UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Convergencia del método adaptativo de elementos finitos para el problema de Poisson

Lucas Corach

Director: Gabriel Acosta Rodríguez

4 de marzo de 2016

Índice general

1. El algoritmo adaptativo **10**
1.1. De las triangulaciones y de REFINAR 11
1.2. De los espacios de elementos finitos y RESOLVER 15
1.3. De los estimadores de error y ESTIMAR 16
1.4. De las estrategias de marcado y MARCAR 17
1.5. Convergencia del algoritmo 18

2. Un ejemplo de estimador **19**

3. Convergencia del algoritmo **31**

4. Implementación y resultados **41**

Introducción

El método de elementos finitos (MEF) es uno de los más utilizados en ciencia e ingeniería para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Si bien el método puede aplicarse potencialmente en todo tipo de ecuaciones su planteo estándar es particularmente propicio para ecuaciones de tipo elíptico. La teoría admite dos grandes enfoques en lo que al tratamiento del error se refiere, estos son, el de estimaciones *a priori* y el de estimaciones *a posteriori*. En el primer caso, la idea es obtener cotas para el error basados en información concreta acerca de la regularidad esperada de la solución. Esta información es provista por la teoría de EDPs y determina esta regularidad en términos de la regularidad de los datos y de la geometría del borde del dominio en el cual la ecuación esta planteada. Estas estimaciones poseen gran generalidad y precisamente por ello no captan características específicas de cada solución particular. En casos excepcionales se puede preveer el comportamiento esperado de la solución en el sentido de conocer la naturaleza y localización de posibles singularidades de la misma. En esos casos puede ser factible la construcción de mallas adaptadas a priori que permitan reducir el costo computacional esperado cuando se lo compara con el obtenido por el uso de mallas uniformes. Las estimaciones a posteriori por su parte toman información de las soluciones aproximadas obtenidas por el algoritmo y permiten construir estrategias para obtener soluciones mas y mas precisas a través de iteraciones sucesivas. En lo que resta de esta introducción repasamos algunos aspectos elementales del MEF.

En lo que sigue y salvo indicación contraria denotamos con $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ a un dominio acotado y poligonal. Esto último es asumido generalmente para no lidiar con representaciones inexactas del borde de Ω que aparecerían con bordes curvos y el uso de triangulaciones rectas.

De aquí en mas, lo descripto se adapta a cualquier operador lineal uniformemente elíptico aunque nos enfocaremos en el caso del Laplaciano en el contexto del problema de Poisson ya que permite atacar las dificultades esenciales del problema sin pérdida de generalidad y sin complicar la presentación.

El problema es entonces el de aproximar soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}, \tag{0.1}$$

donde asumiremos en general que la fuente f pertenece a $L^2(\Omega)$. La teoría de EDPs provee resultados de existencia, unicidad y regularidad de soluciones en espacios de Sobolev para el problema (0.1). Notablemente el MEF se enmarca naturalmente en ese contexto teórico proponiendo una estructura variacional análoga. Recordemos algunas definiciones estándar adaptadas a nuestro contexto que por simplicidad será el de $L^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Definición 0.1. *Dada $u \in L^2(\Omega)$ y $1 \leq i \leq 2$, decimos que u posee una derivada débil respecto de x_i en $L^2(\Omega)$, si existe una función $g_i \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\phi \qquad \forall\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \tag{0.2}$$

y se denota $\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i$.

Con esta definición, aplicada recursivamente, se definen las derivadas sucesivas $D^\lambda u$ para cualquier $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, con $\lambda_i \in \mathbb{N}_0$ y en donde $D^\lambda u := \frac{\partial^{|\lambda|}u}{\partial^{\lambda_1}x_1\partial^{\lambda_2}x_2}$ con $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$.

Definición 0.2. *El* ***espacio de Sobolev****, $H^k(\Omega)$, se define como el espacio de todas las funciones $u \in L^2(\Omega)$, para las cuales $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ si $0 \leq| \alpha |\leq k$.*

Dichos espacios son de Hilbert con la norma asociada

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\lambda|\leq k} \int_\Omega | D^\lambda u |^2 \ dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

A su vez, para cada $1 \leq i \leq k$ las seminormas de Sobolev se denotan

$$| u |_{H^i(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\lambda|= i} \int_\Omega | D^\lambda u |^2 \ dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Observación 0.1. *Mediante $H_0^1(\Omega)$ denotamos la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.*

En el contexto de los espacios de Sobolev, valen ciertos teoremas que aportan desigualdades que nos resultarán de utilidad a lo largo del trabajo. Los enunciamos en $\mathbb{R}^2$ simplemente para mantener uniformidad con el resto del texto.

Teorema 0.1. *(Desigualdad de Poincaré I). Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado entonces existe una constante $c > 0$ que depende sólo de Ω*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \qquad v \in H_0^1(\Omega) \tag{0.3}$$

Teorema 0.2. *(Desigualdad de Poincaré II) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de diámetro d, estrellado respecto de una bola. Si una función $v \in H^1(\Omega)$ verifica que*

$$\int_\Omega v = 0$$

Entonces vale la siguiente estimación

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega d\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \tag{0.4}$$

Notemos que en la primer desigualdad no hay ninguna hipótesis de regularidad sobre el dominio y se prueba trivialmente considerando que las funciones de $H_0^1(\Omega)$ pueden extenderse por cero y ser consideradas en $H_0^1(B)$ siendo B una bola $\Omega \subset B$ de diámetro d. Luego, por ejemplo, la desigualdad se prueba para una bola de diámetro 1 (puede hacerse por compacidad) llegando a la demostración de la desigualdad en Ω por rescale.

Por otro lado la desigualdad (0.4) es más delicada puesto que ya no puede reducirse al caso de una bola y los argumentos de compacidad aplicados directamente sobre Ω no dan cuenta de la dependencia en d. En [2], por ejemplo, puede verse una demostración.

Finalmente, un último teorema al que echaremos mano en la demostración de algunos de los resultados de este trabajo. Las funciones de Sobolev se definen sobre los espacios L^p en donde las funciones se identifican salvo por sus valores en conjuntos de medida cero. En los espacios de Sobolev sin embargo puede darse sentido a la restricción de una función al borde de su dominio de definición.

Teorema 0.3. *(Teorema de trazas). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, con borde Lipschitz. Existe un operador lineal $Tr : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, que coincide con la restricción a $\partial\Omega$ si se aplica sobre funciones continuas y que además verifica*

$$\|Tr(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Volviendo al problema (0.1) recordamos que de manera estándar multiplicando a ambos lados de la igualdad por una función arbitraria $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando miembro a miembro sobre Ω, se obtiene

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{0.5}$$

luego de integrar por partes. Esta última ecuación, en contra de la denominada *forma fuerte* dada por (0.1), se conoce como la *forma débil* o variacional del problema de Poisson. Existencia y unicidad de solución para (0.5) se siguen del teorema de Lax-Milgram habida cuenta de que las formas bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ y lineal $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $\int_\Omega fv$ resultan trivialmente continuas. Es decir

$$|a(u,v)| \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

y

$$|L(v)| \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{0.6}$$

mientras que la coercitividad de a

$$a(u,u) \geq C_2 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

se sigue facilmente de la desigualdad de Poincaré I.

El MEF consiste en aproximar la solución de la ecuación de (0.5) resolviéndolo no sobre $H_0^1(\Omega)$ sino sobre un subespacio de dimensión finita de éste. Para poder definir este subespacio precisaremos de una discretización de nuestro domino Ω, que llamaremos *triangulación* de Ω.

Diremos que $\mathcal{G}$, un conjunto de triángulos de $\mathbb{R}^2$, es una triangulación (o grilla, y por eso el nombre) de Ω si vale que

$$\cup_{T \in \mathcal{G}} T = \bar{\Omega}$$

Denotaremos con $V_\mathcal{G}$ al conjunto de los vértices de la triangulación, y con $V_G(T)$ a los vértices del triángulo T. Dada $\mathcal{G}$ una triangulacion de Ω diremos que ésta es **conforme** si para todo par de triángulos de $\mathcal{G}$, su intersección es vacía, o es una arista completa de los dos triángulos o es sólo un vértice en común.
Siendo $\mathcal{G}$ una triangulación conforme , denotaremos por $\mathbb{S}$ al conjunto de los lados de los elementos de $\mathcal{G}$. Por la manera que está planteado el problema, con condición de contorno $u = 0 \,\text{en}\, \partial\Omega$, sólo tomaremos en consideración los lados interiores de los triángulos, es decir aquellos que no forman parte de $\partial\Omega$, podemos definir entonces a $\mathbb{S}_\mathcal{G}$ como el conjunto de los lados interiores de

$\mathcal{G}$. Cabe notar que este conjunto tiene medida de Lebesgue 2-dimensional nula. Al considerar un lado $S \in \mathbb{S}_\mathcal{G}$, denotaremos por T_1 y T_2 a los elementos de $\mathcal{G}$ que comparten S, y por $\overrightarrow{n_i}$ al vector unitario normal sobre S exterior a T_i, para $i = 1, 2$; y $\omega_S := T_1 \cup T_2$. Dado $T \in \mathcal{G}$, diremos que $T' \in \mathcal{G}$ es un vecino de T, si $T' \cap T \in \mathbb{S}_\mathcal{G}$, también consideramos que T es vecino de sí mismo; y denotaremos por $N_\mathcal{G}(T)$ al conjunto de vecinos de T, es decir

$$N_\mathcal{G}(T) := \{T' \in \mathcal{G} \mid T' \cap T \in \mathbb{S}_\mathcal{G}\} \cup \{T\}. \tag{0.7}$$

Denotaremos con $\omega_\mathcal{G}(T)$ a la vecindad de T, es decir la región de Ω cubierta por los vecinos de T

$$\omega_\mathcal{G}(T) := \bigcup_{T' \in N_\mathcal{G}(T)} T' \tag{0.8}$$

Otra definición que nos será de utilidad es la vecindad relativa a un vértice α

$$\omega_\mathcal{G}(\alpha) := \{T \in \mathcal{G} \mid \alpha \in V_\mathcal{G}(T)\} \tag{0.9}$$

Otra propiedad que pediremos a nuestra malla $\mathcal{G}$, es que sea regular. Definimos

$$\kappa_\mathcal{G} := \max_{T \in \mathcal{G}} \frac{diam(T)}{\rho_T} \tag{0.10}$$

donde $diam(T) := \max\{| x - y | : x, y \in T\}$, por comodidad, en adelante, le notaremos h_T, y ρ_T es el radio del círculo inscripto dentro de T. Este número es el *coeficiente de regularidad* de la malla $\mathcal{G}$. Más aún, si consideramos una familia de triangulaciones $\mathbb{F} = (\mathcal{G}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la diremos *regular* si

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \{\kappa_{\mathcal{G}_i}\} < \infty. \tag{0.11}$$

Si bien para toda triangulación fija el número dado por (0.10) es finito (pues solo hay finitos elementos) suele hablarse abusando de la notación de mallas o grillas regulares. Es fácil ver que en una familia de mallas regulares se verifican los siguientes hechos:

1. La cantidad máxima de elementos que comparten un mismo vértice en una triangulación determinada está uniformemente acotada

$$\sup_{i \in \mathcal{N}} \max_{\alpha \in V_{\mathcal{G}_i}} \#\omega_{\mathcal{G}_i}(\alpha) < \infty \tag{0.12}$$

2. Si $|.|$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$, que llamaremos *área*, existe una constante uniforme $C_\mathbb{F} > 0$, tal que

$$\frac{1}{C_\mathbb{F}} h_T^2 \leq | T | \leq C_\mathbb{F} h_T^2, \qquad \forall T \in \mathcal{G}, \forall \mathcal{G} \in \mathbb{F},$$

   es decir que la raíz cuadrada del área de cada elemento T es una medida equivalente al diámetro de T, o sea

$$h_T \sim |T|^{\frac{1}{2}}$$

   para todo elemento T en cualquier triangulación de la familia $\mathbb{F}$

3. Dos vecinos en cualquier triangulación tienen área equivalente con una constante de equivalencia uniforme, es decir,

$$\sup_{\mathcal{G} \in \mathbb{F}} \max_{T \in \mathcal{G}} \max_{T' \in \mathcal{N}_\mathcal{G}(T)} \frac{| T |}{| T' |} < \infty. \tag{0.13}$$

4. El área de la vecindad de cualquier elemento de cualquier triangulación de la familia es equivalente al área del elemento mismo, es decir,

$$\sup_{\mathcal{G}\in\mathbb{F}} \max_{T\in\mathcal{G}} \frac{|\ \omega_{\mathcal{G}}(T)\ |}{|\ T\ |} < \infty.$$

El *tamaño global* $H_{\mathcal{G}}$ de una triangulación viene dado por

$$H_{\mathcal{G}} := \max_{T\in\mathcal{G}} h_T$$

es decir, el diámetro del triángulo más grande de la triangulación.

