



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

# Obstrucciones Topológicas en $K$ -Teoría

Autor: Francisco J. Gozzi

Director: Guillermo Cortiñas

4 de Marzo de 2011



A Martina, Pablo y Guille.



# Índice

<b>0. Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1. <math>K</math>-Teoría</b>	<b>8</b>
1.1. $K_0$ . . . . .	8
1.2. $K_1$ . . . . .	16
<b>2. Invariantes de Álgebra Homológica</b>	<b>21</b>
2.1. Complejos de cadenas y su homología . . . . .	21
2.2. Característica de Euler y Obstrucción de Wall . . . . .	31
2.3. Torsión . . . . .	37
<b>3. Obstrucciones en topología</b>	<b>46</b>
3.1. Obstrucción de finitud . . . . .	46
3.2. Torsión de Whitehead . . . . .	54
<b>4. Apéndice</b>	<b>65</b>
4.1. Homología singular . . . . .	65
4.2. Complejos CW . . . . .	67
4.3. El Recubridor universal . . . . .	71
4.4. Geometría Diferencial . . . . .	72



## 0. Introducción

A mediados de los años 40, J. H. C. Whitehead define los complejos  $CW$  ([Whi49]), los cuales modelan el tipo homotópico de diferentes espacios topológicos, contando entre ellos a los complejos simpliciales y las variedades diferenciables. En este contexto caracteriza aquellas equivalencias homotópicas, entre complejos  $CW$  finitos, que pueden realizarse por una sucesión de ciertas operaciones -expansiones y colapsos elementales- como aquellas donde se anula un invariante asociado: la Torsión de Whitehead de la equivalencia homotópica ([Whi50]).

Más tarde, en la década del 60, esta construcción se aplicaría también a la teoría de cobordismo. El teorema de s-cobordismo muestra que un h-cobordismo es trivial si y sólo si la Torsión de Whitehead asociada (a la inclusión de una de las componentes del borde en el cobordismo) se anula.

Por otra parte, ante el interés por contar con un complejo  $CW$  finito homotópicamente equivalente a un espacio dado, C.T.C. Wall formula la Obstrucción de Finitud, cuya anulación da una condición necesaria y suficiente para contar con tal representante.

En esta tesis la exposición comienza con las construcciones algebraicas, pasando luego a la aplicación topológica. En el primer capítulo dado un anillo con unidad  $R$  definimos grupos abelianos:  $K_0(R)$ ,  $K_1(R)$ , y cocientes de estos objetos. Nuestros invariantes serán elementos de tales grupos. En el segundo capítulo se introducen los complejos de cadena de módulos sobre un anillo  $R$ , y se estudian invariantes homotópicos para estos objetos: la característica de Euler y la torsión de Whitehead. En el tercer capítulo repasamos nociones de teoría de homotopía, e ilustraremos las anteriores construcciones aplicadas al caso de  $CW$ -complejos.



# 1. $K$ -Teoría

## 1.1. $K_0$

### Definiciones, ejemplos

Trabajaremos con módulos a izquierda sobre un anillo con unidad:  
 $(R, +, 0, \cdot, 1) =: R$ , no necesariamente conmutativo.

**Definición 1.1.1.** Un  $R$ -módulo  $P$  se dice proyectivo si todo epimorfismo se retrae, i.e. dada una aplicación  $M \xrightarrow{f} P \rightarrow 0$ , debe existir un morfismo de  $R$ -módulos  $r$  tal que:

$$f \circ r \equiv Id_P$$

$$M \begin{array}{c} \xleftarrow{\dots r \dots} \\ \xrightarrow{f} \end{array} P \rightarrow 0$$

**Lema 1.1.2.**  $P$  proyectivo equivale a que sea sumando directo de un  $R$ -módulo libre, o sea, que exista otro módulo  $Q$  (un complemento proyectivo) tal que:

$$P \oplus Q \cong R^{(I)}$$

para algún conjunto de índices  $I$ .

*Demo.*  $(\Rightarrow)$  Si  $P$  es proyectivo tomamos un conjunto de generadores  $\{x_i\}_{i \in I}$  de modo que las combinaciones lineales a coeficientes en  $R$  cubran todo  $P$ . En particular tenemos un epimorfismo y una retracción:

$$R^{(I)} \begin{array}{c} \xleftarrow{\dots r \dots} \\ \xrightarrow{f} \end{array} P$$

Notemos que  $P \cong Im(r \circ f)$  donde  $(r \circ f)$  es un endomorfismo idempotente de  $M$ . Podemos definir  $Q$  como la imagen por  $Id_M - (r \circ f)$ . Claramente:

$$M \xrightarrow{(r \circ f) \oplus (Id_M - r \circ f)} Im(r \circ f) \oplus Im(Id_M - r \circ f) \cong P \oplus Q$$

$(\Leftarrow)$  Asumamos ahora que  $P \oplus Q \cong R^{(I)}$ , y veamos cómo retraer un epimorfismo dado:  $M \xrightarrow{f} P \rightarrow 0$ . Es claro que podemos retraer cualquier epimorfismo llegando a un libre, eligiendo preimágenes de una base y extendiendo por linealidad. Entonces sumamos  $Q \xrightarrow{Id} Q$  a  $f$  y seguimos teniendo un epimorfismo (ahora llegando a  $P \oplus Q$ ):

$$\begin{array}{ccccc} & & R^{(I)} & & \\ & \nearrow \bar{r} & \parallel & & \\ M \oplus Q & \xrightarrow{f \oplus Id_Q} & P \oplus Q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$



Componiendo la retracción desde el módulo libre, con la proyección a  $M$  armamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & R^{(I)} \\ & \nearrow \pi \circ \tilde{r} & \uparrow i \\ M & \xrightarrow{f} & P \end{array}$$

de modo que hemos encontrado una retracción de  $f$  al tener que:

$$(\pi \cdot \tilde{r} \cdot i) \circ f = Id_P$$

□

**Observación 1.1.3.** Si consideramos los  $R$ -módulos proyectivos finitamente generados, podemos tomar como representantes salvo isomorfismo a los sumandos directos de  $R^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$  (pues basta retraer un epimorfismo generador). El conjunto de clases de isomorfismo de  $R$ -módulos proyectivos finitamente generados,  $\text{Proj}(R)$ , posee estructura de monoide abeliano con la suma directa. O sea que tenemos una operación asociativa, con neutro, conmutativa, para la cual no es necesariamente válida la ley de cancelación. Nos preguntamos entonces qué estructura surge si forzamos la ley cancelativa.

**Definición 1.1.4.** (Completación de Grothendieck)

Dado un semigrupo conmutativo  $S$ , definimos su completación como un grupo  $G(S)$  y un morfismo  $j : S \rightarrow G(S)$ , por el cual se factoriza cualquier morfismo de semigrupos  $\phi : S \rightarrow H$ , llegando a un grupo  $H$ .

O sea, pedimos que verifique la siguiente propiedad universal:

$$\forall f \quad \exists! \bar{f} :$$

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{j} & G(S) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & H \end{array} \quad (1.1.5)$$

**Observación 1.1.6.** La imagen por cualquier morfismo de semigrupos que salga de  $S$  resulta conmutativa, de modo que siempre podemos co-restringirnos al subgrupo generado por la imagen, que resulta abeliano.

Aplicado a  $j$  en (1.1.5) tenemos el subgrupo  $\langle j(S) \rangle \subseteq G(S)$  que por la propiedad universal debe ser todo  $G(S)$  lo que prueba que es un grupo abeliano.

**Observación 1.1.7.** Podemos construir  $G(S)$  de la siguiente forma:

Consideramos los pares  $(x_1, x_2) \in S \times S$  con la suma coordenada a coordenada, relacionados por:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff \exists t \in S : t + x_1 + y_2 = t + y_1 + x_2$$

Podemos pensar que un par es una diferencia formal.

La aplicación  $j$  asignará  $x \mapsto (x + p, p) \in S \times S / \sim$  (tras fijar un elemento cualquiera  $p \in S$ , por ejemplo el neutro si lo hubiera), y en general no será inyectiva. El morfismo inducido no es otro que:

$$\bar{f}(x_1, x_2) = f(x_1) - f(x_2)$$

**Definición 1.1.8.** El  $K_0$  de un anillo  $R$  es la completación de Grothendieck del monoide abeliano de (las clases de isomorfismo de)  $R$ -módulos proyectivos y finitamente generados:

$$K_0(R) := G(\text{Proj}(R))$$

*Observación 1.1.9.* Insistimos en que dos módulos proyectivos  $E$  y  $F$  tales que:

$$[E] = [F] \quad \in K_0(R)$$

no serán necesariamente isomorfos, sino que debe existir un módulo proyectivo y finitamente generado  $Q$  tal que  $E \oplus Q \cong F \oplus Q \in \text{Proj}(R)$ . Observemos que  $Q$  se puede tomar libre y de rango finito (si no lo es basta sumar un complemento). Así,

$$[E] = [F] \iff (\exists k) \quad E \oplus R^k \cong F \oplus R^k$$

*Observación 1.1.10.* Como alternativa a la descripción anterior de  $\text{Proj}(R)$ , podemos recordar que todo módulo proyectivo es isomorfo a la imagen por un endomorfismo idempotente de  $R^n$  (si admite una presentación en  $n$  generadores). Consideraremos entonces todas las matrices idempotentes para los diferentes tamaños posibles, actuando a derecha de vectores y caracterizaremos cuándo dos idempotentes definen módulos isomorfos.

Necesitamos algunas definiciones.

**Definición 1.1.11.**  $\text{Gl}_n(R)$  refiere al *grupo lineal* de matrices de tamaño  $n \times n$ , inversibles, a coeficientes en  $R$ . Tenemos un monomorfismo multiplicativo que permite encajar estos grupos con  $n$  creciente, insertando un bloque y completando la diagonal con 1:

$$\begin{aligned} \text{Gl}_n(R) &\xhookrightarrow{i} \text{Gl}_{n+1}(R) \\ A &\mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Así conseguimos la versión estable  $\text{Gl}(R)$ , como la unión de estos grupos bajo las identificaciones anteriores, formalmente el colímite:

$$R^\times = \text{Gl}_1(R) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Gl}_n(R) \rightarrow \text{Gl}_{n+1}(R) \rightarrow \cdots \longrightarrow \text{Gl}(R)$$

Notemos que es un grupo.

Análogamente podemos encajar las matrices  $M_n(R)$ , agregando ceros, para respetar la estructura aditiva, y conseguir la versión estable: el anillo sin unidad  $M(R)$ .

$$M_n(R) \xhookrightarrow{i} M_{n+1}(R)$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.13)$$

Si nos restringimos a matrices idempotentes en  $M(R)$  tendremos  $\text{Idem}_n(R) \subseteq \text{Idem}(R)$ .

**Lema 1.1.14.** *Si  $f \in \text{Idem}(R)$  y  $g \in \text{Idem}(R)$ , entonces definirán módulos isomorfos  $\text{Im}(f) \cong \text{Im}(g)$  si y sólo si existe  $\alpha \in \text{Gl}(R)$  tal que  $\alpha f \alpha^{-1} = g$ .*

*Demo.* ( $\Leftarrow$ ) La vuelta es trivial, pues agregar ceros no altera la imagen de un idempotente, y la conjugación por  $u \in \text{Gl}_N(R)$  da un isomorfismo de  $R$ -módulos, por multiplicación a derecha si las matrices actuaban a derecha sobre vectores fila.

( $\Rightarrow$ ) Recíprocamente, tenemos un isomorfismo de  $R$ -módulos:  $\delta : R^n f \rightarrow R^m g$  que podemos extender por cero al complemento de  $R^n f$  en el dominio, y a todo  $R^m$  en el codominio por la inclusión canónica. Así, tendremos una matriz:  $d \in R^{n \times m}$ , y lo mismo para:  $\delta^{-1} =: \epsilon$ , recuperando una matriz  $e \in R^{m \times n}$ . Notemos que:

$$\begin{aligned} d \cdot e &= f \\ e \cdot d &= g \\ d &= f \cdot d = d \cdot g \\ e &= g \cdot e = e \cdot f \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Además  $(1 - f)$  será idempotente si  $f$  lo era.

Tenemos una matriz inversible de tamaño  $N = n + m$ :

$$\begin{pmatrix} 1-f & d \\ e & 1-g \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix}$$

Tal matriz conjuga nuestros idempotentes  $f$  y  $g$ , pues usando (1.1.15) resulta:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1-f & d \\ e & 1-g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-f & d \\ e & 1-g \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1-f & d \\ e & 1-g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

La estabilización anterior corresponde a ver los elementos en  $M(R)$ , en particular en  $\text{Idem}(R)$ , y considerar allí la acción de  $\text{Gl}(R)$ . Reformulando el Lema 1.1.14 tenemos el siguiente Corolario.

**Corolario 1.1.16.** *La aplicación  $\text{Idem}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Proj}(\mathbb{R})$ , dada por  $e \mapsto \text{Im}(e)$  induce una biyección:*

$$\text{Idem}(\mathbb{R})/\text{Gl}(\mathbb{R}) \cong \text{Proj}(\mathbb{R})$$

*Bajo esta biyección, la suma directa de módulos corresponde a la suma directa de matrices; si  $e \in \text{Idem}_n(\mathbb{R})$  y  $f \in \text{Idem}_m(\mathbb{R})$  son los idempotentes que corresponden a los módulos  $P$  y a  $Q$ , entonces*

$$e \oplus f = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

*corresponde a  $P \oplus Q$ .*

*Ejemplo 1.1.17.* Si  $\mathbb{K}$  es un cuerpo todo módulo es un espacio vectorial, por lo tanto libre y en particular proyectivo. La noción de dimensión permite clasificar salvo isomorfismo, mostrando que:  $\text{Proj}(\mathbb{K}) = \mathbb{N}_0$ . En consecuencia:

$$K_0(\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}$$

*Ejemplo 1.1.18.* Lo mismo ocurre para un anillo  $R$  que sea dominio de ideales principales (DIP). Por el teorema de estructura para tales anillos, un  $R$ -módulo finitamente generado  $M$ , debe ser isomorfo a una parte libre en suma directa con una de torsión. Escribimos:

$$M \cong \bigoplus_{n \leq N} R/I_n$$

para finitos ideales  $I_n \subset R$ , donde los propios dan la parte de torsión y los triviales la parte libre. Pero tal epimorfismo,  $R^N \rightarrow M$  no se retrae, en caso de haber torsión no nula.

Así un  $R$ -módulo proyectivo finitamente generado sólo puede ser libre.

Para un anillo local vale lo mismo, referimos al respecto a [Ros94, 1.3.11].

Veamos un ejemplo geométrico.

**Proposición 1.1.19.** *Sea  $A = C^\infty(X)$  el anillo de funciones suaves en  $X$  a valores reales, donde  $X$  es una variedad suave (ver 4.4.2). Podemos identificar a los  $A$ -módulos proyectivos finitamente generados con los fibrados vectoriales reales  $C^\infty$  localmente triviales sobre  $X$  (ver 4.4.8). El isomorfismo asocia a un fibrado  $E$  su módulo de secciones.*

$$(E \xrightarrow{p} X) \mapsto \Gamma(X, E) = \{s : X \rightarrow E/p \circ s = \text{Id}_X\} \in \text{Proj}(A) \quad (1.1.20)$$

*Demo.* Fijado un fibrado  $E$ , las operaciones  $C^\infty(X)$ -lineales entre las secciones (suma y multiplicación por escalares), son operaciones  $\mathbb{R}$ -lineales en cada fibra, mostrando que tenemos un  $A$ -módulo. Para ver que es proyectivo y finitamente generado basta construir un complemento a un módulo libre de rango finito. Usando 4.4.11 tenemos  $F \rightarrow X$  un fibrado vectorial sobre  $X$  tal que  $E \oplus F \cong$

$X \times \mathbb{R}^N$ , cuya imagen por la aplicación (1.1.20) da un complemento proyectivo, pues:

$$\Gamma(X, E) \oplus \Gamma(X, F) \cong \Gamma(X, E \oplus F) \cong \Gamma(X, X \times \mathbb{R}^N) \cong A^N$$

Un isomorfismo de fibrados sobre  $X$  induce un isomorfismo entre las fibras, y -siendo una aplicación  $C^\infty$ - preserva secciones suaves. Recíprocamente, un isomorfismo de  $A$ -módulos es lineal para cada  $x \in X$ , i.e. actúa respetando las fibras, y es regular porque envía secciones suaves en secciones suaves. Esto prueba la buena definición y la inyectividad de (1.1.20).

Para la sobreyectividad, dado  $P$  un  $A$ -módulo proyectivo, y un complemento  $Q$  tal que:  $P \oplus Q \cong A^N$ , podemos ver los elementos de  $P \subseteq A^N$  como funciones  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$  y considerar:

$$\{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^N / \exists f \in P \ f(x) = v\} \quad (1.1.21)$$

Este conjunto resulta un fibrado con la proyección en la primera coordenada. Para ver que es localmente trivial consideramos  $f_1, \dots, f_k \in P$  tales que  $f_1(x), \dots, f_k(x)$  den una base de la fibra puntual de (1.1.21), y correspondientes  $g_1 \cdots g_{N-k} \in Q$  dando una base de la fibra asociada a  $Q$  en el punto  $x$ . Así, debe existir un menor de tamaño  $k \times k$  dentro de la matriz formada por los vectores  $\{f_i(x)\}_i$  y un correspondiente menor de tamaño  $N - k \times N - k$  asociada a los  $\{g_j(x)\}_j$ , ambos de determinante no nulo, lo cual será válido para todo un entorno -por continuidad- probando que los mismos  $f_1, \dots, f_k$  dan la trivialización local.  $\square$

**Definición 1.1.22.** El morfismo natural de los enteros en cualquier anillo con unidad:  $\mathbb{Z} \rightarrow R$ , induce un morfismo a nivel  $K_0$ :

$$K_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} K_0(R)$$

El cociente asociado es el  $K_0$  reducido asociado a  $R$ :

$$\tilde{K}_0(R) := K_0(R)/i_*(\mathbb{Z})$$

*Observación 1.1.23.* En los ejemplos 1.1.17 y 1.1.18 tenemos  $\tilde{K}_0(R) = 0$ .

El  $K_0$  reducido de un dominio de Dedekind coincide con el grupo de clases, como desarrolla [Ros94, 1.4].

Volvemos a las propiedades generales.

*Observación 1.1.24.* Dados  $R_i$  anillos  $i = 1, 2$ , el producto de anillos induce productos en las matrices y construcciones asociadas:  $M_n(R)$ ,  $\text{Idem}_n(R)$ ,  $\text{Gl}_n(R)$ , y en particular:

$$\text{Idem}(R_1 \times R_2) \cong \text{Idem}(R_1) \times \text{Idem}(R_2)$$

$$\text{Gl}(R_1 \times R_2) \cong \text{Gl}(R_1) \times \text{Gl}(R_2)$$

de donde se deduce que:

$$K_0(R_1 \times R_2) \cong K_0(R_1) \times K_0(R_2) \quad (1.1.25)$$

*Observación 1.1.26.* Un morfismo de anillos con unidad  $f : R_1 \rightarrow R_2$  induce un morfismo en las matrices, y así en los idempotentes que definen un módulo proyectivo, pasando al cociente resulta naturalmente un morfismo semigrupos y por tanto uno de grupos abelianos:

$$K_0(R_1) \xrightarrow{f_*} K_0(R_2)$$

Esto convierte a  $K_0$  en un funtor covariante de la categoría de anillos en la de grupos abelianos.

### Escisión de $K_0$

Dado un anillo y un ideal bilátero, estudiamos el efecto a nivel  $K_0$  del morfismo de anillos dado por la proyección al anillo cociente.

**Definición 1.1.27.** Sea  $I \subseteq R$ , un ideal bilátero dentro de un anillo. Consideramos el doble de  $R$  a lo largo de  $I$  como subanillo de  $R \times R$  dado por:

$$D(R, I) = \{(x, y) \in R \times R : x - y \in I\}$$

y observamos el morfismo inducido a nivel  $K_0$  por la proyección en la primera coordenada,  $P_1 : D(R, I) \rightarrow R$ . Definimos entonces el  $K_0$  de  $I$  relativo a  $R$  como un núcleo:

$$K_0(R, I) := \text{Ker}\{(P_1)_* : K_0(D(R, I)) \rightarrow K_0(R)\}$$

*Observación 1.1.28.* Otro morfismo canónico a considerar es la proyección al cociente  $\pi : R \rightarrow R/I$ . Si  $a \in R$ , o más en general, si  $a \in M_n(R)$ , notamos la imagen por  $\pi$  como  $\bar{a} \in M_n(R/I)$ .

### **Teorema 1.1.29.** (*Escisión*)

*Tenemos la siguiente sucesión exacta:*

$$K_0(R, I) \xrightarrow{(P_2)_*} K_0(R) \xrightarrow{\pi_*} K_0(R/I)$$

*Demo.* Sea un elemento genérico:

$$[e] - [f] \in K_0(R, I) \subseteq K_0(R \times R)$$

$$e = (e_1, e_2), \quad f = (f_1, f_2) \in \text{Idem}(D(R, I)) \quad (1.1.30)$$

Usando la identificación  $K_0(R \times R) = K_0(R) \oplus K_0(R)$  (ver 1.1.25) tendremos

$$[e] = ([e_1], [e_2])$$

$$[f] = ([f_1], [f_2])$$

Resulta entonces

$$[e] - [f] = ([e_1] - [f_1], [e_2] - [f_2]) \in K_0(R \times R)$$

y por estar en  $K_0(R, I)$  vale:

$$(P_1)_*([e] - [f]) = [e_1] - [f_1] = 0 \in K_0(R)$$

En particular al reducir módulo  $I$  vale:

$$[\bar{e}_1] - [\bar{f}_1] = 0$$

Y de (1.1.30) resulta:

$$\bar{e}_1 - \bar{e}_2 = 0$$

$$\bar{f}_1 - \bar{f}_2 = 0$$

entonces:

$$[\bar{e}_2] = [\bar{f}_2] \in K_0(R/I)$$

Y así:

$$(P_2)_*(K(R, I)) \subseteq \text{Ker}(\pi_*)$$

Verifiquemos la otra contención considerando un elemento  $[e] - [f] \in K_0(R)$  tal que:

$$0 = \pi_*([e] - [f]) = [\bar{e}] - [\bar{f}]$$

Interpretando los elementos de  $K_0$  como matrices idempotentes, eso significa que  $\bar{e}$  y  $\bar{f}$  son establemente equivalentes. Tras estabilizar, sumando matrices identidad de tamaño adecuado,  $\bar{e} \oplus 1_n$  y  $\bar{f} \oplus 1_m$  resultan conjugadas. Efectuando eventualmente este reemplazo suponemos en adelante que  $\bar{e}$  y  $\bar{f}$  son conjugados.

$$\exists \bar{g} \in GL_n(R/I) / \bar{e} = \bar{g} \bar{f} \bar{g}^{-1} \in \text{Idem}(R/I)$$

Queríamos levantar esta situación a  $R$ . Notemos que mientras es claro que toda matriz sobre  $R/I$  tiene un representante a coeficientes en  $R$ , no vale en general que podamos levantar una matriz inversible a otra matriz que también sea inversible, pero sobre  $R$ . Podemos asegurar lo siguiente:

$$\bar{A} \in GL_n(R/I) \implies \bar{A} + \bar{A}^{-1} \in \pi_*(GL_{2n}(R))$$

lo cual será probado en el Lema 1.1.31 a continuación.

