



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Sobre la estimación del error para la interpolación de Lagrange en
elementos cuadriláteros Q_1 -isoparamétricos.

Gabriel Monzón

Director: Gabriel Acosta Rodríguez

Índice general

1. Breve reseña.	6
1.1. La condición de regularidad.	6
1.2. Elementos cuadriláteros anisotrópicos.	8
2. Los elementos de referencia.	10
2.1. Definiciones y notaciones.	10
2.2. Comparación del error bajo mapeos afines.	11
2.3. Descomposición del error.	12
3. Cotas parciales de $\phi_3 _{W^{1,p}(K)}$.	13
3.1. Definición de I_p y dependencia de $ \phi_3 _{W^{1,p}(K)}$ respecto a I_p	13
3.2. Acotaciones parciales de I_p	15
4. La propiedad de descomposición regular.	21
4.1. Implicaciones de la <i>RDP</i>	26
4.1.1. Reducción a la configuración de referencia.	26
4.1.2. Acotación de $ \phi_3 _{H^1(K)}$ bajo la <i>RDP</i>	40
4.1.3. Acotación de $ \phi_3 _{W^{1,p}(K)}$ bajo la <i>RDP</i>	42
5. La doble condición del ángulo.	46
5.1. Implicaciones de la <i>DAC</i>	48
5.1.1. Reducción a la configuración de referencia.	48
5.1.2. Acotación de $ \phi_3 _{W^{1,p}(K)}$ bajo la <i>DAC</i>	50
6. Acotaciones técnicas.	51
6.1. Acotación de $ (u - \Pi u)(M_3) $	51
6.2. Acotación de $ u - \Pi u _{W^{1,p}(K)}$	52
7. Resultados Principales.	54
7.1. El Teorema de interpolación.	54
7.2. Contra-ejemplo.	55
8. La propiedad de descomposición regular generalizada y nueva propiedad de descomposición regular.	57
8.1. Definición y notación.	57
8.2. Observaciones sobre la <i>GRDP</i> y la <i>RDP</i>	58

8.3. La estimación del error en H^1	61
8.4. La $NRDP$ y la estimación del error en $W^{1,p}$	62
8.5. La $NRDP$ y la DAC	64

Introducción

Para elementos cuadriláteros convexos y $p \geq 1$, la estimación usual del error para la interpolación de Lagrange Q_1 -isoparamétrica, notada aquí Q , es

$$\|u - Qu\|_{L^p(K)} + h_K |u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq Ch_K^2 |u|_{W^{2,p}(K)} \quad (0.0.1)$$

donde h_K denota el diámetro de K .

Se sabe, aunque en el Capítulo 7 se esquematizará la prueba, que la convexidad de K es una condición suficiente para tener la estimación

$$\|u - Qu\|_{L^p(K)} \leq Ch_K^2 |u|_{W^{2,p}(K)} \quad (0.0.2)$$

con C una constante acotada independientemente de la geometría de K .

Sin embargo, para obtener la estimación

$$|u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq Ch_K |u|_{W^{2,p}(K)} \quad (0.0.3)$$

consideraciones extras son requeridas sobre la geometría de K a fin de garantizar que la constante C se encuentre uniformemente acotada.

La intención de este trabajo es brindar un panorama sobre las condiciones más débiles conocidas hasta el momento; requeridas sobre la geometría de K , que resultan suficientes para obtener (0.0.3).

Consideramos pertinente comenzar nuestro trabajo con una breve reseña sobre algunos de los resultados que, a nuestro entender, han sido de gran relevancia para esta teoría y que pueden ser considerados como antecedentes de las condiciones que son el eje central de este trabajo; a saber, la *propiedad de descomposición regular* y la *doble condición del ángulo*. Éste es el objeto del Capítulo 1. Si bien no es una reseña exhaustiva, resulta suficiente a nuestros fines.

Básicamente, los trabajos sobre los cuales centraremos nuestra atención son [2] y [4], pues es allí (junto a [16]) dónde se dan las condiciones menos restrictivas bajo las cuales (0.0.3) vale. A diferencia de los trabajos reseñados en el Capítulo 1 y de muchos otros trabajos entre los cuales nos gustaría destacar [16], en [2] y [4] se usa como herramienta clave la reducción del estudio a una familia de elementos de referencia. Por este motivo dedicaremos el Capítulo 2 a introducir dicha familia y a simplificar el análisis del error introduciendo un interpolante lineal adecuado tal como en [13].

El Capítulo 3 es de carácter técnico y tiene por objeto presentar algunas acotaciones parciales de un término surgido en la descomposición del error hecha en el Capítulo 2.

Los Capítulos 4 y 5 están destinados a introducir dos de las condiciones geométricas menos restrictivas bajo las cuales la estimación del error (0.0.3) es válida; a saber, la *propiedad de descomposición regular (RDP)* y la *doble condición del ángulo (DAC)*. También se presentan allí las implicaciones necesarias a fin de demostrar los principales teoremas de interpolación.

En el Capítulo 6 presentamos algunas estimaciones y resultados técnicos sobre los términos que aparecen en la descomposición del error obtenida en el Capítulo 2. Dichos resultados son deducidos de las condiciones geométricas introducidas en los capítulos previos.

El Capítulo 7 está destinado a enunciar y demostrar los principales teoremas de interpolación obtenidos sobre la *RDP* y la *DAC*. También se muestra allí, mediante un ejemplo, que algunos de los resultados no pueden relajarse.

Finalmente, en el Capítulo 8, presentamos los resultados principales de [16], un trabajo posterior a [4], en el cual se presentan las llamadas *propiedad de descomposición regular generalizada* y *nueva propiedad de descomposición regular* que generalizan, en cierto sentido, la *RDP*; y que, bajo cierto punto de vista, pueden ser consideradas aún más débiles que la *RDP* y la *DAC*.

Capítulo 1

Breve reseña.

Como mencionamos en la introducción, el objeto de este capítulo es dar una breve reseña sobre algunos de los resultados que, a nuestro entender, han sido de gran relevancia respecto a la estimación del error para la interpolación de Lagrange sobre elementos cuadriláteros Q_1 -isoparamétricos, y que pueden ser considerados como antecedentes de las condiciones que son el eje de este trabajo.

No pretendemos ser exhaustivos en esta reseña, pues dada la diversidad de condiciones introducidas a lo largo del tiempo y la distinta naturaleza de las mismas, compilar y comparar dichas condiciones podría ser el objeto de un trabajo en sí mismo. Con este fin, sugerimos consultar [17] y los trabajos citados a lo largo de estas notas.

1.1. La condición de regularidad.

Uno de los trabajos pioneros en los cuales se estudia (0.0.3), es el trabajo de Ciarlet y Raviart [10], el cual es compilado y re-visitado entre muchos otros en [11]. En dicho trabajo los autores prueban que si existen constantes positivas μ_1 y μ_2 tales que

$$\frac{h_K}{s} \leq \mu_1 \tag{1.1.1}$$

donde s y h_K denotan la longitud del lado más corto de K y su diámetro, respectivamente; y además

$$|\cos(\theta)| \leq \mu_2 < 1 \tag{1.1.2}$$

para todo ángulo θ interior a K , entonces (0.0.3) vale con una constante C que sólo depende de μ_1 y μ_2 .

Notemos que las condiciones (1.1.1) y (1.1.2) impiden que una familia de cuadriláteros degeneren en un triángulo. En efecto, (1.1.1) no permite que el lado más corto de cada elemento de la familia tienda a cero, mientras que (1.1.2), no permite que los ángulos interiores estén cerca de 0 ni de π . Como consecuencia inmediata del hecho que los ángulos interiores de un cuadrilátero estén lejos de π , resulta que ningún vértice del cuadrilátero puede estar cerca del segmento determinado por los vértices adyacentes¹. Esto impide que la familia de cuadriláteros degeneren en un triángulo por el alineamiento de dos lados adyacentes. Teniendo presente esta observación introducimos la

¹A decir verdad, en esta frase deberíamos decir una ‘familia de cuadriláteros’ en lugar de ‘cuadrilátero’; ya que,

siguiente definición con el objeto de simplificar la lectura y convenir la notación a usar, ya que haremos referencia a la misma en repetidas ocasiones a lo largo del trabajo.

Definición 1.1.1 *Diremos que un cuadrilátero K (resp. un triángulo T) satisface la condición del ángulo máximo (maximum angle condition) con constante $\psi < \pi$, o simplemente $MAC(\psi)$, si los ángulos interiores de K (resp. T) son menores o iguales a ψ .*

Por ejemplo, la familia de cuadriláteros convexos \mathcal{J} cuyos vértices son $(0,0)$, $(1,0)$, (a,a) y $(0,1)$, donde $a \in (\frac{1}{2}, 1)$, no verifica $MAC(\psi)$ para ninguna constante $0 < \psi < \pi$. En efecto, al tomar valores de a suficientemente cerca de $\frac{1}{2}$ es fácil mostrar que el ángulo correspondiente al vértice (a,a) se encuentra tan cerca de π como se quiera (ver el Ejemplo 4.0.2 para más detalle). Mientras que la familia \mathcal{F} de cuadriláteros cuyos vértices son $(0,0)$, $(1,0)$, $(1-a,a)$ y $(0,a)$ con $a \in (0,1)$, sí posee la propiedad del ángulo máximo; más aún, los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero perteneciente a \mathcal{F} son constantes.

Como ya hemos señalado, las condiciones (1.1.1) y (1.1.2) impiden que una familia de cuadriláteros degeneren en un triángulo. No obstante, algunos resultados han sido obtenidos para algunas familias de este tipo. En lo que sigue trataremos de brindar un somero panorama al respecto.

Para comenzar, y siguiendo de cerca la definición dada por algunos autores, entre los cuales encontramos, por ejemplo, a Brenner y Scott [9]; diremos que una familia de elementos cuadriláteros \mathcal{T} es *no degenerada*, o que posee la *condición no degenerativa* (*non-degenerate condition*) si existe una constante positiva σ para la cual se verifique, cualquiera sea $K \in \mathcal{T}$,

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad (1.1.3)$$

donde ρ_K denota al supremo de los diámetros de las bolas contenidas en K . Cuando esto suceda, haciendo abuso del lenguaje, diremos que K es *no degenerado*.

En muchos textos la condición no degenerativa es también llamada *condición de regularidad* (*regularity condition*). Aunque para autores como Ciarlet y Raviart [11], es necesario un requerimiento extra. A saber, Ciarlet y Raviart establecen que una familia de elementos $\mathcal{T} = \{K\}$ es *regular* si cumple (1.1.3) y, además, los diámetros h_K tienden a cero (con el objeto de evitar introducir nuevas letras, K es visto aquí como un parámetro de la familia \mathcal{T}).

Dado que en la práctica dicho requerimiento extra es deseable y generalmente satisfecho, tal vez sea asumido implícitamente y esto explique la sutil diferencia en cuanto a las definiciones. Nosotros, habiendo dejado claro este punto, usaremos indistintamente los términos *no degenerado* y *regular*.

Notemos que para cuadriláteros convexos, (1.1.1) junto a (1.1.2) implican (1.1.3) (más aún, en [13] se establece que $\sigma = \mu_1(1 - \mu_2^2)^{-1/2}$ sirve). Sin embargo, la implicación recíproca no es necesariamente cierta; aún relajando la condición (1.1.2), tal como puede apreciarse si se considera la familia \mathcal{F} .

fijado un cuadrilátero, sus ángulos interiores son constantes y por lo tanto siempre se encuentran lejos de π . Sin embargo, hacer esto muchas veces complica la escritura y no es más que una cuestión semántica, por lo que haremos este abuso de lenguaje en repetidas ocasiones.

En este sentido podemos decir que la condición de regularidad es una condición más débil que (1.1.1) y (1.1.2).

Más aún, la condición de regularidad permite que una familia de cuadriláteros degeneren en un triángulo, por ejemplo, considérese la familia de cuadriláteros \mathcal{F} descrita anteriormente.

Básicamente, (1.1.3) establece que el diámetro de un cuadrilátero convexo K sea comparable al diámetro de la bola más grande contenida en él. Esto, en el plano geométrico, permite que la familia de cuadriláteros pueda degenerar en un triángulo pero impide que los elementos sean demasiado estrechos. En efecto, si un elemento es estrecho entonces su diámetro es considerablemente más largo que el diámetro de cualquier bola contenida en él. Para graficar este hecho, puede resultar útil considerar la familia de paralelogramos de vértices $(\cos(\alpha) - 1, -\sin(\alpha))$, $(1, 0)$, $(1 - \cos(\alpha), \sin(\alpha))$ y $(-1, 0)$, donde $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Recapitulando, la condición de regularidad es una condición geométrica más débil que la dada por Ciarlet y Raviart; por lo que resulta natural preguntarse si dicha condición resulta suficiente para obtener (0.0.3). La respuesta es positiva. Poco tiempo después de la publicación del trabajo de Ciarlet y Raviart, Jamet prueba en [13] que la estimación (0.0.3) es válida bajo la condición no degenerativa. Es decir, logra demostrar la estimación del error de interpolación para elementos cuadriláteros que pueden degenerar en triángulos.

Por otra parte, en [8] se prueba que para elementos triangulares, la condición del ángulo máximo resulta suficiente para (0.0.3) y también necesaria en cierto sentido. Este es uno de los primeros resultados sobre la estimación del error para *elementos anisotrópicos*, es decir, para elementos que no satisfacen (1.1.3).

Este tipo de resultados ha sido generalizado en diversas direcciones, incluyendo elementos de grados superiores, dimensiones más grandes y diferentes tipos de interpolaciones (sugerimos consultar [1, 5, 6, 7, 12, 15, 19] para más detalle).

1.2. Elementos cuadriláteros anisotrópicos.

Uno de los primeros resultados en cuanto a la estimación del error para elementos cuadriláteros anisotrópicos se debe a Zenisek y Vanmaele. Por ejemplo, en [22], estos autores prueban el teorema de interpolación para dos familias de cuadriláteros convexos, la primera corresponde, básicamente, a cuadriláteros cuyos lados más largos son opuestos y paralelos, y la longitud del lado más corto se encuentra acotada por $h_K/(2n)$ con $n \geq 6$. Mientras que la segunda familia comprende, a cuadriláteros cuyos lados más largos son opuestos, el par de lados más cortos tienen su longitud acotada por $h_K/(2n)$ con $n \geq 6$ y; denotando por l al lado más largo del cuadrilátero y por P, P' a los vértices de K no pertenecientes a l , la proporción entre las distancias $dist(P, l)/dist(P', l)$ se encuentra entre $1/2$ y 1 . En [21], las familias de cuadriláteros son similares a las del segundo tipo recién descrito, aunque algunos requerimientos son levemente mejorados.

Si bien las condiciones requeridas a estas familias de cuadriláteros pueden resultar bastante restrictivas, dan lugar a que la condición no degenerativa pueda no cumplirse, por lo que efectivamente constituye un resultado válido para elementos anisotrópicos.

Por otro lado, Apel muestra en [6] que para rectángulos, de lados paralelos a los ejes, vale la llamada *estimación anisotrópica* (también conocida como del *tipo Jamet* o *tipo Synge*) la cual

establece lo siguiente:

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left\{ h_1 \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla u \right\|_{L^2(K)} + h_2 \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla u \right\|_{L^2(K)} \right\}, \quad (1.2.1)$$

donde h_1 y h_2 denotan las medidas del elemento en las direcciones x_1 y x_2 , respectivamente.

Cabe señalar que esta estimación es más sutil que (0.0.3), considerando $p = 2$ obviamente, puesto que (0.0.3) sigue de inmediato de (1.2.1) ya que

$$h_1, h_2 \leq h_K \quad \text{y} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla u \right\|_{L^2(K)}, \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla u \right\|_{L^2(K)} \leq |u|_{H^2(K)}.$$

En el mismo trabajo, Apel muestra que la estimación anisotrópica también puede obtenerse para cierta clase de *elementos subparamétricos*. Concretamente, en el caso considerado por Apel, el término *subparamétrico* hace referencia a cuadriláteros que se obtienen desde el elemento de referencia mediante transformaciones que son el resultado de pequeñas perturbaciones de mapeos afines por funciones bilineales (esto implica que los elementos considerados son pequeñas perturbaciones de rectángulos). En general, el término *subparamétrico* es usado para dar cuenta que los elementos considerados son obtenidos a partir de un elemento de referencia mediante transformaciones que implican un subconjunto de las llamadas funciones forma (*shape functions*). Cuando la transformación, a partir del elemento de referencia, se construye usando todo el conjunto de las funciones forma (que generan mapeos invertibles) se utiliza el término *isoparamétrico*.

Respecto a elementos cuadriláteros anisotrópicos convexos generales, los resultados mencionados pueden considerarse como los más relevantes antes de los trabajos [2] y [4].

En estos trabajos se presentan condiciones geométricas bajo las cuales la estimación del error (0.0.3) es válida; y que resultan lo suficientemente laxas para que las familias de cuadriláteros mencionadas en nuestra reseña, y en la literatura previa, se encuentren contemplados. Dicho de otra forma, en [2] y [4] se presentan condiciones más débiles que las conocidas previamente bajo las cuales la estimación del error para la interpolación de Lagrange es válida considerando elementos cuadriláteros anisotrópicos convexos.

Como ya mencionamos, el objeto principal de este trabajo es presentar dichas condiciones. Sin embargo, antes de presentar las mismas, y teniendo en cuenta que la reducción a una familia de elementos de referencia es una herramienta clave en los trabajos [2] y [4], presentamos dicha configuración en la próxima sección al mismo tiempo que introducimos parcialmente la notación a usar.

Capítulo 2

Los elementos de referencia.

Parte de la técnica usada en [2] y [4] para probar la estimación del error, es reducir el estudio a una familia de elementos llamados *elementos de referencia*. En esta sección presentamos dichos elementos e introducimos parte de la notación que adoptaremos a lo largo del trabajo.

El tecnicismo de mostrar que, bajo ciertas condiciones, efectivamente es posible reducir el estudio a estas configuraciones particulares es el objeto de los próximos capítulos.

2.1. Definiciones y notaciones.

Para un cuadrilátero convexo general K , M_1 , M_2 , M_3 y M_4 , denotan sus vértices dispuestos en sentido antihorario. En particular, cuando un vértice de K se encuentre ubicado en el origen (suposición que podemos asumir siempre, puesto que es posible lograr esto a través de movimientos rígidos en el plano) usaremos M_1 para denotarlo.

Dados $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} > 0$, denotaremos por $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ al cuadrilátero convexo cuyos vértices son:

$$M_1 = (0, 0), \quad M_2 = (a, 0), \quad M_3 = (\tilde{a}, \tilde{b}) \quad \text{y} \quad M_4 = (0, b).$$

En particular, $\hat{K} = K(1, 1, 1, 1)$ es el cuadrado unitario de referencia y sus vértices son notados con \hat{M}_i , $1 \leq i \leq 4$.

La familia de estos cuadriláteros es la configuración de referencia a la que hacíamos mención y con la cual trabajaremos.

Usualmente usaremos la variable \hat{x} sobre \hat{K} y x sobre K ; y cuando no haya riesgo de confusión también usaremos $(x, y) \in K$ y $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{K}$.

Con motivo de definir los elementos isoparamétricos sobre K , consideramos la transformación $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ dada por

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=1}^4 M_i \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}),$$

donde, para cada i , $\hat{\phi}_i$ es la función bilineal básica asociada al vértice \hat{M}_i . Esto es

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = (1 - \hat{x})(1 - \hat{y}), \quad \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}(1 - \hat{y}), \quad \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y} \quad \text{y} \quad \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) = (1 - \hat{x})\hat{y}$$

ya que $\hat{\phi}_i(\hat{M}_j) = \delta_i^j$.

Las funciones básicas sobre K , en general no bilineales, están definidas por

$$\phi_i(x, y) = \hat{\phi}_i(F_K^{-1}(x, y));$$

y el operador de interpolación Q_1 -isoparamétrico Q sobre K está definido por

$$Qu(x, y) = \hat{Q}\hat{u}(\hat{x}, \hat{y})$$

donde $(x, y) = F_K(\hat{x}, \hat{y})$ y \hat{Q} es la interpolación bilineal de Lagrange de $\hat{u} = u \circ F_K$ sobre \hat{K} .

2.2. Comparación del error bajo mapeos afines.

Con el objeto de acotar el error de interpolación para un cuadrilátero K dado, construiremos oportunamente, una transformación afín L que aplique K en un elemento del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$. En el siguiente lema se establecen algunas condiciones sobre L , bajo las cuales es posible comparar el error en ambos elementos.