En muchos resultados que daremos y probaremos, como así también en muchos cálculos durante las implementaciones, se requiere integrar una función sobre un tríangulo T, para simplificar este cálculo se apela a una transformación afín $\hat{F} : \hat{T} \to T$, lineal y biyectiva y que a cada punto de $\hat{T}$ asigna uno de T, donde $\hat{T}$ es el triángulo de vértices $(0,0),(1,0),(0,1)$, pudiendo escribirse $\hat{F}(\hat{x}) = B\hat{x} + p$ donde B tiene por columnas a las coordenadas de los vectores $\alpha_i - \alpha_k$ y $\alpha_j - \alpha_k$, que resultará inversible si T es un triángulo no degenerado. En este contexto valdrá el siguiente

Lema 0.1. *Siendo $\hat{F} : \hat{T} \to T$, biyectiva, y tal que $\hat{F}(\hat{x}) = B\hat{x} + p$, valdrán las siguientes estimaciones*

$$\|B\| \leq \frac{h_T}{\hat{\rho}} \quad y \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_T}$$

Demostración. Empecemos por suponer que el origen está situado en el centro de la bola de radio $\hat{\rho}$ contenida en $\hat{T}$, esto puede hacerse pues esta suposición no afecta el valor de $\|B\|$. Tendremos, apelando a la definición de norma matricial, y a que $B\hat{x} = F(\hat{x}) - F(0)$:

$$\|B\| = \sup_{\|\hat{x}\|=\hat{\rho}} \frac{\|B\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} = \sup_{\|x\|=\hat{\rho}} \frac{\|B\hat{x}\|}{\hat{\rho}} = \frac{\|\hat{F}(\hat{x}) - \hat{F}(0)\|}{\hat{\rho}} \leq \frac{h_T}{\hat{\rho}} \tag{0.14}$$

Obteniéndose así el resultado. La otra estimación se prueba de manera análoga. □

Ahora que tenemos discretizado nuestro dominio Ω mediante una triangulación que verifica todas las condiciones citadas previamente, podemos proceder a la construcción de las bases del **MEF**. En nuestro caso, usaremos el subespacio de funciones lineales a trozos que comúnmente se denomina $\mathbb{P}_1$. Para ello para cada vértice $v_i \in V_{\mathcal{G}}$ definimos ϕ_i lineal a trozos, y continua sobre cada triángulos que cumpla $\phi_i(v_j) = \delta_{i,j}$, es fácil ver que $\phi \in H_0^1(\Omega)$ (recordar que solo consideramos nodos interiores). Este conjunto de funciones, $\{\phi_i : 1 \leq i \leq \#V_{\mathcal{G}}\}$, genera un subespacio de dimensión finita de H_0^1, que depende de la malla, llamémosle $X_{\mathcal{G}}(\Omega)$. Podemos, ahora, resolver el problema variacional (0.5), pero en lugar de hacerlo sobre todo $H_0^1(\Omega)$ lo haremos sobre $X_{\mathcal{G}}(\Omega)$, es decir, resolveremos

$$\int_\Omega \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla v_{\mathcal{G}} = \int_\Omega f v_{\mathcal{G}}, \qquad \forall v_{\mathcal{G}} \in X_{\mathcal{G}} \tag{0.15}$$

A este problema se le conoce como *Problema variacional discreto*. La función $u_{\mathcal{G}} \in X_{\mathcal{G}}$ que verifica la ecuación de arriba, es la llamada aproximación de Galerkin de la solución de (0.5), de hecho es la mejor aproximación (para la norma que estamos usando) en $X_{\mathcal{G}}$ de dicha solución. En efecto, gracias a (0.5) y (0.15) notamos que

$$a(u - u_{\mathcal{G}}, v_{\mathcal{G}}) = 0$$

para todo $v_{\mathcal{G}} \in X_{\mathcal{G}}$ y entonces

$$\|u - u_{\mathcal{G}}\|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{C_2} a(u - u_{\mathcal{G}}, u - u_{\mathcal{G}}) = \frac{1}{C_2} a(u - u_{\mathcal{G}}, u - v_{\mathcal{G}}).$$

Usando la continuidad de la forma bilineal

$$\|u - u_{\mathcal{G}}\|_{H^1}^2 \leq \frac{C_1}{C_2} \|u - u_{\mathcal{G}}\|_{H^1} \|u - v_{\mathcal{G}}\|_{H^1}$$

Es decir,

$$\|u - u_{\mathcal{G}}\|_{H^1} \leq \|u - v_{\mathcal{G}}\|_{H^1} \qquad \forall v_{\mathcal{G}} \in X_{\mathcal{G}} \tag{0.16}$$

donde C_1 y C_2 son las constantes de continuidad y coercividad de la forma a, respectivamente. Este resultado es conocido como el lema de Céa. En el análisis a priori del error el término de la derecha se acota usualmente tomando $v_{\mathcal{G}} = I(u)$, donde I algún operador de interpolación $I : H_0^1 \cap \mathcal{H} \to X_{\mathcal{G}}$ definido en un conjunto generalmente más regular que H^1 (denotado aquí abstractamente por $\mathcal{H}$) y que pueda ser bien aproximado por funciones de $X_{\mathcal{G}}$. En ese sentido, utilizando la regularidad de la solución (dada por el espacio $\mathcal{H}$) puede concluirse la convergencia del método cuando $H_{\mathcal{G}} \to 0$. El problema de este enfoque es que requiere en principio que el diámetro de todos lo elementos converjan con un orden simultáneo a cero porque de otro modo el orden global garantizado será únicamente el del elemento mayor. Dicho de otro modo, la malla debería refinarse uniformemente (o al menos quasi-uniformemente) como en la siguiente imagen

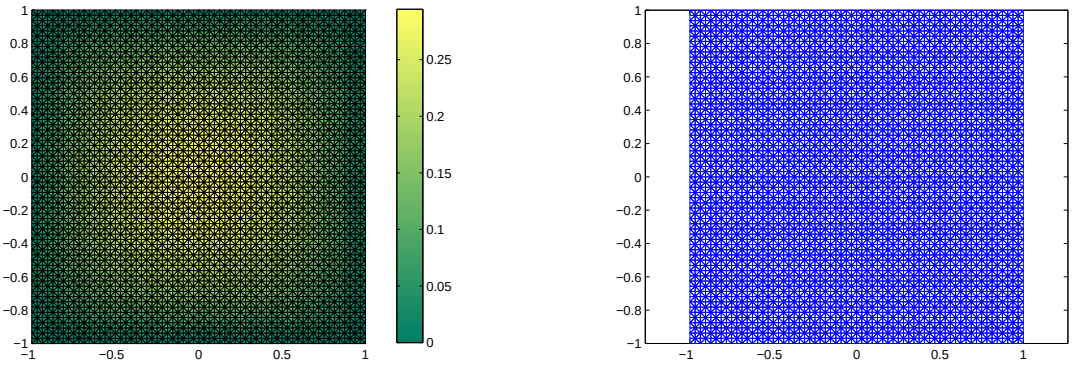

Figura 1: Malla uniforme en un cuadrado y la solución al problema de Poisson para $f = 1$ en $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$

Este proceder encarece mucho el cómputo de la solución, principalmente porque hemos refinado uniformemente solamente para garantizar un achicamiento uniforme del error y no hemos tenido en cuenta que la solución podría presentar mucha más suavidad en ciertas partes que en otras, lo que indicaría que sólo es necesaria una mayor resolución (es decir, de mallas mas finas) en ciertas zonas del dominio.

Un modo de evitar este problema, que es el propuesto por los métodos a posteriori, consiste en resolver el problema de aproximación para una subdivisión del dominio más o menos gruesa, es decir de triángulos grandes, estimar el error cometido sobre cada triángulo, seleccionar los

triángulos de error más grande, de acuerdo a alguna política establecida de antemano, refinar los triángulos seleccionados, resolver nuevamente el problema pero para la nueva subdivisión del dominio, y repetir el ciclo. Esquemáticamente se trata de un ciclo de la forma:

$$\text{RESOLVER} \rightarrow \text{ESTIMAR} \rightarrow \text{MARCAR} \rightarrow \text{REFINAR}$$

Si bien la teoría para la obtención de estimadores a posteriori del error se remonta a los años setenta, la comprensión teórica de la convergencia de estos algoritmos y de su complejidad es mucho mas reciente. El presente trabajo brinda una versión muy sucinta de las ideas de [6] para comprender la demostración de la convergencia del método adaptativo de elementos finitos para el problema de Poisson.

Capítulo 1

El algoritmo adaptativo

El algoritmo adaptativo consta de cuatro procesos fundamentales que se realizan secuencialmente, se aproxima la solución, se estiman los errores locales, se marcan los elementos basándose en la información aportada por los estimadores calculados previamente, se refinan dichos elementos (manteniendo la conformidad de la malla) y finalmente se repite la secuencia de pasos. Esquemáticamente el algoritmo toma la forma

1. $u_k := \text{RESOLVER}(\mathcal{G}_k)$.
2. $\{\eta_k(T)\}_{T\in\mathcal{G}} := \text{ESTIMAR}(u_k, \mathcal{G}_k)$.
3. $\mathcal{M}_k := \text{MARCAR}(\{\eta_k(T)\}_{T\in\mathcal{G}_k})$.
4. $\mathcal{G}_{k+1} := \text{REFINAR}(\mathcal{G}_{k,\mathcal{M}_k})$, $k = k + 1$.

Luego del paso 2, en la implementación se realiza algún test para detener la iteración, llegado el caso en que los estimadores de error sean lo suficientemente pequeños. Para la correcta ejecución de los pasos serán precisos los siguientes objetos y módulos:

- Una triangulación inicial $\mathcal{G}_0$ de Ω y un procedimiento de refinado REFINAR. Este procedimiento tiene dos argumentos de entrada: una malla $\mathcal{G}$ y un subconjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$, que diremos de elementos marcados. Todos los elementos $T \in \mathcal{M}$ serán refinados. En el modo mas sencillo se puede utilizar un refinamiento por bisección, es decir que por cada elemento marcado se producirán al menos dos (considerando que quizás sea necesario propagar el refinamiento a elementos vecinos para mantener la conformidad). La triangulación de entrada puede ser la inicial $\mathcal{G}_0$ o la malla producida por una aplicación previa de REFINAR. Diremos que una malla $\mathcal{G}'$ es un refinamiento de $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G}'$ puede obtenerse de $\mathcal{G}$ mediante un número finito de aplicaciones REFINAR, y un conjunto $\mathcal{M}$ de elementos marcados por cada iteración. Si consideramos el conjunto

  $$\mathbb{G} := \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ es un refinamiento de } \mathcal{G}_0\}$$

  podemos notar que cualquier secuencia generada por sucesivas aplicaciones de REFINAR está contenida en $\mathbb{G}$, sin importar las decisiones tomadas en MARCAR.

- Para cada grilla $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$, consideraremos un espacio de elementos finitos $X_{\mathcal{G}}(\Omega)$, de manera que el módulo RESOLVER tenga por salida una aproximación de Galerkin, $u_{\mathcal{G}} \in X_{\mathcal{G}}(\Omega)$, de u.

- El módulo ESTIMAR a partir de una malla dada $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$ y la correspondiente salida $u_{\mathcal{G}}$ de RESOLVER, calcula y devuelve los estimadores a posteriori $\{\eta_{\mathcal{G}}(T)\}_{T\in\mathcal{G}}$, donde cada $\eta_{\mathcal{G}}(T) \geq 0$ está asociado con el elemento $T \in \mathcal{G}$.

- Una estrategia de marcado MARCAR que, basándose en los estimadores de error $\{\eta_{\mathcal{G}}(T)\}_{T\in\mathcal{G}}$, elige elementos de $\mathcal{G}$ y los pone en $\mathcal{M}$, sirviendo éste último de entrada para REFINAR.

Ahora estableceremos algunas hipótesis sobre estos objetos y módulos que serán necesarias para la demostración de convergencia del algoritmo. Por empezar, escribiremos " $\preceq$ " en lugar de " $\leq C$" donde C puede depender de los datos, del conjunto $\mathbb{G}$ o del módulo REFINAR pero no de una malla particular o del número de iteración.

1.1. De las triangulaciones y de REFINAR

El algortimo generará una sucesión de triangulaciones a lo largo de su ejecución, esto dependerá del módulo REFINAR que se ocupará de generar una nueva grilla en cada iteración a partir de la información aportada por el conjunto $\mathcal{M}$ de elementos marcados (que serán los elementos que serán refinados por este módulo en una determinada iteración). La salida de REFINAR será una nueva triangulación $\mathcal{G}'$, un refinamiento de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}' := \text{REFINAR}(\mathcal{G}, \mathcal{M})$$

Algunas hipótesis adicionales merecen mencionarse en este punto. En primer lugar supondremos que el procedimiento para refinar a los elementos es quasi-regular. Esto quiere decir que existen constantes $q_1, q_2 \in (0, 1)$ tales que, independientemente de la malla $\mathcal{G}$, cualquier elemento $T \in \mathcal{G}$ puede subdividirse en $n \geq 2$ nuevos subelementos $T'_1, \ldots, T'_n$,

$$T = T'_1 \cup \ldots \cup T'_n, \qquad |T| = |T'_1| + \ldots + |T_n|$$

y

$$q_1|T| \leq |T'_i| \leq q_2|T|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Por otra parte, pediremos que el procedimiento de refinado sea único, es decir que divida a cada elemento de un único modo. Esto puede lograrse con alguna estrategia a priori como ser la partición por el lado más largo (denominada usualmente **longest edge bisection o LEB**) si se descarta la aparición de elementos equiláteros o isóceles con un solo lado corto como puede hacerse en ciertas circunstancias (ver ejemplo debajo en esta misma sección), o la del vértice más nuevo (**newest vertex bisection o NVB**) que describimos brevemente más adelante.
Podemos imaginar a la malla inicial $\mathcal{G}_0$ como un conjunto de nodos aislados, un nodo por cada elemento, en otras palabras podemos ver a la malla inicial como un bosque de árboles que son sólo nodos o raíces, llamémosle $\mathcal{F}_0$. Por cada aplicación de REFINAR, cada nodo marcado tendrá tantos sucesores como el procedimiento de refinamiento lo indique, y adicionalmente se refinarán otros nodos para garantizar la conformidad de la malla, añadiendo así un nuevo nivel al bosque. Podemos considerar a su vez al bosque generado por infinitas aplicaciones de REFINAR, considerando como marcados a todos los elementos, le llamaremos bosque principal y le notaremos $\mathcal{F}$, que será un bosque de árboles infinitos, con un árbol por cada elemento de $\mathcal{G}_0$; cualquier bosque $\mathcal{F}_k$, donde k indica el número de iteración, obtenido por las sucesivas k aplicaciones del módulo REFINAR será un subconjunto de $\mathcal{F}$, los elementos de $\mathcal{F}_k$ habrán sido refinados a lo sumo k veces, y las hojas de cada árbol corresponderá a los elementos de $\mathcal{G}_k$.