Pero entonces basta considerar  $\bar{e} + 0_n$  en lugar de  $\bar{e}$ , lo mismo para  $\bar{f}$ , y  $\bar{g} \oplus \bar{g}^{-1}$  en el lugar de  $\bar{g}$ , levantando la conjugación a  $R$ .  $\square$

**Lema 1.1.31.** *Sea  $I$  un ideal de  $R$  y  $\pi$  la proyección al cociente  $R/I$ . Vale:*

$$\bar{A} \in GL_n(R/I) \implies \bar{A} \oplus \bar{A}^{-1} \in \pi_*(GL_{2n}(R))$$

*Demo.* Lo vemos por un cómputo directo:

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \\ & \bar{A}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{A} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -(\bar{A})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{A} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad (1.1.32)$$

Levantando  $\bar{A}$  a  $A$  y  $\bar{A}^{-1}$  a  $N$  una matriz no necesariamente inversible en  $R$ , el producto de la derecha queda inversible por ser matrices triangulares.  $\square$

## 1.2. $K_1$

**Definición 1.2.1.** Definimos el  $K_1$  de un anillo (con unidad) como la abelianización de la versión estable de  $\text{Gl}_n(\mathbb{R})$ :

$$K_1(R) := \text{Gl}(R) / [\text{Gl}(R), \text{Gl}(R)]$$

*Notación.* Indicamos por  $e_{ij}$  a la matriz cuyo único coeficiente no nulo es 1 en el lugar  $(i, j)$ .

**Definición 1.2.2.** Por  $E_n(R)$  denotaremos al subgrupo de  $\text{Gl}_n(\mathbb{R})$  generado por las matrices:  $(Id_n + \alpha \cdot e_{ij})$ , con  $j \neq i$ . Siendo matrices triangulares son todas inversibles.

$$E_n(R) := \langle (Id_n + \alpha \cdot e_{ij}) \mid \alpha \in R, j \neq i \rangle \subset \text{Gl}_n(\mathbb{R})$$

$E(R)$  será el generado por éstas dentro de  $\text{Gl}(R)$ :

$$E(R) := \bigcup_n E_n(R) \subset \text{Gl}(R)$$

Un elemento de  $E(R)$  es una matriz elemental.

*Observación 1.2.3.* Veamos algunas matrices que siempre tenemos dentro de las elementales:

1. Toda matriz triangular:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \in E(R) \quad (1.2.4)$$

pues son generadas por las  $e_{ij}(a)$  con  $a \in R$  e  $i > j$ . Y también las

$$\text{correspondientes transpuestas, } \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in E(R)$$

- 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in E(R) \quad (1.2.5)$$

Pues tenemos la descomposición como producto de matrices triangulares, por ende elementales:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



3. Dada cualquier matriz  $A \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ , tenemos:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in E_{2n}(\mathbb{R}) \quad (1.2.6)$$

pues referimos a la descomposición (1.1.32) en matrices elementales.

**Lema 1.2.7.** (*Whitehead*)

$$[\text{Gl}(\mathbb{R}), \text{Gl}(\mathbb{R})] = [\text{E}(\mathbb{R}), \text{E}(\mathbb{R})] = \text{E}(\mathbb{R})$$

*Demo.* Todo generador de  $E(\mathbb{R})$  está en  $[E(\mathbb{R}), E(\mathbb{R})]$  como lo muestra el siguiente cómputo:

$$e_{ij}(\alpha) = [e_{ik}(\alpha), e_{kj}(1)]$$

donde  $i, j, k$  son todos distintos, y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Así,

$$E(\mathbb{R}) \subseteq [E(\mathbb{R}), E(\mathbb{R})] \subseteq [\text{Gl}(\mathbb{R}), \text{Gl}(\mathbb{R})]$$

Veamos la otra contención considerando  $A, B \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ , y factorizando:

$$\begin{pmatrix} ABA^{-1}B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & B^{-1}A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

La prueba concluye notando que los factores a la derecha son matrices elementales en  $E_{2n}(\mathbb{R})$ , de acuerdo a lo observado en (1.2.6).  $\square$

*Observación 1.2.8.* La suma directa de matrices (suma por bloques) coincide con la multiplicación en  $K_1(\mathbb{R})$ , pues:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

(estabilizando para considerar matrices del mismo tamaño).

*Notación.* Si  $R$  es un anillo, denotamos  $R^\times$  al grupo de unidades, y  $R_{ab}^\times$  a su abelianización.

**Definición 1.2.9.** El cociente del morfismo inducido por la inclusión:

$$R^\times = \text{Gl}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Gl}(\mathbb{R})$$

$$R_{ab}^\times \hookrightarrow K_1(\mathbb{R})$$

define el  $K_1$  reducido asociado al anillo:

$$\tilde{K}_1(\mathbb{R}) := K_1(\mathbb{R})/R_{ab}^\times = \text{Gl}(\mathbb{R}) / \langle [\text{Gl}(\mathbb{R}), \text{Gl}(\mathbb{R})], R^\times \rangle$$

**Proposición 1.2.10.** Si  $R$  es un anillo de división,  $\tilde{K}_1(\mathbb{R}) = 1$ .

*Demo.* Dada una matriz  $A \in \text{Gl}(R)$  debe ser  $A \in \text{Gl}_n(R)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  y podemos proceder a triangularla por el método de Gauss. Esto no requiere de la conmutatividad del anillo sino de la posibilidad de invertir elementos no nulos, y así generar suficientes unos. Las operaciones desarrolladas corresponden a la multiplicación a izquierda o derecha por matrices elementales, que no modifican la clase en  $K_1$ . Esto lleva cualquier matriz inversible a una matriz triangular con escalares no nulos en la diagonal. También podemos operar con matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1_p & & 0 \\ & \lambda & \\ & & \lambda^{-1} \\ 0 & & & 1_q \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$$

Gracias a (1.2.6)  $(1_p, 1_q)$  son matrices identidad, con  $p + q = 2n - 2$ . Además, por estar en el caso reducido tenemos las correspondientes a  $\lambda \in R_{ab}^\times$ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}$$

Lo cual lleva nuestra matriz original a una triangular inferior, igual a  $1 \in \tilde{K}_1(R)$  por (1.2.4). □

*Observación 1.2.11.*  $R$  es un anillo local si el subconjunto  $I := R - R^\times$  es un ideal (a izquierda o a derecha) de  $R$ . Se prueba que si  $R$  es local, entonces  $I$  es bilátero.

En tal caso se prueba que:

$$K_1(R) \cong R_{ab}^\times$$

Nos referimos al respecto a [Ros94, 2.2].

*Observación 1.2.12.* Para un anillo conmutativo  $R$  tenemos bien definido el determinante desde  $K_1(R)$ :

$$\det : K_1(R) \rightarrow R^\times$$

pues está definido en  $\text{Gl}_n(R)$  y es compatible con la estabilización (al agregar unos), y la abelianización, ya que es multiplicativo y devuelve escalares en  $R^\times = R_{ab}^\times$ .

Además, la inclusión natural de los escalares en  $K_1(R)$  hace que la aplicación anterior admita una retracción, permitiendo descomponer  $K_1(R)$ .

$$K_1(R) = R^\times \oplus \tilde{K}_1(R)$$

*Observación 1.2.13.* En general los elementos provenientes de matrices de permutaciones son no triviales en  $K_1(R)$ . Esto es cierto por ejemplo si hay noción de determinante en  $R$ , y la característica no es 2, pues observamos que todas las matrices elementales son de determinante 1, mientras que las permutaciones

impares tienen determinante  $-1$ , y por lo tanto son no triviales en  $K_1(R)$  (ver 1.2.7).

En cambio, en  $\tilde{K}_1(R)$  tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 1 \in \tilde{K}_1(R)$$

Veamos ejemplos con anillos no conmutativos.

*Observación 1.2.14.* (Equivalencia Morita)

Vale notar que  $M_k(M_n(R)) = M_{nk}(R)$  y que con tal identificación:

$$Gl(R) \cong Gl(M_n(R))$$

pues una misma matriz inversible, estabilizada con 1's en la diagonal, se puede pensar en  $M_N(R)$  para cualquier valor de  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, en particular para múltiplos de  $n$ . En consecuencia coinciden también sus abelianizaciones resultando:

$$K_1(R) \cong K_1(M_n(R))$$

*Notación.* Dado un grupo  $G$ ,  $\mathbb{Z}[G]$  será el anillo del grupo, i.e. el álgebra de polinomios a coeficientes enteros especializada en los elementos del grupo.

*Observación 1.2.15.* En  $\mathbb{Z}[G]$  encontramos unidades evidentes, a saber, todos los elementos de la forma  $\pm g$  con  $g \in G$ .

$$\{\pm g : g \in G\} \subseteq \mathbb{Z}[G]^\times$$

Al ver la imagen en  $K_1(\mathbb{Z}[G])$  notamos:

$$\{\pm \bar{g} : g \in G\} \subseteq \mathbb{Z}[G]_{ab}^\times \subset K_1(\mathbb{Z}[G])$$

**Definición 1.2.16.** Dado un grupo  $G$  definimos su grupo de Whitehead asociado como el cociente:

$$Wh(G) = K_1(\mathbb{Z}[G]) / \{\pm \bar{g}, g \in G\}$$

*Observación 1.2.17.* Si tenemos un espacio arcoconexo  $X$ , tomamos  $G = \pi_1(X, x_0)$  el grupo fundamental de lazos en  $X$  basados en algún punto  $x_0$ . Podemos notar  $Wh(\pi_1(X, x_0)) = Wh(X)$ , el grupo de Whitehead asociado al espacio pues tenemos independencia del punto base. Si elegimos otro punto  $x_1$  habrá un isomorfismo:

$$Wh(\pi_1(X, x_0)) \cong Wh(\pi_1(X, x_1))$$

dado por conjugación por un camino uniendo  $x_0$  con  $x_1$ . Este isomorfismo no será canónico necesariamente, dependiendo de la clase de homotopía del camino elegido; pero dos elecciones distintas diferirán en un automorfismo interno, por conjugación de un lazo:  $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ . Esta operación a nivel  $Gl(R)$  se ve como la conjugación por una matriz diagonal de razón  $\gamma$ , que tras abelianizar

resulta trivial en  $K_1(R)$ , dando entonces grupos de Whitehead canónicamente isomorfos.

En el caso de un espacio desconexo, podemos definir  $Wh(X)$  asociado al grupoide fundamental como la suma directa de los anteriores grupos de Whitehead, definidos en cada componente arcoconexa.

$$Wh(X) := \bigoplus_{p \in \pi_0(X)} Wh(\pi_1(X, p))$$

## 2. Invariantes de Álgebra Homológica

### 2.1. Complejos de cadenas y su homología

#### Definiciones

**Definición 2.1.1.** Dado un anillo  $R$ , un *complejo de cadena*  $(C_\bullet, \partial_\bullet)$  es un  $R$ -módulo  $\mathbb{Z}$ -graduado con un endomorfismo homogéneo de grado  $-1$ , 2-nilpotente, i.e.:  $\partial_\bullet \circ \partial_\bullet \equiv 0$ .

También lo podemos pensar como una sucesión de  $R$ -módulos  $C_n$  con las *aplicaciones de borde*,  $\partial_n$ :

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

que verifican:

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} \equiv 0$$

Un morfismo de complejos  $(C_\bullet, c_\bullet) \xrightarrow{f_\bullet} (D_\bullet, d_\bullet)$ , es un morfismo  $R$ -lineal homogéneo de grado 0 que conmuta con los bordes. O sea que la sucesión de morfismos  $\{C_n \xrightarrow{f_n} D_n : n \in \mathbb{Z}\}$  verifica  $d_n \circ f_n = f_{n-1} \circ c_n$ . En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{c_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{c_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{d_n} & D_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array} \quad (2.1.2)$$

*Notación.* Notar que, en nuestra notación, el subíndice de un morfismo indica la componente homogénea de su dominio. Por ejemplo:

$$c_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$$

A diferencia de una sucesión exacta, donde debe valer la igualdad, en un complejo en principio sólo vale la contención:

$$B_n(C) := \text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \text{Ker}(\partial_n) =: Z_n(C)$$

Los elementos de  $B_n(C)$  son llamados  $n$ -bordes, y  $n$ -ciclos los de  $Z_n(C)$ .

**Definición 2.1.3.** Definimos la *homología  $n$ -ésima* como el cociente asociado a la contención observada anteriormente:

$$H_n(C_\bullet) = Z_n(C)/B_n(C) \quad (2.1.4)$$

Más aún, si  $f$  es morfismo de complejos el diagrama (2.1.2) conmuta, induciendo un morfismo  $f_*$  en la homología:

$$H_n(C_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_n(D_\bullet) \quad (2.1.5)$$

Así cada  $H_n$  resulta un funtor covariante de la categoría de complejos de cadena en la de  $R$ -módulos.

*Notación.* Procuramos que los índices indiquen la graduación de los elementos o sus representantes. Los elementos de  $Z_n(C)$ , y por abuso también los de  $H_n(C)$ , son llamados *ciclos* y los de  $B_n(C)$ , *bordes*. Por eso, un complejo con homología nula  $H_n(C) = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , se dice acíclico (en tal caso el complejo es una sucesión exacta).

**Lema 2.1.6.** *(de la serpiente)*

*Dado el diagrama conmutativo de  $R$ -módulos:*

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial'' & & \\ 0 \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & N'' & \end{array} \quad (2.1.7)$$

*Tenemos una sucesión exacta*

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(\partial') & \xrightarrow{f} & \text{Ker}(\partial) & \xrightarrow{g} & \text{Ker}(\partial'') \\ & & \searrow S & & \\ \text{Coker}(\partial') & \xrightarrow{f} & \text{Coker}(\partial) & \xrightarrow{g} & \text{Coker}(\partial'') \end{array} \quad (2.1.8)$$

En la fila superior notamos  $f$  y  $g$ , a las aplicaciones inducidas por restricción al núcleo (que se correstringen bien). En la otra fila, responden al paso al cociente, dejando aplicaciones bien definidas entre los conúcleos.

La aplicación  $S$  es la llamada serpiente, o morfismo de conexión, definido -con cierto abuso- por:

$$S = \pi' \circ (f^{-1}) \circ \partial \circ (g^{-1}) \quad (2.1.9)$$

Estamos abusando de la notación pues  $f$  y  $g$  no tienen inversos, pero debe leerse como la elección de una preimagen. Notamos por  $\pi'$  a la proyección al conúcleo de  $\partial'$ .

La buena definición de las aplicaciones inducidas, del morfismo de conexión, y la exactitud de la sucesión, se deducen por seguimiento del diagrama. Referimos a [Lan02][III.9].

**Teorema 2.1.10.** *(Teo. Fundamental del Álgebra Homológica)*

*Una sucesión exacta corta de complejos induce una sucesión exacta larga en la homología. Concretamente si:*

$$0 \rightarrow C'_{\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet}} C_{\bullet} \xrightarrow{g_{\bullet}} C''_{\bullet} \rightarrow 0$$

*es una sucesión exacta de complejos, tendremos morfismos  $H_{n+1}(C'') \xrightarrow{\partial} H_n(C)$ , que junto a las aplicaciones inducidas  $f_*$  y  $g_*$ , completan la sucesión exacta:*

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_n(C') \xrightarrow{f_*} H_n(C) \xrightarrow{g_*} H_n(C'') \rightarrow \cdots$$

*Demo.* Se trata de una aplicación repetida del Lema de la Serpiente. Contando con una sucesión exacta corta de  $R$ -módulos estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.1.7 para todo valor entero de  $k$ , pues tenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & - & - & \rightarrow & C'_k & \xrightarrow{f_k} & C_k \xrightarrow{g_k} C''_k \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \partial'_k & & \downarrow \partial_k \\ 0 & \longrightarrow & C'_{k-1} & \xrightarrow{f_{k-1}} & C_{k-1} & \xrightarrow{g_{k-1}} & C''_{k-1} - - \rightarrow 0 \end{array}$$

La inyectividad inicial en la fila  $k$ , junto a la sobreyectividad final en la fila  $k-1$ , aparecen luego en la sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & - & - & \rightarrow & \text{Ker}(\partial'_k) \xrightarrow{f} \text{Ker}(\partial_k) \xrightarrow{g} \text{Ker}(\partial''_k) \\ & & & & \searrow S_k \\ & & & & \text{Coker}(\partial'_k) \xrightarrow{f} \text{Coker}(\partial_k) \xrightarrow{g} \text{Coker}(\partial''_k) - - \rightarrow 0 \end{array} \quad (2.1.11)$$

Esto sucede a lo largo de todo el complejo, en particular tenemos otro diagrama conmutativo, (entendiendo siempre que las aplicaciones son las inducidas por las originales):

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Coker}(\partial'_k) & \xrightarrow{f_{k-1}} & \text{Coker}(\partial_k) & \xrightarrow{g_{k-1}} & \text{Coker}(\partial''_k) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial'_{k-1} & & \downarrow \partial_{k-1} & & \downarrow \partial''_{k-1} & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\partial'_{k-2}) & \xrightarrow{f_{k-2}} & \text{Ker}(\partial_{k-2}) & \xrightarrow{g_{k-2}} & \text{Ker}(\partial''_{k-2}) \end{array}$$

y si aplicamos nuevamente el Lema 2.1.7, y observamos que:

$$\text{Ker}(\text{Coker}(\partial_k) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \text{Ker}(\partial_{k-2})) = H_{k-1}(C)$$

$$\text{Coker}(\text{Coker}(\partial_k) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \text{Ker}(\partial_{k-2})) = H_{k-2}(C)$$

recuperaremos la sucesión exacta larga de la homología:

$$\cdots \rightarrow H_{k-1}(C') \xrightarrow{f_*} H_{k-1}(C) \xrightarrow{g_*} H_{k-1}(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{k-2}(C') \rightarrow \cdots$$

□

### Construcciones y propiedades básicas

La categoría de complejos de  $R$ -módulos con la suma directa y los morfismos anteriormente descriptos, es una categoría abeliana, dentro de la cual podemos hacer varias construcciones canónicas, como las que veremos a continuación.

**Definición 2.1.12.** La suspensión  $k$ -ésima de un complejo  $(C_\bullet, \partial)$ , notada  $\Sigma^k C_\bullet$ , es el mismo complejo como módulo, con un corrimiento en el grado  $k \in \mathbb{Z}$  a la izquierda, y la misma aplicación de borde, salvo un signo fijo  $(-1)^k$ .

$$(\Sigma^k C_\bullet)_n = C_{n-k}$$

$$\partial_{\Sigma^k C_\bullet} = (-1)^k \cdot \partial_{C_\bullet}$$

Un cambio de signo constante, o en general, multiplicar  $\partial_n$  por una unidad distinta en cada término, no altera la homología del complejo. En este caso, la homología de la suspensión es la misma que antes salvo un corrimiento.

**Definición 2.1.13.** El dual de un complejo de  $R$ -módulos de cadena lleva en cada término el módulo dual respectivo:  $(\check{C}_\bullet)_n := \text{Hom}_R(C_{-n}, R)$ , y el borde inducido es  $-1^{(-n+1)}(\partial_{-n+1})^* =: \check{\partial}_n$ .

$$\check{C}_n := \text{Hom}_R(C_{-n}, R) \xrightarrow{(\partial_{-n+1})^*} \text{Hom}_R(C_{-n+1}, R) =: \check{C}_{n-1}$$

Notemos que debimos revertir la orientación del complejo a fin de recuperar un complejo de cadenas (y no un complejo de co-cadenas).

Combinando las definiciones anteriores tenemos la  $n$ -ésima suspensión del dual, que denotaremos “dual  $n$ -ésimo”.

$$\Sigma^n(\check{C}_\bullet) =: \check{C}_{\bullet-n}$$

Notemos que vale:

$$\Sigma^n(\check{C}_\bullet) \cong (\Sigma^{-n} C)_\bullet \quad (2.1.14)$$

**Definición 2.1.15.** Dados complejos de cadena  $(C, c)$  y  $(D, d)$  de  $R$  y  $S$ -módulos respectivamente, podemos construir el producto tensorial  $(C \otimes D, \partial)$ , con la estructura natural de  $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ -módulo, con grado total y  $\partial$  conveniente.

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k \otimes_{\mathbb{Z}} D_{n-k}$$

$$\partial_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \otimes 1_{D_{n-k}} + (-1)^k 1_{C_k} \otimes d_{n-k}$$

Para verificar que es un complejo, veamos  $\partial_\bullet \circ \partial_\bullet = 0$ . Basta aplicar la composición sobre un sumando  $C_k \otimes D_{n-k}$ :

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n &= \partial_{n-1} \circ \{c_k \otimes 1_{D_{n-k}}\} + \partial_{n-1} \circ \{-1^k 1_{C_k} \otimes d_{n-k}\} \\ &= (c_{k-1} \otimes 1_{D_{n-k}}) \circ (c_k \otimes 1_{D_{n-k}}) \\ &\quad + (c_k \otimes 1_{D_{n-1-k}}) \circ ((-1)^k \cdot 1_{C_k} \otimes d_{n-k}) \\ &\quad + (-1^{k-1} \cdot 1_{C_{k-1}} \otimes d_{n-k}) \circ (c_k \otimes 1_{D_{n-k}}) \\ &\quad + (-1^{k-1} \cdot 1_{C_{k-1}} \otimes d_{n-k}) \circ ((-1)^k 1_{C_k} \otimes d_{n-k}) \end{aligned}$$

Las filas de los extremos se anulan por ser  $c_\bullet$  y  $d_\bullet$  bordes, mientras que las del medio se compensan, anulando la suma.



**Definición 2.1.16.** Dados dos complejos de cadena de  $R$ -módulos  $(C, c)$  y  $(D, d)$  definimos el complejo  $(\text{Hom}(C, D), \partial)$  como:

$$\text{Hom}(C, D)_n := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(C_{k-n}, D_k)$$

Basta definir el operador de borde sobre una cadena elemental:  $f \in \text{Hom}_R(C_{k-n}, D_k)$ .

$$\partial_n(f) = d_k \circ f - (-1)^n f \circ (c_{k-n+1})$$

En particular si  $D$  es el complejo cuyo único módulo no nulo es  $R$  en grado 0 recuperamos el dual de  $C$ .

