UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Estructura métrica de la esfera unitaria en los espacios l_p con $1 \leq p < \infty$

Andrea Carolina Antunez

Director: Dr. Cristian Conde

Codirector: Dr. Esteban Andruchow

Fecha de Presentación: Noviembre 2011

Agradecimientos

Quiero agradecer a varias personas que me ayudaron directa o indirectamente en la culminación de mis estudios.

A Gabriel, quién me dió fuerzas en todo momento para continuar con mis deseos de completar la carrera, levantando mi ánimo en los momentos más tensos y festejando cada uno de mis avances. Y por sobre todas las cosas, por ser un excelente compañero de vida.

A Jimena y Tobías, que junto a Gabriel son mis tres grandes amores.

A mi familia, mis padres y mis suegros quienes apoyaron y me ayudaron para lograr ser hoy lo que soy. En particular, a mi hermana y amiga Gladys, quién supo darme buena onda en cada una de mis decisiones, estando presente siempre, siendo la primera en llegar cuando más la necesitaba.

A Cristian Conde, mi director, quién aceptó el pedido para dirigir mi tesis, por ser de una excelente guía, una excelente persona y un gran docente que con paciencia supo esperar mis avances en esta tesis, aclarando mis dudas por más triviales que fuesen.

A Esteban Andruchow, mi codirector y mentor de las ideas abordadas en esta tesis, quién con la calma y buena onda, supo darme energía y confianza desde mis primeros avances en la carrera y en mis comienzos como docente.

A mi amiga y casi hermana Marcela Villagra, a mis compañeros de cursada de la Facultad de Ciencias Exactas y a mis compañeros de trabajo de la Universidad de General Sarmiento con quienes compartí muchos buenos y no tan buenos momentos.

A mis amigos de la vida, que con los años supieron conservar nuestra amistad a pesar de haber continuado caminos distintos.

Y finalmente, a todos aquellos que con su buena energía, nunca perdieron esperanzas de que podría llegar a este momento.

Dedicado a

Gabriel, Jimena y Tobías

con amor

Índice general

Índice General v

Introducción vi

1. Espacios l_p **1**

1.1. Definiciones básicas y notaciones 1

1.2. Propiedades elementales de los espacios l_p. 4

1.3. Diferenciabilidad de la norma, convexidad y suavidad. 9

1.4. Proyecciones y ortogonalidad 19

2. Nociones sobre variedades de Banach **27**

2.1. Estructura diferencial de variedades de Banach 27

2.2. Conexiones y sprays 30

3. Estructura métrica en espacios normados **35**

3.1. Nociones generales sobre curvas y métrica interior 35

3.2. Métrica de Finsler en variedades diferenciables 39

4. La esfera en l_p con $1 < p < \infty$ **47**

4.1. Estructura de variedad diferencial de las esferas unitarias en l_p. 47

4.2. Métrica interior sobre l_p 49

4.3. La esfera unitaria en l_2. 55

4.4. Conexiones, spray y geodésicas sobre S_2 57

4.5. Métrica de Finsler en S_2 61

5. El tamaño de las esferas. **65**

5.1. Parámetros vinculados al tamaño de las esferas 65

5.2. Distancia entre espacios isomorfos. 75

Bibliografía **81**

Introducción

Durante los últimos años, el estudio de las propiedades geométricas de los espacios de Banach ha sido un tema de interés creciente y esto se debe, en gran parte, al hecho de que las propiedades topológicas lineales de los espacios normados están ligadas a las propiedades geométricas de la bola unitaria.

En el caso de los espacios Euclidianos o con métrica Riemmaniana de dimensión finita, el análisis de la estructura diferencial y métrica de la esfera es conocido en detalle. Gracias a las propiedades de tales espacios es posible dotar de estructura de variedad diferenciable a estos objetos y conocer las curvas minimales respecto a la longitud de curvas que unen dos puntos dados o que pasan por un punto con cierta velocidad tangencial. Intentar generalizar estas ideas a otros espacios normados es extremadamente complejo y se debe en gran parte a la forma del espacio.

Siendo el objeto de estudio de esta tesis las esferas unitarias en el espacio $l_p(\mathbb{N})$, observemos que ya son notorias las diferencias y similitudes entre las formas de las esferas en $\mathbb{R}^2$ con las normas dadas por $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ ó $\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p}$, con $p \geq 1$, como lo muestra la siguiente figura:

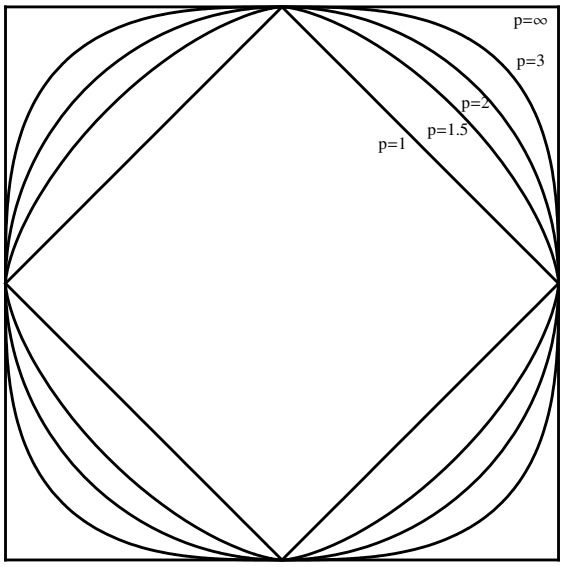

Figura 1: Esferas en $\mathbb{R}^2$ con norma p

En este caso, podemos observar que las esferas para $p = 1$ y $p = \infty$ no son "redondas" en el sentido usual de la palabra, ya que sus fronteras están formadas por segmentos rectilíneos. Además, tomando dos puntos antipodales sobre alguna de estas esferas, la longitud de la curva minimal que los une

resulta 2 como mínimo (para el caso $p = 1$) y 4 como máximo (para el caso $p = \infty$), variando en torno al valor π para el caso de $p = 2$. Estas ideas motivan preguntas análogas cuando tomamos espacios de dimensión infinita.

En particular, ciertas propiedades geométricas de la esfera unitaria en un espacio de Banach proveen información sobre la naturaleza general de tal espacio. Por ejemplo, es conocido que un espacio de Banach es reflexivo si es uniformemente convexo, esto es, si su esfera unitaria cumple cierta condición de redondez.

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar la estructura métrica de las esferas unitarias en l_p con $p > 1$, en dimensión infinita, las cuales denotaremos con S_p. Abordar este ejemplo de espacio de Banach permitirá generar un marco de referencia para el planteo de conjeturas en otros espacios normados. Encaramos éste análisis a través de la noción de "métrica interior", en lugar de la inducida por la norma del espacio ambiente. En este contexto, la distancia entre dos puntos se define como el ínfimo de las longitudes de las curvas rectificables que los une y veremos que resultará equivalente a la distancia dada por la norma p.

El estudio de la distancia entre puntos antipodales permitirá definir parámetros vinculados con el tamaño de las esferas unitarias de los espacios normados. El "perímetro" y el "contorno", definidos por Schäffer en 1972, constituyen los primeros parámetros estudiados que dan cuenta de la forma de las esferas en espacios normados en general y veremos como permiten caracterizar propiedades en los espacios $L_1(X, d\mu)$, con (X, μ) espacio de medida μ. La dificultad del cálculo de tales parámetros en otros espacios normados motivó, en 1982, la definición dada por Gao de los "α-perímetros", "α-contorno", "β-perímetros" y "β-contorno", cuyos valores para los espacios l_p serán vistos en este trabajo. También serán analizados en l_p los parámetros de "grosor" y "delgadez", introducidos por Whitley en 1976. Más aún, veremos como estos parámetros determinan condiciones para decidir si un espacio isomorfo a l_p es isométrico o uniformemente no-cuadrado, entre otros aspectos.

Para lograr este propósito, se exponen los resultados más relevantes sobre este tema, desarrollando algunas afirmaciones que relacionan la estructura diferencial de la esfera en estos espacios de Banach con sus propiedades topológicas.

Con la intención de que el trabajo sea suficientemente autocontenido y para facilitar la comprensión, el trabajo se encuentra dividido en 5 capítulos.

En los tres primeros capítulos se desarrollan las notaciones, definiciones y propiedades generales que se utilizarán como preeliminares en el análisis posterior. En el capítulo 1 se concentran las nociones topológicas y geométricas conocidas de los espacios l_p, relacionándolas con la diferenciabilidad de la norma y la convexidad uniforme de estos espacios. Además se agregan las demostraciones de algunas desigualdades importantes y se mencionan resultados válidos en espacios normados en general. En el capítulo 2 se exponen las nociones geométricas de variedades diferenciables de dimensión infinita modeladas por espacios de Banach, con especial cuidado en ser precisos con las notaciones y definiciones que utilizaremos posteriormente. En el tercer capítulo, se agregan las definiciones sobre la geometría de curvas y algunos resultados sobre métrica interior y métrica de Finsler.

En el capítulo 4 se establecen los principales resultados encontrados sobre las esferas en los espacios l_p con $p > 1$, con un desarrollo de las demostraciones y las construcciones particulares vinculados con los mismos. En particular, se concentran los resultados relevantes del estudio de la esfera en l_2, donde

la existencia de un producto interno permite encontrar similitudes con las estructuras de las esferas en espacios Euclidianos. Se desarrollan los contenidos usando notaciones que permitan trasladar estas nociones a las esferas de otros espacios de Hilbert, aunque se intenta preservar una línea de desarrollo a favor de facilitar la comparación con las esferas en espacios l_p con $1 < p < \infty$, $p \neq 2$.

Finalmente, en el capítulo 5 se analizan los parámetros relacionados con la distancia entre puntos antipodales que mencionamos anteriormente y que permiten vincular la estructura métrica de las esferas con las propiedades del espacio subyacente. Además se incorporan algunos resultados acerca del comportamiento de tales parámetros via isomorfismos entre espacios de Banach.

Capítulo 1

Espacios l_p

En este capítulo vamos a presentar las nociones preliminares sobre espacios normados y, en particular, sobre los espacios l_p, necesarios para nuestro trabajo posterior. En las dos primeras secciones, comenzaremos estableciendo las notaciones y definiciones básicas sobre espacios normados y las propiedades elementales respecto a operaciones, desigualdades y reflexividad de los espacios l_p. Para ello, hemos seguido los textos de Brezis [5] y Reed-Simon [23]. En la tercera sección, mencionaremos nociones que vinculan la diferenciabilidad de la norma con la uniforme convexidad, donde consultamos principalmente los textos de Diestel [8], Lindenstrauss-Tzafriri [19] y Clarkson [7] entre otros. Tales vínculos serán centrales para la caracterización de la estructura diferencial de la esfera unitaria como subvariedad de l_p. En la última sección, incorporaremos algunas definiciones y resultados en torno a proyecciones métricas sobre subespacios en espacios de Banach, vinculándolas con una definición de ortogonalidad en estos espacios.

1.1. Definiciones básicas y notaciones

Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o de los números complejos $\mathbb{C}$. Sea $(E;+;\mathbb{K})$ un espacio vectorial. Una aplicación $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ se denomina **norma** si verifica

(i) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$ con $x \in E$,

(ii) $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$ para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in E$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para $x, y \in E$.

Un **espacio normado** es un par $(E; \|.\|)$ donde E es un espacio vectorial y $\|.\|$ una norma. Siguiendo la notación de la definiciones anteriores, utilizaremos en general las letras E y F para denotar los espacios normados.

Decimos que una aplicación $d : E \times E \to \mathbb{R}$ es una **métrica** para un espacio vectorial E si verifica:

(a) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$,

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$,

(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x, y, z \in E$,

(d) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

En este caso, el espacio (E,d) se dice **espacio métrico**. Por ejemplo, una norma definida sobre un espacio vectorial induce una métrica $d : E \times E \to \mathbb{R}$, (invariante por traslaciones) dada por $d(x;y) := \|x - y\|$ con $x, y \in E$.

Un espacio normado $(E, \|.\|)$ se dice **espacio de Banach** si la distancia d asociada a la norma es completa, es decir, si cada sucesión de Cauchy en (E,d) converge a un punto perteneciente a E.

Dado un espacio de Banach $(E, \|.\|)$, denotaremos por $B_E(x,r)$ (o $B(x,r)$ cuando no hay confusión del espacio considerado) a la bola de centro $x \in E$ y radio r en el espacio E. En particular, notaremos B_E a la **bola unitaria** en E, centrada en $x = 0$, y por S_E a la **esfera unitaria** compuesta por los elementos de norma 1, es decir,

$$S_E = \Big\{ x \in E : \|x\| = 1 \Big\}$$

y

$$B_E = \Big\{ x \in E : \|x\| < 1 \Big\}.$$

Dado E un espacio de Banach, denotamos E^* al **espacio dual de** E, esto es, el conjunto de las funcionales lineales y continuas $\varphi : E \to \mathbb{R}$ con la norma usual dada por:

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} |\varphi(x)|.$$

Este espacio es completo con dicha norma, con lo cual resulta un espacio de Banach. De la misma forma se define el espacio bidual E^{**} como el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas en E^*.

Dado $x \in E$ la aplicación $\hat{x} : E^* \to \mathbb{R}$ definida por $\hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$ es un elemento del bidual con norma $\|\hat{x}\|_{E^{**}} = \|x\|_E$. Más aún, todo espacio de Banach E se encuentra embebido isométricamente en E^{**} mediante la inyección canónica $\Pi : E \hookrightarrow E^{**}$ dada por $\Pi(x) := \hat{x}$ para cada $x \in E$. Un espacio normado se dice **reflexivo** si este operador Π es sobreyectivo.

Si E, F son espacios de Banach denotaremos $\mathcal{B}(E,F)$ el conjunto de los operadores lineales y continuos $T : E \to F$ con la norma usual

$$\|T\|_{\mathcal{B}(E,F)} := \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|T(x)\|_F.$$

Sea H un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, decimos que $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ es una forma sesquilineal si para todo $x, y, z \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ vale que:

- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, +z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$,
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Una forma sesquilineal se dice **semi-definida positiva** (s.d.p.) cuando $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$. Si además se verifica que $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$, diremos que la forma sesquilineal $\langle\ ,\ \rangle$ es **definida positiva** (d.p.).

Dados un espacio vectorial H y una forma sesquilineal **definida positiva** $\langle\ ,\ \rangle$ llamamos a la dupla $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ **espacio pre-Hilbert**. En tal caso, podemos definir sobre H la norma

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Si $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ es un pre-Hilbert y el espacio normado subyacente resulta completo, diremos que $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ es un **espacio de Hilbert**. En estos espacios una igualdad muy útil viene dada por la ley del paralelogramo: si $x, y \in H$ entonces

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

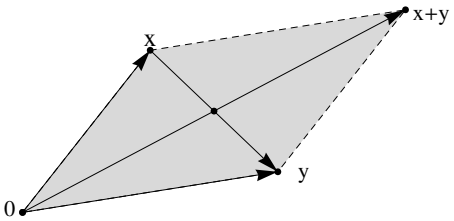

Figura 1.1: Ley del paralelogramo.

Geométricamente, esta ley postula que la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las dos diagonales de éste.

Los espacios de Banach en los cuales concentraremos nuestro estudio son los espacios de sucesiones.

Si $\mathbb{A}$ es un conjunto, F un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $1 \leq p < \infty$, denotamos $l_p(\mathbb{A}, F)$ al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{A} \to F$ tal que

$$\sum_{a\in\mathbb{A}} \|f(a)\|^p < \infty.$$

Este espacio es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con la norma definida por

$$\|f\|_p := \left(\sum_{a\in\mathbb{A}} \|f(a)\|^p\right)^{1/p},$$

que lo transforma en un espacio de Banach.

Si $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$ y $\mathbb{A} = 1, 2, .., n$ subconjunto finito de coordenadas dicho espacio se denota por l_p^n, y corresponde al espacio $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ con la norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Para $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$ y $\mathbb{A} = \mathbb{N}$ dicho espacio se denota por $l_p(\mathbb{N}) = l_p$. Para $1 \leq p < \infty$ la norma sobre este espacio resulta

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

En el caso $p = 2$, la norma del espacio está vinculada a la forma sesquilineal $\langle x, y\rangle = \sum x_i\bar{y_i}$ con la cual l_2 resulta un espacio de Hilbert.

También el espacio l_∞ (o análogamente l^n_∞) es un espacio de Banach donde la norma está dada por

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{A}} |x_n|.$$

Estos espacios son casos particulares de los espacios $L_p(X, d\mu)$ sobre un espacio X de medida μ. En este trabajo, los resultados y sus demostraciones se realizarán sobre los espacios l_p y varias de ellos pueden ser extendidas a espacios $L_p(X, d\mu)$.

Para simplificar la notación, vamos a denotar B_p y S_p a la bola unitaria y a la esfera unitaria del espacio l_p respectivamente.

1.2. Propiedades elementales de los espacios l_p.

Para el análisis en los espacios l_p, usaremos la siguiente notación para las operaciones entre sucesiones: Sean $x, y \in l_p$ con $1 \leq p < \infty$ y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, denotaremos:

$$\begin{aligned}
|x| &:= (|x_1|,\ |x_2|, ..., |x_n|, ...)\\
x + y &:= (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3, ..., x_n + y_n, ...)\\
x \cdot y &:= (x_1y_1,\ x_2y_2,\ x_3y_3, ..., x_ny_n, ...)\\
x^r &:= (x_1^r,\ x_2^r, ...,\ x_n^r, ...) \quad \text{(donde la potencia } r \neq 0 \text{ se aplica solo si } x_i \neq 0)\\
x^0 &:= (1, 1, ..., 1, ...)\\
sgnf(x) &:= (sgn(x_1)f(x_1),\ sgn(x_2)f(x_2), ..., sgn(x_n)f(x_n), ...)
\end{aligned}$$

Comenzaremos mencionando propiedades generales de los espacios l_p, con $1 \leq p < \infty$, que utilizaremos más adelante.

1.2.1 Proposición. *Sean p y q donde $1 \leq p, q \leq \infty$ tales que $1/p + 1/q = 1$.*

- (Desigualdad de Hölder).Si $x \in l_p$, $y \in l_q$ entonces $x \cdot y \in l_1$ y

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_iy_i| \ \leq\ \|x\|_p\|y\|_q.$$

- (Desigualdad de Minkowski). Si $x, x' \in l_p$ entonces $x + x' \in l_p$ y

$$\|x + x'\|_p \ \leq\ \|x\|_p + \|x'\|_p.$$

Demostración. Observemos que las desigualdades son fáciles de demostrar en el caso $p = 1$ ($q = \infty$) y $p = \infty$ ($q = 1$).

Para $p > 1$, demostremos en primer lugar la desigualdad de Hölder.

Si $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_p$ entonces $\bar{x} := |x|^p = (|x_1|^p, |x_2|^p, ..., |x_n|^p, ...) \in l_1$ y análogamente para $y \in l_q$, $\bar{y} := |y|^q \in l_1$. En tal caso, se cumplen las siguientes igualdades:

- $\sum |\bar{x_i}|^{1/p} |\bar{y_i}|^{1-1/p} = \sum |x_i|.|y_i|$,
- $\|\bar{x}\|_1^{1/p} \cdot \|\bar{y}\|_1^{1-1/p} = (\sum |\bar{x_i}|)^{1/p} (\sum |\bar{y_i}|)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q$.

Luego demostrar la desigualdad de Hölder es equivalente a demostrar que si $x, y \in l_1$ entonces $|x|^{1/p}|y|^{1-1/p} \in l_1$ y

$$\| \, |x|^{1/p}|y|^{1-1/p} \, \|_1 \leq \, \|x\|_1^{1/p} \|y\|_1^{1-1/p}. \tag{1.1}$$

Para $a, b > 0$ fijos, sea la función auxiliar f definida para $t > 0$ por

$$f(t) = \frac{1}{p} t^{1/p-1} a + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p} b.$$

Analizando su derivada

$$f'(t) = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1\right) t^{1/p-2} (a - tb),$$

notamos que f' se anula en $t_0 = a/b$, para $t < t_0$ es negativa y para $t > t_0$ es positiva. Con lo cual, en t_0 hay un mínimo de f y entonces se cumple

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{p} \left(\frac{a}{b}\right)^{1/p-1} a + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} b = a^{1/p} b^{1/q}$$

y

$$\inf_{t>0} \left[\frac{1}{p} t^{1/p-1} a + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p} b\right] = a^{1/p} b^{1/q}. \tag{1.2}$$

Con esta desigualdad buscamos demostrar (1.1). Para todo $t > 0$ vale

$$\begin{aligned}
\| \, |x|^{1/p}|y|^{1-1/p} \|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{1/p} |y_n|^{1-1/p} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p} t^{1/p-1} |x_n| + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p} |y_n|^{1-1/p} \\
&= \frac{1}{p} t^{1/p-1} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{1-1/p} \\
&= \frac{1}{p} t^{1/p-1} \|x\|_1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p} \|y\|_1.
\end{aligned}$$

Tomando el ínfimo y usando la igualdad (1.2) obtenemos

$$\| \, |x|^{1/p} \, |y|^{1-1/p} \|_1 \leq \, \|x\|_1^{1/p} \|y\|_1^{1-1/p}$$

como queríamos demostrar.

Para la desigualdad de Minkowski procedemos de manera análoga, usando la función auxiliar

$$g(t) = t^{1-p} a^p + (1-p)^{1-p} b^p,$$

que tiene un mínimo global en el intervalo $(0, 1)$ dado por $t_0 = \dfrac{a}{a+b}$.

Por lo tanto, obtenemos

$$g\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1-p} a^p + \left(1-\frac{a}{a+b}\right)^{1-p} b^p = (a+b)^p$$

y

$$\inf_{0<t<1} \left[t^{1-p}a^p + (1-p)^{1-p}b^p\right] = (a+b)^p. \tag{1.3}$$

Luego, para todo $t \in (0,1)$ y $x, x' \in l_p$

$$\begin{aligned}
\left\|x+x'\right\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + x'_n|^p \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |x'_n|)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[t^{1-p}|x_n|^p + (1-t)^{1-p}|x'_n|^p\right] \\
&= t^{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + (1-t)^{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} |x'_n|^p \\
&= t^{1-p}\|x\|_p^p + (1-t)^{1-p}\,\|x'\|_p^p.
\end{aligned}$$

Tomando el ínfimo y considerando la igualdad (1.3) obtenemos

$$\|x+x'\|_p^p \;\leq\; \left(\|x\|_p + \|x'\|_p\right)^p$$

la cual resulta ser la desigualdad buscada. □

La desigualdad de Minkowski muestra que efectivamente la norma verifica la desigualdad triangular en el caso en que $1 \leq p < \infty$. Por otro lado, gracias a la desigualdad de Hölder, la aplicación $\langle\ ,\ \rangle : l_p \times l_q \to \mathbb{C}$ dada por

$$\langle z, x\rangle := \sum_{i=0}^{\infty} z_i x_i$$

donde $x \in l_p$ e $y \in l_q$ está bien definida. Notar que en el caso $p = 2 = q$ la notación $\langle\ ,\ \rangle$ respeta la notación usual del producto interno sobre l_2 que lo convierte en espacio de Hilbert.

Mencionamos a continuación el teorema de Riesz para espacios l_p que permite la caracterización de su espacio dual (ver [5] o [23] para una demostración detallada).

1.2.2 Teorema (Riesz)**.** *Sea $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Dada $y \in l_q$ definimos la aplicación $\varphi_y : l_p \to \mathbb{C}$ como*

$$\varphi_y(x) :=\; \langle x, y\rangle\,.$$

Entonces $\varphi_y \in l_p^*$ y la aplicación $y \longmapsto \varphi_y$ define un isomorfismo isométrico de l_q en l_p^*, es decir,

$$\|\varphi_y\|_{l_p^*} =\; \|y\|_q\,.$$

1.2.3 Observación. Este teorema permite identificar las funcionales lineales de l_p con los elementos de l_q. Más aún, sabiendo que l_p^* se identifica con l_q, entonces l_p^{**} se identifica con l_q^* que a su vez se identifica con l_p. Estas identificaciones permiten determinar un isomorfismo isométrico entre l_p y l_p^{**} que coincide con la inyección canónica del espacio en su bidual. Con lo cual, esto nos dice que tal inyección es sobreyectiva y, por ende, los espacios l_p con $1 < p < \infty$ son reflexivos.

A continuación, vamos a mostrar unas importantes desigualdades que permitirán, en la próxima sección, analizar la convexidad de los espacios l_p.

1.2.4 Teorema (Desigualdades de Clarkson)**.** *Sean* $x, y \in l_p$

1. *Si* $1 < p \leq 2$*, se verifica que*

$$\|x+y\|_p^q + \|x-y\|_p^q \;\leq\; 2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{q-1}.$$

2. *Si* $p > 2$*, se verifica que*

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \;\leq\; 2^{p-1}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p).$$

Demostración. Vamos a mencionar las ideas de la demostración realizada por Clarkson en [7]. Para ello, consideremos las desigualdades para $1 < p \leq 2$ dada por

(a) $2^{p-1}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) \;\leq\; \|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \;\leq\; 2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)$.

(b) $\|x+y\|_p^q + \|x-y\|_p^q \;\leq\; 2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{q-1}$.

(c) $2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{p-1} \;\leq\; \|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p$.

y las desigualdades inversas para el caso $p > 2$.

Notar que la desigualdad (b) para $1 < p \leq 2$ y la desigualdad derecha en (a) para el caso $p > 2$ coinciden con las planteadas en el teorema. Con lo cual, si tales desigualdades son válidas el teorema queda demostrado.

Vamos entonces a demostrar las desigualdades planteadas. Para todo valor de p, las desigualdades (b) y (c) son equivalentes, haciendo la sustitución $\epsilon = x + y$ y $\eta = x - y$. Análogamente son equivalentes la desigualdad derecha y la desigualdad izquierda en (a) usando la misma sustitución. Por lo tanto, si demostramos la desigualdad (b) y la desigualdad derecha en (a), quedan todas las desigualdades demostradas.

Para $1 < p \leq 2$ veamos que se cumple la desigualdad (b):

$$\|x+y\|_p^q + \|x-y\|_p^q \;\leq\; 2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{q-1}.$$

En primer lugar, es posible mostrar que para dos valores complejos z, w se cumple

$$|z+w|^q + |z-w|^q \;\leq\; 2(|z|^p + |w|^p)^{q-1}. \tag{1.4}$$

Usando la desigualdad de Minkowski extendida al caso en que $0 < s \leq 1$, si $\{a_n\}, \{b_n\}$ son sucesiones de valores positivos vale que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^s\right)^{1/s} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^s\right)^{1/s} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^s\right]^{1/s}.$$

Si aplicamos esto en el caso en que $x, y \in l_p$, $s = p/q$, $a_n = |x_n + y_n|^q$ y $b_n = |x_n - y_n|^q$ obtenemos que

$$\|x+y\|_p^q + \|x-y\|_p^q \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n + y_n|^q + |x_n - y_n|^q)^{p/q}\right]^{q/p}.$$

Luego, gracias a la desigualdad (1.4), podemos obtener

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^q + \|x-y\|_p^q &\leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}(2|x_n|^p + |y_n|^p)^{(q-1)p/q}\right]^{q/p} \\ &= 2\left(\|x\|^p + \|x\|^p\right)^{q-1}\end{aligned}$$

que resulta ser la desigualdad en (b).

Para $p > 2$, los cálculos son similares al caso anterior pero las desigualdades quedan en sentido inverso. Esto se debe a que para $p > 2$, tenemos que

$$|z+w|^q + |z-w|^q \geq 2(|z|^p + |w|^q)^{q-1} \tag{1.5}$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$. Además, la desigualdad de Minkowski para el caso $p > 2$ establece que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^s\right)^{1/s} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^s\right)^{1/s} \;\geq\; \left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^s\right]^{1/s}.$$

En el caso en que $s = p/q$, $a_n = |x_n + y_n|^q$ y $b_n = |x_n - y_n|^q$ obtenemos que

$$\|x+y\|_p^q + \|x-y\|_p^q \;\geq\; \left[\sum_{n=1}^{\infty}(|x_n+y_n|^q + |x_n-y_n|^q)^{p/q}\right]^{q/p}.$$

Luego, usando (1.5) en la desigualdad anterior, podemos concluir con la desigualdad buscada. Así queda demostrada (b) para cada caso de p y, como hemos mencionado al comienzo, también queda demostrada la desigualdad (c).

Para probar (a) en el caso $p > 2$ vamos a demostrar la desigualdad derecha, esto es,

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \;\leq\; 2^{p-1}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p).$$

Como ya demostramos que (c) es válido, combinando las desigualdades, basta demostrar que

$$2(\|x\|_p^q + \|y\|_p^q)^{p-1} \;\leq\; 2^{p-1}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p).$$

Esto es equivalente a mostrar que dado $a, b \geq 0$ se cumple:

$$2(a^q + b^q)^{p-1} \;\leq\; 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \leq b$ y $b > 0$. Entonces si dividimos la desigualdad anterior por $b^{q(p-1)} = b^p$ y denotando $c = a/b$ resulta

$$\begin{aligned}2(c^q+1)^{p-1} &\leq 2^{p-1}(c^p+1) \\ 1 &\leq 2^{p-2}\frac{(c^p+1)}{(c^q+1)^{p-1}}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Tomando la potencia $1/p$, podemos analizar la función

$$H(c) := 2^{\frac{p-2}{q}}\frac{(c^p+1)^{1/p}}{(c^q+1)^{1/q}}$$

definida para $c \in [0,1]$. Se puede verificar que tal función es decreciente y $H(1) = 1$. Por lo tanto, esto muestra que la desigualdad 1.6 se cumple.

De la misma manera se demuestra el caso $1 < p \leq 2$. Luego, la desigualdad (a) queda demostrada. □

Por último, vamos a enunciar un lema que usaremos más adelante, el cual nos permite encontrar subespacios complementados a través de los hiperplanos generados por los funcionales del dual.

1.2.5 Lema. Sea $\varphi \in E^*$ una funcional no nula y $v_0 \notin Ker\varphi$. Entonces

$$E \;=\; \langle v_0 \rangle \oplus Ker\varphi$$

donde $\langle v_0 \rangle$ denota el subespacio generado por v_0 en E.

Demostración. Dado $w \in E$ entonces se tiene la descomposición:

$$w \;=\; \frac{\varphi(w)}{\varphi(v_0)} v_0 + \left(w - \frac{\varphi(w)}{\varphi(v_0)} v_0 \right).$$

Notar que el primer término pertenece al espacio generado por v_0. El segundo término pertenece al $Ker\varphi$ pues:

$$\varphi\left(w - \frac{\varphi(w)}{\varphi(v_0)} v_0 \right) \;=\; \varphi(w) - \varphi\left(\frac{\varphi(w)}{\varphi(v_0)} v_0 \right) = 0.$$

Por último, como $v_0 \notin Ker\varphi$, es claro que $Ker\varphi \bigcap \langle v_0 \rangle = \emptyset$. Por lo tanto, $E = \langle v_0 \rangle \oplus Ker\varphi$ como queríamos demostrar. □

Notar que este lema es aplicable incluso si E no es un espacio de Hilbert. En el caso en que $E = H$ espacio de Hilbert, el lema no es más que una consecuencia de que todo subespacio cerrado en H es complementado.