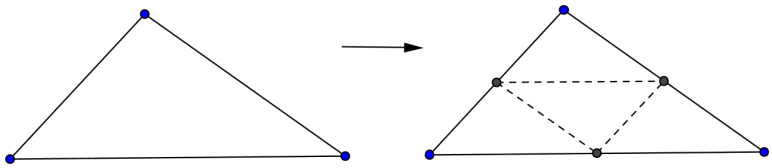

Figura 1: División de un triángulo en cuatro elementos con ángulo mínimo controlado

Una triangulación $\mathcal{B}$ del dominio Ω que está subordinada a la grilla $\mathcal{G}_0$ está asociada unívocamente a un subbosque finito $\mathcal{F}(\mathcal{B})$, contenido en $\mathcal{F}$, donde las hojas de los árboles serán los elementos de la triangulación $\mathcal{B}$. Dados dos elementos T, T' de un mismo árbol $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$, denotaremos mediante $dist(T, T') \in \mathbb{N}_0$ a la distancia de los nodos T y T' en $\mathcal{T}$, es decir la cantidad de ramas que separan a ambos nodos. Dado $n \in \mathbb{N}$ y un subconjunto $\hat{\mathcal{B}}$ de la subdivisión $\mathcal{B}$ subordinada a $\mathcal{G}_0$, denotamos con $\mathcal{F}^n(\mathcal{B}, \hat{\mathcal{B}})$ a la subforesta de $\mathcal{F}$ que consiste en $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ y todos los sucesores de los elementos de $\hat{\mathcal{B}}$ con distancia menor o igual que n. Supondremos que para todos los elementos del conjunto $\mathbb{G}$, es decir el conjunto de subdivisiones de Ω subordinadas a $\mathcal{G}_0$, es localmente cuasi-uniforme, esto es

$$\sup_{\mathcal{G}\in\mathbb{G}} \max_{\alpha\in V_{\mathcal{G}}} \#\omega_{\mathcal{G}}(\alpha) \preceq 1 \qquad \sup_{\mathcal{G}\in\mathbb{G}} \max_{T'\in N_{\mathcal{G}}(T)} \frac{|T|}{|T'|} \preceq 1,$$

Recordemos que $N_{\mathcal{G}}(T)$ es la vecindad de T y ha sido definida en (0.8) y $\omega_{\mathcal{G}}(\alpha)$ es la vecindad relativa al vértice α definida en (0.9) La grilla k-ésima deberá cumplir las siguientes relaciones

$$\mathcal{F}^1(\mathcal{G}_{k-1}, \mathcal{M}_{k-1}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{G}_k) \subset \mathcal{F}^m(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_0)$$

Esto último dice que en una dada iteración el bosque asociado a la salida de REFINAR contendrá al bosque formado por el bosque de la iteración anterior, $\mathcal{F}(\mathcal{G}_{k-1})$ junto con los sucesores de los elementos marcados $\mathcal{M}_{k-1}$. Esta contención no es una igualdad dado que otros elementos aparte de los marcados pueden ser refinados para asegurar la conformidad de $\mathcal{G}_k$. Por otro lado, la otra contención indica que $\mathcal{G}_k$ siempre, puesto que $\mathcal{M}_{k-1}$ puede elegirse arbitrariamente, estará contenida en la malla que se obtiene de refinar m veces todos los elementos de la malla inicial $\mathcal{G}_0$, para algún m natural. Es preciso pedir que estas propiedades se cumplan para poder garantizar que el bosque $\mathcal{F}$ contendrá a todos los posibles refinamientos de la malla inicial que pueda generar el algoritmo.

Volvamos momentáneamente al problema de la refinación desde el punto de vista algorítmico concreto. El método utilizado debe poseer tres características importantes. Preservar la regularidad de los elementos, lograr refinar localmente (es decir que la propagación generada para mantener la conformidad no agregue demasiadas particiones) y predefinir unívocamente la forma de subdivisión de cada elemento. Esto indica que si un elemento es subdividido, ya sea por estar marcado originalmente o para preservar la conformidad de la malla su refinamiento debe conducir a una familia unívoca de subelementos.

Si sólo estuviéramos interesados en refinamientos *uniformes* entonces la condición de localización no sería relevante y las otras dos condiciones pueden lograrse fácilmente diviendo cada elemento en cuatro triángulos como se observa en la Figura 1.

Es elemental verificar en este caso que a) la regularidad se mantiene con la misma constante del elemento original y b) la propagación conduce a un refinamiento uniforme.

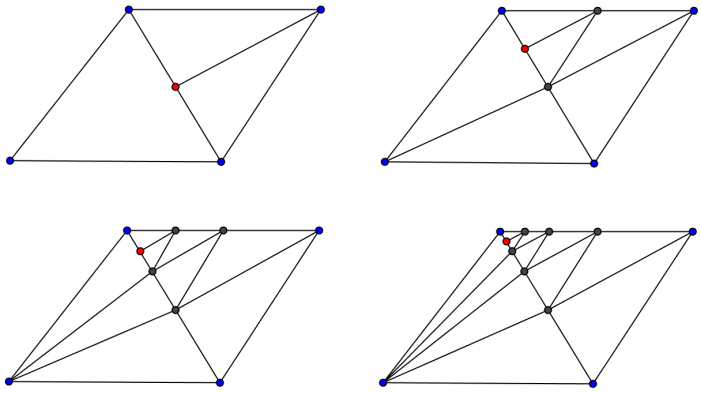

Figura 2: Deterioro del ángulo mínimo por bisecciones sucesivas

Pero en nuestro caso no queremos refinar todos los elementos, sino sólo los necesarios, y al refinar un elemento y no los de alrededor, los de su vecindad $N_{\mathcal{G}}(T)$, se perdería la conformidad pues quedaría un nodo, vértice de elementos nuevos, en la mitad de un lado de uno de los vecinos de T, a estos nodos se les dice colgantes (*hanging nodes*). Es decir que al refinar se refinarán más elementos que los marcados, por ello la manera en que el algoritmo de refinado trata con los nodos colgantes debe agregar pocos elemenos nuevos. Sin embargo debe cuidarse también que se preserve la regularidad, puesto que, por ejemplo, si dividiésemos al vecino T' no marcado pero con un nodo colgante en una arista, uniendo simplemente el nodo colgante con el vértice opuesto a él, esto podría conducir al achatamiento excesivo de algunos elementos y la consecuente perdida de regularidad.
En la Figura 2, a un triángulo se le aplica sucesivamente la bisección, y por el nodo colgante, en rojo, se divide al triángulo vecino, no refinado intencionalmente, uniéndolo con el vértice opuesto. Surge a las claras el achatamiento excesivo de los elementos que se refinan para preservar la conformidad.

Este achatamiento puede prevenirse disponiendo de antemano un conjunto de lados seleccionados -uno por elemento- por los cuales se deba subdividir cada triángulo. Eso debe hacerse alternando los lados y evitando así subdivisiones sucesivas a lo largo de un mismo lado del elemento. Por ejemplo, imaginemos que utilizamos una numeración local de vértices de un elemento de modo tal que 0 y 1 son los índices de los vértices del lado seleccionado a priori en cada uno de los elementos entonces, al refinar, las numeraciones locales de los nuevos elementos se asignan de tal manera que el lado que acaba de ser refinado, que ahora son dos en dos elementos distintos, no vuelva a ser dividido en la siguiente bisección, y dejando como nuevos lados seleccionados aquellos que no fueron elegidos (y por ende preservados) en la subdivisión previa, como puede verse en la Figura 3

Esa es la idea básica del NVB. En caso de que un elemento deba subdividirse con la intención de mantener la conformidad pueden presentarse cuatro escenarios, como puede verse en la Figura 4, en la fila de arriba se presentan los posibles casos de triángulos que deberán ser refinados para mantener la conformidad, resaltado en negro se halla el lado marcado (que todos los triángulos tienen), y los puntos rojos son los nodos colgantes. En la fila de abajo se muestra como el NVB lidia con las distintas situaciones, resaltados en negro están los lados marcados.

El mantenimiento de la regularidad en este caso puede probarse fácilmente notando que una vez fijado un triángulo padre cualquier subdivisión del mismo genera elementos que pertenecen

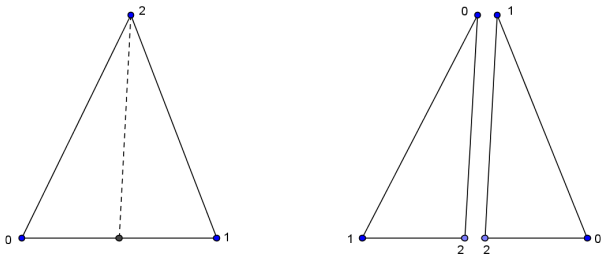

Figura 3: Reenumeración local de los vértices de los sucesores inmediatos de un elemento

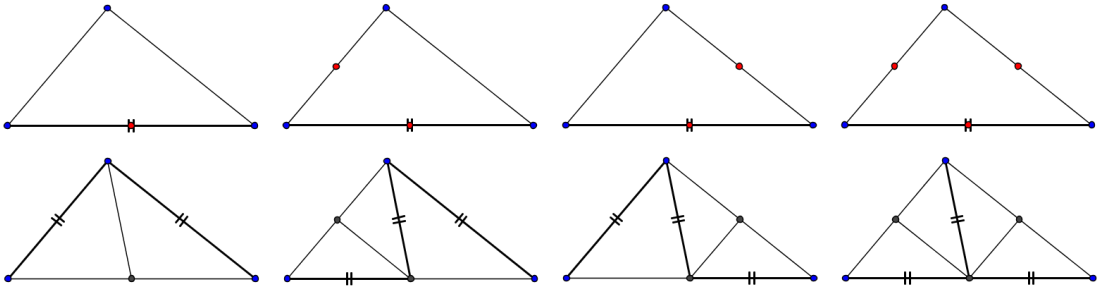

Figura 4: El NVB lidiando con los posibles escenarios en los que debe preservar la conformidad

a alguna de cuatro clases de equivalencia (definidas salvo movimientos rígidos compuestos por dilataciones) denominadas a,b,c y d, como puede verse en la Figura 5. Observemos entonces que partiendo de una malla inicial cualquier refinamiento que comience con una familia de elementos marcados estará contenido en la malla que resulta de marcar y refinar todos los elementos. Con este procedimiento además queda garantizado que el proceso de mantener la conformidad de la malla termina efectivamente como se ve trivialmente a partir de las finitas clases de equivalencia [8, 9].

Para las implementaciones que hemos llevado a cabo en la parte final de la tesis utilizamos el LEB ya que está implementado en el MATLAB y sobre una partición inicial del tipo mostrado en la parte superior izquierda de la Figura 6. En este caso puede verse fácilmente que LEB cumple

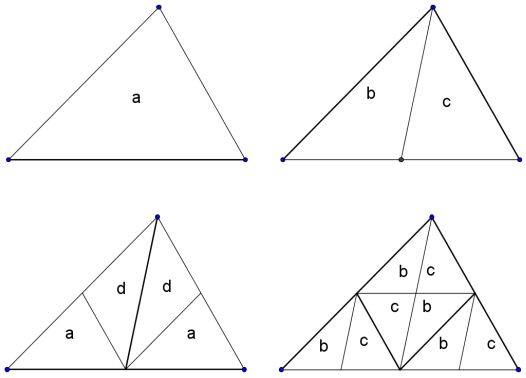

Figura 5: Clases de equivalencia de un elemento y de sus sucesores para el NVB

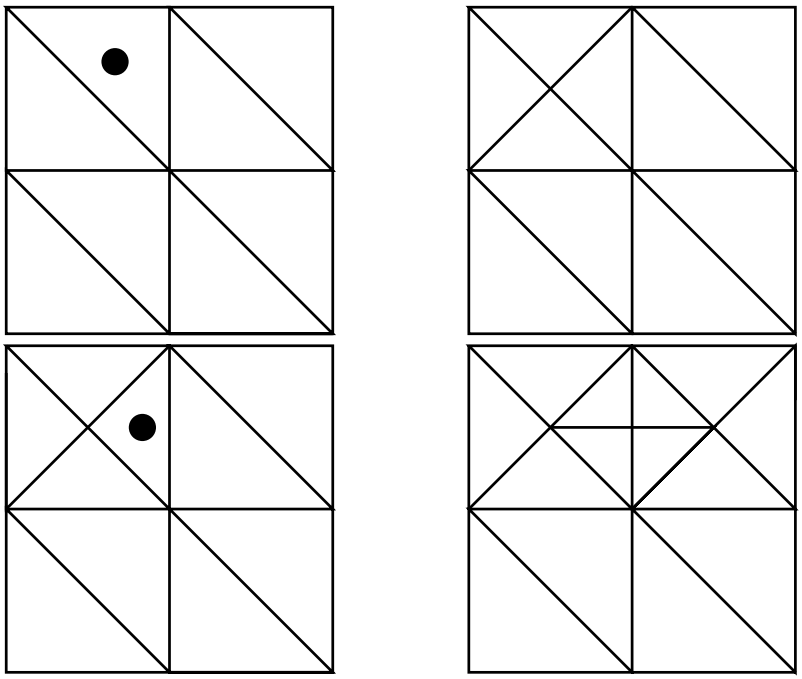

Figura 6: Arriba: Triangulación inicial con un elemento marcado y su refinamiento por el LEB en una malla obtenida por sudivisión de un producto tensorial de rectángulos; Abajo: Triangulación resultante con un sucesor del anterior marcado, marcado y dividido, y mantenida la conformidad.

todas las condiciones requeridas. También en la Figura 6 puede verse la propagación generada por dos elementos marcados que representan todos los casos posibles de propagación en este escenario. Se observa que las mallas refinadas están contenidas en la malla que se obtendría de refinar todos los elementos una cantidad finita de veces (en este caso dos).

1.2. De los espacios de elementos finitos y RESOLVER

Los espacios de elementos finitos $X_{\mathcal{G}}(\Omega)$ son para todo $\mathcal{G}$ subespacios de $H_0^1(\Omega)$, luego siendo la forma bilineal $a(.,.)$ coercitiva sobre $H_0^1(\Omega)$, lo será también sobre $X_{\mathcal{G}}(\Omega)$. Entonces, dados dos $\mathcal{G}, \mathcal{G}' \in \mathbb{G}$, se tendrá:

$$X_{\mathcal{G}}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \tag{1.2.1}$$

$$\text{Si } \mathcal{G}' \text{ es un refinamiento de } \mathcal{G} \Rightarrow X_{\mathcal{G}}(\Omega) \subset X_{\mathcal{G}'}(\Omega) \tag{1.2.2}$$

$$a(v,v) \geq C_2 \|v\|^2_{H_0^1}, \qquad \forall v \in H_0^1, \text{ para algún } C_2 > 0 \tag{1.2.3}$$

La salida del módulo RESOLVER

$$u_{\mathcal{G}} := \text{RESOLVER}(\mathcal{G})$$

es la *aproximación de Galerkin* de u con respecto a $X_{\mathcal{G}}$, o sea

$$u_{\mathcal{G}} \in X_{\mathcal{G}} : \qquad a(u_{\mathcal{G}}, w) = \langle f, w \rangle, \qquad \forall w \in X_{\mathcal{G}}. \tag{1.2.4}$$

Las condiciones (1.2.1), (1.2.2) y (1.2.3) aseguran que la aproximación de Galerkin $u_{\mathcal{G}}$ existe, es única, y es una elección cuasióptima en $X_{\mathcal{G}}$ para la norma de H^1, esto último gracias al Lema de Cea.