*Observación 2.1.17.* Dados  $C$  y  $D$   $R$ -módulos, con  $D$  proyectivo y finitamente generado, tenemos un isomorfismo:

$$D \otimes_R \text{Hom}_R(C, R) \longrightarrow \text{Hom}_R(C, D)$$

$$x \otimes \phi \mapsto (x \otimes \phi)_{(y)} = \phi(y) \cdot x$$

La aplicación anterior es en general un monomorfismo, pero gracias a la hipótesis podemos sumar un complemento proyectivo a  $D$  en la llegada y asignar una base al módulo libre resultante  $D \oplus Q \cong R^n$ ; que notamos  $\{(d_1, q_1), \dots, (d_n, q_n)\}$ . Así, dada  $f \in \text{Hom}_R(C, D)$  tendremos funcionales  $\phi_k$  de  $C$  en  $R$  ( $k = 1, \dots, n$ ), por proyección a las coordenadas, y el elemento  $\sum_k d_k \otimes \phi_k$  se aplicará en el morfismo original  $f$ , lo que prueba la sobreyectividad.

**Proposición 2.1.18.** Si  $(C, c)$  y  $(D, d)$  son complejos de  $R$ -módulos, con  $D$  formado por módulos proyectivos y finitamente generados, recuperamos el  $\text{Hom}$  del producto tensorial del dual de  $C$  con  $D$ :

$$\text{Hom}(C, D) = (D_\bullet \otimes_R \check{C}_\bullet)$$

*Demo.* Expandimos las definiciones:

$$D_\bullet \otimes \check{C}_\bullet = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} D_k \otimes (\check{C}_\bullet)_{n-k} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(C_{k-n}, D_k) := \text{Hom}(C, D)_n$$

y el borde sobre una cadena elemental:

$$\begin{aligned} \partial_n(f) &= d_k \circ f + (-1)^k 1_D (-1)^{k-n+1} (c_{k-n+1})^* \circ f \\ &= (d_k \otimes 1_{C'} + (-1)^k \otimes (c')_{n-k})(f) \end{aligned}$$

recuperando al final el borde del producto tensorial.  $\square$

*Observación 2.1.19.* Estudiemos la homología del  $\text{Hom}$  y su relación con la homología de los complejos involucrados.

Un 0-ciclo:  $z \in (\text{Hom}(C, D))_0 = \bigoplus_k \text{Hom}_R(C_k, D_k)$ , verifica la condición:  $\partial(z) = d \circ z - z \circ c = 0$ , o sea que es un morfismo de complejos.

A su vez, cuando dos morfismos difieren por un borde  $f - g = \partial(h)$ , decimos

que son equivalentes homotópicos,  $f \cong g$ , o,  $f \cong_h g$ , si queremos remarcar que  $h \in \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(C_{k+1}, D_k)$  establece una homotopía entre ellos. Notamos  $[C_\bullet, D_\bullet]$  a las clases de homotopía de morfismos de complejos entre  $C_\bullet$  y  $D_\bullet$ . Así,

$$H_0(\text{Hom}(C, D)) = [C_\bullet, D_\bullet] \quad (2.1.20)$$

De la definición del  $\text{Hom}$  tenemos:

$$\text{Hom}(C, D)_n = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(C_{k-n}, D_k) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}((\Sigma^n C)_k, D_k) = \text{Hom}(\Sigma^n C, D)_0$$

Notemos que también coincide el borde. Podríamos decir que, salvo un signo, la suspensión del  $\text{Hom}$  es el  $\text{Hom}$  de la suspensión (del complejo de salida). Resumimos en la siguiente fórmula:

$$H_n(\text{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)) = [\Sigma^n C_\bullet, D_\bullet]$$

*Observación 2.1.21.* Dados  $f, g$  mapas de complejos tales que  $[f] = [g] \in [C_\bullet, D_\bullet]$ , el morfismo inducido en la homología (2.1.5) debe coincidir. O sea que tenemos una aplicación bien definida:

$$[C_\bullet, D_\bullet] \rightarrow \text{Hom}_R(H_n(C), H_n(D))$$

$$[f] \mapsto \{H_n(C_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_n(D_\bullet)\}$$

su buena definición se debe a que todo borde es nulo en la homología.

Explicitamente tenemos:

$$f_n - g_n = \partial(h) = h \circ c_n + d_{n+1} \circ h \quad (2.1.22)$$

La suma de los caminos aprovechando la homotopía  $h_\bullet$  iguala la diferencia entre  $f$  y  $g$ .

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{c_n} & C_{n-1} \\ h_n \swarrow & \downarrow f-g & \swarrow h_{n-1} \\ D_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & D_n \end{array}$$

Y a nivel homología:

$$\partial(h)_* = (d \circ f - f \circ c)_* = 0$$

observando que el borde compuesto a la entrada anula cualquier ciclo, y a la salida lo convierte en borde, dando nulo en  $H_n(D)$ .  $\square$

Si  $f \cong 0$  decimos que el mapa es homotópicamente nulo, y si el mapa en cuestión es la identidad del complejo, decimos que éste es *contráctil*.

**Definición 2.1.23.** Decimos que un complejo  $(C, \partial)$  está acotado si  $\text{Sop}(C) := \{n \in \mathbb{Z} / C_n \neq 0\}$  es un conjunto acotado (y por tanto finito) de  $\mathbb{Z}$ . Análogamente definimos un complejo acotado superior o inferiormente.

**Definición 2.1.24.** Decimos que un complejo de cadena de  $R$ -módulos es *finito* si es finitamente generado como  $R$ -módulo. Equivalentemente, el complejo debe ser acotado y cada sumando finitamente generado.

**Proposición 2.1.25.** *Todo complejo contráctil es acíclico. Recíprocamente, si tenemos un complejo de  $R$ -módulos proyectivos acotado inferiormente, que sea acíclico equivale a que sea contráctil.*

*Demo.* Por definición, un complejo  $C$  es contráctil si  $Id_C \equiv 0$ . Por tanto  $H_n(C) = Id_*(H_n(C)) = 0$ , y  $C$  es acíclico.

En general la recíproca es falsa como veremos en la observación 2.1.29.

Para la recíproca en el caso de complejos proyectivos finitos, sin pérdida de generalidad, consideramos un complejo positivo de  $R$ -módulos proyectivos:

$$\dots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

Siendo  $H_0(C) = 0$  tenemos un epimorfismo a  $C_0$  que, como  $C_0$  es proyectivo por hipótesis, admite una retracción. Así tendremos  $r_0$  tal que:  $\partial_1 \circ r_0 = 1_{C_0}$ , o sea que  $r_0 \circ \partial_1 \in Idem(End_R(C_1))$  y así:

$$Ker(\partial_1) \oplus r_0 \circ \partial_1(C_1) = C_1 \quad (2.1.26)$$

De (2.1.26) se sigue que  $Ker(\partial_1)$  es proyectivo. Y a su vez,  $\partial_2$  es un epimorfismo sobre el  $Ker(\partial_1)$ , pues  $H_1(C) = 0$  (gracias a la aciclicidad). Ésta es la situación inductiva.

Así tendremos una retracción  $r_n$  para la co-restricción de  $\partial_{n+1}$  en cada paso, y definimos la contracción  $\delta$  como:

$$\delta_n = r_n \oplus 0 \text{ sobre } Ker(\partial_n) \oplus r_{n-1} \circ \partial_n(C_n) \quad (2.1.27)$$

Notemos que  $(\partial_{n+1} \circ \delta_n)$  es el proyector sobre  $Ker(\partial_n)$ , mientras que  $(\delta_{n-1} \circ \partial_n)$  resulta un proyector sobre el complemento indicado en (2.1.27). Así:

$$Id_{C_n} = \delta_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ \delta_n$$

□

**Definición 2.1.28.** Tenemos distintas nociones de equivalencia en relación a complejos de cadena de  $R$ -módulos.

Un *isomorfismo de complejos*  $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  es un morfismo de complejos estableciendo un isomorfismo en cada grado.

Un *casi-isomorfismo* es un morfismo de complejos  $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  tal que los morfismos inducidos en la homología sean todos isomorfismos:

$$(f_*)_n \text{ iso } \forall n \in \mathbb{Z}$$

Una *equivalencia homotópica* es una aplicación graduada  $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  junto con una inversa homotópica  $g_\bullet : D_\bullet \rightarrow C_\bullet$ , y sendas homotopías entre ellas, i.e. aplicaciones de grado  $+1$ :  $h_\bullet : C_\bullet \rightarrow C_{\bullet+1}$  y  $h'_\bullet : D_\bullet \rightarrow D_{\bullet+1}$  tales que:

$$g \circ f - Id_C = \partial \circ h + h \circ \partial$$

$$f \circ g - Id_D = \partial \circ h' + h' \circ \partial$$

Una propiedad se dirá invariante homotópica si es preservada por una equivalencia homotópica. Un isomorfismo de complejos admite una inversa y resulta por tanto una equivalencia homotópica, con homotopías nulas.

A su vez, una equivalencia homotópica es un casi-isomorfismo, análogamente a lo observado en 2.1.21.

*Observación 2.1.29.* Veamos entre cuales de las anteriores nociones de equivalencia se preservan las propiedades introducidas.

1. La aciclicidad se preserva por la más débil de las equivalencias, un mapa  $f$  que sea un casi-isomorfismo.

2. Por definición la contractibilidad es un invariante homotópico.

Notemos que un casi-isomorfismo no tiene por qué ser una equivalencia homotópica. Damos el ejemplo de un complejo acíclico y acotado inferiormente de  $\mathbb{Z}$ -módulos que no es contráctil (falta la proyectividad para aplicar 2.1.25).

Consideramos el complejo formado por los enteros módulo  $p^2$  en cada término positivo, igual a  $\mathbb{Z}_p$  en grado 0 y nulo en los negativos. El operador de borde envía  $\mathbb{Z}_p$  en la copia dentro de  $\mathbb{Z}_{p^2}$  (los múltiplos de  $p$ ), y luego entre las copias de  $\mathbb{Z}_{p^2}$  es multiplicar por  $p$ .

$$\dots 0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{\mu_p} \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \dots$$

Si existiera una contracción  $\delta$  al considerar  $x \in \mathbb{Z}_{p^2}$  en grado  $n$  alto, tendríamos:

$$\begin{aligned} x &= (\mu_p \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ \mu_p)(x) \\ &= p \cdot (\delta_n + \delta_{n-1})(x) \end{aligned}$$

Y al iterar:

$$x = p^2 \cdot (\delta_n + \delta_{n-1})^2(x) = 0 \quad \forall x$$

□

3. Un complejo no acotado y de tipo no finito puede ser homotópicamente equivalente a uno que sí sea acotado y finito. Por ejemplo tenemos el complejo compuesto por un mismo módulo no trivial en cada grado, con borde identidad, que resulta contráctil (como contracción tomamos la identidad en sentido inverso sobre grado par, y el morfismo nulo sobre los impares).

### El cono de un morfismo de complejos

**Definición 2.1.30.** Dado un mapa de complejos  $C_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} D_\bullet$ , construimos su cono,  $\Delta(f)_n = C_{n-1} \oplus D_n$  con el borde  $\partial_n = (-c_{n-1}, f_{n-1} + d_n)$ .

$$\partial_n(x, y) = \begin{pmatrix} -c_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

*Observación 2.1.31.* El cono de una aplicación  $C_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} D_\bullet$  induce una sucesión exacta corta de complejos:

$$0 \rightarrow (D, d)_\bullet \xrightarrow{i} \Delta(f)_\bullet \xrightarrow{p} \sigma^1 C_\bullet \rightarrow 0 \quad (2.1.32)$$

Esta sucesión exacta corta induce una sucesión exacta larga en la homología:

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(\Delta(f)) \rightarrow H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_n(D) \rightarrow H_n(\Delta(f)) \rightarrow \dots \quad (2.1.33)$$

donde observamos que  $H_\bullet(\sigma^1 C) = H_{\bullet-1}(C)$ .

Veremos que el morfismo de conexión  $\partial_*$  es el inducido por  $f$ .

Sea  $[x] \in H_n(C)$ , recordemos que el morfismo de conexión es la *serpiente* definida en (2.1.9):

Entonces levantamos  $x$ :

$$(p_*^{-1})(x) = (x, y)$$

Aplicamos  $\partial_n$ :

$$\partial_n(x, y) = (-c_{n-1}(x), f_{n-1}(x) + d_n(y)) = (0, f_{n-1}(x) + d_n(y))$$

Y levantamos nuevamente y tomamos la proyección a la homología correspondiente, recuperando:

$$\partial_{n-1}([x]) = [f_{n-1}(x) + d_n(y)] = [f_{n-1}(x)] = f_{n-1}([x]) \in H_n(D)$$

□

**Proposición 2.1.34.** *El cono de una aplicación permite traducir propiedades de mapas en propiedades de complejos.*

1.  $f$  es un casi-isomorfismo si y sólo si, su cono  $\Delta(f)$  es acíclico.
2.  $f$  es una equivalencia homotópica si y sólo si su cono  $\Delta(f)$  es contráctil.

*Demo.* (1) Se sigue de la sucesión exacta (2.1.33) anterior y de la identificación  $\partial_* = f_*$ .

(2) ( $\Leftarrow$ ) Dados un mapa  $f$  y  $\delta$  una contracción de  $\Delta(f)$ , construiremos un mapa  $g : D \rightarrow C$  y homotopías:  $h, h'$  de modo que:  $g \circ f \cong_h 1_C$  y  $f \circ g \cong_{h'} 1_D$ . Tenemos que

$$\delta \circ \partial + \partial \circ \delta = 1_C \oplus 1_D$$

Renotemos:

$$\begin{aligned}\delta(x, 0) &= (h(x), s(x)) \\ \delta(0, y) &= (g(y), -h'(y))\end{aligned}$$

Reescribimos la condición de contracción con esta notación:

$$\begin{aligned}(x, 0) &= (\delta \circ \partial + \partial \circ \delta)(x, 0) \\ &= \delta(-c(x), f(x)) + \partial(h(x), \dots) \\ &= (-h \circ c(x) + g \circ f - c \circ h(x), \dots)\end{aligned}$$

O sea que la primera coordenada dice que  $h$  estableció la homotopía entre  $(g \circ f)$  y la identidad de  $C$ . A su vez,

$$\begin{aligned}(0, y) &= \delta(0, d(y)) + \partial(g(y), -h'(y)) \\ &= (g \circ d(y), -h' \circ g(y)) + (-c \circ g(y), f \circ g(y) - d \circ h'(y)) \\ &= (g \circ d(y) - c \circ g(y), -h' \circ g(y) + f \circ g(y) - d \circ h'(y))\end{aligned}$$

La primera coordenada dice que  $g$  es un mapa de complejos.

La segunda muestra como  $h'$  establece una homotopía entre  $(f \circ g)$  y la identidad de  $D$ .

( $\Rightarrow$ ) Recíprocamente debemos verificar la construcción inversa, recuperando una contracción a partir de una equivalencia homotópica. Definimos:

$$\delta(x, y) = ((h(x) + g(y) + g \circ h' \circ f(x) + g \circ f \circ h(x), -h'(y) + h' \circ f \circ h(x) - (h')^2 \circ f(x))$$

La prueba es parecida y sin dificultad, pero poco ilustrativa, referimos a [Ros94, 1.7.7].  $\square$

*Obs.* Si  $C$  y  $D$  son complejos de  $R$ -módulos proyectivos, y ambos están acotados inferiormente, entonces lo mismo es cierto para el cono de cualquier mapa entre ellos.

Este hecho unido a las proposiciones anteriores establece el siguiente resultado:

**Corolario 2.1.35.** *Sea  $f : C \rightarrow D$  un morfismo de complejos de  $R$ -módulos proyectivos. Supongamos que  $C$  y  $D$  son acotados inferiormente. Son equivalentes:*

- $f$  es casi-isomorfismo.
- $f$  es una equivalencia homotópica.

*Observación 2.1.36.* Como aplicación veamos que dados complejos homotópicamente equivalentes  $C^1 \cong C^2$ , y  $D^1 \cong D^2$ , los respectivos productos tensoriales  $C^i \otimes D^i$  resultan también homotópicamente equivalentes.

*Demo.* Supondremos  $D^1 = D^2 = D$ . Luego podríamos fijar un  $C^i$  y variar los  $D^i$ , con una prueba análoga.

Sea  $(\bar{C}, c)$  el cono asociado a la equivalencia  $C^1 \xrightarrow{\phi} C^2$ , el cual admite una contracción: “ $s$ ”. Así:

$$1_{\bar{C}} = s \circ c + c \circ s$$

La idea es probar que  $(s \otimes 1_D)$  nos da una contracción del cono del mapa entre los productos tensoriales, mostrando que  $(\phi \otimes 1_D)$  establece una equivalencia homotópica. La clave será mostrar que el producto tensorial entre el cono anterior y  $D$ , resulta isomorfo al cono de la siguiente aplicación:

$$C^1 \otimes D \xrightarrow{\phi \otimes Id_D} C^2 \otimes D$$

Claramente coinciden sus sumandos en grado  $n$ , gracias a la distributividad entre la suma directa y el producto tensorial:

$$\begin{aligned} (C^1 \otimes D)_{n-1} \oplus (C^2 \otimes D)_n &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (C_{n-1-k}^1 \otimes D_k) \oplus (C_{n-k}^2 \otimes D_k) \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (C_{n-1-k}^1 \oplus C_{n-k}^2) \otimes D_k \end{aligned}$$

Veamos los bordes:

$$\partial_{C \otimes D} = c \otimes 1_D + -1^{grad(\bar{C})} \cdot 1_{\bar{C}} \otimes d$$

y por su parte:

$$\begin{aligned} \partial_m(\phi \otimes 1_d) &= -(c^1 \otimes 1_D + -1^{grad(C^1)} \cdot 1_{C^1} \otimes d) \dots \\ &\quad \oplus (\phi \otimes 1_D) + (c^2 \otimes 1_D + -1^{grad(C^2)} \cdot 1_{C^2} \otimes d) \\ &= (-c^1 \oplus (\phi + c^2)) \otimes 1_D + (-1^{grad(C^1)-1} \cdot 1_{C^1} \oplus -1^{grad(C^2)} \cdot 1_{C^2}) \otimes d \\ &= c \otimes 1_D + -1^{grad(\bar{C})} \cdot 1_{\bar{C}} \otimes d \end{aligned}$$

Usando al final que en cada sumando del cono vale:  
 $grad(\bar{C}) = grad(C^1) + 1 = grad(C^2)$ .

□

## 2.2. Característica de Euler y Obstrucción de Wall

Al trabajar con complejos nos interesa contar con propiedades invariantes por homotopías. Será en tal dirección que pasaremos a considerar solamente complejos formados por  $R$ -módulos proyectivos, para definir un invariante en  $K_0(R)$ .

A su vez, al considerar una propiedad que no sea invariante por homotopías, nos interesará conocer la obstrucción a que exista un representante en la clase, con tal propiedad.

**Definición 2.2.1.** Dado un complejo finito de  $R$ -módulos proyectivos,  $C$ , definimos su *Característica de Euler*,  $\chi(C)$ , como la suma alternada de las clases en  $K_0(R)$  de los módulos  $C_n$ :

$$\chi(C) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k [C_k] \in K_0(R) \quad (2.2.2)$$

*Observación 2.2.3.* Notemos que  $\chi$  es lineal por sumas directas, que una suspensión a lo sumo afecta el signo, y que no hay abuso al referirnos al complejo como  $C$ , en la usual omisión del borde, pues la definición es independiente de este, lo mismo daría cualquier aplicación de borde que la nula.

$$\begin{aligned}\chi(C \oplus D) &= \chi(C) + \chi(D) \\ \chi(\Sigma^n C) &= (-1)^n \chi(C) \\ \chi(C_\bullet, \partial) &= \chi(C_\bullet, 0)\end{aligned}$$

**Proposición 2.2.4.** *La característica de Euler es aditiva en sucesiones exactas cortas de complejos finitos de  $R$ -módulos proyectivos. O sea, dados complejos en la siguiente situación:*

$$0 \rightarrow C_\bullet \rightarrow D_\bullet \rightarrow E_\bullet \rightarrow 0$$

*Tendremos que:*

$$\chi(D) = \chi(C) + \chi(E) \quad (2.2.5)$$

*Demo.* Basta verificar la aditividad en sucesiones exactas cortas de los módulos, i.e. término a término, y luego tomar la suma alternada.

Cada sucesión  $0 \rightarrow C_n \rightarrow D_n \rightarrow E_n \rightarrow 0$  se parte, por ser  $E_n$  proyectivo, de modo que:

$$D_n \cong C_n \oplus E_n$$

y así:

$$\sum_n (-1)^n [D_n] = \sum_n (-1)^n [C_n] + [E_n] \in K_0(R)$$

□

**Proposición 2.2.6.** *Si  $C$  es un complejo finito de  $R$ -módulos proyectivos y además sus grupos de homología  $H_n(C)$  son todos proyectivos y finitamente generados, vale que:*

$$\chi(C) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k [H_k(C)] \quad (2.2.7)$$

*Demo.* Para comenzar  $Z_0 = C_0$  es proyectivo. A su vez,  $B_0$  resulta proyectivo y finitamente generado, observando la siguiente sucesión exacta con  $n = 0$ :

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \xrightarrow{p} H_n \rightarrow 0 \quad (2.2.8)$$

Luego  $Z_1$  será proyectivo y finitamente generado, pues basta observar la siguiente sucesión exacta que se parte con  $n = 1$ :

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \rightarrow 0 \quad (2.2.9)$$

Recursivamente volvemos a (2.2.8) y vemos que la siguiente imagen  $B_n$  es proyectiva y luego el núcleo  $Z_{n+1}$  y así siguiendo.

Tomando clases  $K_0(R)$  y usando (2.2.8) y (2.2.9) se obtiene:

$$[C_n] = [Z_n] + [B_{n-1}]$$



$$[H_n] + [B_n] = [Z_n]$$

Lo cual finalmente implica:

$$[C_n] = [H_n] + ([B_{n-1}] + [B_n])$$

Y al considerar la suma alternada, los términos entre paréntesis se compensan y resulta:

$$\chi(C) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k [H_k]$$

□

**Corolario 2.2.10.** *Si  $C$  es un complejo finito de  $R$ -módulos proyectivos acíclico entonces  $\chi(C) = 0$ .*

*Observación 2.2.11.* En particular el cono de un casi-isomorfismo  $f : C \rightarrow D$  entre complejos finitos de  $R$ -módulos proyectivos con homología proyectiva, es acíclico y consecuentemente tiene característica de Euler nula.

**Definición 2.2.12.** Dado un complejo  $C_\bullet$  de  $R$ -módulos proyectivos homotópicamente equivalente a un complejo finito de  $R$ -módulos proyectivos,  $C'$ , definimos la característica de Euler de  $C$  como la de un representante:

$$\chi(C) := \chi(C')$$

La buena definición surge de que  $\chi$  sea constante en clases de homotopia de complejos finitos.

**Teorema 2.2.13.** *Si  $R$  es un anillo Noetheriano y  $(C, \partial)$  un complejo acotado de módulos proyectivos, entonces es equivalente que la homología  $H_n(C)$  sea finitamente generada para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a que el complejo original sea homotópico a un complejo finito de módulos proyectivos.*

*Demo.* ( $\Leftarrow$ ) La homología es un invariante homotópico, de modo que contando con un representante de tipo finito podemos calcularla sobre éste.

