n^{1/2}\left[I(1+o(1)) + Io(1)\right] \\ \frac{(n-1)\pi}{I} &= \lambda_n^{1/2}\left[1+o(1)\right]. \end{aligned}$$

Observando que $n-1 = n[1+o(1)]$, el teorema queda demostrado. $\square$

Capítulo 5

Distribución asintótica de los autovalores

5.1. Introducción

En este capítulo vamos a trabajar con el siguiente problema de autovalores

$$
\begin{array}{rcll}
(-1)^{m-1}y^{(2m)}+\lambda p(t)y & = & 0 & t\in(a,\infty)\\
y^{(i)}(a,\lambda) & = & 0 & 0\le i\le m-1\\
\lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t,\lambda) & = & 0 & m\le i\le 2m-1.
\end{array}
\tag{5.1}
$$

donde $m\geq 1$ es un número natural, λ parámetro positivo, y $p\in C([a,\infty))$ no negativa, monótona, que satisface la condición

$$
\int_a^\infty t^{2m-1+\alpha}p(t)dt<\infty,
\tag{5.2}
$$

con $\alpha>0$.

Observación 5.1.1. *La hipótesis en p garantiza que*

$$
\int_a^\infty \sqrt[2m]{p(t)}dt<\infty,
$$

pues aplicando Hölder se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_a^\infty \sqrt[2m]{p(t)}dt &= \int_a^\infty t^{\frac{2m-1+\alpha}{2m}}\sqrt[2m]{p(t)}\cdot\frac{1}{t^{\frac{2m-1+\alpha}{2m}}}dt\\
&\le\left(\int_a^\infty t^{2m-1+\alpha}p(t)dt\right)^{\frac{1}{2m}}\left(\int_a^\infty\frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2m-1}}}dt\right)^{\frac{2m-1}{2m}}.
\end{aligned}
$$

Ambas integrales son finitas, la primera por hipótesis y la segunda por cálculo.

Si el peso p cumple con la condición (5.2), Elias en [4] demuestra la existencia de una sucesión $\{\lambda_k\}_k$ de autovalores, con $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_k<\cdots\nearrow\infty$, tal que para cada $\lambda = \lambda_k$ existe una única solución $y_k = y_k(t, \lambda_k)$ con $k-1$ ceros simples en (a, ∞).

El interés en este capítulo es estudiar el comportamiento asintótico de los autovalores de dicha sucesión. Para esto definimos la función $N(\lambda)$ que cuenta el número de autovalores menores o iguales que λ:

$$N(\lambda) = \#\{k \in N : \lambda_k \leq \lambda\}.$$

Nos interesa estudiar el crecimiento de $N(\lambda)$, en particular, si existe una potencia δ tal que

$$C_1\lambda^\delta \leq N(\lambda) \leq C_2\lambda^\delta,$$

para ciertas constanstes C_1 y C_2 a definir.

Para $m = 1$ Hille lo demostró utilizando la transformada de Prüfer como vimos en el capítulo anterior.

Para problemas de mayor orden no podemos aplicar el método de Prüfer. Por este motivo nuestra demostración se basa en resultados conocidos para intervalos acotados y en la desigualdad de Nehari del Capítulo (3).

En un primer paso estudiaremos el problema de segundo orden en intervalos acotados y no acotados.

Para los problemas de cuarto orden veremos que bajo ciertas condiciones tenemos que

$$c\lambda^{1/4}\int_a^\infty \sqrt[4]{p(t)}dt + o(\lambda^{1/4}) \leq N(\lambda) \leq C\lambda^{1/4}\int_a^\infty \sqrt[4]{p(t)}dt + o(\lambda^{1/4})$$

cuando $\lambda \to \infty$.

5.2. Problema general de segundo orden

5.2.1. Problema de segundo orden en un intervalo acotado $[a, b]$

En un primer paso vamos a estudiar el problema

$$y'' + \lambda p(t)y = 0, \qquad t \in (a, b) \tag{5.3}$$

con $p \in C([a, b])$ no negativa y condiciones de borde del tipo Dirichlet o Neumann.

Sea $\{\lambda_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema. Llamaremos $N_D(\lambda, (a, b))$ y $N_N(\lambda, (a, b))$ las funciones que cuentan el número de autovalores menores o iguales a λ del problema (5.3) cuando las condiciones de borde sean de tipo Dirichlet y Neumann respectivamente.

Para el peso $p \in C([a, b])$ definimos

$$\begin{array}{rcll} m & = & \text{mín} & \{p(x) : x \in [a, b]\} \\ M & = & \text{máx} & \{p(x) : x \in [a, b]\}. \end{array}$$

Proposición 5.2.1. *Sea $p \in C([a,b])$. Sea $\{\lambda_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema*

$$y'' + \lambda p(t) y = 0, \quad t \in (a,b).$$

Si las condiciones de borde son tipo Dirichlet tenemos que

$$N_D(\lambda, (a,b)) \geq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\sqrt{m}(b-a) - 1. \tag{5.4}$$

Si las condiciones de borde son de tipo Neumann tenemos que

$$N_N(\lambda, (a,b)) \leq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\sqrt{M}(b-a). \tag{5.5}$$

Demostración. Supongamos primero que las condiciones de borde de nuestro problema son de tipo Dirichlet.

Sea $\{\gamma_k^*\}_k$ la sucesión de autovalores del problema auxiliar

$$\begin{array}{rcll} y'' + \gamma^* m\, y & = & 0 & \quad t \in (a,b) \\ y(a) = y(b) & = & 0. & \end{array}$$

Sabemos, por cálculo directo, que el *k-ésimo* autovalor es de la forma

$$\gamma_k^* = \frac{\pi^2 k^2}{(b-a)^2 m} \quad .$$

Como $p(t) \geq m$ para todo $t \in [a,b]$, por el teorema de comparación de Sturm tenemos que

$$\lambda_k \leq \gamma_k^*.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} N_D(\lambda, (a,b)) &= \#\{k : \lambda_k \leq \lambda\} \\ &\geq \#\{k : \gamma_k^* \leq \lambda\} \\ &= \#\left\{k : \frac{\pi^2 k^2}{(b-a)^2 m} \leq \lambda\right\} \\ &= \#\left\{k : k \leq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\sqrt{m}(b-a)\right\} \\ &= \left[\frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\sqrt{m}(b-a)\right] \\ &\geq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\sqrt{m}(b-a) - 1, \end{aligned}$$

donde [.] representa la función parte entera.

Luego, tenemos que

$$N_D(\lambda,(a,b)) \geq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\sqrt{m}(b-a)-1.$$

Supongamos ahora que las condiciones de borde son de tipo Neumann.
Consideramos el siguiente problema auxiliar

$$\begin{array}{rcll} y'' + \mu^* M y &=& 0 & \quad t \in (a,b) \\ y'(a) = y'(b) &=& 0. & \end{array}$$

Sea $\{\mu_k^*\}_k$ la sucesión de autovalores coorespondiente. El k-*ésimo* autovalor de este problema es de la forma

$$\mu_k^* = \frac{\pi^2 k^2}{(b-a)^2 M} \quad .$$

Como $p(t) \leq M$ para todo $t \in [a,b]$, por el teorema de comparación de Sturm tenemos que

$$\mu_k^* \leq \lambda_k.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} N_N(\lambda,(a,b)) &= \#\{k : \lambda_k \leq \lambda\} \\ &\leq \#\{k : \mu_k^* \leq \lambda\} \\ &= \#\left\{k : \frac{\pi^2 k^2}{(b-a)^2 M} \leq \lambda\right\} \\ &= \#\left\{k : k \leq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\sqrt{M}(b-a)\right\} \\ &\leq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\sqrt{M}(b-a). \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

□

Supongamos ahora que nuestro problema se define de la siguiente manera

$$y'' + \lambda p(t) y = 0 \qquad t \in \Omega \tag{5.6}$$

con $\Omega \subseteq R$ conjunto abierto. Las condiciones que pediremos en la $\partial\Omega$ serán de tipo Dirichlet o Neumann.

El procedimiento min-max de Courant nos da una caracterización del k-*ésimo* autovalor, utilizando el cociente de Rayleigh, de la forma

$$\lambda_k = \min_{S^k \in H} \max_{v \in S^k} \frac{\int_\Omega v'^2(t)dt}{\int_\Omega p(t)v^2(t)dt}$$

donde S^k es un subespacio de dimensión k.

La elección del espacio H dependerá de las condiciones del problema en $\partial\Omega$. En el caso de condiciones de borde de tipo Dirichlet tomaremos $H = H_0^1(\Omega)$, mientras que para condiciones de tipo Neumann tomaremos $H = H^1(\Omega)$.

Ya que $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, si λ_k^0 es el k-*ésimo* autovalor del problema (5.6) con condiciones de borde Dirichlet y λ_k^1 es el correspondiente a condiciones de borde Neumann tenemos que

$$\lambda_k^1 \leq \lambda_k^0$$

y por lo tanto

$$N_D(\lambda,\Omega) \leq N_N(\lambda,\Omega).$$

Ahora, si tenemos $\cup_i I_i \subseteq \Omega$ con I_i intervalos abiertos disjuntos, nos interesa saber que relación existe entre las funciones $N_D(\lambda, I_i)$, $N_D(\lambda,\Omega)$, $N_N(\lambda, I_i)$ y $N_N(\lambda,\Omega)$.