1.3. De los estimadores de error y ESTIMAR

El módulo ESTIMAR producirá para cada elemento de $\mathcal{G}$, un estimador local del error cometido por nuestra aproximación de Galerkin obtenida en RESOLVER, $u_{\mathcal{G}}$, en comparación con la solución verdadera del problema, u. Para cada elemento se tendrá un nmero real $\eta_{\mathcal{G}}(T)$, el estimador local. Para el conjunto de estos estimadores locales, $\{\eta_{\mathcal{G}(T)}\}_{T\in\mathcal{G}} := \text{ESTIMAR}(u_{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$, definiremos para $\hat{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$

$$\eta_{\mathcal{G}}(\hat{\mathcal{G}}) := \Big(\sum_{T\in\hat{\mathcal{G}}} \eta^2_{\mathcal{G}}(T) \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3.5}$$

también definimos $\eta_{\mathcal{G}} := \eta_{\mathcal{G}}(\mathcal{G})$ y $\eta_{\mathcal{G}}(\emptyset) := 0$. El conjunto de estimadores deberá cumplir las siguientes dos condiciones

1. $\eta_{\mathcal{G}}$ debe acotar superiormente al error global de la aproximación $u_{\mathcal{G}}$, es decir

$$\|u_{\mathcal{G}} - u\|_{H^1_0} \preceq \eta_{\mathcal{G}} \tag{1.3.6}$$

2. Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada elemento $T \in \mathcal{G}$ y para cualquier malla más fina $\mathcal{G}' \in \mathbb{G}$ que cumpla que , entonces valdrá

$$\eta_{\mathcal{G}}(T) \preceq \sup\Big\{ \langle \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, w\rangle \mid w \in X_{\mathcal{G}'}(\omega_{\mathcal{G}}(T)), \|w\|_{H^1}(\Omega) \leq 1 \Big\} + osc(f, T) \tag{1.3.7}$$

   Donde

   - $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ es el residuo definido por

$$\langle \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, w\rangle := a(u_{\mathcal{G}}, w) - \langle f, w\rangle, \qquad \forall w \in H^1(\Omega) \tag{1.3.8}$$

   - $\omega_{\mathcal{G}}(T) \subset \Omega$ es la unión de los elementos de $N_{\mathcal{G}}(T)$
   - $X_{\mathcal{G}'}(\omega_{\mathcal{G}}(T))$ es el espacio de las funciones test locales dadas por

$$X_{\mathcal{G}'}(\omega_{\mathcal{G}}(T)) := \{w \in X_{\mathcal{G}'} \mid sop(w) \subset \omega_{\mathcal{G}}(T)\} \tag{1.3.9}$$

   - $osc(f, T) := \Big\{ \sum_{T'\subset\omega_T} h^2_{T'} \|f - f_{T'}\|^2_{L^2(T')} \Big\}^{\frac{1}{2}}$. Es una manera de medir la variación de f respecto de su promedio $f_T := \frac{1}{|T|}\int_T f$.

   Considerando la expresión (1.3.7), y la expresión del residuo, (1.3.8), junto con la solución u del problema variacional, que verifica (0.5), podemos escribir:

$$\langle \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, w\rangle = a(u_{\mathcal{G}} - u, w) + a(u, w) - \langle f, w\rangle = a(u_{\mathcal{G}} - u, w)$$

   A causa de la continuidad de a, y como $\|w\|_{H^1} \leq 1$ valdrá entonces

$$|\langle \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, w\rangle| \leq C\|u_{\mathcal{G}} - u\|_{H^1(\omega_{\mathcal{G}}(T))}$$

   Podemos decir entonces que

$$\eta_{\mathcal{G}}(T) \preceq \|u - u_{\mathcal{G}}\|_{H^1(\omega_{\mathcal{G}}(T))} + osc(f, T) \tag{1.3.10}$$

Para simplificar, notaremos η_T en lugar de $eta_{\mathcal{G}}(T)$.
Para cada triángulo T, el estimador η_T acota inferiormente al error cometido por nuestra aproximación en el parche ω_T más un término de oscilación que de alguna manera penaliza los elementos donde se pierde mucha información de la función f al utilizar f_T, este término dependerá de los datos del problema y de las sucesivas mallas que el algoritmo vaya generando.

En el siguiente capítulo daremos una construcción de un estimador que cumpla estas condiciones.

1.4. De las estrategias de marcado y MARCAR

Supondremos que la salida

$$\mathcal{M} := \text{MARCAR}(\{\eta_{\mathcal{G}}(T)\}_{E\in\mathcal{G}}, \mathcal{G})$$

es decir, el conjunto de los elementos marcados, tiene la siguiente propiedad

$$\forall T \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{M} \qquad \eta_{\mathcal{G}}(T) \leq g(\eta_{\mathcal{G}}(\mathcal{M})), \tag{1.4.11}$$

con $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función fija que es continua en el 0 y cumple $g(0) = 0$.
Existen varias estrategias de marcado que se usan en la práctica. Una de ellas, debida a Dörfler [4], consiste en ordenar de mayor a menor los elementos según el valor del estimador y marcar del primero en adelante hasta que la suma de ellos sea mayor que una proporción del error global. La salida de MARCAR, usando este método, satisfará

$$\eta_{\mathcal{G}}(\mathcal{M}) \geq \theta\eta_{\mathcal{G}}$$

donde $\theta \in (0, 1)$ es un parámetro fijo, que deberá ajustarse a cada situación.
Observemos que

$$\eta^2_{\mathcal{G}}(\mathcal{M}) \geq \theta^2\eta^2_{\mathcal{G}}$$

entonces usando (1.3.5), para el conjunto $\mathcal{M}$, se tendrá

$$\eta^2_{\mathcal{G}}(\mathcal{M}) \geq \theta^2\left[\eta^2_{\mathcal{G}}(\mathcal{M}) + \eta^2_{\mathcal{G}}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{M})\right]$$

juntando los términos que involucran a $\eta^2_{\mathcal{G}}(\mathcal{M})$ a un lado de la desigualdad

$$(1 - \theta^2)\eta^2_{\mathcal{G}}(\mathcal{M}) \geq \theta^2\eta^2_{\mathcal{G}}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{M})$$

tomando raíz y despejando queda

$$\frac{\sqrt{(1-\theta^2)}}{\theta}\eta_{\mathcal{G}}(\mathcal{M}) \geq \eta_{\mathcal{G}}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{M})$$

y si $T \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{M}$, entonces, $\eta_{\mathcal{G}}(T) \leq \eta_{\mathcal{G}}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{M})$ por lo tanto para cualquier $T \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{M}$ valdrá

$$\eta_{\mathcal{G}}(T) \leq \frac{\sqrt{(1-\theta^2)}}{\theta}\eta_{\mathcal{G}}(\mathcal{M})$$

es decir que esta estrategia de marcado cumple la propiedad (1.4.11), para la función $g(x) = \frac{\sqrt{(1-\theta^2)}}{\theta}x$.

Otra estrategia de marcado posible, más simple e intuitiva, propuesta en [1], es la estrategia del Máximo, que es similiar a la anterior. En este caso dado $0 \leq \theta \leq 1$, tomamos

$$\eta_{\mathcal{G},\max} = \max\{\eta_{\mathcal{G}}(T) | T \in \mathcal{G}\}$$

y definimos al conjunto $\mathcal{M}$ como

$$\mathcal{M} := \{T \in \mathcal{G} | \eta_{\mathcal{G}}(T) \geq \theta \eta_{\mathcal{G},\max}\}$$

En este caso, es claro que vale, si $T \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{M}$:

$$\eta_{\mathcal{G}}(T) \leq \theta \eta_{\mathcal{G},\max} \leq \eta_{\mathcal{G}}(\mathcal{M})$$

o sea que se cumple (1.4.11) con $g(x) = x$.

1.5. Convergencia del algoritmo

Teniendo un algoritmo que respete el esquema que se ha presentado en este capítulo puede probarse que converge. Más específicamente se prueba más adelante el siguiente

Teorema 1.1. *Sea u la solución exacta del problema de Poisson y $\{u_k\}_k$ la sucesión generada por el algortimo adaptativo. Si el conjunto de triangulaciones $\mathbb{G}$, sus correspondientes espacios de elementos finitos, y los módulos RESOLVER, ESTIMAR, MARCAR y REFINAR satisfacen, respectivamente, las condiciones puntualizadas en las secciones de este capítulo, entonces tanto la sucesión de errores como de estimadores tienden a 0 en el límite, esto es*

$$\|u_k - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0, \qquad y \qquad \eta_k \to 0 \qquad cuando \qquad k \to \infty$$

Observemos que el teorema nos garantiza la convergencia tanto del error, $\|u_k - u\|_{H^1(\Omega)}$, que es lo esperable para que el método sea útil y también nos asegura que el estimador tiende a 0. En términos prácticos se utiliza un test que detenga el algoritmo si el valor del estimador se hace más pequeño que un determinado umbral.

En el siguiente capítulo daremos la construcción de un estimador de error que cumple con los requisitos necesarios de la teoría general que conduce al teorema previo.

Capítulo 2

Un ejemplo de estimador

A continuación construiremos un estimador que cumpla con los requisitos pedidos en el capítulo anterior, lo siguiente se basa en [7], con algunas ligeras modificaciones. Anteriormente, en (0.9), habíamos definido la vecindad respecto de un vértice, a partir de ella definiremos

$$\hat{\omega}_T := \bigcup \{T' \in \mathcal{G} | V_{\mathcal{G}}(T) \cap V_{\mathcal{G}}(T') \neq \emptyset\}$$

que para el triángulo T de vértices $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ resulta la unión de $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \omega_{\alpha_3}$ y

$$\hat{\omega}_S := \bigcup \{T' \in \mathcal{G} | V_{\mathcal{G}}(S) \cap V_{\mathcal{G}}(T') \neq \emptyset\},$$

aquí $V_{\mathcal{G}}(S)$ son los vértices de S, que es, para cada segmento S de vértices α_1, α_2, la unión de los ω_{α_1} y ω_{α_2}.
Dado entonces un triángulo T de vértices $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, consideremos sus correspondientes conjuntos $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \omega_{\alpha_3}$, y para cada uno de ellos tendremos un polinomio $q_i \in P_1[x]$, que verifica:

$$\int_{\omega_{\alpha_i}} (u - q_i)p = 0 \qquad \forall p \in P_1(\omega_{\alpha_i}) \qquad \text{para } i = 1, 2, 3. \tag{2.1}$$

Es decir que q_i es la proyección ortogonal de u sobre $P_1[x]$ respecto del producto interno de $L^2(\omega_{\alpha_i})$. A su vez tomemos la base de Lagrange correspondiente a los vértices de T, para cada α_i tendremos un polinomio ϕ_i de grado mínimo (uno, en este caso) que verifica que $\phi_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$, y cada ϕ_i tiene como soporte a ω_{α_i}. Con esto ya tenemos los materiales necesarios para construir el operador de interpolación de Clément [3]:

$$I_{\mathcal{G}} u(x) := \sum_{i=1}^{\#V_{\mathcal{G}}} \phi_i(x) q_i(\alpha_i)$$

Este operador jugará un papel de crucial importancia a la hora de estimar el error a posteriori cometido por nuestra estimación, y esta importancia radica en el siguiente :

Teorema 2.1. *Sean $T \in \mathcal{G}$, $E \in \mathbb{S}$ y $\phi \in H_0^1$, entonces las siguientes estimaciones valen*

1. $\|u - I_{\mathcal{G}} u\|_{L^2(T)} \preceq h_T \|u\|_{H_0^1(\hat{\omega_T})}$

2. $\|u - I_{\mathcal{G}} u\|_{L^2(S)} \preceq h_S^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_0^1(\hat{\omega_S})}$

Para poder probar este resultado precisaremos de una serie de lemas suplementarios.

Lema 2.1. *Sean $T \in \mathcal{G}$ y $p \in P_k(T)$. Entonces, valdrá la siguiente estimación*

$$\|p\|_\infty \preceq \frac{1}{|T|^{1/2}} \|p\|_{L^2(T)}$$

Demostración. Llamaremos $\hat{T}$ al triángulo de referencia de vértices $(0,0),(0,1),(1,0)$. Cualquiera sea el triángulo $T \subset \Omega$, habrá de existir un transformación afín y biyectiva $\hat{F} : \hat{T} \to T \mid \hat{F}(\hat{x}) = B\hat{x} + c$, con B una matriz inversible, que toma cualquier punto de $\hat{T}$ y lo torna un punto de T. Definiendo $\hat{p}(\hat{x}) := p(\hat{F}(\hat{x}))$, es fácil notar que el conjunto imagen de $\hat{p}(\hat{x})$ es el mismo que el de $p(x)$. Por ende valdrá que

$$\|p\|_{L^\infty(T)} = \|\hat{p}\|_{L^\infty(\hat{T})}$$

Como nuestro espacio, éste que estamos mirando de polinomios de grado 1, es de dimensión finita vale que todas las normas son equivalentes es decir que vale

$$\|\hat{p}\|_{L^\infty(\hat{T})} \preceq \|\hat{p}\|_{L^2(\hat{T})}$$

Haciendo ahora un cambio de variables, de $\hat{F}(\hat{x})$ por x, y considerando que $dx = |det(B)|d\hat{x}$, tendremos

$$\|\hat{p}\|_{L^2(\hat{T})} = \Big\{ \int_{\hat{T}} p(\hat{F}(\hat{x}))^2 d\hat{x} \Big\}^{1/2} = \frac{1}{|det(B)|^{1/2}} \Big\{ \int_T p(x)^2 dx \Big\}^{1/2} = \frac{2}{|T|^{1/2}} \|p\|_{L^2(T)} \tag{2.2}$$

es decir

$$\|p\|_{L^\infty(T)} \preceq \frac{1}{|T|^{1/2}} \|p\|_{L^2(T)}$$

□

Con iguales hipótesis que el lema previo tendremos este otro

Lema 2.2. *Sean $T \in \mathcal{G}$ y $p \in P_k(T)$, entonces valdrá la siguiente estimación*

$$\|\nabla p\|_{L^2(T)} \preceq \frac{1}{h_T} \|p\|_{L^2(T)}$$

Demostración. Análogamente a lo hecho en (2.2), podemos obtener

$$\|\nabla p\|_{L^2(T)} \leq \|B^{-1}\| \|\nabla \hat{p}\|_{L^2(\hat{T})} |detB|^{1/2} \tag{2.3}$$