Lema 2.2.1 Sean K y \bar{K} dos elementos cuadriláteros, y sea $L : K \rightarrow \bar{K}$ una transformación afín $L(x) = Bx + p$. Asumamos que $L(K) = \bar{K}$, $\kappa(B) \leq C$ y $\det(B) = 1$, donde κ es el número de condición de B en la norma euclídea. Si \bar{Q} es la interpolación isoparamétrica sobre \bar{K} y $\bar{u} = u \circ L^{-1}$ entonces existen constante positivas C_1 y C_2 que dependen únicamente de C tal que para cualquier $p \geq 1$ valen

$$C_1|\bar{u} - \bar{Q}\bar{u}|_{W^{1,p}(\bar{K})} \leq |u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq C_2|\bar{u} - \bar{Q}\bar{u}|_{W^{1,p}(\bar{K})}$$

y,

$$C_1|\bar{u}|_{W^{2,p}(\bar{K})} \leq |u|_{W^{2,p}(K)} \leq C_2|\bar{u}|_{W^{2,p}(\bar{K})}.$$

Demostración. Por la definición de interpolación isoparamétrica tenemos

$$Qu(x) = \hat{Q}\hat{u}(F_K^{-1}(x)) \quad \text{y} \quad \bar{Q}\bar{u}(\bar{x}) = \hat{Q}\hat{u}(F_{\bar{K}}^{-1}(\bar{x})),$$

donde \bar{x} denota la variable sobre \bar{K} .

Dado que L es una transformación afín, no es difícil mostrar que

$$F_{\bar{K}} = L \circ F_K$$

y así

$$\bar{Q}\bar{u}(\bar{x}) = Qu(x).$$

Luego, el lema sigue planteando las integrales correspondientes y usando regla de la cadena junto a la fórmula de cambio de variables. \square

2.3. Descomposición del error.

Asumiendo que la transformación afín entre K y un elemento de referencia puede ser construída y verifica las condiciones requeridas en el Lema 2.2.1 (un hecho sobre el cual nos concentraremos en los Capítulos 4 y 5) podemos suponer que nuestro elemento K es, en realidad, del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ para ciertas constantes a, b, \tilde{a} y \tilde{b} .

Por otro lado, siguiendo parte de la técnica usada en [13] y [2], podemos descomponer el error en la siguiente forma:

$$|u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq |u - \Pi u|_{W^{1,p}(K)} + |\Pi u - Qu|_{W^{1,p}(K)}$$

donde Π es el P_1 -operador de interpolación de Lagrange asociado a los vértices $M_1 = (0, 0)$, $M_2 = (a, 0)$ y $M_4 = (0, b)$ (i.e., Πu es una función afín que coincide con u sobre estos tres vértices). Más aún, dado que $\Pi u - Qu$ pertenece al espacio de elementos finitos isoparamétricos y se anula en M_1, M_2 y M_4 , sigue que

$$(\Pi u - Qu)(x) = (\Pi u - u)(M_3)\phi_3(x)$$

(recordemos que ϕ_3 es la función básica correspondiente a M_3).

Por lo tanto,

$$|u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq |u - \Pi u|_{W^{1,p}(K)} + |(\Pi u - u)(M_3)| |\phi_3|_{W^{1,p}(K)} \quad (2.3.1)$$

y así, para obtener una estimación del error de interpolación, es suficiente estimar los dos términos del lado derecho.

Este hecho, junto a la construcción de la transformación afín L , es el eje central de los próximos cinco capítulos.

Capítulo 3

Cotas parciales de $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$.

En el apartado 2.3 vimos que para acotar el error de interpolación, basta (entre otras cosas) acotar $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$. Por este motivo dedicamos este capítulo a obtener algunas cotas parciales de este término.

Preferimos presentar estos resultados antes de introducir condición alguna sobre K , con el objeto de destacar que las estimaciones aquí obtenidas son válidas para un cuadrilátero convexo cualquiera.

3.1. Definición de I_p y dependencia de $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$ respecto a I_p .

Como ya hemos señalado previamente supondremos que el elemento K es del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$. Oportunamente justificaremos con rigurosidad tal suposición.

Por el momento, comencemos analizando el Jacobiano de la transformación $F_K : [0, 1]^2 = \hat{K} \rightarrow K$ definida por

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (a\hat{x}(1 - \hat{y}) + \tilde{a}\hat{x}\hat{y}, b\hat{y}(1 - \hat{x}) + \tilde{b}\hat{x}\hat{y}) = (x, y). \quad (3.1.1)$$

Tenemos

$$DF_K(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} a + \hat{y}(\tilde{a} - a) & \hat{x}(\tilde{a} - a) \\ \hat{y}(\tilde{b} - b) & b + \hat{x}(\tilde{b} - b) \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto,

$$J_K := \det DF_K(\hat{x}, \hat{y}) = ab(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1)). \quad (3.1.2)$$

Observemos que como K es convexo, se tiene $J_K > 0$ en el interior de \hat{K} . En efecto, dado que J_K es una función afín es suficiente verificar que es positiva en alguno de los vértices de \hat{K} y no negativa en el resto de los vértices. La positividad en $\hat{M}_1 = (0, 0)$ es trivial puesto que $J_K(0, 0) = ab > 0$, como lo son la no negatividad en \hat{M}_2 y \hat{M}_4 ya que $J_K(1, 0) = a\tilde{b} \geq 0$ y $J_K(0, 1) = \tilde{a}b \geq 0$.

Por otro lado, como K es convexo, (\tilde{a}, \tilde{b}) se encuentra por encima de la diagonal $\overline{M_2M_4}$ (i.e, por encima del segmento de recta $y = \frac{b}{a}(a - x)$). En consecuencia,

$$\tilde{b} \geq \frac{b}{a}(a - \tilde{a})$$

o, equivalentemente,

$$a\tilde{b} + b\tilde{a} - ab \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$J_K(1, 1) = ab(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1) \geq 0. \quad (3.1.3)$$

Por otro lado, dado que $\phi_3(x, y) = \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y}$ donde $(x, y) = F_K(\hat{x}, \hat{y})$, sigue que

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{y}} \\ &= \frac{\partial \phi_3}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) + \frac{\partial \phi_3}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) \\ &= \frac{\partial \phi_3}{\partial x}(F_K(\hat{x}, \hat{y}))(\hat{x}(\tilde{a} - a)) + \frac{\partial \phi_3}{\partial y}(F_K(\hat{x}, \hat{y}))(b + \hat{x}(\tilde{b} - b)) \\ &= \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y})(\hat{x}(\tilde{a} - a)) + \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y})(b + \hat{x}(\tilde{b} - b)) \end{aligned}$$

y, también

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}} \\ &= \frac{\partial \phi_3}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) + \frac{\partial \phi_3}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) \\ &= \frac{\partial \phi_3}{\partial x}(F_K(\hat{x}, \hat{y}))(a + \hat{y}(\tilde{a} - a)) + \frac{\partial \phi_3}{\partial y}(F_K(\hat{x}, \hat{y}))(\hat{y}(\tilde{b} - b)) \\ &= \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y})(a + \hat{y}(\tilde{a} - a)) + \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y})(\hat{y}(\tilde{b} - b)). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}(\tilde{a} - a) & b + \hat{x}(\tilde{b} - b) \\ a + \hat{y}(\tilde{a} - a) & \hat{y}(\tilde{b} - b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) \\ \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) \\ \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} = -\frac{1}{J_K(\hat{x}, \hat{y})} \begin{pmatrix} \hat{y}(\tilde{b} - b) & -b - \hat{x}(\tilde{b} - b) \\ -a - \hat{y}(\tilde{a} - a) & \hat{x}(\tilde{a} - a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

de donde siguen

$$\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) = b\hat{y}/J_K(\hat{x}, \hat{y})$$

y,

$$\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \circ F_K \right) (\hat{x}, \hat{y}) = a\hat{x}/J_K(\hat{x}, \hat{y}).$$

Por lo tanto, usando (3.1.2), y haciendo un cambio de variables, se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p &= \int_K \left| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right|^p dx dy \\ &= \int_{F_K(\hat{K})} \left| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right|^p dx dy \\ &= \int_{\hat{K}} \left| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \circ F_K \right|^p J_K(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{b\hat{y}^p}{a^{p-1}(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x} d\hat{y} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

y, de manera análoga,

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^p(K)}^p = \int_0^1 \int_0^1 \frac{a\hat{x}^p}{b^{p-1}(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x} d\hat{y}. \quad (3.1.5)$$

En consecuencia, llamando

$$I_p(a, b, \tilde{a}, \tilde{b}) := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x} d\hat{y} \quad (3.1.6)$$

tenemos

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{b}{a^{p-1}} I_p(a, b, \tilde{a}, \tilde{b}) \quad (3.1.7)$$

y,

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{a}{b^{p-1}} I_p(a, b, \tilde{a}, \tilde{b}). \quad (3.1.8)$$

3.2. Acotaciones parciales de I_p .

En consideración a (3.1.7) y (3.1.8), para controlar $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$ basta acotar $I_p(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ donde a, b, \tilde{a} y \tilde{b} son constantes positivas que satisfacen (3.1.3).

En el Lema 3.2.1 se logra esto para el caso $p = 2$. Como veremos en breve, el Lema 3.2.1 será re-demostrado en el Lema 3.2.2, a lo que cabe preguntarse acerca del interés por resaltar este caso particular.

Son varias las razones para destacar este caso; ya sea por la simplicidad de su prueba como por el rol que tuvo en la motivación de la teoría que estamos abordando. Una razón más profunda es

que acotar I_2 permite estimar, al menos parcialmente, $|\phi_3|_{W^{1,2}(K)} = |\phi_3|_{H^1(K)}$; y, oportunamente, mostraremos que tener acotado $|\phi_3|_{H^1(K)}$ permite obtener una cota de $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$ para p en cierto rango, a saber $1 \leq p < 2$.

Lema 3.2.1 Sean $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} > 0$ tales que $\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1 > 0$. Entonces la integral $I_2 = I_2(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ satisface:

$$(1) \text{ Si } \tilde{b}/b \leq 1 \text{ y } \tilde{a}/a \leq 1, \text{ entonces } I_2 \leq \frac{1}{\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1};$$

$$(2) \text{ Si } \tilde{b}/b \leq 1 \text{ y } \tilde{a}/a > 1, \text{ entonces } I_2 \leq \min \left\{ \frac{(\tilde{a}/a) \ln(\tilde{a}/a) + 1}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\};$$

$$(3) \text{ Si } \tilde{b}/b > 1 \text{ y } \tilde{a}/a \leq 1, \text{ entonces } I_2 \leq \min \left\{ \frac{(\tilde{b}/b) \ln(\tilde{b}/b) + 1}{(1 - \tilde{a}/a)(\tilde{b}/b - 1)}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\};$$

$$(4) \text{ Si } \tilde{b}/b \leq 1 \text{ y } \tilde{a}/a \leq 1, \text{ entonces } I_2 \leq 1$$

donde en (2) (resp. (3)) se entiende que el mínimo es b/\tilde{b} (resp. a/\tilde{a}) cuando $\tilde{b}/b = 1$ (resp. $\tilde{a}/a = 1$).

Demostración.

(1) Dado que $0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1$ y $\tilde{b}/b \leq 1, \tilde{a}/a \leq 1$ resulta

$$\frac{1}{1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1)} \leq \frac{1}{\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1)} d\hat{x}d\hat{y} \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1} d\hat{x}d\hat{y} = \frac{1}{\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1} \end{aligned}$$

y así (1) queda probado.

(2) Integrando respecto a la variable \hat{x} tenemos

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{1 - \tilde{b}/b} \int_0^1 \left\{ \ln(1 + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1)) - \ln(\tilde{b}/b + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1)) \right\} d\hat{y} \\
&= \frac{1}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)} \left\{ \int_1^{\tilde{a}/a} \ln(z) dz - \int_{\tilde{b}/b}^{\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1} \ln(z) dz \right\} \\
&= \frac{1}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)} \left\{ \frac{\tilde{a}}{a} \ln\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) - \frac{\tilde{a}}{a} + 1 + \int_{\tilde{b}/b}^{\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1} (-\ln(z)) dz \right\} \\
&\leq \frac{1}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)} \left\{ \frac{\tilde{a}}{a} \ln\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) + \int_{\tilde{b}/b}^{\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1} (-\ln(z)) dz \right\} \\
&\leq \frac{(\tilde{a}/a) \ln(\tilde{a}/a) + 1}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)},
\end{aligned}$$

donde, en la ante-última desigualdad, hemos usado que $1 - \tilde{a}/a < 0$; mientras que en la última desigualdad usamos

$$\int_{\tilde{b}/b}^{\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1} (-\ln(z)) dz \leq \int_0^1 (-\ln(z)) dz \leq 1$$

puesto que $\tilde{b}/b \leq 1$.

Por otro lado, dado que $\tilde{a}/a > 1$ e $0 \leq \hat{y} \leq 1$ resulta

$$1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1) \geq 1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1),$$

por lo que

$$I_2 \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1)} d\hat{x}d\hat{y} = \frac{\ln(\tilde{b}/b)}{\tilde{b}/b - 1}.$$

Usando ahora que $\tilde{b}/b \leq 1$ junto al hecho $\frac{t \ln(t)}{t-1} \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, en la última desigualdad obtenida, sigue que

$$I_2 \leq \frac{b}{\tilde{b}}.$$

Así termina la prueba de (2).

(3) Sigue de la parte (2) intercambiando los roles de a , \tilde{a} , y b , \tilde{b} , respectivamente.

(4) Bajo las hipótesis $\tilde{b}/b \leq 1$ y $\tilde{a}/a \leq 1$ sigue que

$$1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1) \geq 1$$

y entonces (4) se concluye inmediatamente. \square

Finalizamos este capítulo enunciando y probando el Lema 3.2.2, el cual sigue en la línea del lema previo y lo generaliza. Allí se presentan acotaciones de I_p para $2 \leq p < 3$.

Con motivo de simplificar la notación y hacer más legible dicho resultado, presentamos previamente la siguiente observación:

Observación 3.2.1 Para cualquier $2 < p < 3$, y $t > 0$ definimos

$$\eta_p(t) = \begin{cases} \frac{t^{3-p} - t}{(p-2)(1-t)} & \text{si } t > 0, t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}.$$

Notemos que, para cada $t \neq 1$, $\lim_{p \rightarrow 2} \eta_p(t) = \frac{t \ln(t)}{t-1}$ lo que justifica la definición

$$\eta_2(t) = \begin{cases} \frac{t \ln(t)}{t-1} & \text{si } t > 0, t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}.$$

Un cálculo simple muestra que η_p es una función creciente de t para cualquier $2 \leq p < 3$. Además,

$$0 \leq \eta_p(t) \leq \max\{1, t\}. \quad (3.2.1)$$

Lema 3.2.2 Sean $2 \leq p < 3$ y $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} > 0$ tales que $\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1 > 0$. Entonces, la integral $I_p = I_p(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ definida en (3.1.6) satisface

- (1) Si $\tilde{b}/b \leq 1$ y $\tilde{a}/a \leq 1$ entonces, $I_p \leq \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)^{p-1}}$;
- (2) Si $\tilde{b}/b \leq 1$ y $\tilde{a}/a > 1$ entonces, $I_p \leq \frac{1}{3-p} \min \left\{ \frac{\mu_p(\tilde{a}/a)}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\}$;
- (3) Si $\tilde{b}/b > 1$ y $\tilde{a}/a \leq 1$ entonces, $I_p \leq \frac{1}{3-p} \min \left\{ \frac{\mu_p(\tilde{b}/b)}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\}$;
- (4) Si $\tilde{b}/b > 1$ y $\tilde{a}/a > 1$ entonces, $I_p \leq 1$

donde en (2) se debe entender que el mínimo es b/\tilde{b} cuando $\tilde{b}/b = 1$ y análogamente en (3). Además,

$$\mu_p(t) = (t-1)\eta_p(t) + 1$$

con $t \geq 1$ y η_p definido en la Observación 3.2.1.

Demostración.

- (1) Dado que $\tilde{b}/b \leq 1$, $\tilde{a}/a \leq 1$; y $0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1$, sigue que

$$\frac{1}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} \leq \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)^{p-1}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} = \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)^{p-1}} \end{aligned}$$

y así (1) queda probado.

(2) Para $2 < p < 3$ un cálculo directo muestra que

$$I_p = \frac{1}{(3-p)(p-2)} \frac{1 + \left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right)^{3-p} - \left(\frac{\tilde{a}}{a}\right)^{3-p} - \left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)^{3-p}}{\left(\frac{\tilde{a}}{a} - 1\right) \left(1 - \frac{\tilde{b}}{b}\right)}. \quad (3.2.2)$$

Con motivo de acotar esta expresión definimos

$$II_p = \frac{1 + \left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right)^{3-p} - \left(\frac{\tilde{a}}{a}\right)^{3-p} - \left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)^{3-p}}{p-2} \quad (3.2.3)$$

notemos ahora que podemos re-escribir esto de la siguiente manera

$$II_p = \left(1 - \left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right)\right) \eta_p\left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right) + \left(\frac{\tilde{a}}{a} - 1\right) \eta_p\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) + \left(\frac{\tilde{b}}{b} - 1\right) \eta_p\left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)$$

donde η_p ha sido definida en la Observación 3.2.1.

Ahora, dado que $0 \leq \eta_p(t)$ y $\frac{\tilde{b}}{b} \leq 1$, sabemos que el último término de II_p es negativo, entonces

$$II_p \leq \left(1 - \left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right)\right) \eta_p\left(\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} - 1\right) + \left(\frac{\tilde{a}}{a} - 1\right) \eta_p\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right).$$

De (3.2.1) se deduce fácilmente que $(1-t)\eta_p(t) \leq 1$ para cualquier $t \geq 0$, y entonces

$$II_p \leq 1 + \left(\frac{\tilde{a}}{a} - 1\right) \eta_p\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) = \mu_p\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right).$$

Así, de (3.2.2), (3.2.3) y de la desigualdad previa se tiene

$$I_p = \frac{II_p}{(3-p)(\tilde{a}/a - 1)(1 - \tilde{b}/b)} \leq \frac{\mu_p(\tilde{a}/a)}{(3-p)(\tilde{a}/a - 1)(1 - \tilde{b}/b)}. \quad (3.2.4)$$

Por otro lado, dado que $\tilde{a}/a \geq 1$, $\tilde{b}/b \leq 1$, y $\eta(t) \leq 1$ para $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} I_p &\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1))^{p-1}} d\hat{x} d\hat{y} \\ &= \frac{\left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)^{2-p} - 1}{(2-p)\left(\frac{\tilde{b}}{b} - 1\right)} = \frac{b}{\tilde{b}} \eta_p\left(\frac{\tilde{b}}{b}\right) \leq \frac{b}{\tilde{b}}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Luego, para $2 < p < 3$, (2) sigue de (3.2.4) y (3.2.5) observando que $1 \leq \frac{1}{3-p}$.

El caso $p = 2$ sigue tomando $p \rightarrow 2$ en (3.2.4) y (3.2.5), obteniendo la misma cota que la dada en el Lema 3.2.1.

- (3) Sigue como en la parte (2) intercambiando los roles de a, \tilde{a} y b, \tilde{b} , respectivamente.
- (4) Bajo estas hipótesis sigue inmediatamente que $1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1) \geq 1$ y entonces (4) sigue fácilmente. \square

Hasta aquí hemos introducido cierta configuración de referencia y hemos hallado algunas cotas parciales basados en estos elementos particulares.

Los siguientes capítulos tienen por objeto no solo justificar y formalizar este enfoque, sino también introducir las condiciones geométricas sobre K necesarias para que la estimación del error de interpolación sea válida.

Capítulo 4

La propiedad de descomposición regular.

El objetivo de esta sección es introducir una condición sobre la geometría de K , que resulta suficiente para garantizar la estimación

$$|u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq Ch_K |u|_{W^{2,p}(K)} \quad (4.0.1)$$

al menos para p en cierto rango.

La condición a la cual nos referimos es la llamada propiedad de descomposición regular (*regular decomposition property*, o simplemente, *RDP*), dicha condición es introducida en [2] y usada allí para probar (4.0.1) cuando $p = 2$.

Por este motivo nos parece pertinente introducir dicha condición enfatizando la motivación del citado trabajo, y apelando al estudio de los ejemplos allí mencionados.