Así, si  $C_n$  es finitamente generado, el submódulo  $Z_n$  también lo será -por ser  $R$  Noetheriano- y por lo tanto  $H_n(C) = Z_n/B_n$  está finitamente generada.

( $\Rightarrow$ ) Recíprocamente, si la homología es finitamente generada, notemos que  $C_0 = Z_0$  y  $H_0 = Z_0/B_0 = \langle \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k \rangle$ , o sea que podemos presentar a  $H_0$  en  $k$  generadores con finitas relaciones, pues el núcleo de la aplicación generadora:  $R^k \rightarrow H_0$  es un submódulo de un módulo Noetheriano. Luego  $H_0$  resulta finitamente presentado. Por  $R$ -linealidad definimos un mapa a los levantados:  $z_1, \dots, z_k \in C_0$ :

$$R^k \xrightarrow{\phi} C_0 \tag{2.2.14}$$

Al componerlo con la proyección a la homología tenemos el mapa generador de ésta, dejando la sucesión exacta corta asociada a la presentación:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\phi) \longrightarrow R^k \xrightarrow{\phi_0} H_0 \longrightarrow 0$$

Tomando generadores del núcleo tenemos el siguiente complejo:

$$R^q \longrightarrow R^k \xrightarrow{\bar{\phi}_0} H_0 \longrightarrow 0 \quad (2.2.15)$$

Queremos definir un nuevo complejo  $C'_\bullet$  y un mapa de complejos  $\phi$  hacia  $C_\bullet$ , que establezca un casi-isomorfismo.

Partimos del morfismo nulo  $0 \rightarrow C$  y en un primer paso modificamos el dominio de  $\phi : C'_\bullet \rightarrow C_\bullet$ . Ponemos:

$$\begin{aligned} C'_0 &= R^k \\ C'_1 &= R^q \end{aligned}$$

Con el mapa  $\phi_0 := \phi$  anterior, y redefiniendo  $\phi_1$ :

$$\phi_1 : C'_1 \rightarrow C_1$$

via  $\phi_1(e_j) = u_j$  para preimágenes adecuadas:  $u_j \in C_1$  tal que:

$$\partial(u_j) = \phi_0 \circ \partial(e_j) \quad \forall j \leq q$$

Esto es posible gracias a que la imagen por  $\phi_0$  se anula en la homología de  $C$ . Tenemos el siguiente diagrama conmutativo, mostrando que se establece un isomorfismo en la homología en grado 0, via  $(\phi_0)_*$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\partial} & C_1 & \xrightarrow{\partial} & C_0 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow \phi_1 & & \uparrow \phi_0 \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\partial} & C'_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Así, teniendo definido un complejo que establece un isomorfismo en la homología en grado  $k \leq N - 1$ , proseguimos con esta definición recursiva:

- Nuevamente damos una presentación finita de  $H_{k+1}(C)$ . En analogía con (2.2.14) tenemos un  $n = n_{k+1}$  y un morfismo:

$$R^n \rightarrow C_{k+1} \quad (2.2.16)$$

que compuesto con la proyección a la homología resulta sobreyectivo, y cuyo núcleo -por ser finitamente generado- es cubierto por un morfismo desde otro módulo libre de rango finito ( $n'$ ), análogo a (2.2.15):

$$R^{n'} \xrightarrow{\partial} R^n \longrightarrow H_{k+1} \longrightarrow 0$$

- Agregamos la aplicación anterior  $R^{n'} \xrightarrow{\partial} R^n$  en suma directa en grados  $k + 1$  y  $k + 2$  al complejo  $C'$ .

- Finalmente redefinimos  $\phi$  por suma directa sobre los nuevos términos. En grado  $k + 1$  tomamos la aplicación generadora (2.2.16); y en grado  $k + 2$  definimos de modo que sea mapa de complejos.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{k+3} & \longrightarrow & C_{k+2} & \xrightarrow{\partial} & C_{k+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow \phi_{k+2} & & \uparrow \phi_{k+1} & & & & \uparrow \phi_0 & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C'_{k+2} & \xrightarrow{\partial} & C'_{k+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Hemos conseguido un complejo finito de módulos libres, que establece el isomorfismo en la homología hasta un grado más. Esta construcción la repetimos hasta grado igual a  $N$  -la longitud del complejo original. Borrando el término  $C'_{N+1}$  tenemos un complejo de la misma longitud, y el mapa establece un isomorfismo en la homología hasta grado  $N - 1$  y sólo un epimorfismo en grado  $N$ . Traducido al cono de  $\phi$ :  $\Delta(\phi) =: \Delta$ , para todo  $k \neq N + 1$ :

$$H_k(\Delta) = 0$$

y siguiendo la demostración de 2.1.25 construimos una retracción de  $\partial''_{N+1}$  mostrando que  $H_{N+1}(\Delta)$  es un proyectivo, sumando directo de  $\Delta_{N+1} = C'_N$ . Justamente  $H_{N+1}(\Delta) = \text{Ker}(\partial''_{N+1})$  representa la parte sobrante de  $C'_N$ , que: al ser nula por  $\partial'$  no afecta la homología del complejo  $C'_\bullet$ , y es el núcleo de  $\phi_N$ . Quedarnos con un complemento directo, en lugar de todo  $C'_N$ , redefine el complejo  $C'_\bullet$  dando un isomorfismo en la homología con el complejo  $C_\bullet$ . Por finitudes, estos son homotópicamente equivalentes.  $\square$

**Teorema 2.2.17.** (Wall)

Un complejo  $C$  de  $R$ -módulos proyectivos, homotópicamente equivalente a un complejo finito, será homotópico a un complejo finito, de  $R$ -módulos libres, si y sólo si se anula su obstrucción de Wall, i.e. la proyección de la característica de Euler al  $K_0$  reducido.

$$\tilde{\chi}(C) := [\chi(C)] = 0 \quad \in \tilde{K}_0(R)$$

*Demo.* La condición es claramente necesaria pues si fuera homotópico a un complejo  $C$  finito, formado por  $R$ -módulos libres, la clase en  $\tilde{K}_0(R)$  de cada módulo sería nula y así:

$$\tilde{\chi}(C) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k [C_k] = 0 \quad \in \tilde{K}_0(R)$$

Recíprocamente, veamos que podemos construir un representante homotópico formado por módulos libres a partir de un complejo  $C$ , acotado y finito, cuya obstrucción es nula.

Sumar un complejo contráctil no altera la clase.

Sin pérdida de generalidad tomemos un complejo acotado positivo:

$$\cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

y consideramos un complemento  $Q_n$  de  $C_n$ , tal que  $C_n \oplus Q_n =: F_n \cong R^m$  libre. Entonces sumamos el complejo contráctil  $Q_n \otimes \Sigma^n \Delta(Id : R \rightarrow R)$ , o sea:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow Q_n \xrightarrow{Id} Q_n \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

desarrollado en grados  $n$  y  $n-1$ , y nulo afuera.

Esto deja al último módulo libre, y repetimos el argumento en el grado siguiente sobre el nuevo complejo  $n$  veces más. Así

$$0 \rightarrow F_n \rightarrow \dots F_0 \rightarrow Q_0 \rightarrow 0$$

es exacto. Notar además que, por construcción, para cada  $i$  tenemos  $F_i = C_i \oplus Q_i \oplus Q_{i+1}$ . y se tiene

$$\begin{aligned} [Q_n] &= -[C_n] \in \tilde{K}_0(R) \\ [Q_j] &= -([C_j] + [Q_{j+1}]) \quad j = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Luego  $Q_0$  debe ser establemente equivalente a un libre pues:

$$[Q_0] = -[C_0] + ([C_1] - [Q_2]) + \dots = -\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k [C_k] = 0 \in \tilde{K}_0(R)$$

Así para algún  $m \in \mathbb{N}$ ,  $R^m \oplus Q_0 \cong R^k$ , lo que nos permite repetir el argumento sumando

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow R^m \xrightarrow{Id} R^m \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

desarrollado en grados 0 y  $-1$ . □

*Observación 2.2.18.* La construcción inductiva anterior termina gracias que la obstrucción de Wall se anula. En general, podemos construir un complejo formado por módulos libres finitamente generados, pero el complejo no queda acotado.

*Observación 2.2.19.* También podríamos tener un complejo acotado de módulos libres de rango no finito homotópicamente equivalente a un complejo finito de  $R$ -módulos proyectivos con obstrucción de Wall no nula.

Consideramos un  $R$ -módulo proyectivo finitamente generado,  $P$ , que no sea establemente equivalente a un libre, induciendo el complejo  $\dots \rightarrow 0 \rightarrow P \rightarrow 0 \rightarrow \dots$  con obstrucción de Wall no trivial. Sin embargo éste será homotópicamente equivalente al complejo:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow F \xrightarrow{s} F \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

donde si  $Q \oplus P$  es libre,  $F$  es el módulo libre de rango numerable dado por:

$$F = P \oplus Q \oplus P \oplus Q \oplus \dots$$

y  $s$  viene dado por:

$$s(p_0, q_1, p_1, q_2, \dots) = (p_1, q_1, p_2, q_2, \dots)$$

Notemos que  $s$  es suryectiva con  $\text{Ker}(s) = P$ ; la inclusión es por tanto un casi-isomorfismo, y por ende una equivalencia homotópica, en virtud del Corolario 2.1.35.

Veamos cómo se comporta el producto tensorial respecto de la obstrucción de Wall.

*Observación 2.2.20.* Sean  $R$  y  $S$  dos anillos, sobre los cuales tenemos respectivos complejos de módulos proyectivos  $C$  y  $D$ . Supongamos además que tienen definida su característica de Euler, i.e. admiten un representante finito (homotópicamente equivalente). Entonces su producto tensorial  $C \otimes_{\mathbb{Z}} D$  también tendrá bien definida su característica como complejo de  $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ -módulos proyectivos, pues es homotópicamente equivalente (ver 2.1.36) al producto tensorial de tales representantes, resultando éste un complejo finito por  $R \otimes S$ -módulos proyectivos.

Tenemos un producto bilineal a nivel  $K_0$  inducido por el producto tensorial de módulos proyectivos:

$$K_0(R) \times K_0(S) \rightarrow K_0(R \otimes S)$$

$$([P], [Q]) \mapsto [P \otimes Q]$$

Con esta notación la característica de Euler resulta multiplicativa respecto del producto tensorial.

$$\begin{aligned} \chi(C \otimes D) &= \sum_j (-1)^j [\bigoplus_k (C_{j-k} \otimes D_k)] \quad \in K_0(R \otimes_{\mathbb{Z}} S) \\ &= \sum_{j, k} (-1)^j \cdot [C_{j-k} \otimes D_k] \\ &= \sum_{j, k} (-1)^j \cdot [C_{j-k}] \cdot [D_k] \\ &= \sum_k (\sum_j (-1)^j \cdot [C_{j-k}]) \cdot [D_k] \\ \chi(C \otimes D) &= \chi(C) \cdot \chi(D) \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

En particular basta que se anule la característica de Euler de uno de los complejos para que se anule la característica del producto tensorial.

Si  $D$  es un  $\mathbb{Z}$ -complejo,  $\chi(D)$  es un entero (ya que  $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ), y podemos proyectar (2.2.21) al  $K_0$  reducido para computar la obstrucción de Wall, de donde resulta:

$$\tilde{\chi}(C \otimes_{\mathbb{Z}} D) = \tilde{\chi}(C) \cdot \chi(D) \quad \in \tilde{K}_0(R)$$

□

## 2.3. Torsión

Nos interesa construir un invariante secundario que requiere del desvanecimiento de la misma característica de Euler. Intentaremos caracterizar el tipo de equivalencia homotópica que establece un mapa  $f$  entre complejos finitos formados por módulos libres.

### Definición 2.3.1. (Torsión)

Dado un complejo finito y acíclico de  $R$ -módulos libres con una elección de bases,  $(C_{\bullet}, \partial_{\bullet})$ , sabemos que existe una contracción “ $\delta$ ” y podemos considerar

el endomorfismo dado por  $(\partial + \delta)$ , que a nivel grado invierte la paridad. Notamos:

$$C_{par} = \bigoplus_n C_{2n}$$

$$C_{impar} = \bigoplus_n C_{2n+1}$$

En particular, siendo acíclico sabemos que  $\chi(C) = 0$  (ver 2.2.10), y así:

$$\text{rg}(C_{par}) = \text{rg}(C_{impar})$$

Afirmamos que el morfismo:

$$C_{par} \xrightarrow{(\partial_\bullet + \delta_\bullet)_{par}} C_{impar}$$

se representa (gracias a la elección de bases), como una matriz inversible a coeficientes en  $R$ . Basta observar que:

$$\begin{aligned} (\partial_\bullet + \delta_\bullet)^2 &:= (\partial_\bullet + \delta_\bullet)_{impar} \circ (\partial_\bullet + \delta_\bullet)_{par} \\ &= \partial^2 + \delta \circ \partial + \partial \circ \delta + (\delta)^2 \\ &= 1_C + (\delta)^2 \\ (\partial_\bullet + \delta_\bullet)^2 &= 1 \in K_1(R) \end{aligned}$$

En la segunda igualdad usamos que los bordes se anulan, y recuperamos la identidad del complejo, por la definición de la contracción  $\delta$ .

Observemos que  $\delta^2$  tiene grado  $+2$  y así se ubica debajo de la diagonal, dejando a  $1_C + (\delta)^2$  triangular inferior. En particular la clase de esta última matriz en  $K_1(R)$  es trivial, ya que resulta una matriz elemental. Así:

$$[(\partial + \delta)_{par}] = [(\partial + \delta)_{impar}]^{-1} \in K_1(R)$$

Definimos entonces la torsión, de tal complejo acíclico formado por finitos  $R$ -módulos libres con bases, como:

$$\tilde{\tau}(C) = [(\partial + \delta)_{par}] \in K_1(R) \quad (2.3.2)$$

Así definida depende de la elección de bases del complejo, pero no dependerá de la elección de la contracción  $\delta$ . Será una consecuencia de la formulación equivalente que presentamos en la Proposición 2.3.7.

*Observación 2.3.3.* Dados dos endomorfismos de un módulo  $C$  que verifican  $f+g = 1_C$  y tales que, digamos  $g \circ f = 0$ , entonces resultan ambos idempotentes.

$$\begin{aligned} f + g = 1_C &= (f + g)^2 = f^2 + f g + g f + g^2 = f \circ (f + g) + g^2 = f + g^2 \\ &\implies g = g^2, \quad f = f^2 \end{aligned}$$

Esta es nuestra situación al trabajar con un complejo contráctil:

$$1_{C_n} = (\partial_{n+1} \circ \delta_n) + (\delta_{n-1} \circ \partial_n)$$

En consecuencia:  $B_n = \text{Im}(\partial_{n+1})$  será un sumando directo de  $C_n$ , siendo la imagen por el proyector:  $p_n = \partial_{n+1} \circ \delta_n$ . Y también la imagen por el otro idempotente:  $\tilde{B}_{n-1} = \text{Im}(\delta_{n-1} \circ \partial_n)$ , será un sumando directo. Notemos que:  $C_n = B_n \oplus \tilde{B}_{n-1}$  y que  $\partial(\tilde{B}_k) = B_k$ . Se establece un isomorfismo:

$$C_n \xrightarrow{(p_n \oplus \partial_n)} B_n \oplus B_{n-1} \quad (2.3.4)$$

Su inversa está dada por la inclusión de  $B_n$  en  $C_n$  y la contracción anterior, i.e.  $i_n \oplus \delta_{n-1}$ , pues una composición devuelve la condición de contracción del complejo  $C_\bullet$  y la otra resulta a partir de que cada idempotente actúa como la identidad sobre el  $B_i$  correspondiente.

**Lema 2.3.5.** *Dado  $C_\bullet$  un complejo finito acíclico, formado por  $R$ -módulos libres con bases, existe un complejo  $\tilde{C}_\bullet$  acotado, de libres con bases finitamente generados, homotópicamente equivalente a  $C$  tal que los  $B'_i$  son libres y  $\tau(C) = \tau(\tilde{C})$ .*

*Demo.* Presentamos nuestro complejo:

$$0 \rightarrow C_k \rightarrow \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

Todos los  $C_i$  son libres y en particular, siendo un complejo acíclico,  $B_0 = C_0$  es libre. Veamos que los  $B_i$  son establemente equivalentes a un libre, computando clases en el  $K_0$  reducido del anillo.

A partir de la observación anterior:

$$0 = [C_1] = [B_0] + [B_1] = [B_1] \in \tilde{K}_0(R)$$

Entonces debe existir  $F$  (por ejemplo  $B_0$ ), un  $R$ -módulo libre, de modo que:

$$F \oplus B_1 \cong R^N$$

Sumamos, sobre el complejo original, el siguiente complejo contráctil :

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow F \xrightarrow{Id_F} F \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Recuperamos un complejo acíclico de  $R$ -módulos libres,  $\tilde{C}_\bullet$ :

$$\cdots \longrightarrow C_2 \oplus F \xrightleftharpoons[\delta \oplus Id_F]{\partial_2 \oplus Id_F} C_1 \oplus F \xrightarrow{\partial_1 \oplus 0} C_0 \cdots$$

(hemos indicado la modificación de la contracción)

Pero ahora el nuevo  $B'_1$  es libre:

$$B'_1 = \text{Ker}(\tilde{\partial}_1) = \text{Im}(\tilde{\partial}_2) = B_1 \oplus F \cong R^N$$

Iteramos esta construcción a lo largo del complejo.

Finalmente considerando las anteriores bases para los módulos  $C_i$  y una base fija

para  $F$  vemos que no hemos afectado la torsión. Basta notar que en cada paso sólo afectamos o el borde o la contracción involucradas en  $(\partial + \delta)_{par}$  -según la paridad- y lo hicimos añadiendo en suma directa la identidad de un libre (trivial a nivel  $K_1$ ), i.e.:

$$\begin{aligned}\tau(\bar{C}_\bullet) &= [ \overline{(\partial + \delta)_{par}} ] \\ &= [(\partial + \delta)_{par} \oplus Id_F] \\ &= [(\partial + \delta)_{par}] \cdot [Id_F] \\ &= [(\partial + \delta)_{par}]\end{aligned}$$

$$\tau(\bar{C}_\bullet) = \tau(C_\bullet) \in K_1(R)$$

□

*Observación 2.3.6.* Ahora suponemos que los  $B_i$  son  $R$ -módulos libres y podemos fijar bases, e interpretar el isomorfismo de (2.3.4), como una matriz a coeficientes en  $R$ . Tendremos:  $[p_n \oplus \partial_n] \in K_1(R)$ . Vale notar que la clase de este mapa es independiente de la elección del proyector (hasta aquí habíamos trabajado con un proyector en particular, dado por la contracción). Basta notar que si  $p'_n$  es otro proyector entonces:

$$Ker(p_n - p'_n) \supseteq B_n$$

O sea que se factoriza por  $\partial_n$ . Digamos  $p_n - p'_n = u \circ \partial_n$ . Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} p_n \\ \partial_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_n \\ \partial_n \end{pmatrix}$$

Y  $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  es nula en  $K_1(R)$  siendo triangular. Concluimos

$$[p_k \oplus \partial_k] = [p'_k \oplus \partial_k] \in K_1(R)$$

En particular resulta independiente de la elección de proyectores la suma alternada en  $K_1(R)$ :

$$\prod_k [p_k \oplus \partial_k]^{(-1)^k} \in K_1(R)$$

Más aún, así se neutraliza la arbitrariedad en la anterior elección de bases para los  $B_i$ , pues un cambio de base aparecerá dos veces, en el morfismo  $p_i \oplus \partial_{i-1}$  y en el siguiente  $p_i \oplus \partial_i$ , pero al tomar la suma alternada se cancela el efecto en  $K_1$ .

**Proposición 2.3.7.** (*Caracterización de la torsión*)

*Dado un complejo acíclico finito, de  $R$ -módulos libres con una elección de bases, podemos computar su torsión como:*

$$\tau(C) = \prod_n [p_n \oplus \partial_n]^{(-1)^n} \in K_1(R) \quad (2.3.8)$$



*Demo.* Separamos por paridad las dos aplicaciones de las cuales proviene la clase de la suma alternada:

$$C_{par} \xrightarrow{\oplus_k (p_k \oplus \partial_k)} \bigoplus_{k \text{ par}} (B_k \oplus B_{k-1}) \quad (2.3.9)$$

$$\bigoplus_{k \text{ impar}} (B_k \oplus B_{k-1}) \xrightarrow{\oplus_k (p_k \oplus \partial_k)^{-1}} C_{impar} \quad (2.3.10)$$

Invirtiendo cada aplicación,  $(p_k \oplus \partial_k)^{-1} = i_k \oplus \delta_{k-1}$ , y corriendo los índices, reescribimos la aplicación (2.3.10) como:

$$\bigoplus_{k \text{ par}} (B_k \oplus B_{k-1}) \xrightarrow{\oplus_k (\delta_k \oplus i_{k-1})} C_{impar} \quad (2.3.11)$$

Si ahora componemos (2.3.9) y (2.3.11), tendremos un mapa cuya clase en  $K_1(R)$  se corresponde con la anterior expresión de la torsión. Lo escribimos a continuación, eligiendo como proyectores  $p_k = \partial_{k+1} \circ \delta_k$ :

$$\bigoplus_{k \text{ par}} (\delta_k \circ \partial_{k+1} \circ \delta_k) \oplus \partial_k = ((\delta \circ \partial \circ \delta) \oplus \partial)_{par}$$

*Obs.*  $\bar{\delta} := \delta \circ \partial \circ \delta$  define una contracción en  $C_\bullet$  alternativa a  $\delta$ .