Para esto necesitamos un resultado auxiliar que demostramos a continuación.

Proposición 5.2.2. *Sea* $\Omega = (a,b)$, *y* $c \in (a,b)$. *Entonces,*

$$H_0^1(I_1) \oplus H_0^1(I_2) \subset H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset H^1(I_1) \oplus H^1(I_2)$$

donde $I_1 = (a,c)$ *y* $I_2 = (c,b)$.

Demostración. Demostramos cada una de las inclusiones:

- $H_0^1(I_1) \oplus H_0^1(I_2) \subset H_0^1(\Omega)$

  Si $v \in H_0^1(I_1) \oplus H_0^1(I_2)$ existe $v_i \in H_0^1(I_i)$, con $i = 1,2$, tal que

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{si} \quad x \in I_1 \\ v_2(x) & \text{si} \quad x \in I_2. \end{cases}$$

Dada $v_i \in H_0^1(I_i)$ existe una sucesión $\{v_{in}\}_n \in C_0^\infty(I_i)$ tal que

$$\|v_{in} - v_i\|_{H^1(I_i)} \to 0,$$

donde la norma esta definida como $\|v\|_{H^1} = \|v\|_2 + \|v'\|_2$ en el intervalo correspondiente.

Si definimos

$$v_n(x) = \begin{cases} v_{in}(x) & \text{si} \quad x \in I_i \\ 0 & \text{si} \quad x \in \partial(I_1 \cup I_2) \end{cases}$$

tenemos que $\{v_n\}_n \in C_0^\infty(\Omega)$ y $v_n \to v$ en $H^1(\Omega)$ ya que

$$\begin{aligned} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} &= \|(v_{1n} + v_{2n}) - (v_1 + v_2)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|v_{1n} - v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_{2n} - v_2\|_{H^1(\Omega)} \\ &= \|v_{1n} - v_1\|_{H^1(I_1)} + \|v_{2n} - v_2\|_{H^1(I_2)}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad vale por tener las funciones v_{in}, v_i soporte compacto en I_i.

- $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

  La inclusión es directa.

- $H^1(I) \subset H^1(I_1) \oplus H^1(I_2)$.

  Si $v \in H^1(\Omega)$, entonces $v \in L^2(\Omega)$ y existe $g \in L^2(\Omega)$ tal que para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega v(t)\phi'(t)dt = -\int_\Omega g(t)\phi(t)dt. \tag{5.7}$$

Si definimos, para $i = 1, 2$,

$$v_i(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si} \quad x \in I_i \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad g_i(x) = \begin{cases} \text{g(x)} & \text{si} \quad x \in I_i \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{5.8}$$

tenemos que $v_i, g_i \in L^2(I_i)$.

Sea $\Psi \in C_0^\infty(I_i)$. Como $I_i \subset \Omega$ tenemos que $\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$ y por lo tanto evaluando la ecuación (5.7) en Ψ llegamos a que

$$\int_{I_i} v(t)\Psi'(t)dt = -\int_{I_i} g(t)\Psi(t)dt,$$

por ser Ψ de soporte compacto en I_i.

Luego, por (5.8)

$$\int_{I_i} v_i(t)\Psi'(t)dt = -\int_{I_i} g_i(t)\Psi(t)dt,$$

y por lo tanto $v_i \in H^1(I_i)$.

Como los intervalos I_1, I_2 son disjuntos, si $x \in I_1 \cup I_2$ tenemos que

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{si} \quad x \in I_1 \\ v_2(x) & \text{si} \quad x \in I_2, \end{cases}$$

y por lo tanto $v \in H^1(I_1) \oplus H^1(I_2)$.

$\square$

Proposición 5.2.3. *Sea $I = (a, b)$, y $c \in (a, b)$. Entonces,*

$$N_D(\lambda, I_1 \cup I_2) \leq N_D(\lambda, I) \leq N_N(\lambda, I) \leq N_N(\lambda, I_1 \cup I_2)$$

donde $I_1 = (a, c)$ y $I_2 = (c, b)$.

Demostración. Sea Ω un conjunto abierto y $H(\Omega)$ un espacio de Hilbert.

Definimos para S^k, subespacio de dimensión k contenido en $H(\Omega)$,

$$M(S^k) = \max_{v \in S^k} \frac{\int_\Omega v'^2(t)dt}{\int_\Omega p(t)v^2(t)dt}. \tag{5.9}$$

Dependiendo de las condiciones que demos al problema (5.6) tendremos que demostrar las cosas para N_D o N_N.

Supongamos primero que la condición en $\partial\Omega$ del problema (5.6) es de tipo Dirichlet.

Sean $\{\lambda_k^1\}_k$ y $\{\lambda_k^2\}_k$ las sucesiones de autovalores correspondiente al problema (5.6) cuando $\Omega = I$ y $\Omega = I_1 \cup I_2$, respectivamente.

Utilizando la definición min-max de Courant y la definición (5.9), podemos expresar los *k-ésimos* autovalores como

$$\begin{aligned}
\lambda_k^1 &= \min_{S^k \in H} M(S^k) \quad \text{con} \quad H = H_0^1(I) \\
\lambda_k^2 &= \min_{S^k \in H} M(S^k) \quad \text{con} \quad H = H_0^1(I_1) \oplus H_0^1(I_2).
\end{aligned}$$

Por la Proposición (5.2.2) sabemos que $H_0^1(I_1) \oplus H_0^1(I_2) \subset H_0^1(I)$, con lo cual

$$\lambda_k^1 \leq \lambda_k^2.$$

Luego, dado $\lambda > 0$ tenemos que

$$\#\left\{k : \lambda_k^2 \leq \lambda\right\} \leq \#\left\{k : \lambda_k^1 \leq \lambda\right\}$$

y por lo tanto

$$N_D(\lambda, I_1 \cup I_2) \leq N_D(\lambda, I).$$

Supongamos ahora que la condición en $\partial\Omega$ del problema (5.6) es de tipo Neumann.

Al igual que antes definimos dos suceciones de autovalores, $\{\lambda_k^3\}_k$ y $\{\lambda_k^4\}_k$, correspondientes al problema (5.6) cuando $\Omega = I$ y $\Omega = I_1 \cup I_2$ respectivamente.

Definimos

$$\begin{aligned}
\lambda_k^3 &= \min_{S^k \in H} M(S^k) \quad \text{con} \quad H = H^1(I) \\
\lambda_k^4 &= \min_{S^k \in H} M(S^k) \quad \text{con} \quad H = H^1(I_1) \oplus H^1(I_2).
\end{aligned}$$

Entonces, por la Proposición (5.2.2) sabemos que $H^1(I) \subset H^1(I_1) \oplus H^1(I_2)$ y por lo tanto

$$\lambda_k^4 \leq \lambda_k^3.$$

Dado $\lambda > 0$ tenemos que

$$\#\left\{k : \lambda_k^3 \leq \lambda\right\} \leq \#\left\{k : \lambda_k^4 \leq \lambda\right\}$$

y por lo tanto

$$N_N(\lambda, I) \leq N_N(\lambda, I_1 \cup I_2).$$

$\square$

Observación 5.2.1. *La Proposición anterior se puede extender, por inducción, a una unión finita de intervalos abiertos disjuntos.*

Proposición 5.2.4. *Sea I_i un intervalo abierto ($1 \leq i \leq n$), con $I_i \cap I_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces*

$$N(\lambda, \bigcup_{i=1}^{n} I_i) = \sum_{i=1}^{n} N(\lambda, I_i) \tag{5.10}$$

Demostración. Sea y^i una autofunción del problema (5.6) en $\Omega = I_i$ correspondiente al autovalor λ^i. Si la extendemos como cero por fuera de I_i, será autofunción para el problema cuando $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ correspondiente a cierto autovalor λ. Entonces,

$$N(\lambda, \bigcup_{i=1}^{n} I_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(\lambda, I_i).$$

Por otra parte, si λ es un autovalor con autofunción y del problema (5.6) cuando $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, para toda función $v \in H_0^1(\Omega)$ tenemos que

$$\int_\Omega y'(t)v'(t)dt = \lambda \int_\Omega p(t)y(t)v(t)dt.$$

Si v es de soporte compacto en I_i, la autofunción $y\mid_{I_i}$ es una solución débil del problema cuando $\Omega = I_i$.

Ya que la función $y \in C^2(\Omega)$, se tiene $y\mid_{I_i}$ es una solución clásica de (5.6) en $\Omega = I_i$. Luego, si $y\mid_{I_i}$ no es identicamente nula, λ será autovalor del problema en I_i y por lo tanto

$$N(\lambda, \bigcup_{i=1}^{n} I_i) \geq \sum_{i=1}^{n} N(\lambda, I_i).$$

□

Ya tenemos las herramientas necesarias para poder ver cual es el comportamiento asintótico de la función $N(\lambda)$ para el problema de segundo orden cuando las condiciones de borde son de tipo Dirichlet o Neumann.