Dado que, al menos para $p = 2$, (4.0.1) vale uniformemente para cuadriláteros que degeneran en un triángulo “regular” (i.e. un triángulo para el cual se verifica la condición no degenerativa definida en el Capítulo 1), podríamos pensar que también resulta válida para cuadriláteros que degeneren en un triángulo que verifique la condición del ángulo máximo (también definida en el Capítulo 1).

Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que esto no es cierto.

Ejemplo 4.0.1 Sobre $K = K(1, a, a, a)$, con $0 < a < 1$, tomemos $u(x, y) = x^2$.

Comencemos señalando que a medida que a se va haciendo más chico, K tiende a un triángulo rectángulo que verifica la condición del ángulo máximo.

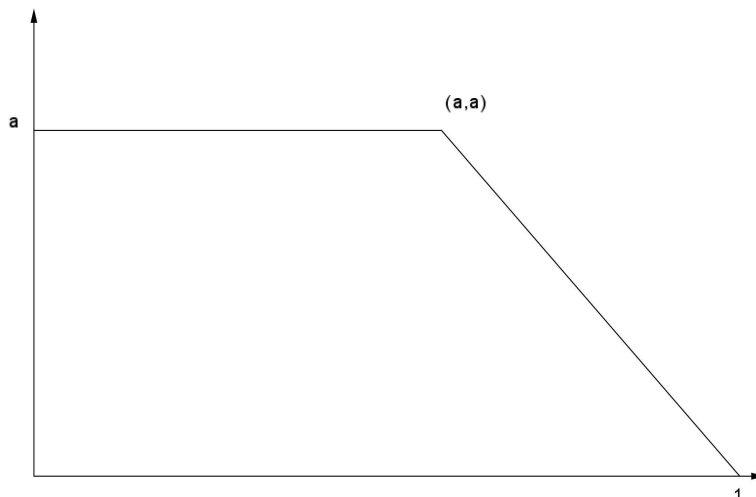


Figura: Representación del elemento $K(1, a, a, a)$.

No es difícil hallar una expresión explícita para la interpolación. En efecto, notemos que la aplicación $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ está dada por

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(\hat{y}(a-1) + 1), a\hat{y}) = (x, y) \quad (4.0.2)$$

y, en consecuencia,

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{y}) = (u \circ F_K)(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^2(\hat{y}(a-1) + 1)^2 .$$

Luego, como

$$\hat{u}(0,0) = 0, \quad \hat{u}(1,0) = 1, \quad \hat{u}(1,1) = a^2 \quad y \quad \hat{u}(0,1) = 0,$$

sigue que

$$\hat{Q}\hat{u}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}(1 - \hat{y}) + a^2\hat{x}\hat{y} . \quad (4.0.3)$$

Entonces, usando (4.0.2) y (4.0.3) junto a la definición de interpolación isoparamétrica, obtenemos

$$Qu(x, y) = \frac{x(1 + (a^2 - 1)y/a)}{1 + y(a-1)/a} .$$

Un cálculo de rutina muestra que, para a suficientemente chico,

$$\left\| \frac{\partial(u - Qu)}{\partial y} \right\|_{L^2(K)}^2 \geq C_1 a \ln(a^{-1}) . \quad (4.0.4)$$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial(u - Qu)}{\partial y} \right\|_{L^2(K)}^2 &= \left\| \frac{\partial Qu}{\partial y} \right\|_{L^2(K)}^2 \\
&= \int_K \frac{x^2(a-1)^2}{(1+y(a-1)/a)^4} dx dy \\
&\geq \int_a^1 \int_0^{\frac{a}{a-1}(x-1)} \frac{x^2(a-1)^2}{(1+y(a-1)/a)^4} dy dx \\
&= \frac{(1-a)}{3} \left[a \ln(a^{-1}) + \frac{a}{3}(a^3 - 1) \right]
\end{aligned}$$

y (4.0.4) sigue observando que, para a pequeño, el término dominante es $a \ln(a^{-1})$.

Ahora, dado que el diámetro de K es uno y

$$\|D^2u\|_{L^2(K)}^2 \leq C_2 a, \quad (4.0.5)$$

la estimación (4.0.1) no es válida para una constante independiente de a . En efecto, si (4.0.1) fuera válida, combinando (4.0.4) y (4.0.5) se tendría

$$C_1 a \ln(a^{-1}) \leq \left\| \frac{\partial(u - Qu)}{\partial y} \right\|_{L^2(K)}^2 \leq C \|D^2u\|_{L^2(K)}^2 \leq C C_2 a,$$

por lo que se concluye la acotación de $\ln(a^{-1})$, un hecho que es evidentemente falso.

Por otro lado, imponer la condición del ángulo máximo sobre los cuadriláteros puede resultar una hipótesis muy fuerte que excluye elementos que degeneran en triángulos regulares.

Una condición más débil podría ser dividir al elemento por una de sus diagonales en dos triángulos e imponer la condición del ángulo máximo a alguno de ellos. El Ejemplo 4.0.1 muestra que ésta no es condición suficiente para la validez de (4.0.1). De hecho, es sencillo verificar que luego de dividir al elemento $K(1, a, a, a)$ por la diagonal que conecta los vértices $(0, 0)$ y (a, a) , el triángulo T_1 de vértices $(0, 0)$, (a, a) y $(0, a)$, tiene todos sus ángulos fijos independientemente de a y obviamente éstos se encuentran acotados por $\pi/2$.

¿Qué sucede si imponemos la condición del ángulo máximo a ambos triángulos? Nuevamente, el mismo ejemplo muestra que ésta no es condición suficiente. En efecto, al dividir al elemento tal como se hizo antes, un simple análisis permite mostrar que T_1 satisface $MAC(\pi/2)$, mientras que el triángulo restante, T_2 , verifica $MAC(3\pi/4)$.

Observemos que en este ejemplo, la razón entre las diagonales no está acotada uniformemente en a , si en dicha razón se toma como denominador la medida de la diagonal por lo cual se dividió al elemento. En efecto, tenemos que dicha razón es

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2}a}$$

y es claro que la misma se hace tan grande como se quiera tomando a lo suficientemente pequeño.

Basados en estas consideraciones, se introduce la siguiente condición geométrica, la cual, como adelantamos, resulta suficiente para garantizar (4.0.1). Básicamente, se requiere que los dos triángulos obtenidos satisfagan la condición del ángulo máximo siempre que el elemento sea dividido por su diagonal más larga o por cualquiera de sus diagonales mientras éstas sean comparables. En otras palabras, la constante en la estimación del error no solo depende de los ángulos máximos de los triángulos sino también de la razón entre las diagonales. Esta condición es formalizada en la siguiente definición.

Definición 4.0.1 *Sea K un cuadrilátero convexo. Diremos que K satisface la propiedad de descomposición regular (regular decomposition property) con constantes $N \in \mathbb{R}$ y $0 < \psi < \pi$, o simplemente $RDP(N, \psi)$, si podemos dividir K en dos triángulos a lo largo de una de sus diagonales, a la cual llamaremos siempre d_1 , de forma que $|d_2|/|d_1| \leq N$ (donde d_2 denota la diagonal restante) y ambos triángulos satisfagan $MAC(\psi)$.*

Observación 4.0.2 *Si un cuadrilátero K satisface $MAC(\psi)$, entonces también satisface $RDP(1, \psi)$. De hecho, esto es fácilmente verificable dividiendo a K por la diagonal más larga.*

Por otro lado la recíproca no es cierta, como puede observarse considerando el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.0.2 *Sea $K = K(1, 1, a, a)$ con $\frac{1}{2} < a < 1$.*

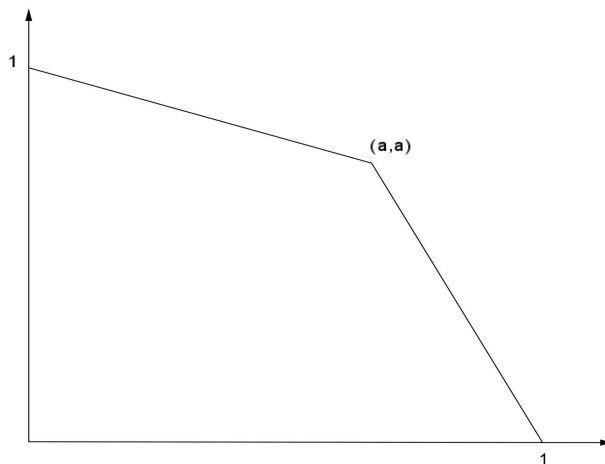


Figura: Representación del elemento $K(1, 1, a, a)$.

Al dividir K por la diagonal d_1 que une $(0,0)$ y (a,a) , no es difícil verificar que K satisface $RDP(2, 3\pi/4)$. Por otro lado, es claro que el ángulo correspondiente al vértice (a,a) tiende a π cuando a tiende a $1/2$, por lo que K no verifica la condición del ángulo máximo.

Muchas han sido las condiciones introducidas en la literatura para poder garantizar (4.0.1) al menos cuando $p = 2$; sin embargo, la propiedad de descomposición regular es la más débil hasta ahora conocida, en el sentido que ésta abarca muchos de los casos considerados por otros autores.

Las siguientes observaciones tienen por objeto remarcar este hecho.

Observación 4.0.3 *Sea K un cuadrilátero convexo que satisface la regularidad pedida por Jamet (1.1.3); entonces K satisface $RDP(\sigma, \psi)$, con $\psi = \psi(\sigma) < \pi$.*

En efecto, los ángulos de K están acotados inferiormente por una constante positiva $\delta(\sigma)$ (ver [13]), y por lo tanto, hay a lo sumo un ángulo de K que no está acotado superiormente por $\pi - \delta(\sigma)$. Luego, dividiendo K por la diagonal que contiene al vértice correspondiente a este ángulo sigue fácilmente que K satisface $RDP(\sigma, \pi - \delta(\sigma))$.

Observación 4.0.4 *No es difícil chequear que si K satisface las hipótesis dadas en [21, 22], entonces K satisface $MAC(\psi)$ para cierta $\psi < \pi$ cuando K degenera en el sentido $h/\rho \rightarrow \infty$ (que es el caso de interés porque de otra manera caemos en el caso de la observación previa). Entonces, por la Observación 4.0.2, K satisface $RDP(1, \psi)$.*

Observación 4.0.5 *El caso de elementos anisotrópicos (i.e., elementos con diferentes tamaños en cada dirección) también ha sido considerado en [5]. Dado que los elementos considerados allí son pequeñas perturbaciones de rectángulos, no es difícil ver que satisfacen $MAC(\psi)$ y en consecuencia $RDP(1, \psi)$.*

Finalmente, uno puede preguntarse si la propiedad de descomposición regular es ciertamente una hipótesis más débil que aquellas usadas antes por los autores hasta aquí citados.

La respuesta es positiva como mostramos apelando al último ejemplo de esta sección.

Ejemplo 4.0.3 *Sea $K = (1, a, a^2, a + a^2)$ con $0 < a < \frac{1}{2}$.*

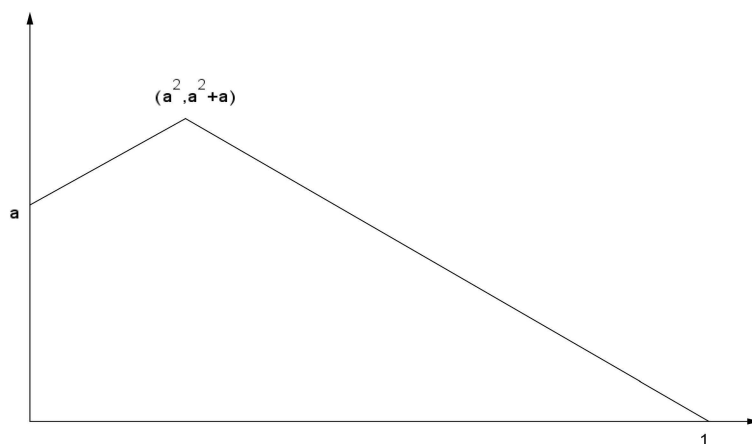


Figura: Representación del elemento $K(1, a, a^2, a^2 + a)$.

Una simple verificación muestra que la condición de regularidad no vale con σ independiente de a . Por otro lado, para a pequeño, los lados más largos de K no son opuestos como es asumido en [21, 22].

Tampoco es difícil ver que K no es una perturbación de un rectángulo como es requerido en [5].

Sin embargo, la diagonal más larga de K ; aquella que une los vértices $(0, a)$ y $(1, 0)$, divide al elemento en dos triángulos que satisfacen $MAC(\psi)$ con una constante $\psi < \pi$ independiente de a y así K verifica $RDP(1, \psi)$.

4.1. Implicaciones de la RDP .

Como mencionamos en el Capítulo 2, la estimación del error en H^1 para una familia de elementos $\{K\}$ que verifican la $RDP(N, \psi)$ se maneja vía la construcción de una transformación afín $L(\bar{x}) = B\bar{x} + P$ y una familia de elementos de referencia $\{K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})\}$ de modo tal que $L(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) = K$.

En esta sección recopilamos dichos resultados, siguiendo básicamente el esquema de [2], y extendemos los mismos a $W^{1,p}$ para ciertos valores de p tal como en [4].

4.1.1. Reducción a la configuración de referencia.

Comenzamos enunciando los siguientes lemas técnicos:

Lema 4.1.1 *Sea K un cuadrilátero que satisface $RDP(N, \psi)$. Entonces se tiene*

- (1) *Si β es cualquiera de los ángulos de K opuestos a d_1 , entonces existe $\delta = \delta(N, \psi)$ independiente de β tal que*

$$0 < \delta \leq \beta \tag{4.1.1}$$

y

- (2) *Si ℓ es el lado más corto de K y α es el ángulo entre ℓ y d_1 , entonces*

$$(\pi - \psi)/2 \leq \alpha. \tag{4.1.2}$$

Demostración.

- (1) Sean T_1 y T_2 los dos triángulos que se obtienen luego de dividir a K por la diagonal d_1 . Entonces T_1 y T_2 satisfacen $MAC(\psi)$ y $|d_2|/|d_1| \leq N$. Asumamos, eligiendo la notación adecuadamente, que β es un ángulo de T_2 y llamemos γ_1 y γ_2 a los otros dos ángulos de dicho triángulo.

Si β no es el mínimo ángulo de T_2 , entonces $\gamma_1 < \beta$ o $\gamma_2 < \beta$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $\gamma_1 < \beta$. Luego

$$\pi = \gamma_1 + \gamma_2 + \beta < 2\beta + \gamma_2 \leq 2\beta + \psi$$

ya que T_2 verifica $MAC(\psi)$. En consecuencia

$$\frac{\pi - \psi}{2} \leq \beta$$

y así (4.1.1) vale tomando $\delta = \frac{\pi - \psi}{2}$.

Asumamos ahora que β es el ángulo mínimo de T_2 . Luego, dado que T_2 verifica $MAC(\psi)$, tenemos (por el mismo argumento expuesto arriba)

$$\gamma_i \geq \frac{\pi - \psi}{2} \quad i = 1, 2.$$

La diagonal d_2 divide a T_2 en dos triángulos \tilde{T}_2 y \bar{T}_2 , a β en dos ángulos β_1 y β_2 ; y a d_1 en \tilde{d}_1 y \bar{d}_1 . Elegimos la notación de modo que $|\tilde{d}_1| \geq |d_1|/2$ y \tilde{T}_2 tenga a \tilde{d}_1 como uno de sus lados y a β_1 y γ_1 como dos de sus ángulos. Entonces si llamamos \tilde{d}_2 al lado de \tilde{T}_2 opuesto a γ_1 se tiene

$$\beta \geq \beta_1 \geq \text{sen}(\beta_1) \geq \frac{|\tilde{d}_1|}{|\tilde{d}_2|} \text{sen}(\gamma_1) \geq \frac{1}{2} \frac{|d_1|}{|d_2|} \text{sen}(\gamma_1) \geq \frac{1}{2N} \text{sen}(\gamma_1),$$

(donde la segunda desigualdad vale en general pues $x \geq \text{sen}(x) \quad \forall x \geq 0$, la tercera desigualdad es en realidad una igualdad gracias al conocido teorema del seno para triángulos, la cuarta desigualdad es inmediata de la construcción y la última desigualdad es a causa de la $RDP(N, \psi)$ como se señala al comienzo de la prueba).

Finalmente, dado que

$$\frac{\pi - \psi}{2} \leq \gamma_1 \leq \psi$$

sigue que

$$\text{sen}(\gamma_1) \geq \text{mín} \left\{ \text{sen} \left(\frac{\pi - \psi}{2} \right), \text{sen}(\psi) \right\}$$

y así (4.1.1) vale considerando

$$\delta = \frac{1}{2N} \text{mín} \left\{ \text{sen} \left(\frac{\pi - \psi}{2} \right), \text{sen}(\psi) \right\}.$$

- (2) Asumamos, sin pérdida de generalidad, que ℓ es uno de los lados de T_1 . Para probar (4.1.2) basta (por un argumento usado en la parte anterior de este lema) observar que α no es el ángulo mínimo de T_1 . Pero esto es inmediato ya que α es el ángulo adyacente al lado más corto, el cual es ℓ o d_1 . \square

En el siguiente lema se enuncia un resultado concerniente al cambio de un ángulo luego de una transformación lineal. Aunque la demostración es elemental, y puede encontrarse en [1], la incluimos aquí con el afán de dar un panorama lo más completo posible.

Lema 4.1.2 Sea L la transformación lineal asociada a una matriz B . Dados dos vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 , sea α el ángulo entre ellos y sea $\bar{\alpha}$ el ángulo entre $L(\mathbf{v}_1)$ y $L(\mathbf{v}_2)$. Entonces, si $\kappa(B)$ denota al número de condición de B en la norma euclídea, se tiene

$$\frac{2}{\pi\kappa(B)}\alpha \leq \bar{\alpha} \leq \pi \left(1 - \frac{2}{\pi\kappa(B)}\right) + \frac{2}{\pi\kappa(B)}\alpha. \quad (4.1.3)$$

Demostración. Sea $t = \frac{\langle B\mathbf{v}_1, B\mathbf{v}_2 \rangle}{\|B\mathbf{v}_2\|^2} = \frac{\|B\mathbf{v}_1\| \cos(\bar{\alpha})}{\|B\mathbf{v}_2\|}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\|B(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2)\|^2}{\|B\mathbf{v}_1\|^2} &= \frac{\langle B\mathbf{v}_1 - tB\mathbf{v}_2, B\mathbf{v}_1 - tB\mathbf{v}_2 \rangle}{\|B\mathbf{v}_1\|^2} \\ &= \frac{\langle B\mathbf{v}_1, B\mathbf{v}_1 \rangle - 2t \langle B\mathbf{v}_1, B\mathbf{v}_2 \rangle + t^2 \langle B\mathbf{v}_2, B\mathbf{v}_2 \rangle}{\|B\mathbf{v}_1\|^2} \\ &= \frac{\|B\mathbf{v}_1\|^2 - 2t \|B\mathbf{v}_1\| \|B\mathbf{v}_2\| \cos(\bar{\alpha}) + t^2 \|B\mathbf{v}_2\|^2}{\|B\mathbf{v}_1\|^2} \\ &= \frac{\|B\mathbf{v}_1\|^2 - \|B\mathbf{v}_1\|^2 \cos^2(\bar{\alpha})}{\|B\mathbf{v}_1\|^2} \\ &= \sin^2(\bar{\alpha}) \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\sin(\bar{\alpha}) = \frac{\|B(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2)\|}{\|B\mathbf{v}_1\|}. \quad (4.1.4)$$

Por otro lado, notemos que

$$\|B\mathbf{v}_1\| \leq \|B\| \|\mathbf{v}_1\|$$

de donde sigue

$$\frac{1}{\|B\mathbf{v}_1\|} \geq \frac{1}{\|B\| \|\mathbf{v}_1\|}. \quad (4.1.5)$$

Similarmente tenemos

$$\|\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2\| = \|B^{-1}B(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2)\| \leq \|B^{-1}\| \|B(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2)\|,$$

y, en consecuencia,

$$\|B(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2)\| \geq \frac{\|\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2\|}{\|B^{-1}\|} \quad (4.1.6)$$

Combinando ahora (4.1.5) y (4.1.6) podemos escribir (4.1.4) como sigue

$$\sin(\bar{\alpha}) = \frac{\|B(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2)\|}{\|B\mathbf{v}_1\|} \geq \frac{\|\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2\|}{\|B^{-1}\|} \frac{1}{\|B\| \|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\kappa(B)} \frac{\|\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2\|}{\|\mathbf{v}_1\|}. \quad (4.1.7)$$

Usando ahora el hecho

$$\sin(\alpha) = \min_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2\|}{\|\mathbf{v}_1\|}$$

y, combinándolo con (4.1.7), tenemos

$$\operatorname{sen} \bar{\alpha} \geq \frac{1}{\kappa(B)} \operatorname{sen}(\alpha) .$$

En consecuencia

$$\bar{\alpha} \geq \frac{2}{\pi \kappa(B)} \alpha . \quad (4.1.8)$$

En efecto, para $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, (4.1.8) sigue de la desigualdad previa en conjunción con los siguientes dos hechos básicos:

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha}, \quad \operatorname{sen}(\bar{\alpha}) \leq \bar{\alpha} .$$

Para $\alpha \geq \pi/2$ dividimos al ángulo en dos mitades y aplicamos el argumento a cada una de éstas.