Por otra parte, escribiendo a $\hat{p}$ como su polinomio interpolador de Lagrange de grado 1, considerando que los soportes de los ϕ_i que involucran a $\hat{T}$ son sólo tres y aplicando la desigualdad triangular

$$\|\nabla \hat{p}\|_{L^2(\hat{T})} = \|\nabla \sum_{i=1}^{3} \phi_i \hat{p}(\hat{\alpha}_i)\|_{L^2(\hat{T})} \leq \sum_{i=1}^{3} |\hat{p}(\hat{\alpha}_i)| \|\nabla \phi_i\|_{L^2(\hat{T})} \leq C \|\hat{p}\|_{L^\infty(\hat{T})} \tag{2.4}$$

donde c es una constante que depende de $\hat{T}$, por el Lema 2.2 y como $|\hat{T}| = 1/2$ podemos concluir que

$$\|\nabla \hat{p}\|_{L^2(\hat{T})} \preceq \|\hat{p}\|_{L^2(\hat{T})} \tag{2.5}$$

Es decir que hemos probado lo que queríamos para el triángulo de referencia. Consideremos el cambio de variables de x a $\hat{x}$ en (2.3), junto con (2.4) y (2.11), así tendremos

$$\|\nabla p\|_{L^2(T)} \preceq \|B^{-1}\|\|\hat{p}\|_{L^2(\hat{T})}|detB|^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

Haciendo ahora otro cambio de variables el de $\hat{x}$ a x, arribamos a

$$\|\nabla p\|_{L^2(T)} \preceq \|B^{-1}\|\|p\|_{L^2(T)}\frac{1}{|detB|^{1/2}}|detB|^{\frac{1}{2}} = \|B^{-1}\|\|p\|_{L^2(T)} \tag{2.7}$$

y tomando en cuenta que $\|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_T}$

$$\|\nabla p\|_{L^2(T)} \preceq \frac{\hat{h}}{\rho_T}\|p\|_{L^2(T)}$$

si multiplicamos y dividimos la última expresión por h_T, y recordando la definición de $\kappa_{\mathcal{G}}$, (0.10), que es la medida de regularidad de una malla dada, valor que en nuestro caso será acotado por suponer las mallas regulares, resultando

$$\|\nabla p\|_{L^2(T)} \preceq \frac{1}{h_T}\|p\|_{L^2(T)} \tag{2.8}$$

□

Lema 2.3. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea m un número natural dado, y para cada multiíndice λ con $|\lambda| \leq m$, un valor $a_\lambda \in \mathbb{R}^2$ también dado. Entonces existe un polinomio unívocamente determinado $p \in P_m(\Omega)$ tal que:*

$$\int_\Omega D^\lambda p = a_\lambda, \qquad |\lambda| \leq m \tag{2.9}$$

Demostración. Sea $p \in P_m(\Omega)$ un polinomio cualquiera, éste tendrá la forma:

$$p(x) = \sum_{|\beta|\leq m} b_\beta x^\beta$$

Si introducimos esta representación en la expresión (2.9), obtendremos para cada multiíndice λ, por la linealidad de la derivación:

$$\int_\Omega D^\lambda p(x) = \sum_{|\beta|\leq m} b_\beta \int_\Omega D^\lambda x^\beta$$

es decir que tendremos $|\lambda|$ ecuaciones de este tipo, lo que forma un sistema lineal de la forma $Mb = a$, donde

$$M = (M_{\lambda\beta}), \qquad M_{\lambda\beta} = \int_\Omega D^\lambda x^\beta, \qquad b = (b_\beta), \qquad a_{a_\lambda},$$

Si ahora logramos probar que este sistema es compatible y determinado, habremos probado el lema. Supongamos que esto que queremos ver que ocurra, no ocurre, es decir, supongamos que

M es singular, entonces deberá existir una solución no trivial para el sistema homogéneo, o sea debe existir un polinomio $q \in P_m(\Omega) \setminus \{0\}$ que cumpla:

$$\int_\Omega D^\lambda q = 0 \qquad \forall |\lambda| \leq m.$$

El polinomio q se escribe $q(x) = \sum_{|\beta| \leq m} c_\beta x^\beta$. Podemos elegir un polinomio q tal que el coeficiente $c_\beta \neq 0$ para el valor maximal de $|\beta|$. Luego, se tendrá que $D^\beta q(x) = C c_\beta = cte \neq 0$, donde la constante C proviene de las reglas de derivación usuales; pero esto contradice que la integral de $D^\beta q(x)$ sea nula sobre Ω. Luego M es inversible y por ello el polinomio que cumpla las condiciones presentadas en (2.9) existe y es único. □

Lema 2.4. *Sea $u \in H^1(\Omega)$ y q_i el polinomio al que se refiere* (2.1)*, con $i = 1, 2$ o 3, entonces vale la siguiente estimación*

$$\|u - q_i\|_{L^2(\omega_{\alpha_i})} \preceq h_T \|u\|_{H^1(\omega_{\alpha_i})} \tag{2.10}$$

Demostración. Considerando que q_i es la proyección ortogonal de u sobre los polinomios de grado 1 definidos sobre ω_{a_i}, resulta la mejor aproximación de u entre todos los polinomios de grado 1, por ende vale

$$\|u - q_i\|_{L^2(\omega_{\alpha_i})} \leq \|u - p\|_{L^2(\omega_{\alpha_i})}, \qquad \text{cualquiera sea } p \in P_1(\omega_{\alpha_i}) \tag{2.11}$$

Como vale para cualquier p en dicho espacio, vale, en particular, para un polinomio $P_i(u)$ que cumpla:

$$\int_{\omega_{\alpha_i}} D^\lambda P_i(u) = \int_{\omega_{\alpha_i}} D^\lambda u, \qquad \text{para } \lambda = 0, 1.$$

este polinomio, gracias al Lema 2.3, existe, y de hecho la función $u - P_i(u)$ es de promedio cero y por ende podemos utilizar la desigualdad de Poincaré II, obteniendo

$$\|u - P_i(u)\|_{L^2(\omega_{\alpha_i})} \leq C diam(\omega_{\alpha_i}) \|\nabla(u - P_i(u))\|_{L^2(\omega_{\alpha_i})} \tag{2.12}$$

Cabe observar que para todo vértice α los dominios ω_α son estrellados respecto de una bola gracias a la regularidad de los elementos.

Teniendo en cuenta que

$$0 \leq \|\nabla(u - P_i(u))\|^2_{L^2(\omega_{\alpha_i})} = \int_{\omega_{\alpha_i}} \left\{\nabla u - \nabla(P_i(u))\right\}^2 = \int_{\omega_{\alpha_i}} (\nabla u)^2 - 2\nabla u \nabla P_i(u) + (\nabla P_i(u))^2 \tag{2.13}$$

como los polinomios $P_i(u)$ son por construcción de grado uno, su gradiente resultará constante, entonces podremos decir también

$$\int_{\omega_{\alpha_i}} 2\nabla u . \nabla P_i(u) = 2\nabla P_i(u) . \int_{\omega_{\alpha_i}} \nabla u = 2\nabla P_i(u) . \int_{\omega_{\alpha_i}} \nabla P_i(u) = 2 \int_{\omega_{\alpha_i}} (\nabla P_i(u))^2$$

introduciendo esta última igualdad en (2.13) arribamos a

$$\|\nabla(u - P_i(u))\|^2_{L^2(\omega_{\alpha_i})} = \int_{\omega_{\alpha_i}} \nabla u^2 - \int_{\omega_{\alpha_i}} \nabla(P_i(u))^2 = \|\nabla u\|^2_{L^2(\omega_{\alpha_i})} - \|\nabla(P_i(u))\|^2_{L^2(\omega_{\alpha_i})} \geq 0 \tag{2.14}$$

Entonces podemos acotar (2.12) utilizando (2.13),

$$\|\nabla(u - P_i(u))\|^2_{L^2(\omega_{\alpha_i})} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\omega_{\alpha_i})} - \|\nabla(P_i(u))\|^2_{L^2(\omega_{\alpha_i})} \leq \|\nabla u\|^2_{L^2(\omega_{\alpha_i})} \leq \|u\|^2_{H^1(\omega_{\alpha_i})}$$

Finalmente, como el diámetro de ω_{α_i} será proporcional a la medida de los lados de los triángulos que lo forman, tiene sentido acotar este diámetro por h_T. Luego, hecho esto último, tomando raíz a ambos lados de la desigualdad y usando (2.11) y (2.12) tendremos el resultado

$$\|u - q_i\|_{L^2(\omega_{\alpha_i})} \preceq h_T \|u\|_{H^1(\omega_{\alpha_i})}$$

□

Tan sólo un resultado nos separa de poder demostrar el Teorema 2.1.

Lema 2.5. *Dado un triángulo de una triangulación regular, T, y una función de $u \in H^1(T)$, valdrá la siguiente estimación*

$$\|u\|_{L^2(S)} \preceq \left(\frac{|S|}{|T|}\right)^{1/2} [\|u\|_{L^2(T)} + h_T \|\nabla u\|_{L^2(T)}]$$

Demostración. Sea $\hat{T}$ el triángulo de referencia, y veamos que lo que queremos probar ocurre sobre este triángulo en particular. Sea $\hat{F} : \hat{T} \to T$, un mapa afín y biyectivo que a los lados de $\hat{T}$ hace corresponder los lados de T, $\hat{F}(\hat{x}) = B\hat{x} + p$ y sea $\gamma(\hat{x}) = \hat{F}(\hat{x_1}, 0)$. Utilizando que $u|_{\hat{S}} = u \circ \hat{F}(\hat{x_1}, 0)$, y que $\|\gamma'(\hat{x}_1)\| = |S|$, podemos cambiar variables obteniendo

$$\|u\|^2_{L^2(S)} = \int_S u(x)^2 \, dx = \int_0^1 [u \circ \hat{F}(\hat{x}_1, 0)]^2 \|\gamma'(\hat{x}_1) \, dt\| = |S| \int_0^1 \hat{u}^2(\hat{x}, 0) d(\hat{x}) = |S| \|\hat{u}\|^2_{L^2(\hat{S})} \tag{2.15}$$

Utilizando ahora el teorema de trazas, (0.3), sobre $\|\hat{u}\|_{L^2(\hat{S})}$, resultando que

$$\int_S u(x)^2 \, dx \preceq |S|(\|\hat{u}\|^2_{L^2(\hat{T})} + \|\nabla \hat{u}\|^2_{L^2(\hat{T})})$$

Como $\hat{u}(\hat{x}) = u \circ \hat{F}(\hat{x})$, podemos cambiar variables otra vez, usando $x = \hat{F}(\hat{x})$ y que $\frac{dx}{|detB|} = d\hat{x}$

$$\int_S u(x)^2 \, dx \preceq |S| \left\{ \int_T \frac{u(x)^2}{|detB|} \, dx + \int_T \frac{(\nabla u B)^2}{|detB|} d(\hat{x}) \right\} \preceq \frac{|S|}{|detB|} \left\{ \int_T u(x)^2 \, dx + \|B\|^2 \int_T (\nabla u)^2 d(\hat{x}) \right\}$$

Usando el lema (0.1) para acotar el valor de $\|B\|$, quedará

$$\int_S u(x)^2 \, dx \preceq \frac{|S|}{|detB|} \left\{ \int_T u(x)^2 \, dx + (\frac{h_T}{\hat{\rho}})^2 \int_T (\nabla u)^2 d(\hat{x}) \right\}$$

Finalmente, tomando raíz ambos lados de la desigualdad salvo una constante mutiplicativa y recordando que $|detB| = 2|T|$, obtenemos

$$\|u\|_{L^2(S)} \preceq \left(\frac{|S|}{|T|}\right)^{1/2} [\|u\|_{L^2(T)} + h_T \|\nabla u\|_{L^2(T)}]$$

que es lo que buscábamos. □

Ahora, con todo este arsenal de lemas procederemos a demostrar el Teorema 2.1

Demostración. (Cotas para el error del interpolador de Clément)
Probaremos primero la cota para $\|u - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(T)}$. Consideremos el polinomio q_1, que es la proyección ortogonal de u sobre el espacio de los polinomios de grado uno, definidos sobre el parche ω_{α_1}, sumemos y restemos este polinomio a $u - I_{\mathcal{G}}(u)$ y usemos desigualdad triangular

$$\|u - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(T)} \leq \|u - q_1\|_{L^2(T)} + \|q_1 - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(T)} \tag{2.16}$$

El primer término puede acotarse, echando mano al Lema 2.4, del siguiente modo

$$\|u - q_1\|_{L^2(T)} \leq \|u - q_1\|_{L^2(\omega_{\alpha_i})} \preceq h_T \|u\|_{H^1(\omega_{\alpha_i})} \preceq h_T \|u\|_{H^1(\hat{\omega}_T)} \tag{2.17}$$

Por otro lado, recordando que el polinomio interpolador de Lagrange, obtenido a partir de una base de polinomios de grado uno, de un polinomio de grado uno como q_1 es el propio polinomio podremos representar $q_1(x) = \sum_{i=1}^{3} \phi_i(x) q_i(\alpha_i)$, entonces para el segundo término tendremos:

$$\|q_1 - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(T)} = \|\sum_{i=1}^{3} \phi_i(x) q_1(\alpha_i) - \sum_{i=1}^{3} \phi_i q_i(\alpha_i)\|_{L^2(T)} = \|\sum_{i=2}^{3} \phi_i [q_1(\alpha_i) - q_i(\alpha_i)]\|_{L^2(T)} \tag{2.18}$$

Aplicando la desigualdad triangular a esta última expresión,

$$\|u - q_1\|_{L^2(T)} \leq \sum_{i=2}^{3} \|\phi_i\|_{L^2(T)} |q_1(\alpha_i) - q_i(\alpha_i)| \tag{2.19}$$

y recordando que $\phi_i \leq 1$ y por ende $\|\phi_i\|_{L^2(T)} \leq (\int_T 1\, dx)^{1/2} = |T|^{1/2}$, nos queda

$$\|u - q_1\|_{L^2(T)} \leq |T|^{1/2} \sum_{i=2}^{3} \|q_1 - q_i\|_{L^\infty(T)} \tag{2.20}$$