1.3. Diferenciabilidad de la norma, convexidad y suavidad.

En las próximos capítulos, para abordar el estudio de la estructura diferencial de las esferas, será necesario previamente analizar la diferenciabilidad de la norma $f(x) = \|x\|_p$ como aplicación de l_p en $\mathbb{R}$. Veamos entonces algunas definiciones generales sobre la diferenciabilidad de funciones entre espacios de Banach.

1.3.1 Definición. Sean E, F espacios de Banach.

- Una función $f : U \to F$ es **diferenciable Gâteaux** en $U \subset E$ si para todo $x \in U$ existe $df_x \in E^*$ tal que dado $y \in E$

  $$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \| f(x + ty) - f(x) - df_x(ty) \| = 0.$$

  Notar que de existir la aplicación df_x, entonces para todo $u \in B_E$ existe

  $$df_x(u) \;:=\; \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

  y, al mismo tiempo, $df_x \in E^*$. La funcional lineal $df_x(u)$ se denomina **diferencial de Gâteaux** de f en x respecto a u (o derivada direccional de f en la dirección de u). Cabe aclarar que la existencia de derivadas direccionales no asegura la diferenciabilidad de Gâteaux.[1]

[1] Considere la función $f(x) = \sqrt{|x||y|}$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ en el punto (0,0).

- Análogamente, una función $f : U \to F$ se dice **diferenciable Fréchet** en $U \subset E$ si para todo $x \in U$ existe un operador lineal acotado $Df_x \in \mathcal{B}(E, F)$ tal que

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|}\|f(x+h) - f(x) - Df_x h\| \;=\; 0.$$

  También notaremos f_{*x} al operador Df_x. Si la aplicación $Df : E \to \mathcal{B}(E, F)$ es continua, diremos que f es de clase C^1. El funcional lineal Df_{x_0} se denomina **diferencial de Fréchet** de f *en* x_0.

Análogamente se definen las derivadas sucesivas $D^k f_x \in \mathcal{B}^k(E^k, F)$ y diremos que f es **diferenciable Fréchet de clase** C^r si tales operadores existen para $k \leq r$.

1.3.2 Observación. De la definición anterior, es claro que si f es Fréchet diferenciable entonces es Gâteaux diferenciable y $Df_x = df_x$. Sin embargo, no es cierta la implicación inversa como veremos más adelante para el caso de la función norma $f(x) = \|x\|_1$ en l_1. Además, podemos mostrar que si f es diferenciable Fréchet entonces resulta necesariamente continua. Lamentablemente ésta condición no se puede reducir a la diferenciabilidad Gâteaux ya que existen funciones que admiten diferencial de Gâteaux en puntos donde son discontinuas.[2]

Con estas definiciones no es difícil mostrar que se cumplen las propiedades clásicas respecto a la suma y el producto de funciones diferenciables y la regla de la cadena para las composiciones.

En el caso en que la función analizada sea la norma $f(x) = \|x\|$ de un espacio normado E, la diferenciabilidad se relaciona con propiedades topológicas del espacio en cuestión y es por esto que varios autores se dedican a estudiarla en detalle.

1.3.3 Definición. Sea E espacio de Banach, diremos que:

- E tiene **norma Gâteaux diferenciable** si $f(x) = \|x\|$ es Gâteaux diferenciable para todo $x \in S_E$.
- E tiene **norma Fréchet diferenciable** si $f(x) = \|x\|$ es Fréchet diferenciable para todo $x \in S_E$.
- E tiene **norma uniformemente Fréchet diferenciable** si para $f(x) = \|x\|$ la funcional $Df_x(y)$ es uniforme para todo $x, y \in S_E$.[3]

Una manera de caracterizar la diferenciabilidad de la norma es vinculándola con el concepto de suavidad y las características de las aplicaciones soporte. Estas ideas fueron ampliamente abordadas por Diestel en [8], donde se encuentran las demostraciones de las propiedades que mencionaremos a continuación.

1.3.4 Definición. Sea E un espacio de Banach.

[2]Considere la siguiente función discontinua en $x = (0, 0)$ pero con diferencial Gâteaux en dicho punto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x = (x_1, x_2),\; x_1 = 0 \\ \dfrac{\|x\|^4}{x_1^2} & \text{si } \; x = (x_1, x_2),\; x_1 \neq 0 \end{cases}$$

[3]Es decir, el límite que verifica Df_x converge a 0 uniformemente respecto de la variable x.

- Una aplicación $x \longmapsto f_x$ de $E - \{0\}$ en $E^* - \{0\}$ se dice de soporte si:
  - Para todo $x \in S_E$, $\|f_x\| = f(x) = 1$.
  - Dado $\lambda > 0$, $f_{\lambda x} = \lambda f_x$.
- E dice **suave** si para todo $x_0 \in S_E$ exista una única función $f \in S_{E^*}$ tal que $f(x_0) = 1$. Se puede probar que esto es equivalente a que todas las aplicaciones soporte $x \longmapsto f_x$ sean continuas de $(S_E, \|.\|)$ en $(S_{E^*}, \omega*)$ (donde $\omega*$ denota la topología débil*).
- E se denomina **muy suave** si es suave y las aplicaciones soportes $x \longmapsto f_x$ son continuas de $(S_E, \|.\|)$ en (S_{E^*}, ω) (donde ω denota la topología débil).
- E se dice **uniformemente suave** si dado $\tau > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in S_E$ e $\|y\| < \delta$ entonces
$$\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} \ < \ 1 + \tau\frac{y}{2}.$$
Definimos el **módulo de suavidad**:
$$\rho_E(\tau) = \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|<\tau}} \Big\{ \frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1 \Big\}.$$
En el caso en que E sea **uniformemente suave** resulta $\dfrac{\rho_E(\tau)}{\tau} \longrightarrow 0$ cuando $\tau \to 0$.
Más aún, en estos espacios las aplicaciones soporte $x \longmapsto f_x$ son continuas de $(S_E, \|.\|_E)$ en $(S_{E^*}, \|.\|_{E^*})$.

El siguiente teorema muestra como la suavidad está vinculada con la diferenciabilidad de la norma, cuya demostración puede encontrarse en [8].

1.3.5 Teorema. *Sea E espacio de Banach. Entonces*

- *E tiene norma Gâteaux diferenciable si y sólo si es un espacio suave.*
- *E tiene norma Fréchet diferenciable si y sólo si las aplicaciones soporte $x \longmapsto f_x$ son continuas de $(S_E, \|.\|_E)$ en (S_{E^*}, ω), donde ω denota la topología débil.*
- *E tiene norma uniformemente Fréchet diferenciable si y sólo si es un espacio uniformemente suave.*

Otro concepto vinculado con la diferenciabilidad de la norma es la convexidad de los espacios. En particular, los espacios de Hilbert, gracias a que satisfacen la igualdad del paralelogramo, tienen esferas con muy buenas propiedades, como veremos en la siguiente proposición.

1.3.6 Proposición. *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces:*

1. *Si $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1$ y $\|x\| = \|y\| = 1$ entonces $x = y$.*
2. *Si $\{x_n\}_n \subset S_H$, $x \in S_H$ y $\left\|\dfrac{x_n + x}{2}\right\|$ converge a 1 entonces x_n converge a x.*

3. Si $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subset S_H$ *y* $\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|$ *converge a* 1 *entonces* $\{x_n - y_n\}_n$ *converge a cero.*

Demostración. Notemos que la tercera afirmación implica las otras dos restantes. Con lo cual, basta demostrar la tercera afirmación.

Gracias a la igualdad del paralelogramo tenemos que si $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ están en S_H entonces:

$$\|x_n - y_n\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) - \|x_n + y_n\|^2 = 4 - \|x_n + y_n\|^2.$$

Si $\|x_n + y_n\| \to 2$ el lado derecho de la ecuación tiende a cero y, por lo tanto $x_n - y_n \to 0$, como queríamos demostrar. □

Estas tres propiedades motivan la siguiente definición.

1.3.7 Definición. Sea E espacio de Banach

- E es **localmente uniformemente convexo** si dado $\{x_n\}_n \subset S_E$ y $x_0 \in S_E$ y $\left\|\frac{x_n+x_0}{2}\right\| \to 1$ entonces $x_n \to x_0$.
- E es **uniformemente convexo** si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in S_E$ y $\|x - y\| \geq \epsilon$ entonces
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$
Equivalentemente, si $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subset S_E$ y $\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| \to 1$ entonces $x_n - y_n \to 0$.
- E es **estrictamente convexo** si dados $x, y \in S_E$ y $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$ entonces $x = y$.

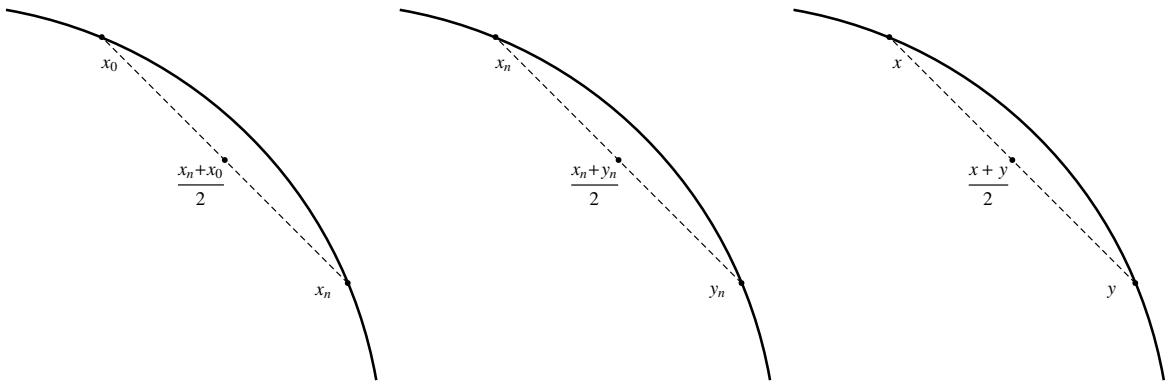

Figura 1.2: Convexidad

Para $0 < \epsilon < 2$ se define el **módulo de convexidad** como

$$\delta_E(\epsilon) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|=\epsilon}} \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right\}.$$

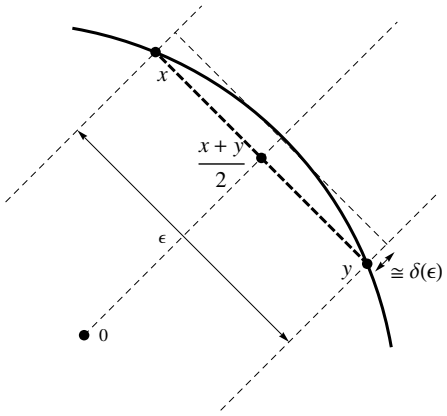

Figura 1.3: Módulo de convexidad

1.3.8 Observación. Notar que E es uniformemente convexo si para todo $\epsilon > 0$ resulta $\delta(\epsilon) > 0$. Observando la figura 1.3, podemos ver que el módulo de convexidad $\delta(\epsilon)$, para cada $\epsilon > 0$ dado, estima la menor de las distancias a la esfera de los puntos medios de cada par de puntos contenidos en la esfera que distan en al menos ϵ. Más aún, se puede probar usando la definición que los espacios uniformemente convexos son localmente uniformemente convexos y, a su vez, estos son estrictamente convexos. Sin embargo, estas implicaciones no valen en sentido inverso y existen ejemplos que lo muestran.[4]

Los siguientes teoremas cuyas demostraciones se pueden encontrar en [8] vinculan la convexidad y la suavidad con la diferenciabilidad de la norma y el análisis de tales conceptos en el espacio dual de E.

1.3.9 Teorema. *Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes:*

- *E es uniformemente suave.*
- *E^* es uniformemente convexo.*
- *E tiene norma Fréchet diferenciable.*

1.3.10 Teorema. *Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes:*

- *E es uniformemente convexo.*
- *E^* es uniformemente suave.*
- *E^* tiene norma uniformemente Fréchet diferenciable.*

En el caso de los espacios l_p, Clarkson en [7] demostró la uniforme convexidad de tales espacios a través de las desigualdades que llevan su nombre y que ya fueron analizadas en el teorema 1.2.4.

[4] Lindenstrauss y Tzafriri en [19] muestran un espacio estrictamente convexo que no es uniformente convexo. Otro ejemplo fue dado por Smith en [27] donde construye una norma para l_2 que lo hace un espacio localmente uniformemente convexo pero que no es uniformemente convexo.

1.3.11 Proposición. *Los espacios l_p, con $1 < p < \infty$, son uniformemente convexos.*

Demostración. En primer lugar, consideremos el caso $p > 2$.
Sean $x, y \in l_p$ con $\|x\| = \|y\| = 1$. Según la desigualdad de Clarkson aplicado a $\frac{x}{2}$ e $\frac{y}{2}$, tenemos

$$\left\|\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(\left\|\frac{x}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{y}{2}\right\|_p^p\right)$$

y despejando

$$\left(\frac{1}{2}\|x+y\|_p\right)^p \leq 2^{p-1}\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right) - \left\|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right\|_p^p.$$

Dado $\epsilon > 0$, supongamos entonces que $\|x-y\|_p \geq \epsilon$, con lo cual tenemos

$$\left(\frac{1}{2}\|x+y\|_p\right)^p \leq 1 - \frac{\epsilon^p}{2^p}$$

Como los elementos tienen norma 1, la distancia entre ellos es menor a 2. Es decir, debemos tomar $\epsilon \leq 2$. Tomando entonces raíz p-ésima en ambos miembros en la desigualdad anterior obtenemos

$$\frac{1}{2}\|x+y\|_p \leq \left(1-\frac{\epsilon^p}{2^p}\right)^{1/p}$$

Con lo cual, $\delta(\epsilon) = 1 - \left(1-\frac{\epsilon^p}{2^p}\right)^{1/p}$.
Análogamente, para $1 < p < 2$ utilizamos la desigualdad de Clarkson correspondiente y siguiendo el procedimiento anterior

$$\left\|\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right\|_p^q \leq 2\left(\left\|\frac{x}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{y}{2}\right\|_p^p\right)^{q-1}$$

y despejando

$$\left(\frac{1}{2}\|x+y\|_p\right)^q \leq 2\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)^{q-1} - \left\|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right\|_p^q.$$

Suponiendo $\|x-y\|_p \geq \epsilon$ con $0 < \epsilon < 2$ y usando que $1/p + 1/q = 1$ resulta que

$$\left(\frac{1}{2}\|x+y\|_p\right)^q \leq 1 - \frac{\epsilon^q}{2^q}$$
$$\frac{1}{2}\|x+y\|_p \leq \left(1-\frac{\epsilon^q}{2^q}\right)^{1/q}.$$

En este caso, $\delta(\epsilon) = 1 - \left(1-\frac{\epsilon^q}{2^q}\right)^{1/q}$. □

En términos de los módulos de convexidad y suavidad antes mencionados, las desigualdades de Clarkson permitieron deducir que en el espacio de Hilbert l_2 vale:

$$\delta_{l_2}(\epsilon) = 1 - \left(1-\frac{\epsilon^2}{4}\right)^{1/2} = \frac{\epsilon^2}{8} - O\left(\epsilon^4\right),$$
$$\rho_{l_2}(\tau) = \left(1-\tau^2\right)^{1/2} - 1 = \frac{\tau^2}{2} + O\left(\tau^4\right).$$

Notar que el orden de las aproximaciones anteriores se consiguen simplemente considerando desarrollos de Taylor apropiados.

La idea geométrica detrás del concepto del módulo de convexidad se hace evidente al analizar nuevamente los espacios de Hilbert. En estos espacios, por la ley del paralelogramo, si $\|x\| = \|y\| = 1$ entonces

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = 1 - \frac{\|x-y\|^2}{4}.$$

De esta desigualdad se puede estimar la distancia del punto medio del segmento que une x e y. Más aún, si $\|x-y\| \geq \epsilon$ entonces

$$1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1 - \left(1 - \frac{\|x-y\|^2}{4}\right)^{1/2} \leq 1 - \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Esta estimación coincide con la encontrada en el caso de l_2 y da cuenta de la convexidad de la bola en estos espacios: si dos puntos distintos se encuentran en la esfera, su punto medio se encuentra en el interior de la bola unitaria. Teniendo en cuenta este hecho, Nördlander en [21] realiza un estudio de este módulo mostrando que el módulo de convexidad de un espacio de Hilbert es la mejor cota posible entre espacios de Banach, es decir, para E espacio de Banach con $\dim E \geq 2$ se obtiene

$$\delta_E(\epsilon) \leq \delta_H(\epsilon) \qquad \text{si } 0 < \epsilon < 2.$$

En el caso del módulo de suavidad, también existe un resultado similar gracias a los aportes de Dvoretsky y Lindenstrauss (ver [9] y [19]):

$$\rho_E(\tau) \geq \rho_H(\tau) \qquad \text{si } \tau > 0.$$

Para el caso de los espacios l_p con $p \geq 1$, Lindenstrauss y Tzafriri obtienen:

$$\delta_{l_p}(\epsilon) = \begin{cases} (p-1)\frac{\epsilon^2}{8} + O(\epsilon^4) & \text{para} \quad 1 < p \leq 2, \\ \frac{\epsilon^p}{p2^p} + O(\epsilon^p) & \text{para} \quad 2 < p < \infty. \end{cases}$$

$$\rho_{l_p}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau^p}{p} + O(\tau^p) & \text{para} \quad 1 < p \leq 2, \\ (p-1)\frac{\tau^2}{2} + O(\tau^2) & \text{para} \quad 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Con las estimaciones de estos módulos, proponen la clasificación de los espacios con módulo de convexidad (suavidad) de potencia tipo p si, para alguna constante $0 < K < \infty$ se tiene $\delta_E(\epsilon) \geq K\epsilon^p$ (respectivamente $\rho_E(\tau) \leq K\tau^p$). Además, realizan un análisis de las características de estos módulos en espacios de Banach en relación con la uniforme suavidad y la uniforme convexidad.

Los resultados anteriores nos permiten concluir con el siguiente resultado:

1.3.12 Corolario. *Los espacios l_p con $1 < p < \infty$ son espacios uniformemente convexos, uniformemente suaves y con norma Fréchet diferenciable.*

La convexidad uniforme está vinculada a su vez con la reflexividad de los espacios de Banach a través del siguiente teorema, demostrado simultáneamente por Milman(1938) y Pettis (1939), cuya prueba puede verse en [5]:

1.3.13 Teorema (Milman-Pettis)**.** *Todo espacio de Banach uniformente convexo es reflexivo.*

El corolario anterior junto con este teorema permite mostrar de otra manera que los espacios l_p son reflexivos, propiedad que ya vimos en la observación 1.2.3 a través del teorema de Riesz. Pero más aún, relaciona una noción de naturaleza geométrica (la convexidad uniforme) con una de naturaleza topológica (la reflexividad).

Como la norma $f(x) := \|x\|_p$ en los espacios l_p es Fréchet diferenciable podemos encontrar una expresión de la diferencial, necesaria para caracterizar más adelante el espacio tangente a S_p. Para simplificar algunas cuentas, veamos primero la diferencial de $g(x) := f(x)^p$.

1.3.14 Proposición. *Sea $g : l_p \to \mathbb{R}$ la función $g(x) := \|x\|_p^p$ con $1 < p < \infty$. Entonces la diferencial de g en $x \neq 0$ aplicada a $y \in l_p$ está dada por*

$$g_{*x}(y) := \lim_{|t|\to 0} \frac{\|x+ty\|_p^p - \|x\|_p^p}{t} = p\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p-1} Re(\epsilon_i y_i),$$

donde $\epsilon_i = \dfrac{\bar{x_i}}{|x_i|}$. En particular, para $p = 2$ obtenemos que

$$g_{*x}(y) = 2Re\langle x, y\rangle$$

donde la norma resulta ser una función analítica.

Demostración. La diferenciabilidad de la norma fue analizada en el corolario 1.3.12 y se obtiene gracias a que los espacios l_p son uniformemente convexos para $p > 1$. Por lo tanto, la función g es diferenciable Fréchet pues es composición de funciones diferenciables.

Sean $x, y \in \mathbb{C}$ fijos, $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{|t|\to 0} \frac{|x+ty|^p - |x|^p}{t} &= \lim_{|t|\to 0} \frac{\left[(x-ty)(\bar{x}-t\bar{y})\right]^{p/2} - (x\bar{x})^{p/2}}{t} \\
&= \lim_{|t|\to 0} \frac{\left[x\bar{x} + t^2y^2 + tx\bar{y} + tx\bar{y}\right]^{p/2} - (x\bar{x})^{p/2}}{t} \\
&= \lim_{|t|\to 0} \frac{p}{2}\left\{[|x+ty|^2]^{p/2-1}(ty^2 + x\bar{y} + x\bar{y})\right\} \\
&= \frac{p}{2}\left\{|x|^{p-2}(x\bar{y} + y\bar{x})\right\}
\end{aligned}$$

donde simplemente hemos usado propiedades del módulo para números complejos y la regla de L´Hôpital para salvar el límite.

Comparando con la expresión de la diferencial buscada, basta asegurar que podemos intercambiar el límite del cociente incremental con el límite involucrado en la serie.

Gracias a la convexidad de la aplicación $z \to z^p$, dados $x, y \in \mathbb{C}$ y si $t \in (0, 1)$

$$|x+ty|^p = |(1-t)x + t(y+x)|^p \leq (1-t)|x|^p + t|x+y|^p$$

y despejando

$$\frac{|x+ty|^p - |x|^p}{t} \leq |x+y|^p - |x|^p. \tag{1.7}$$

Análogamente, si $t \in (-1,0)$

$$|x+ty|^p = |(1+t)x - t(x-y)|^p \leq (1+t)|x|^p - t|x-y|^p$$

y despejando

$$\frac{|x+ty|^p - |x|^p}{t} \geq |x|^p - |x-y|^p. \tag{1.8}$$

Como para $t \in (-1,0)$ y $\tilde{t} \in (0,1)$ es claro que

$$\frac{|x+ty|^p - |x|^p}{t} \leq \frac{|x+\tilde{t}y|^p - |x|^p}{\tilde{t}}$$

junto con las desigualdades (1.7) y (1.8), para $|t| < 1$ obtenemos

$$|x|^p - |x-y|^p \leq \frac{|x+ty|^p - |x|^p}{t} \leq |x+y|^p - |x|^p.$$

Por lo tanto, para t suficientemente chico

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p - |x_i - y_i|^p \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(|x_i+ty_i|^p - |x_i|^p)}{t} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p - |x_i|^p.$$

Luego, como $x, y \in l_p$ implica que las series a la derecha y a la izquierda de la desigualdad anterior convergen, podemos intercambiar los límites y concluir con la expresión de la diferencial buscada.

Gracias a los cálculos anteriores, para el caso $p = 2$ obtenemos que $g_{*x}(y) = 2Re\langle x, y\rangle$. Para ver que en este caso g resulta analítica, consideremos la función $Dg : l_2 \to \mathcal{B}(l_2, l_2) = \mathcal{B}(l_2) =: F$. Veamos que $D^2g : l_2 \to \mathcal{B}(l_2, F)$ está definida como la forma bilineal simétrica e independiente de x dada por $D^2g(x)(w,v) := 2Re\langle w, v\rangle$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_2} \Big\| Dg(x+h)(.) - Dg(x)(.) - D^2g(x)(h,.) \Big\|_{\mathcal{B}(H)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_2} \Big\| Dg(x+h)(.) - Dg(x)(.) - 2Re\langle h, .\rangle \Big\|_{\mathcal{B}(H)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_2} \cdot \sup_{\substack{v\in H \\ \|v\|=1}} \big| Dg(x+h)(v) - Dg(x)(v) - 2Re\langle h, v\rangle \big| \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_2} \cdot \sup_{\substack{v\in H \\ \|v\|=1}} \big| 2Re\langle x+h, v\rangle - 2Re\langle x, v\rangle - 2Re\langle h, v\rangle \big| = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

1.3.15 Observación. La demostración anterior puede adaptarse al análisis de la diferenciabilidad de la función $G : L_p(X, d\mu) \to \mathbb{R}$ definida por $G(f) := \|f\|_p^p = \int |f|^p d\mu$ con $1 < p < \infty$, donde X es un espacio de medida μ.

1.3.16 Observación. Notar que cuando trabajamos con sucesiones de valores reales en l_p, la fórmula de la diferencial de g para $x \neq 0$ se simplifica significativamente:

$$g_{*x}(y) = \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p-2} 2x_i.y_i = p\sum_{i=1}^{\infty} sgn|x_i|^{p-1}.y_i = p\langle sgn|x|^{p-1}, y\rangle$$

donde $y \in l_p$ y $sgn|x|^{p-1} \in l_q$ pues, como $x \in l_p$ resulta

$$\left\|sgn|x|^{p-1}\right\|_q = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/q} = \|x\|_p^{p/q}.$$

1.3.17 Observación. Ya vimos que la función norma $f : l_p \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \|x\|_p$ para $1 < p < \infty$ es diferenciable en todo $x \neq 0$. Además, como $f(x) = (g(x))^{1/p}$ donde $g(x) = \|x\|_p^p$, podemos deducir a través de la regla de la cadena que:

$$f_{*x}(y) = \frac{1}{p}(g(x))^{1/p-1} g_{*x}(y) = \frac{1}{p}\|x\|^{1-p} g_{*x}(y).$$

La proposición anterior nos facilita una expresión de la diferencial de g con la cual podemos encontrar la diferencial de f en $x \neq 0$ (para sucesiones a valores complejos)

$$f_{*x}(y) := \|x\|^{1-p}\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p-2} Re(\bar{x}_i y_i). \tag{1.9}$$

En particular, considerando solo sucesiones con valores reales resulta

$$f_{*x}(y) = \|x\|_p^{1-p}\langle sgn|x|^{p-1}, y\rangle. \tag{1.10}$$

Por último, cabe preguntarse sobre la diferenciabilidad de la norma para el espacio l_1. Es en este caso donde las conclusiones anteriores pierden validez, y se complican las extensiones de resultados al caso $p = 1$.

1.3.18 Proposición. *La norma usual en l_1 no es diferenciable Fréchet y sólo es diferenciable Gâteaux en los puntos $x = (x_1, x_2...) \in l_1$ donde $x_n \neq 0$ para todo n.*

Demostración. Comencemos por el análisis de la diferenciabilidad de Gâteaux de la norma.

Sea $x \in l_1$ donde existe n_0 tal que $x_{n_0} = 0$. Sea $e \in l_1$ el elemento cuyas coordenadas son $e_i = 0$ si $i \neq n_0$ y $e_{n_0} = 1$. Entonces

$$f(x + h.e) - f(x) = \|x + h.e\|_1 - \|x\|_1 = |h|$$

con lo cual

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h.e) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Como este límite no existe, la derivada de Gâteaux no está definida en los puntos que tienen alguna coordenada nula.

Supongamos ahora que $x \in l_1$ con $x_n \neq 0$ en todo n y veamos que la diferencial de Gâteaux es

$$df_{*x}(y) := \langle sgn(x), y\rangle.$$

Sean $y \in l_1$ y $\epsilon > 0$. Tomemos $N > 0$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty} |y_n| < \epsilon/2$. Para $\delta > 0$ suficientemente chico y $|h| < \delta$ tenemos que

$$sgn(x_n + h.y_n) = sgn(x_n) \qquad \text{si } 1 \leq n \leq N.$$

Por lo tanto, para

$$\begin{aligned} &\left| h^{-1}(\|x + h.e\|_1 - \|x\|_1) - \sum_{n=1}^{\infty} y_n sgn(x_n) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{N} h^{-1} \left\{ |x_n + hy_n| - |x_n| - hy_n sgn(x_n) \right\} \right| + 2 \sum_{n=N}^{\infty} |y_n| < \epsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, analicemos la diferenciabilidad de Fréchet. Es claro que en los puntos con alguna coordenada nula no existe esta diferencial. En el resto de los puntos, si existe la diferencial de Fréchet, ésta debe coincidir con $sgn(x)$.

Sea $x \in l_1$ con $x_n \neq 0$ para todo n. Para $m > 0$ sean los elementos y^m elementos en l_1 cuyas coordenadas son $y_n^m = 0$ si $n < m$ y $y_n^m = -2x_n$ para $n \geq m$. Entonces

$$\lim_{m \to \infty} \|y^m\|_1 = 0.$$

Pero

$$\left| \|x + y^m\|_1 - \|x\|_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (y^m)_n sgn(x_n) \right| = \left| \sum_{n=m}^{\infty} (-2|x_n|) \right| = \|y^m\|_1$$

con lo cual $sgn(x)$ no es la diferencial Fréchet para esta norma. □

1.4. Proyecciones y ortogonalidad

Una de los principales papeles del producto interno en un espacio de Hilbert H es que permite interpretar un elemento x en H como un funcional x^* en $H \sim H^*$ con la propiedad

$$\|x^*\|^2 = \|x\|^2 = \langle x^*, x \rangle.$$

Con el fin de buscar sustitutos de las herramientas de los espacios de Hilbert en el estudio de la geometría de espacios de Banach, Beurling y Livingston [3] en 1962 introducen el mapeo normalizado de dualidad que luego fue estudiado por muchos matemáticos entre los que cabe mencionar a Browder y a Gubber [11].

Dado E un espacio de Banach, denotaremos x^* los funcionales del dual E^* y su aplicación en $y \in E$ como $\langle x^*, y \rangle := x^*(y)$.

1.4.1 Definición. Sean E espacio de Banach con norma $\|.\|$ y 2^{E^*} el espacio de todos los subconjuntos de E^*.

Para $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una aplicación continua y estrictamente creciente tal que

$$\varphi(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty,$$

definimos el **mapeo respecto de** φ como la aplicación $J_\varphi : E \to 2^{E^*}$ definida en $x \in E$ como el conjunto

$$J_\varphi(x) := \{x^* \in E^* : \|x^*\|.\|x\| = \langle x^*, x\rangle; \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\}.$$

En el caso en que $\varphi(t) = t$, esta aplicación se denomina **mapeo normalizado** y resulta

$$J(x) := \left\{x^* \in E^* : \|x^*\|^2 = \|x\|^2 = \langle x^*, x\rangle\right\}.$$

En los espacios con dual uniformente convexo, el mapeo normalizado adquiere propiedades adicionales.

1.4.2 Proposición. *Si E^* es uniformente convexo entonces para cada $x \in E$ existe un único $x^* \in E^*$ tal que*

$$J(x) = \{x^*\}.$$

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \in S_E$.