Por otro lado, aplicando (4.1.8) al ángulo complementario $\pi - \alpha$ obtenemos

$$\bar{\alpha} \leq \left(1 - \frac{2}{\pi \kappa(B)}\right) \pi + \frac{2}{\pi \kappa(B)} \alpha \quad (4.1.9)$$

lo que termina el argumento. \square

Lema 4.1.3 *Sea K un cuadrilátero convexo que verifica la $RDP(N, \psi)$. Entonces, existe una transformación afín $L(\bar{x}) = B\bar{x} + P$, un cuadrilátero convexo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ y constantes positivas $C = C(\psi, N)$, $\bar{N} = \bar{N}(\psi, N)$, $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\psi, N)$ y $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\psi, N) < \pi$ tales que*

- (a) $L(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) = K$;
- (b) $\det(B) = 1$, $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$. En particular, $\kappa(B) \leq C^2$;
- (c) Los diámetros de ambos elementos son comparables, i.e.,

$$C^{-1} \operatorname{diam}(K) \leq \operatorname{diam}(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) \leq C \operatorname{diam}(K);$$

- (d) $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$, satisface $RDP(\bar{\psi}, \bar{N})$ tomando $\bar{d}_1 = L^{-1}(d_1)$ como la diagonal por la cual dividir;
- (e) La longitud del lado más corto de K , ℓ , es comparable a la longitud del lado más corto, \bar{s} , de $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$. Más aún,

$$|\bar{s}| \leq |\ell| \leq C^2 |\bar{s}|;$$

- (f) Sea $\bar{\alpha}$ el ángulo comprendido entre \bar{d}_1 y $\bar{\ell}_{34}$, siendo éste último el segmento que une los vértices \bar{M}_3 y \bar{M}_4 de $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$. Entonces $\bar{\alpha}$ está acotado lejos de 0 y π , más aún,

$$0 < \bar{\delta} < \bar{\alpha} < \bar{\psi} < \pi .$$

Demostración. Construiremos $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ y L explícitamente. Dado que K satisface $RDP(N, \psi)$ podemos dividirlo a lo largo de d_1 en dos triángulos T_1 y T_2 , los cuáles tienen todos sus ángulos acotados por ψ . Elegimos la notación de forma tal que el lado más corto ℓ de K sea uno de los lados de T_1 .

Llamaremos β al ángulo de T_2 opuesto a d_1 . De ser necesario, luego de un movimiento rígido en el plano podemos asumir que el vértice correspondiente a β está ubicado en el origen y lo llamaremos M_1 . Numeramos, en sentido antihorario, los otros vértices denotándolos por M_2 , M_3 y M_4 respectivamente. Podemos asumir también que el lado opuesto a ℓ se encuentra sobre el eje x y llamaremos a a la longitud de este lado de manera que el vértice M_2 se encuentre ubicado en $(a, 0)$.

Sea ℓ_{14} el lado con vértices en M_1 y M_4 y definamos $b = |\ell_{14}| \operatorname{sen}(\beta)$. Entonces, tenemos que M_4 está ubicado en $(b \operatorname{cotg}(\beta), b)$ (ver Figura).

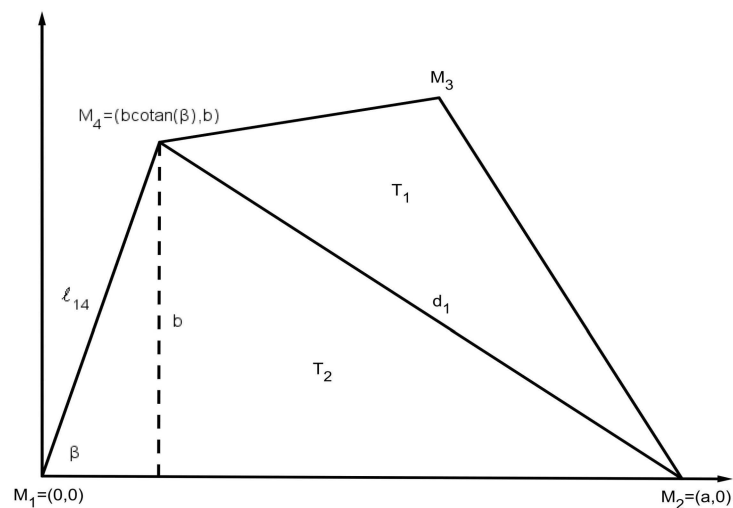


Figura: representación de la notación usada sobre K .

Definimos L como la transformación lineal asociada a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{cotg}(\beta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y elegimos las constantes \tilde{a} y \tilde{b} de modo que $L(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) = K$. De hecho, si $M_3 = (M_3^1, M_3^2)$ basta tomar

$$\tilde{a} = M_3^1 - M_3^2 \operatorname{cotg}(\beta) \quad \text{y} \quad \tilde{b} = M_3^2.$$

Estamos ahora en condiciones de demostrar las cinco últimas propiedades establecidas en el lema, puesto que (a) ya ha sido satisfecha por construcción de L .

(b) Notemos que si $\|(x, y)\| = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|B(x, y)^t\|^2 &= \|(x + y \cotg(\beta), y)\|^2 \\
&= \frac{x^2 \operatorname{sen}^2(\beta) + 2xy \operatorname{sen}(\beta) + y^2}{\operatorname{sen}^2(\beta)} \\
&\leq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{\operatorname{sen}^2(\beta)} \\
&\leq \frac{2(x^2 + y^2)}{\operatorname{sen}^2(\beta)} \\
&= \frac{2}{\operatorname{sen}^2(\beta)}
\end{aligned}$$

(donde en la ante-última línea hemos hecho uso de la conocida desigualdad $2xy \leq x^2 + y^2$.)
Luego, $\|B(x, y)^t\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(\beta)}$ para todo vector (x, y) de norma 1; por lo tanto,

$$\|B\| = \sup_{\|X\|=1} \|BX^t\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(\beta)}.$$

Notemos también que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\cotg(\beta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que, de manera completamente análoga a lo ya hecho, puede tenerse la estimación

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(\beta)}.$$

Finalmente, dado que K satisface $RDP(N, \psi)$ tenemos que $\beta \leq \psi$ y también (de la parte (1) del Lema 4.1.1) sabemos que existe δ que verifica $0 < \delta = \delta(N, \psi) \leq \beta$.

Luego, $\min\{\operatorname{sen}(\delta), \operatorname{sen}(\psi)\} \leq \operatorname{sen}(\beta)$ y, en consecuencia,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\beta)} \leq \frac{1}{\min\{\operatorname{sen}(\delta), \operatorname{sen}(\psi)\}}$$

de donde sigue

$$\|B\|, \|B^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\min\{\operatorname{sen}(\delta), \operatorname{sen}(\psi)\}}.$$

Por lo tanto, la propiedad (b) vale con $C = \sqrt{2}/\min\{\operatorname{sen}(\delta), \operatorname{sen}(\psi)\}$. El hecho que $\det(B) = 1$ es inmediato.

(c) Sigue inmediatamente de las propiedades (a) y (b). En efecto,

$$\begin{aligned}
diam(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) &= \sup_{\bar{k}_1, \bar{k}_2 \in K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})} \|\bar{k}_1 - \bar{k}_2\| \\
&= \sup_{k_1, k_2 \in K} \|B^{-1}k_1 - B^{-1}k_2\| \\
&= \sup_{k_1, k_2 \in K} \|B^{-1}(k_1 - k_2)\| \\
&\leq \sup_{k_1, k_2 \in K} \|B^{-1}\| \|k_1 - k_2\| \\
&= \|B^{-1}\| \sup_{k_1, k_2 \in K} \|k_1 - k_2\| \\
&\leq C \, diam(K).
\end{aligned}$$

De manera, completamente análoga se ve que

$$diam(K) \leq C \, diam(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b}))$$

y, en consecuencia,

$$C^{-1} \, diam(K) \leq diam(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) \leq C \, diam(K)$$

como se quería mostrar.

(d) Sean $\bar{d}_i = L^{-1}(d_i)$, $i = 1, 2$.

Notemos que $|d_1| = |BB^{-1}d_1| \leq \|B\| \|B^{-1}d_1\| \leq C \|B^{-1}d_1\|$ de donde sigue

$$\frac{1}{\|B^{-1}d_1\|} \leq \frac{C}{|d_1|}.$$

Luego,

$$\frac{|\bar{d}_2|}{|\bar{d}_1|} = \frac{\|B^{-1}d_2\|}{\|B^{-1}d_1\|} \leq \frac{C}{|d_1|} \|B^{-1}d_2\| \leq \frac{C}{|d_1|} \|B^{-1}\| |d_2| \leq C^2 \frac{|d_2|}{|d_1|}.$$

Ahora, como K verifica $RDP(N, \psi)$, tenemos $|d_2|/|d_1| \leq N$ y por lo tanto

$$\frac{|\bar{d}_2|}{|\bar{d}_1|} \leq C^2 N,$$

quedando así justificada la elección $\bar{N} = C^2 N$.

Por otro lado, en virtud del Lema 4.1.2, los ángulos de los triángulos obtenidos al dividir $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ a lo largo de \bar{d}_1 están acotados por $\pi(1 - 2/\pi\kappa(B)) + (2/\pi\kappa(B))\psi$, y en consecuencia la propiedad (d) se sigue de la propiedad (b).

(e) Sea ℓ el lado más corto de K , $\bar{\ell} = L^{-1}(\ell)$ y sea $\bar{s} = L^{-1}(s)$ el lado más corto de $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$. Entonces

$$|\bar{s}| \leq |\bar{\ell}| \leq \|B^{-1}\| |\ell| \leq \|B^{-1}\| |s| \leq \|B^{-1}\| \|B\| |\bar{s}|,$$

y en consecuencia la propiedad (e) sigue de la propiedad (b) trivialmente.

(f) Por el Lema 4.1.2 tenemos

$$\frac{2}{\pi\kappa(B)}\alpha \leq \bar{\alpha} \leq \pi \left(1 - \frac{2}{\pi\kappa(B)}\right) + \frac{2}{\pi\kappa(B)}\alpha. \quad (4.1.10)$$

Usando ahora la parte (2) del Lema 4.1.1 junto a la propiedad (b) se tiene

$$\frac{2}{\pi\kappa(B)}\alpha \geq \frac{2}{\pi\kappa(B)} \frac{\pi - \psi}{2} = \frac{\pi - \psi}{\pi\kappa(B)} \geq \frac{\pi - \psi}{\pi C^2}, \quad (4.1.11)$$

y, por otro lado, dado que $\alpha \leq \psi < \pi$ resulta que

$$\pi \left(1 - \frac{2}{\pi\kappa(B)}\right) + \frac{2}{\pi\kappa(B)}\alpha \leq \pi \left(1 - \frac{2}{\pi\kappa(B)}\right) + \frac{2}{\pi\kappa(B)}\psi < \pi. \quad (4.1.12)$$

Luego, combinando (4.1.11) y (4.1.12), (4.1.10) puede ser escrito como

$$\frac{\pi - \psi}{\pi C^2} \leq \bar{\alpha} \leq \pi \left(1 - \frac{2}{\pi\kappa(B)}\right) + \frac{2}{\pi\kappa(B)}\psi$$

y así se tiene la propiedad (f) del lema tomando

$$\bar{\delta} = \frac{\pi - \psi}{\pi C^2} \quad \text{y} \quad \bar{\psi} = \pi \left(1 - \frac{2}{\pi\kappa(B)}\right) + \frac{2}{\pi\kappa(B)}\psi. \quad \square$$

Observación 4.1.1 *En virtud del lema precedente, y del lema 2.2.1, cada vez que trabajemos con un cuadrilátero convexo K satisfaciendo la RDP(N, ψ) asumiremos que es del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$.*

Más aún, asumiremos la existencia de constantes positivas $N_1 = N_1(\psi, N)$, $N_2 = N_2(\psi, N)$, $N_3 = N_3(\psi, N)$ y $\bar{\psi} < \pi$ tales que:

(H1) $\frac{|d_2|}{|d_1|} \leq N_1;$

(H2) $\frac{1}{\sin(\alpha)} \leq N_2$, donde α denota al ángulo comprendido entre d_1 y el lado $\ell = \ell_{34}$ que une los vértices M_3 y M_4 de K ;

(H3) $|\ell| \leq N_3|s|$, donde s es el lado más corto de K ;

(H4) $\theta \leq \bar{\psi}$, para todo ángulo interior θ de T_1 y T_2 .

En efecto, (H1) y (H4) siguen inmediatamente del ítem (d) del Lema 4.1.3, (H2) sigue del ítem (f), y (H3) del ítem (e) del mismo lema.

Observación 4.1.2 Con el objeto de simplificar la lectura y no sobrecargar el texto, de ahora en adelante usaremos la notación similar a la usada en los lemas y observación previos. Esto es, dado un cuadrilátero convexo $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$:

- (1) M_i , $1 \leq i \leq 4$, denotarán los vértices de K ; ℓ_{ij} denotará al lado de K que conecta los vértices M_i y M_j . En particular, usaremos $\ell = \ell_{34}$.
- (2) s denotará al lado más corto de K (dado que s y ℓ resultan comparables, podemos asumir cuando fuera necesario, que el lado más corto de K es ℓ).
- (3) α será el ángulo comprendido entre la diagonal d_1 y el lado ℓ_{34} , siendo d_1 la diagonal por la cual dividir a K en dos triángulos T_1 y T_2 cuando K verifique RDP (T_2 siempre tendrá a $M_1 = (0, 0)$ como uno de sus vértices).
- (4) $h = h_K = \text{diam}(K)$.

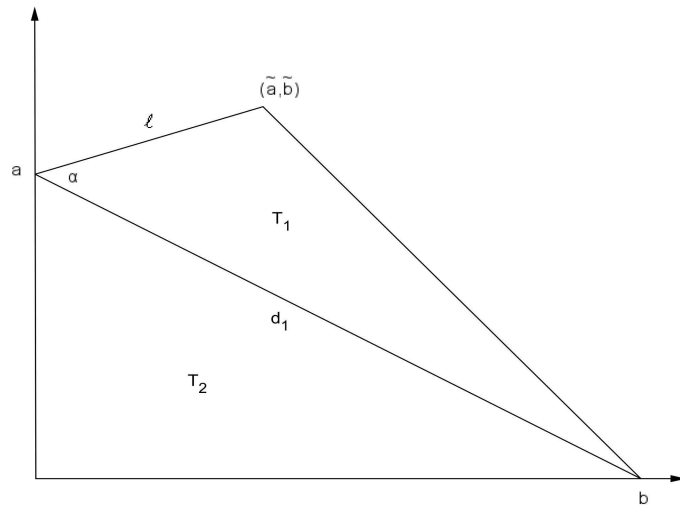


Figura: representación de la notación usada sobre K .

Algunas cotas útiles pueden ser obtenidas a partir de (H1), (H2), (H3) y (H4), y las resumimos en los siguientes lemas:

Lema 4.1.4 Sea $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ un cuadrilátero satisfaciendo (H1), (H2), (H3) y (H4), entonces

$$\tilde{a}/a \leq N_3 < N_4 \quad y \quad \tilde{b}/b \leq N_4 \quad (4.1.13)$$

donde $N_4 = N_3 + 1$. Además,

$$h \leq N_3(1 + N_1)|d_1| \quad (4.1.14)$$

y,

$$\frac{|K|}{|T_2|} \leq N_5, \quad (4.1.15)$$

donde $N_5 = 2N_4 + 1$.

Demostración. Es claro que $\tilde{a} \leq \ell$ y $|\tilde{b} - b| \leq \ell$, entonces

$$\frac{\tilde{a}}{a} \leq \frac{|\ell|}{a} \leq \frac{|\ell|}{|s|} \quad y \quad \frac{\tilde{b}}{b} - 1 \leq \frac{|\tilde{b} - b|}{b} \leq \frac{|\ell|}{b} \leq \frac{|\ell|}{|s|},$$

y así (4.1.13) sigue de (H3).

Con motivo de probar (4.1.14), observemos que si h es la longitud de una de las diagonales, entonces, sigue de (H1) que

$$h \leq \max\{1, N_1\}|d_1| \leq (1 + N_1)|d_1|$$

y así (4.1.14) vale porque $N_3 \geq 1$.

En otro caso, h concuerda con alguno de los lados de K , y entonces $h = |\ell|$ o $h = |\ell_{23}|$ porque las longitudes de los otros dos lados están acotadas por $|d_1|$.

Ahora, en virtud de (H3), es suficiente ver que $|\ell_{23}| \leq (1 + N_1)|d_1|$.

De la desigualdad triangular aplicada al triángulo de vértices M_1, M_2, M_3 , junto a (H1), tenemos

$$|\ell_{23}| \leq a + |d_2| \leq |d_1| + |d_2| \leq (1 + N_1)|d_1|$$

y por lo tanto (4.1.14) vale.

Resta probar (4.1.15). Para esto comencemos notando que la medida de T_1 es la mitad de la medida del paralelogramo determinado por los vectores $(\tilde{a}, \tilde{b} - b)$ y $(a, -b)$, es decir,

$$|T_1| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \tilde{a} & a \\ \tilde{b} - b & -b \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} | -\tilde{a}b - a\tilde{b} + ab | = \tilde{a}b + a\tilde{b} - ab \quad (4.1.16)$$

(para la última igualdad hemos usado (3.1.3)).

Luego, usando que $|T_2| = \frac{1}{2}ab$ junto a (4.1.16), tenemos

$$\frac{|K|}{|T_2|} = \frac{|T_1| + |T_2|}{|T_2|} = \frac{|T_1|}{|T_2|} + 1 = \frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b}$$

y finalmente, (4.1.15) sigue fácilmente de (4.1.13). \square

Con motivo de simplificar la notación introducimos, para el siguiente lema, la constante

$$N_6 = \max \left\{ N_2, 1/\text{sen} \left(\frac{\pi + \bar{\psi}}{2} \right) \right\}.$$

Lema 4.1.5 Si $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es un cuadrilátero convexo y satisface las hipótesis (H1), (H2), (H3), (H4), entonces

- (1) $\max\{|\ell|/a, |\ell|/b\} \leq N_2(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)$;
- (2) Si $\tilde{b}/b \leq 1$ entonces $a/b \leq N_2$;
- (3) Si $\tilde{b}/b \leq 1/2$ y $\tilde{a}/a > 1$ entonces $b/a \leq 2N_3$;
- (4) Si $\tilde{b}/b > 1$ y $a/b \leq \text{tg}((\pi - \bar{\psi})/2)$ entonces $|\ell| \leq N_6\tilde{a}$;
- (5) Si $\tilde{b}/b > 1$ y $b/a \leq \text{tg}(\alpha/2)$ entonces $|\ell| \leq 2N_2(\tilde{b} - b)$;
- (6) $\min\{1/|\tilde{a} - a|, 1/\tilde{b}\} \leq \sqrt{2}N_3/|\ell|$;
- (7) $\min\{1/|\tilde{b} - b|, 1/\tilde{a}\} \leq \sqrt{2}/|\ell|$.