Así, tenemos la aplicación  $(\bar{\delta} \oplus \partial)_{par}$  que coincide en  $K_1$  con la definición original de la torsión:  $\tau(C) = [(\bar{\delta} + \partial)_{par}] \in K_1(R)$  (con  $\bar{\delta}$  como contracción) pues verificamos que tienen la misma inversa:

$$\begin{aligned} (\bar{\delta} + \partial)_{impar} \circ (\bar{\delta} \oplus \partial)_{par} &= \bar{\delta}^2 + \partial \circ \bar{\delta} \oplus \bar{\delta} \circ \partial + \partial^2 \\ &= \bar{\delta}^2 + Id_{B_\bullet} \oplus Id_{\bar{B}_{\bullet-1}} \\ &= (\bar{\delta}^2 \oplus 0) + Id_{C_\bullet} \\ [(\bar{\delta} + \partial)_{impar}] \cdot [(\bar{\delta} \oplus \partial)_{par}] &= 1 \in K_1(R) \end{aligned}$$

□

**Corolario 2.3.12.** *La torsión es independiente de la elección de los proyectores  $p_n$  o de la contracción  $\delta$ .*

*Demo.* Vimos la equivalencia entre las definiciones eligiendo una contracción particular y unos proyectores particulares, pero la formulación de (2.3.8) no depende de la elección de los proyectores, sino sólo de la estructura del complejo. □

**Lema 2.3.13.** *Dado un isomorfismo entre complejos finitos, acíclicos de  $R$ -módulos libres con bases:  $A_\bullet \xrightarrow{u_\bullet} B_\bullet$ , podemos computar la diferencia entre las respectivas torsiones de la siguiente forma:*

$$\tau(A) \cdot \tau(B)^{-1} = \prod_k [u_k]^k \in K_1(R) \quad (2.3.14)$$

*Demo.* La demostración se basa en una elección de contracciones compatibles via  $u_\bullet$ . Así, dada una contracción  $\delta$  para el primer complejo elegiremos la conjugación por  $u$  de  $\delta$  como contracción  $\tilde{\delta}$  de  $B$ :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\delta}_\bullet & = & u_{\bullet+1} \circ \delta_\bullet \circ u_\bullet^{-1} \\ \\ \cdots A_{\bullet+1} & \xrightleftharpoons[\partial^A]{\delta} & A_\bullet \cdots \\ \downarrow u & & \downarrow u \\ \cdots B_{\bullet+1} & \xrightarrow{\partial^B} & B_\bullet \cdots \end{array}$$

Verificamos la condición de contracción:

$$\begin{aligned} 1_{B_k} &= u_k \cdot 1_{A_k} \cdot u_k^{-1} \\ &= u_k (\delta \cdot \partial^A + \partial^A \cdot \delta) u_k^{-1} \\ &= (u_k \delta u_{k-1}^{-1}) \cdot (u_{k-1} \partial^A u_k^{-1}) + \cdots \\ &\quad \cdots (u_k \partial^A u_{k+1}^{-1}) \cdot (u_{k+1} \delta u_k^{-1}) \\ &= \tilde{\delta}_{k-1} \cdot \partial_k^B + \partial_{k+1}^B \cdot \tilde{\delta}_k \\ 1_{B_k} &= \tilde{\delta} \cdot \partial^B + \partial^B \cdot \tilde{\delta} \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Aplicamos (2.3.15) en el cómputo de la torsión de  $B$ :

$$\tau(B) = [(\partial^B + \tilde{\delta})_{par}] = \prod_k [u_{2k+1}] \cdot [u_{2k}]^{-1} \cdot [(\partial^A + \delta)_{par}]$$

y concluimos:

$$\tau(A) \cdot \tau(B)^{-1} = \prod_k [u_{2k+1}]^{-1} \cdot [u_{2k}]$$

□

**Definición 2.3.16.** Una *sucesión exacta corta de módulos libres con bases* será una sucesión exacta corta usual de los módulos subyacentes:

$$0 \rightarrow (C'; \beta') \xrightarrow{\iota} (C; \beta) \xrightarrow{\pi} (C''; \beta'') \rightarrow 0$$

junto a condiciones de exactitud adicionales:

$$\begin{aligned} \iota(\beta') &\subset \beta \\ \beta'' &= \pi(\beta \setminus \iota(\beta')) \end{aligned}$$

Con la definición anterior tenemos un Corolario al Lema 2.3.13.

**Corolario 2.3.17.** *La torsión es multiplicativa en sucesiones exactas cortas de complejos acíclicos de  $R$ -módulos libres con bases. O sea que dada:*

$$0 \longrightarrow C'_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \xrightarrow{p} C''_\bullet \longrightarrow 0$$

resulta

$$\tau(C') \cdot \tau(C)^{-1} \cdot \tau(C'') = 1 \in K_1(R)$$

*Demo.* Primero notemos que:

$$\tau(C'_{\bullet}) \cdot \tau(C''_{\bullet}) = \tau(C' \oplus C''_{\bullet}).$$

Luego, como tenemos una sucesión exacta de complejos con bases (definición 2.3.16) resulta un isomorfismo de complejos que envía  $\beta$  en la yuxtaposición de las bases dadas,  $\beta, \beta''$ .

$$C_{\bullet} \xrightarrow{Id \oplus \pi} (C' \oplus C'')_{\bullet}$$

con  $[(j \oplus p)_k] = 1 \in K_1(R)$  y así, del Lema 2.3.13 se deduce que:

$$\tau(C' \oplus C'')_{\bullet} = \tau(C_{\bullet})$$

□

**Definición 2.3.18.** Dada  $f : C_{\bullet} \rightarrow D_{\bullet}$  una equivalencia homotópica entre complejos finitos de  $R$ -módulos libres con bases, definimos la torsión asociada a  $f$  como la torsión del cono.

$$\tau(f) := \tau(\Delta(f))$$

**Lema 2.3.19.** (*Torsión y equivalencias homotópicas*)

Consideramos complejos finitos de  $R$ -módulos libres con bases:  $C_{\bullet}$ ,  $D_{\bullet}$  y  $E_{\bullet}$ , no necesariamente acíclicos.

1. La torsión es multiplicativa para sucesiones exactas cortas de equivalencias homotópicas entre complejos libres con bases.  
Dado un diagrama conmutativo con sucesiones exactas por filas, y equivalencias homotópicas:  $f_*$ ,  $g_*$  y  $h_*$ , por columnas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C'_{\bullet} & \longrightarrow & D'_{\bullet} & \longrightarrow & E'_{\bullet} \longrightarrow 0 \\ & & f_* \downarrow & & g_* \downarrow & & h_* \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_{\bullet} & \longrightarrow & D_{\bullet} & \longrightarrow & E_{\bullet} \longrightarrow 0 \end{array}$$

valdrá que:

$$\tau(f_*) \cdot \tau(g_*)^{-1} \cdot \tau(h_*) = 1 \in K_1(R) \quad (2.3.20)$$

2. Si  $f, g : C \rightarrow D$  son equivalencias de homotopía de complejos de  $R$ -módulos y además  $f \cong g$  (son aplicaciones homotópicas entre sí) entonces:

$$\tau(f_*) = \tau(g_*) \quad (2.3.21)$$

3. La torsión se multiplica con respecto a la composición.

Dadas sendas equivalencias homotópicas:  $f_* : C_{\bullet} \rightarrow D_{\bullet}$  y  $g_* : D_{\bullet} \rightarrow E_{\bullet}$ ,

$$\tau(g_* \circ f_*) = \tau(g_*) \cdot \tau(f_*) \quad (2.3.22)$$

*Demo.* (1) Basta ver que las sucesiones exactas anteriores, superior e inferior, inducen una única sucesión exacta corta entre los conos de las respectivas aplicaciones. Éstos resultan acíclicos por tratarse de equivalencias homotópicas, y claramente son finitos, de  $R$ -módulos libres con bases. El resultado se sigue del Corolario 2.3.17.

*Obs.* En la situación anterior, basta pedir que cualesquiera dos de los mapas  $f$ ,  $g$ , o  $h$ , sean equivalencias homotópicas para que lo sea el tercero. Pues basta ver que inducen isomorfismos en la homología y esto es una consecuencia directa del *Lema de los 5*.

(2) Sean  $F_\bullet$  y  $G_\bullet$  los conos de las aplicaciones  $f_*$  y  $g_*$  (ver 2.1.30). Notemos que los módulos subyacentes son los mismos:  $C_{\bullet-1} \oplus D_\bullet$ .

A su vez, partiendo de una equivalencia homotópica  $h$  entre los mapas (ver 2.1.22), tenemos el isomorfismo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}$$

Una verificación rápida muestra que es morfismo de complejos pues:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_C & 0 \\ f_* & -\partial_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_C & 0 \\ g_* & \partial_D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Debemos relacionar los conos asociados a  $f_*$  y  $g_*$ , para lo cual tenemos un morfismo de complejos de cadena:  $h_*: \Sigma^{-1}\Delta(g_*) \rightarrow \Delta(f_*)$  dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Id_D & 0 \end{pmatrix}: D_k \oplus E_{k+1} \rightarrow C_{k-1} \oplus D_k$$

El signo es necesario por la conmutatividad con los bordes respectivos. Observe-mos su cono:

$$\Delta(h_*)_k = D_{k-1} \oplus E_k \oplus C_{k-1} \oplus D_k$$

Tenemos la sucesión exacta corta usual, respetando bases,

$$0 \rightarrow \Delta(f_*) \rightarrow \Delta(h_*) \rightarrow \Delta(g_*) \rightarrow 0 \quad (2.3.23)$$

Y también otra sucesión exacta que respeta bases:

$$0 \rightarrow \Delta(g_* \circ f_*) \xrightarrow{\bar{i}} \Delta(h_*) \rightarrow \Delta(Id_D) \rightarrow 0 \quad (2.3.24)$$

donde el último morfismo es la proyección sobre  $D$ , y el primero es *casi* una inclusión, modificada para que sea mapa de complejos. Matricialmente:

$$[\bar{i}] = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & Id_E \\ Id_C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: C_{\bullet-1} \oplus E_\bullet \longrightarrow D_{\bullet-1} \oplus E_\bullet \oplus C_{\bullet-1} \oplus D_\bullet$$

Además todos los conos que provienen de una equivalencia homotópica dan complejos acíclicos, y por su parte  $\triangle(h_*)$ , es acíclico por ser el cono de un mapa entre complejos acíclicos, lo cual se deduce de la sucesión exacta (2.1.33).

Para acabar esta demostración basta considerar las torciones de las anteriores sucesiones: 2.3.23 y 2.3.24, y aplicar el punto (1) de multiplicatividad por sucesiones exactas cortas.

$$\begin{aligned}\tau(h_*) &= \tau(f_*) \cdot \tau(g_*) \\ \tau(h_*) &= \tau(g_* \circ f_*) \cdot \tau(Id_D) \\ \tau(g_* \circ f_*) &= \tau(f_*) \cdot \tau(g_*)\end{aligned}$$

□

### 3. Obstrucciones en topología

#### 3.1. Obstrucción de finitud

##### Homotopía

**Definición 3.1.1.** Una función  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  entre pares de espacios, es una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  que cuya restricción a  $A$  se correstringe bien a  $B$ , i.e.  $f|_A : A \rightarrow B$  está bien definida.

**Definición 3.1.2.** Dos funciones continuas  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  entre pares de espacios topológicos, son homotópicas si existe una aplicación continua  $H$  tal que:

$$H : X \times I \rightarrow Y \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} H|_{X \times \{0\}} &\equiv f \\ H|_{X \times \{1\}} &\equiv g \end{aligned}$$

y lo análogo para las restricciones:

$$\begin{aligned} H|_{A \times \{0\}} &\equiv f|_A \\ H|_{A \times \{1\}} &\equiv g|_A \end{aligned}$$

Notamos  $[(X, A), (Y, B)]$  a las clases de homotopía de mapas de pares entre  $(X, A)$  e  $(Y, B)$ .

$$[(X, A), (Y, B)] := \{\gamma : (X, A) \rightarrow (Y, B)\} / \sim \quad (3.1.4)$$

**Definición 3.1.5.** Decimos que dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes si existen mapas continuos  $F$  y  $G$  tales que:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & G & \end{array}$$

$$\begin{aligned} G \circ F &\cong_h Id_X \\ F \circ G &\cong_{h'} Id_Y \end{aligned}$$

o sea, pedimos que sean inversas respectivas salvo homotopías. El subíndice refiere a sendas homotopías en  $X$  y en  $Y$ .

Decimos que  $F$  y  $G$  son equivalencias homotópicas.

*Notación.* Indicamos el intervalo unitario como  $I = [0, 1]$ , de modo que  $I^n$  será el  $n$ -cubo unitario ( $n \geq 1$ ) y  $\partial I^n$  su frontera. A su vez,  $I^0$  denotará a un solo punto, con  $\partial I^0 = \emptyset$ , y  $I^n = \emptyset$  si  $n$  es negativo.

Podemos considerar  $I^n \subset I^{n+1}$  identificando  $I^n$  con la componente de  $\partial I^{n+1}$  de última coordenada nula. Notamos  $J^n := \overline{\partial I^{n+1}} \setminus I^n$ .

**Definición 3.1.6.** Definimos el  $n$ -ésimo grupo de homotopía de un espacio  $X$  respecto de un punto base  $x_0 \in X$  como:

$$\pi_n(X, x_0) := [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$$

El producto entre dos elementos  $f, g \in \pi_n(X, x_0)$  se define por:

$$f \cdot g(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2 \cdot s_1, \dots, s_n) & s_1 \leq 1/2 \\ g(2 \cdot s_1 - 1, \dots, s_n) & s_1 \geq 1/2 \end{cases}$$

El primer grupo de homotopía, o grupo fundamental, no es abeliano en general, a diferencia de los demás grupos de homotopía  $\pi_n$  si  $n \geq 2$ . En tales casos usaremos notación aditiva  $f \cdot g =: f + g$ .

Análogamente a lo desarrollado para pares podemos definir mapas de  $k$ -uplas,

$$f : (X^k, X^{k-1}, X^{k-2}, \dots) \rightarrow (Y^k, Y^{k-1}, Y^{k-2}, \dots)$$

verificando  $f|_{X^q} : X^q \rightarrow Y^q$ . Y a su vez, homotopías entre mapas de  $k$ -uplas.

Así, definimos el  $n$ -ésimo grupo de homotopía relativa  $\pi_n(X, A, x_0)$  para  $x_0 \in A \subseteq X$  como:

$$\pi_n(X, A, x_0) := [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$$

En verdad, para  $n = 1$  no tenemos un grupo, y sí para  $n \geq 2$ , siendo éstos conmutativos cuando  $n \geq 3$ . Referimnos a [Hat02, 4.1] para un desarrollo sistemático de grupos de homotopía.

**Proposición 3.1.7.** *Dados  $x_0 \in B \subset A \subset X$  tenemos una sucesión exacta de grupos de homotopía relativos:*

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \rightarrow \cdots \quad (3.1.8)$$

donde  $i_*$  y  $j_*$  son morfismos inducidos por la inclusión de los pares respectivos, mientras que el morfismo de conexión  $\partial_n$  está dado por restricción a  $I^{n-1}$ .

*Demo.* Referimos a [Hat02, Teorema 4.3].

**Definición 3.1.9.** Dados  $(X, A)$  e  $(Y, B)$ , una aplicación de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  induce un morfismo de grupos:

$$\begin{aligned} f_* : \pi_n(X, A, a_0) &\rightarrow \pi_n(Y, B, f(a_0)) \\ \gamma \in \pi_n(X, A, a_0) &\mapsto f \circ \gamma \in \pi_n(Y, B, f(a_0)) \end{aligned}$$

Si  $f, g : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  son mapas homotópicos entre sí, entonces las aplicaciones inducidas a nivel homotopía  $f_*, g_*$  serán idénticas.

**Definición 3.1.10.** Dados espacios topológicos arcoconexos y una función continua entre ellos  $f : X \rightarrow Y$  diremos que es una  $k$ -equivalencia si la aplicación inducida:

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$$

resulta un isomorfismo para todo  $n < k$  y es sobreyectiva para  $n = k$ .

Si es una  $k$ -equivalencia para todo  $k \in \mathbb{N}_0$  diremos que es una equivalencia débil.

## Homotopía versus Homología singular

**Proposición 3.1.11.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un mapa entre espacios topológicos. Vale:*

1. *Si  $f$  es una equivalencia homotópica entonces es una equivalencia débil.*
2. *Si es una equivalencia débil entonces es una equivalencia en la homología.*
3.  *$f$  es una equivalencia homológica si y solo si  $f_* : S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(Y)$  es una equivalencia homotópica entre los complejos singulares.*

*Demo.* 1) Si  $g$  es una inversa homotópica de  $f$ , bastará considerar las composiciones  $f \circ g$  y  $g \circ f$  a nivel homotopía. Vemos que  $f_*$  debe ser un epimorfismo, pues  $Id_* = (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ . Por razones análogas será también un monomorfismo.

2) Referimos a [Hat02, Proposición 4.21].

3) Toda equivalencia homotópica entre complejos es un casi-isomorfismo. Recíprocamente, siendo los grupos  $S_n(X)$  libres -por tanto  $\mathbb{Z}$ -proyectivos- y nulos para  $n < 0$ , podemos aplicar el Corolario 2.1.35.  $\square$

**Definición 3.1.12.** Dada  $f \in \pi_n(X, A, x_0) = [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$  consideramos el mapa inducido en la homología relativa:

$$f_* : H_n(I^n, \partial I^n) \rightarrow H_n(X, A)$$

y fijamos un generador  $\alpha \in H_n(I^n, \partial I^n) \cong \mathbb{Z}$ .

Definimos entonces el mapa de Hurewicz,  $h$ , como:

$$h : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A)$$

$$[f] \mapsto f_*(\alpha)$$

Su buena definición se deduce de la invarianza de  $f_*$  respecto de equivalencias homotópicas entre mapas, lo cual fue comentado en la Definición 4.1.8. Notemos que depende de la elección del generador  $\alpha$ .

**Lema 3.1.13.** *Dado un par  $(X, A)$  y fijados respectivos generadores  $\alpha_n \in H_n(I^n, \partial I^n)$ , tenemos morfismos de grupos dados por el mapa de Hurewicz  $f_* : H_n(I^n, \partial I^n) \rightarrow H_n(X, A)$  para  $n > 1$ , estableciendo un morfismo entre la sucesión exacta de la homotopía y la de la homología asociadas al par  $(X, A)$ .*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(X) & \xrightarrow{p_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \end{array} \quad (3.1.14)$$

*En verdad, cada cuadrado es conmutativo salvo signo, lo cual puede ser corregido cambiando la orientación de los generadores  $\alpha_n$ ,  $n \geq 2$ .*

*Demo.* Ver la prueba en [Hat02, Proposición 4.36].



**Definición 3.1.15.** Decimos que un par  $(X, A)$  es  $n$ -conexo si  $\pi_q(X, A, x_0)$  es trivial para todo  $1 \leq q \leq n$  y  $x_0 \in A$ , y si cada componente arcoconexa de  $X$  tiene puntos de  $A$ .

**Teorema 3.1.16.** Si  $(X, A)$  es un par  $(n-1)$ -conexo, de espacios arcoconexos con  $n \geq 2$  y  $A \neq \emptyset$ , entonces el mapa de Hurewicz da un isomorfismo

$$h : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A)$$

y

$$H_i(X, A) = 0$$

para todo  $i < n$ .

*Demo.* Nuestra referencia es [Hat02, Teorema 4.37.].

**Teorema 3.1.17.** (Whitehead, [Whi49])

Una equivalencia débil entre  $CW$  complejos conexos es una equivalencia homotópica. Más aún, si la equivalencia débil está dada por una inclusión  $Y \subseteq X$  entonces el subcomplejo  $Y$  es un retracto por deformación de  $X$ .

Notemos que estamos dando una recíproca a la primera afirmación de la Proposición 3.1.11 en el caso particular de  $CW$ -complejos.

*Demo.* Nos referimos a [Hat02, Teorema 4.5].

**Teorema 3.1.18.** (Whitehead, [Whi49])

Un mapa  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios  $CW$  simplemente conexos es una equivalencia homotópica si y solo si, induce isomorfismos en la homología,  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

*Demo.* Referimos a la prueba en [Hat02, Corolario 4.33], .

**Proposición 3.1.19.** Una equivalencia homotópica entre espacios arco-conexos y semi-localmente simplemente conexos:  $X \xrightarrow{f} Y$  se levanta a una equivalencia homotópica  $\tilde{f}$  entre sus espacios recubridores universales:

$$\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{Y}$$

Además, con la identificación  $\pi := \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ , la aplicación inducida  $\tilde{f}$  resulta  $\pi$  equivariante.

*Demo.* Tenemos la composición de  $f$  con la aplicación recubridora de  $X$ :

$$f \circ P_X : (\tilde{X}, \bar{p}) \rightarrow (Y, f(p))$$

donde elegimos un levantado  $\bar{p} \in P_X^{-1}(p)$ . Este mapa verifica las hipótesis del Lema 4.3.5, si recordamos que el espacio recubridor universal se distingue por ser simplemente conexo. Así, obtenemos un levantamiento:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\bar{f}} & \tilde{Y} \\ P_X \downarrow & & \downarrow P_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

fijando  $\overline{f(p)} \in P_Y^{-1}(f(p)) \subset \tilde{Y}$ .

Notemos que un elemento  $\gamma \in \pi_1(X)$  actúa en  $\tilde{X}$  (como transformación del recubrimiento), y lo mismo hace en  $\tilde{Y}$ , entendiendo -por abuso- que quien actúa es en realidad  $f \circ \gamma$  en  $\tilde{Y}$ . Si:

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \bar{p} &= \bar{p}' \\ \gamma \cdot \overline{f(p)} &:= (f \circ \gamma) \cdot \bar{p} = \bar{f}(\bar{p}') \end{aligned}$$

mostrando la  $\pi$ -equivarianza de  $\bar{f}$ , gracias a que el levantamiento de  $f \circ \gamma$  es la imagen por  $\overline{f}$  del levantamiento de  $\gamma$ .

Por otra parte, si  $g$  es una inversa homotópica de  $f$  también podemos levantarla, así como a las homotopías que establecen:  $g \circ f \cong_H Id_X$  y  $f \circ g \cong_{H'} Id_Y$ , para acabar de probar que tenemos una equivalencia homotópica entre los recubridores.

Por ejemplo para  $H$ , fijados  $p \in X$  y un levantado  $\tilde{p} \in P^{-1}(p)$ , tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{p}, 0) \in \tilde{X} \times I & \xrightarrow{\bar{H}} & \tilde{X} \ni \tilde{f}(\tilde{p}) \\ P \times Id \downarrow & & \downarrow \\ (p, 0) \in X \times I & \xrightarrow{H} & X \ni f(p) \end{array}$$

Usamos que  $\tilde{X} \times I$  simplemente conexo.

Por unicidad del levantamiento (Lema 4.3.5) tenemos que:

$$\bar{H}_0 \equiv Id_{\tilde{X}}$$

$$\bar{H}_1 \equiv \overline{(g \circ f)}$$

Pues  $\bar{H}_0$  levanta a  $H_0 \equiv Id_X$ , al igual que  $Id_{\tilde{X}}$ , y  $\bar{H}_1$  levanta a  $H_1 = (g \circ f)$ . Por la misma razón,

$$\bar{g} \circ \bar{f} \equiv \overline{(g \circ f)}$$

Concluyendo que  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  serán espacios homotópicamente equivalentes.  $\square$

**Corolario 3.1.20.** *Una equivalencia homotópica  $F : X \rightarrow Y$ , entre espacios conexos con grupo fundamental  $\pi$  induce una  $\mathbb{Z}[\pi]$ -equivalencia homotópica entre los complejos singulares de los recubridores.*

$$S_{\bullet}(\tilde{X}) \xrightarrow{F_*} S_{\bullet}(\tilde{Y})$$

*Demo.* Fijando puntos base podemos levantar  $F$  estableciendo una equivalencia homotópica entre los recubridores de acuerdo a 3.1.19, consiguiendo así una aplicación  $\tilde{F}$  que establece una  $\mathbb{Z}$ -equivalencia homotópica entre los complejos singulares (según vimos en 3.1.11). Esta  $\tilde{F}$  es además  $\pi$ -equivariante (ver 3.1.19), lo cual establece una  $\mathbb{Z}[\pi]$ -equivalencia homotópica.  $\square$

### Complejos CW

*Observación 3.1.21.* Dado  $X$  un CW-complejo conexo (ver 4.2.3), determinado por la filtración  $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subset \dots$  y coproductos de la forma:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\alpha \in A_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\cup \phi_{\alpha}} & X_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\alpha \in A_n} D^n & \xrightarrow{\cup \Phi_{\alpha}} & X_n \end{array}$$

también su recubridor universal  $\tilde{X}$  tendrá estructura de CW-complejo, levantando el esqueleto  $X_n$  al fijar  $(\tilde{X})_n := P^{-1}(X_n)$ .