Sean $F := \langle x\rangle$ el subespacio cerrado generado por x y $z^* : F \to \mathbb{R}$ la funcional definida por:

$$\langle z^*, \lambda x\rangle := \lambda\|x\| = \lambda.$$

Sabemos por el teorema de Hahn-Banach que podemos extenderla a una funcional $\tilde{z}^*$ sobre E con norma $\|\tilde{z}^*\|_{E^*} = \|z^*\|_{F^*} = 1$ y $\langle \tilde{z}^*, x\rangle = \|x\|$. Por lo tanto, $J(x)$ no es vacío.

Sean $x^*, y^* \in E^*$ tales que

$$\langle x^*, x\rangle = \langle y^*, x\rangle = 1 \qquad \text{y} \qquad \|x^*\| = \|y^*\| = 1.$$

Entonces

$$2 = \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, x\rangle \leq \|x^* + y^*\|,$$

con lo cual

$$1 \leq \left\|\frac{x^* + y^*}{2}\right\|.$$

Como E^* es uniformemente convexo, el punto medio del segmento que une dos puntos distintos debe estar contenido en el interior de S_{E^*}. Debido a la desigualdad anterior, resulta entonces que $x^* = y^*$, como queríamos demostrar. □

Este resultado permite asegurar que en el caso de los espacios l_p el mapeo normalizado resulta una función monovaluada $J : l_p \to l_q$, gracias a la uniforme convexidad de su espacio dual $l_p^* = l_q$. Un resultado más general se obtiene a través del siguiente teorema también conocido como test de Šmulyan (Ver [28]).

1.4.3 Teorema (Šmulyan)**.** *. Sea $\|\cdot\|_E$ una norma en un espacio de Banach E, con norma dual denotada por $\|\cdot\|_{E^*}$ en E^* y esferas respectivas S_E y S_{E^*}. Entonces:*

1. *La norma $\|\cdot\|_E$ es diferenciable Fréchet en $x \in S_E$ sí, y sólo si, para $x_n^*, y_n^* \in S_{E^*}$, con $n \in \mathbb{N}$, la condición $\lim_{n\to\infty}\langle x_n^*, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle y_n^*, x\rangle = 1$, implica que*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n^* - y_n^*\|_{E^*} = 0.$$

2. *La norma $\|\cdot\|_E$ es diferenciable Gâteaux en $x \in S_E$ si, y sólo si, para $x_n^*, y_n^* \in S_{E^*}$, $n \in \mathbb{N}$, la condición $\lim_{n\to\infty}\langle x_n^*, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle y_n^*, x\rangle = 1$, implica que*

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n^*, z\rangle - \langle y_n^*, z\rangle = 0$$

para todo $z \in E$ (i.e. en la topología débil).*

1.4.4 Corolario. *En un espacio de Banach E, la norma $\|.\|$ tiene diferencial de Gâteaux en $x \in E$, $x \neq 0$, si y sólo si, existe un único $x^* \in S_{E^*}$ tal que $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$. En este caso, la diferencial de Gâteaux en x es x^*.*

Demostración. Si $f(z) = \|z\|$ es diferenciable Gâteaux en $x \in E$, $x \neq 0$, definimos $x^* = df_x$. Entonces se cumple que $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$ pues

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to 0}\ \frac{1}{t}\|f(x+tx) - f(x) - df_x(tx)\| \\ &= \lim_{t\to 0}\ \frac{1}{t}\|(1+t)\|x\| - \|x\| - tdf_x(x)\| = \|x\| - \langle x^*, x\rangle. \end{aligned}$$

Luego, en virtud del teorema 1.4.3 de Šmulyan es fácil deducir la unicidad de $x^* \in S_{E^*}$ tal que $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$.

Recíprocamente, supongamos que la norma no tiene diferencial de Gâteaux en $x \in S_E$. Por el teorema de Šmulyan, existen $x_0 \in E$, $x_n^*; y_n^* \in S_{E^*}$ para $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n^*, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle y^*, x\rangle = 1 \qquad \text{y} \qquad \langle x_n^* - y_n^*, x_0\rangle \geq \epsilon.$$

Sea F el subespacio generado por x y x_0. Sean $z_n^* = x^*|_F$ y $w_n^* = y_n^*|_F$. Entonces $z_n^*, w_n^* \in B_{F^*}$,

$$\lim_{n\to\infty}\langle z_n^*, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle w_n^*, x\rangle = 1 \qquad \text{y} \qquad \langle z_n^* - w_n^*, x_0\rangle \geq \epsilon.$$

Como $\dim F^* = \dim F = 2 < \infty$, sabemos que B_{F^*} es compacta. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para ciertos $z^*, w^* \in B_{F^*}$

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n^* - z^*\| = \lim_{n\to\infty}\|w_n^* - w^*\| = 0,$$

en cuyo caso, $\langle z^* - w^*, x_0\rangle \geq \epsilon$ y $\langle z^*, x\rangle = \langle w^*, x\rangle = 1$. Al ser $\|x\| = 1$, se tiene que $\|z^*\| = \|w^*\| = 1$, y, por el teorema de Hahn-Banach, existen $x^*, y^* \in E^*$ tales que

$$\|x^*\| = \|y^*\| = 1, \qquad x^*|_F = z^*, \qquad y^*|_F = w^*.$$

Entonces, $\langle x^* - y^*, x_0\rangle \geq \epsilon$, con lo cual $x^* \neq y^*$. □

Notar que el corolario anterior para el caso de los espacios l_p demuestra de otra manera que el mapeo normalizado resulta un aplicación monovaluada. Pero, más aún, vincula esta aplicación con la diferencial de la norma cuya expresión ya hemos calculado en las fórmulas (1.9) y (1.10).

1.4.5 Proposición. *Para los espacios l_p con $1 < p < \infty$ el mapeo normalizado es una función monovaluada, es decir, existe un único x^* tal que $J(x) = \{x^*\}$. En particular, para el caso de los espacios de sucesiones reales, si $x \neq 0$ resulta que $x^* = \left\{\|x\|_p^{2-p} sgn|x|^{p-1}\right\}$.*

Demostración. Sabiendo que $l_p^* = l_q$ con $1/p + 1/q = 1$ y $1 < p < \infty$ es uniformemente convexo (por corolario 1.3.12), podemos aplicar la proposición 1.4.2 para concluir que el mapeo J es una aplicación monovaluada.

Como el espacio l_p con $1 < p < \infty$ tiene norma Frechét diferenciable, el corolario 1.4.4 nos asegura la existencia de un único $z^* \in S_q$ tal que $\langle z^*, x\rangle = \|x\|$. Luego si definimos $x^* := \|x\|_p z^*$ resulta que

$$\langle x^*, x\rangle = \|x\|_p \langle z^*, x\rangle = \|x\|_p^2.$$

Es decir, x^* es el elemento tal que $J(x) = \{x^*\}$. Más aún, a través de la fórmula (1.10) de la diferencial de la norma para el caso de sucesiones de valores reales, si $x \neq 0$ obtenemos que $z^* = \|x\|_p^{1-p} sgn|x|^{p-1}$ y por lo tanto $x^* = \|x\|_p^{2-p} sgn|x|^{p-1}$ como queríamos demostrar. □

1.4.6 Observación. Dado $x \in l_p$ con $x \neq 0$ y $1 < p < \infty$, la construcción del único elemento x^* de la demostración anterior implica que $Kerx^* = Kerf_{x^*}$ donde $f(z) = \|z\|_p$.

Veamos ahora como extender el concepto de proyector sobre subespacios en espacios de Hilbert para espacios de Banach en general.

1.4.7 Definición. Sea E un espacio normado y $F \subset E$ subconjunto cerrado. Para cada $x \in E$ llamaremos la **función distancia** de x asociada a F como la aplicación $d(\cdot, F) : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x; F) = \text{ínf}\{\|x - y\| : y \in F\}.$$

Cuando exista $y_0 \in F$ tal que $d(x; F) = \|x - y_0\|$, diremos que y_0 es un **mejor aproximante** en F para $x \in E$.

La **proyección métrica** sobre F es la función multivaluada $P_F : E \to 2^F$ que asocia a cada $x \in E$ su conjunto de mejores aproximantes (posiblemente vacío), es decir,

$$P_F(x) = \{y \in F : d(x; F) = \|x - y\|\}.$$

La existencia y unicidad de un mejor aproximante y las propiedades particulares de este proyector dependen de la estructura específica del espacio de Banach considerado. En el caso en que P_F sea una aplicación monovalente diremos que F es un **conjunto de Chebyshev.**

1.4.8 Proposición. *Sea E un espacio uniformente convexo con norma $f(x) := \|x\|$ y $F \subset E$ subconjunto convexo y cerrado. Entonces:*

1. *Para todo $x \in E$ existe un único elemento en $P_F(x)$, es decir, F es un conjunto de Chebyshev.*
2. *Si además E^* es uniformemente convexo, $x \in E$, $x \neq 0$ y $F := Kerf_{*x} \subset E$ entonces el proyector métrico P_F está dado por:*

$$P_F(y) := y - \frac{\langle x^*, y\rangle}{\langle x^*, x\rangle} x \tag{1.11}$$

donde x^* es el único elemento dado por el mapeo normalizado J.

Demostración. 1. Como E es uniformemente convexo, resulta que es reflexivo por el teorema 1.3.13 de Milman-Pettis. Veamos entonces que en espacios reflexivos la distancia a un conjunto F convexo y cerrado se alcanza.

Sea $x \in E$ y denotemos $d := d(x; F)$. Consideremos $\{y_n\}_n \subset F$ tales que $\|x - y_n\| \to d$. La desigualdad $\|y_n\| \leq \|x - y_n\| + \|x\|$ nos asegura que la sucesión $\{y_n\}_n$ está acotada. En espacios reflexivos, toda sucesión acotada tiene una subsucesión débil convergente. Es decir, la sucesión $\{y_n\}_n$ tiene una subsucesión convergente en la topología débil a un cierto $y \in E$. Como F es cerrado y convexo, F es débil-cerrado y, por lo tanto $y \in F$. Por otro lado, la norma es una función débil-inferiormente semicontinua pues la preimagen de los conjuntos $(-\infty; k)$ con $k \in \mathbb{R}$ son convexos y cerrados, y así, débil-cerrados. Luego, $\|x-y\| \leq d$ pues d es el ínfimo de $\|x-y_n\|$. Por definición de d, no puede ocurrir que $\|x - y\| < d$, es decir, $d = \|x - y\|$ e y es un mejor aproximante de F.[5]

Supongamos ahora que existen $u, v \in F$ tales que

$$\|x - u\| = \|x - v\| = d(x, F)$$

Como F es convexo, $\dfrac{u + v}{2} \in F$. Luego

$$\begin{aligned} d(x, F) &\leq \left\| x - \frac{u + v}{2} \right\| = \frac{1}{2}\|x - u + x - v\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|x - u\| + \|x - v\|\right) = d(x, F). \end{aligned}$$

Como E es uniformente convexo, esto implica que u debe coincidir con v, como queríamos demostrar.[6]

2. Sea $y \in E$ fijo. Veamos que $P_F(y)$ definido como en la afirmación efectivamente realiza el ínfimo de las distancias de y respecto a $F = Kerf_{*x}$. Tomemos $z \in F$, es decir, $f_{*x}(z) = \langle x^*, z\rangle = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|y - P_F(y)\| &= \left\| \frac{\langle x^*, y\rangle}{\langle x^*, x\rangle} x \right\| \\ &= \frac{|\langle x^*, y\rangle|}{|\langle x^*, x\rangle|}\|x\| \\ &= \frac{|\langle x^*, y\rangle - \langle x^*, z\rangle|}{|\langle x^*, x\rangle|}\|x\| \\ &\leq \frac{\|x^*\| \cdot \|y - z\|}{|\langle x^*, x\rangle|}\|x\| = \|y - z\|. \quad \square \end{aligned}$$

[5] Ver [5], [23] o [24] para un desarrollo más detallado de los resultados sobre topologías débiles en espacios de Banach mencionados en esta demostración.

[6] Notar que es posible cambiar la hipótesis de uniforme convexidad por la condición de que E sea estrictamente convexo y reflexivo, ya que la existencia de un mejor aproximante es asegurada por la reflexividad y la unicidad del mismo se demuestra con la estricta convexidad.

1.4.9 Observación. Como los espacios l_p con $1 < p < \infty$ cumplen las hipótesis de la proposición anterior y las condiciones del item 2, obtenemos una fórmula para el proyector sobre $Kerf_{*x}$ con $f(z) = \|z\|_p$. Si además $x \in S_p$ y consideramos el espacio l_p de sucesiones reales, obtenemos que:

$$P_x(y) := y - \frac{\langle sgn|x|^{p-1}, y\rangle}{\langle sgn|x|^{p-1}, x\rangle}x = y - \langle sgn|x|^{p-1}, y\rangle x.$$

Volviendo a considerar espacios normados en general, cuando F es un subespacio cerrado de E, el proyector P_F verifica que

$$\|P_F(x)\| \leq \|P_F(x) - x\| + \|x\| \leq \|0 - x\| + \|x\| = 2\|x\|$$

y además,

$$\|x - P_F(x) - y\| \geq \|x - P_F(x)\|$$

para todo $y \in F$ y $x \in E$. Por lo tanto $P_F(x - P_F(x)) = 0$, o sea $P_F^{-1}(1 - P_F) = 0$. También para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$P_F(\lambda x) = \lambda P_F(x).$$

Si llamamos $\bar{P_F} := 1 - P_F$, tenemos que

$$F = \bar{P_F}^{-1}(0) = Im(P_F) \qquad ; \bar{P_F}^{-1}(0) = Im(\bar{P_F}),$$

y además

$$\bar{P_F}^2 = \bar{P_F}, \qquad P_F^2 = P_F, \qquad \bar{P_F} \circ P_F = P_F \circ \bar{P_F} = 0;$$

lo cual muestra que P_F tiene algunas propiedades de las proyecciones lineales. Aunque en general, no es lineal aún cuando F sea un subespacio cerrado. No obstante, es sencillo verificar que se cumple

$$P_F(x + y) = P_F(x) + y$$

para todo $x \in E$ e $y \in F$.

Existen ejemplos donde este operador es discontinuo. Sin embargo, si E es uniformemente convexo y uniformemente suave (equivalentemente, E^* uniformemente convexo) y $F \subset E$ es convexo cerrado, entonces $P_F : E \to F$ es continua (ver [17] para una demostración detallada).

Veamos finalmente que la proyección métrica anterior se vincula con cierta noción de ortogonalidad en espacios de Banach. Para esto, veamos que ocurre en el caso de espacios de Hilbert.

1.4.10 Proposición. *Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert. Entonces son equivalentes:*

- *$x \perp y$, i.e., $\langle x, y\rangle = 0$.*
- *$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Demostración. Supongamos $x \neq 0$ ya que en el caso $x = 0$ la proposición se cumple trivialmente.

Si suponemos que $\langle x, y\rangle = 0$, entonces dado $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x, x + \lambda y\rangle \leq \|x\|\|x + \lambda y\|$$

usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Luego es claro que $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$.

Recíprocamente, supongamos que $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $y = 0$ es trivial que $\langle x, y\rangle = 0$. Para $y \neq 0$, como $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\left\langle x, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 0$, podemos suponer que $\|y\| = 1$.
Sea $t \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda\langle y, x\rangle = |\langle x, y\rangle|$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x\|^2 \leq & \|x - t\lambda y\|^2 = \langle x - t\lambda y, x - t\lambda y\rangle \\ = & \|x\|^2 - t\lambda\langle y, x\rangle - t\bar{\lambda}\langle x, y\rangle + t^2|\lambda|^2\|y\|^2. \\ = & \|x\|^2 - 2t|\langle x, y\rangle| + t^2|\lambda|^2.\end{aligned}$$

Entonces, si $t > 0$ resulta

$$0 \leq 2|\langle x, y\rangle| \leq t|\lambda|^2.$$

Tomando límite cuando t tiende a 0, obtenemos que $\langle x, y\rangle = 0$ como queríamos demostrar. □

Esta noción $\perp$ permite extender el concepto de ortogonalidad conocido para espacios con producto interno a espacios de Banach en general. Esta idea fue introducida por Birkhoff en [4] y desarrollada por James en [12], [13] y [14].

1.4.11 Definición. Sean E un espacio de Banach, $x, y \in E$. Diremos que x **es ortogonal a** y, en el sentido Birkhoff-James, si para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|.$$

Aunque esta noción de ortogonalidad no cumple la propiedad de simetría ni de transitividad, sigue siendo útil para caracterizar los elementos del espacio tangente como veremos en las próximas secciones, a través de la siguiente proposición.

1.4.12 Proposición. *Sean E un espacio normado con E^* uniformemente convexo y $x \in E, x \neq 0$. Sea $J(x) = \{x^*\}$. Entonces x es ortogonal a todo $y \in Ker\ x^*$.*

Demostración. Sea $y \in Ker\ x^*$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x^*\|.\|x\| = |\ \langle x^*, x\rangle\ | &= |\ \langle x^*, x + y\rangle\ | \\ &\leq \|x^*\|\|x + y\|.\end{aligned}$$

Por linealidad del $Ker\ x^*$ esto se cumple para todo λy con $\lambda \in \mathbb{R}$ y obtenemos que

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, x e y son ortogonales. □

1.4.13 Observación. Para el caso de los espacios l_p con $1 < p < \infty$ sabemos que si $x \in l_p$ y $x \neq 0$ resulta que $Ker\ x^* = Ker\ f_{*x}$, donde f es la norma p y $J(x) = \{x^*\}$, por la observación 1.4.6. Luego la proposición anterior implica que en este caso los elementos del núcleo de la diferencial en x de la norma p son ortogonales al x considerado.

Capítulo 2

Nociones sobre variedades de Banach

En el siguiente capítulo, presentaremos las definiciones y resultados sobre geometría diferencial de variedades modeladas en espacios de Banach, que no suponen la dimensión finita de la variedad. En particular, hemos seguido las notaciones y resultados extraídos de [15] y [16].

2.1. Estructura diferencial de variedades de Banach

2.1.1 Definición. Decimos que M es **variedad topológica modelada por un espacio de Banach** E si existe una colección de abiertos $U_i \subset M$ y homeomorfismos $\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i)$ con $\varphi(U_i)$ abiertos en E y tales que se cumple la siguiente compatibilidad:

- Dadas dos pares (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) la función de transición $\tau_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ resulta continua entre los correspondientes abiertos donde está definida. Llamaremos **carta** alrededor de $x \in M$ al par (U, φ) donde $x \in U$.

Diremos que M es una **variedad diferenciable de clase** C^k si es una variedad topológica con funciones de transición diferenciables Fréchet de dicha clase.

Volviendo a nuestro objeto de estudio, los espacios l_p serán los espacios de Banach que utilizaremos. En particular, todo espacio de Banach resulta trivialmente una variedad de Banach.

2.1.2 Definición. Decimos que un conjunto $S \subset M$, con M una variedad modelada por E espacio de Banach, es una **subvariedad regular** de M si:

- E se descompone como suma de dos espacios de Banach $E = E_1 \oplus E_2$.
- Dado $x \in S$, existen (U, φ) carta de M alrededor de x y abiertos $A_1 \in E_1, A_2 \in E_2$ tales que $\varphi : U \to A_1 \oplus A_2$ es un isomorfismo con $\varphi(U \cap S) = A_1 \times \{a_2\}$ para cierto $a_2 \in A_2$ fijo.

Bajo estas condiciones, para todo punto $x \in S$ existe una carta (U, φ) sobre M que induce una carta sobre S dada por el abierto $U \cap S$ y el difeomorfismo $\varphi\,|_{\mathcal{S}} = pr_1 \circ \varphi$. Es claro que estas cartas forman un atlas diferenciable sobre S y la topología inducida por este atlas coincide con la topología de subespacio de M.

El espacio tangente de una variedad en un punto puede ser vista de diferentes formas equivalentes. A continuación, presentaremos dos definiciones para este espacio.

2.1.3 Definición. Sean M variedad modelada por un espacio de Banach E y $x \in M$, definimos el **espacio tangente** de M en x como:

$$T_xM = \Big\{(U, \varphi, v) \,:\, (U, \varphi) \text{ carta alrededor de } x,\ v \in e\Big\}\Big|_{\backsim_1}$$

donde la relación de equivalencia $\backsim_1$ está dada por

$$(U, \varphi, v) \backsim_1 (V, \psi, w) \text{ si y sólo si } w = D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} v$$

o, equivalentemente

$$T_xM = \Big\{[\alpha]_x \,:\, \alpha : I \to M \text{ curva diferenciable sobre } M \text{ con } \alpha(0) = x\Big\}\Big|_{\backsim_2}$$

donde la relación de equivalencia $\backsim_2$ está dada por

$$[\alpha] \backsim_2 [\beta] \ \text{ si y sólo si } \ \frac{d}{dt}\Big|_0 (\varphi \circ \alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\varphi \circ \beta(t))$$

para alguna (U, φ) carta alrededor de x. Denotaremos $TM := \sqcup_{x \in M} T_xM$ a la unión disjunta de todos los espacios tangentes de M.

Se puede probar que las relaciones de equivalencias están bien definidas y son maneras equivalentes de presentar el espacio tangente a un punto en una variedad. Más aún, vía estas definiciones es posible mostrar que $T_xM \simeq E$ y que este espacio es, en sí mismo, una variedad diferenciable.[1]

Introduciremos ahora la definición de funciones diferenciables entre variedades, extendiendo las definiciones vistas en el capítulo anterior.

2.1.4 Definición. Sean E, F espacios de Banach y M, N variedades de Banach modeladas por estos espacios respectivamente.

- Una función $g : M \to N$ se dice **diferenciable Fréchet de clase** C^r (o **diferenciable Gâteaux**) si, para cada (U, φ) carta alrededor de $x \in M$ y (V, ψ) carta alrededor de $g(x)$, tal que $g(U) \subset V$, la función
$$\psi \circ g \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$
es una función diferenciable Fréchet de clase C^r (o diferenciable Gâteaux).

En el caso en que g sea diferenciable, definimos la **diferencial de la función** como la aplicación $g_* = Dg : TM \to TN$ dada localmente por:

$$g_*(x, v) := (\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(x), D(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})_x v)$$

donde (U, φ) y (V, ψ) son cartas de M y N respectivamente, $x \in \varphi(U)$ y $v \in E \simeq T_xM$.

[1] En [16] se desarrolla esta observación en detalle.

Una herramienta útil para distinguir la estructura de subvariedad está dada por la siguiente proposición:

2.1.5 Proposición. *Sea $f : M \to Z$ es diferenciable Fréchet de clase C^k (con $k \geq 1$) entre variedades, tal que para todo $x \in M$ se tiene que $f_{*x} = Df_x : T_xM \to T_{f(x)}Z$ es un epimorfismo cuyo núcleo $Kerf_{*x}$ se parte en T_xM, es decir, existe Q_x subespacio cerrado de T_xM tal que*

$$T_xM = Q_x \oplus Kerf_{*x}.$$

Sea $z_0 \in Z$ fijo. Entonces el conjunto $N = f^{-1}(z_0) \in M$ admite una estructura de subvariedad regular cerrada de clase C^k con $T_xN \simeq Kerf_{*x}$ para todo $x \in N$.

Esta proposición es un resultado obtenido a partir del teorema de la función implícita para espacios de Banach (ver [15] para una versión clásica) y es posible encontrar una demostración en [16].

Notar que para poder aplicar la proposición anterior es necesario asegurar que el núcleo de una función diferenciable se parte, lo cual no siempre es posible hacerlo. En el caso particular en que $f \in E^*$ es no nula vimos a través del lema 1.2.5 que esto siempre es posible.

El espacio doble-tangente de una variedad será pensado como el espacio tangente de la variedad TM. Denotaremos los elementos de TTM con la forma (x, v, u, w) donde $x \in U \subset M$ y $v, u \in T_xU$ o, equivalentemente, por la clase de una curva $[\beta]_{x,v}$ con $\beta(0) = (x, v)$ y $\frac{d}{dt}|_0(\beta(t)) = (u, w)$.

Estas construcciones pueden entenderse a través de la noción de fibrado vectorial:

2.1.6 Definición. Dado E espacio de Banach, N, M variedades diferenciables y $\pi : N \to M$ función diferenciable, decimos que (N, M, π) es un **fibrado vectorial** si existe $\{U_i\}$ cubrimientos por abiertos de M y una familia de difeomorfismos $\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times E$ tal que:

- $\pi = pr_1 \circ \tau_i$ y para cada $x \in M$ resulta $\tau_{ix} := \tau_i|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \to E$ un isomorfismo.
- $\tau_{ix} \circ \tau_{iy}^{-1}$ es un isomorfismo de espacios de Banach.
- La asignación $x \mapsto \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}$ es una aplicación diferenciable de $U_i \cap U_j$ en $\mathcal{B}(E)$.

Las funciones $\tau_{jix} := \tau_{jx} \circ \tau_{ix}$ se denominan **funciones de transición** del fibrado.

Una **sección** del fibrado es una función $s : M \to X$ tal que $\pi \circ s = id_M$

Sea $TM := \sqcup_{x \in M} T_xM$ y $\pi : TM \to M$ la proyección canónica $\pi(x, v) = \pi([\alpha]_x) := x$ entonces (TM, M, π) es un fibrado vectorial denominado **fibrado tangente**. Las secciones de este fibrado $X : M \to TM$ (que son funciones diferenciales) se denominan **campos** y notaremos $\chi(M)$ al conjunto de estos campos. Todo campo se puede trabajar como una derivación usando que si $f \in C^k(M)$ entonces localmente $X(f)(x) := pr_2 \circ f_{*x}(X(x))$.

Análogamente, tenemos la estructura de fibrado vectorial en (TTM, TM, π_{TTM}) donde hemos definido $\pi_{TTM}(x, v, u, w) := (x, v)$. Sin embargo, tomando como función a $\pi_* : TTM \to TM$ la diferencial de $\pi : TM \to M$, dada por $\pi(x, v) = v$, tenemos otra estructura de fibrado (TTM, TM, π_*). Notar que localmente no es difícil ver que $\pi_*(x, v, u, w) = (x, u)$, con lo cual las estructuras sobre el doble-tangente son distintas. Dentro del fibrado doble-tangente tenemos al subfibrado vertical TVM dado por los elementos de la forma $(x, v, 0, w)$ es decir $VTM = ker\pi_*$.

2.2. Conexiones y sprays

Hasta aquí definimos los elementos básicos con los que vamos a trabajar. A partir de ellos definiremos otras herramientas como conexiones, spray y métricas sobre TM que permitirán caracterizar la forma de analizar la geometría de las esferas. En particular, abordaremos nociones que permitirán estudiar los movimientos geométricos como traslaciones del TM entre dos puntos, o la existencia de curvas particulares como geodésicas.

2.2.1 Definición. Sea M una variedad de clase C^k con $k \geq 2$.

- Un **spray** es un mapa $F : TM \to TTM$ de clase, al menos, C^1 tal que es una sección del fibrado (TTM, TM, π_*) y del fibrado (TTM, TM, π_{TTM}). Es decir, en coordenadas si $(p, v) \in U \times E \backsimeq TU$ tenemos
$$F(p, v) := (p, v, v, \tilde{F}(p, v)) \in TTM.$$
Diremos que un spray es **homogéneo** de grado $m \geq 0$ si verifica localmente
$$\tilde{F}(p, sv) = s^m \tilde{F}(p, v),$$
para todo $(p, v) \in TU$ y todo $s \in \mathbb{R}$. En particular, si $m = 2$ el spray se denomina **cuadrático o afín.**
Si existe un spray definido sobre M, diremos que (M, F) es una **variedad con spray**.

- Una curva $\alpha : I \to M$ de clase C^2 es una **geodésica** de (M, F) si
$$\alpha'' = F(\alpha').$$
Fijados $x \in M, v \in T_xM$ existe una única geodésica que pasa por x y tiene velocidad inicial v. Si $(x, v) \in TM$ denotamos $\alpha_{x,v} : I_{x,v} \to M$ a esta geodésica, donde $0 \in I_{x,v} \subset \mathbb{R}$.

- Sea el abierto $\mathcal{D} = \{(x, v) \in TM : 1 \in I_{x,v}\} \subset TM$, definimos la **exponencial del spray** a la función diferenciable $\exp : \mathcal{D} \to M$ dada por
$$\exp(x, v) = \alpha_{x,v}(1)$$
Fijado $x \in M$, denotamos $D_x = \{v \in T_xM : (x, v) \in \mathcal{D}\}$ y la aplicación $\exp_x : \mathcal{D}_x \to M$ dada por $\exp_x(v) := \exp(x, v)$. Diremos que M es **geodésicamente completa** si dado cualquier $x \in M$ se verifica que el conjunto D_x coincide con T_xM. Es decir, si las geodésicas que pasan por x se pueden prolongar para todo $t \in \mathbb{R}$.

La existencia y unicidad de las geodésicas de un spray dado son básicamente consecuencia de que las mismas pueden ser vistas como ecuaciones diferenciales. Más aún, en el caso de spray cuadráticos las geodésicas resultan aquellas curvas con velocidad constante, como lo veremos en la siguiente proposición.

2.2.2 Proposición. *Sea $F : TM \to TTM$ un spray cuadrático, $V = (x, v) \in TM$. Entonces*

1. *Si $s, t \in \mathbb{R}$, entonces $st \in I_V$ si y sólo si $s \in I_t V$, y además $\alpha_V(st) = \alpha_{tV}(s)$.*

2. *Las curvas $\epsilon(t) = \exp_x(tv)$ son las únicas geodésicas del spray.*

Demostración. 1. Supongamos que $st \in I_V$ y sea $\beta(r) = \alpha_V(sr)$ la curva definida en $[0, t]$. Derivando ésta curva, en coordenadas locales, obtenemos que

$$\dot{\beta}(r) \;=\; \dot{\alpha}_V(rx)s.$$

Entonces, evaluando en $r = 0$ resulta que $\beta'(0) = (x, sv)$. Si denotamos $Q = f_2(x, .)$ (la segunda coordenada del elemento en el fibrado doble-tangente) y derivamos de nuevo respecto a r, se tiene que

$$\ddot{\beta}(r) = \ddot{\alpha}_V(sr)s^2 = s^2 Q(s\dot{\alpha}_V(sr)) = Q(\dot{\beta}(r))$$

con lo cual β es una geodésica del spray, lo que prueba que $t \in I_s V$ y la igualdad buscada.

2. Por el item anterior tenemos que

$$\epsilon(t) := \exp_x(tv) = \exp(x, tv) = \alpha_{x,tv}(1) = \alpha_{tV}(1) = \alpha_V(t)$$

de donde se deduce que la curva ϵ es la única geodésica del spray $\epsilon'(0) = (x, v)$. □

2.2.3 Definición. Sea M variedad modelada por el espacio de Banach E.

- Diremos que $\Gamma : TM \oplus TM \to TTM$ es una **conexión afín** si es bilineal y natural para las dos estructuras de fibrado de TTM, esto es, si verifica $\pi_* \circ \Gamma = pr_1$ y $\pi_{TM} \circ \Gamma = pr_2$.