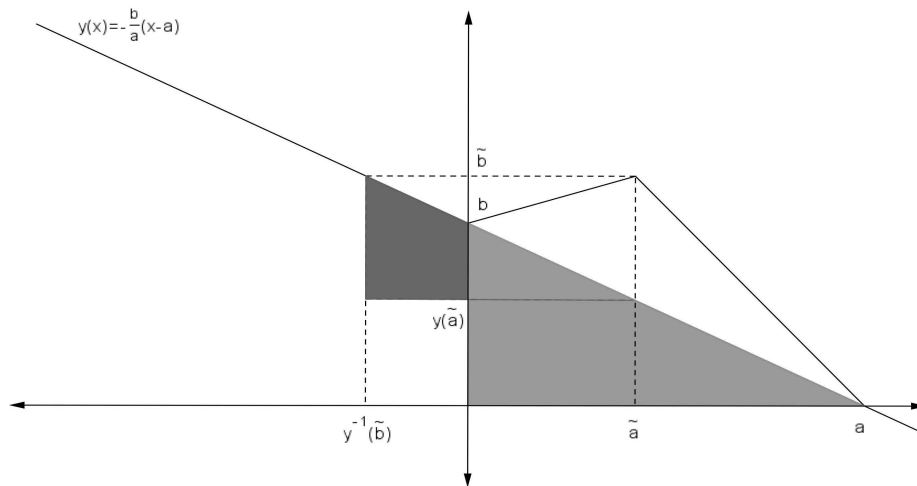
Demostración.

- (1) Notemos que la ecuación de la recta que pasa por M_2 y M_4 es

$$y(x) = -\frac{b}{a}(x - a).$$

Denotando, como es usual, por y^{-1} a su inversa, tenemos (ver figura)

$$\frac{\tilde{b} - y(\tilde{a})}{\tilde{a} - y^{-1}(\tilde{b})} = \frac{b}{a}. \quad (4.1.17)$$

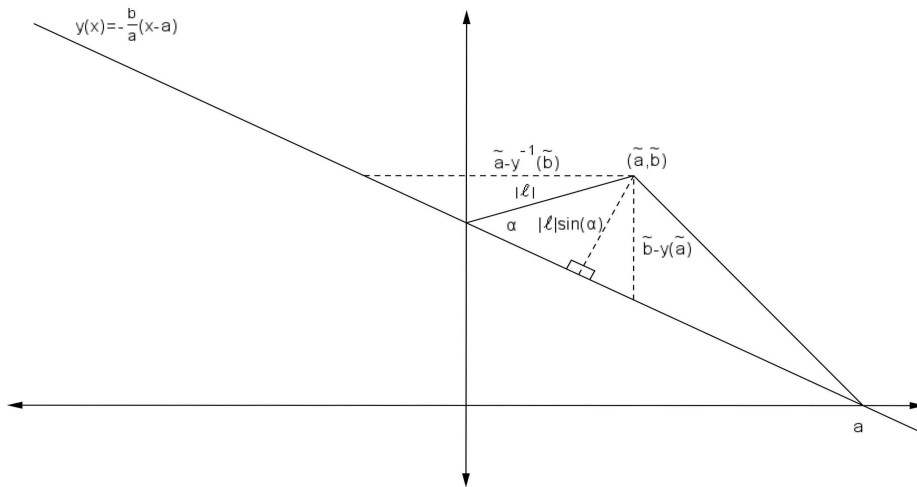


O, equivalentemente,

$$\frac{\tilde{a} - y^{-1}(\tilde{b})}{a} = \frac{\tilde{b} - y(\tilde{a})}{b} = \frac{\tilde{b}}{b} + \frac{\tilde{a}}{a} - 1. \quad (4.1.18)$$

Un análisis geométrico elemental (ver figura) muestra que

$$|\ell| \operatorname{sen}(\alpha) \leq \tilde{b} - y(\tilde{a}) \quad \text{y} \quad |\ell| \operatorname{sen}(\alpha) \leq \tilde{a} - y^{-1}(\tilde{b}). \quad (4.1.19)$$



Luego, notemos que, combinando (H2), (4.1.18) y la primer parte de (4.1.19) tenemos

$$\frac{|\ell|}{b} \frac{1}{N_2} \leq \frac{|\ell| \operatorname{sen}(\alpha)}{b} \leq \frac{\tilde{b} - y(\tilde{a})}{b} = \frac{\tilde{b}}{b} + \frac{\tilde{a}}{a} - 1$$

de donde sigue

$$\frac{|\ell|}{b} \leq N_2 \left(\frac{\tilde{b}}{b} + \frac{\tilde{a}}{a} - 1 \right).$$

Análogamente, se prueba

$$\frac{|\ell|}{a} \leq N_2 \left(\frac{\tilde{b}}{b} + \frac{\tilde{a}}{a} - 1 \right)$$

y así (1) sigue fácilmente.

- (2) Llamando β al ángulo entre d_1 y el segmento que une M_4 y (a, b) , tenemos que, como $\tilde{b} \leq b$, entonces $\alpha \leq \beta$. Así,

$$b/a = \operatorname{tg}(\beta) \geq \operatorname{tg}(\alpha)$$

y entonces, haciendo uso nuevamente de (H2), tenemos

$$\frac{a}{b} \leq \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} \leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} \leq N_2$$

por lo que (2) queda probada.

- (3) Bajo las hipótesis tenemos que

$$|\ell| \geq b - \tilde{b} \geq b/2$$

Entonces $\frac{b}{a} \leq 2\frac{|\ell|}{a}$ y por lo tanto, (3) sigue directamente de (H3).

- (4) Sea γ al ángulo entre d_1 y ℓ_{14} . Notemos que bajo las hipótesis se tiene

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}(\gamma) \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \bar{\psi}}{2}\right),$$

y en consecuencia

$$\gamma \leq \frac{\pi - \bar{\psi}}{2}.$$

Ahora, usando (H4) tenemos

$$\alpha \leq \alpha + \gamma \leq \frac{\pi + \bar{\psi}}{2},$$

de donde sigue (por (H2) y el hecho que $\bar{\psi} < \pi$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha + \gamma)} &\leq \operatorname{máx} \left\{ 1/\operatorname{sen}(\alpha), 1/\operatorname{sen}\left(\frac{\pi + \bar{\psi}}{2}\right) \right\} \\ &\leq \operatorname{máx} \left\{ N_2, 1/\operatorname{sen}\left(\frac{\pi + \bar{\psi}}{2}\right) \right\} = N_6. \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Finalmente notemos que

$$\frac{\tilde{a}}{|\ell|} = \operatorname{sen}(\pi - (\alpha + \gamma)) = \operatorname{sen}(\alpha + \gamma),$$

es decir,

$$\frac{|\ell|}{\tilde{a}} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha + \gamma)}$$

y así (4) sigue combinando esta última igualdad con (4.1.20).

(5) Sea β como en (2), afirmamos que en este caso $\beta \leq \alpha$. En efecto,

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{b}{a} \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

y, por lo tanto,

$$\beta \leq \frac{\alpha}{2} \leq \alpha .$$

Además, de la primera desigualdad sigue que

$$\alpha - \beta \geq \frac{\alpha}{2} .$$

Más aún, es claro que

$$0 \leq \frac{\alpha}{2} \leq \alpha - \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

y en consecuencia

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \operatorname{sen}(\alpha - \beta) . \quad (4.1.21)$$

Luego, (5) se obtiene combinando (4.1.21), (H2) y la conocida desigualdad

$\frac{\operatorname{sen}(x)}{2} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. En efecto, se tiene

$$|\ell| \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{2} \leq |\ell| \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq |\ell| \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \tilde{b} - b$$

y así

$$|\ell| \leq \frac{2}{\operatorname{sen}(\alpha)}(\tilde{b} - b) \leq 2N_2(\tilde{b} - b) .$$

(6) Sea η el ángulo interior de K en el vértice M_2 . Tenemos entonces

$$\frac{|\tilde{a} - a|}{|\ell_{23}|} = \cos(\eta) \quad \text{y} \quad \frac{\tilde{b}}{|\ell_{23}|} = \operatorname{sen}(\eta)$$

y entonces

$$\min \left\{ \frac{1}{|\tilde{a} - a|}, \frac{1}{\tilde{b}} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{|\ell_{23}| \cos(\eta)}, \frac{1}{|\ell_{23}| \operatorname{sen}(\eta)} \right\} .$$

De (H3) sigue que $\frac{1}{|\ell_{23}|} \leq \frac{N_3}{|\ell|}$, por lo tanto

$$\min \left\{ \frac{1}{|\tilde{a} - a|}, \frac{1}{\tilde{b}} \right\} \leq \frac{N_3}{|\ell|} \min \left\{ \frac{1}{\cos(\eta)}, \frac{1}{\operatorname{sen}(\eta)} \right\} .$$

Finalmente, notando que

$$\min \left\{ \frac{1}{\cos(\eta)}, \frac{1}{\operatorname{sen}(\eta)} \right\} \leq \sqrt{2}$$

(6) sigue inmediatamente.

(7) Sigue de un análisis similar al hecho en (6). \square

4.1.2. Acotación de $|\phi_3|_{H^1(K)}$ bajo la RDP.

Las cotas obtenidas en el lema previo, a partir de la geometría de K , permiten acotar $|\phi_3|_{H^1(K)}$. Este apartado está destinado a enunciar y probar dicha estimación.

Lema 4.1.6 *Si $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es un cuadrilátero convexo que satisface (H1), (H2), (H3) y (H4), entonces existe una constante C , la cual depende únicamente de $\bar{\psi}$ y N_i , $i = 1, 2, 3$, tal que*

$$|\phi_3|_{H^1(K)} \leq C \left(\frac{h}{|\ell|} \right)^{1/2}. \quad (4.1.22)$$

Demostración. Para demostrar este resultado consideraremos cuatro casos tal como en el Lema 3.2.1.

- (1) Si $\tilde{b}/b \leq 1$ y $\tilde{a}/a \leq 1$, entonces de (3.1.7), parte (1) del Lema 3.2.1 y parte (1) del Lema 4.1.5 sigue que

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^2(K)}^2 \leq \frac{b}{a} \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)} \leq N_2 \frac{b}{|\ell|} \leq N_2 \frac{h}{|\ell|}.$$

Análogamente, usando ahora (3.1.8), obtenemos

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^2(K)}^2 \leq N_2 \frac{h}{|\ell|}.$$

- (2) Asumamos ahora que $\tilde{b}/b \leq 1$ y $\tilde{a}/a > 1$. Usando (3.1.7) y (3.1.8) nuevamente, pero combinado ahora con la parte (2) del Lema 3.2.1 y (4.1.13) se tiene

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^2(K)}^2 \leq \frac{b}{a} \min \left\{ \frac{N_4 \ln(N_4) + 1}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\} \quad (4.1.23)$$

y

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^2(K)}^2 \leq \frac{a}{b} \min \left\{ \frac{N_4 \ln(N_4) + 1}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\}. \quad (4.1.24)$$

Ahora, si $b/\tilde{b} \leq 2$, la demostración concluye usando (4.1.23), (4.1.24) y (H3). En otro caso, $\tilde{b}/b < 1/2$ y así $1/(1 - \tilde{b}/b) < 2$. Por otro lado, de la parte (3) del Lema 4.1.5 tenemos $b/a \leq 2N_3$, y por lo tanto, usando nuevamente (4.1.23) combinado con la parte (6) del Lema 4.1.5 obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^2(K)}^2 &\leq 2N_3 \frac{b}{a} \min \left\{ \frac{2(N_4 \ln(N_4) + 1)}{\tilde{a}/a - 1}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\} \\ &\leq 4N_3(N_4 \ln(N_4) + 1)h \min \left\{ \frac{1}{\tilde{a} - a}, \frac{1}{\tilde{b}} \right\} \leq 4\sqrt{2}N_3^2(N_4 \ln(N_4) + 1) \frac{h}{|\ell|}. \end{aligned}$$

La cota para $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^2(K)}^2$ se obtiene de forma similar a partir de (4.1.24) y la parte (2) del Lema 4.1.5.

- (3) Consideremos ahora el caso $\tilde{b}/b > 1$ y $\tilde{a}/a \leq 1$. Usando una vez más (3.1.7) y (3.1.8) combinadas con la parte (3) del Lema 3.2.1 se obtiene

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^2(K)}^2 \leq \frac{b}{a} \min \left\{ \frac{N_4 \ln(N_4) + 1}{(\tilde{b}/b - 1)(1 - \tilde{a}/a)}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\} \quad (4.1.25)$$

y

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^2(K)}^2 \leq \frac{a}{b} \min \left\{ \frac{N_4 \ln(N_4) + 1}{(\tilde{b}/b - 1)(1 - \tilde{a}/a)}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\}. \quad (4.1.26)$$

Sin embargo, no podemos proceder exactamente como en el caso previo porque ahora no tenemos, como antes, que a/b se encuentre acotado superior e inferiormente por constantes que dependan únicamente de N_2 y N_3 .

Asumamos primero que $b/a < 1/\tan((\pi - \bar{\psi})/2)$. Entonces, como en la parte (2), podemos asumir que $\tilde{a}/a \leq 1/2$ (en caso contrario, la estimación sigue fácilmente de (4.1.25) y (4.1.26). En este caso tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^2(K)}^2 &\leq \frac{2}{\tan((\pi - \bar{\psi})/2)} (N_4 \ln(N_4) + 1) \min \left\{ \frac{b}{\tilde{b} - b}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\} \\ &\leq \frac{2}{\tan((\pi - \bar{\psi})/2)} (N_4 \ln(N_4) + 1) h \min \left\{ \frac{1}{\tilde{b} - b}, \frac{1}{\tilde{a}} \right\}, \end{aligned}$$

y así el resultado sigue de la parte (7) del Lema 4.1.5.

Por otro lado, si $b/a \geq 1/\tan((\pi - \bar{\psi})/2)$ podemos usar la parte (4) del Lema 4.1.5 y (4.1.25) para obtener

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^2(K)}^2 \leq \frac{b}{\tilde{a}} \leq N_5 \frac{b}{|\ell|} \leq N_5 \frac{h}{|\ell|}.$$

Ahora, con el objetivo de acotar la derivada respecto a y consideraremos nuevamente dos casos: $a/b < 1/\tan(\alpha/2)$ y $a/b \geq 1/\tan(\alpha/2)$. En el primer caso, acotamos $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^2(K)}^2$ procediendo como antes y usando la parte (7) del Lema 4.1.5.

En el segundo caso, usamos (4.1.26) para obtener

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^2(K)}^2 \leq 2 \frac{a}{b} (N_4 \ln(N_4) + 1) \frac{b}{\tilde{b} - b},$$

y la demostración termina usando la parte (5) del Lema 4.1.5.

- (4) Finalmente, en el caso $\tilde{b}/b > 1$ y $\tilde{a}/a > 1$ el resultado sigue fácilmente de la parte (4) del Lema 3.2.1 y (H3), a partir de (3.1.7) y (3.1.8). \square

4.1.3. Acotación de $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$ bajo la RDP.

Como señalamos al comienzo de este capítulo, nuestra intención es obtener, para cierto rango de p , cotas parciales de $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$.

En el Lema 4.1.6 se ha hecho esto para $p = 2$; en lo que sigue destacamos un hecho significativo, a saber, la estimación obtenida en dicho lema junto a la conocida desigualdad de Hölder, permite obtener cotas de $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$ para $1 \leq p \leq 2$.

Posteriormente mostraremos que, aunque no pueda deducirse de igual manera, las mismas hipótesis permiten obtener cotas similares cuando $1 \leq p < 3$.

Habiendo dejado en claro el objetivo del resto de esta sección, procedemos a esclarecer las afirmaciones recién hechas.

Observación 4.1.3 *En el Lema 4.1.6 se mostró que*

$$|\phi_3|_{W^{1,2}(K)}^2 \leq C(\bar{\psi}, N) \frac{h}{|\ell|} \quad (4.1.27)$$

para cualquier cuadrilátero convexo K satisfaciendo (H1), (H2), (H3) y (H4).

Como afirmamos, esta desigualdad permite acotar $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$ fácilmente si $1 \leq p < 2$.

En efecto, consideremos por ejemplo $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p$.

Tomando $\hat{p} = \frac{1}{p-1} > 1$ y aplicando la desigualdad de Hölder en el lado derecho de (3.1.4), se tiene

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{b^{\frac{1}{p-1}} \hat{y}^{\frac{p}{p-1}}}{a(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))} d\hat{x} d\hat{y} \right)^{p-1}$$

Dado que $\hat{y} \leq 1$ y $2 \leq \frac{p}{p-1}$, sigue que

$$\hat{y}^{\frac{p}{p-1}} \leq \hat{y}^2$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p &\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{b^{\frac{2-p}{p-1}} b \hat{y}^2}{a(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))} d\hat{x} d\hat{y} \right)^{p-1} \\ &= b^{2-p} \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{b \hat{y}^2}{a(1 + \hat{x}(\tilde{b}/b - 1) + \hat{y}(\tilde{a}/a - 1))} d\hat{x} d\hat{y} \right)^{p-1} \\ &= b^{2-p} \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^2(K)}^{2(p-1)}. \end{aligned}$$

Usando ahora (4.1.27), y el hecho que $p < 2$ y $b \leq h$, tenemos

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq C(\bar{\psi}, N)^{p-1} \frac{h}{|\ell|^{p-1}}.$$

Argumentos análogos para $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^p(K)}^p$ prueban, para cualquier $1 \leq p \leq 2$, que

$$|\phi_3|_{W^{1,p}(K)} \leq C(\bar{\psi}, N)^{1/q} \frac{h^{1/p}}{|\ell|^{1/q}} \quad (4.1.28)$$

donde q es el exponente dual de p (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

En lo que sigue mostraremos que, bajo las mismas hipótesis sobre K , (4.1.28) vale para $1 \leq p < 3$, incluso cuando ésto no pueda ser deducido de (4.1.27).

Lema 4.1.7 *Sea $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ un cuadrilátero convexo que satisface (H1), (H2), (H3), y (H4) entonces, para cualquier $1 \leq p < 3$ existe una constante C que depende únicamente de $\bar{\psi}$, p , y N_i , $i = 1, 2, 3$ tal que*

$$|\phi_3|_{W^{1,p}(K)} \leq C \frac{h^{1/p}}{|\ell|^{1/q}}. \quad (4.1.29)$$

Demostración. Solo resta tratar el caso $2 \leq p < 3$, dado que para $1 \leq p < 2$ la estimación ha sido obtenida del caso $p = 2$ en la Observación 4.1.3.

Consideraremos cuatro casos como en el Lema 3.2.2. En efecto,

- (1) Si $\tilde{b}/b \leq 1$ y $\tilde{a}/a \leq 1$ entonces, de (3.1.7), parte (1) del Lema 3.2.2 y parte (1) del Lema 4.1.5, sigue que

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{b}{a^{p-1}} \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)^{p-1}} \leq N_2^{p-1} \frac{b}{|\ell|^{p-1}} \leq N_2^{p-1} \frac{h}{|\ell|^{p-1}}.$$

Análogamente, usando ahora (3.1.8), obtenemos

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^p(K)}^p \leq N_2^{p-1} \frac{h}{|\ell|^{p-1}}.$$

- (2) Asumamos ahora que $\tilde{b}/b \leq 1$ y $\tilde{a}/a > 1$. Usando nuevamente (3.1.7) y (3.1.8), combinados con la parte (2) del Lema 3.2.2 y (4.1.13) obtenemos

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{b}{a^{p-1}(3-p)} \min \left\{ \frac{\mu_p(N_4)}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\} \quad (4.1.30)$$

y,

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{a}{b^{p-1}(3-p)} \min \left\{ \frac{\mu_p(N_4)}{(1 - \tilde{b}/b)(\tilde{a}/a - 1)}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\}. \quad (4.1.31)$$

Ahora, si $b/\tilde{b} \leq 2$, la demostración concluye usando (4.1.30), (4.1.31) y (H3). De otra manera, $\tilde{b}/b < 1/2$ y así $1/(1 - \tilde{b}/b) < 2$. Por otro lado, de la parte (3) del Lema 4.1.5 sabemos que $b/a \leq 2N_3$ y en consecuencia, usando nuevamente (4.1.30) combinado con la parte (6) del Lema 4.1.5 se tiene

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{2N_3}{a^{p-2}(3-p)} \min \left\{ \frac{2\mu_p(N_4)}{\tilde{a}/a - 1}, \frac{b}{\tilde{b}} \right\} \\ & \leq \frac{4N_3}{(3-p)a^{p-2}} (\mu_p(N_4) + 1) h \min \left\{ \frac{1}{\tilde{a} - a}, \frac{1}{\tilde{b}} \right\} \leq \frac{4\sqrt{2}N_3^2}{(3-p)a^{p-2}} (\mu_p(N_4) + 1) \frac{h}{|\ell|}. \end{aligned}$$

y de (H3), $|\ell| \leq N_3 a$, además $p - 2 \geq 0$ por lo que

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{4\sqrt{2}N_3^p}{(3-p)} (\mu_p(N_4) + 1) \frac{h}{|\ell|^{p-1}}.$$

La cota para $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^p(K)}^p$ se obtiene de manera similar a partir de (4.1.31) y la parte (2) del Lema 4.1.5.