Para levantar cada función característica  $(\Phi_{\alpha})$  debemos fijar un punto en el espacio recubridor universal, y fijando un punto base en  $X$  hay tantas elecciones como elementos en el grupo fundamental de  $\tilde{X}$ . Así por cada celda original de  $X$  tendremos  $|\pi|$  celdas del recubridor. Las correspondientes funciones de adjunción quedan determinadas por restricción de las funciones características levantadas a  $\tilde{X}$ .

Tenemos el siguiente diagrama, compatible con la acción de  $\pi$  (por traslaciones en el grupo  $\pi$  y como transformaciones del recubrimiento  $\tilde{X} \rightarrow X$ , respectivamente).

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\alpha \in A_n} \pi \times S^{n-1} & \xrightarrow{\cup \tilde{\phi}_{\alpha}} & \tilde{X}_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\alpha \in A_n} \pi \times D^n & \xrightarrow{\cup \tilde{\Phi}_{\alpha}} & \tilde{X}_n \end{array}$$

Notemos que el complejo celular asociado a  $\tilde{X}$ , está formado por  $\mathbb{Z}$ -módulos libres con el rango anterior (en  $X$ ) multiplicado por el orden de  $\pi$  (que en caso de ser infinito, se entiende como producto de cardinales).

Sin embargo, como módulo sobre  $\mathbb{Z}[\pi]$  es un módulo libre del mismo rango que antes (igual a la cantidad de  $n$ -celdas adjuntadas,  $|A_n| =: a_n$ ).

$$C_{\bullet}(\tilde{X}; \mathbb{Z}[\pi]) \cong \mathbb{Z}[\pi]^{a_n}$$

*Observación 3.1.22.* Recordamos que el complejo celular de  $X$  (ver 4.2.11) está formado por  $\mathbb{Z}$ -módulos libres, de modo que le podremos asociar una base a  $H_n(X_n, X_{n-1})$ , con un elemento generador por cada celda. Observemos el isomorfismo:

$$\bigoplus_{\alpha \in A_n} H_n(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\oplus_{\alpha} (\Phi_{\alpha}, \phi_{\alpha})} H_n(X_n, X_{n-1})$$

Tomando un generador por celda, tenemos una base para el primer término, que se aplica en una base para  $H_n(X_n, X_{n-1})$ . Puede haber ambigüedad en la multiplicación de un generador por  $-1$ , o en el orden, y por lo tanto consideraremos dos bases así relacionadas como equivalentes.

De modo análogo, en el complejo del recubridor, tenemos un isomorfismo:

$$\bigoplus_{\alpha \in A_n} H_n(\pi \times (D^n, S^{n-1})) \xrightarrow{\oplus_{\alpha} (\tilde{\Phi}_{\alpha}, \tilde{\phi}_{\alpha})} H_n(\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-1})$$

Notemos que si tomamos un generador de  $H_n(D^n, S^{n-1})$  y lo trasladamos por  $\pi$ , generamos el complejo celular de todas las celdas relacionadas (en conjunto podríamos hablar de una  $\pi$ -celda). Así, recorriendo  $\alpha \in A_n$ , tenemos una base como  $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulo del primer término que llevamos a una  $\mathbb{Z}[\pi]$ -base de  $H_n(\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n-1})$ .

Para ganar independencia de las elecciones hechas, relacionamos bases permutadas o con generadores multiplicados por  $\pm g \in \pi$  (pues la elección inicial de una celda usual en la  $\pi$ -celda es arbitraria salvo la traslación por un elemento del grupo).

**Definición 3.1.23.** Diremos que un espacio  $X$  está dominado por  $W$  si es un retracts salvo homotopía, o sea que deben existir aplicaciones  $f$  y  $g$ , completando el siguiente diagrama, que conmuta salvo homotopías:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & W \\ Id \downarrow & \nearrow g & \\ X & & \end{array}$$

$$Id_X \cong_h g \circ f$$

En particular nos interesa que  $X$  sea un espacio *finitamente dominado*, i.e. un espacio dominado por un CW finito.

*Observación 3.1.24.* Si  $X$  es efectivamente un retracts de  $W$ , entonces su complejo singular asociado es un sumando directo del de  $W$ . Pues:

$$\begin{array}{ccc} & i & \\ X & \xrightarrow{\quad} & W \\ & r & \end{array}$$

$$r \circ i = Id_X$$

Siendo  $S$  un funtor recuperamos un epimorfismo:

$$S_{\bullet}(W) \xrightarrow{r_*} S_{\bullet}(X) \rightarrow 0$$

el cual admite una retracción probando que  $S_{\bullet}(X)$  es isomorfo a un sumando directo.

En particular, si el complejo asociado a  $W$  es acotado o de tipo finito, estas propiedades pasan al complejo de  $X$ .

En principio esto puede no suceder si  $X$  es sólo un retracto salvo homotopía.

**Definición 3.1.25.** Sean  $R$  un anillo y  $C$  un complejo de  $R$ -módulos proyectivos. Decimos que un complejo  $D$  de  $R$ -módulos *domina* a  $C$ , si existen morfismos  $f : C \rightarrow D$  y  $g : D \rightarrow C$  tales que  $g \circ f \cong 1_C$ . Decimos que  $C$  es *finitamente dominado* si es dominado por un complejo finito de módulos libres.

*Observación 3.1.26.* En particular, si  $X$  está finitamente dominado por  $W$  -como espacios- entonces el complejo singular de  $W$  con los respectivos mapas considerados en la homología y la homotopía de complejos de cadena inducida:  $(S_{\bullet}(\tilde{W}), f_*, g_*, \tilde{h})$ , establece una dominación finita sobre  $S_{\bullet}(\tilde{X})$  (como  $\mathbb{Z}[\pi]$ -complejos).

**Lema 3.1.27.** *Un complejo de  $R$ -módulos proyectivos está finitamente dominado si y sólo si es homotópicamente equivalente a un complejo de tipo finito de  $R$ -módulos proyectivos.*

*Demo.* Referimos a la detallada exposición de [Ran85].

Del Lema se sigue que si  $C$  es un complejo de  $R$ -módulos proyectivos, finitamente dominado, entonces está bien definida su característica de Euler  $\chi(C) \in K_0(R)$ .

**Definición 3.1.28.** Dado un espacio topológico  $X$  consideramos el complejo singular asociado  $S_{\bullet}(X)$  y, en caso que este sea homotópicamente equivalente a un complejo finito de  $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulos proyectivos, definimos su característica de Euler como:

$$\chi(X) := \chi(S_{\bullet}(X)) \in K_0(\mathbb{Z}[\pi])$$

y la obstrucción de Wall:

$$\tilde{\chi}(X) := \tilde{\chi}(S_{\bullet}(X)) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$$

En particular este es el caso de un espacio homotópicamente equivalente a un CW finito, ver 4.2.12.

Finalmente tenemos el siguiente resultado para un espacio homotópico a algún CW (no necesariamente finito), e hipótesis técnicas sobre el grupo fundamental.

**Teorema 3.1.29.** (Wall)

Consideramos un espacio conexo  $X$  con grupo fundamental  $\pi$  finitamente presentado, homotópicamente equivalente a un CW-complejo

- $X$  es finitamente dominado si y sólo si el complejo del recubridor universal,  $S_\bullet(\tilde{X})$ , está finitamente dominado (como complejo de  $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulos).
- $X$  es homotópicamente equivalente a un CW finito si y sólo si,  $S_\bullet(\tilde{X})$  está finitamente dominado y se anula su obstrucción de Wall.

Esto justifica referirnos a la obstrucción de Wall del  $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -complejo  $S_\bullet(\tilde{X})$  como la obstrucción de finitud asociada al espacio  $X$ .

*Demo.* Si  $X$  está finitamente dominado por un CW finito  $Y$ ,  $S_\bullet(\tilde{X})$  estará algebraicamente finitamente dominado por el complejo celular de  $Y$ , y así (en vista del lema 3.1.27) será homotópico a un complejo finito de  $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulos proyectivos. En particular estará definida la característica de Euler del complejo de  $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulos  $S_\bullet(\tilde{X})$ .

A su vez, si  $X$  es homotópico a un tal  $Y$ , la obstrucción de Wall de  $X$  se puede computar sobre el complejo celular de  $Y$ , dónde es claramente nula, por ser un complejo finito de  $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulos libres.

Esto prueba la necesidad de las condiciones sobre  $S_\bullet(\tilde{X})$ , referimos al trabajo original para la suficiencia [Wal65, Wal66].  $\square$

### 3.2. Torsión de Whitehead

Dada una equivalencia homotópica entre espacios podemos aplicar la definición 2.3.1 para calcular la torsión del mapa inducido al nivel del complejo del recubridor universal, entre espacios que cuenten con estructura celular finita. En particular necesitamos discutir una asignación natural de bases para los módulos libres involucrados, ya que este invariante de torsión es sensible a tal elección.

**Definición 3.2.1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios con estructura CW finita y una equivalencia homotópica entre ellos  $f : X \rightarrow Y$  (que salvo homotopía podemos elegir celular). Consideramos su levantamiento al nivel de los recubridores universales:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

A su vez, tenemos la aplicación inducida entre los respectivos complejos celulares,  $\tilde{f}_*$ , una  $\mathbb{Z}[\pi]$ -equivalencia homotópica (análogo a 3.1.20) entre los complejos. Su cono será un  $\mathbb{Z}[\pi]$ -complejo acíclico de tipo finito formado por módulos libres con una clase preferida de bases. Podemos computar su torsión:  $\tau(\tilde{f}_*) \in K_1(\mathbb{Z}[\pi])$  y proyectarla al grupo de Whitehead (ver 1.2.16), definiendo

así un invariante, la torsión de Whitehead de la equivalencia  $f$ , que por abuso denotaremos:

$$\tau(f) \in Wh(\pi)$$

Cuando sea trivial,  $\tau(f) = 1$ , diremos que se trata de una equivalencia simple.

*Demo.* (buena definición)

A la luz de lo discutido anteriormente respecto de la elección de bases para los módulos de la homología celular (o la clase de bases), vemos que el paso de  $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$  a  $Wh(\pi)$  anula las ambigüedades, al trivializar permutaciones y multiplicaciones por elementos  $\pm g \in \pi$ . Así se define la torsión de una equivalencia homotópica entre dos espacios CW de manera natural.

Indicamos el texto de Milnor [Mil66] como referencia clásica.

**Definición 3.2.2.** Un *coproducto celular* es un coproducto usual:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

formado por CW-complejos:  $A$ ,  $B$  y  $X$ , con  $f$  una aplicación celular, e “ $i$ ” una inclusión de complejos. En particular queda determinada una estructura celular en  $Y$ , tomando  $Y_n$  como la unión de  $j(B_n)$  y  $g(X_n)$ .

*Observación 3.2.3.* Un coproducto celular da lugar a una sucesión exacta corta de la homología celular, compatible con la elección de bases (como  $\mathbb{Z}$ -módulos) discutida en 3.1.22:

$$0 \rightarrow C_\bullet(A) \xrightarrow{f_* \oplus i_*} C_\bullet(B) \oplus C_\bullet(X) \xrightarrow{j_* \oplus g_*} C_\bullet(Y) \rightarrow 0 \quad (3.2.4)$$

pues  $j \sqcup g$  funciona como aplicación cociente en la construcción de  $Y$  como:

$$Y \cong (B \sqcup X) / (f \sqcup i)A$$

A nivel de los recubridores universales también recuperamos un coproducto celular.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{B} \\ \tilde{i} \downarrow & & \downarrow \tilde{j} \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{Y} \end{array}$$

Y tenemos condiciones de compatibilidad con las respectivas acciones de los grupos fundamentales; por ejemplo la acción en  $A$  de un  $\gamma \in \pi_1(A, a_0)$  se traduce vía  $\tilde{f}$  a la acción de  $f_*(\gamma) \in \pi_1(B, f(a_0))$  en  $B$ .

La aplicación  $j : B \rightarrow Y$  induce un morfismo de anillos  $\mathbb{Z}[\pi_1(B)] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$  que nos permite ver a  $\mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$  como  $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$ -módulo; escribimos

$$C(\tilde{B})_{\mathbb{Z}[\pi_1(Y)]} = C(\tilde{B}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(B)]} \mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$$

por el producto tensorial con respecto a esa estructura de  $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$ -módulo en  $\mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$ . Análogamente se definen  $C(\tilde{X})_{\mathbb{Z}[\pi_1(Y)]}$ , y  $C(\tilde{A})_{\mathbb{Z}[\pi_1(Y)]}$  usando respectivamente  $g$  y  $g \circ i = j \circ f$ .

Estaremos recuperando, a partir de la sucesión (3.2.4), una sucesión exacta corta de  $\mathbb{Z}[\pi(Y)]$ -complejos, con los mismos rangos, y compatible con las bases preferenciales:

$$0 \rightarrow C_\bullet(\tilde{A})_{\mathbb{Z}[\pi(Y)]} \rightarrow C_\bullet(\tilde{B})_{\mathbb{Z}[\pi(Y)]} \oplus C_\bullet(\tilde{X})_{\mathbb{Z}[\pi(Y)]} \rightarrow C_\bullet(\tilde{Y}) \rightarrow 0 \quad (3.2.5)$$

**Proposición 3.2.6.** (*Propiedades de la torsión de Whitehead*)

1. *Dados coproductos celulares entre CW complejos, y  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  equivalencias homotópicas de modo que  $f_j \circ i_j = k_j f_j$  ( $j = 1, 2$ ). Sea  $f : X \rightarrow Y$  la aplicación inducida y sea  $l_0 = l_1 k_1 = l_2 k_2$ . Entonces  $f$  es una equivalencia homotópica y se tiene:*

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \xrightarrow{j_2} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y_0 & \xrightarrow{k_1} & Y_1 \\ k_2 \downarrow & & \downarrow l_1 \\ Y_2 & \xrightarrow{l_2} & Y \end{array}$$

$$\tau(f) = l_{1*} \tau(f_1) \cdot l_{2*} \tau(f_2) \cdot l_{0*} \tau(f_0)^{-1} \in Wh(Y) \quad (3.2.7)$$

2. *Si  $A$  y  $B$  son CW complejos finitos,  $f, g : A \rightarrow B$  es equivalencia homotópica y  $f \cong g$ , entonces:*

$$\tau(f) = \tau(g)$$

3. *Composición*

*Si  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  son equivalencias homotópicas entre CW complejos finitos entonces:*

$$\tau(g \circ f) = \tau(g) \cdot g_* \tau(f) \in Wh(Z)$$

4. *Producto*

*Sean  $f : A' \rightarrow A$  y  $g : B' \rightarrow B$  equivalencias homotópicas de complejos CW conexos y finitos. Sean  $a_0 \in A$  y  $b_0 \in B$ , y sean  $i : A \rightarrow A \times B, i(a) = (a, b_0)$ ,  $j : B \rightarrow A \times B, j(b) = (a_0, b)$ . Entonces:*

$$\tau(f \times g) = (i_* \tau(f))^{\chi(B)} \cdot (j_* \tau(g))^{\chi(A)}$$

*donde  $Wh(B) \xrightarrow{j_*} Wh(A \times B)$  es inducida por la inclusión con algún punto fijo  $a_0 \in A$ , e  $i_*$  está definida análogamente.*

*Aquí usamos que como  $A$  y  $B$  son CW complejos finitos,  $\chi(A)$  y  $\chi(B)$  son números enteros.*



*Demo.* (1) Para comenzar debemos levantar coproductos, y todas las aplicaciones, a sus recubridores universales. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo entre complejos de  $\mathbb{Z}$ -módulos libres:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C_{\bullet}(\tilde{X}_0) & \longrightarrow & C_{\bullet}(\tilde{X}_1) \oplus C_{\bullet}(\tilde{X}_2) & \longrightarrow & C_{\bullet}(\tilde{X}) \longrightarrow 0 \\
& & (\tilde{f}_0)_* \downarrow & & (\tilde{f}_1)_* \oplus (\tilde{f}_2)_* \downarrow & & \tilde{f}_* \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C_{\bullet}(\tilde{Y}_0) & \longrightarrow & C_{\bullet}(\tilde{Y}_1) \oplus C_{\bullet}(\tilde{Y}_2) & \longrightarrow & C_{\bullet}(\tilde{Y}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Pero debemos tensorizar sobre  $\mathbb{Z}[\pi(Y)]$ , como en la definición anterior de coproductos celular, para observar la estructura en común. Abreviemos  $\pi = \pi(X)$ .

Escribimos la sucesión exacta entre los conos de las aplicaciones verticales:

$$0 \rightarrow \Delta(f_{0*})_{\mathbb{Z}[\pi]} \rightarrow \Delta(f_{1*})_{\mathbb{Z}[\pi]} \oplus \Delta(f_{2*})_{\mathbb{Z}[\pi]} \rightarrow \Delta(f_*) \rightarrow 0$$

Tenemos varias cosas que observar:

Hay compatibilidad con las clases de bases preferenciales como  $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulos, pues ya era así en las respectivas sucesiones exactas cortas de la homología celular (para los  $X$ 's del dominios o los  $Y$ 's en la llegada).

Además,  $\tilde{f}_*$  es casi-isomorfismo, y por tanto  $\tilde{f}$  es equivalencia homotópica (usando el Teorema de Whitehead 3.1.17)

Por otra parte, conocemos la torsión de cada término, pues tensorizar del modo anterior equivalía a aplicar  $(l_i)_*$ ,  $i = 0, 1, 2$  en los coeficientes del isomorfismo que define la torsión (según 2.3.2). Entonces:

$$\tau(\Delta(f_{i*})_{\mathbb{Z}[\pi]}) = (l_i)_* \tau(f_i)$$

Siendo multiplicativa la torsión en filas exactas cortas de complejos de  $R$ -módulos con bases (Corolario 2.3.17) deducimos que:

$$\tau(f) = (l_1)_* \tau(f_1) \cdot (l_2)_* \tau(f_2) \cdot ((l_0)_* \tau(f_0))^{-1} \in Wh(Y)$$

(2) y (3) Son consecuencias directas de la Proposición 2.3.19, items (2) y (3), observando las aplicaciones inducidas al nivel de la homología celular. En (3) se aplica  $g_*$  sólo para traducir de  $Wh(Y)$  a  $Wh(Z)$ .

(4) Factoricemos el producto como:

$$f \times g = (f \times Id_Y) \circ (Id_{X'} \times g)$$

Aplicando el item anterior sabemos que:

$$\tau(f \times g) = \tau(f \times Id_Y) \cdot (f \times Id_Y)_* \tau(Id_{X'} \times g)$$

Basta entonces probar que:

$$\tau(f \times Id_Y) = i_*(\tau(f)^{X(Y)}) \in Wh(X \times Y)$$

Lo vemos por inducción en la cantidad de células del complejo  $Y$ :  
 Para comenzar, cuando  $Y$  es apenas un punto el enunciado es trivial. Incluso si fuera un conjunto finito de puntos,  $X \times Y = X \sqcup \cdots \sqcup X$  y así:

$$\tau(f \times Id_Y) = \tau(f) \oplus \cdots \oplus \tau(f) \in Wh(X \times Y) := \bigoplus_{y \in Y} Wh(X)$$

En el paso inductivo, para pegar una celda armamos el coproducto correspondiente.

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow i \\ D^k & \xrightarrow{\Phi} & Y' \end{array}$$

Observemos que la adjunción  $\phi$  siempre es celular siendo  $Y$  un  $\mathbb{C}W$ , y omitimos notar la inclusión canónica.

Luego tomamos producto con:  $f : X' \rightarrow X$ , obteniendo dos coproductos celulares y aplicaciones entre ellos, como en (1).

$$\begin{array}{ccc} X' \times S^{k-1} & \xrightarrow{(Id, \phi)} & X' \times Y \\ \downarrow & & \downarrow (Id, i) \\ X' \times D^k & \xrightarrow{(Id, \Phi)} & X' \times Y' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \times S^{k-1} & \xrightarrow{(Id, \phi)} & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow (Id, i) \\ X \times D^k & \xrightarrow{(Id, \Phi)} & X \times Y' \end{array}$$

Interpretamos la ecuación (3.2.7):

$$\tau(f \times Id_{Y'}) = (Id, i)_* \tau(f \times Id_Y) \cdot (Id, \Phi)_* \tau(f \times Id_{D^k}) \cdot (Id, i \circ \phi)_* \tau(f \times Id_{S^{k-1}})^{-1}$$

Aplicando la hipótesis inductiva tenemos que:

$$\begin{aligned} \tau(f \times Id_Y) &= i_*(\tau(f)^{\chi(Y)}) \\ \tau(f \times Id_{D^k}) &= i_*(\tau(f)^{\chi(D^k)}) \\ \tau(f \times Id_{S^{k-1}}) &= i_*(\tau(f)^{\chi(S^{k-1})}) \end{aligned}$$

Estamos abusando de la notación entre las diferentes inclusiones de  $X$  al producto con partes de  $Y'$ . Pero en todos los casos, la composición de esta inclusión con las aplicaciones que aparecen en la ecuación anterior, resultan en la misma inclusión  $i_* : Wh(X) \rightarrow Wh(X \times Y')$ . Y así:

$$\tau(f \times Id_{Y'}) = i_* \tau(f)^{\chi(Y) + \chi(D^k) - \chi(S^{k-1})} \in Wh(Y')$$

Pero también la característica de  $Y'$  está determinada por el coproducto, observando la fila exacta inducida en la homología celular y aplicando la aditividad de  $\chi$ .

$$\tau(f \times Id_{Y'}) = i_* \tau(f)^{\chi(Y')} \in Wh(Y')$$

□

**Teorema 3.2.8.** (*Chapman*)

Si  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo entre CW complejos conexos finitos, entonces:

$$\tau(f) = 1 \in Wh(\pi)$$

donde  $\pi = \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ .

*Demo.* Referimos a [Cha74].

### Homotopía Simple

Naturalmente nos preguntamos cómo son las equivalencias homotópicas de torsión trivial. Para espacios CW finitos podemos contestar la pregunta, caracterizándolas como homotopías simples.