Usando ahora el Lema 2.1, obtenemos

$$\|u - q_1\|_{L^2(T)} \leq |T|^{1/2} \sum_{i=2}^{3} \|q_1 - q_i\|_{L^\infty(T)} \preceq |T|^{1/2} \frac{1}{|T|^{1/2}} \|q_1 - q_i\|_{L^2(T)} \tag{2.21}$$

a cada uno de estos últimos sumandos se lo puede acotar, intercalando u y aplicando de nuevo la desigualdad triangular tendremos

$$\|q_1 - q_i\|_{L^2(T)} \leq \|q_1 - u\|_{L^2(T)} + \|u - q_i\|_{L^2(T)}$$

y aplicando a los miembros de esta última suma las mismas ideas que en (2.17), obtenemos

$$\|q_1 - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(T)} \preceq h_T \|u\|_{H^1(\hat{\omega}_T)} \tag{2.22}$$

Finalmente, por (2.16), (2.17) y (2.22), se tiene los buscado

$$\|u - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(T)} \preceq h_T \|u\|_{H^1(\hat{\omega}_T)}$$

Probaremos ahora la cota para $\|u - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(S)}$, en primer lugar aplicando el Lema 2.5, llegamos a que

$$\|u - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(S)} \preceq \Big(\frac{|S|}{|T|}\Big)^{1/2}\Big\{\|u - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(T)} + h_T\|\nabla(u - I_{\mathcal{G}}(u))\|_{L^2(T)}\Big\}$$

Como suponemos que los triángulos son regulares podemos usar que $|T| \sim h_T^2$ y que $|S| \sim h_T$, entonces $\frac{|S|}{|T|} \preceq \frac{1}{h_T}$. Adicionalmente, podemos usar lo probado para el operador de Clément para acotar el primer término de la última expresión, quedando

$$\|u - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(S)} \preceq \frac{1}{h_T^{1/2}}\Big\{h_T\|u\|_{H^1(\hat{\omega}_T)} + h_T\|\nabla(u - I_{\mathcal{G}}(u))\|_{L^2(T)}\Big\} \tag{2.23}$$

Ocupémosnos del segundo término, es posible intercalar un polinomio y aplicar la desigualdad triangular, dicho polinomio podemos elegirlo de manera que verifique que $\int_T P_1(u) = \int_T u$ y $\int_T \nabla P_1(u) = \int_T \nabla u$, el cual existe y es único según el Lema 2.3

$$\|\nabla(u - I_{\mathcal{G}}(u))\|_{L^2(T)} \leq h_T\|\nabla(u - P_1(u))\|_{L^2(T)} + h_T\|\nabla(P_1(u) - I_{\mathcal{G}}(u))\|_{L^2(T)} \tag{2.24}$$

Al primer término del miembro derecho de la expresión de arriba podemos acotarlo como sigue

$$h_T\|\nabla(u - P_1(u))\|_{L^2(T)} \leq h_T\|\nabla u\|_{L^2(T)} + h_T\|\nabla P_1(u)\|_{L^2(T)} \tag{2.25}$$

razonando de igual manera que en (2.14) tendremos que

$$\|\nabla P_1(u)\|_{L^2(T)} \preceq \|\nabla u\|_{L^2(T)} \tag{2.26}$$

entonces podemos acotar (2.25)

$$h_T\|\nabla(u - P_1(u))\|_{L^2(T)} \preceq h_T\|\nabla u\|_{L^2(T)} \preceq h_T\|u\|_{H^1(\hat{\omega}_T)} \tag{2.27}$$

Por último consideremos el término restante de (2.24), utilizando el Lema 2.2, que podemos usarlo pues se trata de polinomios, tendremos

$$h_T\|\nabla(P_1(u) - I_{\mathcal{G}}(u))\|_{L^2(T)} \preceq \|P_1(u) - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(T)} \tag{2.28}$$

intercalando u y aplicando la desigualdad triangular por n-ésima vez

$$h_T\|\nabla(P_1(u) - I_{\mathcal{G}}(u))\|_{L^2(T)} \preceq \|P_1(u) - u\|_{L^2(T)} + \|u - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(T)} \tag{2.29}$$

Al primer término del miembro izquierdo podemos acotarlo usando el Lema2.4, y para el segundo basta con considerar el primer resultado de este teorema. Obteniendo

$$h_T\|\nabla(P_1(u) - I_{\mathcal{G}}(u))\|_{L^2(T)} \preceq h_T\|u\|_{H^1(\hat{\omega}_T)}$$

Finalmente, uniendo (2.23), (2.24), (2.25), junto con la ecuación previa dice que

$$\|u - I_{\mathcal{G}}(u)\|_{L^2(S)} \preceq h_T^{1/2}\|u\|_{H^1(\hat{\omega}_T)}$$

como queríamos demostrar. □

Con las herramientas que hemos introducido podemos finalmente enfocarnos en la construcción de un estimador que verifique las hipótesis requeridas en el teorema general de convergencia.

Siendo $u \in H_0^1(\Omega)$, la solución del problema variacional, y $u_{\mathcal{G}} \in X_{\mathcal{G}}(\Omega)$ la solución del problema variacional discreto, tendremos:

$$\int_\Omega \nabla(u - u_{\mathcal{G}}).\nabla v = \int_\Omega fv - \int_\Omega \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla v \tag{2.30}$$

Observación 2.1. *En lo que sigue usaremos H_0^1 y L^2 para referirnos a $H_0^1(\Omega)$ y a $L^2(\Omega)$ y en los casos en que el dominio no sea Ω sí pondremos entre paréntesis el dominio aludido.*

Sea $v \in H_0^1(\Omega)$, por la desigualdad de Poincaré tendremos

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq c_\Omega^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L_2}^2 = (1 + c_\Omega^2)\|\nabla v\|_{L^2}$$

por ende

$$\frac{\|v\|_{H^1}}{\sqrt{1 + c_\Omega^2}} \leq \|\nabla v\|_{L^2} \tag{2.31}$$

por la definición de supremo y por (2.31) tendremos

$$\sup_{\substack{w \in H_0^1 \\ \|w\|_{H^1}=1}} \left\{ \int_\Omega \nabla v \nabla w \right\} \geq \frac{\|v\|_{H^1}}{\sqrt{1 + c^2}} \tag{2.32}$$

mientras que gracias a Cauchy-Schwarz, resulta

$$\sup_{\substack{w \in H_0^1 \\ \|w\|_{H^1}=1}} \left\{ \int_\Omega \nabla v \nabla w \right\} \leq \|v\|_{H^1} \tag{2.33}$$

Luego

$$\frac{\|v\|_{H^1}}{\sqrt{1 + c_\Omega^2}} \leq \sup_{\substack{w \in H_0^1 \\ \|w\|_{H^1}=1}} \left\{ \int_\Omega \nabla v \nabla w \right\} \leq \|v\|_{H^1} \tag{2.34}$$

Tomando $v := u - u_{\mathcal{G}} \in H_0^1$, tendremos de (2.34) junto con (2.30)

$$\sup_{\substack{w \in H_0^1 \\ \|w\|_{H^1}=1}} \left\{ \int_\Omega fw - \int_\Omega \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla w \right\} \leq \|u - u_{\mathcal{G}}\|_{H^1} \leq \sqrt{(1 + c_\Omega^2)} \sup_{\substack{w \in H_0^1 \\ \|w\|_{H^1}=1}} \left\{ \int_\Omega fw - \int_\Omega \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla w \right\} \tag{2.35}$$

Es decir que podemos analizar el valor del error de nuestra aproximación a partir de nuestra aproximación obtenida y la información que se tiene del problema. Observemos que, como $X_{\mathcal{G}} \subset H_0^1$, se tiene la ortogonalidad del error

$$\int_\Omega \nabla(u - u_{\mathcal{G}}) \nabla v_{\mathcal{G}} = 0, \qquad \forall v_{\mathcal{G}} \in X_{\mathcal{G}} \tag{2.36}$$

Por otro lado, integrando por partes elemento a elemento,

$$\int_\Omega fv - \int_\Omega \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla v = \int_\Omega fv - \sum_{T \in \mathcal{G}} \int_T \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla v = \int_\Omega fv - \sum_{T \in \mathcal{G}} \left\{ \int_T \Delta u_{\mathcal{G}} v - \int_{\partial T} \nu_T \nabla u_{\mathcal{G}} v \right\} \tag{2.37}$$

donde ν_T se refiere a la normal exterior unitaria de cada triángulo. Notando que $\Delta u_{\mathcal{G}} = 0$ sobre todo triángulo $T \in \mathcal{G}$, además del hecho de que cada lado interior es sumado dos veces con signos opuestos, definiendo $[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S := \nu_S(\nabla u_{\mathcal{G}}|_{T_1} - \nabla u_{\mathcal{G}}|_{T_2})$ el salto interelemento de $\nabla u_{\mathcal{G}}$, valdrá para todo $v \in H_0^1$, aquí ν_S es la normal exterior correspodiente al lado S.

$$\int_\Omega fv - \int_\Omega \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla v = \sum_{T\in\mathcal{G}} \int_T fv - \sum_{S\in\mathbb{S}} \int_S [\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S v. \tag{2.38}$$

Consideremos, ahora, una función arbitraria $w \in H_0^1$, de norma 1, y también a $I_{\mathcal{G}}(w) \in X_{\mathcal{G}}$, esta última verifica la relación (2.36), por ende valdrá la igualdad

$$\int_\Omega fw - \int_\Omega \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla w = \sum_{T\in\mathcal{G}} \int_T f(w - I_{\mathcal{G}}(w)) - \sum_{S\in\mathbb{S}} \int_S [\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S (w - I_{\mathcal{G}}(w))$$

Tomando módulo, usando la desigualdad triangular, y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\Big| \int_\Omega fw - \int_\Omega \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla w \Big| \leq \sum_{T\in\mathcal{G}} \|f\|_{L^2(T)} \|w - I_{\mathcal{G}}(w)\|_{L^2(T)} + \sum_{S\in\mathbb{S}} \|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(S)} \|w - I_{\mathcal{G}}(w)\|_{L^2(S)}$$

Usando ahora el Teorema 2.1

$$\Big| \int_\Omega fw - \int_\Omega \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla w \Big| \preceq \sum_{T\in\mathcal{G}} h_T \|f\|_{L^2(T)} \|w\|_{H^1(\hat{\omega_T})} + \sum_{S\in\mathbb{S}} h_S^{\frac{1}{2}} \|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(S)} \|w\|_{H^1(\hat{\omega_S})}$$

Como $\hat{\omega_S}$ y $\hat{\omega_T}$ son subconjuntos de Ω para todo triángulo $T \in \mathcal{G}$ y para todo lado $S \in \mathbb{S}$, podemos acotar los términos de la forma $\|w\|_{H^1(\hat{\omega_T})}$ y $\|w\|_{H_0^1(\hat{\omega_S})}$ usando $\|w\|_{H_0^1(\Omega)}$ y una constante multiplicativa que dependerá del mínimo ángulo de la triangulación, es decir

$$\Big| \int_\Omega fw - \int_\Omega \nabla u_{\mathcal{G}} \nabla w \Big| \preceq \|w\|_{H^1(\Omega)} \Big\{ \sum_{T\in\mathcal{G}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{S\in\mathbb{S}} h_S \|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(S)}^2 \Big\}^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente, usando este hecho más la desigualdad derecha de (2.35), obtenemos

$$\|u - u_{\mathcal{G}}\|_{H^1(\Omega)} \preceq \Big\{ \sum_{T\in\mathcal{G}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{S\in\mathbb{S}} h_S \|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(S)}^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.39}$$

El miembro derecho de esta última expresión puede usarse como estimador a posteriori del error puesto que sólo utiliza información de f, de $u_{\mathcal{G}}$ y de la triangulación, siendo a su vez una cota para el error. Notar que así definido cumple con el requisito pedido en (1.3.6) del Capítulo 1.

Por su parte definiremos el estimador local

$$\eta_T := \Big\{ h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{S\in\mathbb{S}(T)} h_S \|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(S)}^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.40}$$

Una cota local por debajo también puede obtenerse, y de hecho nos es necesaria pues nuestro estimador debe cumplir (1.3.7). Para esto precisaremos definir unas funciones auxiliares.

Primero notemos que, por ejemplo para el NVB, se tiene que cualquier foresta $\mathcal{F}(\mathcal{G}') \supset \mathcal{F}^3(\mathcal{G}, N_{\mathcal{G}}(T))$ tendrá la propiedad (ver Figura (5)) de que en la malla $\mathcal{G}'$ es posible la construcción de funciones continuas y lineales a trozos sobre los elementos de $\mathcal{G}'$ de tipo burbuja sobre la malla $\mathcal{G}$. Para ser mas precisos: dado T observemos que la bisección que condujo a $\mathcal{G}'$ garantiza la aparición de un nodo interior (en el propio T) y un nuevo nodo en cada uno de los lados de T. En particular existe en $X_{\mathcal{G}'}$ una función burbuja, β_T, asociada a T que se anula en ∂T que al evaluarla en el nodo aparecido en el interior de T vale 1. Del mismo modo para cada lado S, y siendo $\omega_S := T_1 \cup T_2$ donde T_1 y T_2 son los triángulos que comparten a S en la malla $\mathcal{G}$, podemos definir β_S que será continua, lineal a trozos sobre los elementos de $\mathcal{G}'$, nula en el borde de ω_S y en el punto medio de S valdrá 1.

En el siguiente lema se recogen algunas propiedades elementales de estas funciones que nos serán de utilidad en un futuro próximo.