- La **derivada covariante** asociada a una conexión afín es la forma bilineal

$$\nabla : \chi(M) \oplus \chi(M) \to \chi(M)$$

definida sobre dos campos X, Y por

$$\nabla_X Y = DY(X) - \Gamma(X, Y). \tag{2.1}$$

Esta aplicación verifica

$$\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y, \qquad \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$$

para todo par de campos $X, Y \in \chi(M)$ (pensados como derivaciones) y toda $f \in C^1(M)$. Además verifica

$$[Y, X] = \nabla_X Y + \nabla_Y X$$

donde $[., .]$ es el corchete de Lie usual definido como el campo (como derivación) por

$$[Y, X](f) := Y(X(f)) - X(Y(f)).$$

- Supongamos que (M, F) variedad con spray cuadrático. Dados $X, Y, Z : M \longrightarrow TM$ campos de clase C^k con $k \leq 2$, definimos el **tensor de curvatura** como

$$\mathcal{R}(X, Y, Z) := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} - \Gamma$$

La **transformación de curvatura** $R(X, Y) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ está dada por:

$$R(X, Y)Z = \mathcal{R}(X, Y, Z)$$

y verifica

- $R(X, Y) = -R(Y, X)$,
- $\mathcal{R}(X, Y, Z) + \mathcal{R}(Y, Z, X) + \mathcal{R}(Z, X, Y) = 0$.

Localmente, se verifica para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X, Y, Z)(x_0) =& \Gamma_{x_0}(X_{x_0}, \Gamma_{x_0}(Y_{x_0}, Z_{x_0})) - \Gamma_{x_0}(Y_{x_0}, \Gamma_{x_0}(X_{x_0}, Z_{x_0})) \\ &- \Gamma_{*x_0, X_{x_0}}(Y_{x_0}, Z_{x_0}) + \Gamma_{*x_0, Y_{x_0}}(X_{x_0}, Z_{x_0}).\end{aligned}$$

Si dados $x, y, z \in T_{x_0}\mathcal{S}_2$, tomamos tres campos en M tales que $X_p = x, Y_p = y, Z_p = z$ podemos pensar entonces a estas aplicaciones como

$$\mathcal{R}_{x_0}(x, v, z) = R_{x_0}(x, v)z = \Gamma_{x_0}\big(x, \Gamma_{x_0}(y, z)\big) - \Gamma_{x_0}\big(y, \Gamma_{x_0}(x, z)\big) - \Gamma_{*x_0, x}(y, z) + \Gamma_{*x_0, y}(x, z). \tag{2.2}$$

Los resultados y verificaciones involucrados en la definición anterior están demostrados en los textos [15] y [16].

Toda conexión afín sobre una variedad induce un spray cuadrático de forma natural $F := C \circ \triangle$, donde $\triangle(x, v) = ((x, v), (x, v))$ es la inclusión $TM \hookrightarrow TM \oplus TM$. Con lo cual, es posible definir las geodésicas a partir de una conexión como las curvas que verifican $\Gamma_\alpha(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = \ddot{\alpha}$. Análogamente, dado un spray cuadrático, es posible encontrar una conexión afín, con lo cual es posible distinguir la equivalencia de estas dos nociones.

Veamos algunos elementos más que usaremos más adelante al analizar la métrica sobre TS_2.

2.2.4 Definición. Sea (M, F) variedad diferenciable con spray y Γ la conexión afín inducida sobre M.

- Dada $\alpha : J \to M$ curva de clase C^k con $k \geq 2$, definimos el conjunto de **levantadas** como

$$Lev(\alpha) := \{\beta \subset TM, \beta \text{ de clase } C^k \text{ tales que } \pi\beta = \alpha\}$$

donde $\pi : TM \to M$ es la proyección canónica.

Si $\beta = (\alpha, \mu) \in Lev(\alpha)$, definimos la aplicación $D_{\alpha'} : Lev(\alpha) \to Lev(\alpha)$ dada en una carta por

$$D_{\alpha'}(\beta) = \Big(\alpha, \dot{\mu} - \Gamma_\alpha(\dot{\alpha}, \mu)\Big) \tag{2.3}$$

que es lineal y una derivación en el sentido siguiente:

$$D_{\alpha'}(f\beta) = f'\beta + fD_{\alpha'}(\beta)$$

para toda $f : J \to \mathbb{R}$.

- Decimos que $\beta \in Lev(\alpha)$ es α-**paralela** si $D_{\alpha'}(\beta) \equiv 0$, es decir, si

$$\dot{\mu} = \Gamma_\alpha(\dot{\alpha}, \mu) \tag{2.4}$$

y denotaremos $Par(\alpha)$ al conjunto de levantadas α-paralelas.

En particular, $\beta = \alpha' = (\alpha, \dot{\alpha})$ es α-paralela si y solo si se verifica

$$D_{\alpha'}\alpha' = \Big(\alpha, \ddot{\alpha} - \Gamma_\alpha(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})\Big) = (\alpha, 0)$$

y esto último es equivalente a decir que α es una geodésica del spray asociado a la conexión. Es por esto que se dice que las geodésicas son las únicas curvas autoparalelas.

- Si (M, F) es una variedad con spray cuadrático, diremos que $\beta \in Lev(\alpha)$ es una **levantada de Jacobi o campo de Jacobi** si verifica la ecuación diferencial:

$$D^2_{\alpha'}\beta = R(\alpha', \beta)\alpha'. \tag{2.5}$$

Dados $V = (x, v)$ y $W = (x, w)$ existe una única levantada de Jacobi que verifica

$$\beta_{V,W}(0) = (x, v), \qquad D_{\alpha'}\beta_{V,W}(0) = (x, w). \tag{2.6}$$

Por último, necesitaremos el siguiente teorema, cuya demostración puede verse en [16]

2.2.5 Teorema. *Sea $a \in I$ intervalo cerrado. Dado $v \in T_{\alpha(a)}M$ existe una única $\beta_v = (\alpha, \mu_v) \in Par(\alpha)$ tal que $\mu_v(a) = v$. Sea $b \in I$ y definimos la aplicación*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^b_a(\alpha) : T_{\alpha(a)}M \to T_{\alpha(b)}M$$

$$v \mapsto \mu_v(b)$$

entonces $\mathcal{P}$ resulta un isomorfismo de espacios de Banach, al que denominaremos transporte paralelo a lo largo de α. Además, para todo $c \in I$, se verifica

$$\mathcal{P}^b_c \circ \mathcal{P}^c_a = \mathcal{P}^b_a.$$

De la ecuación 2.4, el morfismo del transporte paralelo implica encontrar las curvas μ_v que verifiquen:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(t) &= \Gamma_{\alpha(t)}(\dot{\alpha(t)}, \mu(t)), \\ \mu(a) &= v. \end{aligned}$$

En particular, nos interesará trasladar rígidamente a lo largo de las geodésicas que pasen por dos puntos dados. Si es posible definir sobre la variedad una métrica en cada T_xM, podremos decidir si tal métrica es invariante respecto este transporte paralelo.

Capítulo 3

Estructura métrica en espacios normados

En este capítulo, abordaremos algunas herramientas necesarias para estimar la longitud mínima de las curvas que unen dos puntos dados en un espacio normado. Este objetivo nos obliga a estudiar la métrica interior en estos espacios y algunos resultados sobre métrica de Finsler aplicada a variedades Riemannianas, nociones que usaremos luego para el estudio de la métrica en l_2.

3.1. Nociones generales sobre curvas y métrica interior

A lo largo de este capítulo trabajaremos con curvas $\gamma : I \to E$ continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado $I \subset \mathbb{R}$.

3.1.1 Definición. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to E$ una curva continua sobre E espacio métrico con d métrica. Denotamos $\Delta := \{t_0 = a \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_N = b\}$ a una partición finita del intervalo $[a, b]$ y sea

$$\ell(\gamma, \Delta) := \sum_{i=0}^{N} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Definimos la **longitud de la curva** como

$$\ell(\gamma) := \sup \{\ell(\gamma, \Delta), \Delta \text{ partición finita de } [a, b]\}.$$

Diremos que una curva es **rectificable** si $\ell(\gamma)$ es finito.

Dada una curva $\gamma : [a, b] \to E$, vamos a denotar $\ell_a^t(\gamma)$ (con $t \in [a, b]$) la longitud de la curva γ restringida en el intervalo $[a, t]$.

Para facilitar el manejo con particiones arbitrarias, para cada partición de un intervalo $[a, b]$ vamos a considerar su tamaño como $|\Delta| = \max_i |t_{i+1} - t_i|$. Como consideramos curvas continuas sobre un intervalo cerrado y acotado, la uniforme continuidad de la mismas nos permite vincular el tamaño de la partición con la longitud de la curva:

- Si γ es rectificable y $\epsilon > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|\Delta| < \delta$ implica que $\ell(\gamma) - \ell(\gamma, \Delta) < \epsilon$.
- Si $\ell(\gamma) = \infty$ entonces para todo $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\Delta| < \delta$ implica que $\ell(\gamma, \Delta) > \eta$.

Esta interpretación permite demostrar sin inconvenientes las siguientes propiedades.[1]

3.1.2 Lema. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to E$ curva continua.

1. Sean Δ_n particiones finitas tales que $|\Delta_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces $\ell(\gamma, \Delta_n) \longrightarrow \ell(\gamma)$.
2. (Aditividad de la longitud de una curva) Si $a \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 ... t_n \leq b$ entonces
$$\ell(\gamma) = \ell_a^{t_1}(\gamma) + \ell_{t_1}^{t_2}(\gamma) + \ell_{t_2}^{t_3}(\gamma) ... + \ell_{t_n}^{b}(\gamma).$$
3. (Semicontinuidad de la longitud) Sean $\gamma_n, \gamma : [a, b] \to E$ curvas tales que $\gamma_n(t) \longrightarrow \gamma(t)$ cuando $n \to \infty$ para cada $t \in [a, b]$. Entonces
$$\ell(\gamma) \leq \liminf \ell(\gamma_n).$$

Sea E un espacio normado con d métrica inducida por la norma. Notaremos $\mathcal{R}([a, b], E)$ al conjunto de curvas rectificables sobre $[a, b]$ y $\mathcal{R} = \mathcal{R}([0, 1], E)$. En este espacio, para cada $\gamma \in \mathcal{R}([a, b], E)$, la aplicación $l(t) := \ell_a^t(\gamma)$ definida para $t \in [a, b]$ resulta una función continua y creciente en $[a, b]$ tal que para cada $l \in [0, \ell(\gamma)]$ existe $t \in [a, b]$ con $\ell_a^t(\gamma) = l$. Además, el conjunto de tales t es cerrado y γ es constante en él.[2]

Gracias a esta propiedad de la longitud de curva, estamos en condiciones de definir la representación estándar de una curva.

3.1.3 Definición. Sea $\gamma \in \mathcal{R}$.

La **representación estándar** $\bar{\gamma}$ es la curva dada por:

$$\bar{\gamma}(l) = \gamma(t) \qquad \text{donde } t \text{ es el punto tal que} \qquad \ell_a^t(\gamma) = l.$$

Notar que la definición anterior de $\bar{\gamma}$ no depende del valor de t considerado para cada $l \in [0, \ell(\gamma)]$ pues sabemos que γ es constante en dichos puntos. Además $\ell(\bar{\gamma}) = \ell(\gamma)$ y

$$\ell_{l_1}^{l_2}(\bar{\gamma}) = \ell_{t_1}^{t_2}(\gamma) = |l_2 - l_1|,$$

donde $\ell_a^{t_1}(\gamma) = l_1, \ell_a^{t_2}(\gamma) = l_2$. De hecho, sean

$$\Delta_n = \{t_1 = t_0^n \leq t_1^n \leq t_2^n \leq ... \leq t_{Nn}^n = t_2\}$$

particiones del intervalo $[t_1, t_2]$ tales que $|\Delta_n| \to 0$. Por el lema 3.1.2, vale que $\ell(\gamma, \Delta_n) \longrightarrow \ell(\gamma)$. La uniforme continuidad de la curva permite definir

$$\Delta_n' = \{l_1 = l_0^n \leq l_1^n \leq l_2^n \leq ... \leq l_{Nn}^n = l_2\}$$

[1] Ver [6] para una demostración.

[2] En [6] o [16] es posible encontrar un desarrollo de estos resultados.

particiones del intervalo $[l_1, l_2]$ donde $\ell(\gamma_a^{t_i}) = l_i$ para $i = 1, 2$. Luego se cumple que $|\Delta_n'| \to 0$ y entonces vale que $\ell(\gamma, \Delta_n') \to \ell_{l_1}^{l_2}(\gamma)$. Es decir,

$$\ell_{l_1}^{l_2}(\bar{\gamma}) = \lim_{n\to\infty} \sum_j d(\bar{\gamma}(l_{j-1}^n), \bar{\gamma}(l_j^n)) = \lim_{n\to\infty} \sum_j d(\gamma(t_{j-1}^n), \gamma(t_j^n)) = \ell_{t_1}^{t_2} = |l_2 - l_1|.$$

Diremos que dos curvas son **equivalentes** si sus representaciones estándares por longitud de curva coinciden. Es decir, podemos considerar una curva γ en sentido geométrico como una clase de curvas equivalentes. Las propiedades de una clase γ son las propiedades de cada curva contenida en la clase. Denotaremos entonces $\bar{\gamma}$ la representación estándar para la clase γ y diremos que x pertenece a γ (denotando $x \in \gamma$) cuando pertenezca a la imagen de $\bar{\gamma}$. En particular, denotaremos que $\gamma \subset A$ para un subconjunto A de E cuando todo $x \in \gamma$ cumple que $x \in A$. La longitud de curva de γ será entonces la longitud común de todas las curvas de la clase. El siguiente lema asegura la buena definición de la clase de equivalencias en el espacio de curvas.

3.1.4 Proposición. *Sean $\gamma : [a, b] \to E$, $\gamma' : [c, d] \to E$ curvas continuas tales que existe una aplicación topológica ϕ de $[a, b]$ en $[c, d]$ donde resulta $\gamma(t) = \gamma'(s)$ si y sólo si $\phi(t) = s$. Entonces γ y γ' son equivalentes.*

Demostración. Para cada $t \in [a, b]$, sea $\{\Delta_n\}_n$ sucesión de particiones de $[a, t]$ con $\Delta_n \to 0$. Entonces la aplicación ϕ define una sucesión de particiones $\{\Delta_n'\}_n$ de $[c, t']$ con $\phi(t) = t'$. Como la imagen de γ' y γ coinciden, la longitud de la curva es la misma sobre subintervalos correspondientes vía ϕ y por lo tanto $\ell_a^t = \ell_c^{t'}$. Luego $\ell(\gamma) = \ell(\gamma')$ y la representación por longitud de arco de ambas curvas coinciden. □

Consideremos el conjunto de funciones continuas $C([a, b], \mathcal{X})$ con la topología compacto abierta dada por la distancia uniforme

$$dist(\alpha, \beta) = \max_{t\in[a,b]} d(\alpha(t), \beta(t)).$$

En particular, $\mathcal{R}([a, b], E) \subset C([a, b], E)$.

Podemos limitarnos a analizar estos conjuntos sólo para funciones definidas en el intervalo $[0, 1]$ ya que la distancia uniforme no detecta reparametrizaciones y $\ell(\alpha) = \ell(\widetilde{\alpha})$ para toda $\widetilde{\alpha}$ reparametrización de $\alpha \in \mathcal{R}([a, b], E)$.

Vía la funcional ℓ definida sobre las clases de curvas, con la equivalencia dada por las reparametrizaciones, podemos dotar al espacio E con la topología inducida por la distancia

$$d_l(x, y) = \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \gamma \in \mathcal{R} \text{ curva que une } x \text{ con } y\}.$$

En general, las topologías difieren entre sí. Sin embargo, son comparables y la topología de (E, d) resulta más fina (es decir, tiene más abiertos) que (E, d_l).

3.1.5 Definición. Si las distancias d_l y d sobre E coinciden, diremos que (E, d) es un **espacio de métrica interior.** Diremos que una curva continua $\gamma : [0, 1] \to E$ en un espacio de métrica interior (E, d) es una **geodésica corta** si

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|\ell(\gamma)$$

Diremos que un espacio (E, d) es **geodésico** si es de métrica interior y para todo par de puntos existe una geodésica corta que los une.

Por último, vamos a mencionar un teorema que es consecuencia de la continuidad de la longitud de curvas y el conocido teorema de Ascoli.

3.1.6 Teorema. *Si las longitudes de una sucesión $\{\gamma_n\}_n$ de curvas rectificables en un conjunto compacto $H \subset E$, están acotadas y los puntos iniciales a_n y finales b_n forman un conjunto acotado en E, entonces existe una subsucesión $\{\gamma_k\}_k$ que converge uniformente a γ, contenida en H y tal que*

$$\ell(\gamma) \leq \liminf \ell(\gamma_k)$$

Más precisamente, existe una subsucesión $\{\gamma_k\}_k$ y parametrizaciones $\{\bar{\gamma_k}\}_k$ definidas en el intervalo $[0, 1]$ tales que $\bar{\gamma_k}$ converge uniformente a $\bar{\gamma}$.

Demostración. Seleccionemos una subsucesión $\{a_k\}$ de la sucesión $\{a_n\}$ tales que convergen a un punto $a \in E$. Si $\ell(\gamma_n) = 0$ entonces las curvas representan un único punto en E, $\gamma_k(t) = \gamma(a_k) = \gamma(a)$ y el teorema es trivial.

Si suponemos que $\ell(\gamma_k) > 0$ y sean $\bar{\gamma}_k$ las representaciones de las curvas γ_k. Reparametricemos estas curvas en el intervalo $[0, 1]$ como $\bar{\gamma}'_k(t) = \bar{\gamma}_k(\ell(\gamma_k)t)$ para $t \in [0, 1]$.

Por hipótesis, $\ell(\gamma_k) < M$ para cierto M. Entonces si $t = s/\ell(\gamma_k)$

$$d_l(a, \bar{\gamma}'_k(t)) \;=\; d_l(a, \bar{\gamma}_k(s)) \;\leq\; d_l(a, a_0) + d_l(a_0, \bar{\gamma}_k(s)) \leq d_l(a, a_0) + M$$

con lo cual $\bar{\gamma}'_k(t)$ esta uniformente acotada para cada $t \in [0, 1]$. Además, por la definición de la representación estándar

$$d_l(\bar{\gamma}'_k(t_1), \bar{\gamma}'_k(t_2)) \;=\; d_l(\bar{\gamma}_k(s_1), \bar{\gamma}_k(s_2)) \;\leq\; |s_1 - s_2| \;=\; \ell(\gamma_k)|t_1 - t_2| \;<\; M|t_1 - t2|$$

para $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Con lo cual, la sucesión es uniformente equicontinua en este intervalo compacto.

Aplicando el teorema de Ascoli, la sucesión forma un conjunto precompacto en $C[0, 1]$, es decir, la sucesión de reparametrizaciones tiene una subsucesión convergente a $\bar{\gamma}$, como queríamos demostrar. □

3.1.7 Corolario. *Si en un conjunto compacto $H \subset E$, los puntos x e y pueden unirse con curvas rectificables, entonces existe una geodésica corta de x en y contenida en H.*

Demostración. Si λ es el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen x e y, hay una sucesión de curvas $\{\gamma_n\}_n$ cuyas longitudes convergen a λ. Luego aplicando el teorema anterior existe γ y una subsucesión γ_k tal que

$$\ell(\gamma) \leq \liminf \ell(\gamma_k) = \lambda$$

Pero $\lambda \leq \ell(\gamma)$ por definición. Luego γ es la geodésica corta que buscábamos. □

Diremos que una curva γ es **simple** si tiene una parametrización tal que $\bar{\gamma}(t) \neq \bar{\gamma}(s)$ cuando $t \neq s$. En particular, una geodésica corta es simple pues su parametrización por longitud de arco tiene esta

propiedad. De hecho, si suponemos lo contrario para γ geodésica corta que une x e y y existen t_1, t_2 tal que $t_1 < t_2$ y $\bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2)$, entonces la curva

$$\alpha(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ \gamma(t + t_1 - t_2) & \text{si } t_1 < t < \ell(\gamma) - t_1 + t_2 \end{cases}$$

es una curva que une x e y que tiene menor longitud que γ, lo cual es absurdo.

3.2. Métrica de Finsler en variedades diferenciables

Lo desarrollado hasta el momento nos permitirá caracterizar la métrica interior de la esfera unitaria de un espacio normado y vincularla con la norma del espacio subyacente sin considerar la estructura diferencial de tal conjunto. Otra forma de establecer una métrica en una variedad diferenciable es determinando una manera de medir la longitud de las curvas sobre la variedad. En particular, esta idea es la que utilizaremos en el análisis de S_2.

Sobre E espacio de Banach, dada una curva suave parametrizada $\gamma : [a, b] \to E$ podemos medir su longitud mediante la fórmula:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_E \, dt. \tag{3.1}$$

Veamos como introducir la idea de medir curvas en el caso de variedades de Banach, de tal manera que la definición nos permita medir en cada espacio tangente T_xM de manera coherente.

3.2.1 Definición. Dada una variedad M modelada por un espacio de Banach E, **una métrica de Finsler** es una función $b : TM \to [0, +\infty)$ que define una norma en cada espacio tangente T_xM, $x \in M$, es decir, si $(x, v) \in TM$ y denotando $b(x, v) = b(v) = \|v\|_x$ se tiene para $v, w \in T_xM$ y $t \in \mathbb{R}$,

1. $b(tv) = |t|b(v)$,
2. $b(v + w) \leq b(v) + b(w)$,
3. $b(v) \geq 0$ y $b(v) = 0$ si y sólo si $v = 0$.

Decimos que b es **acotada superiormente** si para cada punto $x_0 \in M$ existe una carta (U, ϕ) alrededor de x_0 y una constante $m_{x_0} > 0$ de manera que

$$m_{x_0} \|v\|_x \leq \|\phi_{*x} v\|_E ,$$

para todo $x \in U$ y todo $v \in T_xM$. Análogamente, decimos que b **es acotada inferiormente** si para cada punto $x_0 \in M$ existe una carta (U, ϕ) alrededor de x y una constante $M_{x_0} > 0$ de manera que

$$\|\phi_{*x} v\|_E \leq M_{x_0} \|v\|_x$$

para todo $x \in U$ y todo $v \in T_xM$. Si b es acotada inferiormente y superiormente, diremos que b es **acotada**.

Definimos la **funcional longitud de curvas** $\alpha : [a,b] \to M$ continua y C^1 dada por

$$\ell_b(\alpha) = \int_a^b b(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))dt = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)}\, dt. \tag{3.2}$$

Esta funcional permite definir la pseudo-distancia asociada a la métrica a $d_b : M \times M$.

Notar que esta funcional es invariante bajo reparametrizaciones, gracias al teorema de cambio de variables. Por lo cual, sin pérdida de generalidad trabajaremos con curvas C^1 a trozos, inyectivas parametrizadas a velocidad constante en el intervalo $[0,1]$, que verifican:

$$\|\dot{\alpha}\|_\alpha = cte = \ell_b(\alpha).$$

En general, d_b no define una distancia sobre M. Si b está acotada inferiormente se puede probar que d_b resulta una distancia, y si b está acotada superiormente o es localmente Lipschitz d_b resulta una distancia acotada superiormente, esto es, localmente dada (U,ϕ) existe $m > 0$ tal que

$$m d_b(x,y) \leq \|\phi(y) - \phi(x)\|_E.$$

Si b es acotada entonces tenemos que si $x, y \in U$ y $\alpha \subset U$ una curva que los une suave a trozos entonces

$$m\ell_b(\alpha) \leq \ell(\phi \circ \alpha) \leq M\ell_b(\alpha)$$

donde ℓ es la longitud de las curvas en E definida en (3.1). Más aún, estas condiciones implican que

$$m d_b(x,y) \leq \|\phi(y) - \phi(x)\|_E \leq M d_b(x,y)$$

y entonces las topologías de M como variedad de Banach y de (M, d_b) como espacio métrico son equivalentes.

3.2.2 Definición. Decimos que (M,b) es una **variedad de Banach- Finsler (o Finsleriana)** si M es una variedad modelada por un espacio de Banach E con $b : TM \to [0,+\infty)$ una métrica de Finsler acotada superiormente y tal que d_b defina una distancia sobre la variedad.

Si además (M, d_b) es métrico completo diremos que M es **métricamente completo**.

Cuando exista un spray definido sobre M, diremos que (M,b,F) es una **variedad Finsleriana con spray** si la métrica b es invariante por el transporte paralelo del spray a lo largo de las geodésicas. Es decir, si $\alpha \subset M$ es geodésica, dados $s \in \mathbb{R}$ y $z \in T_{\alpha(s)}M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$\|\mathcal{P}_s^t(\alpha)z\|_{\alpha(t)} = \|z\|_{\alpha(s)}.$$

Notar que si M es una variedad Finsleriana con spray, sus geodésicas tienen velocidad constante ya que si $\alpha(t) = \exp_x(tv)$ tenemos

$$\|\mathcal{P}_s^t(\alpha)\dot{\alpha}(s)\|_{\alpha(t)} = \|\dot{\alpha}(t)\|_x = \|v\|_x = cte.$$

Si además el espacio (M, d_b) fuera completo, se puede probar que las geodésicas de M estarán definidas en todo $\mathbb{R}$.

En el caso de la esfera en el espacio de Hilbert l_2, es posible establecer una métrica tal que resulte una variedad Finsleriana con spray gracias a la métrica Riemanniana. Veamos como es ésta construcción en un contexto más general.

Sea M variedad modelada por E espacio de Banach y sea $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ forma bilineal, simétrica y continua tal que $\langle z, z\rangle \in \mathbb{R}$ y exista una descomposición $E = E_- \oplus E_+$ de espacios ortogonales donde la forma está estrictamente definida positiva en E_+ y estrictamente definida negativa en E_-. Además, fijada una carta (U, ϕ) de M, supongamos que existe una sección continua $A : U \to Gl(E_+ \oplus E_-)$. Entonces para $x \in M$ y $v \in T_xM$ definimos localmente

$$\langle \phi_{*x} v, \phi_{*x} w\rangle_x = \langle A_x \phi_{*x} v, A_x \phi_{*x} w\rangle$$

donde con la identificación $T_xM \simeq E$ que venimos usando, podemos reducir esta expresión como

$$\langle v, w\rangle_x = \langle A_x v, A_x w\rangle.$$

Diremos que $\langle\ ,\ \rangle_x$ es una métrica Riemanniana si $E_- = 0$, o sea , $\langle z, z\rangle \geq 0$. En tal caso, podemos definir la métrica de Finsler- Banach por

$$\|v\|_x = \sqrt{\langle v, v\rangle_x}$$

Más aún, tomando H como la completación de E con la forma bilineal y extendiendo las definiciones anteriores tenemos que el operador $A_x : H \to H$ es inversible. En particular, usaremos esta noción sobre un espacio de Hilbert $H = E$. Definimos entonces $g_x := A_x^* A_x \in \mathcal{B}(H)$ (operador positivo e inversible). Entonces ésta aplicación verifica

$$\langle v, w\rangle_x = \langle v, g_x w\rangle = \langle g_x v, w\rangle.$$

La sección $g : M \to TM \oplus TM$ así definida se denomina métrica riemanniana sobre la variedad M y diremos entonces que (M, g) es una variedad riemanniana. Denotaremos $g(x)(v, w) = \langle v, w\rangle_x = \langle v, g_x w\rangle = \langle g_x v, w\rangle$. Sea (M, g) es una variedad Riemanniana con $g : M \to TM \oplus TM$ métrica. Denotaremos $g(x)(v, w) = \langle v, w\rangle_x = \langle v, g_x w\rangle = \langle g_x v, w\rangle$. En tal caso, podemos definir la métrica de Finsler-Banach por

$$\|v\|_x = \sqrt{\langle v, v\rangle_x}.$$

El siguiente teorema nos permitirá incorporar una métrica de Finsler compatible con el spray inducido por la métrica Riemanniana.

3.2.3 Teorema. *Sea (M, g) variedad Riemanniana. Entonces existe un spray F sobre M tal que resulta compatible con la métrica, es decir, verifica*

$$\langle \mathcal{P}_0^t(\alpha) v, \mathcal{P}_0^t(\alpha) w\rangle_x = \langle v, w\rangle_x$$

para toda curva $\alpha \subset M$ de clase C^2 con $\alpha(0) = x$ y todo $v, w \in T_xM$. Este spray es el único que verifica las siguientes afirmaciones equivalentes:

1. *Dados tres campos X, Y, Z en M, la derivada covariante asociada al spray verifica*

$$X(\langle Y, Z\rangle) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle. \tag{3.3}$$

2. *Si $\alpha : I \to M$ es curva de clase C^2, y denotamos D_t a la segunda coordenada de $D_{\alpha'}$. Dadas $(\alpha, \eta), (\alpha, \mu) \in Lev(\alpha)$ entonces*

$$\frac{d}{dt}\langle \eta, \mu \rangle = \langle D_t \eta, \mu \rangle + \langle \eta, D_t \mu \rangle. \tag{3.4}$$

Locamente, el spray está definido por

$$\langle F_x(v), g(x)z \rangle = -\langle g_{*x} v \cdot v, z \rangle + \frac{1}{2}\langle g_{*x} z \cdot v, v \rangle.$$

Bajo las condiciones del teorema anterior, se denomina ***spray canónico o métrico*** *al spray inducido en (M, g). Su derivada covariante se denomina* ***derivada de Levi-Civita****.*

Dada una variedad (M, g) pseudo-Riemanniana es posible vincular las curvas cortas que minimizan la funcional longitud con las geodésicas del spray métrico. Una herramienta posible para notar esto viene dada por el cálculo variacional.

Diremos que $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ es una **curva admisible** si es C^1 con derivada no nula a trozos y tal que para toda partición del $[0, 1]$ en $0 = t_0 \leq ... \leq t_{n+1}$, $\gamma \mid_{(t_i, t_{i+1})}$ es C^1 y existen los límites

$$\gamma(t_i^+) = \lim_{t \to t_i^+} \gamma(t) \qquad \gamma(t_i^-) = \lim_{t \to t_i^-} \gamma(t).$$

En tal caso, una **variación** $\upsilon : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ es una función tal que para cada s fijo, $v_s = v(s, \cdot)$ es admisible, $v_0 = \gamma$ y υ es dos veces diferenciable sobre $(-\epsilon, \epsilon) \times I$ con $I \subset [0, 1]$ intervalo donde $\gamma \mid_I$ es no nula y C^1. Denotemos υ' a la derivada parcial de υ respecto de la variable s y $\dot{\upsilon}$ a la derivada parcial de υ respecto de la variable t.