Teorema 5.2.1. *Sea $p \in C[a,b]$ no negativa. Sea $\{\lambda_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y'' + \lambda p(t)y &=& 0 & t \in (a,b) \\ y(a) = y(b) &=& 0 & \end{array} \right. \tag{5.11}$$

Entonces

$$N(\lambda, (a,b)) = \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^b \sqrt{p(t)}dt + o(\lambda^{1/2}) \tag{5.12}$$

cuando $\lambda \to \infty$.

Demostración. Sean $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ puntos correspondientes a una partición del intervalo $[a,b]$.

Para $1 \leq i \leq n$ definimos los intervalos $I_i = (t_{i-1}, t_i)$. En cada uno de ellos consideramos los siguientes problemas auxiliares:

$$(a) \qquad \begin{array}{rcll} y'' + \gamma p(t)y &=& 0 & t \in (t_{i-1}, t_i) \\ y(t_{i-1}) = y(t_i) &=& 0, & \end{array}$$

$$(b) \qquad \begin{array}{rcll} y'' + \mu p(t)y &=& 0 & t \in (t_{i-1}, t_i) \\ y'(t_{i-1}) = y'(t_i) &=& 0. & \end{array}$$

Por la Proposición (5.2.1) tenemos que

$$\begin{array}{rcl} N_N(\lambda, (t_{i-1}, t_i)) &\leq& \dfrac{\lambda^{1/2}}{\pi}\sqrt{M_i}(t_i - t_{i-1}) \\ \\ N_D(\lambda, (t_{i-1}, t_i)) &\geq& \dfrac{\lambda^{1/2}}{\pi}\sqrt{m_i}(t_i - t_{i-1}) - 1. \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rl} M_i = \text{máx} & \{p(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ m_i = \text{mín} & \{p(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}. \end{array}$$

Sea $\varepsilon > 0$ fijo.

Como $\sqrt{p}$ es integrable, para n suficientemente grande tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{M_i}(t_i - t_{i-1}) &\leq& \displaystyle\int_a^b \sqrt{p(t)}dt + \varepsilon \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{m_i}(t_i - t_{i-1}) &\geq& \displaystyle\int_a^b \sqrt{p(t)}dt - \varepsilon. \end{array}$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} N_N(\lambda, (t_{i-1}, t_i)) &\leq& \dfrac{\lambda^{1/2}}{\pi}\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{p(t)}dt + \varepsilon\right) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} N_D(\lambda, (t_{i-1}, t_i)) &\geq& \dfrac{\lambda^{1/2}}{\pi}\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{p(t)}dt - \varepsilon\right) - n. \end{array}$$

Ahora, por las Proposiciones (5.2.3) y (5.2.4) tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} N_D(\lambda, (t_{i-1}, t_i)) \leq N(\lambda, (a, b)) \leq \sum_{i=1}^{n} N_N(\lambda, (t_{i-1}, t_i)),$$

y finalmente

$$\frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\left(\int_a^b \sqrt{p(t)}dt - \varepsilon\right) - n \leq N(\lambda, (a, b)) \leq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\left(\int_a^b \sqrt{p(t)}dt + \varepsilon\right).$$

Luego

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_a^b \sqrt{p(t)}dt - \varepsilon\right) - \frac{n}{\lambda^{1/2}} \leq \frac{N(\lambda, (a, b))}{\lambda^{1/2}} \leq \frac{1}{\pi}\left(\int_a^b \sqrt{p(t)}dt + \varepsilon\right).$$

Cuando $\lambda \to \infty$ tenemos que $\dfrac{n}{\lambda^{1/2}} \to 0$ y

$$N(\lambda, (a,b)) = \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^b \sqrt{p(t)}dt + o(\lambda^{1/2})$$

como queríamos demostrar. $\square$

Observación 5.2.2. *Si consideramos el problema*

$$\begin{array}{rcll} y'' + \lambda p(t)y & = & 0 & \quad t \in (a,b) \\ y'(a) = y'(b) & = & 0 & \end{array}$$

se puede demostrar, de igual manera que la Proposición (5.12)*, que el comportamiento asintótico de la función $N(\lambda)$ también es de la forma*

$$N(\lambda, (a,b)) = \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^b \sqrt{p(t)}dt + o(\lambda^{1/2})$$

cuando $\lambda \to \infty$.

5.2.2. Problema de segundo orden en un intervalo no acotado

Ahora vamos a estudiar el problema de segundo orden definido en un intervalo no acotado. Seguimos las ideas de [15].

Definimos el problema

$$\begin{array}{rcll} y'' + \lambda p(t)y & = & 0 & \quad t \in (a,\infty) \\ y(a) & = & 0 & \\ \lim\limits_{t\to\infty} y'(t) & = & 0, & \end{array} \tag{5.13}$$

donde λ parámetro positivo, y $p \in C([a,\infty))$ no negativa y monótona, que satisface la condición (5.2).

Proposición 5.2.5. *Sea $p \in C([a,\infty))$ una función no negativa, monótona que satisface la condición* (5.2)*. Sea $\{\lambda_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema* (5.13) *y sea $N(\lambda)$ la función correspondiente al problema que cuenta el número de autovalores menores o iguales a λ. Entonces*

$$N(\lambda) \geq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^\infty \sqrt{p(t)}dt + o(\lambda^{1/2})$$

cuando $\lambda \to \infty$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ fijo.

Por la observación (5.1.1) existe $T_\varepsilon > a$ tal que

$$\int_{T_\varepsilon}^\infty \sqrt{p(t)}dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideramos el problema auxiliar

$$\begin{aligned} v'' + \mu p(t)v &= 0, \quad t \in (a, T_\varepsilon) \\ v(a) = v(T_\varepsilon) &= 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Para este problema existe una sucesión $\{\mu_k\}_k$ de autovalores simples. Además, la autofunción v_k correspondiente al autovalor μ_k tiene $(k-1)$ ceros en el intervalo (a, T_ε).

Sea y_k la autofunción correspondiente al autovalor λ_k del problema (5.13). Como vimos en el capítulo (2) dicha autofunción tiene exactamente $(k-1)$ ceros simples en el intervalo (a, ∞).

Entonces

$$\lambda_k \leq \mu_k.$$

Si fuera $\mu_k < \lambda_k$, por el Teorema de Separación de Sturm, entre dos ceros de v_k debería haber un cero de y_k. Pero esto implica que y_k tiene por lo menos k ceros en el intervalo $(a, T_\varepsilon) \subset (a, \infty)$ lo que es imposible ya que en dicho intervalo puede tener a lo sumo $(k-1)$ ceros.

Luego, para $\lambda > 0$ tenemos

$$\#\left\{k : \mu_k \leq \lambda\right\} \leq \#\left\{k : \lambda_k \leq \lambda\right\},$$

lo que implica que

$$N(\lambda) \geq N(\lambda, (a, T_\varepsilon)) \tag{5.15}$$

donde $N(\lambda, (a, T_\varepsilon))$ es la función que cuenta el número de autovalores menores o iguales a λ del problema (5.14).

El comportamiento asintótico de $N(\lambda, (a, T_\varepsilon))$ está dado por el Teorema (5.2.1), por lo tanto, para todo $\lambda \geq \lambda(\varepsilon) = \lambda_\varepsilon$

$$\left| \frac{N(\lambda, (a, T_\varepsilon))}{\lambda^{1/2}} - \frac{1}{\pi} \int_a^{T_\varepsilon} \sqrt{p(t)}dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por un lado tenemos que

$$\frac{N(\lambda, (a, T_\varepsilon))}{\lambda^{1/2}} \geq \frac{1}{\pi} \int_a^{T_\varepsilon} \sqrt{p(t)}dt - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.16}$$

Ahora, dividiendo (5.15) por $\lambda^{1/2}$ y utilizando la cota (5.16)

$$\begin{aligned}
\frac{N(\lambda)}{\lambda^{1/2}} &\geq \frac{N(\lambda,(a,T_\varepsilon))}{\lambda^{1/2}} \\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_a^{T_\varepsilon}\sqrt{p(t)}dt - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_a^{\infty}\sqrt{p(t)}dt - \int_{T_\varepsilon}^{\infty}\sqrt{p(t)}dt - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_a^{\infty}\sqrt{p(t)}dt - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_a^{\infty}\sqrt{p(t)}dt - \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$. La otra desigualdad se prueba de forma similar quedando demostrado lo que queríamos. □

En una primera instancia vamos a tratar de encontrar una cota superior para la función $N(\lambda)$ del problema (5.13) aunque no sea la óptima.