- (3) Consideremos ahora el caso $\tilde{b}/b > 1$ y $\tilde{a}/a \leq 1$. Una vez que hacemos uso de (3.1.7) y (3.1.8) combinado ahora con la parte (3) del Lema 3.2.2 obtenemos

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{b}{a^{p-1}(3-p)} \min \left\{ \frac{\mu_p(N_4)}{(\tilde{b}/b - 1)(1 - \tilde{a}/a)}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\} \quad (4.1.32)$$

y,

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{a}{b^{p-1}(3-p)} \min \left\{ \frac{\mu_p(N_4)}{(\tilde{b}/b - 1)(1 - \tilde{a}/a)}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\}. \quad (4.1.33)$$

Sin embargo, no podemos proceder exactamente como en el caso previo porque no sabemos, como antes, que a/b esté acotado tanto superior como inferiormente.

Asumamos primero que $b/a < 1/\text{tg}((\pi - \bar{\psi})/2)$. Entonces, como en la parte (2), podemos asumir que $\tilde{a}/a \leq 1/2$ (de otra manera, la estimación sigue fácilmente de (4.1.32) y (4.1.33)). En este caso tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p &\leq \frac{2}{a^{p-2}(3-p)\text{tg}((\pi - \bar{\psi})/2)} (\mu_p(N_4) + 1) \min \left\{ \frac{b}{\tilde{b} - b}, \frac{a}{\tilde{a}} \right\} \\ &\leq \frac{2}{a^{p-2}(3-p)\text{tg}((\pi - \bar{\psi})/2)} (\mu_p(N_4) + 1) h \min \left\{ \frac{1}{\tilde{b} - b}, \frac{1}{\tilde{a}} \right\} \end{aligned}$$

y así, el resultado sigue de la parte (7) del Lema 4.1.5.

Por otro lado, si $b/a \geq 1/\text{tg}((\pi - \bar{\psi})/2)$, podemos usar la parte (4) del Lema 4.1.5 y (4.1.32) para tener

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{b}{a^{p-2}(3-p)\tilde{a}} \leq N_6 N_3^{p-2} \frac{b}{(3-p)|\ell|^{p-1}} \leq N_6 N_3^{p-2} \frac{h}{(3-p)|\ell|^{p-1}}.$$

Ahora, con motivo de acotar la derivada con respecto a y , consideraremos nuevamente dos casos: $a/b < 1/\text{tg}(\alpha/2)$ y $a/b \geq 1/\text{tg}(\alpha/2)$. En el primer caso, acotamos $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\|_{L^p(K)}^p$ procediendo como antes usando la parte (7) del Lema 4.1.5.

En el segundo caso, usamos (4.1.33) para obtener

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq 2 \frac{a}{(3-p)b^{p-2}} (\mu_p(N_4) + 1) \frac{1}{\tilde{b} - b}$$

y la demostración concluye usando la parte (5) del Lema 4.1.5.

- (4) Finalmente, en el caso $\tilde{b}/b > 1$ y $\tilde{a}/a > 1$ el resultado sigue trivialmente de la parte (4) del Lema 3.2.2 y (H3) usando nuevamente (3.1.7) y (3.1.8). \square

Capítulo 5

La doble condición del ángulo.

Apelando al apartado referido a elementos anisotrópicos del Capítulo 1, recordamos que para $p \geq 1$ y en el caso que los elementos sean paralelogramos, puede mostrarse que la estimación

$$|u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq Ch_K |u|_{W^{2,p}(K)} \quad (5.0.1)$$

vale bajo la condición $MAC(\psi)$ (para más detalles remitimos nuevamente a [6]).

Más aún, se muestra que la versión más sutil de (5.0.1)

$$|u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq C \left\{ h_1 \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla u \right\|_{L^p(K)} + h_2 \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla u \right\|_{L^p(K)} \right\} \quad (5.0.2)$$

vale para rectángulos, donde h_1 y h_2 denotan el tamaño del elemento en las direcciones x_1 y x_2 , respectivamente.

En el mismo trabajo se ve que esta estimación puede ser extendida a paralelogramos que satisfacen la $MAC(\psi_M)$, donde las derivadas en (5.0.2) son tomadas a lo largo de los lados del elemento.

Ahora, notemos el hecho que, para paralelogramos, la condición $MAC(\psi)$ permite obtener una cota uniforme para el ángulo mínimo de K . Considerando esta última observación, introducimos la siguiente definición:

Definición 5.0.1 *Diremos que un cuadrilátero K satisface la doble condición del ángulo con constantes ψ_m, ψ_M , o simplemente $DAC(\psi_m, \psi_M)$, si los ángulos interiores θ de K verifican $0 < \psi_m \leq \theta \leq \psi_M < \pi$.*

Observación 5.0.4 *Notemos que $DAC(\psi_m, \psi_M)$ es equivalente a la existencia de una constante μ , la cual depende únicamente de ψ_m y ψ_M , tal que*

$$|\cos(\theta)| \leq \mu < 1$$

para todo ángulo interior θ de K .

Señalamos este hecho con la intención de soslayar que este tipo de condición ya ha sido considerada previamente (ver, por ejemplo, (1.1.2)).

En el Capítulo 7, mostraremos que para todo $p \geq 1$, la condición $DAC(\psi_m, \psi_M)$ permite obtener la estimación (5.0.1). Más aún, sabemos que incluso cuando la condición sobre el ángulo

máximo no es necesaria para $p = 2$ (ver por ejemplo [13]), la misma no puede ser relajada para $p \geq 3$.

Notemos que, trivialmente, se tiene

$$DAC(\psi_m, \psi_M) \Rightarrow MAC(\psi_M) ; \quad (5.0.3)$$

y dado que

$$MAC(\psi_M) \Rightarrow RDP(1, \psi_M)$$

sigue que

$$DAC(\psi_m, \psi_M) \Rightarrow RDP(1, \psi_M) .$$

Sin embargo, la implicación recíproca de (5.0.3) no es verdadera. Para mostrar esto apelaremos al siguiente ejemplo

Ejemplo 5.0.1 Consideremos el elemento $K = K(1, a, a, 2a)$, con $0 < a < 1$.

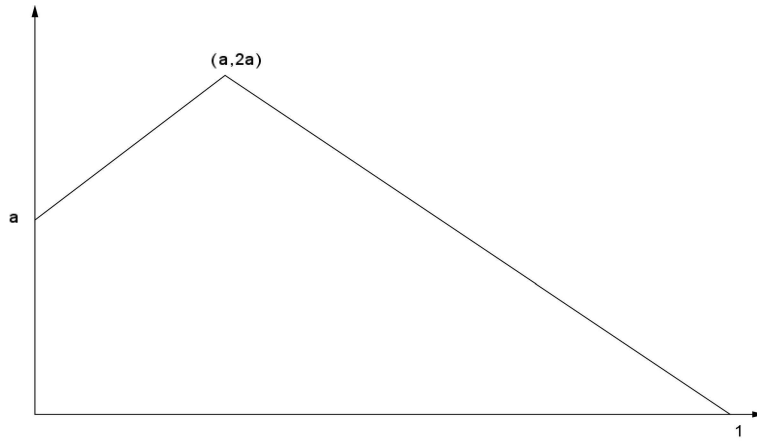


Figura: representación del elemento $K(1, a, a, 2a)$.

Como es de verificación inmediata, el ángulo correspondiente al vértice $(0, a)$ es $\frac{3}{4}\pi$ (independiente de a). Por lo tanto, dado que la suma de los ángulos correspondientes a los vértices $(1, 0)$ y $(a, 2a)$ es $\frac{3}{4}\pi$, ambos ángulos se encuentran acotados por una constante menor a π e independiente de a . De esta forma, queda probado que K satisface la condición del ángulo máximo.

Por otro lado, notemos que si γ denota al ángulo correspondiente al vértice $(1, 0)$, entonces

$$\tan(\gamma) = \frac{2a}{1-a}.$$

Luego, γ tiende a cero cuando $a \rightarrow 0$, probando que γ no puede encontrarse acotado inferiormente y, en consecuencia, no satisface la doble condición del ángulo.

5.1. Implicaciones de la DAC.

En esta sección tenemos como objetivo principal mostrar que la condición del ángulo doble, permite acotar $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$ para todo $p \geq 1$.

Recordemos que en el apartado 4.1 hemos mostrado esto para la *RDP* en el rango $1 \leq p < 3$. Ahora, si bien la *DAC* no es una condición más débil que la *RDP*, la estimación deducida de esta condición es más general que la correspondiente a la *RDP*. En consecuencia, la *DAC* es hasta donde sabemos la condición geométrica más simple y laxa bajo la cual es posible acotar $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$ para todo $p \geq 1$. Y, en consecuencia, para estimar el error de interpolación.

5.1.1. Reducción a la configuración de referencia.

Tal como se hizo al trabajar con la *RDP*, reduciremos nuestro estudio a los mismos cuadriláteros de referencia introducidos en el Capítulo 2, los cuales recordamos son del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$. Para esto necesitamos garantizar la existencia de una transformación afín que, dado un cuadrilátero convexo K , aplique uno del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ en K de modo que si K tiene la *DAC*, entonces $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ también tenga dicha propiedad.

En el siguiente lema mostramos que dicha transformación existe. Dicho resultado tiene el mismo espíritu del Lema 4.1.3 pero para elementos que verifican la *DAC*(ψ_m, ψ_M).

Lema 5.1.1 *Sea K un cuadrilátero convexo verificando la *DAC*(ψ_m, ψ_M). Entonces existe una transformación afín $\tilde{L}(\bar{x}) = B\bar{x} + P$, un cuadrilátero convexo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ y constantes positivas $C = C(\psi_m, \psi_M)$, $\overline{\psi_m} = \overline{\psi_m}(\psi_m, \psi_M)$, $\overline{\psi_M} = \overline{\psi_M}(\psi_m, \psi_M) < \pi$ tales que*

(a) $\frac{\tilde{a}}{a}, \frac{\tilde{b}}{b} \leq 1$ y $\tilde{L}(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) = K$;

(b) $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$, $\det(B) = 1$;

(c) *Los diámetros de ambos elementos son comparables, i.e.,*

$$C^{-1} \text{diam}(K) \leq \text{diam}(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) \leq C \text{diam}(K);$$

(d) $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ *satisface* *DAC*($\overline{\psi_m}, \overline{\psi_M}$);

(e) *El ángulo α está acotado lejos de 0 y π , más aún,*

$$\frac{\pi - \overline{\psi_M}}{2} \leq \alpha \leq \pi - \overline{\psi_m}.$$

Demostración. Siempre es posible elegir dos lados adyacentes de K , que llamaremos l_1 y l_2 , tales que K esté contenido en el paralelogramo determinado por estos dos lados. Observemos que el diámetro de este paralelogramo tiene el mismo orden de K .

Llamemos M_1 al vértice donde l_1 y l_2 se intersecan, y β al ángulo en M_1 . Luego de un movimiento rígido podemos asumir que M_1 está ubicado en el origen y que el lado l_2 se encuentra sobre el eje x . Denotemos por M_2, M_3 y M_4 a los vértices restantes de K dispuestos en sentido antihorario. Llaméramos a a la longitud del lado l_2 , así $M_2 = (a, 0)$.

Sea ℓ_{14} el lado con vértices M_1 y M_4 , y definamos $b = |\ell_{14}| \operatorname{sen}(\beta)$. Entonces, $M_4 = (b \cotg(\beta), b)$. Definimos el mapeo lineal \tilde{L} asociado con la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \cotg(\beta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y elegimos \tilde{a} y \tilde{b} tales que $\tilde{L}(K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})) = K$.

Es fácil chequear que $\tilde{a} \leq a$ y $\tilde{b} \leq b$, por lo que (a) queda probado. Item (b) sigue fácilmente teniendo en cuenta que $\|B\|, \|B^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(\beta)}$ y que K verifica la $DAC(\psi_m, \psi_M)$.

El ítem (c) es evidente de (b); mientras que el ítem (d) se sigue nuevamente de (b) junto con el Lema 4.1.2. Finalmente, el último ítem sigue de (d). En efecto, dado que $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verifica la $DAC(\overline{\psi_m}, \overline{\psi_M})$, el ángulo θ en M_3 verifica $\overline{\psi_m} \leq \theta \leq \overline{\psi_M}$. Entonces, uno de los ángulos restantes de T_1 (aquel que no es el ángulo mínimo para ser precisos), el cual podemos asumir que es α (si este no es el caso, podemos aplicar un movimiento rígido manteniendo válidas las propiedades (a), (b), (c) y (d) para intercambiarlo), verifica $\frac{\pi - \overline{\psi_M}}{2} \leq \alpha \leq \pi - \overline{\psi_m}$. \square

Observación 5.1.1 *En virtud del lema precedente, y del Lema 2.2.1, cada vez que trabajemos con un cuadrilátero convexo K de diámetro h que satisface la $DAC(\psi_m, \psi_M)$ asumiremos que es del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$. Más aún, asumiremos la existencia de una constante positiva $\tilde{N}(\psi_m, \psi_M)$ tal que:*

$$(S1) \quad \frac{\tilde{a}}{a}, \frac{\tilde{b}}{b} \leq 1;$$

$$(S2) \quad \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} \leq \tilde{N}.$$

Notemos que (S2) sigue inmediatamente del ítem (e) del Lema 5.1.1.

Los siguientes hechos elementales son deducidos de (S1):

$$h = |d_1|; \tag{5.1.1}$$

$$\frac{|K|}{|T_2|} \leq 2. \tag{5.1.2}$$

Observación 5.1.2 *Tratando de replicar la construcción de \tilde{L} hecha en el Lema 5.1.1, para un elemento que verifique la $RDP(N, \psi_M)$, podemos eventualmente encontrar que no es posible acotar $\kappa(B)$ en términos de ψ_M y N , dado que el ángulo β podría aproximarse a 0.*

La transformación L construida en el Lema 4.1.3 evita esta dificultad relajando las cotas sobre $\tilde{a}/a, \tilde{b}/b$ (ver (4.1.13)). Como veremos, la condición (S1), válida para elementos que verifican $DAC(\psi_m, \psi_M)$, simplifica el estudio del error de interpolación.

Lema 5.1.2 *Si $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es un cuadrilátero convexo y satisface las hipótesis (S1) y (S2), entonces,*

$$\max \left\{ \frac{|\ell|}{a}, \frac{|\ell|}{b} \right\} \leq \tilde{N} \left(\frac{\tilde{b}}{b} + \frac{\tilde{a}}{a} - 1 \right).$$

Demostración. La demostración es similar a la dada para el ítem (1) del Lema 4.1.5 cambiando (H2) por (S2). \square

5.1.2. Acotación de $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$ bajo la DAC.

Para K verificando $DAC(\psi_m, \psi_M)$ las cotas para $|\phi_3|_{W^{1,p}(K)}$ pueden ser manejadas más fácilmente que en el caso de la RDP . Este hecho nos permite presentar directamente el siguiente lema:

Lema 5.1.3 *Si $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es un cuadrilátero convexo y satisface (S1) y (S2), entonces, para cualquier $p \geq 1$*

$$|\phi_3|_{W^{1,p}(K)} \leq C \tilde{N}^{1/q} \frac{h^{1/p}}{|\ell|^{1/q}} \quad (5.1.3)$$

donde q es el exponente dual de p y C es una constante independiente de K .

Demostración. Dado que la derivada parcial restante puede tratarse de manera completamente análoga, acotaremos únicamente $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p$.

Comencemos notando que el hecho $\frac{\tilde{a}}{a}, \frac{\tilde{b}}{b} \leq 1$ permite acotar I_p tal como se hizo en la parte (1) del Lema 3.2.2, de esta manera se tiene

$$I_p \leq \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)^{p-1}}.$$

Así, de (3.1.7) y del Lema 5.1.2 se tiene

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{b}{a^{p-1}} \frac{1}{(\tilde{b}/b + \tilde{a}/a - 1)^{p-1}} \leq \tilde{N}^{p-1} \frac{b}{|\ell|^{p-1}}$$

y la prueba termina teniendo en cuenta que $b \leq h$. \square

Capítulo 6

Acotaciones técnicas.

Con el fin de acotar $|u - \Pi u|_{W^{1,p}(K)}$ y $|(\Pi u - u)(M_3)|$ (ver (2.3.1)), que es el objeto principal de este capítulo, vamos a requerir una forma más sutil del teorema de traza sobre un triángulo.

La versión en L^2 del siguiente lema puede encontrarse en [20], nosotros lo estableceremos en L^p y omitiremos la demostración puesto que es seguir paso a paso la dada en [20].

Lema 6.0.4 *Sea T un triángulo cuyo diámetro es h_T y e es cualquiera de sus lados. Para cualquier $p \geq 1$ tenemos*

$$\|u\|_{L^p(e)} \leq 2^{\frac{1}{q}} \left(\frac{|e|}{|T|} \right)^{1/p} \{ \|u\|_{L^p(T)} + h_T |u|_{W^{1,p}(T)} \}$$

donde q es el exponente dual de p .

6.1. Acotación de $|(u - \Pi u)(M_3)|$.

En el siguiente lema damos una estimación para $|(u - \Pi u)(M_3)|$ en términos de $|u - \Pi u|_{W^{1,p}(K)}$.

Lema 6.1.1 *Si $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es un cuadrilátero convexo que verifica*

$$(a) \text{ (H1), (H2), (H3), (H4)} \quad \text{o} \quad (b) \text{ (S1), (S2)}$$

entonces, para cualquier $p \geq 1$ se tiene

$$|(u - \Pi u)(M_3)| \leq C \frac{|\ell|^{1/q}}{h^{1/p}} \{ |u - \Pi u|_{W^{1,p}(T_1)} + h |u|_{W^{2,p}(T_1)} \} \quad (6.1.1)$$

donde q es el exponente dual de p , y $C = 2(N_2 N_3 (1 + N_1))^{1/p}$ en el caso (a), o $C = 2\tilde{N}^{1/p}$ en el caso (b).

Demostración. Denotaremos con ∂_ℓ a la derivada en la dirección de ℓ . Usando $(u - \Pi u)(M_4) = 0$, la desigualdad de Hölder y el Lema 6.0.4 tenemos

$$\begin{aligned} |(u - \Pi u)(M_3)| &= \left| \int_\ell \partial_\ell (u - \Pi u) \right| \leq |\ell|^{1/q} \|\partial_\ell (u - \Pi u)\|_{L^p(\ell)} \\ &\leq 2^{1-\frac{1}{p}} \frac{|\ell|}{|T_1|^{1/p}} \{ |u - \Pi u|_{W^{1,p}(T_1)} + h_{T_1} |u|_{W^{2,p}(T_1)} \} \end{aligned}$$

donde q es el exponente dual de p .

Escribiendo $|T_1| = |\ell||d_1|\sin(\alpha)/2$, sigue que

$$\frac{|\ell|}{|T_1|^{1/p}} = 2^{1/p} \frac{|\ell|^{1/q}}{(\sin(\alpha)|d_1|)^{1/p}}$$

y, en el caso (a), tenemos de (4.1.14) y (H2) que

$$\frac{|\ell|}{|T_1|^{1/p}} \leq (2N_2N_3(1+N_1))^{1/p} \frac{|\ell|^{1/q}}{h^{1/p}}$$

mientras que en el caso (b), tenemos de (S2) y (5.1.1) que

$$\frac{|\ell|}{|T_1|^{1/p}} \leq (2\tilde{N})^{1/p} \frac{|\ell|^{1/q}}{h^{1/p}}$$

y la demostración concluye en ambos casos observando que $h_{T_1} \leq h$. \square

Observación 6.1.1 *Dado que K es convexo, es bien sabido que, para cualquier $p \geq 1$, existe una constante C_p que depende solo de p tal que*

$$\|w\|_{L^p(K)} \leq C_p h |w|_{W^{1,p}(K)} \quad (6.1.2)$$

para cualquier w con promedio nulo sobre K . Para $p = 1$ y $p = 2$, y dominios convexos generales, las constantes óptimas se sabe que son $C_1 = \frac{1}{2}$ y $C_2 = \frac{1}{\pi}$ (ver [3, 18]).

6.2. Acotación de $|u - \Pi u|_{W^{1,p}(K)}$.

El siguiente lema da una estimación para el error $|u - \Pi u|_{W^{1,p}(K)}$ del interpolante lineal.