Gracias a la existencia de un spray métrico, es posible construir una variación en torno a una curva admisible con velocidad constante. Más aún, tenemos el siguiente resultado:

3.2.4 Teorema. *Sean (M, g) una variedad Riemanniana, $\gamma \subset M$ admisible con velocidad constante y $(\gamma, \mu) \in Lev(\gamma)$ suave a trozos con $\mu(0) = \mu(1) = 0$.*

Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\upsilon : (\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \longrightarrow M$ dada por

$$\upsilon(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(s\mu(t))$$

es una variación de γ con $\upsilon'(0, t) = \mu(t)$. Además, se vincula con la funcional longitud de curvas ℓ asociada a la métrica Riemanniana mediante la relación

$$\ell(\gamma)\frac{d}{ds} \mid_{s=0} \ell(\upsilon_s) = -\int_0^1 \langle D_t \dot{\gamma}, \mu \rangle_g dt + \sum_{i=0}^{n} \langle \mu(t_i), \gamma(t_i^-) - \gamma(t_i^+) \rangle_g.$$

donde $0 = t_0 \leq ... \leq t_{n+1}$ es una partición del $[0, 1]$.

3.2.5 Corolario. *Sean (M, g) variedad Riemanniana y $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$.*

1. *Si γ es una geodésica del spray, entonces es un punto crítico de ℓ para toda variación cuyos extremos sean fijos.*

2. *Si γ es C^1 y punto crítico (en particular minimal) entonces es una geodésica del spray.*

3. *Si γ es admisible y punto crítico de ℓ entonces es una parametrización de una geodésica del spray, en particular, suave en $[0,1]$.*

Este corolario afirma que todas las geodésicas del spray métrico resultan extremales y de existir una curva minimal entre dos puntos entonces tal curva debe ser una geodésica. A continuación veamos un lema que nos permitirá luego analizar la existencia local de geodésicas en las variedades Riemannianas.

3.2.6 Lema (Lema de Gauss)**.** Sea (M,g) una variedad pseudo-Riemanniana. Sea $\gamma : I \to M$, $\gamma(t) = \exp_x(tz)$ una geodésica de M, con $z \in T_x\mathcal{M}$.

1. Dados $v, w \in T_xM$ sea $\eta \in Lev(\gamma)$ el único campo de Jacobi con $\eta(0) = v$, $\mathcal{D}_t\eta(0) = \dot{\eta}(0) = w$. Entonces
$$\langle \dot{\gamma}(t), \eta(t)\rangle_g \;=\; \langle z, v + tw\rangle_x.$$

2. Para todo $w \in T_xM$ y todo $t \in I$ se tiene
$$\langle (\exp_x)_{*tz} z, (\exp_x)_{*tz} w\rangle_g \;=\; \langle z, w\rangle_x.$$

3. Si $v = 0$ y $\langle w, z\rangle_x \;=\; 0$ entonces $\langle \dot{\gamma}(t), \eta(t)\rangle_g \;=\; 0$ para todo $t \in I$.

El siguiente teorema establece la existencia local de curvas minimales, es decir, dado un punto $x \in M$ podemos encontrar un entorno U de x donde todo $y \in U$ se une con x con una geodésica minimal única salvo reparametrizaciones.

3.2.7 Teorema. *Sean $x \in M$ y $R > 0$ tal que*
$$\exp_x : B(0,R) \subset T_xM \longrightarrow U_R(x) = \exp_x(B(0,R))$$
es un difeomorfismo. Sean $y \in U_R(x)$ y notemos $\gamma_{x,y}(t) = \exp_x(tv)$ la geodésica del spray que une x con y donde $v \in B(0,R) \subset T_xM$. Entonces

1. *Sea $0 < c < R$. Toda curva admisible con extremo en x cuya imagen se salga del abierto $\exp_x(B(0,c))$ tiene longitud mayor a c.*

2. *Toda curva α admisible que una x con y tiene longitud mayor a la de $\gamma_{x,y}$. Es decir, se cumple que $\ell(\alpha) \geq \ell(\gamma_{x,y}) = \|v\|_x = d(x,y)$.*

3. *La igualdad vale si y sólo si α es una reparametrización de $\gamma_{x,y}$.*

Demostración. Sabemos que $\gamma_{xy}(t) = \exp_x(tv)$ para algún $v \in T_xM$ con $\|v\|_x = \ell(\gamma_{xy}) < R$.
Sea α una curva admisible y consideremos $r(t) := \|\Gamma(t)\|_x$ y $u(t) := \dfrac{1}{r(t)}\Gamma(t)$ las coordenadas polares, donde $u : [0,1] \to \{v : \|v\|_x = 1\} \subset T_xM$ y $\Gamma := \exp_x^{-1} \circ \alpha : [a,b] \to T_xM$. Notar que por ser $\Gamma \neq 0$ resulta que r es suave a trozos y no nula. En consecuencia, u también es suave a trozos.
Sea $I \subset [0,1]$ la componente conexa del cero en $\alpha^{-1}U_c(x)$, entonces existen dos opciones: $I = [0,s)$ si α se sale de $U_c(x)$ con $r(s) := \lim_{t\to s^-} r(t) = c$, o bien, $I = [0,1]$ si $\alpha \subset U_c(x)$. En cualquier caso, para

$0 < \delta < s$ sea α_δ la restricción de α al intervalo $I \cup \{t \geq \delta\}$. Como podemos suponer que α no vuelve a pasar por x podemos escribir $\alpha_\delta(t) = \exp_x(\Gamma(t)) = \exp_x(r(t)u(t))$. Luego

$$\dot{\alpha_\delta}(t) \;=\; (\exp_x)_{*ru}(\dot{r}u + r\dot{u}) \;=\; \dot{r}(\exp_x)_{*ru}u + r(\exp_x)_{*ru}\dot{u}.$$

Como $\|u\|^2 = 1$, derivando se tiene que $\langle u(t), \dot{u(t)}\rangle_g = 0$ para todo t. Por el segundo item del lema de Gauss 3.2.6, se deduce que

$$\langle (\exp_x)_{*ru}u, (\exp_x)_{*ru}\dot{u}\rangle_g = \langle u, \dot{u}\rangle_x = 0.$$

Entonces

$$\|\dot{\alpha_\delta}(t)\|^2 = \|\dot{r}(\exp_x)_{*ru}u\|^2 + \|r(\exp_x)_{*ru}\dot{u}\| \geq \dot{r}^2\|(\exp_x)_{*ru}u\|^2, \tag{3.5}$$

es decir,

$$\|\dot{\alpha_\delta}(t)\| \;\geq\; |\dot{r}|\|(\exp_x)_{*ru}u\| = |\dot{r}|,$$

puesto que $(\exp_x)_{*ru}u \;=\; \dfrac{d}{dr}\exp_x(ru)$ (con u y r variables independientes), y el transporte paralelo es isométrico. Supongamos primero que α se sale de $U_c(x)$. Integrando en $[\delta, s]$ obtenemos

$$|c - r(0)| \;=\; |r(s) - r(0)| \;\leq\; \int_0^s |\dot{r}| \;\leq\; \int_0^s \|\dot{\alpha_\delta}(t)\| \;\leq\; \ell(\alpha_\delta) \leq \ell(\alpha).$$

Como $r(0) = r_\delta(0)$, haciendo tender δ a cero se tiene $c \leq \ell(\alpha)$. Lo cual demuestra el item 1 del teorema. Supongamos ahora que $\alpha : [0,1] \to M$ une x e y. Como $\ell(\gamma_{xy}) = \|v\|_x \leq R$, tomando $c = R$ en el item previo, se sigue que si α se sale de $U_R(x)$ entonces $\ell(\alpha) \geq R > \ell(\gamma_{xy})$. Supongamos ahora que α no se sale del entorno $U_R(x)$ entonces $\alpha(1) = y = \exp_x(1v)$. Luego $\Gamma(1) = v$, con lo cual $r(1) = \|\Gamma(1)\|_x = \|v\|_x$ y entonces

$$|\|v\|_x - r_\delta(0)| \leq \ell(\alpha_\delta).$$

Haciendo tender $\delta \to 0^+$ nuevamente obtenemos que $\ell(\alpha) \geq \|v\|_x$. Esto prueba que γ_{xy} es minimal y entonces $d(x,y) = \|v\|_x = \ell(\gamma_{xy})$. Si $\ell(\gamma) = \ell(\gamma_{xy}) = d(x,y)$, entonces $\alpha \subset U_R(x)$. Como α también es minimal, es una geodésica del spray por el tercer item del corolario 3.2.5 y como $\alpha \subset U_R(x)$, debe ser una reparametrización de γ_{xy}. Esto finaliza la demostración del tercer ítem. □

3.2.8 Corolario. *Sean (M,g) una variedad Riemanniana y $x \in M$. Entonces existe una constante R_x (que depende a lo sumo del punto) tal que para todo $0 < r < R_x$ se tiene*

$$\exp_x(B(0,r)) = B(x,r),$$
$$\exp_x(S(0,r)) = S(x,r)$$

y $\exp_x$ es un difeomorfismo entre estas variedades.

Gracias al teorema y corolario anteriores las geodésicas de una variedad Riemmaniana existen localmente y son minimales. Más aún, es posible probar que la curva será minimal incluso considerando curvas rectificables.[3]

[3] En [16] se pueden encontrar una serie de proposiciones que analizan estos hechos en detalle.

La métrica de una variedad está vinculada con el tensor de curvatura y los campos de Jacobi mediante el concepto de curvatura seccional.

Dada (M, g) Riemanniana, $x \in M$ y un plano bidimensional $\triangle \subset M$ generado por dos vectores $v, w \in T_x M$ denotamos el área del paralelogramo generado por estos dos vectores como:

$$A(v, w) := \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle_x}.$$

Definimos la curvatura seccional sobre el plano $\triangle \subset M$ como:

$$sec_{\triangle} := -\frac{\langle R_x(v, w)v, w \rangle}{A(v, w)^2}.$$

Se puede probar que esta cantidad no depende de la base considerada para $\triangle$. Por esto, tomando una base ortonormal del plano tenemos la expresión simplificada

$$sec_{\triangle} = -\langle R_x(v, w)v, w \rangle.$$

Capítulo 4

La esfera en l_p con $1 < p < \infty$

En este capítulo vamos a desarrollar los principales resultados que se vinculan con el estudio de la estructura métrica de las esferas en los espacios l_p con $1 < p < \infty$, analizando los mismos en el caso particular de l_2, donde la existencia de un producto interno permite encontrar expresiones explícitas de las geodésicas que unen dos puntos dados.

4.1. Estructura de variedad diferencial de las esferas unitarias en l_p.

En esta sección mostraremos que la esfera en el espacio l_p con $1 < p < \infty$ es una subvariedad con la ayuda de la proposición 2.1.5. Para ello, será necesaria la diferenciabilidad de la norma. Respetando la notación ya planteada, en esta sección denotaremos S_p a la esfera unitaria en l_p, esto es,

$$S_p = \Big\{ x \in l_p : \|x\|_p = 1 \Big\}.$$

4.1.1 Proposición. *El conjunto $S_p \subset l_p$, con $1 < p < \infty$ es una subvariedad cerrada diferenciable. Además, si $f(x) = \|x\|_p$ resulta que $T_x S_p \simeq Ker f_{*x}$ para todo $x \in S_p$, es decir,*

$$v \in T_x S_p \qquad \text{si y sólo si} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p-2} Re(\bar{x}_i v_i) = 0. \tag{4.1}$$

Demostración. Vamos a probar que S_p es una subvariedad de l_p usando la proposición 2.1.5 y el hecho de que $S_p = f^{-1}(1)$ para f la función norma en l_p.

En primer lugar, en el capítulo 1 analizamos la diferenciabilidad de la norma $f(z) := \|z\|_p$ en l_p y obtuvimos en la observación 1.3.17 una expresión para la diferencial de la misma:

$$f_{*x}(y) := \|x\|^{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p-2} Re(\bar{x}_i y_i).$$

Notar que $f_{*x} : T_xS_p \to \mathbb{R}$ resulta ser una aplicación sobreyectiva pues, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in S_p$:

$$\begin{aligned} f_{*x}(\lambda x) &= \lambda \|x\|^{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p-2} Re(\bar{x}_i x_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p-2} |x_i|^2 \\ &= \lambda \|x\|_p^p = \lambda. \end{aligned}$$

En segundo lugar, usando el lema 1.2.5 para la funcional f_{*x}, obtenemos que su núcleo se parte

$$l_p = \langle x \rangle \oplus Ker f_{*x}.$$

Luego, tenemos todas las hipótesis necesarias para aplicar la proposición 2.1.5, la cual dota de estructura de subvariedad a S_p. Más aún, resulta que $T_xS_p \simeq Ker f_{*x}$ y por lo tanto $v \in T_xS_p$ para $x \in S_p$ si y sólo si

$$\begin{aligned} f_{*x}(v) &= \|x\|^{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p-2} Re(\bar{x}_i v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p-2} Re(\bar{x}_i v_i) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos y abordar las ideas geométricas con mayor claridad, vamos a considerar el análisis de las esferas en espacios de sucesiones reales. En tal caso, la condición de la proposición anterior se reduce a la siguiente:

$$v \in T_xS_p \qquad \text{si y sólo si} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p-2} x_i v_i = \sum_{i=1}^{\infty} sgn|x_i|^{p-1} v_i.$$

Con la notación incorporada en la sección 1.3, el espacio tangente en un punto $x \in S_p$ dado resulta:

$$T_xS_p = \{y \in l_p : \langle sgn|x|^{p-1}, y \rangle = 0\}. \tag{4.2}$$

Gracias al teorema de representación de Riesz, las funcionales lineales de l_p^* se identifican unívocamente con un elemento de l_q, donde $1/p + 1/q = 1$. Es decir, para $f \in l_p^*$ existe $x \in l_q$ tal que $f(z) = \langle x, z \rangle$ y, además, $\|x\|_q = \|f\|_{l_p^*}$. Notar que en nuestro caso, la descripción dada por (4.2) caracteriza al tangente como el núcleo de la aplicación $h(y) := \langle sgn|x|^{p-1}, y \rangle$ que pertenece a l_p^* pues:

$$\|h\|_{l_p^*} = \left\| sgn|x|^{p-1} \right\|_q = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/q} = \|x\|_p^{p/q} = 1.$$

Es decir, dado $x \in S_p$ el elemento $x^* := sgn|x|^{p-1} \in l_q$ define la diferencial de la norma en x.

Por otro lado, como l_p es uniformemente convexo, gracias a la observación 1.4.9 y la proposición 1.4.8, podemos encontrar la expresión explícita del proyector métrico sobre $ker f_{*x}$ para cada $x \in S_p$, donde $f(z) = \|z\|_p$:

$$P_x(y) := y - \frac{\langle sgn|x|^{p-1}, y \rangle}{\langle sgn|x|^{p-1}, x \rangle} x = y - \langle sgn|x|^{p-1}, y \rangle x.$$

Geométricamente, estos resultados muestran que los elementos del tangente $T_x S_p$, con $x \in S_p$, son aquellos que pertenecen al hiperplano dado por $\langle sgn|x|^{p-1}, y\rangle = 0$. Además se cumple que

$$\begin{aligned} &\langle sgn|x|^{p-1}, x\rangle = 1 \\ &\langle sgn|x|^{p-1}, y\rangle \leq 1 \qquad \text{si} \qquad y \in B_p \end{aligned}$$

Es decir, el hiperplano dado por $\langle x^*, y\rangle := \langle sgn|x|^{p-1}, y\rangle$ deja a un lado de x los puntos de la bola unidad.

Más aún, los elementos del espacio $T_x S_p$ son ortogonales a x, según el concepto de ortogonalidad de Birkhoff-James. Este hecho no es más que un resultado deducido de aplicar la proposición 1.4.12 a este caso particular, la cual es válida pues los espacios l_p son uniformemente convexos y uniformemente suaves, como vimos en la observación 1.4.13.

4.2. Métrica interior sobre l_p

En esta sección haremos referencia a la región convexa bajo una curva, denotando dicho conjunto de puntos por

$$co(\gamma) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ : x_i \in \gamma, n \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Vimos en las secciones anteriores que en un espacio normado podemos definir una distancia vía la funcional ℓ longitud de curvas:

$$d_l(x, y) = \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ curva rectificable que une } x \text{ con } y\}.$$

Vamos a analizar esta distancia sobre los puntos de la esfera S_p. Notar que con ésta definición, dados dos puntos en S_p debemos considerar todas las curvas en l_p rectificables que unen dichos puntos. Comencemos con dos lemas que serán de utilidad para reducir el conjunto de curvas a aquellas contenidas en la esfera.

4.2.1 Lema. Dados $x, y \in S_p$, sea γ curva con $\delta(\gamma) := \text{máx}\{\ \|z\|_p : z \in \gamma\} > 1$ y que une x e y en $l_p \setminus B_p$. Entonces existe una curva $\widetilde{\gamma}$ contenida en $co(\gamma) \setminus B_p$ tal que $\ell(\widetilde{\gamma}) \leq \ell(\gamma)$ y $\delta(\widetilde{\gamma}) < \delta(\gamma)$.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ la clase de las curvas γ' que unen x e y en $co(\gamma) \setminus B_p$ tal que $\ell(\gamma') \leq \ell(\gamma)$. Esta clase no es vacía pues $\gamma \in \mathcal{C}$. Sea $\delta_0 = \delta(\gamma)$. Vamos a suponer que la afirmación no se cumple. Es decir, supongamos que $\delta(\gamma') \geq \delta_0$ para toda curva $\gamma' \in \mathcal{C}$. Entonces

$$\delta_0 \leq \delta(\gamma') = \text{máx}\left\{ \|x\|_p : x \in \gamma' \right\} \leq \text{máx}\left\{ \|x\|_p : x \in co(\gamma) \right\} \leq \text{máx}\left\{ \|x\|_p : x \in \gamma \right\} = \delta_0.$$

Es decir, necesariamente $\delta(\gamma') = \delta_0$ para toda $\gamma' \in \mathcal{C}$.

Tomemos $\gamma' \in \mathcal{C}$ y denotemos $\omega(\gamma') = \text{máx}\left\{ s : \left\|\bar{\gamma'}(s)\right\|_p = \delta_0 \right\}$, donde el máximo se toma en el intervalo $[0, \ell(\gamma)]$ y $\bar{\gamma}'$ es la representación estándar de γ'.

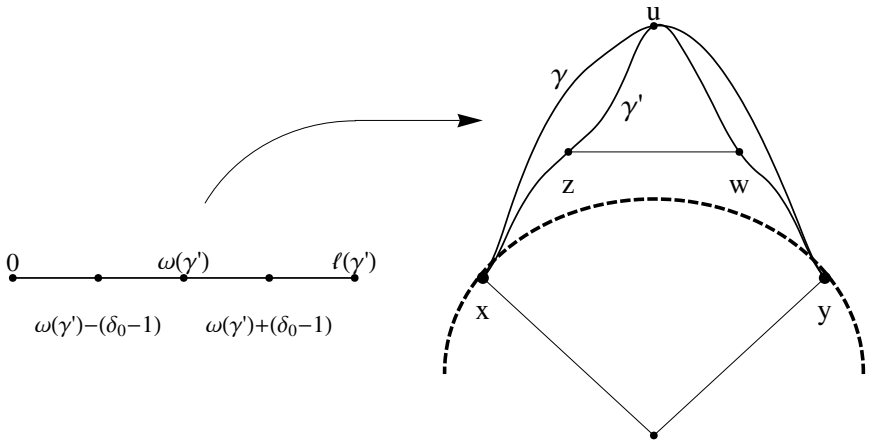

Figura 4.1: Lema 4.2.1

Sea $u := \bar{\gamma}'(\omega(\gamma'))$. Entonces

$$\begin{aligned}\delta_0 - 1 = \|u\|_p - \|x\|_p \;&\leq\; \|u - x\|_p \;\leq\; \ell(\gamma') - \|y - u\|_p \\ &\leq\; \ell(\gamma') - (\|u\|_p - \|y\|_p) \\ &=\; \ell(\gamma') - (\delta_0 - 1).\end{aligned}$$

Si consideramos los puntos $z = \bar{\gamma}'(\omega(\gamma') - (\delta_0 - 1))$ y $w = \bar{\gamma}'(\omega(\gamma') - (\delta_0 + 1))$ contenidos en la curva γ', según la definición de $\omega(\gamma')$, tenemos que $\|w\|_p < \delta_0$. Construimos una nueva curva γ'' a partir de γ' pero reemplazando el segmento de curva que une z con w (la imagen del intervalo $[\omega(\gamma') - (\delta_0 - 1), \omega(\gamma') + (\delta_0 - 1)]$ a través de $\bar{\gamma}'(t)$) por el segmento lineal que los une. Claramente

$$\gamma'' \;\subset\; co(\gamma') \;\subset\; co(\gamma) \quad \text{y} \quad \ell(\gamma'') \;\leq\; \ell(\gamma') \;\leq\; \ell(\gamma).$$

Además, tomando un punto del segmento lineal $(1 - \lambda)z + \lambda w$, con $\lambda \in [0, 1]$ resulta

$$\begin{aligned}\delta_0 = (1 - \lambda)\delta_0 + \lambda\delta_0 \;&> (1 - \lambda)\,\|z\|_p + \lambda\,\|w\|_p \\ &\geq \|(1 - \lambda)z + \lambda w\|_p \\ &\geq \|u\|_p - (1 - \lambda)\|u - z\|_p - \lambda\|u - w\|_p \\ &\geq \delta_0 - (1 - \lambda)(\delta_0 - 1) = 1,\end{aligned}$$

con lo cual, $\gamma'' \cap B_p = \emptyset$. Luego, $\gamma'' \in \mathcal{C}$.

Más aún, $\omega(\gamma'') \leq \omega(\gamma') - (\delta - 1)$ pues los puntos de la curva γ'' que pertenecen al segmento que une z y w tienen norma menor a δ y los que pertenece al segmento de curva de γ' que une w e y no pueden tener norma δ_0 (pues el máximo se alcanza al llegar a u).

En definitiva, dada $\gamma' \in \mathcal{C}$ podemos construimos otra curva $\gamma'' \in \mathcal{C}$ tal que

$$\omega(\gamma'') \;\leq\; \omega(\gamma') - (\delta - 1).$$

Repitiendo sucesivamente la misma construcción llegaremos a una contradicción pues $\delta_0 - 1 > 0$ y $\omega(\gamma') \geq 0$ para todo $\gamma' \in \mathcal{C}$. □

4.2.2 Lema. Si $x, y \in S_p$ y existe una curva finito dimensional γ que los une en $l_p \setminus B_p$, entonces hay una curva simple γ_0 que une x e y contenida en $co(\gamma) \cap S_p$ con $\ell(\gamma_0) \leq \ell(\gamma)$.

Demostración. Como γ es una curva finito-dimensional y compacta entonces $co(\gamma) \setminus B_p$ también resulta finito dimensional y compacta. Por el lema anterior, sea $\mathcal{C}$ la clase de curvas que unen x e y en $co(\gamma) \setminus B_p$ y $\delta_0 = \text{ínf}\{\delta(\gamma') : \gamma' \in \mathcal{C}\} \geq 1$.

Tomemos entonces una sucesión $\{\gamma_n\} \subset \mathcal{C}$ tal que $\delta(\gamma_n) \to \delta_0$. Por el teorema 3.1.6, existe una subsucesión γ_k y una curva γ_0 tal que $\ell(\gamma_0) \leq \liminf \ell(\gamma_k) \leq \ell(\gamma)$.

Es claro que $\delta_0 = \delta(\gamma_0)$. Más aún, $\delta_0(\gamma_0) = 1$ ya que sino, por el lema 4.2.1, si $\delta(\gamma) > 1$ podemos encontrar una curva γ' con $\delta(\gamma') < \delta(\gamma_0) = \delta_0$, lo cual contradice que este valor es un ínfimo. Por lo tanto, $\gamma_0 \subset co(\gamma) \cap S_p$.

Puede ocurrir que la curva encontrada γ_0 no sea simple. En tal caso, si consideramos el conjunto compacto $co(\gamma) \cap S_p$, como existe una curva rectificable que une los puntos x e y, por el corolario 3.1.7 existe una curva corta que los une y, como mencionamos anteriormente, será una curva simple. □

4.2.3 Teorema. *Sean $x, y \in S_p$ entonces*

$$\begin{aligned}
&\text{ínf}\{\ell(\gamma) : \ \gamma \textit{ curva que une } x \textit{ con } y \textit{ en } l_p \setminus B_p\} \\
&\quad = \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \ \gamma \textit{ curva que une } x \textit{ con } y \textit{ en } S_p\} \\
&\quad = \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \ \gamma \textit{ curva simple que une } x \textit{ con } y \textit{ en } S_p\} \\
&\quad = \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \ \gamma \textit{ curva finito dimensional que une } x \textit{ con } y \textit{ en } S_p\} < \infty.
\end{aligned}$$

Además, si consideramos la esfera en el espacio l_p^n, este ínfimo se alcanza.

Demostración. Denotando $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ las respectivas clases de curvas consideradas al tomar el ínfimo de las longitudes, es claro que $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \mathcal{C}_3 \supset \mathcal{C}_4$ y, por lo tanto, para mostrar la igualdad de los ínfimos alcanza con probar que dada una curva $\gamma \in \mathcal{C}_1$ y $\epsilon > 0$ existe una curva en $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{C}_4$ tal que $\ell(\widetilde{\gamma}) \leq \ell(\gamma) + \epsilon$.

Sea $l = \ell(\gamma)$, $\eta = \dfrac{\epsilon}{l+2}$ y m un entero tal que $m \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{\eta} + 1)l$.

Subdividiendo el intervalo $[0, l]$ en segmentos de longitud $\dfrac{1}{m}$, definimos los puntos

$$u_i = (1+\eta)\left(\bar{\gamma}\left(\frac{i}{m}l\right)\right)$$

para $i = 0, ..., n$, donde $\bar{\gamma}$ es la representación estándar de la curva γ. Es claro que:

- $\|u_i\|_p \leq 1 + \eta$,
- $\|u_{i-1} - u_i\|_p \leq (1+\eta)\dfrac{l}{m}$.

Definimos entonces γ' la curva poligonal que consiste en los segmentos rectilíneos que unen los puntos $x, u_0, u_1, ...u_m, y$. Los puntos $u \in \gamma'$ son de tres tipos:

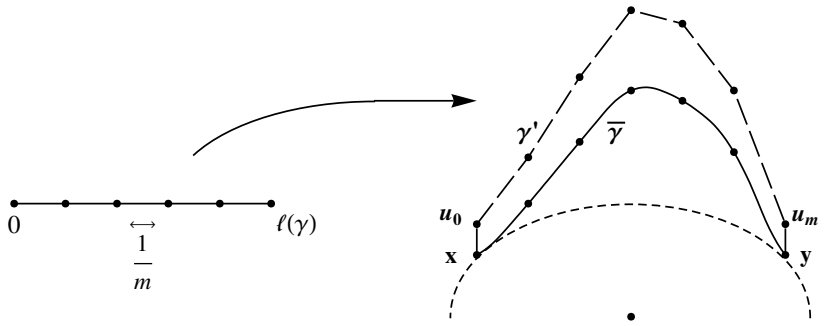

Figura 4.2: Teorema 4.2.3

- Son puntos de la forma $u = (1+\tau)x$ o $u = (1+\tau)y$ con $0 \leq \tau \leq 1$. En tal caso

$$\|u\|_p \;=\; 1+\tau \;\geq\; 1.$$

- Están en el segmento lineal i-ésimo y son de la forma $u = \lambda u_i + (1-\lambda)u_{i-1}$ con $0 \leq \lambda \leq 1/2$. Entonces

$$\|x\|_p \;\geq\; \|u_{i-1}\|_p - \|u_i - u_{i-1}\|_p \;\geq\; (1-\eta)\left(1 - \frac{1}{2m}l\right) \;\geq\; 1.$$

- Están en el segmento lineal i-ésimo y son de la forma $u = \lambda u_i + (1-\lambda)u_{i-1}$ con $1/2 < \lambda \leq 1$. Entonces

$$\|x\|_p \;\geq\; \|u_i\|_p - (1-\lambda)\,\|u_i - u_{i-1}\|_p \;\geq\; (1-\eta)\left(1 - \frac{1}{2m}l\right) \;\geq\; 1.$$

Luego, la curva γ' es finito dimensional y une los puntos x e y en $l_p \setminus B_p$.

Por el lema 4.2.2, existe una curva simple $\tilde{\gamma}$, que une x con y, y está contenida en $co(\gamma) \cap S_p$ con $\ell(\tilde{\gamma}) \leq \ell(\gamma')$, o sea $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}_4$. Como

$$\ell(\gamma') \;=\; \|x - u_0\|_p + \sum_{i=1}^{m} \|u_{i-1} - u_i\|_p + \|u_m - y\|_p \;\leq\; 2\,(1+\eta) + (1+\eta)l \;=\; l + \epsilon$$

resulta que $\ell(\tilde{\gamma}) \leq \ell(\gamma) + \epsilon$, y es la curva que buscabamos para concluir la demostración.

Por último, veamos el caso del espacio de dimensión finita l_p^n. Debido a que S_p es compacta en este espacio, resulta que el ínf $\{\ell(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}_2\}$ se alcanza y además la curva que lo realiza es una curva simple (pues $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_3$). □

Sobre la esfera S_p definimos la métrica dada por la distancia

$$d_l(x,y) = \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ curva finito dimensional que une } x \text{ con } y \text{ en } S_p\},$$

donde el ínfimo es el valor común considerado en el teorema anterior. En los casos donde sea necesario, vamos a denotar d_l^E para aclarar el espacio E que estamos considerando.

A continuación, buscaremos asegurar que sobre S_p esta métrica dada por la longitud de curvas es equivalente a la métricade Finsler inducida por la norma p. Para lograr este objetivo, será necesario previamente distinguir algunas propiedades de la distancia d_l en espacios de dimensión 2. Notar que, por la definición de d_l, si $x, y \in l_p$ y F es un subespacio que los contiene entonces $S_F \subset S_p$ y $d_l^{l_p}(x,y) \leq d_l^F(x,y)$.

4.2.4 Lema. Sean $F \subset l_p$ subespacio normado bidimensional y d_l^F la métrica dada por la longitud de las curvas en F. Dados $x, y \in S_F$ entonces

$$d_l^F(x,y) \leq 2\|x-y\|_p.$$

Demostración. En un espacio bidimensional, dados dos puntos distintos $x, y \in S_F$ existen dos curvas contenidas en S_F que los une y la curva de menor longitud es la que determina $d_l^F(x,y)$.