Proposición 5.2.6. *Sea $p \in C([a,\infty))$ una función no negativa, monótona que satisface la condición* (5.2). *Sea $\{\lambda_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema* (5.13) *y sea $N(\lambda)$ la función correspondiente al problema que cuenta el número de autovalores menores o iguales a λ. Entonces*

$$N(\lambda) \leq \frac{2\lambda^{1/2}}{\pi}\int_a^{\infty}\sqrt{p(t)}dt + 1$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración. Sea y_k la autofunción correspondiente al autovalor λ_k el *k-ésimo* autovalor del problema (5.13). Sabemos que dicha función tiene k ceros en el intervalo $[a,\infty)$. Sea t_* el último cero de y_k.

Definimos el siguiente problema auxiliar

$$\begin{aligned}
v'' + \mu p(t)v &= 0, \quad t \in (a,t_*) \\
v(a) = v(t_*) &= 0.
\end{aligned}$$

Consideramos el autovalor μ_{k-1} ($k \geq 2$) de este problema. Como el peso p es monótono, utilizando la cota de Nehari calculada en el capítulo (3) tenemos que

$$\mu_{k-1} > \frac{\pi^2(k-1)^2}{4\left(\int_a^{t_*}\sqrt{p(x)}dx\right)^2}.$$

Para este autovalor existe una única autofunción v_{k-1} con k ceros en el intervalo $[a, t_*]$. Ya que la autofunción y_k es solución del problema

$$\begin{aligned} y'' + \lambda_k p(t) y = 0, \quad t \in (a, t_*) \\ y(a) = y(t_*) = 0 \end{aligned}$$

con k ceros en el intervalo $[a, t_*]$, tenemos que $\lambda_k = \mu_{k-1}$ en dicho intervalo.

Entonces

$$\lambda_k > \frac{\pi^2 (k-1)^2}{4\left(\int_a^{t_*} \sqrt{p(x)}dx\right)^2} > \frac{\pi^2 (k-1)^2}{4\left(\int_a^{\infty} \sqrt{p(x)}dx\right)^2}.$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \#\{k : \lambda_k \leq \lambda\} \\ &\leq \#\left\{k : \frac{\pi^2 (k-1)^2}{4\left(\int_a^{\infty} \sqrt{p(t)}dt\right)^2} \leq \lambda\right\} \\ &= \#\left\{k : k \leq \frac{2\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^{\infty} \sqrt{p(t)}dt + 1\right\} \\ &\leq \frac{2\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^{\infty} \sqrt{p(t)}dt + 1. \end{aligned}$$

□

Ahora vamos a calcular una cota óptima por arriba de la función $N(\lambda)$ del problema (5.13).

Proposición 5.2.7. *Sea $p \in C([a, \infty))$ una función no negativa, monótona que satisface la condición* (5.2)*. Sea $\{\lambda_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema* (5.13) *y sea $N(\lambda)$ la función correspondiente al problema que cuenta el número de autovalores menores a λ. Entonces Entonces*

$$N(\lambda) \leq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^{\infty} \sqrt{p(t)}dt + o(\lambda^{1/2})$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración. Sea T_ε tal que

$$\int_{T_\varepsilon}^{\infty} \sqrt{p(t)}dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fijamos $\lambda > 0$. Sea λ_n el mayor autovalor del problema (5.13) menor o igual a λ.

La autofunción y_n correspondiente λ_n tiene exactamente n ceros en el intervalo $[a,\infty)$. Por lo tanto nos basta con encontrar una cota para la cantidad de ceros de la autofunción para obtener una cota para $N(\lambda)=n$.

Sea j el número de ceros de la autofunción y_n en el intervalo $[a,T_\varepsilon]$ y $(n-j)$ el número de ceros en el intervalo (T_ε,∞). Podemos suponer que la autofunción no se anula en T_ε, ya que de hacerlo nos basta con movernos a un punto $T'_\varepsilon=T_\varepsilon+\delta$ con δ suficientemente pequeño y usar este punto como corte para el intervalo $[a,\infty)$.

En primer lugar vamos a buscar una cota para la cantidad de ceros de la autofunción en el intervalo $[a,T_\varepsilon]$.

Sea t^* el último cero de y_n en el intervalo $(a,T_\varepsilon]$.

Consideramos los siguientes problemas auxiliares

$$\begin{array}{rcll} y''+\mu p(t)y &=& 0 & t\in(a,t^*) \\ y(a) &=& 0 & \\ y(t^*) &=& 0 & \end{array} \tag{5.17}$$

$$\begin{array}{rcll} y''+\nu p(t)y &=& 0 & t\in(a,T_\varepsilon) \\ y(a) &=& 0 & \\ y(T_\varepsilon) &=& 0 & \end{array} \tag{5.18}$$

Sean $\{\mu_k\}_k$ y $\{\nu_k\}_k$ las sucesiones de autovalores correspondientes a los problemas (5.17)-(5.18),

Llamaremos $N(\lambda,(a,t_*))$ y $N(\lambda,(a,T_\varepsilon))$, respectivamente, las funciones que cuentan los autovalores menores o iguales a λ de estos problemas.

Usando la caracterización min-max de Courant, los k-*ésimos* autovalores de los problemas (5.17)-(5.18) se definen como

$$\mu_k=\min_{S^k\in H_0^1([a,t^*])}\ \max_{v\in S^k}\frac{\int_a^{t^*}v'^2(t)dt}{\int_a^{t^*}p(t)v^2(t)dt},$$

$$\nu_k=\min_{S^k\in H_0^1([a,T_\varepsilon])}\ \max_{v\in S^k}\frac{\int_a^{T_\varepsilon}v'^2(t)dt}{\int_a^{T_\varepsilon}p(t)v^2(t)dt}.$$

donde S^k es un subespacio de dimensión k contenido en $H_0^1([a,t^*])$, o en $H_0^1([a,T_\varepsilon])$ según corresponda.

Ahora, como $H_0^1([a,T_\varepsilon])\subset H_0^1([a,t^*])$ tenemos que

$$\nu_k\le\mu_k.$$

Por lo tanto

$$\#\{k:\mu_k\le\lambda\}\le\#\{k:\nu_k\le\lambda\}$$

y

$$N(\lambda,(a,t_*))\le N(\lambda,(a,T_\varepsilon)). \tag{5.19}$$

La autofunción correspondiente al autovalor μ_{j-1} tiene j ceros en el intervalo $[a,T_\varepsilon]$. Ya que la autofunción y_n es solución de la ecuación $y''+\lambda_n p(t)y=0$

en $[a, T_\varepsilon]$ con la misma cantidad de ceros en dicho intervalo, por el teorema de separación de Sturm tenemos que

$$\mu_{j-1} = \lambda_n \leq \lambda.$$

Entonces

$$(j-1) \leq \#\{k : \mu_k \leq \lambda\} = N(\lambda, (a, t_*)).$$

Luego, utilizando la cota (5.19) llegamos a que

$$j \leq N(\lambda, (a, T_\varepsilon)) + 1. \tag{5.20}$$

Ahora, sabemos que cuando $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda, (a, T_\varepsilon)) = \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^{T_\varepsilon} \sqrt{p(t)}dt + o(\lambda^{1/2}).$$

Entonces, dado ε existe un λ_ε tal que para todo $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$ tenemos que

$$N(\lambda, (a, T_\varepsilon)) \leq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^{T_\varepsilon} \sqrt{p(t)}dt + \lambda^{1/2}\varepsilon. \tag{5.21}$$

Por (5.20) y (5.21) tenemos que

$$\begin{aligned} j &\leq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^{T_\varepsilon} \sqrt{p(t)}dt + \lambda^{1/2}\varepsilon + 1 \\ &\leq \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^{\infty} \sqrt{p(t)}dt + \lambda^{1/2}\varepsilon + 1. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Consideramos ahora el siguiente problema auxiliar

$$\begin{aligned} y'' + \gamma p(t) y &= 0, \quad t \in (t^{**}, \infty) \\ y(t^{**}) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} y'(t) &= 0 \end{aligned} \tag{5.23}$$

donde t^{**} es el primer cero de la autofunción y_n en el intervalo (T_ε, ∞).

Sea $\{\gamma_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema y $N(\lambda, (t^{**}, \infty))$ la función que cuenta el número de autovalores menores o iguales a λ.