Lema 2.6. *Sean $T \in \mathcal{G}$ y $S \in \mathbb{S}$, arbitrarios. Las funciones β_T y β_S cumplen:*

$$1.\ \int_T \beta_T \sim\ h_T^2,$$

$$2.\ \int_{\omega_S} \beta_S \sim h_S^2,$$

$$3.\ \|\nabla \beta_T\|_{L^2(T)} \sim 1,$$

$$4.\ \|\nabla \beta_S\|_{L^2(\omega_T)} \sim 1.$$

Demostración. Es elemental. Para probar la primera notemos que por construcción $0 \leq \beta_T \leq 1$ de donde se tiene, debido a la regularidad de la malla, $\int_T \beta_T \leq |T| \sim\ h_T^2$. Por otro lado, si llamamos T' a cualquiera de los triángulos $T' \in \mathcal{G}'$ tales que $T' \subset T$ en los que β_T resulta lineal, se tiene que al valer cero en dos de los vértices de T' y uno en el restante valdrá (p.ej. por la regla de cuadratura del baricentro) $\int_{T'} \beta_T = \frac{1}{3}|T'|$ y esta cantidad es obviamente mayorada por $\int_T \beta_T$ por lo que se sigue que $h_T^2 \sim \int_{T'} \beta_T \leq \int_T \beta_T$. El ítem 2) se sigue idénticamente en tanto que los restantes usan el mismo tipo de argumento solo que hay que tener en cuenta que en los elementos $T' \in \mathcal{G}'$, en los cuales es lineal la burbuja, resulta ser constante su gradiente y de orden $1/h_T$. □

Consideremos el estimador local (2.40). Para satisfacer (1.3.7) debemos acotar

$$h_T \|f\|_{L^2(T)} \tag{2.41}$$

y

$$h_S^{1/2} \|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(S)} \tag{2.42}$$

en términos del supremo dado en (1.3.7) y de la oscilación. Para acotar (2.41) conviene introducir la oscilacioń y trabajar luego con f_T. En efecto

$$h_T \|f\|_{L^2(T)} \leq h_T \|f - f_T\|_{L^2(T)} + h_T \|f_T\|_{L^2(T)}, \tag{2.43}$$

por lo cual basta concentrase en el último término. Definiendo ahora $v_T := f_T \beta_T$ tendremos, considerando el lema anterior,

$$\int_T f_T v_T = \int_T f_T^2 \beta_T = f_T^2 \int_T \beta_T \sim f_T^2 h_T^2 \sim \|f_T\|_{L^2(T)}^2 \tag{2.44}$$

Por otro lado, podemos escribir $\int_T f_T v_T = \int_T (f_T - f) v_T + \int_T f v_T$ y acotar el primer término usando la oscilación

$$\int_T (f_T - f)v_T \leq \|f_T - f\|_{L^2(T)}\|f_T\|_{L^2(T)}$$

mientras que para el segundo vale

$$\int_T f v_T = \int_T f v_T - \int_T \nabla u_h \nabla v_T = \langle \mathcal{R}_\mathcal{G}, v_T \rangle$$

ya que en la primer igualdad el término restado es cero considerando que u_h es lineal en T y que la burbuja se anula en el borde del elemento. Por el Lema 2.6, la desigualdad de Poincaré I, la definición de v_T y el hecho de que $0 \leq \beta_T \leq 1$ tendremos

$$\|v_T\|_{H^1(T)} \sim \|\nabla \beta_T\|_{L^2(T)}|f_T| \sim |f_T| \sim h_T^{-1}\|f_T\|_{L^2(T)}$$

donde en la última equivalencia usamos que f_T es constante. Hemos probado entonces que $\|v_T\|_{H^1} \sim \frac{1}{h_T}\|f_T\|_{L^2}$ y por (2.44), nos queda

$$\begin{aligned} \|f_T\|^2_{L^2(T)} &\preceq \|f_T - f\|_{L^2(T)}\|f_T\|_{L^2(T)} \\ &+ 1/h_T\|f_T\|_{L^2(T)} \sup\Big\{\langle \mathcal{R}_\mathcal{G}, w\rangle \mid w \in X_{\mathcal{G}'}(\omega_\mathcal{G}(T)), \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\Big\} \end{aligned}$$

de donde

$$h_T\|f_T\|_{L^2(T)} \preceq h_T\|f_T - f\|_{L^2(T)} + \sup\Big\{\langle \mathcal{R}_\mathcal{G}, w\rangle \mid w \in X_{\mathcal{G}'}(\omega_\mathcal{G}(T)), \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\Big\} \tag{2.45}$$

y esto junto con 2.43 nos permite acotar $h_T\|f\|_{L^2(T)}$:

$$h_T\|f\|_{L^2(T)} \preceq h_T\|f_T - f\|_{L^2(T)} + \sup\Big\{\langle \mathcal{R}_\mathcal{G}, w\rangle \mid w \in X_{\mathcal{G}'}(\omega_\mathcal{G}(T)), \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\Big\} \tag{2.46}$$

que es parte de lo que hace falta demostrar.

Resta acotar ahora (2.42). Usaremos la burbuja del lado S, definamos la función auxiliar $v_S := [\nu_S \nabla u_\mathcal{G}]_S \beta_S$ y con la ayuda del Lema 2.6 y notando que $[\nu_S \nabla u_\mathcal{G}]_S$ es constante en S podremos decir

$$\int_S [\nu_S \nabla u_\mathcal{G}]_S v_S = \int_S [\nu_S \nabla u_\mathcal{G}]_S^2 \beta_S \sim \|[\nu_S \nabla u_\mathcal{G}]_S^2\|^2_{L^2(S)} \tag{2.47}$$

Se tiene por otro lado

$$\int_{\omega_S} [\nu_S \nabla u_\mathcal{G}]_S v_S = \int_{\omega_S} \nabla u_\mathcal{G} \nabla v_S = \left(\int_{\omega_S} \nabla u_\mathcal{G} \nabla v_S - \int_{\omega_S} f v_S\right) + \int_{\omega_S} f v_S, \tag{2.48}$$

donde la primera igualdad utiliza el hecho de que v_S se anula en el borde de ω_S y que $u_\mathcal{G}$ es lineal en los elementos $T_1, T_2 \in \mathcal{G}$ tales que $\omega_S = T_1 \cup T_2$. Usando nuevamente el Lema 2.6

$$\|v_S\|_{H^1(\omega_S)} \sim |[\nu_S \nabla u_\mathcal{G}]_S| \sim h_S^{-1/2}\|[\nu_S \nabla u_\mathcal{G}]_S\|_{L^2(S)}.$$

Con esto en mente podremos acotar el término entre paréntesis de (2.48) que es $\langle \mathcal{R}_\mathcal{G}, v_S\rangle$, con

$$\sup\Big\{\langle \mathcal{R}_\mathcal{G}, w\rangle \mid w \in X_{\mathcal{G}'}(\omega_\mathcal{G}(T)), \|w\|_{H^1}(\Omega) \leq 1\Big\} h_S^{-1/2}\|[\nu_S \nabla u_\mathcal{G}]_S\|_{L^2(S)}$$

mientras que para el segundo término se escribe

$$\int_{\omega_S} f v_S = \int_{T_1} f v_S + \int_{T_2} f v_S,$$

siendo T_1 y T_2 como antes los elementos de $\mathcal{G}$ que comparten el lado S. Sin perder generalidad llamamos $T_1 = T$ y acotamos $\int_T f v_S$.

Se tiene

$$\int_T f v_S \leq \|f\|_{L^2(T)} \|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(T)}$$

en tanto que gracias a la regularidad $h_S \sim h_T$ y así

$$\|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(T)} \sim \|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(S)} h_S^{1/2}$$

por ende

$$\int_T f v_S \preceq \|f\|_{L^2(T)} \|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(S)} h_S^{1/2}.$$

juntando esto con (2.47)

$$h_T^{1/2} \|[\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}]_S\|_{L^2(S)} \preceq \sup \left\{ \langle \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, w \rangle \mid w \in X_{\mathcal{G}'}(\omega_{\mathcal{G}}(T)), \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\} + h_T \|f\|_{L^2(T)},$$

y gracias a la cota ya obtenida en (2.46) para $h_T \|f\|_{L^2(T)}$ resulta que el estimador verifica (1.3.7) como queríamos probar.

En el capítulo siguiente probaremos la convergencia del algoritmo presentado en el Capítulo 1 utilizando estimadores como el construido en este capítulo que verifica las correspondientes hjipótesis y ha sido utilizado en los ejemplos numéricos del último capítulo.

Capítulo 3

Convergencia del algoritmo

Daremos aquí la demostración de la convergencia del algoritmo adaptativo presentada en [6]. Para ello definiremos y estudiaremos algunas sucesiones que son generadas por cada iteración del esquema de la página 10, y seguidamente probaremos que los estimadores de error se anulan en el límite, estableciéndose así la convergencia de las aproximaciones a la solución exacta. En lo siguiente notaremos u_k para referirnos a $u_{\mathcal{G}_k}$, donde k es la iteración del algortimo y $\mathcal{G}_k$ su malla asociada.

Las iteraciones del algoritmo generan una sucesión de triangulaciones, $\{\mathcal{G}_k\}_k$. Asociadas a ésta vienen las siguientes tres sucesiones que serán de nuestro interés: la sucesión $\{\mathcal{F}_k\}_k$, donde para cada k, $\mathcal{F}_k$ indica el bosque finito asociado a $\mathcal{G}_k$, recordemos que este bosque tiene un árbol por cada elemento de la malla inicial $\mathcal{G}_0$; $\{u_k\}_k$ es la sucesión de soluciones aproximadas obtenidas mediante el método de Galerkin para la malla $\mathcal{G}_k$; y $\{h_k\}_k$ que es la sucesión de funciones de tamaño de malla, definidas a continuación.

Definición 3.1. *Dado $x \in \Omega$ sea $\mathcal{G}(x) := \bigcup\{T \in \mathcal{G} \mid x \in T\}$, llamaremos función de tamaño de malla a*

$$h_{\mathcal{G}} := |\mathcal{G}(x)|^{\frac{1}{2}}$$

En primer término, analizaremos la sucesión de bosques $\{\mathcal{F}_k\}_k$. Como cada bosque habrá de contener al bosque de la iteración anterior, el límite de esta sucesión quedará definido del siguiente modo:

$$\mathcal{F}_\infty := \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_k$$

Recordemos que en el Capítulo 1 se había presentado al bosque principal como el conjunto de todas las triangulaciones posibles obtenidas a partir de la triangulación inicial y las sucesivas aplicaciones del módulo REFINAR, de tratarse de un procedimiento no adaptativo, el bosque $\mathcal{F}_\infty$ coincidiría con el bosque $\mathcal{F}$; en nuestro caso habrán de aparecer nodos que no tendrán sucesores, es decir, elementos que dejarán de ser refinados a partir de alguna iteración, a estos nodos les llamaremos hojas. Al conjunto de las hojas le llamaremos $\mathcal{G}^+$, una hoja será un elemento que no volverá a refinarse, entonces será una hoja para el bosque siguiente, hijo de una nueva iteración, y este mismo argumento podemos esgrimirlo en las sucesivas iteraciones, es decir que una hoja será hoja de todos los árboles generados por el algoritmo a partir de una cierta iteración. Es razonable, entonces, definir a $\mathcal{G}^+$ como sigue:

$$\mathcal{G}^+ := \bigcup_{k\geq 0} \bigcap_{l\geq k} \mathcal{G}_l.$$

Los requerimientos que se le piden a las triangulaciones y a los refinamientos en el Capítulo 1, tienen como consecuencia que para todo elemento que sea una hoja se cumplirá que sus vecinos, ocasionalmente, serán hojas.
Para ver esto, consideremos a un elemento $T \in \mathcal{F}_\infty$, que además sea una hoja y el índice k más pequeño que verifica que $T \in \mathcal{G}_k$. Para $l \geq k$, tomemos un elemento $T' \in N_l(T)$, es decir, un elemento que sea vecino a T en la malla $\mathcal{G}_l$. Habrá, pues un elemento $R \in N_k(T)$ que será la raíz de un subárbol que comienza en R y contiene a T'. Tendremos la siguiente relación

$$|T| \preceq |T'| \leq (q_2)^{dist(R,T')}|R| \preceq (q_2)^{dist(R,T')}|T|$$

Como las subdivisiones que se realizan sobre los elementos son cuasi-uniformes: el tamaño de un elemento es siempre comparable con el tamaño de sus vecinos, hecho que justifica la primera y la tercera relación de la expresión de arriba, y también son cuasi-regulares, lo que justifica la segunda. Por ende, deberá existir una constante M tal que $dist(R, T') \leq M$, luego todos los posibles vecinos de T están contenidos en $\mathcal{F}^M(\mathcal{G}_k, N_k(T))$, recordemos que este conjunto está formado por el bosque $\mathcal{G}_k$, y todos los sucesores de $N_k(T)$ hasta distancia M, este nuevo bosque puede no ser una malla que genere el algoritmo, pero si consideramos su intersección con $\mathcal{F}_\infty$, podremos elegir s de manera que el bosque $\mathcal{F}^M(\mathcal{G}_k, N_k(T)) \cap \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}_s$, es decir que todos los vecinos de T están contenidos en $\mathcal{F}_s$, los elementos de $\nu_S(T)$ deberán ser hojas de $\mathcal{F}_\infty$, pues de lo contrario si tuvieran sucesores, habría sucesores de los vecinos de T a distancia mayor que M, por ende $N_l(T) = \nu_S(T) \subset \mathcal{G}^+$ para cualquier $l \geq s$.

Miremos, ahora, la sucesión de aproximaciones de Galerkin $\{u_k\}_k$. Veremos que esta sucesión converge a una cierta función. Esta función pertenecerá al conjunto definido como

$$X_\infty := \overline{\bigcup_{k \geq 0} X_k}.$$

Aquí escribimos X_k por $X_{\mathcal{G}_k}(\Omega)$, el conjunto de funciones lineales a trozos sobre la malla $\mathcal{G}_k$; notemos que para todo k son subespacios de $H_0^1(\Omega)$ por lo tanto X_∞ estará contenida en $H_0^1(\Omega)$.

Como la forma bilineal es coercitiva para las funciones de $H_0^1(\Omega)$, y X_∞ es un subespacio de éste, la forma será coercitiva para X_∞. De acuerdo al teorema de Lax-Milgram, el problema variacional tendrá solución única, a la que llamaremos u_∞.
Notemos que $X_k \subset X_\infty$, y tomemos $v \in X_k$ entonces, para cada X_k se cumple el lema de Céa, (0.16)

$$\|u_\infty - u_k\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_1}{C_2} \inf_{v \in X_k} \|u_\infty - v\|_{H^1(\Omega)} \tag{3.1}$$

Como $\bigcup_{k \geq 0} X_k$ es denso, por construcción, en X_∞ haciendo tender a k hacia infinito tendremos que

$$\lim_{k \to \infty} \|u_k - u_\infty\|_{H^1(\Omega)} = 0 \tag{3.2}$$

Esta última expresión tendrá como consecuencia que para probar que $\lim_{k\to\infty} \|u - u_k\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$, bastará con verificar que $u_\infty = u$, y esto es equivalente a que $u \in X_\infty$ Hay que notar que el conjunto X_∞ depende de la sucesión de triangulaciones $\{\mathcal{G}_k\}_k$, que a su vez depende de la función f y de los módulos RESOLVER, ESTIMAR, MARCAR y REFINAR, por ende que valga que $u \in X_\infty$ dependerá de propiedades de los distintos módulos.