Lema 6.2.1 *Si $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es un cuadrilátero convexo y verifica cualquiera de las siguientes condiciones*

$$(a) \text{ (H1), (H2), (H3), (H4)} \quad \text{o} \quad (b) \text{ (S1), (S2)}$$

entonces, para cualquier $p \geq 1$,

$$|u - \Pi u|_{W^{1,p}(K)} \leq Ch |u|_{W^{2,p}(K)} \quad (6.2.1)$$

donde $C = 2\left(C_p(1 + 2^{\frac{1}{q}}N_5^{\frac{1}{p}}) + 2^{\frac{1}{q}}N_5^{\frac{1}{p}}\right)$ en el caso (a), y $C = 2(3C_p + 2)$ en el caso (b).

Demostración. Consideremos, por ejemplo, $v = \frac{\partial}{\partial x}(u - \Pi u)$. Queremos mostrar que

$$\|v\|_{L^p(K)} \leq Ch |v|_{W^{1,p}(K)}.$$

Sea v_K el valor medio de v sobre K , de (6.1.2) tenemos

$$\|v - v_K\|_{L^p(K)} \leq C_p h |v|_{W^{1,p}(K)}. \quad (6.2.2)$$

En consecuencia resta acotar $\|v_K\|_{L^p(K)}$.

Notemos que la integral entre 0 y a de $v(x, 0)$ es nula, en efecto,

$$\int_0^a v(x, 0) dx = \int_0^a \frac{\partial}{\partial x_1} (u - \Pi u)(x, 0) dx = (u - \Pi u)|_{M_1}^{M_2} = 0 .$$

Además, considerando a v_K como una función constante, tenemos

$$\frac{1}{a} \int_0^a v_K(x, 0) dx = v_K .$$

Luego, combinando las últimas observaciones realizadas, resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\ell_{12}|} \left| \int_{\ell_{12}} (v - v_K) ds \right| &= \frac{1}{a} \left| \int_0^a (v - v_K)(x, 0) dx \right| \\ &= |v_K| . \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Usando (6.2.3) junto a la desigualdad de Hölder se tiene

$$|v_K| \leq \|v - v_K\|_{L^p(\ell_{12})} |\ell_{12}|^{-1/p} . \tag{6.2.4}$$

Ahora, combinando (6.2.4) con el Lema 6.0.4 obtenemos

$$\begin{aligned} |v_K| &\leq 2^{\frac{1}{q}} |\ell_{12}|^{-1/p} \left(\frac{|\ell_{12}|}{|T_2|} \right)^{1/p} \{ \|v - v_K\|_{L^p(T_2)} + h_{T_2} |v - v_K|_{W^{1,p}(T_2)} \} \\ &\leq 2^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|T_2|} \right)^{1/p} \{ \|v - v_K\|_{L^p(K)} + h_{T_2} |v|_{W^{1,p}(K)} \} . \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \|v_K\|_{L^p(K)} &= |v_K| |K|^{1/p} \\ &\leq 2^{1-1/p} \left(\frac{|K|}{|T_2|} \right)^{1/p} \{ \|v - v_K\|_{L^p(K)} + h |v|_{W^{1,p}(K)} \} \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

y la cota para $\frac{\partial}{\partial x}(u - \Pi u)$ es obtenida mediante la desigualdad triangular, usando (6.2.2) junto con (4.1.15) en el caso (a) y (5.1.2) en el caso (b).

Resta observar que la derivada respecto a y puede ser tratada de forma análoga, lo que concluye el argumento. \square

Capítulo 7

Resultados Principales.

En esta sección vamos a enunciar y probar el teorema de interpolación; además, mediante contraejemplos mostraremos que algunos de estos resultados no se pueden mejorar.

7.1. El Teorema de interpolación.

Comenzaremos con el siguiente lema elemental.

Lema 7.1.1 *Sea $K = K(1, 1, \tilde{a}, \tilde{b})$, K convexo, y $\tilde{a}, \tilde{b} \leq 1$. Entonces para cualquier $p \geq 1$ se tiene*

$$\|u - Qu\|_{L^p(K)} \leq C|u|_{W^{2,p}(K)} \quad (7.1.1)$$

para una constante C independiente de K .

Demostración. Obviamente se tiene

$$\|u - Qu\|_{L^p(K)} \leq \|u - Pu\|_{L^p(K)} + \|Q(Pu - u)\|_{L^p(K)}$$

donde P es el polinomio lineal de Taylor de u calculado sobre una bola fija (ver [9], Capítulo 4) contenida en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

El lema de Bramble-Hilbert y la desigualdad de Sobolev, establecidos en [9], dan por un lado

$$\|u - Pu\|_{W^{2,p}(K)} \leq C|u|_{W^{2,p}(K)}$$

y, por otro

$$\|Pu - u\|_{L^\infty(K)} \leq C\|Pu - u\|_{W^{2,p}(K)}$$

con C independiente de K en ambos casos (recordemos que $\tilde{a}, \tilde{b} \leq 1$).

La demostración concluye teniendo en cuenta que

$$\|Q(Pu - u)\|_{L^p(K)} \leq \|Q(Pu - u)\|_{L^\infty(K)} \leq C\|Pu - u\|_{L^\infty(K)}. \square$$

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema principal de este trabajo, en el cual se enuncia la estimación óptima del error para elementos cuadriláteros.

Teorema 7.1.1 *Sea K un cuadrilátero convexo con diámetro h , y $p \geq 1$. Entonces existe una constante C_0 independiente de K tal que*

$$\|u - Qu\|_{L^p(K)} \leq C_0 h^2 |u|_{W^{2,p}(K)}. \quad (7.1.2)$$

Para $1 \leq p < 3$ y K satisfaciendo la RDP(N, ψ_M) se tiene

$$|u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq Ch |u|_{W^{2,p}(K)} \quad (7.1.3)$$

con $C = C(N, \psi_M, p)$, y la restricción sobre p no puede ser mejorada.

Finalmente, para cualquier $p \geq 1$ y K verificando la DAC(ψ_m, ψ_M) se tiene

$$|u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq Ch |u|_{W^{2,p}(K)} \quad (7.1.4)$$

con $C = C(\psi_m, \psi_M, p)$, y para $p \geq 3$ la condición sobre el ángulo máximo no puede ser relajada.

Demostración. Siempre es posible elegir dos lados adyacentes de K , l_1 y l_2 , tales que K esté contenido en el paralelogramo definido por dichos lados (observemos que este paralelogramo tiene diámetro del mismo orden que K).

Ahora, sea L la transformación afín que aplica l_1 en el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$; y l_2 en el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$ y llamemos $\tilde{K} = L(K)$ (esta transformación también fue usada en [21]). No es difícil ver que $\tilde{K} = K(1, 1, \tilde{a}, \tilde{b})$ con $\tilde{a}, \tilde{b} \leq 1$, y un argumento estándar muestra que (7.1.2) sigue de (7.1.1) por un cambio de variables.

Con el objeto de probar (7.1.3), observemos que el Lema 4.1.3 establece que K puede ser transformado en un cuadrilátero convexo del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ satisfaciendo (H1), (H2), (H3), (H4) con constantes $\bar{\psi}$ y N_i , $i = 1, 2, 3$ que dependen únicamente de N y ψ_M cuyo diámetro h es equivalente al de K . Más aún, del Lema 2.2.1 sabemos que la estimación del error sobre K sigue del de $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$. En consecuencia es suficiente probar la estimación del error para estas configuraciones de referencia con una constante que dependa solamente de $\bar{\psi}$ y N_i .

Ahora, la desigualdad (7.1.3) sigue de (2.3.1) combinado con (6.2.1), (6.1.1) y (4.1.29). El contraejemplo 7.2.1 muestra que $p < 3$ es condición necesaria.

Finalmente, la demostración de (7.1.4) sigue como la de (7.1.3) reemplazando el Lema 4.1.3 por el Lema 5.1.1, y usando nuevamente el Lema 2.2.1 y las ecuaciones (2.3.1) combinadas con (6.2.1), (6.1.1) y (5.1.3).

El contraejemplo 7.2.1 muestra que la condición sobre el ángulo máximo es necesaria si $p \geq 3$.

□

7.2. Contra-ejemplo.

Contra-ejemplo 7.2.1 *Mostraremos que la asunción $1 \leq p < 3$ no puede ser relajada en el último teorema si K verifica la RDP. Para ello consideraremos $K = K(1, 1, a, a)$, con $\frac{1}{2} < a < 1$, la idea es tomar $a \rightarrow \frac{1}{2}$.*

Ya vimos en el Ejemplo 4.0.2 que K verifica la RDP $(2, \frac{3}{4}\pi)$ independientemente de a .

Consideremos $u(x, y) = xy$ (notemos que esta función no está en el espacio Q_1 si $a < 1$).

Notemos que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^p(K)} \leq 1 \quad y \quad |u|_{W^{2,p}(K)} \leq 1.$$

Por otro lado, como $Qu = a^2\phi_3$, tenemos

$$\left\| \frac{\partial Qu}{\partial x} \right\|_{L^p(K)} = a^2 \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)} \quad (7.2.1)$$

y de (3.1.4) podemos escribir

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\hat{y}^p}{(1 + \hat{x}(a-1) + \hat{y}(a-1))^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} \\ &\geq \frac{1}{2^p} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + (a-1)\hat{x} + (a-1)\hat{y})^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}. \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Integrando explícitamente para $p > 3$ obtenemos

$$\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \geq \frac{((2a-1)^{3-p} - (\frac{3}{2}a - \frac{1}{2})^{3-p} - a^{3-p} + (\frac{1}{2} + \frac{a}{2})^{3-p})}{2^p(3-p)(2-p)(a-1)^2}$$

y así $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^p(K)}^p \rightarrow \infty$ si $a \rightarrow \frac{1}{2}$, mostrando que (7.1.3) no puede valer independientemente de a .

Consideremos ahora el caso $p = 3$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^3(K)}^3 &\geq \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + (a-1)\hat{x} + (a-1)\hat{y})^2} d\hat{x}d\hat{y} \\ &= \frac{\ln(\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}) + \ln(a) - \ln(2a-1) - \ln(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2})}{(a-1)^2}. \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Luego, el término logarítmico $-\ln(2a-1)$ es el responsable del hecho que $\left\| \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\|_{L^3(K)}^3 \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \frac{1}{2}$, permitiéndonos concluir lo mismo.

Finalmente, observemos que el mismo contra-ejemplo implica que la restricción sobre el ángulo máximo no puede ser relajada si $p \geq 3$.

Capítulo 8

La propiedad de descomposición regular generalizada y nueva propiedad de descomposición regular.

En este capítulo tenemos como intención dar un panorama sobre un trabajo posterior a [4], a saber [16], en el cual se generalizan en cierto modo, las propiedades dadas en el citado artículo.

Damos aquí una descripción de estas condiciones generalizadas, las comparamos con las originales y enunciamos los principales resultados obtenidos al respecto. No incluimos las demostraciones con el afán de hacer menos engorrosa la lectura. Sin embargo, consideramos pertinente incluir algunos resultados técnicos para dar cuenta que parte del procedimiento y la técnica usada es similar a la de [4], aunque en este trabajo no se reduzca el estudio a una configuración de referencia.

8.1. Definición y notación.

En [16] los autores introducen una nueva condición, llamada la *propiedad de descomposición regular generalizada*, que resulta suficiente para garantizar la validez de la estimación del error de interpolación para la Q_1 -interpolación de Lagrange; y que puede ser entendida como una generalización de la condición de descomposición regular tal como su nombre lo indica.

Básicamente, dicha condición establece que si se divide al cuadrilátero en dos triángulos por la diagonal más larga, cuando ambos triángulos tengan áreas comparables, ambos triángulos deberán satisfacer la condición del ángulo máximo; de otra manera, la condición del ángulo máximo solo deberá ser satisfecha por el triángulo más grande T_1 . Este último condicionamiento se debe a que, si el área del triángulo más chico T_3 es considerablemente menor al área de T_1 , el error sobre T_3 contribuye poco al error global, y en consecuencia su ángulo máximo puede ser tan grande como se quiera siempre que la razón $\frac{|T_3|}{|T_1|}$ tienda a cero. Es decir, en el caso que el cuadrilátero K degenera al triángulo más grande, la condición del ángulo máximo sobre el triángulo más chico puede ser relajada siempre que la razón $\frac{|T_3|}{|T_1|}$ esté controlada.

Formalmente, la definición de la propiedad de descomposición generalizada es la siguiente:

Definición 8.1.1 *Sea K un cuadrilátero convexo. Diremos que K satisface la propiedad de descomposición generalizada (generalized regular decomposition property) con constantes $N \in \mathbb{R}_+$ y $0 < \psi < \pi$, o simplemente $GRDP(N, \psi)$, si es posible dividir a K en dos triángulos por una de*

sus diagonales, llamada siempre d_1 , de forma tal que el triángulo más grande satisfaga $MAC(\psi)$ y

$$\frac{h_K}{|d_1| \operatorname{sen}(\alpha)} \left(\frac{|T_3|}{|T_1|} \ln \left(\frac{|T_1|}{|T_3|} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq N, \quad (8.1.1)$$

donde el triángulo más grande será denotado siempre por T_1 , el triángulo restante por T_3 , h_K denota el diámetro del cuadrilátero K y α es el máximo ángulo de T_3 .

Observación 8.1.1 Si bien la definición dada arriba se basa en la geometría del cuadrilátero K , y no involucra, en principio, ningún espacio de funciones asociado; dicha definición será la definición de la $GRDP$ cuando K sea visto en el marco de la teoría de Elementos Finitos donde el espacio de las funciones a interpolar sea H^1 .

Más adelante, veremos que la definición de la $NRDP$ (una suerte de generalización de la $GRDP$) es esencial y significativamente distinta, si se trabaja en el espacio $W^{1,p}$ dependiendo del p considerado.

8.2. Observaciones sobre la $GRDP$ y la RDP .

Como ya mencionamos, en [16] los autores prueban que la $GRDP$, que puede ser entendida como una generalización de la RDP , es suficiente para la validez de la estimación del error de interpolación para la Q_1 -interpolación de Lagrange.

En cuanto a la suficiencia para dicha estimación nos encargaremos más adelante, por lo pronto, concentrándonos en la *generalización* notemos que

$$RDP(N, \psi) \Rightarrow GRDP(\eta, \psi) \quad (8.2.1)$$

donde $\eta = \eta(N)$.

En efecto, supongamos que un cuadrilátero K satisface $RDP(N, \psi)$ al ser dividido por la diagonal d_1 en los triángulos T_1 y T_3 . Adoptemos la notación de modo que $|T_1| \geq |T_3|$. Siguiendo la Definición 8.1.1, resta mostrar que (8.1.1) se verifica pues T_1 verifica $MAC(\psi)$ por hipótesis. Ahora, como $x \ln(x^{-1}) \leq e^{-1} \forall x \in [0, 1]$, para verificar (8.1.1) basta mostrar que se cumple

$$\frac{h_K}{|d_1| \operatorname{sen}(\alpha)} \leq cte. \quad (8.2.2)$$

Pero como α es el máximo ángulo de T_3 , y T_3 verifica $MAC(\psi)$ por hipótesis, resulta que

$$\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \psi < \pi;$$

de donde sigue

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} \leq \max \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\operatorname{sen}(\psi)} \right\}.$$

De modo que para mostrar (8.2.2) basta ver que

$$\frac{h_K}{|d_1|} \leq cte. \quad (8.2.3)$$

Observemos el siguiente hecho básico, consecuencia del Teorema del seno:

Sea T un triángulo de lados $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell_3$ y sea $\delta = \angle \ell_1 \ell_3$, entonces

$$\frac{\ell_3}{\ell_2} \leq \frac{1}{\text{sen}(\delta)}.$$

Es decir, en un triángulo cualquiera los lados más largos del mismo siempre resultan comparables y la constante de comparación depende, básicamente, de los ángulos interiores del triángulo. En particular, si T verifica $MAC(\psi)$,

$$\frac{\ell_3}{\ell_2} \leq C(\psi).$$

Luego, si d_1 es la diagonal más larga de K , h_K y d_1 resultan ser los lados más largos de T_1 o T_3 , y así (8.2.3) vale. En otro caso, d_2 y h_K son comparables pues d_2 y h_K resultan ser los lados más largos de T_1 o T_3 , entonces (8.2.3) sigue observando que

$$\frac{h_K}{|d_1|} = \frac{h_K}{|d_2|} \frac{|d_2|}{|d_1|} \leq \frac{h_K}{|d_2|} N$$

ya que K verifica la $RDP(N, \psi)$.

Sin embargo, la implicación recíproca de (8.2.1) no es válida como puede apreciarse en el siguiente ejemplo, que es el usado en [16].

Ejemplo 8.2.1 Consideremos $K = K(1, a, a^s, a)$ con $s > 2$ y $0 < a < 1$.

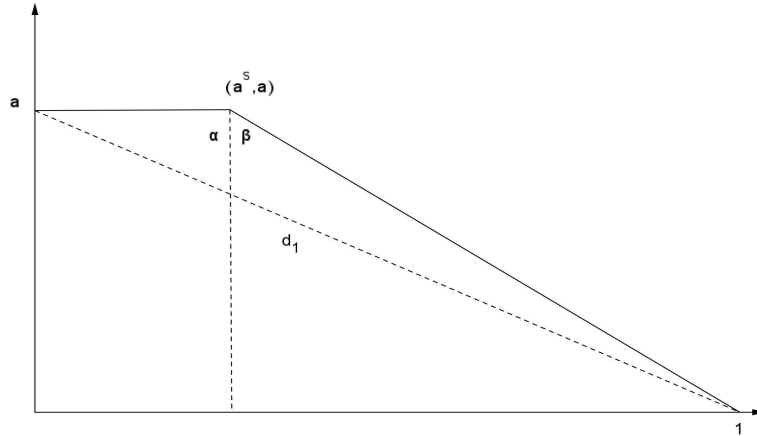


Figura: representación del elemento $K(1, a, a^s, a)$.

Es claro que al dividir K por la diagonal M_2M_4 , el triángulo T_3 de vértices M_2 , M_3 y M_4 no verifica la condición del ángulo máximo puesto que el ángulo opuesto a dicha diagonal, α , tiende a π cuando $a \rightarrow 0$. En consecuencia, K no satisface la RDP .

Por otro lado, notemos que

(a) $h_K = |d_1| = \sqrt{1 + a^2}$;

(b) $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\beta) = \frac{a}{\sqrt{(1 - a^s)^2 + a^2}}$;

(c) $|T_1| = \frac{a}{2}$, donde T_1 es el triángulo de vértices M_1 , M_2 y M_4 ;

(d) $|T_3| = \frac{a^{s+1}}{2}$.

Por lo tanto, para $s > 2$ fijo y $a \rightarrow 0$ resulta que

$$\frac{h_K}{|d_1| \text{sen}(\alpha)} \left(\frac{|T_3|}{|T_1|} \ln \left(\frac{|T_1|}{|T_3|} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = [((1 - a^s)^2 + a^2) a^{s-2} \ln(a^{-s})]^{\frac{1}{2}}$$

tiende a cero, con lo cual, tomando a suficientemente pequeño, se verifica (8.1.1) para una constante N independiente de a .

Finalmente, notemos que T_1 verifica $MAC(\pi/2)$, por lo que K verifica la $GRDP(N, \pi/2)$.

Si bien es factible entender la $GRDP$ como una generalización de la RDP en el sentido antes señalado, es justo observar que la $GRDP$ no tiene una interpretación geométrica tan clara como la RDP y su verificación implica un costo computacional más alto. Estos hechos han sido observados por los autores de [16], pues los mismos proponen una condición equivalente a (8.1.1) que es de verificación más simple. En la siguiente observación recopilamos estos hechos.

Observación 8.2.1 Si θ denota el menor ángulo entre d_1 y d_2 ; y partimos d_2 en a_1 y a_3 siendo $a_1 = d_2 \cap T_1$ y $a_3 = d_2 \cap T_3$, entonces

$$|T_1| = \frac{|d_1| |a_1| \text{sen}(\theta)}{2} \quad y \quad |T_3| = \frac{|d_1| |a_3| \text{sen}(\theta)}{2}.$$

En consecuencia,

$$\frac{|T_3|}{|T_1|} = \frac{|a_3|}{|a_1|} \tag{8.2.4}$$

y entonces (8.1.1) puede re-escribirse como sigue

$$\frac{h_K}{|d_1| \text{sen}(\alpha)} \left(\frac{|a_3|}{|a_1|} \ln \left(\frac{|a_1|}{|a_3|} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq N. \tag{8.2.5}$$

Notemos que hasta aquí se ha realizado una mejora en cuanto al costo computacional de (8.1.1), pues se ha logrado reducir el cálculo de áreas al cálculo de longitudes. Sin embargo, a pesar que se ha hecho una reducción, la misma no resulta considerablemente significativa.