Según definimos en el capítulo (2) tenemos que

$$\gamma_{n-j} = \inf \Big\{\gamma \in (0, \infty) : y(t, \gamma) \text{ es la única solución del problema (5.23) que tiene al menos } (n-j) \text{ ceros en el intervalo } [t^{**}, \infty)\Big\}$$

$$\lambda_n = \inf \Big\{\lambda \in (0, \infty) : y(t, \lambda) \text{ es la única solución del problema (5.13) que tiene al menos } n \text{ ceros en el intervalo } [a, \infty)\Big\}$$

Como la autofunción y_n se anula en t^{**} y tiene $(n-j)$ ceros en el intervalo $[t^{**},\infty)$

$$\gamma_{n-j} \le \lambda_n.$$

Ahora, como $\lambda_n \le \lambda$ tenemos que

$$(n-j) \le \#\{k : \gamma_k \le \lambda\} = N(\lambda,(t_n^*,\infty)). \tag{5.24}$$

La Proposición (5.2.6) es aplicable al problema (5.23) y por lo tanto tenemos que

$$N(\lambda,(t^{**},\infty)) \le \frac{2\lambda^{1/2}}{\pi}\int_{t^{**}}^{\infty}\sqrt{p(t)}dt + 1.$$

Como $T_\varepsilon < t^{**}$, y por las hipótesis sobre $\sqrt{p}$

$$\int_{t^{**}}^{\infty}\sqrt{p(t)}dt \le \int_{T_\varepsilon}^{\infty}\sqrt{p(t)}dt \le \varepsilon/2.$$

Entonces

$$(n-j) \le \frac{2\lambda^{1/2}}{\pi}\int_{T_\varepsilon}^{\infty}\sqrt{p(t)}dt + 1 \le \frac{\lambda^{1/2}\varepsilon}{\pi} + 1. \tag{5.25}$$

Finalmente por (5.22) y (5.25) llegamos a que

$$\begin{aligned} N(\lambda) = n &= j + (n-j) \\ &\le \left(\frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\int_a^{\infty}\sqrt{p(t)}dt + \lambda^{1/2}\varepsilon + 1\right) + \left(\frac{\lambda^{1/2}\varepsilon}{\pi} + 1\right) \\ &\le \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\int_a^{\infty}\sqrt{p(t)}dt + \lambda^{1/2}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\varepsilon + 2. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente chico, y $\dfrac{2}{\lambda^{1/2}} \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) \le \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\int_a^{\infty}\sqrt{p(t)}dt + o(\lambda^{1/2}).$$

□

El siguiente resultado es consecuencia de las Proposiciones anteriores.

Teorema 5.2.2. *Sea* $\{\lambda_k\}_k$ *la sucesión de autovalores del problema* (5.13). *Sea* $p(t)$ *una función positiva, continua y monótona en* $[a,\infty)$ *satisfaciendo la condición (5.2). Entonces, el comportamiento asintótico de* $N(\lambda)$ *está dado por*

$$N(\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\int_a^{\infty}\sqrt{p(t)}dt + o(\lambda^{1/2}) \tag{5.26}$$

cuando $\lambda \to \infty$.

5.3. Análisis del problema de cuarto orden

5.3.1. Introducción al problema de cuarto orden

Cuando analizamos el problema de segundo orden la teoría de Sturm fue fundamental para poder analizar el comportamiento de la función $N(\lambda)$.

En problemas de mayor orden nos encontramos con el incoveniente de no tener una teoría general, similar a la de Sturm.

El problema de cuarto orden fue abordado en detalle por Leighton y Nehari en [11]. Estudiaron propiedades generales de las soluciones de ecuaciones del tipo

$$(y'')'' - q(t)y = 0, \quad t \in [a, \infty) \tag{5.27}$$

con $q \in C([a, \infty))$ no negativa y el problema asociado de autovalores.

Enunciaremos los conceptos fundamentales que necesitamos para el desarrollo de nuestro problema de cuarto orden demostrados por Leighton y Nehari en dicho trabajo.

Propiedades generales de las soluciones y teoremas de separación

El siguiente teorema que nos da una cota para la cantidad de ceros en los cuales pueden diferir dos soluciones cualesquiera de (5.27).

Teorema 5.3.1. *Sea $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dos soluciones no triviales de la ecuación (5.27) que cumplen $y_1(a) = y_1(b) = y_2(a') = y_2(b') = 0$, con $0 < a' < a < b < b'$. Sean r y s la cantidad de ceros en el intervalo $[a, b]$ de $y_1(x)$ y $y_2(x)$, respectivamente. Entonces*

$$r - 3 < s < r + 3.$$

Problema asociado de autovalores

Consideramos el problema de autovalores

$$\begin{array}{rcll} (y'')'' - \gamma p(t)y & = & 0 & t \in (a, b) \\ y(a) = y'(a) & = & 0 & \\ y(b) = y'(b) & = & 0. & \end{array} \tag{5.28}$$

con γ parámetro positivo, y $p \in C([a, b])$ no negativa.

Para este problema existe una sucesión $\{\gamma_k\}_k$ de autovalores positivos que se definen como

$$\gamma_k = \min_{S^k \in H} \max_{v \in S^k} \frac{\int_a^b v'^2(t)dt}{\int_a^b p(t)v^2(t)dt}$$

donde $H = \{v \in L^2([a, b]) : v(a) = v'(a) = 0\}$.

Vamos a mencionar solo dos aspectos de interés para el resto del capítulo que se refieren a esta sucesión de autovalores. Estos fueron demostrados por Leigthon-Nehari en [11].

Teorema 5.3.2. *Sea $p \in C([a,b])$ no negativa. Sea $\{\gamma_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema* (5.28)*. Entonces:*

(i) Todos los autovalores del problema (5.28) *son simples.*

(ii) La autofunción y_k correspondiente al autovalor γ_k tiene $k-1$ ceros simples en (a,b).

Se tiene además el siguiente resultado análogo al de segundo orden:

Teorema 5.3.3. *Sea $p \in C([a,b])$ una función monótona no negativa. Sea $\{\gamma_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema* (5.28)*. Entonces,*

$$N(\lambda,(a,b)) = \frac{\lambda^{1/4}}{\pi}\int_a^b \sqrt[4]{p(t)dt} + o(\lambda^{1/4})$$

cuando $\lambda \to \infty$.

5.3.2. Puntos conjugados

Sea $y(t)$ una solución de la ecuación (5.27) que tiene por lo menos $j+3$ ceros en el intervalo $[a,b]$ que cumplen

$$a = t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{j+3} \leq b$$

con $j \geq 1$.

Definimos el j-*ésimo* punto conjugado de a como el mínimo valor posible c tal que existe una solución de la ecuación (5.27) en $[a,c]$ con $j+3$ ceros en este intervalo. Notaremos este punto como $\eta_j(a)$.

Es decir, este punto define el intervalo $[a,\eta_j(a)]$ más pequeño, en donde existe una solución de la ecuación (5.27) que tiene exactamente $j+3$ ceros (contando las multiplicidades posibles).

A una solución de (5.27) que se anula en los puntos $t = a, \eta_j(a)$, y tiene exactamente $(j+3)$ ceros en el intervalo $[a,\eta_j(a)]$ la llamaremos *solución extremal.*

El siguiente Teorema fue demostrado por Leighton y Nehari en [11]. Dicho teorema garantiza la existencia del punto conjudado y de la solución extremal.

Teorema 5.3.4. *Sea $j \geq 1$. Si existe una solución $y(t)$ de* (5.27) *tal que $y(a) = 0$ y tiene por lo menos $j+3$ ceros en $[a,\infty)$, entonces existe un punto $\eta_j(a)$, con $\eta_j(a) > a$, y una solución $y_j(t)$ de* (5.27) *con las siguientes propiedades:*

1. *Los ceros de la solución $y_j(t)$ en $t = a$ y $t = \eta_j(a)$ son dobles.*

2. *La solución $y_j(t)$ tiene exactamente $j+3$ ceros en $[a,\eta_j]$, donde los dos ceros dobles son contados con su multiplicidad. Además, los ceros en (a,η_j) son simples.*

5.3.3. Problema de autovalores de cuarto orden en $[a, \infty)$

Vamos ahora a estudiar el problema

$$\begin{aligned} (y'')'' - \lambda p(t) y &= 0 \qquad t \in (a, \infty) \\ y(a,\lambda) = y'(a,\lambda) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} y''(t,\lambda) = \lim_{t\to\infty} y'''(t,\lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{5.29}$$

donde λ parámetro positivo, y $p \in C([a,\infty))$ no negativa, monótona que satisface la condición (5.2).

Sea $\{\lambda_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema (5.29). Sabemos que la autofunción y_k correspondiente al *k-ésimo* autovalor $(k+1)$ ceros en el intervalo $[a,\infty)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la Observación (5.1.1), la función $\sqrt[4]{p}$ es integrable y por lo tanto existe $T_\varepsilon \geq a$ tal que

$$\int_{T_\varepsilon}^{\infty} \sqrt[4]{p(t)}dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

El Teorema (5.3.3) nos garantiza la existencia de soluciones de la ecuación del problema de cuarto orden con un número fijo de ceros, siempre y cuando tengamos garantizada la existencia de una solución que se anule en el punto a y tenga por lo menos 4 ceros en el intervalo $[a,\infty)$. Como vamos a hacer uso de este teorema, necesitamos que los valores de λ sean tales que la autofunción correspondiente tengan por lo menos cuatro ceros en $[a,\infty)$.

Para esto hacemos uso de la Observación (2.3.1) del capítulo (2) que nos garantiza la existencia de un valor λ_0 tal que para todo $\lambda > \lambda_0$ la solución correspondiente $y(t,\lambda)$ tiene por lo menos 4 ceros en el intervalo $[T_\varepsilon,\infty)$, y en consecuencia en $[a,\infty)$.

Sea λ_k, con $k \geq 5$, el *k-ésimo* autovalor de nuestro problema que verifica

$$\lambda_k > \lambda_0.$$

Por como elegimos el autovalor, la autofunción asociada y_k tiene por lo menos 4 ceros en el intervalo $[T_\varepsilon,\infty)$.