**Definición 3.2.9.** Decimos que  $X$  se obtiene por una *expansión elemental* de  $Y$ , si resulta de la adjunción de un par de celdas en dimensiones consecutivas:

$$X = Y \cup e^k \cup e^{k+1}$$

donde la función característica de  $e^{k+1}$ ,  $\Phi : D^{k+1} \rightarrow X$  debe verificar que para alguna elección de homeomorfismos estableciendo  $D^{k+1} \approx I^{k+1}$ ,  $D^k \approx I^k$ , la restricción:

$$\phi| : D^k \approx I^k \subset \partial I^{k+1} \approx D^{k+1} \rightarrow X$$

sea una función característica de  $e^k$ .

Además, recordando la notación 3.1:

$$\phi| : J^k \rightarrow Y^k$$

de modo que el borde de  $e^{k+1}$  está compuesto por  $e^k$  y parte del  $k$ -esqueleto de  $Y$ .

Observemos que la inclusión de  $Y$  en  $X$  induce una equivalencia homotópica, pues podemos colapsar  $e^{k+1}$  contra  $Y$ , dando lugar a una retracción por deformación fuerte de  $X$  en  $Y$  (única salvo homotopía relativa a  $Y$ , [Coh73, Proposición 4.1]). Decimos que  $X$  es una expansión elemental de  $Y$ , y a su vez, que  $Y$  es un colapso elemental de  $X$ .

**Definición 3.2.10.** Una equivalencia homotópica  $f : X \rightarrow Y$  será una homotopía simple si es homotópica a una sucesión finita de equivalencias homotópicas  $f \cong f_n \cdots f_1$ , donde cada  $f_i$  es una inclusión o una retracción asociada -respectivamente- a una expansión o colapso elemental.

*Observación 3.2.11.* Dado  $Y$  un subcomplejo conexo de un complejo finito  $X$ , que sea un retracto por deformación de éste, hemos definido la torsión de la equivalencia homotópica dada por la inclusión de  $Y$  en  $X$ . Alternativamente, ya que contamos con el complejo celular relativo  $C_\bullet(\tilde{X}, \tilde{Y})$  (con la clase de bases dada por la estructura CW relativa), y éste es un complejo acíclico, podríamos considerar su torsión y proyectarla a  $Wh(X)$ . Ambas nociones coinciden, seguimos en esto a [Tur01, Capítulo II, Lema 8.6].

Notemos además que tenemos una extensión de la definición de torsión asociada a un retracts por deformación, para el caso dónde sólo contemos con la finitud de la estructura celular relativa al par, pero no a cada uno de los espacios.

**Teorema 3.2.12.** (*Homotopía Simple*)

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una equivalencia homotópica entre complejos  $\mathcal{CW}$  conexos finitos. Esta equivalencia tendrá torsión trivial si y sólo si es una homotopía simple.

*Demo.* ( $\Leftarrow$ ) A partir de la observación anterior es fácil ver la condición sobre la torsión pues conocemos el complejo relativo. Conservando la notación de la definición 3.2.9, vemos que  $C_\bullet(X, Y)$  tiene sólo dos celdas, en grado  $k$  y  $k+1$ . A nivel de los recubridores,  $C_\bullet(\tilde{X}, \tilde{Y})$  se ve como:

$$\cdots 0 \rightarrow \mathbb{Z}[\pi] \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}[\pi] \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

como el operador de borde envía la célula  $e^{k+1}$  -de mayor dimensión- a su borde, formado por  $e^k$  pegada a una  $k$ -celda en  $Y$ , en la estructura relativa sólo sobrevive  $e^k$ , y así  $\partial$  envía el  $1 \in \mathbb{Z}[\pi]$  en grado  $(k+1)$  a  $\pm g$ . Pero la clase de esta aplicación en  $Wh(\pi)$  es trivial.

Visto que la inclusión asociada a una expansión elemental es una equivalencia simple, se deduce que también lo es una retracción que provenga de un colapso elemental (por ser su inversa) o cualquier sucesión de colapsos y expansiones elementales. Recordamos en esto las propiedades multiplicativas de la torsión por composición de equivalencias (ver 3.2.6 ).

( $\Rightarrow$ ) Ver [Coh73, Apartado 22]. □

Finalmente mostramos cómo construir un par  $(X, Y)$  que realice una torsión predeterminada.

**Proposición 3.2.13.** (*Realización*)

Dado  $Y$  un complejo  $\mathcal{CW}$  de grupo fundamental  $\pi$ , y un elemento cualquiera  $w \in Wh(\pi)$ , podemos construir otro complejo  $\mathcal{CW}$   $X$ , del cual  $Y$  sea subcomplejo y tal que la torsión dada por la inclusión sea igual a  $w$ .

*Demo.* Primero representamos a  $w \in Wh(\pi)$  por una matriz inversible:

$$M = (m_{ij})_{i,j} \in Gl_q(\mathbb{Z}[\pi])$$

Tomamos  $n \geq 2$  fijo, y pasamos a pegar por un punto  $y \in Y$   $q$  esferas de dimensión  $n$ , formando:

$$Y' := Y \vee \bigvee_{i \leq q} S_i^n$$

La notación refiere a efectuar el pegado por un punto. La estructura celular corresponde a  $q$  celdas de dimensión  $n$  cuyo borde se pega sobre  $y \in Y$ .

Si consideramos el grupo de homotopía:  $\pi_n(Y', y)$ , además de ser abeliano será un  $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulo, por la acción del grupo fundamental trasladando esferas basadas en  $y \in Y'$ . Notemos también que cada esfera pegada representa una

clase distinta  $[S_i^n] \in \pi_n(Y', y)$  (lo cual es claro si cocientamos por  $Y$  y observamos el “racimo” de esferas resultante). Tomamos entonces:

$$\mu_i = \sum_{1 \leq j \leq q} m_{ij} [S_i^n] \in \pi_n(Y', y)$$

Tales elementos corresponderán a mapas:  $f_i : S^n \rightarrow Y'$  para  $i = 1, \dots, q$ . Los usamos como funciones de adjunción, que indican dónde pegar el borde de otras  $q$  celdas de dimensión  $n + 1$ , recuperando un espacio  $X$ .

Observemos que siendo  $n \geq 2$  no hemos afectado el grupo fundamental, y así  $\pi := \pi_1(Y, y) \cong \pi_1(X, y)$ . Veamos la homología celular del par  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ :

$$C_j(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \begin{cases} (\mathbb{Z}[\pi])^q & k = n, n + 1 \\ 0 & k \neq n, n + 1 \end{cases}$$

Y además, eligiendo orientaciones y levantados convenientes de las celdas de los recubridores, tendremos que el mapa de borde  $\partial$ :

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow (\mathbb{Z}[\pi])^q \xrightarrow{\partial} (\mathbb{Z}[\pi])^q \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \quad (3.2.14)$$

coincide con nuestro elemento prescripto  $M \in Gl_q(\mathbb{Z}[\pi])$  (para ello se debe tomar como punto base siempre a un mismo  $\tilde{y} \in P^{-1}(y)$  y atender a que las orientaciones de las células levantadas coincidan con las originales via  $P$ ). En particular es un isomorfismo lo cual muestra que la homología relativa era nula:

$$H_\bullet(\tilde{Y}, \tilde{X}) = 0$$

y así por 3.1.16, siendo  $(Y, X)$  un par 1-conexo, todos los grupos relativos de homotopía resultan triviales, y entonces debe ser un retracto por deformación gracias al teorema de Whitehead (3.1.17), siendo la inclusión una equivalencia débil.

Así podemos calcular la torsión del complejo acíclico  $C_\bullet(\tilde{X}, \tilde{Y})$ . De (3.2.14) resulta que:

$$\tau(X, Y) = w^{(-1)^{n+1}}$$

Notemos que en  $Wh(\pi)$  las ambigüedades acerca de las orientaciones y elecciones de levantados desaparecen. En cambio, la cuestión del signo depende de la definición misma de la torsión. Así bastaba elegir un  $n$  impar al comienzo para recuperar la torsión deseada.  $\square$

## Cobordismo

**Definición 3.2.15.** Dos variedades  $C^\infty$   $n$ -dimensionales, compactas y sin borde (en el sentido de 4.4.2),  $M_0$  y  $M_1$ , se dicen cobordantes si su unión disjunta  $M_0 \sqcup M_1$  coincide con el borde de alguna variedad compacta  $W$ . O sea:

$$\partial W = \partial_0 W \sqcup \partial_1 W$$

$$\partial_j W \cong M_j \quad j = 0, 1$$

Pedimos que cada componente del borde sea difeomorfa a las variedades especificadas. Para dar cuenta de esto, en vez de indicar la terna  $(W, M_0, M_1)$ , podemos agregar información dando:  $(W, M_0, f_0, M_1, f_1)$  donde para  $j = 0, 1$ , cada  $f_j$  da un difeomorfismo:

$$M_j \xrightarrow{f_j} \partial_j W$$

Si además consideramos variedades orientadas, un cobordismo orientado  $W$  deberá verificar que  $\partial_0 W \cong M_0^+$  y  $\partial_1 W \cong M_1^-$  lo cual significa que la orientación inducida en  $M_1$  como borde de  $W$  es la opuesta a la dada (aquí importa el orden).

*Observación 3.2.16.* La relación de cobordismo (orientado o no) es de equivalencia. Tenemos el cobordismo trivial  $M_0 \times I$  para la reflexividad, la simetría se deduce de invertir la orientación de un cobordismo dado y, por último, la transitividad se obtiene pegando variedades, o sea que dados cobordismos  $(W, M_0, M_1)$  y  $(W', M_1, M_2)$  tendremos el pegado a lo largo de  $M_1$ :  $(W \cup_{M_1} W', M_0, M_2)$  estableciendo un cobordismo entre  $M_0$  y  $M_2$ .

El conjunto de clases de cobordismo orientado de variedades  $n$ -dimensionales tiene estructura de grupo abeliano con la unión disjunta, lo notamos:  $\Omega_n$

$$[M_0] + [M_1] = [M_0 \sqcup M_1]$$

Vale notar que siempre tenemos un representante conexo de cada clase, considerando la suma conexas. O sea, que dadas variedades  $n$ -dimensionales podemos formar una nueva variedad, por pegado de un tubo entre ambas. Formalmente necesitamos sendos embebimientos de  $D^n$  en cada variedad  $M_i$  lo cual se puede hacer sobre una carta cualquiera, y así tendremos:

$$W = (M_0 \sqcup M_1 \times I) \cup_{(D^n \times j \rightarrow M_j \times 1)} D^n \times I \quad (3.2.17)$$

$W$  da un cobordismo entre  $M_0 \sqcup M_1$  y la suma conexas:

$$M_0 \# M_1 := (M_0 \sqcup M_1) \cup_{S^{n-1} \times \{j\}} (S^{n-1} \times I)$$

En particular la suma conexas de una variedad  $M$  con una esfera de la misma dimensión, da una estructura difeomorfa a la original, mostrando que  $S^n$  es el elemento neutro en  $\Omega_n$ .

**Definición 3.2.18.** Dados dos cobordismos sobre  $M_0$ :  $(W, M_0, f_0, M_1, f_1)$  y  $(W', M_0, f'_0, M'_1, f'_1)$ , diremos que son difeomorfos relativos al borde, si existe un difeomorfismo  $F: W \rightarrow W'$  que verifique  $F \circ f_0 \equiv f'_0$ . Notemos que en consecuencia  $F(M_1) \cong M'_1$ .

Por eso nos interesa determinar cuándo un cobordismo sobre  $M_0$  es difeomorfo relativo al borde (difeomorfo rel.  $\partial$ ), a un cobordismo trivial. Pues en tal caso tendríamos establecido un difeomorfismo entre  $M_0$  y  $M_1$ , resolviendo el problema de clasificación.

La siguiente condición nos dará la clave.

**Definición 3.2.19.** Un  $h$ -cobordismo es un cobordismo  $(W, M_0, f_0, M_1, f_1)$  tal que cada inclusión  $M_j \rightarrow W$  ( $j = 0, 1$ ) sea una equivalencia homotópica.

**Teorema 3.2.20.** ( *$h$ -cobordismo; Smale*)

*Si  $M$  es una variedad simplemente conexa compacta de dimensión mayor o igual a 5, entonces todo  $h$ -cobordismo sobre ella es trivial.*

*Demo.* Referimos a [Mil65].

Este resultado permitió resolver la conjetura de Poincaré para dimensiones superiores, ver 3.2.23.

*Observación 3.2.21.* Dado un  $h$ -cobordismo  $(W, M_0, M_1)$  podemos computar la torsión asociada a la inclusión  $M_0 \subset M$ , que por hipótesis es una equivalencia homotópica.

$$\tau(W, M_0) \in Wh(\pi_1(M_0))$$

Como las variedades compactas admiten una estructura de CW finito, única salvo homeomorfismos, estará bien definida.

La torsión resulta ser el invariante clave en la generalización del teorema de  $h$ -cobordismo sin imponer restricciones sobre el grupo fundamental.

**Teorema 3.2.22.** ( *$s$ -cobordismo*)

*Sea  $M_0$  una variedad conexa compacta y orientada de dimensión  $n \geq 5$ , con grupo fundamental  $\pi := \pi_1(M_0)$ . Vale que:*

- *Un  $h$ -cobordismo es difeomorfo rel.  $\partial$  a uno trivial, si y sólo si,*

$$\tau(W, M_0) = 1 \in Wh(\pi)$$

- *Más aún, cada elemento en el grupo de Whitehead tiene un  $h$ -cobordismo sobre  $M_0$  que lo realiza, i.e.*

$$\forall x \in Wh(\pi) \quad \exists (W, M_0, M_1) \quad / \quad \tau(W, M_0) = x$$

*y asignar la torsión establece una biyección entre las clases de  $h$ -cobordismo sobre  $M_0$ , salvo difeomorfismos relativos al borde, y el grupo de Whitehead de  $M_0$ .*

*Demo.* Pruebas independientes fueron provistas por Barden, Mazur y Stallings. No demostraremos este resultado, referimos a [Ker65]. Vale notar que el segundo punto es un refinamiento de la construcción 3.2.13.

**Teorema 3.2.23.** (*ex Conjetura de Poincaré*)

*Una variedad compacta, sin borde,  $n$ -dimensional  $M$  que sea simplemente conexa, y tenga la homología de  $S^n$ , i.e. “una esfera homotópica”, debe ser homeomorfa a ésta.*

La conjetura es válida trivialmente para  $n = 1$ , al no alcanzarse las hipótesis, y se deduce de la clasificación de superficies para  $n = 2$ . Nosotros pasaremos a demostrarla para  $n \geq 6$ , como corolario del teorema de  $h$ -cobordismo. Nuestro argumento puede ser adaptado para  $n = 5$ , pero los casos  $n = 3, 4$  son considerablemente más difíciles, y en particular  $n = 3$  fue el último en ser probado, por Gregori Perelman.

*Demo.* Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n \geq 6$  con la homología de  $S^n$ , i.e.

$$H_k(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ 0 & k \neq 0, n \end{cases}$$

Notemos que siendo 1-conexo es posible aplicar el teorema de Hurewicz (3.1.16) reiteradas veces, mostrando que es  $n - 1$  conexo y que  $\pi_n(M, p) = H_n(M, p)$  (tomando un punto base  $p \in M$ ). Así podemos tomar un elemento generador de la homología  $n$ -ésima proveniente de un mapa:

$$f : S^n \rightarrow M$$

Esta aplicación induce un isomorfismo en la homología y resulta una equivalencia homotópica por 3.1.18, justificando que hablemos de una esfera homotópica.

Consideramos entonces  $g : M \rightarrow S^n$  una inversa homotópica de  $f$ . Notemos que si tenemos dos discos cerrados de dimensión  $n$  con embebimientos disjuntos en  $M$ :  $D_0^n$  y  $D_1^n$ , la imagen por  $g$  de cada uno de ellos será homotópica a un disco. O sea que podemos asumir que tenemos una equivalencia homotópica:

$$\tilde{g} : M \setminus (D_0^n \cup D_1^n) \longrightarrow S^{n-1} \times I$$

Observemos que  $W := M \setminus (D_0^n \cup D_1^n)$  es un cobordismo entre dos copias de  $S^{n-1}$ , más aún es un h-cobordismo pues via  $\tilde{g}$  es claro que se contrae hacia cualquiera de sus dos bordes. Así  $W$  es un cobordismo sobre  $\partial D_0^n \cong S^{n-1}$  y resulta difeomorfo relativo al borde a un cobordismo trivial, pues estamos en condiciones de aplicar el teorema de h-cobordismo 3.2.20. Tenemos entonces un difeomorfismo:

$$F : (W, \partial D_0^n, \partial D_1^n) \longrightarrow (\partial D_0^n \times I, \partial D_0^n \times 0, \partial D_0^n \times 1)$$

Podemos volver a pegar  $D_0^n$  pues su borde está identificado, pero no sucede lo mismo con  $D_1^n$  pues tenemos un difeomorfismo:  $F_1 : \partial D_1^n \rightarrow \partial D_0^n \times 1$ . Sin embargo esta aplicación puede ser extendida a un homeomorfismo entre discos, con el siguiente truco debido a Alexander:

$$D_1^n \longrightarrow D^n$$

$$(r, \theta) \mapsto (r, r \cdot F_1(1, \theta))$$

La notación usa una coordenada radial:  $r$ , y otra angular:  $\theta \in S^{n-1}$ .

Notemos que el centro  $r = 0$  es un punto de no diferenciabilidad. Recuperamos al menos un homeomorfismo:

$$M = W \cup D_0^n \cup D_1^n \longrightarrow \sim (\partial D_0^n \times I) \cup D_0^n \cup_{F_1(\partial D_1^n)} D^n \cong S^n$$

□



## 4. Apéndice

### 4.1. Homología singular

**Definición 4.1.1.** Dado un espacio topológico  $X$ , definimos un  $n$ -cubo como un mapa  $T : I^n \rightarrow X$ .

Decimos que un  $n$ -cubo  $T(s_1, \dots, s_n)$  es degenerado si es constante respecto de alguna de sus variables.

Consideramos entonces el grupo abeliano libre generado por los  $n$ -cubos y lo notamos  $Q_n(X)$ , dentro del cual tenemos el subgrupo generado por todos los  $n$ -cubos degenerados,  $D_n(X)$ . El cociente será el  $n$ -ésimo grupo de cadenas,  $S_n(X)$ .

$$S_n(X) = Q_n(X)/D_n(X)$$

A su vez, notemos que  $S_n(X)$  es un grupo abeliano libre generado por el conjunto de  $n$ -cubos módulo los cubos degenerados.

**Definición 4.1.2.** Dada un  $n$ -cubo  $T : I^n \rightarrow X$  definimos por restricción los siguientes  $(n-1)$ -cubos, y nos referimos a ellos como las caras de  $T$ .

$1 \leq i \leq n$

$$A_i T(s_1, \dots, s_{n-1}) = T(s_1, \dots, s_{i-1}, 0, s_i, \dots, s_{n-1})$$

$$B_i T(s_1, \dots, s_{n-1}) := T(s_1, \dots, s_{i-1}, 1, s_i, \dots, s_{n-1})$$

Tenemos definidos morfismos  $\partial_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$  dados por:

$$\partial_n(T) := \sum_{i=1}^n (-1)^i [A_i T - B_i T] \quad (4.1.3)$$

donde los corchetes indican el paso al cociente por los  $(n-1)$ -cubos degenerados.

**Lema 4.1.4.** *Los morfismos  $\partial_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$  verifican las siguientes propiedades:*

1.  $\partial_n \partial_{n-1} \equiv 0$
2.  $\partial_n(D_n(X)) \subseteq D_{n-1}(X)$

*Demo.* 1) La primera afirmación se prueba por un cómputo directo, aplicando aditividad y las siguientes propiedades : Si  $1 \leq i < j \leq n$ :

$$\begin{aligned} A_i A_j(T) &= A_{j-1} A_i(T) \\ B_i B_j(T) &= B_{j-1} B_i(T) \\ A_i B_j(T) &= A_{j-1} B_i(T) \\ B_i A_j(T) &= B_{j-1} A_i(T) \end{aligned}$$

2) Para la segunda notemos que si un cubo  $T$  es degenerado para la  $i$ -ésima variable, entonces  $A_i T = B_i T$  y se cancela el término correspondiente en la expresión (4.1.3), dejando que los demás términos den cubos degenerados respecto de esa variable (reindexada convenientemente).  $\square$

**Definición 4.1.5.** (Homología Singular)

Dado un espacio  $X$  tenemos mapas inducidos:

$$\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

dando a  $(S_\bullet(X), \partial)$  estructura de complejo de cadenas de  $\mathbb{Z}$ -módulos. Lo llamamos el complejo singular asociado a  $X$ .

Los grupos de homología asociados al complejo  $(S_\bullet(X), \partial)$  (ver (2.1.4)) definen la homología del espacio:

$$H_n(X) := H_n(S_\bullet(X))$$

**Definición 4.1.6.** Si  $(X, A)$  es un par espacio-subespacio definimos el complejo singular de  $X$  relativo a  $A$  como el cociente:

$$S_n(X, A) := S_n(X) / S_n(A)$$

La restricción del operador de borde:  $\partial$ , al espacio  $A$ , verifica:  $\partial(S_n(A)) \subseteq S_{n-1}(A)$  de modo que  $(S_\bullet(X, A), \partial)$  resulta un complejo de cadenas (por abuso  $\partial$  es el morfismo inducido).

*Observación 4.1.7.* Tenemos una fila exacta corta de complejos:

$$0 \rightarrow S_\bullet(A) \xrightarrow{i} S_\bullet(X) \xrightarrow{p} S_\bullet(X, A) \rightarrow 0$$

y la correspondiente fila exacta larga en la homología (por 2.1.10):

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

Notemos que la aplicación de  $H_n(X)$  en  $H_n(X, A)$  es la inducida por la inclusión de aquellos ciclos (de borde nulo) en aquellas cadenas de  $X$  con borde en  $A$ . Además, el morfismo de conexión  $H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$  es literalmente el borde.

**Definición 4.1.8.** Dados  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  una aplicación  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  entre ellos induce un morfismo de grupos  $f_* : S_n(X, A) \rightarrow S_n(Y, B)$  por composición de  $f$ , análoga a la definida para la homotopía en 3.1.9.

Diremos que  $f$  es una equivalencia homológica si  $f_*$  es un casi-isomorfismo.

Se prueba que mapas homotópicos  $f \cong g : X \rightarrow Y$  inducen aplicaciones  $f_*, g_* : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ , a nivel del complejo singular, que son homotópicamente equivalentes entre si (i.e. elementos idénticos en el sentido de (2.1.20)). Nos referimos a [Mas80, Teorema 4.1].

El siguiente resultado es de vital importancia para el cómputo de grupos de homología.