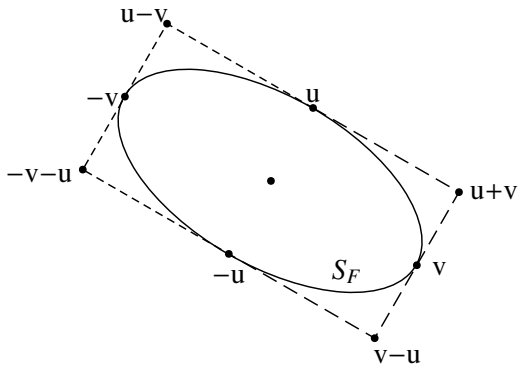

Figura 4.3: Lema 4.2.4, parte 1

Si $2L$ es la longitud de la circunferencia unitaria según la norma del espacio, es claro entonces que $d_l^F(x,y) \leq L$. Más aún, $d_l^F(x,y) = L$ si y sólo si $y = -x$.

Geométricamente, es posible mostrar que existen dos puntos $u, v \in S_F$ que son los puntos medios de los lados de un paralelogramo donde S_F se encuentra inscripto (ver figura 4.3). La curva poligonal que une los puntos $u, u+v, v-u$ y $-u$ esta contenida en $F \setminus B_F$ con extremos antipodales y tiene longitud ≤ 4. Con lo cual $L \leq 4$.

Veamos entonces que $d_l^F(x,y) \leq \dfrac{1}{2}L\|y-x\|_p$. Es claro que esto se cumple si $x = y$ o $y = -x$, pues $d_l^F(x,y) = L$ y $\|y-x\|_p = \|2x\|_p = 2$. Veamos el caso donde $\|y-x\|_p < 2$.

Sean $u = \dfrac{1}{\|x-y\|_p}(x-y)$ y γ' la curva que une u y su antípoda $-u$, tal que x e y quedan en la misma semicircunferencia. Notar que $\ell(\gamma') = L$.

Sea $\gamma(t) = \dfrac{1}{2}(x+y) + \dfrac{1}{2}\|x-y\|_p\,\gamma'(t)$. Notar que γ' une x e y y

$$\ell(\gamma) = \frac{1}{2}\|y-x\|_p\,\ell(\gamma') = \frac{1}{2}L\|y-x\|_p \leq 2\|y-x\|_p.$$

Con lo cual, si probamos que $\gamma \subset F \setminus B_F$, podemos concluir que $d_l^F(x,y) \leq \ell(\gamma) = \dfrac{1}{2}L\|y-x\|_p$, que es lo que queremos mostrar.

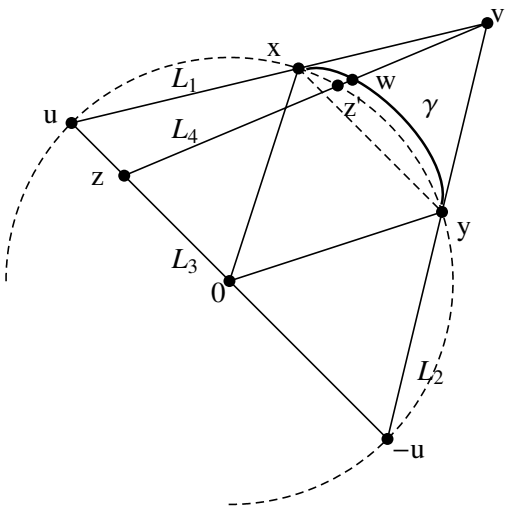

Figura 4.4: Lema 4.2.4, parte 2

Veamos que $\gamma \subset F \setminus B_F$. La recta L_1 que pasa por u y x y la recta L_2 que pasa por $-u$ e y se cortan en el punto $v = \dfrac{y+x}{2-\|y-x\|_p}$ (ver figura 4.4). Como

$$\|v\|_p = \frac{\|x+y\|_p}{2\|y\|_p - \|y-x\|_p} \leq 1,$$

entonces $v \in F \setminus B_F$ y v, x e y se ubican en el mismo semiplano respecto a la recta L_3 que pasa por u y $-u$, pues $2 - \|y-x\|_p > 0$. Por convexidad, B_F esta contenida en la unión de la región abierta delimitada por L_3 y la recta que pasa por x e y con la región angular delimitada por las rectas L_1 y L_2.

Sea $w \in \gamma$. La recta L_4 que pasa por w y v interseca la recta L_3 en un punto $z \in B_F$. Denotemos z' a la única intersección entre la recta L_4 y S_F. Es claro que el segmento que une z' y v no estará contenido en B_F. Como $w \in \gamma$, existe $y' \in S_F$ tal que

$$w = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}\|x-y\|_p y'$$

y, además

$$w - v = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}\|x-y\|_p y' - \frac{y+x}{2-\|y-x\|_p} = \frac{1}{2}\|x-y\|_p y'.$$

Con lo cual $y' = z'$. En particular, w estará contenido en el segmento que une z' y v, o sea, $w \in F \setminus B_F$. Luego $\gamma \subset F \setminus B_F$. □

4.2.5 Teorema. *Sean $x, y \in S_p$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces*

$$\|y-x\|_p \;\leq\; d_l^{l_p}(x,y) \;\leq\; 2\|y-x\|_p,$$

donde $d_l^{l_p}$ es la métrica inducida por la funcional longitud de curvas. Es decir, $d_l^{l_p}$ es uniformemente equivalente a la métrica inducida por la norma de l_p. Si γ es una curva en S_p, su longitud respecto a $d_l^{l_p}$ resulta ser $\ell(\gamma)$.

Demostración. Por definición se verifica la desigualdad $\|y-x\|_p \leq d_l^{l_p}(x,y)$, que $d_l^{l_p}$ es una métrica y que las curvas tengan la longitud dada por dicha métrica. Tomando el subespacio $F \subset l_p$ de dimensión 2 que contiene a x e y, hemos probado los siguientes dos hechos:

1. $d_l^{l_p}(x,y) \leq d_l^F(x,y)$ (donde d_l^F y $d_l^{l_p}$ son las distancias asociadas a los espacios F y l_p respectivamente).

2. $d_l^F(x,y) \leq 2\|y-x\|_p$

donde el primer resultado es una propiedad deducida de la definición y la segunda es el lema 4.2.4. Por lo tanto, usando estos dos resultados podemos concluir que $d_l^{l_p}(x,y) \leq 2\|y-x\|_p$. □

4.2.6 Observación. Es importante notar que las demostraciones aquí presentadas utilizan argumentos geométricos que se cumplen en cualquier espacio normado. Esto implica que los resultados presentados en esta sección pueden extenderse sin mayores complicaciones a otros espacios con norma, definiendo en los mismos una métrica interior equivalente a la métrica inducida por la norma del espacio como lo hicimos en el caso de l_p. Es decir, para cualquier espacio normado E con $\dim E \geq 2$ la métrica

$$d_l(x,y) = \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ curva finito dimensional que une } x \text{ con } y \text{ en } S_E\},$$

es compatible con la métrica inducida por la norma en S_E.

4.3. La esfera unitaria en l_2.

En este capítulo vamos a analizar en detalle la estructura diferencial de la esfera en l_2, es decir,

$$S_2 = \Big\{x \in l_2 : \|x\|_2 = 1\Big\}.$$

Vamos a denotaremos $\|.\|$ la norma en l_2, salvo aclaración previa.

En este caso, el espacio l_2 es un espacio de Hilbert cuya norma está asociada al producto interno dado, para $x, y \in l_2$, por:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \bar{y_n},$$

Las propiedades que veremos a continuación son resultados conocidos sobre las esferas en espacios con producto interno y es posible extender tales resultados simplemente reemplazando l_2 por H espacio de Hilbert. A través de los resultados encontrados, notaremos gran similitud con propiedades de las esferas en espacios Euclidianos de dimensión finita.

La siguiente es una adaptación a S_2 de la proposición 4.1.1, cuya demostración es análoga a la realizada en el capítulo anterior para el caso $1 < p < \infty$.

4.3.1 Proposición. *El conjunto $S_2 \subset l_2$ es una subvariedad regular cerrada de clase C^w (analítica). Además, si $f(z) = \|z\|$ resulta que $T_x S_2 \simeq Ker f_{*x}$ para todo $x \in S_2$, es decir,*

$$v \in T_x S_2 \qquad \textit{si y sólo si} \qquad Re\langle x, v\rangle = 0. \tag{4.3}$$

Si l_2 fuese un espacio de Hilbert real, este resultado muestra que $T_xS_2 \simeq Kerf_{*x} = \langle x\rangle^{\perp}$ con la definición de ortogonalidad usual en espacios de Hilbert. El espacio modelador de la subvariedad resultaría $l_2/\langle x\rangle \approx l_2/\mathbb{R}$. En general, el espacio modelador de una subvariedad no coincide con el espacio de la variedad que la contiene.

Esta condición sobre los elementos del espacio tangente sobre la esfera generan una condición sobre los elementos del espacio doble-tangente TTS_2.

4.3.2 Proposición.

$$TTS_2 = \Big\{(x,v,u,w) \ : \ x \in S_2 \ ; \ v,u \in T_xS_2 \ ; \ w \in l_2 \ ; \quad Re\big(\langle w,x\rangle + \langle v,u\rangle\big) \ = \ 0\Big\} \tag{4.4}$$

Demostración. Vamos a proceder a realizaremos los cálculos para el caso general l_2 de sucesiones de valores complejos. Los mismos cálculos se pueden realizar para $p \geq 1$.

Pensemos los elementos del doble-tangente como clases de curvas sobre el TS_2 y probemos primero que verifica las condiciones mencionadas por la proposición. Sea $\beta : I \to TS_2$ dada por $\beta(t) = (x(t), v(t))$ que pase por $(x,v) \in TS_2$ con $x(t) = x_t \in \mathcal{S}, x(0) = x$ y $v(t) = v_t \in T_{x_t}\mathcal{S}, v(0) = v$, y por lo tanto,

$$Re\langle x_t, v_t\rangle = 0. \tag{4.5}$$

Entonces su derivada $\beta' : I \to TTS_2$ está dada por $\beta'(t) = \big((x_t,v_t), \frac{d}{dt}(\beta(t))\big) = (x_t, v_t, \dot{x_t}, \dot{v_t})$.

Luego en $t = 0$, $\beta'(0) = (x_0, v_0, \dot{x}_0, \dot{v}_0) = (x,v,u,w)$.

Derivando respecto de t la condición (4.5) resulta

$$Re\big(\langle \dot{v_t}, x_t\rangle + \langle v_t, \dot{x_t}\rangle\big) = 0.$$

Con lo cual obtenemos la condición que muestra la proposición:

$$Re\big(\langle w,x\rangle + \langle v,u\rangle\big) = 0.$$

Para probar la otra inclusión, supongamos ahora que tenemos una cupla (x,v,u,w), con $x,w \in S_2$, $u,v \in T_xS_2$ tales que $Re\big(\langle w,x\rangle + \langle v,u\rangle\big) = 0$. Vamos a definir una curva $\beta : I \to TS_2$ que pase por el punto $(x,v) \in T_xS_2$ con $\beta'(0) = (x,v,u,w)$ con lo que probaríamos que la cupla está en TTS_2

Sea E el espacio modelador de S_2 y sea $\Phi : W \subset E \to U \subset S_2$ un difeomorfismo local entre abiertos con $0 \in W$ y $x \in U$, vía alguna carta centrada en x, es decir, $\Phi(0) = x$. Como $v,u \in T_xS_2$, existen $\tilde{v}, \tilde{u} \in T_0E$ tales que $D\Phi(0)(\tilde{v}) = v, D\Phi(0)(\tilde{u}) = u$.

Sabiendo que para t,s suficientemente pequeños $\Phi(s\tilde{u} + t\tilde{v})$ está en la esfera, entonces vale

$$\Big\langle \Phi(s\tilde{u} + t\tilde{v}), \Phi(s\tilde{u} + t\tilde{v})\Big\rangle = 1,$$

derivando respecto de la variable s y evaluando las diferenciales donde corresponde

$$\Big\langle D\Phi(\tilde{u}), \Phi(s\tilde{u} + t\tilde{v})\Big\rangle + \Big\langle \Phi(s\tilde{u} + t\tilde{v}), D\Phi(\tilde{u})\Big\rangle = 0.$$

Derivando nuevamente respecto a t

$$\Big\langle D^2\Phi(\tilde{v},\tilde{u}), \Phi(s\tilde{u} + t\tilde{v})\Big\rangle + \Big\langle D\Phi(\tilde{v}), D\Phi(\tilde{u})\Big\rangle + \Big\langle D\Phi(\tilde{u}), D\Phi(\tilde{v})\Big\rangle + \Big\langle \Phi(s\tilde{u} + t\tilde{v}), D^2\Phi(\tilde{u},\tilde{v})\Big\rangle = 0$$

y evaluando en $t = s = 0$ obtenemos

$$\Big\langle D^2\Phi_0(\tilde{v},\tilde{u}), x\Big\rangle + \langle v, u\rangle + \langle u, v\rangle + \Big\langle x, D^2\Phi_0(\tilde{u},\tilde{v})\Big\rangle = 0.$$

Analizando la parte real de ésta última expresión, usando la condición que verifica la cupla (x, v, u, w) y reagrupando términos obtenemos

$$2Re\Big(\langle x, D^2\Phi_0(\tilde{u},\tilde{v}) - w\rangle\Big) = 0.$$

Esto nos dice que $h = D^2\Phi_0(\tilde{u},\tilde{v}) - w \in T_xS_2$. Nuevamente vía Φ, existe $\tilde{h} \in T_0E$ tal que $D\Phi_0(\tilde{h}) = -h$. Con estos datos, consideramos la curva β definida por

$$\beta(t) := \Big(\Phi(t\tilde{u}), D\Phi_{t\tilde{u}}(\tilde{v} + t\tilde{h})\Big).$$

Por las condiciones impuestas anteriormente, es fácil verificar que $\beta(0) = (x, v)$ y

$$\beta'(0) = \Big(x, v, D\Phi_0(\tilde{u}), D^2\Phi_0(\tilde{u},\tilde{v}) - D\Phi_0(\tilde{h})\Big) = (x, v, u, w). \quad \square$$

Estos resultados determinan la estructura diferencial de las esferas en l_2 mostrando que los elementos del fibrado tangente y doble-tangente pueden pensarse de manera similar que en los espacios Euclidianos de dimensión finita.

4.4. Conexiones, spray y geodésicas sobre S_2

En esta sección mostraremos que en S_2 tenemos definido un spray cuadrático (y por ende una conexión afín) y analizaremos las geodésicas que determina. Además, veremos como se definen y se relacionan estas nociones en S_2.

Sea $x \in S_2$. Denotemos Q_x al complemento del T_xS_2 y $P_x \in \mathcal{B}(l_2)$ a los proyectores con $ran(P_x) = T_xS_2$ y $ker(P_x) = ran(Id - P_x) = Q_x$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} P : S_2 &\longrightarrow \mathcal{B}(l_2) \\ x &\longmapsto P_x \end{aligned}$$

con rango en los operadores idempotentes de $\mathcal{B}(l_2)$. Esta aplicación es un mapa suave y, según la observación 1.4.9, la proyección sobre T_xS_2 está dada por

$$P_x(v) := v - Re\langle x, v\rangle x = v - \frac{1}{2}\langle x, v\rangle x - \frac{1}{2}\langle v, x\rangle x \tag{4.6}$$

Tomando la diferencial $P_* : TS_2 \longrightarrow T\mathcal{B}(l_2) = \mathcal{B}(l_2)$ tenemos que P_{*V} será un operador lineal de l_2 en l_2 que depende de cada $V = (x, v) \in T_xS_2$.

Dada una curva $x(t) \in S_2$ que pase por x con $\dot{x}(0) = v$ y derivando respecto de t a $P_{x(t)}$ resulta

$$\frac{d}{dt}P_x(w) = -\frac{1}{2}\Big(\langle w, \dot{x}(t)\rangle x(t) + \langle w, x(t)\rangle\dot{x}(t) + \langle\dot{x}(t), w\rangle x(t) + \langle x(t), w\rangle\dot{x}(t)\Big),$$

evaluando en $t = 0$

$$\begin{aligned} P_{*x,v}(w) =& -\frac{1}{2}\Big(\langle w, v\rangle x + \langle w, x\rangle v + \langle v, w\rangle x + \langle x, w\rangle v\Big) \\ =& - Re\langle w, v\rangle x - Re\langle w, x\rangle v. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Gracias a esta función definimos:

$$\begin{aligned} F(x, v) :=& \big(x, v; v, P_{*x,v}(v)\big) = \big(x, v; v, -Re\langle v, v\rangle x\big) \\ =& \big(x, v; v, -\|v\|^2 x\big) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Veamos que F resulta ser un spray sobre S_2. Notar que solo basta ver que F está bien definida pues, en tal caso, es fácil verifica que es una sección del fibrado $(TT\mathcal{M}, T\mathcal{M}, \pi_*)$.

Con lo cual, tenemos que ver que $\big(x, v; v, -\|v\|^2 x\big) \in T_{(x,v)}TS_2$. Por la caracterización del espacio doble-tangente de S_2 que hicimos, veamos que este vector cumple la condición dada en 4.3.2, que podemos verificar fácilmente:

$$Re\big(\langle -\|v\|^2 x, x\rangle + \langle v, v\rangle\big) \;=\; 0.$$

Luego F es un spray sobre S_2. Más aún, es un spray cuadrático.

Las geodésicas serán las curvas $\alpha : I \longrightarrow S_2$ que verifican $F(\alpha') = \alpha''$. Específicamente, deben cumplir $F_\alpha(\dot\alpha) = (\alpha, \dot\alpha, \dot\alpha, \ddot\alpha)$. Por la expresión del spray en 2.2.1, esto implica que $\ddot\alpha(t) = (Id - P_{\alpha_t})\ddot\alpha(t)$. Entonces las geodésicas deberán verificar $P_\alpha \ddot\alpha \equiv 0$.

En particular, tomando $x, y \in S_2$ con $Re\langle y, x\rangle = 0$, para cada $k \in \mathbb{R}$ sea

$$\gamma(t) = \cos(kt)x + \operatorname{sen}(kt)y. \tag{4.9}$$

Notar que γ es una curva suave con $\gamma(0) = x$ contenida en S_2 pues:

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\|^2 =& \langle \cos(kt)x + \operatorname{sen}(kt)y, \cos(kt)x + \operatorname{sen}(kt)y\rangle \\ =& \cos(kt)^2\langle x, x\rangle + \operatorname{sen}(kt)^2\langle y, y\rangle + \cos(kt)\operatorname{sen}(kt)(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle) \\ =& \cos(kt)^2 + \operatorname{sen}(kt)^2 + \frac{1}{2}\cos(kt)\operatorname{sen}(kt)Re\langle x, y\rangle = 1. \end{aligned}$$

Más aún, derivando respecto de t

$$\dot\gamma(t) = k\big[-\operatorname{sen}(kt)x + \cos(kt)y\big]$$

por lo cual $\|\dot\gamma(t)\| = |k|$ y como

$$\ddot\gamma(t) = -k^2\big[\cos(kt)x + \operatorname{sen}(kt)y\big] = -k^2\gamma(t)$$

entonces $\ddot\gamma(t)$ coincide con la cuarta coordenada del spray en el punto γ_t aplicado a $\dot\gamma_t$. Luego, esta curva verifica que $F(\gamma') = \gamma''$. Más aún, verifica

$$P_\gamma\ddot\gamma = P_\gamma\left(-\|\dot\gamma_t\|^2\gamma_t\right) = -\|\dot\gamma_t\|^2\gamma_t + \|\dot\gamma_t\|^2 Re\langle\gamma_t, \gamma_t\rangle\gamma_t = 0.$$

Si $v \in T_xS_2$ (por lo cual $Re\langle v, x\rangle = 0$), poniendo $q = \frac{v}{\|v\|} \in S_2$ y $k = \|v\|$ la curva resulta ser la geodésica que pasa en $t = 0$ por x con velocidad v. En general notamos

$$\gamma_{xy}(t) := \cos\big(\|v\|t\big)x + \frac{\operatorname{sen}(\|v\|t)}{\|v\|}v.$$

a la curva geodésica donde $y = \gamma(1)$.

Además, estas curvas nos permiten obtener una expresión para la exponencial:

$$\exp(x, v) = \gamma_{x,v}(1) = \cos\big(\|v\|\big)x + \frac{\operatorname{sen}(\|v\|)}{\|v\|}v. \tag{4.10}$$

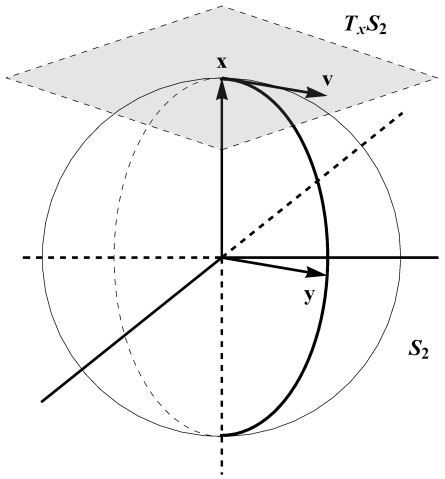

Figura 4.5: Esfera en l_2.

Observemos que hasta aquí ya hemos encontramos muchas similitudes con los espacios Euclidianos. Si restringimos nuestros resultados a un espacio de Hilbert real, para cada $x \in S_2$ el espacio T_xS_2 resulta ser el conjunto de los vectores ortogonales a x y las geodésicas son curvas que recorren círculos máximos para unir dos puntos dados no antipodales. La condición de que los puntos no sean antipodales se vincula a la necesidad de pedir la unicidad de la geodésica. En términos de nuestra definición una única geodésica se define determinando $x \in \mathcal{M}$ y una velocidad $v \in T\mathcal{M}$ no nula. Dados dos puntos x, y en la esfera tal v resulta ser $P_x(x - y)$ que será no nulo si $y \neq -x$.

La conexión afín asociada $\Gamma : TS_2 \oplus TS_2 \longrightarrow TTS_2$ definida sobre $v, w \in T_xS_2$ (que verifican la proposición (4.3)) se calcula como

$$\Gamma_x(v, w) = P_{*x,v}(w) = P_{*x,w}(v) = -Re\langle w, v\rangle x. \tag{4.11}$$

Es claro que su imagen está contenida en el complemento de T_xS_2.

La derivada covariante $\nabla : \chi(S_2) \oplus \chi(S_2) \to \chi(S_2)$ inducida por el spray está definida localmente por:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y(x) &= DY_x(X(x)) - \Gamma_x(X_x, Y_x) \\ &= DY_x(X(x)) - Re\langle X_x, Y_x\rangle x \end{aligned} \tag{4.12}$$

para dos campos dados $X, Y : S_2 \to TS_2$, donde $DY_x(X_x) := Y_{*x}(X(x))$.

Teniendo en cuenta las definiciones sobre los levantamientos de curvas en (2.2.4) y los resultados hasta ahora obtenidos, si $\beta = (\alpha, \mu) \in Lev(\alpha)$ entonces

$$D_{\alpha'}\beta = \Big(\alpha, \dot{\mu} + Re\langle\mu, \dot{\alpha}\rangle\alpha\Big). \tag{4.13}$$

Luego β es α-paralela si y sólo si

$$\dot{\mu} \;=\; P_{*\alpha,\dot{\alpha}}\mu \;=\; -Re\langle \mu, \dot{\alpha}\rangle \alpha - Re\langle \mu, \alpha\rangle \dot{\alpha} \tag{4.14}$$

y por lo tanto el transporte paralelo desde $\alpha(0)$ hasta $\alpha(t)$ para $v \in T_{\alpha(0)}S_2$ se encuentra hallando μ tal que verifique la ecuación anterior bajo la condición $\mu(0) = v$.

Aunque no daremos una expresión explícita del transporte paralelo, en el caso de l_2 real se puede calcular $\mathcal{P}$ y mostrar que se verifica el siguiente sentido geométrico: el transporte paralelo a lo largo de una curva γ geodésica esta dado por una rotación del plano generado por x y $v/\|v\|$ que fija el resto del espacio.[1]

La curvatura R de la variedad se obtiene siguiendo la expresión local presentada en la ecuación (2.2). Además hay que tener en cuenta la relación entre la conexión y la familia de proyectores P_x con rango T_xS_2 dada en (4.11). Es decir,

$$\mathcal{R}_{x_0}(x, y, z) \;=\; [P_{*x_0,x}P_{*x_0,y} - P_{*x_0,y}P_{*x_0,x}]z$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} R_{x_0}(x,y)z \;&=\; P_{*x_0,x}\big(P_{*x_0,y}z\big) - P_{*x_0,y}\big(P_{*x_0,x}z\big) \\ &=\; -\big(Re\langle P_{*x_0,y}z, x\rangle x_0 + Re\langle P_{*x_0,y}z, x_0\rangle x\big) + \big(Re\langle P_{*x_0,x}z, y\rangle x_0 + Re\langle P_{*x_0,x}z, x_0\rangle y\big) \\ &=\; -\Big(Re\big\langle -Re\langle z, y\rangle x_0, x\big\rangle x_0 + Re\big\langle -Re\langle z, y\rangle x_0, x_0\big\rangle x\Big) \\ &\qquad\qquad + \Big(Re\big\langle -Re\langle z, x\rangle x_0, y\big\rangle x_0 + Re\big\langle -Re\langle z, x\rangle x_0, x_0\big\rangle y\Big) \end{aligned}$$

donde, debido a que $Re\langle z, x_0\rangle = Re\langle y, x_0\rangle = Re\langle x, x_0\rangle = 0$ pues $x, y, z \in T_{x_0}S_2$, se cancelan varios términos y se obtiene

$$R_{x_0}(x, y)z = Re\langle z, y\rangle x - Re\langle z, x\rangle y. \tag{4.15}$$

Por último, con la expresión del tensor de curvatura podemos determinar los campos de Jacobi. Sea α geodésica que pasa por $\alpha(0) = x$ con velocidad $\dot{\alpha}(0) = v \in T_xS_2$. Dado $(x, v), (x, w)$ con $v, w \in T_xS_2$ existe un único campo de Jacobi $\beta = (\alpha, \eta)$ donde

$$\beta(0) = (x, v), \qquad D_{\alpha'}\beta(0) = (x, w)$$

Con la expresión del operador $D_{\alpha'}$ dada en (4.13) tenemos que la levantada verifica:

$$\eta(0) = v, \qquad \dot{\eta}(0) + Re\langle \eta(0), \dot{\alpha}(0)\rangle \alpha = w$$

No es difícil probar que esta curva resulta ser:

$$\eta(t) := v\cos(t) + \big(w - Re\langle v, q\rangle x\big)\,\mathrm{sen}(t).$$

[1] Se puede calcular explícitamente la matriz U_t correspondiente a esta rotación y tal que $\mathcal{P}_0^t(\gamma)v = U_t v$. Éste cálculo puede verse en [16]

4.5. Métrica de Finsler en S_2

En esta sección analizaremos en detalle las nociones vinculadas a la métrica de Finsler existente en la variedad de S_2 inducida por su métrica Riemanniana.

Como $S_2 \subset l_2$ es una subvariedad sobre el espacio de Hilbert $(l_2, \langle\ ,\ \rangle)$, el producto interno permite definir una métrica Riemanniana sobre S_2 dada por:

$$g_x(v,w) = \langle v,w\rangle_x = \langle v,w\rangle$$

donde $x \in S_2$ y $v, w \in T_xS_2$, con la identificación usual de TS_2 con un subespacio de l_2. Es decir, (S_2, g) es una variedad Riemanniana.

Por lo demostrado en la sección anterior, gracias a la familia de proyectores $P_x : l_2 \to l_2$ idempotentes con rango en T_xS_2 tenemos definido un spray en S_2. Veamos que tal spray es el único compatible a la métrica Riemanniana.

4.5.1 Teorema. *Sean b la métrica de Finsler en S_2 inducida por su métrica Riemanniana y F el spray definido por (4.8). Entonces (S_2, b, F) resulta ser una variedad Finsleriana con spray.*

Demostración. Por el teorema (3.2.3), como (S_2, g) es variedad Riemanniana existe un único spray compatible con su métrica que verifica las condiciones de compatibilidad (3.3) y (3.4). Veamos entonces que el spray definido en (4.8) verifica (3.4) y por lo tanto es el spray métrico buscado.

Sean $\alpha : I \longrightarrow S_2$ curva y $\beta = (\alpha, \dot\mu) \in Lev(\alpha)$. Siguiendo las fórmulas de la derivada covariante sobre levantadas (4.13) y la relación encontrada entre la conexión Γ y los proyectores P_x (4.11) resulta:

$$D_{\alpha'}\beta \ = \ (\alpha, \dot\mu - \Gamma_\alpha(\dot\alpha, \mu)) \ = \ (\alpha, \dot\mu - P_{*\alpha,\dot\alpha}\mu).$$

Denotemos $D_t\mu$ la segunda coordenada de $D_{\alpha'}(\beta)$.

Como $\mu(t) \in T_{\alpha(t)}S_2$ para cada $t \in I$, entonces

$$\dot\mu \ = \ \frac{d}{dt}\mu \ = \ \frac{d}{dt}P_\alpha\mu \ = \ P_{*\alpha,\dot\alpha}\mu + P_\alpha\dot\mu.$$

con lo cual

$$D_t\mu \ = \ \dot\mu - P_{*\alpha,\dot\alpha}\mu \ = \ P_\alpha\dot\mu.$$

En particular, si $(\alpha,\eta), (\alpha,\mu) \in Lev(\alpha)$, como P_α es un operador autoadjunto tenemos

$$\langle D_t\eta, \mu\rangle \ = \ \langle P_\alpha\dot\eta, \mu\rangle \ = \ \langle \dot\eta, P_\alpha\mu\rangle \ = \ \langle \dot\eta, \mu\rangle.$$

Análogamente, vale $\langle \eta, D_t\mu\rangle = \langle \eta, \dot\mu\rangle$. Luego

$$\langle D_t\eta, \mu\rangle + \langle \eta, D_t\mu\rangle \ = \ \langle \dot\eta, \mu\rangle + \langle \eta, \dot\mu\rangle \ = \ \frac{d}{dt}\langle \eta, \mu\rangle$$

con lo cual efectivamente verifica (3.4). Esto prueba que F es el spray métrico buscado. □

Como hemos visto anteriormente, las geodésicas definidas por este spray resultan ser círculos máximos, esto es, intersecciones de S_2 con subespacios de dimensión 2.

Si $x, y \in S_2$ no son antipodales, x e y pueden ser unidos por exactamente dos geodésicas, donde una y sólo una de estas dos geodésicas resulta una geodésica corta. En particular tenemos el siguiente resultado:

4.5.2 Proposición. *Para todo $x \in S_2$ existe un entorno normal $B(x, \pi) = S_2 - \{-x\}$ (donde $-x$ es la antípoda de x) tal que dado $y \in B(x, \pi)$:*

1. *Existe una geodésica $\gamma_{x,y}$ del spray métrico cuyos extremos son x e y.*
2. *Tal curva geodésica $\gamma_{x,y}$ es minimal respecto a la funcional longitud de curvas asociada a la métrica y única (salvo reparametrizaciones).*

Demostración. Por el teorema 3.2.7 y su correspondiente corolario 3.2.8, basta ver que fijado $x \in S_2$ la aplicación

$$\exp_x : B(0, \pi) \longrightarrow \exp_x(B(0, \pi))$$

es un difeomorfismo entre variedades.