Entonces, tenemos una solución de la ecuación

$$(y'')'' - \lambda_k p(t) y = 0$$

que se anulta en a y tiene $(k+1) = (k-2)+3$ ceros en el intervalo $[a,\infty)$.

Aplicando el Teorema (5.3.4) existe un punto $\eta_{k-2}(a)$, y una solución extremal $\widehat{y}$ con $(k-2)+3 = k+1$ ceros del problema

$$\begin{aligned} (y'')'' - \lambda_k p(t) y &= 0 \\ y(a) = y'(a) &= 0 \\ y(\eta_{k-2}(a)) = y'(\eta_{k-2}(a)) &= 0. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Sabemos además que los $(k-3)$ ceros de la solución $\widehat{y}$ en $(a, \eta_{k-2}(a))$ son simples.

El inconveniente con el problema (5.30) es que el intervalo en el cual esta definido depende de k.

Vamos a buscar un problema me de información sobre (5.30) pero que no dependa de k. Vamos a buscar una cota inferior para el punto $\eta_{k-2}(a)$.

Lema 5.3.1. *Sea $\eta_{k-2}(a)$ el $(k-2)$-ésimo punto conjugado de a. Entonces*

$$\eta_{k-2}(a) > T_\varepsilon.$$

Demostración. Supongamos que $\eta_{k-2}(a) \leq T_\varepsilon$.

Si h represnta la cantidad de ceros de la autofunción y_k en el intervalo $[T_\varepsilon, \infty)$, tenemos (por como se eligió k) que $h \geq 4$ y, en el intervalo $[a, T_\varepsilon)$ tendremos a lo sumo $(k+1) - h$ ceros.

Sea s^* el primer cero de $\widehat{y}$ en $(a, \eta_{k-2}(a)]$ y t^* el último cero de y_k. Entonces,

$$a < s^* < \eta_{k-2}(a) \leq T_\varepsilon < t^*.$$

Si analizamos lo que sucede en el intervalo $[s^*, \eta_{k-2}(a)]$

- la autofunción y_k tiene a lo sumo $(k+1-h) - 2 = (k-h-1)$ ceros
- La solución extremal $\widehat{y}$ tiene exactamente $(k+1) - 2 = k-1$ ceros.

En ambos casos, al contar la cantidad de ceros, estamos excluyendo el cero doble que tienen en a.

El número de ceros en el que difieren ambas soluciones es h. Como las funciones y_k, $\widehat{y}$ son soluciones de la ecuación $(y'')'' - \lambda_k p(t) y = 0$, por el Teorema (5.3.1) la cantidad de ceros de ambas soluciones en el intervalo $[s^*, \eta_{k-2}(a)]$ puede diferir en a lo sumo tres. Pero llegamos a un absurdo ya que $h \geq 4$.

$\square$

Vamos a hacer uso de la existencia del punto conjugado para encontrar una cota inferior para la función $N(\lambda)$ del problema (5.29).

Teorema 5.3.5. *Sea $N(\lambda)$ la función que cuenta el número de autovalores menores o iguales a λ del problema* (5.29). *Entonces*

$$N(\lambda) \geq \frac{\lambda^{1/4}}{\pi} \int_a^\infty \sqrt[4]{p(t)}dt + o(\lambda^{1/4})$$

cuando $\lambda \to \infty$.

Demostración. Consideramos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{array}{rcll} (v'')'' - \gamma p(t) v & = & 0 & t \in (a, \eta_{k-2}(a)) \\ v(a) = v'(a) & = & 0 & \\ v(\eta_{k-2}(a)) = v'(\eta_{k-2}(a)) & = & 0. & \end{array} \tag{5.31}$$

Sea $\{\gamma_j\}_j$ la sucesión de autovalores de este problema. La autofunción correspondiente al autovalor γ_{k-2} tiene $(k+1)$ ceros en el intervalo $[a, \eta_{k-2}(a)]$.

Como la solución $\widehat{y}$ de la ecuación $(y'')'' - \lambda_k p(t)y = 0$ satisface las condiciones de borde del problema (5.31) y también tiene $(k+1)$ ceros en el intervalo $[a, \eta_{k-2}(a)]$, tenemos que

$$\lambda_k \leq \gamma_{k-2}. \tag{5.32}$$

Sea $\{\mu_j\}_j$ la sucesión de autovalores del problema

$$\begin{aligned} (w'')'' - \mu p(t)w &= 0 \quad t \in (a, T_\varepsilon) \\ w(a) = w'(a) &= 0 \\ w(T_\varepsilon) = w'(T_\varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Como $H_0^2([a, T_\varepsilon]) \subset H_0^2([a, \eta_{k-2}(a)]$ tenemos que

$$\gamma_{k-2} \leq \mu_{k-2}. \tag{5.33}$$

Por (5.32) y (5.33) tenemos

$$\lambda_k \leq \mu_{k-2}. \tag{5.34}$$

Dado $\lambda > 0$, si $N(\lambda, (a, T_\varepsilon)) = \#\{j : \mu_j \leq \lambda\}$, tenemos que

$$\#\{j : \mu_j \leq \lambda\} = 2 + \#\left\{j : \mu_{j-2} \leq \lambda\right\} \leq 2 + \#\left\{k : \lambda_k \leq \lambda\right\},$$

y por lo tanto

$$N(\lambda) \geq N(\lambda, (a, T_\varepsilon)) - 2.$$

Por el Teorema (5.3.3) sabemos que el comportamiento asintótico de $N(\lambda, (a, T_\varepsilon))$ es

$$N(\lambda, (a, T_\varepsilon)) = \frac{\lambda^{1/4}}{\pi} \int_a^b \sqrt[4]{p(t)}dt + o(\lambda^{1/4}).$$

Luego, para $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_\varepsilon^*$

$$\left| \frac{N(\lambda, (a, T_\varepsilon))}{\lambda^{1/4}} - \frac{1}{\pi} \int_a^{T_\varepsilon} \sqrt[4]{p(t)}dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{1/4}} \geq \frac{N(\lambda, (a, T_\varepsilon))}{\lambda^{1/4}} - \frac{2}{\lambda^{1/4}} &\geq \frac{1}{\pi} \int_a^{T_\varepsilon} \sqrt[4]{p(t)}dt - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{\lambda^{1/4}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^{\infty} \sqrt[4]{p(t)}dt - \frac{1}{\pi} \int_{T_\varepsilon}^{\infty} \sqrt[4]{p(t)}dt - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{\lambda^{1/4}} \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_a^{\infty} \sqrt[4]{p(t)}dt - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{\lambda^{1/4}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^{\infty} \sqrt[4]{p(t)}dt - \varepsilon - \frac{2}{\lambda^{1/4}} \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente chico, y $\dfrac{2}{\lambda^{1/4}} \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) \geq \frac{\lambda^{1/4}}{\pi} \int_a^{\infty} \sqrt{p(t)}dt + o(\lambda^{1/4}),$$

y el Teorema queda demostrado. □

Para la demostración del próximo teorema necesitamos el siguiente resultado que nos da una cota inferior para *k-ésimo* autovalor del problema (5.29). Aplicaremos la cota de Nehari calculada para el menor autovalor de problemas de orden $2m$ en un intervalo finito (a,b).

Proposición 5.3.1. *Sea $p \in C([a,\infty))$, no negativa y mónotona. Sea λ_k, $(k \geq 3)$, el k-ésimo autovalor del problema* (5.29). *Entonces*

$$\lambda_k^{1/4} \int_a^\infty \sqrt[4]{p(t)}dt \geq \left[\frac{k}{3}\right] \Lambda_{[0,1]}^{1/4}, \tag{5.35}$$

donde $[.]$ *indica la parte entera, y* $\Lambda_{[0,1]}$ *es el primer autovalor del problema*

$$\begin{aligned} (y'')'' - \lambda p(t) y &= 0, \qquad t \in (0,1) \\ y(0) = y'(0) &= 0 \\ y''(1) = y'''(1) &= 0. \end{aligned}$$

Demostración. Sea λ_k el *k-ésimo* autovalor del problema (5.29). Como $k \geq 3$ tenemos que

$$k = 3m + r \quad \text{con} \quad m \geq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq r \leq 2.$$

Sean $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{3m}$ los primeros $3m$ ceros de la autofunción y_k correspondiente a λ_k. Sabemos que el cero de esta autofunción en t_1 es doble mientras que el resto son ceros simples.

Definimos para $1 \leq i \leq m$ los intervalos

$$[a_i, b_i] = \begin{cases} [t_1, t_3] & \text{si} \quad i = 1 \\ [t_{3(i-1)}, t_{3i}] & \text{si} \quad 2 \leq i \leq m \end{cases}$$

Una primer cota que podemos encontrar para el lado izquierdo de la desigualdad (5.35) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda_k^{1/4} \int_a^\infty \sqrt[4]{p(t)}dt &\geq \lambda_k^{1/4} \int_a^{t_{3m}} \sqrt[4]{p(t)}dt \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_k^{1/4} \int_{a_i}^{b_i} \sqrt[4]{p(t)}dt \end{aligned} \tag{5.36}$$

Cada uno de los términos de la sumatoria podemos asociarlo con un problema conveniente en un intervalo finito. Buscaremos entonces una cota para cada uno de los terminos de la sumatoria.