Finalmente, en [16], los autores sostienen que si se elige la diagonal más larga como d_1 , la condición (8.1.1) se reduce a

$$\frac{1}{\text{sen}(\alpha)} \left(\frac{|a_3|}{|a_1|} \ln \left(\frac{|a_1|}{|a_3|} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq N \tag{8.2.6}$$

(lo cual es claro por la observación previa y el hecho que en este caso, h_K y d_1 resultan comparables).

Sin embargo, al menos dos objeciones pueden realizarse a esta afirmación, a saber, (a) si bien (8.2.6) representa una mejora computacional respecto de (8.1.1), la misma no es verdaderamente significativa como ya hemos señalado; (b) si bien la elección de d_1 como la diagonal más larga permite concluir (8.2.6), recordemos que tal reducción se basa en el hecho que d_1 y h_K resultan comparables, y el control de la constante que acota h_K/d_1 puede ser un problema cuando se trabaja en una malla grande ya que dicha cota puede no ser uniforme.

8.3. La estimación del error en H^1 .

Para el abordaje de dicha estimación los autores proceden de igual manera que en [1], [13] y [4]; descomponiendo el error mediante el P_1 -operador de interpolación de Lagrange asociado a los vértices M_1 , M_2 y M_4 , al cual seguiremos denotando por Π , tal como en la sección 2.3.

Recordamos que la descomposición obtenida es

$$|u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq |u - \Pi u|_{W^{1,p}(K)} + |(\Pi u - u)(M_3)| |\phi_3|_{W^{1,p}(K)}. \quad (8.3.1)$$

De esta manera, para obtener una estimación del error de interpolación es suficiente estimar los dos términos del lado derecho.

Recordemos también que, tanto en [2] como en [4], se reducía el estudio a una familia de referencia y ésta era una de las herramientas claves usadas en dichos trabajos. Sin embargo, dado que ahora no es impuesta la condición del ángulo máximo sobre el triángulo más chico, no es posible adoptar la misma técnica.

Por esto, se prueban en [16] los siguientes resultados que aquí solo enunciaremos remitiendo a [16] para las pruebas pero que combinan, principalmente, técnicas usadas en [13] y [2].

Lema 8.3.1 *Sea K un cuadrilátero convexo cualquiera con vértices consecutivos M_1 , M_2 , M_3 y M_4 . Sea θ el ángulo entre las dos diagonales M_1M_3 (denotada por d_2) y M_2M_4 (denotada por d_1) y sea $O = d_1 \cap d_2$. Sean $a_i = |OM_i| > 0$ para $i = 1, 2, 4$ y $a_3 = |OM_3| \geq 0$; y denotemos por α y s al máximo ángulo y al lado más corto de T_3 , respectivamente. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $|M_3M_4| = s$. Entonces se tiene*

$$\int_{\hat{K}} \frac{1}{|J_K|} d\hat{x}d\hat{y} < \frac{4}{|d_1||s|\sin(\alpha)} \frac{|T_3|}{|T_1|} \left(2 + \ln \left(\frac{|T_1|}{|T_3|} \right) \right) \quad (8.3.2)$$

donde J_K es el jacobiano del mapeo $F_K : \hat{K} \rightarrow K$.

El lema previo permite obtener una estimación de $|\phi_3|_{H^1(K)}$ que se resume en el siguiente

Lema 8.3.2 *Sea K un cuadrilátero convexo cualquiera que verifica las mismas hipótesis que en el Lema 8.3.2. Entonces se tiene*

$$|\phi_3|_{H^1(K)} \leq \frac{8h_K}{(|d_1||s|\sin(\alpha))^{1/2}} \left(\frac{|T_3|}{|T_1|} \left(2 + \ln \left(\frac{|T_1|}{|T_3|} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.3.3)$$

Por otro lado, tenemos las siguientes estimaciones:

Lema 8.3.3 *Sea K un cuadrilátero convexo cualquiera, entonces se tiene*

$$|(u - \Pi u)(M_3)| \leq \left(\frac{4|s|}{|d_1|\sin(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} \{ |u - \Pi u|_{H^1(T_3)} + h_K |u|_{H^2(T_3)} \}. \quad (8.3.4)$$

Lema 8.3.4 Sea K un cuadrilátero convexo cualquiera, entonces se tiene

$$|u - \Pi u|_{H^1(K)} \leq \frac{4}{\sin(\gamma)} \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{2|K|}{|T_1|}\right)^{\frac{1}{2}} h_K |u|_{H^2(K)} \quad (8.3.5)$$

donde γ es el máximo ángulo de T_1 .

Finalmente, combinando todos los lemas previos se obtiene el resultado principal, es decir, la estimación del error en H^1 para elementos cuadriláteros.

Teorema 8.3.1 Sea K un cuadrilátero convexo que satisfice $GRDP(N, \psi)$, entonces

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch_K |u|_{H^2(K)} \quad (8.3.6)$$

donde C es una constante positiva que depende únicamente de N y ψ .

8.4. La NRDP y la estimación del error en $W^{1,p}$.

El aspecto más técnico para demostrar la estimación del error en $W^{1,p}$ radica en la acotación de $|\phi_3|_{W^{1,p}}$. Ahora, dado que

$$\left|\frac{\partial \phi_3}{\partial x}\right| \leq \frac{2h_K}{|J_K|} \quad \text{y} \quad \left|\frac{\partial \phi_3}{\partial y}\right| \leq \frac{2h_K}{|J_K|},$$

resulta que

$$|\phi_3|_{W^{1,p}(K)} \leq 4h_K \left(\int_{\hat{K}} \frac{1}{|J_K|^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}\right)^{\frac{1}{p}}$$

donde J_K es el jacobiano de la aplicación $F_K : \hat{K} \rightarrow K$.

De donde sigue que, para acotar $|\phi_3|_{W^{1,p}}$, es suficiente acotar

$$\int_{\hat{K}} \frac{1}{|J_K|^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y}.$$

Este es el objeto del siguiente lema, en el cual usamos la notación ya adoptada.

Lema 8.4.1 Sea K un cuadrilátero convexo cualquiera, entonces

$$\int_{\hat{K}} \frac{1}{|J_K|^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} < \frac{4^{p-1}}{(2-p)(|d_1||s|\sin(\alpha))^{p-1}} \left(\frac{|T_3|}{|T_1|}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } p \in [1, 2), \quad (8.4.1)$$

$$\int_{\hat{K}} \frac{1}{|J_K|^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} < \frac{4^{p-1}}{(2-p)(3-p)(|d_1||s|\sin(\alpha))^{p-1}} \left(\frac{|T_3|}{|T_1|}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } p \in (2, 3). \quad (8.4.2)$$

Además, si $T_i = \Delta M_{i-1}M_iM_{i+1}$, $1 = 1, 2, 3, 4$, con $M_{1\pm 4} = M_i$ y si se asume, sin pérdida de generalidad, que $|T_3| = \min\{|T_1|, |T_3|\}$ y $|T_4| = \min\{|T_2|, |T_4|\}$, entonces

$$\int_{\hat{K}} \frac{1}{|J_K|^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} \leq \frac{2^{1+\frac{1}{p}} M^{1-\frac{3}{p}+\frac{1}{2p}}}{|T_1|^{\frac{1}{p}} |T_3|^{1-\frac{2}{p}}} \quad \text{para } p \in \left[3, \frac{7}{2}\right], \quad (8.4.3)$$

$$\int_{\hat{K}} \frac{1}{|J_K|^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} \leq \frac{2^{1+\frac{2}{p}} M^{\frac{1}{p}}}{(p-2)^{\frac{1}{p}} |T_1|^{\frac{1}{p}} |T_3|^{1-\frac{2}{p}}} \text{ para } p \in \left(\frac{7}{2}, 4\right], \quad (8.4.4)$$

$$\int_{\hat{K}} \frac{1}{|J_K|^{p-1}} d\hat{x}d\hat{y} < \frac{(p-3)^{\frac{1}{p}} 2^{1+\frac{2}{p}} M^{1-\frac{3}{p}}}{(p-2)^{\frac{1}{p}} |T_1|^{\frac{1}{p}} |T_3|^{1-\frac{2}{p}}} \text{ para } p > 4, \quad (8.4.5)$$

donde $M = \max\left\{1, \frac{|T_3|}{|T_4|}\right\}$.

En consideración a las estimaciones obtenidas en el lema previo se introduce la siguiente definición.

Definición 8.4.1 *Sea K un cuadrilátero convexo. Diremos que K satisface la nueva propiedad de descomposición generalizada (new regular decomposition property) con constantes $N \in \mathbb{R}_+$, $0 < \psi < \pi$ y $p \in [1, \infty)$, $p \neq 2$, o simplemente $NRDP(N, \psi, p)$, si es posible dividir a K en dos triángulos a lo largo de una de sus diagonales, llamada siempre d_1 , de forma tal que el triángulo más grande satisfaga $MAC(\psi)$ y*

$$\frac{h_K}{(2-p)^{\frac{1}{p}} |d_1| \text{sen}(\alpha)} \left(\frac{|T_3|}{|T_1|}\right)^{1/p} \leq N \text{ para } p \in [1, 2), \quad (8.4.6)$$

$$\frac{h_K}{(2-p)^{\frac{1}{p}} (3-p)^{\frac{1}{p}} |d_1| \text{sen}(\alpha)} \left(\frac{|T_3|}{|T_1|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq N \text{ para } p \in (2, 3), \quad (8.4.7)$$

$$\frac{h_K M^{1-\frac{3}{p}+\frac{1}{2p}}}{|d_1| \text{sen}(\alpha)} \left(\frac{|T_3|}{|T_1|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq N \text{ para } p \in \left[3, \frac{7}{2}\right), \quad (8.4.8)$$

$$\frac{h_K M^{\frac{1}{p}}}{|d_1| \text{sen}(\alpha)} \left(\frac{|T_3|}{|T_1|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq N \text{ para } p \in \left(\frac{7}{2}, 4\right], \quad (8.4.9)$$

$$\frac{h_K M^{1-\frac{3}{p}}}{|d_1| \text{sen}(\alpha)} \left(\frac{|T_3|}{|T_1|}\right)^{\frac{1}{p}} \leq N \text{ para } p > 4, \quad (8.4.10)$$

donde el triángulo más grande es llamado T_1 , el triángulo restante es llamado T_3 , h_K denota el diámetro de K , α es el máximo ángulo de T_3 y s el lado más corto de T_3 .

En lo que sigue se enuncian algunos resultados técnicos que permiten demostrar el teorema principal de interpolación para cuadriláteros convexos que satisfacen $NRDP$.

Lema 8.4.2 *Sea K un cuadrilátero convexo arbitrario y sea Π el operador lineal de interpolación de Lagrange definido sobre T_1 , entonces para todo $p \geq 1$ vale*

$$|(u - \Pi u)(M_3)| \leq \left(\frac{2^p |s|^{p-1}}{|d_1| \text{sen}(\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ |u - \Pi u|_{W^{1,p}(T_3)} + h_K |u|_{W^{2,p}(T_3)} \right\}. \quad (8.4.11)$$

Lema 8.4.3 Sea K un cuadrilátero convexo cualquiera y sea Π el operador lineal de interpolación de Lagrange definido sobre T_1 , entonces

$$|u - \Pi u|_{W^{1,p}(K)} \leq (1 + 2C_p) \frac{2^{2-\frac{1}{p}}}{\text{sen}(\gamma)} \left(\frac{|K|}{|T_1|} \right)^{\frac{1}{p}} h_K |u|_{W^{2,p}(K)}$$

donde γ es el mínimo ángulo de T_1 y C_p es la constante de la desigualdad de Poincaré.

Teorema 8.4.1 Sea K un cuadrilátero que satisface $NRDP(N, \psi, p)$ con $p \geq 1$, $p \neq 2$, entonces se tiene

$$|u - Qu|_{W^{1,p}(K)} \leq Ch_K |u|_{W^{2,p}(K)}, \quad (8.4.12)$$

con $C > 0$ dependiendo únicamente de N , ψ y p .

Observación 8.4.1 Puede parecer poco relevante enunciar estos resultados sin sus respectivas pruebas y de un modo ‘enciclopedista’, por decirlo de alguna manera. Sin embargo, nos parece relevante realizar esto para enfatizar que el camino seguido para probar el teorema de interpolación es, básicamente, el mismo que en [2] y [4].

Observación 8.4.2 Notemos también que, de igual manera a como se mostró la validez de la implicación $RDP \Rightarrow GRDP$, puede probarse

$$RDP(N, \psi) \Rightarrow NRDP(\eta, \psi, p)$$

para todo $1 \leq p < 3$ con $\eta = \eta(N)$. Por lo que la $NRDP$ es hasta donde se sabe la condición más débil bajo la cual la estimación del error en $W^{1,p}$ resulta verdadera.

Una última observación a favor de la RDP , es que dicha condición depende únicamente de la geometría de K y no del espacio $W^{1,p}$ considerado; mientras que la $NRDP$ depende tanto de la geometría de K como del p considerado. Además, el costo computacional para verificar la RDP , es considerablemente más bajo que el requerido para la verificación de la $NRDP$. Por estos motivos es que, según nuestro punto de vista, la RDP continua siendo, para $1 \leq p < 3$, la condición geométrica más débil bajo la cual es posible garantizar la estimación óptima del error de interpolación para elementos cuadriláteros convexos Q_1 -isoparamétricos.

8.5. La $NRDP$ y la DAC .

Como vimos en el Capítulo 7, la DAC es una condición suficiente para el teorema de interpolación sobre $W^{1,p}$ para todo $p \geq 1$.

Sin embargo, la DAC es una condición geométrica bastante restrictiva, de hecho, no es difícil mostrar que vale la siguiente cadena de implicaciones

$$DAC(\psi_m, \psi_M) \Rightarrow MAC(\psi_M) \Rightarrow RDP(1, \psi_M) \Rightarrow GRDP(N, \psi_M).$$

Más aún, para $p \geq 3$, la $NRDP$ es una condición bastante más débil que la DAC .

Para justificar esta afirmación comencemos notando que si un cuadrilátero K satisface la $DAC(\psi_m, \psi_M)$ entonces sus diagonales deben ser comparables. En efecto, si esto no fuera así, alguna de las diagonales sería mucho más larga que la restante; en consecuencia, el elemento sería

tan estrecho como se quiera y, por lo tanto, alguno de los ángulos correspondientes a los vértices de la diagonal más larga sería tan chico como se desee, lo que violaría la *DAC*.

Ahora, como el diámetro resulta comparable a la diagonal más larga (ver el apartado 8.2) y ambas diagonales son del mismo orden, sigue que $d_1 = O(h_K)$.

Por otro lado, si llamamos $\alpha_1 = \angle M_2 M_4 M_3$, $\alpha_2 = \angle M_1 M_3 M_4$ y $\ell = \ell_{34}$ tenemos

$$|T_3| = |\ell| |d_1| \operatorname{sen}(\alpha_1) \quad \text{y} \quad |T_4| = |\ell| |d_2| \operatorname{sen}(\alpha_2).$$

Entonces

$$\frac{|T_3|}{|T_4|} = \frac{|d_1| \operatorname{sen}(\alpha_1)}{|d_2| \operatorname{sen}(\alpha_2)} \leq \frac{|d_1|}{|d_2|} \max \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}(\psi_m)}, \frac{1}{\operatorname{sen}(\psi_M)} \right\}$$

y, dado que d_1 y d_2 son comparables, existe una constante $C = C(\psi_m, \psi_M)$ tal que

$$\frac{|T_3|}{|T_4|} \leq C.$$

En suma, hemos visto que existe una constante $C = C(\psi_m, \psi_M)$ tal que

$$\frac{|T_3|}{|T_4|} \leq C \quad \text{y} \quad d_1 = O(h_K).$$

Combinando estos hechos con (8.4.8), (8.4.9) y (8.4.10), resulta que existe una constante $N = N(\psi_m, \psi_M)$ tal que K verifica $NRDP(N, \psi_M, p)$ para todo $p \geq 3$.

De esta forma queda probado que, para $p \geq 3$,

$$DAC(\psi_m, \psi_M) \Rightarrow NRDP(N(\psi_m, \psi_M), \psi_M, p)$$

mostrando que la *NRDP* es la condición más débil bajo la cual es posible garantizar la estimación óptima del error de interpolación para elementos cuadriláteros convexos Q_1 -isoparamétricos cuando $p \geq 3$.

Sin embargo, es pertinente señalar que la *DAC* (al igual que la *RDP*) es una condición que solo depende de la geometría de K y no del espacio $W^{1,p}$ considerado; mientras que la *NRDP*, en cierto sentido, no solo toma en consideración la geometría de K sino también el espacio $W^{1,p}$.

Bibliografía

- [1] ACOSTA G., DURÁN R. G., *The maximum angle condition for mixed and nonconforming elements: Application to the Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal., 37 (2000), 18-36.
- [2] ACOSTA G., DURÁN R. G., *Error estimates for Q_1 isoparametric elements satisfying a weak angle condition*, SIAM J. Numer. Anal., 38 (2000), 1073-1088.
- [3] ACOSTA G., DURÁN R. G., *An optimal Poincaré inequality in L^1 for convex domains*, Proc. Amer. Math. Soc., 132 (2004), 195-202.
- [4] ACOSTA G., MONZÓN G., *Interpolation error estimates in $W^{1,p}$ for degenerate Q_1 isoparametric elements*, Numer. Math., 104 (2006), 129-150.
- [5] APEL T., *Anisotropic interpolation error estimates for isoparametric quadrilateral finite elements*, Computing, 60 (1998), pp. 157-174.
- [6] APEL T., *Anisotropic Finite Elements: Local Estimates and Applications*, Adv. Numer. Math., B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1999.
- [7] APEL T., DOBROWOLSKI M., *Anisotropic interpolation with applications to the finite element method*, Computing, 47 (1992), pp. 277-293.
- [8] BABUŠKA I., AZIZ A. K., *On the angle condition in the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., 13 (1976), 214-226.
- [9] BRENNER S. C., SCOTT R. L., *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* (Second Edition). Text in applied mathematics 15, Springer, 2002.
- [10] CIARLET P. G., RAVIART P. A., *Interpolation theory over curved elements, with applications to finite elements methods*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 1 (1972), 217-249.
- [11] CIARLET P. G., RAVIART P. A., *The finite element method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its applications, vol 4, North-Holland Publishing Company, 1978.
- [12] DURÁN R. G., *Error estimates for narrow 3-d finite elements*, Math. Comp., 68 (1999), pp. 187-199.
- [13] JAMET P., *Estimation of the interpolation error for quadrilateral finite elements which can degenerate into triangles*, SIAM J. Numer. Anal., 14 (1977), 925-930.
- [14] KRÍZEK M., *On semiregular families of triangulations and linear interpolation*, Appl. Math., 36 (1991), pp. 223-232.

- [15] KRÍZEK M, *On the maximum angle condition for linear tetrahedral elements*, SIAM J. Numer. Anal., 29 (1992), pp. 513-520.
- [16] MAO S., NICAISE S., SHI Z. C., *On the interpolation error estimates for Q_1 quadrilateral finite elements*, SIAM J. Numer. Anal., 47 (2008), 467-486.
- [17] MING P., SHI Z.C., *Quadrilateral mesh revisited*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002), 5671-5682.
- [18] PAYNE L. E., WEINBERGER H. F., *An optimal Poincaré inequality for convex domains*, Arch. Rat. Mech. Anal., 5 (1960), 286-292.
- [19] SHENK N. AL., *Uniform error estimates for certain narrow Lagrange finite elements*, Math. Comp., 63 (1994), 105-119.
- [20] VERFÜRTH R., *Error estimates for some quasi-interpolation operator*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 33 (1999), 695-713.
- [21] ZENISEK A., VANMAELE M., *Applicability of the Bramble-Hilbert lemma in interpolation problems of narrow quadrilateral isoparametric finite elements*, J. Comput. Appl Mat., 63 (1995), pp. 109-122.
- [22] ZENISEK A., VANMAELE M., *The interpolation theorem for narrow quadrilateral isoparametric finite elements*, Numer. Math., 72 (1995), pp. 123-141.