Notemos que dado $v \in T_x S_2$, la geodésica que pasa por x con velocidad v dada por la expresión

$$\gamma_{xy}(t) := \cos(\|v\|t)x + \frac{\operatorname{sen}(\|v\|t)}{\|v\|}v$$

está definida en todo $\mathbb{R}$. Con lo cual, $1 \in I_{xv}$ y por lo tanto $(x, v) \in \mathcal{D}$ para todo $v \in T\mathcal{S}_2$. Luego la aplicación $\exp_x$ está bien definida para todo $v \in B(0, \pi)$.

Sabiendo la expresión de la exponencial $\exp_x(v) = \gamma_{xy}(1)$ no es difícil mostrar la inyectividad de la aplicación. Supongamos existen $v, w \in B(0, \pi) \subset T_x S_2$ distintos tales que $\exp_x(v) = \exp_x(w)$. Esto ocurre si y sólo si

$$\cos\big(k\big)x + \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}v \;=\; \cos\big(\tilde{k}\big)x + \frac{\operatorname{sen}(\tilde{k})}{\tilde{k}}w$$

donde hemos notado $k = \|v\|$ y $\tilde{k} = \|w\|$. Reagrupando la expresión

$$\Big(\cos\big(k\big) - \cos(\tilde{k})\Big)\, x + \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}v + \frac{\operatorname{sen}(\tilde{k})}{\tilde{k}}w = 0.$$

Por la inyectividad de la función $\cos(t)$ en $(0, \pi)$ y siendo la función $\operatorname{sen}(t)$ no nula en este intervalo, si existen $v, w \in B(0, \pi) \subset T_x S_2$ distintos que cumplen la igualdad, entonces existen constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ no nulas tales que $ax + bv + cw = 0$. Pero en tal caso, debido a que $v, w \in T_x S_2$ (o sea $Re\,\langle v, x\rangle = 0 = Re\,\langle w, x\rangle$):

$$0 \;=\; Re\,\langle ax + bv + cw, x\rangle \;=\; aRe\,\langle x, x\rangle + bRe\,\langle v, x\rangle + c\mathbb{R}e\,\langle w, x\rangle \;=\; a \neq 0$$

lo cual es absurdo.

Para calcular la diferencial de la exponencial podemos hacer simplemente regla de la cadena y usar el hecho de que si $g(x) = \|x\|^2$ entonces $g_{*x}(v) := 2\mathbb{R}e\langle x, v\rangle$:

$$\begin{aligned}(\exp_x)_{*v}(w) =& \ D\Big(\cos kx + \frac{\operatorname{sen} k}{k} v\Big)_{*v}(w) \\ =& \ -\operatorname{sen} k \frac{1}{2k^2} 2\mathbb{R}e\langle v, w\rangle + \frac{\cos k \frac{1}{2k^2} 2\mathbb{R}e\langle v, w\rangle k \ x - \operatorname{sen} k \frac{1}{2k^2} 2\mathbb{R}e\langle v, w\rangle}{k^2} v + \frac{\operatorname{sen} k}{k} w \\ =& \ -\frac{\operatorname{sen} k}{k} Re\langle v, w\rangle x + \frac{k\cos k - \operatorname{sen} k}{k^3} Re\langle v, w\rangle v + \frac{\operatorname{sen} k}{k} w.\end{aligned}$$

que es un operador acotado entre los espacios cerrados $T_v(T_xS_2)$ en $T_{\exp_x(v)}S_2$. Como x, v están fijos, podemos restringirnos a pensar el operador de T_xS_2 en $T_{\exp_x(v)}S_2$.
Para abreviar la notación, sean $k = \|v\|$, $g(k) = \frac{\operatorname{sen} k}{k}$ y $h(k) = \frac{k\cos k - sen k}{k^3}$. Entonces la diferencial de la exponencial resulta

$$(\exp_x)_{*v}(w) = -g(k)Re\langle v, w\rangle x + h(k)Re\langle v, w\rangle v + g(k)w. \tag{4.16}$$

Veamos primero que este operador es inyectivo. Si $(\exp_x)_{*v}(w) = 0$, tomando la parte real el producto escalar contra x y teniendo en cuenta que $v, w \in T_xS_2$ $(v \neq 0)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}0 =& Re\Big\langle x, (\exp_x)_{*v}(w)\Big\rangle \\ =& Re\Big\langle x, -g(k)Re\langle v, w\rangle x + h(k)Re\langle v, w\rangle v + g(k)w\Big\rangle \\ =& -g(k)\langle x, x\rangle Re\langle v, w\rangle + h(k)Re\langle x, v\rangle Re\langle v, w\rangle + g(k)Re\langle x, w\rangle \\ =& -g(k)Re\langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

Como $g(k) = \frac{\operatorname{sen} k}{k} \neq 0$, se deduce que $w = 0$. Esto prueba la inyectividad de $(\exp_x)_{*v}$.
En segundo lugar, veamos que $(\exp_x)_{*v}$ es un operador sobreyectivo. Es decir, queremos ver que si $z \in T_{\exp_x}(v)S_2$ existe $w \in T_xS_2$ tal que $(\exp_x)_{*v}(w) = z$, donde $x \in S_2$ y $v \in T_xS_2$ son fijos.
Como $g(k) \neq 0$ pues $v \in B(0, \pi)$, podemos definir

$$w := \frac{1}{g(k)}\left[z - Re\langle z, x\rangle x + \frac{h(k)}{g(k)} Re\langle z, x\rangle v\right].$$

Notar que $w \in T_xS_2$ pues:

$$\begin{aligned}Re\langle w, x\rangle =& \frac{1}{g(k)}\left[Re\langle z, x\rangle - Re\langle z, x\rangle Re\langle x, x\rangle + \frac{h(k)}{g(k)} Re\langle z, x\rangle Re\langle v, x\rangle\right] \\ =& \frac{1}{g(k)}\left[Re\langle z, x\rangle - Re\langle z, x\rangle\right] = 0,\end{aligned}$$

donde usamos que $Re\langle x, v\rangle = 0$ y $\|x\| = 1$.
Además w verifica que $(\exp_x)_{*v}(w) = z$. Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned}Re\langle v, w\rangle =& \frac{1}{g(k)}\left[Re\langle z, v\rangle - Re\langle z, x\rangle Re\langle v, x\rangle + \frac{h(k)}{g(k)} Re\langle z, x\rangle Re\langle v, v\rangle\right] \\ =& \frac{1}{g(k)}\left[Re\langle z, v\rangle + \frac{h(k)}{g(k)} Re\langle z, x\rangle k^2\right].\end{aligned} \tag{4.17}$$

Como $z \in T_{exp_x(v)}S_2$ entonces $0 = Re\langle z, exp_x(v)\rangle = \cos(k)Re\langle z, x\rangle + g(k)Re\langle z, v\rangle$. Despejando

$$Re\langle z, v\rangle = -\frac{\cos(k)}{g(k)}Re\langle z, x\rangle. \tag{4.18}$$

y reemplazando (4.18) en la fórmula (4.17) resulta

$$\begin{aligned} Re\langle v, w\rangle &= \frac{1}{g(k)}\left[-\frac{\cos(k)}{g(k)}Re\langle z, x\rangle + \frac{h(k)}{g(k)}Re\langle z, x\rangle k^2\right] \\ &= \frac{1}{g(k)}\left[-\frac{\cos(k)}{g(k)} + \frac{h(k)}{g(k)}k^2\right]Re\langle z, x\rangle \\ &= \frac{-1}{g(k)}Re\langle z, x\rangle. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Volviendo a la expresión de la diferencial (4.16) y utilizando la expresión (4.19) tenemos que

$$(\exp_x)_{*v}(w) = Re\langle z, x\rangle x - \frac{h(k)}{g(k)}Re\langle z, x\rangle v + \left[z - Re\langle z, x\rangle x + \frac{h(k)}{g(k)}Re\langle z, x\rangle v\right] = z.$$

Por lo tanto encontramos $w \in T_xS_2$ tal que $(\exp_x)_{*v}(w) = z$.

En definitiva, demostramos que $\exp_x$ resulta un difeomorfismo entre $B(0, \pi) \subset T_xS_2$ y $\exp_x(B(0, \pi))$. Luego el teorema 3.2.7 asegura que la curva geodésica $\gamma_{xy}(t) = \exp_x(vt)$ es la única curva minimal (salvo reparametrizaciones) que une x con $y = \exp_x(v)$. Su longitud resulta

$$d_l(x, y) = \ell(\gamma_{xy}) = \|v\| \leq \pi$$

y el entorno dado por la bola $B(0, \pi)$ resulta un entorno normal para los puntos de esta variedad.

Como S_2 se obtiene de la clausura de $B(x, \pi) = S_2 - \{-x\}$ se deduce que $d_l(x, -x) = \pi$. En tal caso, existen infinitas geodésicas que unen x con $y = \exp_x(v) = -x$ con longitud π. □

Vimos en la sección anterior que el tensor de curvatura estaba dado por (4.15)

$$R_{x_0}(v, w)z = Re\langle z, w\rangle v - Re\langle z, v\rangle w$$

para $v, w, z \in TS_2$. Si consideramos el plano $\triangle$ generado por v y w contenido en TS_2 y suponiendo sin pérdida de generalidad que $v \perp w$ y ambos con norma 1, tenemos que la curvatura seccional esta dada por:

$$\begin{aligned} sec_{\triangle} &= -\left\langle R_{x_0}(v, w)v, w\right\rangle_{x_0} \\ &= -\left\langle Re\langle v, w\rangle v - Re\langle v, v\rangle w, w\right\rangle \\ &= -Re\langle v, w\rangle\langle v, w\rangle - Re\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle = 1 \end{aligned}$$

Es decir, la esfera tiene curvatura seccional constante 1.

Capítulo 5

El tamaño de las esferas.

A través de la definición de una métrica interior sobre las esferas unitarias S_p con $1 < p < \infty$, vamos a analizar algunos parámetros relacionados con la longitud de curvas que unen puntos antipodales, los cuales permiten caracterizar el tamaño de tales esferas. Estas ideas fueron desarrolladas por Schäffer en [25] y continuadas posteriormente por varios autores como Whitley en [29] y Gao y Lau en [10]. Estos valores proveen información acerca de la geometría del espacio en cuestión. Pero más útil aún, sus valores se vinculan con la distancia entre espacios isomorfos como veremos en las próximas secciones.

5.1. Parámetros vinculados al tamaño de las esferas

A continuación vamos a analizar algunos parámetros sugeridos en los últimos años por varios autores, asociados al tamaño de las esferas en espacios normados. En particular, centraremos nuestro estudio en los espacios l_p con $1 \leq p < \infty$.

Vimos en la sección 4.2 que sobre l_p tenemos definida una distancia asociada a la funcional ℓ longitud de curvas, compatible con la métrica inducida por la norma, cuya definición podía extenderse a espacios normados en general:

$$d_l(x, y) = \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ curva finito dimensional que une } x \text{ con } y \text{ en } S_E\}.$$

Teniendo en cuenta ésta definición, es posible establecer párametros relacionados con la distancia entre puntos antipodales. Si $x \in E$ denotaremos $-x$ a la antípoda de x en E y dada una curva $\gamma \subset S_E$ denotaremos su reflexión $-\gamma$ a la curva que se obtiene tomando los puntos antipodales que pertenecen a γ (si $x \in \gamma$ entonces $-x \in -\gamma$).

La primera definición que analizaremos fue introducida por Schäffer en [25].

5.1.1 Definición. Sea E espacio normado con $\dim E \geq 2$. Consideramos

$$D(E) := \sup\{d_l(x, y) : x, y \in S_E\},$$
$$M(E) := \sup\{d_l(x, -x) : x \in S_E\},$$
$$m(E) := \text{ínf}\{d_l(x, -x) : x \in S_E\}.$$

$D(E)$ se denomina el **diámetro interno** de S_E, $2M(E)$ el **perímetro** de E y $2m(E)$ el **contorno** (*girth*) de E.

El siguiente lema encierra algunas propiedades de estos parámetros.

5.1.2 Lema. Sea E espacio normado con $\dim E \geq 2$. Entonces

$$\begin{aligned} m(E) &= \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ curva simple que une puntos antipodales } x \text{ y } -x \text{ en } S_E\} \\ &= 1/2\,\text{ínf}\,\{\ell(\upsilon) : \upsilon \text{ es una curva cerrada simple contenida en } S_E, \upsilon = -\upsilon\} \end{aligned}$$

donde $-\upsilon$ denota la reflexión de la curva υ. Además se verifica que

- $2 \leq m(E) \leq M(E) \leq D(E) \leq 4$,
- si $\dim E < \infty$, los supremos e ínfimos de la definición 5.1.1 se alcanzan.

Demostración. Las definiciones de d_l y $m(E)$ permiten afirmar que

$$m(E) = \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ curva simple que une puntos antipodales } x \text{ y } -x \text{ en } S_E\},$$

y el ínfimo se alcanza en el caso de dimensión finita, pues S_E es compacto.

Si υ es una curva cerrada y simple sobre S_E tal que $\upsilon = -\upsilon$ y $x \in \upsilon$ entonces υ se obtiene de la unión de una curva γ que une x con $-x$ y su reflexión $-\gamma$. En particular $\ell(\gamma) = 1/2\ell(\upsilon)$ y por lo tanto podemos afirmar que

$$m(E) \leq 1/2\,\text{ínf}\,\{\ell(\upsilon) : \upsilon \text{ es una curva cerrada simple contenida en } S_E, \upsilon = -\upsilon\}\,.$$

Recíprocamente, sea γ curva simple que une x con $-x$. La unión entre γ y $-\gamma$ no necesariamente será una curva simple, pues podrían existir otro par de puntos antipodales en γ distintos a x y $-x$. Consideremos entonces el conjunto $\{s_2 - s_1 : 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ell(\gamma), \bar{\gamma}(s_1) + \bar{\gamma}(s_2) = 0\}$ donde $\bar{\gamma}$ es la parametrización estándar de γ. Notar que este conjunto es no vacío, pues contiene a $\ell(\gamma)$, es compacto y acotado, pues $s_1 - s_2 \leq \|\bar{\gamma}(s_2) - \bar{\gamma}(s_1)\| \leq 2$. Entonces este conjunto tiene un mínimo positivo, supongamos en s_1^0 y s_2^0. Entonces el arco de γ restrigido al intervalo $[s_1^0, s_2^0]$ no contiene puntos antipodales salvo los extremos. La unión de este arco y su reflexión es una curva υ cerrada y simple con $\upsilon = -\upsilon$ y $\ell(\upsilon) = 2(s_2^0 - s_1^0) \leq 2\ell(\gamma)$. De aquí deducimos que

$$m(E) \geq 1/2\,\text{ínf}\,\{\ell(\upsilon) : \upsilon \text{ es una curva cerrada simple contenida en } S_E, \upsilon = -\upsilon\}\,,$$

con la cual, podemos concluir con la igualdad buscada.

Más aún, solo siguiendo las definiciones es claro que $m(E) \leq M(E) \leq D(E)$. Finalmente, usando el teorema 4.2.5 (extendiendo el resultado a un espacio normado E cualquiera) y las definiciones tenemos que $2 \leq m(E)$ y $M(E) \leq 4$. □

5.1.3 Definición. Diremos que un espacio de Banach E es **plano** si existe sobre la esfera unitaria de E una curva que une puntos antipodales de longitud 2. En términos de los parámetros definidos esto implica que $m(E) = 2$.

5.1.4 Observación. Sea (X, μ) un espacio de medida no atómica μ y $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de conjuntos medibles. Sea υ la medida definida por $\upsilon(A) := \int_A |x| d\mu$. Entonces existe una función $G : [0,1] \to X$ tal que $\upsilon(G(t)) = t$ para todo $t \in [0,1]$, $G(0) = \emptyset$, $G(1) = X$ y $G(s) \subset G(t)$ si $s < t$. Con ésta función para $x \in L_1(\mu)$ definimos la curva $\alpha : [0,1] \to L_1(\mu)$ dada por:

$$\alpha(t) := \|x\| \chi_{G(t)} + x \chi_{X \setminus G(t)}.$$

Es posible verificar que ésta curva une los puntos x y $\|x\|$, es suave y tiene longitud $\big\|\|x\| - x\big\|$.[1] Esto nos muestra que $E = L^1(\mu)$, con μ una medida no atómica, es un espacio plano.

A pesar de la observación anterior, la situación cambia cuando consideramos espacios de medida atómica como en el caso del espacio l_1, donde tenemos el siguiente resultado [2]:

5.1.5 Proposición. .

- *Para todo entero positivo $n > 1$, $m(l_1^n) = \dfrac{2n}{n-1}$.*
- *Para todo $x \in l_1$, $d_l(-x, x) > 2$. Sin embargo, $m(l_1) = 2$. A fortiori, l_1 no es plano.*

Demostración. Denotemos S_1 tanto a la esfera en l_1 como en l_1^n. Recordemos que el espacio l_1^n corresponde al espacio $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma $\|.\|_1$.

- Para $i = 1, 2, ..., n$, sean los puntos $x^i \in S_1$ dados por

  $$x^i = (x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i) \text{ donde } x_j^i = sgn(j-i)\frac{1}{(n-1)} \qquad j = 1, ..., n,$$

  y sea $x^0 = -x^n$. Se puede verificar que la curva poligonal γ que une $x^0, x^1, x^2, ..., x^n$ a través de segmentos rectilíneos es una curva en S_1 donde $\|x^i - x^{i+1}\|_1 = \dfrac{2}{n-1}$ y, por ende, la longitud de la curva es $\dfrac{2n}{n-1}$. Con lo cual, $m(l_1^n) \leq \ell(\gamma) = \dfrac{2n}{n-1}$.
  Veamos ahora la desigualdad inversa. Como l_1^n es de dimensión finita, dados dos puntos sobre la esfera existe una curva finito dimensional contenida en S_1 que realiza el ínfimo de las longitudes de las curvas que los unen. Más aún, esta curva tendrá segmentos con extremos en las aristas de cada cara de S_1 (ya que la esfera en l_1 es un politopo[3]), reemplazando aquellos segmentos que no cumplen con esta condición: si x_1 se une con x_2 y éste a su vez con x_3, donde todos yacen en la misma cara de S_1, entonces se reemplazan los dos segmentos por el segmento lineal entre x_1 y x_3, y este proceso solo permite dos puntos en una misma cara.

  En particular, para todo par de puntos antipodales x y $-x$, resulta que existe una curva poligonal como antes construida con $d_l(x, -x) = \ell(\gamma)$. Entonces la curva que realiza la distancia verifica que $m(l_1^n) = \ell(\gamma) = d_l(x, -x)$ para cierto $x \in S_1$.

[1] En [26], Schäffer muestra los detalles de la construcción de esta curva.

[2] Para el caso de μ medida con un átomo, Schäffer prueba que $D(L^1(\mu)) = M(L^1(\mu)) = 4$.

[3] Decimos que un cuerpo en R^n es un politopo si es la envolvente convexa de un subconjunto finito de puntos. En particular S_1 en l_1^n resulta ser un politopo con vértices en los elementos e^j cuya coordenada j es igual a 1 y el resto de las coordenadas son nulas.

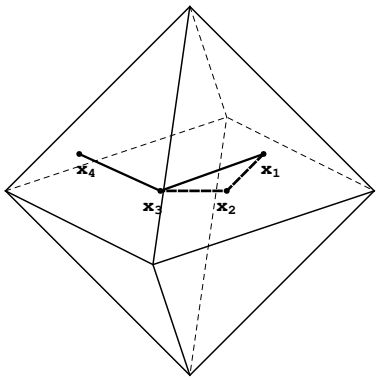

Figura 5.1: Esfera S_1 en $\mathbb{R}^3$.

Sean $x^0, x^1, x^2, ..., x^k = -x^0$ los puntos de esta curva poligonal. Notar que por ser segmentos lineales

$$\ell(\gamma) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \|x^i - x^{i-1}\|_1 \;=\; \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} |x_j^i - x_j^{i-1}|.$$

Fijada una coordenada j_0, como $x_{j_0}^i = -x_{j_0}^i$ existe algún valor i_0 tal que $x_{j_0}^{i_0} = 0$ (por continuidad de la curva) y entonces

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) - \sum_{i=1}^{k} |x_{j_0}^i - x_{j_0}^{i-1}| \;&=\; \sum_{j\neq j_0}\sum_{i=1}^{k} |x_j^i - x_j^{i-1}| \\
&\geq\; \sum_{j\neq j_0} (|x_j^k - x_j^{i_0}| + |x_j^{i_0} - x_j^0|) \qquad \text{por desigualdad triangular} \\
&=\; \sum_{j\neq j_0} (|x_j^0 + x_j^{i_0}| + |x_j^{i_0} - x_j^0|) \qquad \text{pues } x^k = -x^0 \\
&\geq\; 2\sum_{j\neq j_0} |x_j^{i_0}| = 2\sum_{j=0}^{k} |x_j^{i_0}| = 2.
\end{aligned}$$

y, como para cada j_0 esto ocurre, obtenemos

$$n\ell(\gamma) \;\geq\; 2n - \sum_{j_0\neq n}\sum_{i=1}^{k} |x_j^i - x_j^{i-1}| \;=\; 2n - \ell(\gamma).$$

con lo cual $m(l_1^n) = \ell(\gamma) \geq \dfrac{2n}{n+1}$, como queríamos demostrar.

- Sabiendo que l_1 contiene a los subespacios l_1^n, entonces $m(l_1) \leq m(l_1^n)$. Por lo tanto, usando el resultado anterior, $m(l_1) \leq 2$. Pero como $m(E) \geq 2$ para todo espacio normado E, se concluye con la igualdad buscada. □

Mientras Schäffer usa estos conceptos para el estudio de las esferas en espacios normados, Gao en [10] plantea una simplificación de tales conceptos con la intención de facilitar su cálculo sin perder los vínculos con las nociones topológicas ni los isomorfismos entre espacios.

5.1.6 Definición. Sea E espacio normado. La **distancia** α entre puntos antipodales $x, -x \in S_E$ se define como

$$\alpha(x) := \text{ínf}\left[\text{máx}\left\{\|y-x\|, \|y+x\|\right\} : y \in S_E\right],$$

con la cual definimos

$$g(E) := \text{ínf}\left\{\alpha(x) : x \in S_E\right\},$$
$$G(E) := \sup\left\{\alpha(x) : x \in S_E\right\}.$$

Análogamente se define la **distancia** β como

$$\beta(x) := \sup\left[\text{mín}\left\{\|y-x\|, \|y+x\|\right\} : y \in S_E\right],$$

con la cual definimos

$$j(E) := \text{ínf}\left\{\beta(x) : x \in S_E\right\},$$
$$J(E) := \sup\left\{\beta(x) : x \in S_E\right\}.$$

$2G(E)$ $(2J(E))$ se denomina el α**-perímetro** (resp. β**-perímetro**) de E y $2g(E)$ $(2j(E))$ el α**-contorno** (o α-girth) (resp. β**-contorno** o β-girth) de E.

Siguiendo un estudio análogo al realizado por Schäffer, Ji Gao encuentra resultados para espacios bidimensionales y los utiliza como cota de comparación con otros espacios. Mencionaremos tales resultados.

5.1.7 Proposición. *Sean E un espacio normado, $F \subset E$ un subespacio bidimensional y un punto $x \in S_F \subset S_E$, entonces*

1. *Existe un único $y \in S_F$ tal que $\|x-y\| = \|x+y\|$. Más aún, $\alpha(x) = \|x-y\| = \beta(x)$.*
2. *Si $v = \dfrac{y-x}{\alpha(x)}$ entonces $\alpha(v) = \dfrac{2}{\alpha(x)}$.*
3. *$g(F) = j(F)$ y $G(F) = J(F)$.*

Demostración. 1. Sea L la longitud de alguna curva γ que une x con $-x$ en $F \subset E$ y denotemos $\bar{\gamma}$ la representación estándar de γ. Sean $\Phi, \Psi : [0, L] \to [0, 2]$ las funciones definidas por

$$\Phi(s) := \|\gamma(s) - x\| \qquad \text{y} \qquad \Psi(s) := \|\gamma(s) + x\|.$$

Notar que Φ resulta decreciente y Ψ creciente. Veamos que además estas dos curvas se intersecan en un único punto. Supongamos lo contrario. Por monotonía de estas funciones, supongamos existen $0 < s_1 < s_2 < L$ tales que $\|\gamma(s_i) - x\| = \|\gamma(s_i) + x\|$ para $i = 1, 2$. Sean y_i, z_i la normalización de los elementos $\gamma(s_i) - x, \gamma(s_i) + x$ para $i = 1, 2$, entonces hay 6 puntos contenidos en S_F sobre la curva γ y los segmentos $[y_1, y_2], [\bar{\gamma}(s_1), \bar{\gamma}(s_1)]$ y $[z_1, z_2]$ son paralelos. Por convexidad de la esfera esto implica que ellos son colineales y por lo tanto $y_i = \gamma(s_i) - x$ y $z_i = \gamma(s_i) + x$ para $i = 1, 2$. Con lo cual,

$$\|y_2 - z_1\| = \|\gamma(s_1) - x - \gamma(s_2) - x\| = 2 + \|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\| > 2,$$

y esto es un absurdo. Por lo tanto, existe un único punto $y = \gamma(s_0) \in S_F$ con $s_0 \in [0, L]$ tal que

$$\|y - x\| = \|\gamma(s_0) - x\| = \|\gamma(s_0) - x\| = \|y + x\|.$$

Además, por la definición de α,β y la monotonía de Φ, Ψ se deduce que

$$\alpha(x) = \|y - x\| = \|y + x\| = \beta(x).$$

2. Sean $v = \frac{y-x}{\alpha(x)}$ y $w = \frac{y+x}{\alpha(x)}$. Es claro que $v, w \in S_F$.

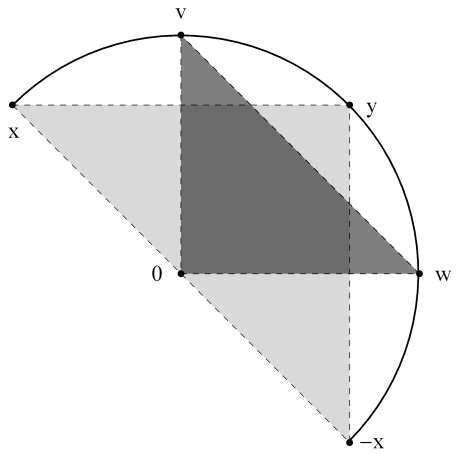

Figura 5.2: Proposición 5.1.7.

Considerando el triángulo de vértices $v, w, 0$ y el triángulo de vértices $x, y, -x$ podemos ver que se cumple

$$\alpha(x) = \frac{\|y - x\|}{\|v\|} = \frac{2\|x\|}{\|v - w\|},$$

con lo cual

$$\|v - w\| = \frac{2}{\alpha(x)}.$$

Análogamente, tomando los triángulos de vértices $y, -y, x$ y de vértices $-v, w, 0$ deducimos que

$$\|v + w\| = \frac{2}{\alpha(x)}.$$

Dejando fijo v y considerando las funciones Φ, Ψ con respecto a v el item anterior nos permite concluir que

$$\alpha(v) = \|v - w\| = \frac{2}{\alpha(x)}$$

como queríamos demostrar.

3. Por la definición de los parámetros g, j, G y J, como $\alpha(x) = \beta(x)$ para todo $x \in S_F$ resulta que

$$g(F) = j(F) \qquad \text{y} \qquad G(F) = J(F).$$

□

5.1.8 Proposición. *Sea E espacio normado, entonces*

$$g(E) \leq G(E) \leq J(E),$$

$$g(E) \leq j(E) \leq J(E).$$

Más aún,

$$1 \leq g(E) \leq \sqrt{2} \leq J(E) \leq 2, \qquad g(E)J(E) = 2.$$

Demostración. Por definición, $g(E) \leq G(E)$. Sea $x \in S_E$, es claro que para todo $F \subset E$ subespacio bidimensional que contenga a x vale que

$$\alpha(x) \leq \alpha_F(x) = \beta_F(x) \leq \beta(x),$$

donde α_F y β_F denotan los valores de α y β en F y donde hemos usado la proposición anterior. Con lo cual, $G(E) \leq J(E)$.

La segunda desigualdad sobre los parámetros g, j y J se obtienen de manera análoga.

Veamos que

$$1 \leq g(E) \leq \sqrt{2} \leq J(E) \leq 2.$$

Por definición es claro que $1 \leq g(E)$ y $J(E) \leq 2$. Sea $x \in S_E$ y $F \subset E$ un subespacio de dimensión 2 que lo contiene. Sea v como en la proposición 5.1.7. Entonces $\alpha_F(x)\alpha_F(v) = 2$ y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_F(x) \leq \sqrt{2}$. Con lo cual, resulta que

$$g(E) \leq \alpha_E(x) \leq \alpha_F(x) \leq \sqrt{2},$$
$$J(E) \geq \beta_E(v) \geq \alpha_F(v) = \alpha(v) \geq \sqrt{2}.$$

Para probar la última igualdad $g(E)J(E) = 2$, sea $\epsilon > 0$ y $x, y \in S_E$ tales que

$$\|y - x\| = \|y + x\| \leq g(E) + \epsilon.$$

Aplicando nuevamente la proposición 5.1.7 para el subespacio F que contiene a x e y podemos encontrar $v \in S_F$ tal que

$$\frac{2}{g(E) + \epsilon} \leq \alpha_F(v) = \beta_F(v) \leq J(E).$$

Ésta desigualdad implica que $J(E)g(E) \geq 2$. Análogamente, dado $\epsilon' > 0$ existen $x', y' \in S_E$ tales que

$$J(E) - \epsilon \leq \|y' - x'\| = \|y' + x'\|.$$

Y con el mismo argumento deducimos que $J(E)g(E) \leq 2$. Por lo tanto, $J(E).g(E) = 2$ como queríamos demostrar. □

En el caso de los espacios l_p, los resultados anteriores permiten calcular los valores de los α y β-perímetros y contornos.

5.1.9 Teorema. *Sean p y q tales que $p \geq 1$ y $1/p + 1/q = 1$.*

- *Para $2 \leq p < \infty$, $g(l_p) = j(l_p) = G(l_p) = 2^{1/p}$ y $J(l_p) = 2^{1/q}$.*
- *Para $1 \leq p < 2$, $g(l_p) = 2^{1/q}$ y $j(l_p) = G(l_p) = J(l_p) = 2^{1/p}$.*
- *$g(l_\infty) = j(l_\infty) = 1$ y $G(l_\infty) = J(l_\infty) = 2$.*

Demostración.