En el intervalo $[a_i, b_i]$ la autofunción y_k es solución de la ecuación

$$(y'')'' - \lambda_k p(t) y = 0$$

y tiene exactamente 4 ceros. Entonces, por el Teorema (5.3.4) para cada a_i existe el punto conjugado $\eta_1(a_i)$ y una solución del problema

$$\begin{aligned} (y'')'' - \lambda_k p(t) y &= 0 \qquad t \in (a_i, \eta_1(a_i)) \\ y(a_i) = y'(a_i) &= 0 \\ y(\eta_1(a_i)) = y'(\eta_1(a_i)) &= 0. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Ya que los ceros de la solución del problema (5.37) en a_i y $\eta_1(a_i)$ son dobles, la solución es distinta de cero en el interior del intervalo. Luego, dicha solución corresponderá a la autofunción asociada al menor autovalor γ_p del problema

$$\begin{aligned} (y'')'' - \gamma p(t) y &= 0 \qquad t \in (a_i, \eta_1(a_i)) \\ y(a_i) = y'(a_i) &= 0 \\ y(\eta_1(a_i)) = y'(\eta_1(a_i)) &= 0. \end{aligned}$$

Como los autovalores de este problema son simples, tenemos que $\lambda_k = \gamma_p$ y utilizando la cota de Nehari calculada en el Capítulo (3)

$$\lambda_k^{1/4} \int_{a_i}^{\eta_1(a_i)} \sqrt[4]{p(t)}dt \geq \Lambda_{[0,1]}^{1/4} \tag{5.38}$$

Por otro lado, el punto conjugado $\eta_1(a_i)$ verifica que

$$\eta_1(a_i) \leq b_i.$$

Entonces,

$$\lambda_k^{1/4} \int_{a_i}^{b_i} \sqrt[4]{p(t)}dt \geq \lambda_k^{1/4} \int_{a_i}^{\eta_1(a_i)} \sqrt[4]{p(t)}dt \geq \Lambda_{[0,1]}^{1/4}.$$

Ahora, a partir de (5.36) tenemos que

$$\lambda_k^{1/4} \int_a^{\infty} \sqrt[4]{p(t)}dt \geq \sum_{i=1}^{m} \Lambda_{[0,1]}^{1/4} = m \cdot \Lambda_{[0,1]}^{1/4} = \left[\frac{k}{3}\right] \cdot \Lambda_{[0,1]}^{1/4},$$

y el Teorema queda demostrado. □

Teorema 5.3.6. *Sea $N(\lambda)$ la función que cuenta el número de autovalores menores o iguales a λ del problema* (5.29). *Entonces, cuando $\lambda \to \infty$*

$$N(\lambda) \leq C\, \lambda^{1/4} \int_a^{\infty} \sqrt[4]{p(t)}dt + o(\lambda^{1/4})$$

con $C = \dfrac{3}{\Lambda_{[0,1]}^{1/4}}$.

Demostración. Sea $\{\lambda_k\}_k$ la sucesión de autovlaores del problema (5.29). La Proposición (5.3.1) nos da la cota inferior para el *k-ésimo* autovalor

$$\lambda_k > \left(\frac{[k/3]}{\int_a^{\infty} \sqrt[4]{p(t)}dt}\right)^4 \cdot \Lambda_{[0,1]} > \left(\frac{(k/3-1)}{\int_a^{\infty} \sqrt[4]{p(t)}dt}\right)^4 \cdot \Lambda_{[0,1]}$$

Sea $\lambda > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
N(\lambda) &= \#\left\{k : \lambda_k \leq \lambda\right\} \\
&\leq \left\{k : \left(\frac{(k/3-1)}{\int_a^\infty \sqrt[4]{p(t)}dt}\right)^4 \cdot \Lambda_{[0,1]} \leq \lambda\right\} \\
&= \left\{k : k \leq \frac{3}{\Lambda_{[0,1]}^{1/4}} \lambda^{1/4} \int_a^\infty \sqrt[4]{p(t)}dt + 3\right\} \\
&\leq \frac{3}{\Lambda_{[0,1]}^{1/4}} \lambda^{1/4} \int_a^\infty \sqrt[4]{p(t)}dt + 3.
\end{aligned}$$

y el Teorema queda demostrado. □

Capítulo 6

Comentarios Finales

Los resultados del capítulo anterior se pueden extender parcialmente a los siguientes casos:

i) Ecuaciones lineales de orden $2m$.

ii) Ecuaciones no lineales de tipo $p-$laplaciano de segundo orden.

iii) Problemas donde $p^{1/2m} \notin L^1(a, \infty)$.

Mencionemos brevemente cada uno.

i) Ecuaciones lineales de orden $2m$

Consideremos el problema

$$y^{(2m)} + \lambda p(t) y = 0, \qquad t \in (a, \infty) \tag{6.1}$$

donde $m \geq 3$ es número natural, λ es un parámetro positivo, y $p \in C([a, \infty))$ positiva.

En este caso la demostración es análoga, sólo que son necesarias ciertas modificaciones técnicas (por ejemplo, evitar los teoremas de Sturm). La desigualdad de Nehari da una cota inferior de los autovalores.

Para una cota superior, se deben definir de manera análoga los puntos conjugados, y utilizar además el siguiente lema:

Lema *Sea $\eta_j(a)$ el j-ésimo punto conjugado, y la solución extremal y_j con $j + 2m - 1$ ceros. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe una solución z de*

$$z^{(2m)} + \lambda p(t) z = 0, \qquad t \in (a, \eta_j(a) + \varepsilon)$$

que tiene $j + 2m - 1$ ceros simples.

Esto permite hallar cotas superiores de los autovalores del problema (6.1), comparando con los de un intervalo fijo $[a, T_\varepsilon]$, y el resto de la demostración es similar.

ii) Ecuaciones de tipo $p-$laplaciano

Consideramos el siguiente problema en (a,∞), con $a>0$

$$(|y'|^{p-2}y')' + \lambda g(t)|y|^{p-2}y = 0, \quad t \in (a,\infty), \tag{6.2}$$

con las condiciones de borde

$$y(a) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{\sqrt{t}} = 0, \tag{6.3}$$

donde $2 \le p < \infty$ y el peso g es una función continua y positiva tal que

$$(H1) \qquad \int_a^\infty g(x)dx < \infty, \quad \lim_{t\to\infty} t^{p-1}\int_t^\infty g(x)dx = 0.$$

Kusano y Naito probaron en [7] la existencia de una sucesión $\{\lambda_k\}_k$ de autovalores para el problema (6.2), con condiciones de borde (6.3), y donde g es una función continua y positiva satisfaciendo $(H1)$. Además, sabemos que la autofunción y_k correspondiente al autovalor λ_k tiene exactamente n ceros $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_k$.

Asumiendo que $g^{1/p} \in L^1(a,\infty)$ tenemos:

Teorema 6.1. *Sea $\{\lambda_k\}_k$ la sucesión de autovalores del problema* (6.2)-(6.3), *con $g^{1/p} \in L^1(a,\infty)$ satisfaciendo $(H1)$. Entonces,*

$$\lambda_k^{1/p} \ge \frac{\pi_p(k-1)}{2\int_a^\infty g^{1/p}(x)dx}.$$

Demostración. Aunque para estos autovalores no tenemos la expresión en forma varacional, para cualquier λ_k y autofunción y_k, podemos utilizar la desigualdad de Nehari (3.30).

Sean t_{i-1}, t_i, dos ceros consecutivos de la autofunción y_k. La restricción de y_k en $[t_{i-1}, t_i]$ es la primer autofunción del problema

$$\begin{aligned} (|y'|^{p-2}y')' + \mu g(t)|y|^{p-2}y &= 0, \quad t \in (t_{i-1}, t_i) \\ y(t_{i-1}) &= 0 \\ y(t_i) &= 0 \end{aligned}$$

y $\mu_1 = \lambda_k$, ya que y_k es una solución que no cambia de signo.

Ahora, para $2 \le i \le k$ tenemos por la desigualdad (3.30) del Capítulo (3)

$$\lambda_k^{1/p}\int_{t_{i-1}}^{t_i} g^{1/p}(x)dx \ge \frac{\pi_p}{2},$$

lo cual da

$$\lambda_k^{1/p}\int_a^\infty g^{1/p}(x)dx > \sum_{i=2}^k \lambda_k^{1/p}\int_{t_{i-1}}^{t_i} g^{1/p}(x)dx \ge \frac{\pi_p(k-1)}{2},$$

y el teorema está probado. $\square$

Como los teoremas de comparación y oscilación de Sturm son válidos para el p-laplaciano, se puede seguir como en la demostración del problema de segundo orden.

iii) Problemas singulares

Recordemos que el peso en el problema (2.1) satisface la condición

$$\int_a^\infty t^{2m-1}p(t)dt < +\infty.$$

Es posible, entonces, que

$$\int_a^\infty \sqrt[2m]{p}dt = \infty.$$

Por ejemplo, para $m = 1$, la familia de funciones

$$p(t) = t^{-2}\log^{-\alpha}(t), \qquad 0 < \alpha < 2$$

cumple la primera condición pero su raíz cuadrada no es integrable.