**Proposición 4.1.9.** Si  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  son dos subconjuntos de un espacio  $X$ , tales que sus interiores cubren  $X$ , entonces tenemos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\cdots H_n(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \xrightarrow{i_{\mathcal{U}} \oplus -i_{\mathcal{V}}} H_n(\mathcal{U}) \oplus H_n(\mathcal{V}) \xrightarrow{j_{\mathcal{U}} + j_{\mathcal{V}}} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \cdots$$

*Obs.* Los morfismos  $i_{\mathcal{U}}$  e  $i_{\mathcal{V}}$  son las inclusiones desde la intersección en común  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  en los respectivos  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$ ; y  $j_{\mathcal{U}}, j_{\mathcal{V}}$  son las inclusiones desde los subespacios respectivos a  $X$ . El morfismo:

$$\delta : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

está dado tomar un ciclo  $z \in H_n(X)$ , descomponerlo como suma de cadenas en  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  (gracias a que forman un cubrimiento generalizado), de modo que:  $z = u + v$ , y en consecuencia:

$$0 = \partial z = \partial u + \partial v$$

y asignar:

$$\delta : z \mapsto \partial u = -\partial v \in H_{n-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

No podemos asegurar que el ciclo  $z$  se descomponga como suma de ciclos, por lo que la aplicación no es necesariamente nula, y además, está bien definida, pues si descomponemos  $z = u' + v'$  con  $u' \subset \mathcal{U}$ , y  $v' \subset \mathcal{V}$ , entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= u - u' + v - v' \\ u - u' &\subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \\ \partial(u - u') &= 0 \in H_{n-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \end{aligned}$$

pues mostramos que es un borde.

*Demo.* (Proposición 4.1.9)

Nuestra referencia es [Hat02, Página 149].

## 4.2. Complejos CW

**Definición 4.2.1.** Dados dos espacios topológicos  $X, Y$ , y datos de pegado  $a : Z \rightarrow X$  y  $b : Z \rightarrow Y$ , podemos definir su pegado como el espacio  $E$  (la clase de homeomorfismo) resultante del siguiente push-out:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{a} & X \\ b \downarrow & p.o. & \downarrow \\ Y & \dashrightarrow & E \end{array}$$

En particular, tal espacio se puede construir como el cociente de la unión disjunta por el dato, i.e.:  $E = (X \sqcup Y) / a(z) \sim b(z)$

*Notación.* La celda  $n$ -dimensional  $D^n$  es el disco cerrado y su borde usual,  $S^{n-1}$  es la esfera de una dimensión menos.

*Observación 4.2.2.* Un caso particular es la adjunción de  $n$ -celdas a un espacio  $X$ , donde efectuamos el pegado sobre el borde.

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\alpha \in A_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\cup \phi_\alpha} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\alpha \in A_n} D^n & \xrightarrow{\cup \bar{\phi}_\alpha} & Y \end{array}$$

Decimos que  $Y$  se obtiene de  $X$  por adjunción de  $n$ -celdas.

Por abuso, también nos referiremos al mapa  $\bar{\phi} : D^n \rightarrow X$  como una  $n$ -celda. Tácitamente el morfismo  $S^{n-1} \rightarrow D^n$ , es la inclusión canónica. Las funciones  $\phi_\alpha$  son las *adjunciones*, mientras que a las  $\bar{\phi}_\alpha$  las llamamos *características*. Notaremos  $a_n = |A_n|$ , la cantidad de  $n$ -celdas.

**Definición 4.2.3.** Resulta entonces natural definir un CW complejo, o sea, un espacio topológico  $X$  con una filtración:

$$\emptyset := X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$$

donde  $X_n$  se obtiene de  $X_{n-1}$  por adjunción de  $n$ -celdas, y  $X$  es la unión resultante, formalmente el colímite.

La topología determinada admite como cerrados aquellos subconjuntos que sean cerrados en su intersección con el  $n$ -esqueleto:  $X_n$ , para cada  $n$ .

**Definición 4.2.4.** Más en general, podemos comenzar a adjuntar celdas desde un espacio topológico cualquiera  $A$ . Para ello pediremos que la filtración comience con  $X^0 := A \sqcup D$ , con  $D$  un conjunto discreto, y que el proceso continúe con las condiciones anteriores.

En ese caso decimos que el par  $(X, A)$  tiene estructura de CW-complejo relativo a  $A$ . Tal estructura pasa bien al cociente de  $X$  por  $A$ , y determina un CW-complejo en  $X/A$ .

Recuperamos la noción anterior, de estructuras de CW en el caso trivial:  $X = X/\emptyset \cong (X, A)$ .

*Observación 4.2.5.* Un subcomplejo CW de  $X$  será un subespacio  $A \subset X$ , con estructura de CW complejo dada por una subcolección de las celdas de  $X$ . En particular requerimos que las funciones de adjunción de  $k$ -celdas de  $A$ , que corresponden a celdas de  $X$  con imagen en  $X_{k-1}$ , se correstrengan bien, llegando al  $(k-1)$ -esqueleto de  $A$ .

Obtendremos que el par  $(X, A)$  conlleva naturalmente una estructura de CW-complejo relativo a  $A$ .

Por ejemplo, el  $n$ -esqueleto  $X_n$  tiene estructura de subcomplejo de  $X$ , dejando al par  $(X, X_n)$  la estructura propia del truncamiento de la filtración original.

*Observación 4.2.6.* Volviendo a la estructura de CW-complejo relativo, dada por un par  $(X, A)$ , el paso al cociente que define  $X/A$  induce un isomorfismo a nivel

homología; reinterpretando la homología relativa del par como la homología reducida del espacio cociente.

$$H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

La fila exacta de la homología asociada al par  $(X, A)$  resulta:

$$\cdots \rightarrow H_\bullet(A) \xrightarrow{i_*} H_\bullet(X) \xrightarrow{j} \tilde{H}_\bullet(X/A) \xrightarrow{\partial} H_{\bullet-1}(A) \rightarrow \cdots$$

**Proposición 4.2.7.** *Caracterización de la homología de un CW complejo  $X$ .*

1.  $H_k(X_n, X_{n-1}) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \mathbb{Z}^{a_n} & k = n \end{cases}$
2.  $\forall k > n \quad H_k(X_n) = 0$
3.  $\forall k < n \quad H_k(X_n) \cong H_k(X)$  con el isomorfismo inducido por la inclusión.

*Demo.* 1) Observemos que el cociente  $X_n/X_{n-1}$  son  $n$ -esferas pegadas por un punto en común, al colapsar sus bordes y toda estructura anterior. Notamos:

$$X_n/X_{n-1} \cong \bigvee_{\alpha \in A_n} S_\alpha^n$$

Usando 4.2.6 tenemos que:

$$H_k(X_n, X_{n-1}) \cong \tilde{H}_k\left(\bigvee_{\alpha \in A_n} S_\alpha^n\right)$$

y podemos calcular la homología de este último espacio aplicando el teorema 4.1.9. Basta proceder de modo inductivo, tomando un abierto  $\mathcal{U}$  que sea entorno de una esfera y se retraiga sobre ésta, y otro abierto  $\mathcal{V}$  cubriendo las demás esferas. Observemos:

$$\cdots H_k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \xrightarrow{i_{\mathcal{U}} \oplus -i_{\mathcal{V}}} H_k(\mathcal{U}) \oplus H_k(\mathcal{V}) \xrightarrow{j_{\mathcal{U}} + j_{\mathcal{V}}} H_k\left(\bigvee_{\alpha \in A_n} S_\alpha^n\right) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \cdots \quad (4.2.8)$$

Notemos que la intersección de tales abiertos se retrae sobre el punto en común a todas las esferas, por lo cual:

$$\tilde{H}_k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 0$$

Observando (4.2.8) tenemos:

$$H_k\left(\bigvee_{\alpha \in A_n} S_\alpha^n\right) \cong H_k(\mathcal{U}) \oplus H_k(\mathcal{V})$$

A su vez, por definición de  $\mathcal{U}$ ,

$$H_k(\mathcal{U}) \cong H_k(S^n)$$

dónde  $H_k(S^n) = \mathbb{Z}$  sólo si  $k = n$  y de lo contrario es nula. O sea que, prosiguiendo inductivamente al cálculo de la homología de  $\mathcal{V}$ -correspondiente a las restantes esferas- llegamos a que:

$$\tilde{H}_n(\bigvee_{\alpha \in A_n} S^n) \cong \mathbb{Z}^{a_n}$$

donde  $a_n = |A_n|$ , y en otro grado la homología resulta trivial.

2),3) Referimos a [Mas80, IV.4] □

*Observación 4.2.9.* A partir de la filtración de un complejo CW dado, tenemos, por cada par consecutivo  $X_{n-1} \subseteq X_n$ , la parte no trivial de la fila exacta larga de la homología asociada al par, o sea:

$$0 \rightarrow H_n(X_n) \xrightarrow{j_n} H_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \rightarrow 0 \quad (4.2.10)$$

**Definición 4.2.11.** Definimos entonces el complejo celular de  $X$  como  $C_n(X) := H_n(X_n, X_{n-1})$ , con bordes  $d_n = j_{n-1} \circ \partial_n$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(X_n, X_{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \searrow \partial_n & \uparrow j_{n-1} & & \\ & & & & H_{n-1}(X_{n-1}) & & \end{array}$$

Notemos que efectivamente es un complejo pues:

$$\begin{aligned} d_n \circ d_{n+1} &= (j_{n-1} \circ \partial_n) \circ (j_{n-2} \circ \partial_{n-1}) \\ &= j_{n-1} \circ (\partial_n \circ j_{n-2}) \circ \partial_{n-1} \\ &= j_{n-1} \circ (0) \circ \partial_{n-1} \\ d_n \circ d_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

**Teorema 4.2.12.** La homología singular es isomorfa a la homología del complejo celular  $C_\bullet(X)$ .

*Demo.* Arreglamos como filas o columnas, parte de las sucesiones exactas mostradas anteriormente en (4.2.10). Podemos ver al complejo celular en la diagonal:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ \cdots & H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(X_n) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \rightarrow 0 \\ & & \searrow d_{n+1} & \downarrow j_n & & & \\ & & & H_n(X_n, X_{n-1}) & & & \\ & & & \downarrow \partial_n & \searrow d_n & & \\ & 0 & \rightarrow & H_{n-1}(X_{n-1}) & \xrightarrow{j_{n-1}} & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) & \end{array}$$

Seguimos el diagrama.

De la primera fila notamos que:

$$H_n(X) \cong \frac{H_n(X_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$$

Notemos también que las aplicaciones  $j_n$  son monomorfismos. Así:

$$\begin{aligned} H_n(X) &\cong j_n(H_n(X)) \\ \text{Im}(j_n) &= \text{Ker}(\partial_n) = \text{Ker}(d_n) \end{aligned}$$

De dónde resulta que:

$$H_n(X) \cong j_n(H_n(X_n)/\text{Im}(\partial_{n+1}) \cong \frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(d_{n+1})} =: H_n(C_\bullet(X))$$

□

### 4.3. El Recubridor universal

**Definición 4.3.1.**  $X$  es un espacio localmente arco-conexo, si dado un punto y un entorno arbitrario en  $X$ ,  $x \in U$ , existe a su vez otro entorno  $V$  arcoconexo tal que  $x \in V \subseteq U$ .

La oponemos a la condición más ligera, que solo pide la existencia de algún entorno arcoconexo.

**Definición 4.3.2.** Decimos que un espacio  $X$  es semi-localmente simplemente conexo, si todo punto  $x_0 \in X$  posee un entorno  $U$  tal que:

$$\begin{aligned} \pi_1(U, x_0) &\xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \\ i_* &\equiv 0 \end{aligned}$$

i.e. donde la aplicación inducida por la inclusión resulta nula a nivel del grupo fundamental.

**Definición 4.3.3.** Dado  $X$ , un recubridor es un espacio  $E$  junto a una aplicación  $P$ ,

$$E \xrightarrow{P} X$$

admitiendo un cubrimiento por abiertos de  $X$ :  $\{\mathcal{U}_i\}_i$  donde  $P$  establece un homeomorfismo entre  $\mathcal{U}_i$  y cualquier componente de  $P^{-1}(\mathcal{U}_i)$ .

**Proposición 4.3.4.** Si  $X$  es un espacio conexo, localmente arco-conexo y semi-localmente simplemente conexo, entonces existe un espacio recubridor universal. O sea, un espacio  $\tilde{X}$  y una aplicación recubridora  $P$ ,

$$\tilde{X} \xrightarrow{P} X$$

con  $\tilde{X}$  simplemente conexo.

*Demo.* En estas cuestiones, así como en el Lema a continuación, seguimos a [Mun75].

**Lema 4.3.5.** Sean  $X$  un espacio arcoconexo, semi-localmente simplemente conexo y localmente arco-conexo, y sean  $f : X \rightarrow B$  continua y  $p : E \rightarrow B$  una aplicación recubridora. Sea  $x_0 \in X$  y sea  $e_0 \in E$  tales que  $f(x_0) = p(e_0)$ . Entonces son equivalentes:

1.  $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$ .
2. Existe un único levantamiento  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  tal que:  $p \circ \tilde{f} = f$ :

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

#### 4.4. Geometría Diferencial

**Definición 4.4.1.** Una variedad topológica de dimensión  $n$  es un espacio topológico  $M$ , con base numerable de la topología, Hausdorff y localmente euclídeo de dimensión  $n$ .

Esta última condición significa que  $\forall x \in M, \exists U \subset M$  abierto conteniéndolo, homeomorfo a un abierto usual de  $\mathbb{R}^n$ , via  $\phi : U \rightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ . En tal caso decimos que  $U$  es un abierto coordenado, y  $\phi$  una carta. Notemos que dadas  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  y  $\psi : V \rightarrow \psi(V)$  tendremos la función de transición:

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

que resulta un homeomorfismo entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$  (admitimos el caso vacío).

**Definición 4.4.2.** Una variedad  $C^k$  de dimensión  $n$  es una variedad topológica  $M^n$  con un atlas  $C^k$ , i.e. una colección de cartas cuyos dominios cubren el espacio, de modo que las funciones de transición sean además  $k$ -veces diferenciables. En particular si  $k = 0$  no hemos agregado nada y si  $k = \infty$  decimos que es una variedad suave.

**Definición 4.4.3.** Si permitimos coordinar abiertos del espacio  $M$  con abiertos de  $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1 \cdots x_n) : x_n \geq 0\}$  tendremos definida una variedad  $n$ -dimensional con borde.

*Observación 4.4.4.* Los morfismos de variedades topológicas son, simplemente, funciones continuas.

Para variedades  $C^k$ , pediremos que una función  $f : M^m \rightarrow N^n$  tenga expresiones locales  $C^k$ , o sea que dadas respectivas cartas  $\phi : U \subset M \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$  y  $\psi : V \subset N \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ , la composición resultante:

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(f(U) \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (4.4.5)$$



sea  $k$ -veces diferenciable en el sentido usual.

Si la variedad tiene borde basta especificar qué es una función diferenciable entre abiertos de  $R_+^n$  que no sean abiertos en  $R^n$ . Pediremos que las funciones puedan extenderse a un abierto de  $R^n$  y tener allí una expresión diferenciable en el sentido usual. En particular, se deduce de las definiciones que una función entre variedades topológicas con borde, debe enviar el borde en el borde.

**Definición 4.4.6.** Decimos que un mapa  $f : M^m \rightarrow N^n$  es una inmersión si al diferenciar cualquier expresión local -de acuerdo a (4.4.5)- tenemos un monomorfismo (lineal) para cada  $x \in M$ , i.e.

$$D(\psi f \phi^{-1})_{\phi(x)} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Si  $f : M \rightarrow N$  es una inmersión y establece además un homeomorfismo con la imagen decimos que  $f$  es un embebimiento.

**Teorema 4.4.7.** (*Whitney*)

1. Si  $M$  y  $N$  son variedades suaves tales que  $\dim(N) \geq 2 \cdot \dim(M) + 1$  y  $M$  es compacta, entonces cualquier mapa continuo  $f : M \rightarrow N$  es homotópico a un embebimiento de  $M$  en  $N$ .
2. Toda variedad suave  $n$ -dimensional  $M^n$  puede embeberse en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

*Demo.* Nos referimos a [Hir94, Teoremas 2.14, 2.13]

Dada una aplicación  $p : E \rightarrow X$ , decimos que  $p^{-1}(x)$  es la fibra por  $p$  de  $x \in X$ . Así, un fibrado sobre  $X$  se definirá como un espacio  $E$  con una aplicación  $p : E \rightarrow X$ , tal que todas las fibras sean esencialmente idénticas, junto a otras condiciones de compatibilidad.

**Definición 4.4.8.** Un  $\mathbb{K}$ -fibrado vectorial de rango  $n$  sobre  $X$ , una variedad  $C^k$ , es un espacio  $E$  con una aplicación  $E \xrightarrow{p} X$ , junto a un cubrimiento por abiertos de  $X$  que de una trivialización local de  $E$ , i.e. una colección de abiertos de  $X$  y aplicaciones biyectivas:  $\{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}$  tales que:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow[\sim]{\phi_i} & \mathcal{U} \times \mathbb{K}^n \\ p \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ \mathcal{U} & & \end{array}$$

Además, si dos trivializaciones se solapan en una intersección en común:  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ , la función de transición:

$$\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{\psi \circ \phi^{-1}} \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \times \mathbb{K}^n$$

$$(x, \bar{v}) \mapsto (x, g_{ijx}(\bar{v}))$$

estará determinada por aplicaciones  $g_{ij}$ ,

$$g_{ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \rightarrow Gl_n(\mathbb{K}) \quad (4.4.9)$$

tan regulares como se requiera, o sea, continuas en principio, y  $C^q$  en general ( $0 \leq q \leq k \leq \infty$ ) según el tipo variedad que sea  $X$  y de fibrado que queramos considerar, en analogía con las posibles definiciones de variedad (4.4.2).

Notemos que resulta inducida una estructura de variedad  $C^k$  en  $E$ , con el atlas dado por las trivializaciones.

Un morfismo de fibrados será una aplicación regular ( $C^k$ ) entre los espacios totales  $E \xrightarrow{\phi} F$ , respetando las fibras, de modo que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & \swarrow & \\ X & & \end{array}$$

$$\phi_x : E_x \rightarrow F_x$$

y actuando linealmente en éstas,

$$\phi_x : E_x \rightarrow F_x$$

*Ejemplo 4.4.10.* Dada  $M^n$  una variedad  $C^k$  (al menos  $k \geq 1$ ) tenemos definido su fibrado tangente  $TM$ . Consideramos un atlas para  $M^n$ :  $\{\mathcal{U}_i \subset M \xrightarrow{\phi_i} \tilde{\mathcal{U}}_i \subset \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$  y definimos nuestro espacio  $TM$  como un cociente:

$$\bigsqcup U_i \times \mathbb{R}^n / \sim$$

donde  $(x, u) \sim (y, v)$  si  $x = y$  y  $v = D(\phi_j \phi_i^{-1})_{\phi_i(x)}(u)$ . La proyección a la primer coordenada da el mapa  $TM \rightarrow M$ . Tenemos el cubrimiento por abiertos  $\{U_i \times \mathbb{R}^n\}_i$  donde naturalmente tenemos cartas  $\phi_i \times Id$  y una trivialización local del fibrado (con mapas identidad). Notemos que la función de transición correspondiente a (4.4.9) asigna:

$$x \mapsto D(\phi_j \phi_i^{-1})_{\phi_i(x)} \in Gl_n(\mathbb{R})$$

Como aplicación de 4.4.7 podemos probar el siguiente resultado.

**Proposición 4.4.11.** *Dado  $p : E \rightarrow X$  un fibrado de rango  $k$  sobre una variedad suave  $X^1$ , existe un complemento  $p' : E' \rightarrow X$  a un fibrado trivial:*

$$E \oplus E' \cong X \times \mathbb{R}^N$$

para algún  $N \in \mathbb{N}$ .

---

<sup>1</sup>Notemos que no requerimos compacidad a la variedad base.

*Demo.* Considerando a  $E$  como espacio total podemos embeberlo en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^N$  para una dimensión suficientemente grande (ver 4.4.7). Allí tenemos el fibrado tangente complementado por el fibrado normal a  $E$  en  $\mathbb{R}^N$ .

$$TE \oplus NE \cong E \times \mathbb{R}^N \quad (4.4.12)$$

La inclusión  $X \subset E$  se traduce a los fibrados tangentes, dejando a  $TX$  como subfibrado de  $T_X E$  -el tangente a  $E$  restringido a  $X$ . Además, usando la identificación  $T\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$  en cada fibra, tenemos:  $E_x \cong TE_x$ , lo cual también permite pensar a  $E$  como un subfibrado de  $T_X E$ . Tenemos un isomorfismo de fibrados sobre  $X$ :

$$T_X E \cong TM \oplus E \quad (4.4.13)$$

Basta verificarlo localmente. Notemos que las dimensiones son complementarias, y que, localmente, las coordenadas de  $E$  son de la forma:  $(x, v)$  con  $x \in X$  y  $v \in E_x$  por lo que localmente las coordenadas de  $T_X E$  son del tipo  $((x, 0, u, v))$  con  $x \in X$ ,  $u \in TX$ ,  $v \in TE_x$  (el 0 es para recordar que estamos sobre la sección cero de  $E$  correspondiente a  $X$ ).

De la ecuación (4.4.12) restringiendo los fibrados a  $X$ , y (4.4.13), hallamos un complemento para  $E$ :

$$E \oplus (TM \oplus N_X E) \cong T_X E \oplus N_X E \cong X \times \mathbb{R}^N$$

## Referencias

- [Cha74] T. A. Chapman. Topological invariance of Whitehead torsion. *Amer. J. Math.*, 96:488–497, 1974.
- [Coh73] Marshall M. Cohen. *A course in simple-homotopy theory*. Springer-Verlag, New York, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 10.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Hir94] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.
- [Ker65] Michel A. Kervaire. Le théorème de Barden-Mazur-Stallings. *Comment. Math. Helv.*, 40:31–42, 1965.
- [Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.
- [Mas80] William S. Massey. *Singular homology theory*, volume 70 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [Mil65] John Milnor. *Lectures on the  $h$ -cobordism theorem*. Notes by L. Siebenmann and J. Sondow. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.
- [Mil66] John Milnor. Whitehead torsion. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72:358–426, 1966.
- [Mun75] James R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [Ran85] Andrew Ranicki. The algebraic theory of finiteness obstruction. *Math. Scand.*, 57(1):105–126, 1985.
- [Ros94] Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications*, volume 147 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Tur01] Vladimir Turaev. *Introduction to combinatorial torsions*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Notes taken by Felix Schlenk.
- [Wal65] C. T. C. Wall. Finiteness conditions for CW-complexes. *Ann. of Math. (2)*, 81:56–69, 1965.
- [Wal66] C. T. C. Wall. Finiteness conditions for CW complexes. II. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 295:129–139, 1966.

- [Whi49] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:213–245, 1949.
- [Whi50] J. H. C. Whitehead. Simple homotopy types. *Amer. J. Math.*, 72:1–57, 1950.