- Sea $2 \leq p < \infty$. Sabemos por la proposición 5.1.8 que

$$\begin{aligned} g(l_p) &\leq G(l_p) \leq J(l_p), \\ g(l_p) &\leq j(l_p) \leq J(l_p). \end{aligned} \tag{5.1}$$

  Para demostrar la primera igualdad del enunciado, alcanza con probar

$$2^{1/p} \leq g(l_p), \qquad G(l_p) \leq 2^{1/p} \qquad \text{y} \qquad j(l_p) \leq 2^{1/p}.$$

  Si $x, y \in S_p$, las desigualdades de Clarkson (vistas en el teorema 1.2.4) nos aseguran que

$$2^2 = 2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) \leq \|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \leq 2^p.$$

  Entonces de la definición de la distancia α, el ínfimo será mayor o igual a $2^{1/p}$. Luego, para $x \in S_p$ resulta que $2^{1/p} \leq g(l_p)$.

  Probemos ahora que $j(l_p) \leq 2^{1/p}$. Si consideramos $e = (1, 0, 0, ...) \in S_p$ es claro que para $y \in S_p$ con su primera coordenada $y_1 > 0$ tenemos

$$\|y - e\|_p^p = (1 - y_1)^p + \sum_{i=2}^{\infty} |y_i|^p \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p = 2.$$

  Análogamente, si $y \in S_p$ tiene $y_1 < 0$ resulta que $\|y + e\|_p^p \leq 2$. Estas dos observaciones llevan a considerar que la distancia β es menor o igual a $2^{1/p}$ y, por lo tanto, $j(l_p) \leq 2^{1/p}$.

  Para probar que $G(l_p) \leq 2^{1/p}$ tomemos $x \in S_p$ y $\epsilon > 0$ tal que $(1+\epsilon)^p < 1 + 2p\epsilon$. Sea N tal que $|x_N| < \epsilon$ y tomemos $e^N = (0, 0, 0, ..., 1, 0, ...)$ el elemento cuya N-ésima coordenada es igual a 1 y el resto son nulas. Entonces

$$\|x + y\|_p^p \leq 2 + 2p\epsilon \quad , \qquad \|x - y\|_p^p \leq 2 + 2p\epsilon.$$

  Por lo tanto, como ϵ y x son arbitrarios obtenemos que $G(l_p) \leq 2^{1/p}$. Esto finaliza la prueba de las desigualdades necesarias para probar que $g(l_p) = j(l_p) = G(l_p) = 2^{1/p}$.

  Por último, usando que $g(l_p)J(l_p) = 2$ (de la proposición 5.1.8) resulta que $J(l_p) = \dfrac{2}{2^{1/p}} = 2^{1/q}$.

- Sea $1 \leq p < 2$. Usando las desigualdades (5.1) ya mencionadas es necesario mostrar que

$$2^{1/p} \leq G(l_p), \qquad J(l_p) \leq 2^{1/p} \qquad \text{y} \qquad 2^{1/p} \leq j(l_p).$$

  Usando nuevamente la desigualdad de Clarkson para $1 \leq p < 2$ y argumentos similares al caso anterior estas desigualdades se demuestran y podemos concluir con la igualdad a mostrar en este ítem.

- Para el espacio l_∞ es claro que para todo $x \in S_\infty$ (esfera en l_∞) resulta que la distancia $\alpha = 1$ y, por ende, $g(l_\infty) = 1$.

  Si consideramos $e = (1, 0, 0, ...) \in S_\infty$ e $y \in S_\infty$ con su primera coordenada $y_1 > 0$ tenemos

  $$\|y - e\|_\infty = \sup\{|y_i - e_i|\} \leq 1$$

  y si $y_1 < 0$ tenemos que

  $$\|y - e\|_\infty = \sup\{|y_i + e_i|\} \leq 1$$

  por lo cual resulta que $j(l_\infty) \leq \beta(e) \leq 1$.

  Por otro lado, si $x = (1, 1, 1, ...) \in l_\infty$ para todo $y \in l_\infty$ con norma 1 resulta entonces que se cumple $\|x - y\|_\infty = 2$ o $\|x + y\|_\infty = 2$. Esto implica que $\alpha = 2$ y entonces $G(l_\infty) \geq 2$.

  Nuevamente, con estas desigualdades y la relación dada en (5.1) encontramos las igualdades del enunciado. □

Por último, mencionaremos los parámetros definidos por Whitley [29] para el estudio del tamaño de esferas.

5.1.10 Definición. Sea E espacio normado con d métrica inducida por la norma.

Una **ϵ-red** para E es un subconjunto $F \subset E$ de puntos con la propiedad de que para cada $x \in E$ existe $t \in F$ tal que $d(x, t) \leq \epsilon$.

- Definimos el **grosor** (*thickness*) de E como:

  $$T(E) := \text{ínf}\{a \geq 0 : \text{ para todo } \epsilon > a \text{ vale que } S_E \text{ tiene una } \epsilon\text{-red finita}\}$$

- Definimos la **delgadez** (*thinness*) de E como:

  $$t(E) := \text{ínf}\{b \geq 0 : \text{para todo conjunto finito } \{x_1, x_2 ... x_n\} \subset S_E \text{ y dado } \epsilon > 0 \text{ existe } x_0 \in S_E \text{ con } \|x_0 - x_i\| < b + \epsilon \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}$$

Para los espacios l_p, con $1 \leq p < \infty$, los valores de estos parámetros se encuentran calculados.

5.1.11 Proposición. *Para $1 \leq p < \infty$,*

1. $T(l_p) = 2^{1/p}$.
2. $t(l_p) = 2^{1/p}$.

Demostración. Sea $1 \leq p < \infty$.

1. Supongamos que $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ es una $\epsilon-$red para S_p con

   $$x^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i, ...)$$

Dado $0 < \epsilon' < 1$, existe un índice N suficientemente grande tal que

$$\sum_{i=N}^{\infty} |x_j^i|^p < \epsilon' \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Sea $e^N = (0, 0, 0, ..., 1, 0, ...)$ el elemento cuya N-ésima coordenada es igual a 1 y el resto son nulas. Para algún punto x^i de la $\epsilon-$red, por definición tenemos:

$$\begin{aligned}\epsilon^p \geq d(x^i, e^N)^p =& \|x^i - e^N\|_p \\ &= \sum_{j \neq N} |x_j^i|^p + |1 - x_N^i|^p \geq 1 - (\epsilon')^p + (1 - \epsilon')^p.\end{aligned}$$

Como ϵ' es un valor arbitrario en $(0, 1)$ resulta que $\epsilon \geq 2^{1/p}$. Luego $T(l_p) \geq 2^{1/p}$.

Tomando ahora e^1 el elemento con 1 en la primera coordenada y el resto nulas, resulta que el conjunto $\left\{e^1, -e^1\right\}$ para el caso de sucesiones reales, o el conjunto $\left\{e^1, -e^1, ie^1, -ie^1\right\}$ para el caso de sucesiones complejas, es una $2^{1/p}-$red para S_p. Luego $T(l_p) \leq 2^{1/p}$ y por lo tanto, $T(l_p) = 2^{1/p}$.

2. Nuevamente supongamos que $\left\{x^1, x^2, ..., x^n\right\}$ es una $\epsilon-$red para S_p y sea $\epsilon' > 0$.

   Como en el item anterior, para N suficientemente grande vale

   $$\|x^i - e^N\|_p \geq 1 - (\epsilon') + (1 - \epsilon')^p,$$

   con lo cual $t(l_p) \leq 2^{1/p}$.

   Sea e^1 el elemento con 1 en la primera coordenada y el resto nulas. Sea $\left\{a^1, a^2, ..., a^m\right\}$ una $\epsilon-$red de escalares para el conjunto $\{a : |a| = 1\} \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) y definimos el conjunto $\left\{a^1 e^1, a^2 e^1, ..., a^m e^1\right\}$. Dado $x \in S_p$ con $x_1 = 0$ entonces $\|x - a^1 e^1\|_p = 2^{1/p}$. Caso contrario, si $x_1 \neq 0$ tomando $a = \dfrac{x_1}{|x_1|}$ entonces

   $$\left\|x + ae^1\right\|_p^p = |1 + |x_1|^p| + \sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^p \geq 1 + |x_1|^p + \sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^p = 2.$$

   Por definición de $\epsilon-$red, existe algún a^i con $|a - a^i| < \epsilon$ y para este escalar

   $$\left\|x - a^i e^1\right\|_p \geq \left\|x + ae^1\right\|_p - \left\|ae_1 + a^i e^1\right\|_p \geq 2^{1/p} - \epsilon.$$

   Luego $t(l_p) \geq 2^{1/p}$ y por lo tanto podemos concluir que $t(l_p) = 2^{1/p}$. □

Esta proposición permite mostrar que para todo valor $1 < T \leq 2$ existe un espacio normado tal que $T(E) = T$ y lo mismo ocurre para el parámetro t. En el mismo trabajo, Whitley muestra además que para cualquier espacio normado tales parámetros se encuentran acotados por $1 \leq T \leq 2$ y $1 \leq t \leq 2$. Más aún, muestra que $T(E) = 2 = t(E)$ si E es el espacio de las funciones continuas sobre un espacio completamente regular y Hausdorff, que contenga infinitos puntos (ver [29] para más detalles).

5.2. Distancia entre espacios isomorfos.

El cálculo de los parámetros mencionados en la sección anterior adquiere relevancia y utilidad cuando se analizan clases de espacios normados. Comenzaremos recordando el concepto de distancia entre espacios normados, introducida a principios de la década del 30' por Stefan Banach [1]. Para espacios normados E y F, $\Delta(E,F)$ mide cuan lejos está B_E con respecto a una imagen afín de B_F.

5.2.1 Definición. Sobre el conjunto de espacios normados se definen **clases de equivalencia entre espacios vía isomorfismos**, esto es, E, F espacios normados son equivalentes si existe $\Phi : E \to F$ isomorfismo entre ellos. En cada clase $\bar{E}$, se puede definir la pseudo-métrica dada por

$$\Delta(E,F) := \text{ínf}\{\ln(\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|) : \Phi \text{ isomorfismo entre } E \text{ y } F\},$$

para E, F en la clase $\bar{E}$. Por otro lado, se define $\Delta(E,F) = \infty$ si E y F no son isomorfos. Esta seudo-métrica es conocida como la **distancia de Banach-Mazur**.

Diremos que E y F espacios normados isomorfos son **isómetricos** si existe Φ un isomorfismo tal que $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ (en tal caso, $\Delta(E,F) = 0$) y diremos que son **casi isométricos** si $\Delta(E,F) = 0$.

5.2.2 Observación. Veamos que Δ define una pseudo-métrica.

Dados E, F espacios normados isomorfos y $\Phi : E \to F$ isomorfismo, como $\Phi \circ \Phi^{-1} = Id_E$ resulta que $\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\| \geq 1$ y por lo tanto $\Delta(E,F) \geq 0$. Si E, F, G son tres espacios isomorfos con $\Phi : E \to F$ y $\Psi : F \to G$, usando el hecho que $\|\Psi \circ \Phi\| \leq \|\Psi\|\|\Phi\|$, tenemos que

$$\ln(\|\Psi \circ \Phi\|\|(\Psi \circ \Phi)^{-1}\|) \leq \ln\left(\|\Psi\|\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|\|\Psi^{-1}\|\right) \leq \ln(\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|) + \ln(\|\Psi\|\|\Psi^{-1}\|),$$

y por lo tanto, $\Delta(E,G) \leq \Delta(E,F) + \Delta(F,G)$.

5.2.3 Observación. En general si $\Delta(E,F) = 0$, no necesariamente E y F son isométricos.

Veamos el ejemplo presentado por Pelczynski y Bessaga en [22]. Sean $E = (c_0, \|.\|_0)$ y $F = (c_0, \|.\|_1)$ donde para $i = 0, 1$ son las normas dadas por

$$\|x\|_i := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} |x_{j+i}|^2\right)^{1/2} = \|x\|_\infty + \left\| \left(\frac{x_{j+i}}{2^j}\right)_j \right\|_2 .$$

Observar que la norma 1 en este ejemplo no coincide con la norma usual de l_1.

Consideremos para $k \in \mathbb{N}$ y sea $T_k : E \to F$ dado por $T_k(x_1, x_2, ...) := (x_k, x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ...)$.

Claramente T_k es una biyección. Vamos a estimar la norma de T_k. Para ello, sea x con $\|x\|_0 = 1$. Notemos que $|x_j| < 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned}
\|T_k x\|_1 =& \|T_k x\|_\infty + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} |(T_k x)_{j+i}|^2\right)^{1/2} \\
=& \|x\|_\infty + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^{2j}} |x_j|^2 + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}}\right)^{1/2} \\
=& \|x\|_\infty + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^{2j}} |x_j|^2 + \frac{(1/4)^k}{3/4}\right)^{1/2} \\
\leq& \|x\|_\infty + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} |x_j|^2\right)^{1/2} + \left(\frac{(1/4)^k}{3/4}\right)^{1/2} \\
=& \|x\|_0 + \left(\frac{(1/4)^k}{3/4}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Análogamente se puede verificar que $\|T_k^{-1}\| \leq 1 + \left(\frac{1/4^k}{3/4}\right)^{1/2}$. Luego

$$0 \leq \Delta(E,F) \leq \ln\left(\|T_k\|\|T_k^{-1}\|\right) \leq \ln\left(1 + \left(\frac{1/4^k}{3/4}\right)^{1/2}\right)^2.$$

Como el término a la derecha converge a 0 si $k \to \infty$, resulta que $\Delta(E,F) = 0$.

Veamos ahora que E y F no son isométricos. Para ello mostraremos que $\|.\|_0$ es una norma estrictamente convexa, mientras que $\|.\|_1$ no lo es. Consideremos $x, y \in E$ tal que $\|x+y\|_0 = \|x\|_0 + \|y\|_0$. Luego

$$\|x+y\|_\infty + \left\|\left(\frac{x_j+y_j}{2^j}\right)_j\right\|_2 = \|x\|_\infty + \left\|\left(\frac{x_j}{2^j}\right)_j\right\|_2 + \|y\|_\infty + \left\|\left(\frac{y_j}{2^j}\right)_j\right\|_2.$$

Entonces

$$0 = \underbrace{\|x\|_\infty + \|y\|_\infty - \|x+y\|_\infty}_{\geq 0} + \underbrace{\left\|\left(\frac{x_j}{2^j}\right)_j\right\|_2 + \left\|\left(\frac{y_j}{2^j}\right)_j\right\|_2 - \left\|\left(\frac{x_j+y_j}{2^j}\right)_j\right\|_2}_{\geq 0};$$

y por lo tanto

$$\left\|\left(\frac{x_j}{2^j}\right)_j\right\|_2 + \left\|\left(\frac{y_j}{2^j}\right)_j\right\|_2 = \left\|\left(\frac{x_j+y_j}{2^j}\right)_j\right\|_2.$$

Como $\|.\|_2$ es estrictamente convexa, existe c tal que $\left(\frac{x_j}{2^j}\right)_j = c\left(\frac{y_j}{2^j}\right)_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y luego $x = cy$. Probando así que $\|.\|_0$ resulta estrictamente convexa. Sin embargo $\|.\|_1$ no lo es. De hecho, basta ver que $x = (1,0,...)$ e $y = (1,1,...)$ son linealmente independientes y $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$. Finalmente, supongamos que E y F fueran isométricamente isomorfos, entonces existe $\Phi : E \to F$ isometría tal que $\Phi(a) = x$ y $\Phi(b) = y$. Luego

$$\|x+y\|_1 = \|\Phi(a) + \Phi(b)\|_1 = \|a+b\|_0 = \|x\|_1 + \|y\|_1 = \|a\|_0 + \|b\|_0.$$

Como $\|.\|_0$ es estrictamente convexa resulta que a es múltiplo de b y luego (por definición de Φ) x es múltiplo de y, llegando de esta manera a un absurdo.

La siguiente proposición muestra una visión del uso de la distancia de Banach-Mazur como una medida del grado en que dos normas son diferentes.

5.2.4 Proposición. *Sean E y F dos espacios normados, B_E, B_F sus respectivas bolas unitarias cerradas y $c > 1$. Luego $\Delta(E,F) < c$ si y sólo si existen $c_1, c_2 > 0$, con $c_1 c_2 < e^c$, y un isomorfismo $\Phi : E \to F$ tal que $\frac{1}{c_1} B_F \subseteq \Phi(B_E) \subseteq c_2 B_F$.*

Demostración. Supongamos $\Delta(E,F) < c$. Por la definición de Δ, existe un isomorfismo $\Phi : E \to F$ tal que $\ln(\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|) \leq c$ y por lo tanto

$$\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\| \leq e^c - \epsilon.$$

Veamos que Φ verifica las condiciones de la proposición. En primer lugar,

$$\|\Phi(x)\| \leq \|\Phi\|\|x\|$$

para todo $x \in E$. Además, si $y \in \frac{1}{\|\Phi^{-1}\|} B_F$, por ser Φ un isomorfismo, existe un único $z \in E$ tal que $\Phi(z) = y$. Entonces

$$\|z\| = \|\Phi^{-1}(y)\| \leq \|\Phi^{-1}\|\|y\| \leq 1$$

y resulta que $z \in B_E$.
Por lo tanto si $c_1 = \|\Phi^{-1}\|$ y $c_2 = \|\Phi\|$ resulta que $\frac{1}{c_1} B_F \subseteq \Phi B_E \subseteq c_2 B_F$ y $c_1 c_2 < e^c$.
Recíprocamente, supongamos existen $c_1, c_2 > 0$, con $c_1 c_2 < e^c$ y $\Psi : E \to F$ isomorfismo tales que

$$\frac{1}{c_1} B_F \subseteq \Psi B_E \subseteq c_2 B_F.$$

Es claro entonces que $0 < \|\Psi\| \leq c_2$ y $0 < \|\Psi^{-1}\| \leq c_1$ con lo cual

$$\Delta(E,F) \leq \ln(\|\Psi\|\|\Psi^{-1}\|) \leq \ln(c_1 c_2) < c. \quad \square$$

Si consideramos E, F espacios contenidos en la misma clase $\bar{E}$, el isomorfismo $\Phi : E \to F$ induce un homeomorfismo $\partial\Phi : S_E \to S_F$ dado por $\partial\Phi(x) = \dfrac{\Phi(x)}{\|\Phi(x)\|}$. Usando las propiedades vistas para d_l en [25] Schäffer demuestra que si $x, y \in S_E$

$$|d_l^F(\partial\Phi(x), \partial\Phi(y))| \leq 6\left(\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\| - 1\right).$$

Con esta relación, la invariancia de puntos antipodales vía $\partial\Phi$ y las definiciones de los parámetros D, M y m se puede demostrar sin problemas la siguiente proposición.

5.2.5 Proposición. *Sean E, F espacios normados isomorfos,* $\dim E = \dim F \geq 2$. *Entonces*

$$|D(F) - D(E)| \leq 6(e^{\Delta(E,F)} - 1)$$

y la misma desigualdad se cumple intercambiando D por m o M.
En particular, sobre una misma clase $\bar{E}$ (salvo si $\dim E = 1$*), los parámetros D, M y m son funciones continuas, localmente Lipschitz e invariantes vía congruencias sobre $(\bar{E}, \Delta)$.*

En sus trabajos, Schäffer realiza un estudio de los valores extremos en cada clase de espacios isomorfos, vinculándolos con la forma geométrica de la esfera en tales espacios y dejando conjeturas que aún permanecen sin validar.

Posteriormente, Gao y Lau realizan un estudio similar en [10]. En primer lugar, muestran la siguiente relación, para E, F espacios contenidos en la misma clase $\bar{E}$ con isomorfismo $\Phi : E \to F$:

$$\frac{1}{\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|} \leq \frac{\|\partial\Phi(x) - \partial\Phi(y)\| + 2}{\|y - x\| + 2} \leq \|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|.$$

Esta relación y las definiciones de las α-distancia y β-distancia permiten demostrar el siguiente resultado.

5.2.6 Proposición. *Sean E, F son espacios normados en la misma clase de espacios normados y $\Phi : E \to F$ isomorfismo. Supongamos que* $\dim E = \dim F \geq 2$. *Entonces*

$$\frac{1}{\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|} \;\leq\; \frac{g(F) + 2}{g(E) + 2} \;\leq\; \|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|,$$

y la misma desigualdad se cumple intercambiando g por los otros parámetros G, j o J.

Tanto la uniforme convexidad como la uniforme suavidad se encuentran vinculadas con estos parámetros. Es posible demostrar que un espacio normado E es uniformente suave si y sólo si $J(E) < 2$. Considerando el módulo de convexidad δ definido en 1.3.7 resulta que [4]

$$J(E) = \sup\{\epsilon : \epsilon < 2 - 2\delta(\epsilon)\}.$$

5.2.7 Definición. Diremos que un espacio normado E es **uniformente no-cuadrado** si existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in S_E$ entonces

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta \qquad \text{ó} \qquad \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

En el caso de espacios isomorfos a l_p, Gao y Lau hallaron condiciones para determinar si un espacio normado es uniformente no cuadrado usando el parámetro J.

5.2.8 Proposición. *Sea $p \geq 1$ y q tal $1/p + 1/q = 1$. Si E es un espacio isomorfo a l_p tal que*

$$\Delta(E, l_p) \;<\; \ln\left(\frac{4}{2^{1/q} + 2}\right) \qquad \textit{si } 2 \leq p < \infty$$

y

$$\Delta(E, l_p) \;<\; \ln\left(\frac{4}{2^{1/p} + 2}\right) \qquad \textit{si } 1 \leq p < 2$$

entonces E es uniformente no cuadrado.

[4] Ver [10] para una demostración.

Demostración. Vamos a considerar el caso $2 \leq p < \infty$, ya que el otro caso se demuestra de manera similar. Supongamos que $\delta > 0$ satisface que $J(E) < 2 - \delta$. De la definición de J y la β-distancia para $x, y \in S_p$

$$2 - \delta \ > \ J(E) \ \geq \ \beta(x) \ > \ \text{mín} \left\{ \|y - x\|_p , \|y + x\|_p \right\}$$

y entonces

$$\|x + y\|_p \leq 2 - \delta \qquad \text{ó} \qquad \|x - y\|_p \leq 2 - \delta.$$

Es decir, si logramos probar que $J(E) < 2 - \delta$ para cierto $\delta > 0$, tenemos que el espacio es uniformente no-cuadrado. Esto se cumple cuando $J(E) < 2$. Pero de la proposición 5.2.6 y la definición de Δ deducimos que

$$\frac{J(E) + 2}{J(l_p) + 2} \leq e^{\Delta(E, l_p)}.$$

Luego $J(E) < 2$ si se verifica

$$e^{\Delta(E, l_p)}(J(l_p) + 2) - 2 < 2$$

y despejando

$$\Delta(E, l_p) < \ln \left(\frac{4}{J(l_p) + 2} \right).$$

Luego bajo esta condición $J(E) < 2$ y por lo tanto E resulta un espacio no-cuadrado como queríamos mostrar. □

5.2.9 Observación. La demostración anterior encierra un resultado que vincula el parámetro J con las propiedades del espacio subyacente. Si E es un espacio normado con $J(E) < 2$ entonces el espacio es uniformemente no-cuadrado. Este criterio es aplicable a cualquier espacio normado.

Por último, vamos a mencionar los aportes dados por los parámetros de grosor y delgadez de esferas introducidos por Whitley. La idea principal de su formulación reside en que dan un criterio para decidir si dos espacios E, F normados isomorfos pueden ser casi isométricos, o sea $\Delta(E, F) = 0$. En particular, para el caso de espacios l_p con $1 < p < \infty$ tenemos el siguiente resultado.

5.2.10 Proposición. *Sea E espacio normado y $\Phi : E \to l_p$ un isomorfismo con $1 < p < \infty$. Entonces*

$$\begin{aligned} T(E) \ &\leq \ 2^{1/p} \|\Phi\| \|\Phi^{-1}\|, \\ t(E) \ &\leq \ 2^{1/p} \|\Phi\| \|\Phi^{-1}\|. \end{aligned}$$

En particular, si E tiene delgadez o grosor diferente a $2^{1/p}$ entonces no puede ser casi isométrico a l_p.

Demostración. Consideremos un conjunto finito arbitrario de puntos $y_1, y_2, ..., y_n \in S_E$ y $\epsilon > 0$. Sean $x_i = \Phi(y_i) \in l_p$, donde es claro que $\|x_i\|_p \leq \|\Phi^{-1}\|$. Consideremos el conjunto

$$\left\{ \frac{x_1}{\|x_1\|_p}, \frac{-x_1}{\|x_1\|_p}, \frac{x_2}{\|x_2\|_p}, \frac{-x_2}{\|x_2\|_p}, ..., \frac{x_n}{\|x_n\|_p}, \frac{-x_n}{\|x_n\|_p} \right\}.$$

Este conjunto está contenido en S_p. Por definición de $t(l_p)$, existe un punto $x \in S_p$ con

$$\text{máx} \left\| \frac{\pm x_i}{\|x_i\|_p} - x \right\|_p \ < \ t(l_p) + \epsilon.$$

Todo número real $b \in [-1,1]$ puede rescribirse de la forma $a(-1)+(1-a)1$ para algún $a \in [0,1]$. Entonces dado $b \in [-1,1]$

$$\left\| b\frac{x_i}{\|x_i\|_p} - x \right\|_p \leq a \left\| \frac{x_i}{\|x_i\|_p} + x \right\|_p + (1-a) \left\| \frac{x_i}{\|x_i\|_p} - x \right\|_p < t(l_p) + \epsilon.$$

Luego, si $b = \pm\dfrac{x_i}{\|\Phi^{-1}\|}$, resulta

$$\left\| \pm x_i - \|\Phi^{-1}\| x \right\|_p < \|\Phi^{-1}\|(t(l_p)+\epsilon).$$

Entonces esto implica que si $y = \|\Phi^{-1}\|\Phi(x)$

$$\text{máx} \| \pm y_i - y\| < \|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|(t(l_p)+\epsilon) =: C,$$

donde $y \geq 1$.

Nuevamente, reescribiendo todo $b \in [-1,1]$ como $b = a(-1)+(1-a)1$ para algún $a \in [0,1]$, obtenemos que

$$\|y_i - by\| \leq a\|y_i - y\| + (1-a)\|y_i + y\| < C.$$

Tomando $b = \dfrac{1}{\|y\|}$ resulta que $\text{máx} \left\| y_i - \frac{y}{\|y\|} \right\| < C$. De hecho

$$t(E) \leq \|\Phi\|\|\Phi^{-1}\| t(l_p),$$

como queríamos demostrar. □

5.2.11 Observación. Notar que la demostración anterior se puede extender para cualquier espacio normado F isomorfo a E. Es decir, si $\Phi : E \to F$ es un isomorfismo entre E y F entonces

$$T(E) \leq T(F)\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|$$
$$t(E) \leq t(F)\|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|.$$

Por lo tanto, esta generalización permite deducir que si dos espacios isomorfos no tienen misma delgadez y grosor no puden ser casi isométricos.

Bibliografía

[1] S. Banach, *Théorie des operations linéaries*. PWN, Warszawa, (1932).

[2] B. Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry*. Second revised edition, North-Holland, Amsterdam, (1985).

[3] A. Beurling, A. Livinston, *A teorem on duality mapping* Arkiv. Math. 4(1962), pp. 405-411

[4] G. Birkhoff, *Ortogonality in linear metric spaces*. Duke. Math. J. (1935), pp.169–172.

[5] H. Brézis, B. Simon, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones.* (Versión española) Alianza editorial, Madrid (1994)

[6] H. Busemann, *The geometry of geodesics*. Academic Press Inc., New York (1955).

[7] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), pp.396–414

[8] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces*. Select topics. Lect. Notes in Math.485. Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg-New York (1975), pp. 20–40

[9] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*. proc. Symp. on Linear Spaces. Jerusalem (1961), pp. 123–160.

[10] J. Gao, K.S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*. Trans. Austral. Math. Soc. (Series A) 48 (1990), pp.101–112

[11] S. Gubber, D. Stawther, *Strictly convex normed linear spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 59 (1976), pp. 263-267.

[12] R. C. James, *Orthogonality in normed linear spaces*. Duke Math. J. 12,(1945), pp. 291–302.

[13] R. C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*. Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947), pp. 265–292.

[14] R. C. James, *Inner products in normed linear spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), pp. 559–566.

[15] S. Lang, *Diferential and Riemannian manifolds*, Third edition. Graduate texts en Mathematics. Springer-Verlag, New York (1995).

[16] G. Larotonda, *Estructura geométrica para las variedades de Banach*. Buenos Aires (2010) Colección Ciencia,innovación y desarrollo. Ediciones de la Univ. Nac. de Gral. Sarmiento (en prensa.

[17] C. Li, *An Estimate for Lipschitz Constants of Metric Projections*. J. Math. Anal. Appl. 231 (1999), no. 1, 133-141.

[18] E.H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, Second edition. Graduate studies en Mathematics. A.M.S, EE.UU (2001), pp. 51-52.

[19] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Clasical Banach Spaces II. Function spaces*. Springer-Verlag, New York (1977), pp. 59–68.

[20] L. Maligranda, *A simple proof of the Hölder and the Minkowski inequality*. Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1995), No. 3, pp.256–259

[21] G. Nördlander, *The modulus of convexity in normed linear spaces*. Arkiv. Mat. 4 (1960), pp. 15–17.

[22] A. Pelcyznski, B. Bessaga *Some aspects of the present theory of Banach spaces*. Stefan Banach Oeuvres, vol II, Warszana, (1979), pp. 223-304.

[23] M. Reed, B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. Functional analysis*. Vol 1. 2da Ed. Academic Press, Inc; London (1980)

[24] W. Rudin, *Functional analysis*. McGraw-Hill Book co., U.S.A (1973).

[25] J.J. Schäffer, *Inner diameter, perimeter, and girth of spheres*. Trans. Math. Ann. 173 (1967), pp.53–82

[26] J.J. Schäffer, *On The Geometry of Spheres in L-spaces*. Israel J. Math. 10 (1971), pp.114–120.

[27] M.A. Smith, *A reflexive Banach space that is LUC and not 2R*. Can.Math.Bull, 21 (1978), pp.628–636.

[28] V.L. *Šmulyan, Sur la dérivabilité de la norme dans l éspace de Banach.* C.R. Acad. Sci. U.R.S.S. (Doklady) 27 (1940), pp. 643-648.

[29] R. Whitley, *The Size of the unit Sphere.* Canadian J. Math. 20 (1968), pp. 450-455.

Índice de figuras

1. Esferas en $\mathbb{R}^2$ con norma p VII

1.1. Ley del paralelogramo. 3
1.2. Convexidad 12
1.3. Módulo de convexidad 13

4.1. Lema 4.2.1 50
4.2. Teorema 4.2.3 52
4.3. Lema 4.2.4, parte 1 53
4.4. Lema 4.2.4, parte 2 54
4.5. Esfera en l_2. 59

5.1. Esfera S_1 en $\mathbb{R}^3$. 68
5.2. Proposición 5.1.7. 70