Este caso permanece abierto aún para el problema lineal de segundo orden, y sólo se conocen algunas estimaciones de los autovalores para estas funciones obtenidas por Hille en [9].

Con diferentes constantes, se obtienen estimaciones similares a las de Hille utilizando las ideas del capítulo anterior.

Una diferencia importante es que en este caso la función $N(\lambda)$ crece más rápido que antes, y tenemos

Teorema 6.2. *Sea $N(\lambda)$ la función que cuenta la cantidad de autovalores menores o iguales a λ correspondiente al problema*

$$\begin{aligned} y^{(2m)} + \lambda g(t)y &= 0 \qquad t \in (a,\infty) \\ y(a,\lambda) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t,\lambda) &= 0 \qquad 1 \le i \le 2m-1, \end{aligned} \tag{6.4}$$

con

$$\int_a^\infty t^{2m-1}g(t)dt < \infty \quad , \quad \int_a^\infty \sqrt[2m]{g(t)}dt = \infty.$$

Entonces,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{1/2}} = \infty.$$

Vamos a demostrarlo solo para segundo orden.

Demostración. Consideramos el problema

$$\begin{aligned} y'' + \mu g(t)y &= 0 \qquad t \in (a,b) \\ y(a) &= 0 \\ y(b) &= 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Sabemos que

$$N_D(\lambda,(a,b)) = \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\int_a^b \sqrt{g(t)}dt + o(\lambda^{1/2}).$$

Aplicando el mismo razonamiento en la demostración de la Proposición (5.2.5) en el Capítulo (5) tenemos que para cada valor de b

$$N(\lambda) \geq N_D(\lambda,(a,b)).$$

Entonces,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\pi\lambda^{1/2}} \geq \lim_{\lambda\to\infty} \frac{N_D(\lambda,(a,b))}{\pi\lambda^{1/2}} = \int_a^b g^{1/2}(t)dt,$$

la cual tiende a infinito cuando $b \to \infty$, y la demostración está completa. $\square$

Lema 6.1. *Sea $\lambda > 0$ tal que*

$$e^{\left[\lambda\int_a^\infty tg(t)dt\right]}\lambda\int_a^\infty tg(t)dt < 1.$$

Entonces, la solución de la ecuación $y'' + \lambda g(t)y = 0$ con $t \in (a,\infty)$ no se anula en (a,∞).

Observación 6.1. *Si consideramos la función $f(t) = t.e^t$, con $t \in \mathbb{R}$, tenemos que:*

- *es una función estrictamente creciente.*
- $f(1/2) < 1$.
- *ya que $\int_a^\infty tg(t)dt < \infty$, para cada $\lambda > 0$ existe $a_\lambda > a$ tal que*

$$\lambda\int_{a_\lambda}^\infty tg(t)dt = 1/2.$$

Teorema 6.3. *Sea $N(\lambda)$ la función que cuenta la cantidad de autovalores menores o iguales a λ correspondiente al problema*

$$\begin{aligned} y'' + \lambda g(t)y &= 0 \qquad t \in (a,\infty) \\ y(a,\lambda) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} y'(t,\lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Let a_λ tal que

$$\lambda\int_{a_\lambda}^\infty tg(t)dt = 1/2. \tag{6.7}$$

Entonces,

$$N(\lambda) \leq \frac{4}{\pi}\lambda^{1/2}\int_a^{a_\lambda} \sqrt{g(t)}dt + 1.$$

Demostración. Fijado $\lambda > 0$, existe a_λ que cumple (6.7). Sea λ_n el mayor autovalor del problema (5.13) menor o igual a λ.

Sea y_n la autofunción correspondiente a λ_n de la cual sabemos tiene exactamente n ceros en el intervalo $[a, \infty)$.

Como $\lambda_n \leq \lambda$, por la Observación A tenemos que

$$e^{\left[\lambda_n \int_{a_\lambda}^\infty tg(t)dt\right]}\lambda_n \int_{a_\lambda}^\infty tg(t)dt < 1,$$

y por lo tanto y_n no tiene ceros en $[a_\lambda, \infty)$.

Como contar autovalores es equivalente a contar ceros, por la definición de a_λ tenemos $N(\lambda, (a_\lambda, +\infty)) \leq 1$, con lo cual, para $\lambda \to \infty$, tenemos que:

$$N(\lambda) \sim N(\lambda, (a, a_\lambda)) + N(\lambda, (a_\lambda, \infty)).$$

Consideramos el problema

$$\begin{aligned} y'' + \mu g(t) y &= 0 \\ y(a) &= 0 \\ y(a_\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Nehari tenemos que

$$\mu_k \left(\int_a^{a_\lambda} \sqrt{g(t)}dt \right)^2 \geq \frac{\pi^2 k^2}{4}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} N(\lambda, (a, a_\lambda)) &= \#\{k : \mu_k \leq \lambda\} \\ &\leq \#\{k : \tfrac{k^2\pi^2}{4(\int_a^{a_\lambda}\sqrt{g(t)}dt)^2} \leq \lambda\} \\ &\leq \#\{k : k \leq \tfrac{2\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^{a_\lambda} \sqrt{g(t)}dt\} \\ &\leq \tfrac{2\lambda^{1/2}}{\pi} \int_a^{a_\lambda} \sqrt{g(t)}dt \end{aligned}$$

y el teorema está demostrado □

Observación 6.2. *Sea $g(t) = t^{-2}\log^{-2}(t)$. Un simple cálculo muestra que para $a_\lambda = e^{2\lambda}$,*

$$\lambda \int_{a_\lambda}^\infty t^{-1} \log^{-2} dt = \frac{\lambda}{\log(a_\lambda)} = 1/2.$$

Entonces,

$$N(\lambda) \leq \frac{2}{\pi}\lambda^{1/2} \int_a^{e^{2\lambda}} t^{-1} \log^{-1} dt + 1 \leq \frac{2}{\pi}\lambda^{1/2} \log(\lambda) + 1.$$

Como $N(\lambda)/\lambda^{1/2} \to \infty$, el término principal de la función que cuenta el número de autovalores no es una potencia de λ.

Bibliografía

[1] M.J. Castro, J.P. Pinasco. *An Inequality for Eigenvalues of Quasilinear Problems with Monotonic Weights*, Applied Mathematics Letters 23, 1355-1360 (2010).

[2] E. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations.* Krieger Pub Co. 1984.

[3] M. del Pino, P. Drábek, R. Manásevich, *The Fredholm alternative at the first eigenvalue for the one-dimensional p-Laplacian*, J. Differential Equations 151, 386-419 (1999).

[4] U. Elías, *Singular Eigenvalue Problems for the Equation* $y^{(n)} + \lambda p(x)y = 0$, Monatsh. Math. 142, 205-225 (2004).

[5] U. Elias, *Eigenvalue Problems for the Equation* $Ly + \lambda p(x)y = 0$, Journal of Differential Equations 29, 28-58 (1978)

[6] L.C. Evans, *Partial Differential Equations.* American Math Society, 1998.

[7] T. Kusano, M. Naito, *On the Number of Zeros of Nonoscillatory Solutions to Half-Linear Ordinary Differential Equations Involving a Parameter*, Transactions of the American Mathematical Society 354, 4751-4767 (2002).

[8] J. García Azorero, I. Peral Alonso, Existence and Nonuniqueness for the $p-$Laplacian: Nonlinear Eigenvalues, *Comm. Partial Diff. Eq.* 12, 1389-1430 (1987).

[9] E. Hille, *An Application of Prüfer's Method to a Singular Boundary Value Problem*, Math. Zeitschr 72, 95-106 (1959).

[10] E. Hille, *Non-Oscillation Theorems*, Transactions of the American Society 74, 234-252 (1948).

[11] W. Leighton, Z. Nehari, *On the Oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order*, Transactions of the American Society 89, 325-377 (1958).

[12] A. Lyapunov, *Probleme General de la Stabilite du Mouvement,* Ann. Math. Studies 17, Princeton Univ. Press (1949) (reprinted from *Ann. Fac. Sci.*

Toulouse, 9 (1907) 203-474, Translation of the original paper published in Comm. Soc. Math. Kharkow, 1892).

[13] M. Naito, *On the Number of Zeros of Nonoscillatory Solutions to HIgher-Order Linear Ordinary Differential Equations*, Monatsh. Math. 136, 237-242 (2002).

[14] Z. Nehari, *Some eigenvalue estimates*, J. Anal. Math. 7, 79-88 (1959).

[15] J.P. Pinasco, *The Distribution of Non-Principal Eigenvalues of Singular Second Order Linear Ordinary Differential Equations*, Int. J. of Math. and Mathematical Sci., 2006 (2006) Article ID 29895, 1-7.