Dirijamos nuestra atención, por último, a la sucesión $\{h_{\mathcal{G}_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funciones de tamaño de malla, para no tener que lidiar con notaciones demasiado sobrecargadas, escribiremos h_k para

referirnos a $h_{\mathcal{G}_k}$. Si estuviésemos analizando el caso no adaptativo, donde se refinan todos los triángulos en cada iteración, ocurriría

$$\lim_{k\to\infty} \|h_k\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$$

En el caso adaptativo, no todos los triángulos se habrán de refinar en cada iteración, de hecho será el algoritmo quien decida si los elementos se refinan o no (esto dependerá de la tolerancia de la estrategia de marcado y de sus parámetros). Por esta razón la relación de arriba no tendría por qué cumplirse, pues podría haber elementos que dejen de refinarse a partir de alguna iteración y por ello $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no convergerá a 0 tomando la norma de $L^\infty(\Omega)$.
Pero para poder garantizar la convergencia del algoritmo es necesario que la sucesión $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converja. Para salvar este problema, consideremos el conjunto $\mathbb{S}_{\mathcal{G}_k}$, el conjunto de los bordes de todos los elementos de la malla $\mathcal{G}_k$, este conjunto tiene medida de Lebesgue 2-dimensional cero y notemos también que $\mathbb{S}_{\mathcal{G}_k} = \{x \in \Omega \mid \#\mathcal{G}_k(x) > 1\}$ pues todos los puntos que no sean bordes pertenecen a un sólo triángulo. Entonces a h_k podemos verla como una función constante a trozos en $L^\infty(\Omega)$. Así para cada $x \in \Omega \setminus \mathbb{S}_{\mathcal{G}_k}$, o sea para casi todo punto de Ω, la sucesión $h_k(x)$ es monótona decreciente y acotada por cero inferiormente, puesto que los triángulos sólo pueden decrementar su tamaño durante la ejecución de las sucesivas iteraciones del algoritmo. Consecuentemente, si definimos

$$h_\infty(x) := \lim_{k\to\infty} h_k(x)$$

h_∞ estará bien definida para casi todo punto de Ω, y pertenecerá a $L^\infty(\Omega)$. Veremos ahora, que esta sucesión converge uniformemente a h_∞.

Tomemos un $\epsilon > 0$, y sea $m = m(\epsilon) \in \mathbb{N}$ el número natural más pequeño que cumpla

$$m \geq \frac{\log(\epsilon^2/M)}{log(q_2)}$$

donde $M = \text{máx}\{|T| \mid T \in \mathcal{G}_0\}$.
Si definimos a $\hat{\mathcal{F}} := \mathcal{F}_\infty \cap \mathcal{F}^m(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_0)$, este bosque $\hat{\mathcal{F}}$ será una subdivisión de Ω y, además, cada uno de sus elementos habrá sido creado por, a lo sumo, m refinamientos de un elemento de la malla inicial $\mathcal{G}_0$. Es claro que esto implica que $\#\hat{\mathcal{F}} < \infty$ y como $\hat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}_\infty$ entonces existe un $k = k(\epsilon) \geq 0$ con $\hat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}_k$.
Todo triángulo $T \in \mathcal{G}_k$ puede pensarse como una hoja de $\mathcal{F}_k$, y habrá sido generado a partir de un triángulo T_0 de la malla inicial $\mathcal{G}_0$; podrían presentarse dos casos

1. $dist(T, T_0) < m$, esto implicará que T sea una hoja de $\mathcal{F}_\infty$, aunque esto merece probarse. Supongamos que T no es hoja de $\mathcal{F}_\infty$, entonces T volverá a refinarse en una iteración posterior a la k-ésima, así T producirá sucesores que estarán contenidos en $\mathcal{F}^m(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_0) \cap \mathcal{F}_\infty = \hat{\mathcal{F}}$ pero no estarán contenidos en $\mathcal{F}_k$, contradiciendo que $\hat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}_k$. Luego T es hoja de $\mathcal{F}_\infty$.
   Esto implica que T es un elemento que en una iteración anterior a la k-ésima deja de refinarse durante la ejecución del algoritmo, por lo tanto $h_{k|T} = h_{\infty|T}$, o lo que es lo mismo $(h_k - h_\infty)_{|T} = 0$

2. $dist(T, T_0) \geq m$, T es generado por al menos m refinamientos de T_0. Dado que los refinamientos son cuasi-regulares y cuasi-uniformes, sumado a que la sucesión de funciones de tamaño de malla es monótona decreciente en casi todo punto de Ω, y por la elección que hemos hecho de m

$$0 \leq (h_k - h_\infty)_{|T} \leq (h_k)_{|T} = |T|^{\frac{1}{2}} \leq (q_2)^{\frac{m}{2}} |T_0|^{\frac{1}{2}} \leq (q_2)^{\frac{m}{2}} M^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon \tag{3.3}$$

Considerando ambos casos hemos probado que $0 \leq \|h_k - h_\infty\|_{L^\infty} \leq \epsilon$, para todo elemento $T \in \mathcal{G}_k$. Es decir,

$$\|h_k - h_\infty\|_{L^\infty} \to 0. \tag{3.4}$$

Nuestra intención es probar la convergencia del algoritmo, para ello demostraremos que el estimador del error

$$\eta_k := \Big(\sum_{T \in \mathcal{G}_k} \eta_T^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

tiende a cero al hacer tender la cantidad de iteraciones a infinito.

En primer lugar dividiremos al conjunto de los estimadores en tres grupos que analizaremos separadamente. Escribiremos:

$$\eta_k = [\eta^2(\mathcal{G}_k^0) + \eta^2(\mathcal{G}_k^*) + \eta^2(\mathcal{G}_k^+)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

donde

$$\mathcal{G}_k^0 := \{T \in \mathcal{G}_k \mid \mathcal{F}^n(\mathcal{G}_k, N_k(T)) \subset \mathcal{F}_\infty\}$$

es el conjunto de los triángulos que se refinarán junto con sus vecinos al menos n veces, siendo el n fijo independiente de la iteración y del T (se trata del n utilizado en la hipótesis 2 del estimador expresada en la cota local 1.3.7);

$$\mathcal{G}_k^+ := \{T \in \mathcal{G}_k \mid N_k(T) \subset \mathcal{G}^+\},$$

son los nodos hoja de $\mathcal{F}_\infty$, es decir aquellos para los cuales existe una iteración en la que dejan de refinarse; y por último

$$\mathcal{G}_k^* := \mathcal{G}_k \setminus (\mathcal{G}_k^0 \cup \mathcal{G}_k^+)$$

el complemento de los dos conjuntos anteriores.

Analizaremos primero las contribuciones que hace al estimador de error la sucesión de conjuntos $\{\eta(\mathcal{G}_k^0)\}_k$. El objetivo será probar que

$$\lim_{k \to \infty} \eta(\mathcal{G}_k^0) = 0.$$

Para ello consideremos un elemento arbitrario T de $\mathcal{G}_k^0$, un número natural n y sea $l > k$ tal que $\mathcal{F}_l \supset \mathcal{F}^n(\mathcal{G}_k, N_k(T))$. Entonces valdrá (1.3.7)

$$\eta_k(T) \preceq \sup \Big\{ \langle \mathcal{R}_{\mathcal{G}_k}, w \rangle \mid w \in X_{\mathcal{G}_l}(\omega_{\mathcal{G}_k}(T)), \|w\|_{H^1}(\Omega) \leq 1 \Big\} + osc(f, T)$$

Es más, como $X_{\mathcal{G}_l} \subset X_\infty$, y considerando a $u_\infty \in X_\infty$ (el límite de la sucesión de las aproximaciones de Galerkin), para cada $w \in X_{\mathcal{G}_l}$ valdrá

$$a(u_\infty, w) - \langle f, w \rangle = 0, \qquad \forall w \in X_{\mathcal{G}_l} \tag{3.6}$$

Con lo cual, apelando a la continuidad de la forma bilineal y a que $\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$, tendremos

$$|\langle \mathcal{R}_k, w \rangle| = |a(u_k, w) - \langle f, w \rangle - a(u_\infty, w) + \langle f, w \rangle| = |a(u_k - u_\infty, w)| \preceq \|u_k - u_\infty\|_{H^1(\omega_k(T))} \tag{3.7}$$

Así nuestro estimador cumplirá

$$\eta_k(T) \preceq \|u_\infty - u_k\|_{H^1(\omega_k(T))} + \sum_{T' \in \omega_T} h_{T'} \|f - f_{T'}\|_{L^2(T')} \tag{3.8}$$

Queremos acotar la suma de los cuadrados de los estimadores sobre todos los elementos de $\mathcal{G}_k^0$. Al sumar sobre los elementos, estaremos sumando términos de la forma $\|u_\infty - u_k\|_{H^1(\omega_k(T))}$, para acotar esta suma, por como hemos definido a la vecindad de T (0.8), el número máximo de vecindades a las que puede pertenecer un elemento dado está acotada, es decir que estaremos sumando, salvo por una constante multiplcativa (debida a la subaditividad de la norma) varias veces $\|u_\infty - u_k\|^2_{H^1(T)}$ para algunos triángulos, pero la cantidad de repeticiones estará acotada, entonces tendremos que

$$\sum_{T\in\mathcal{G}_k^0} \|u_\infty - u_k\|^2_{H^1(\omega_k(T))} \preceq \|u_\infty - u_k\|^2_{H^1(\Omega_k^0)} \tag{3.9}$$

donde

$$\Omega_k^0 := \bigcup\{\omega_k(T) : T \in \mathcal{G}_k^0\}.$$

Sumando los estimadores de (3.8) obtenemos

$$\sum_{T\in\mathcal{G}_k^0} \eta_k^2(T) \preceq \|u_\infty - u_k\|^2_{H^1(\Omega_k^0)} + \sum_{T\in\mathcal{G}_k^0}\sum_{T'\subset\omega_k(T)} h^2_{T'}\|f - f_{T'}\|^2_{L^2(T')}$$

El primer término puede acotarse por $\|u_\infty - u_k\|^2_{H^1(\Omega)}$ (pues $\Omega_k^0 \subset \Omega$) que sabemos que tiende a cero si k tiende a infinito, y el segundo por un múltiplo de $\|h_k\|^2_{L^\infty(\Omega_k^0)}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$. Podremos, entonces, acotar la suma de los cuadrados de los estimadores como sigue

$$\sum_{T\in\mathcal{G}_k^0} \eta_k^2(T) \preceq \|u_\infty - u_k\|^2_{H^1(\Omega)} + \|h_k\|^2_{L^\infty(\Omega_k^0)}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.10}$$

Para poder finalizar la prueba de la convergencia de esta parte del estimador debemos ver que

$$\lim_{k\to\infty} \|h_k I_{\Omega_k^0}\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$$

con $I_{\Omega_k^0}$ el indicador del conjunto Ω_k^0.
Tomemos un elemento arbitrario $T \in \mathcal{G}_k^0$, por definición, él y todos sus vecinos serán subdivididos al menos n veces. Usando nuevamente que el refinamiento cumple ciertos requisitos, tendremos que sobre los elementos $T \in \mathcal{G}_k^0$

$$h_\infty \le (q_2)^{\frac{n}{2}} h_k \Leftrightarrow -(q_2)^{\frac{n}{2}} h_k \le -h_\infty \Leftrightarrow h_k - (q_2)^{\frac{n}{2}} h_k \le h_k - h_\infty$$

Y finalmente

$$h_k \le \alpha(h_k - h_\infty), \qquad \text{con } \alpha := \frac{1}{1-(q_2)^{\frac{n}{2}}}$$

Luego como T ha sido elegido arbitrariamente, la relación anterior vale para todos los triángulos de $\mathcal{G}_k^0$, esto implicará que

$$\|h_k I_{\Omega_k^0}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|\alpha(h_k - h_\infty) I_{\Omega_k^0}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \alpha\|h_k - h_\infty\|_{L^\infty(\Omega)}$$

tomando límite y usando (3.4)

$$\lim_{k\to\infty} \|h_k I_{\Omega_k^0}\|_{L^\infty(\Omega)} = 0 \tag{3.11}$$

Entonces tomando límite para k tendiendo a infinito en (3.10) resulta, por (3.2) y (3.11)

$$\lim_{k\to\infty} \eta(\mathcal{G}_k^0) = 0 \tag{3.12}$$

Analizaremos ahora el comportamiento de la sucesión $\{\eta(\mathcal{G}_k^*)\}_k$, notemos que el conjunto $\mathcal{G}_k^*$ está compuesto por los triángulos cuya vecindad en la iteración k aún no está formada por hojas pero que lo serán en alguna iteración posterior. El objetivo será, nuevamente, mostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \eta(\mathcal{G}_k^*) = 0$$

Para ver esto empezaremos por mostrar que

$$\lim_{k\to\infty} |\Omega_k^*| = 0 \tag{3.13}$$

donde $\Omega_k^* := \bigcup_{T\in\mathcal{G}_k^*}\{\omega_k(T)\}$ es el subdominio de Ω asociado a $\mathcal{G}_k^*$.
Dado un elemento $T \in \mathcal{G}_k^*$ habremos de distinguir en dos posibles escenarios, debido a la localización de $N_k(T)$ en $\mathcal{F}_\infty$.

1. $N_k(T) \cap \mathcal{G}^+ = \emptyset$, es decir todos los elementos de la vecindad de T son nodos interiores de $\mathcal{F}_\infty$. Por definición de $\mathcal{G}_k^*$, T no pertenece a $\mathcal{G}_k^0$, y por ello $\mathcal{F}^n(\mathcal{G}_k, N_k(T))$ no está contenido en $\mathcal{F}_\infty$, entonces existirá un triángulo $T' \in N_k(T)$ y un nodo hoja $H_T \subset T'$ de $\mathcal{F}_\infty$ que estará a una distancia menor que n de T'. Considerando que el tamaño de la vecindad de un triángulo es siempre comparable con el tamaño de cualquiera de sus integrantes, por las características del refinamiento tendremos que vale

   $$|\omega_k(T)| \preceq |T'| \leq \big(q_1\big)^{-n}|H_T|$$

   Esto último nos dice que $|\omega_k(T)|$ es comparable con $|H_T|$. Podemos afirmar entonces que H_T cumple las siguientes propiedades:

   $$H_T \in \mathcal{G}^+ \setminus \mathcal{G}_k, \qquad H_T \subset \omega_k(T), \qquad \text{y} \qquad |\omega_k(T)| \preceq |H_T|. \tag{3.14}$$

2. $N_k(T) \cap \mathcal{G}^+ \neq \emptyset$, es decir que al menos un elemento de la vecindad de T es un nodo hoja de $\mathcal{F}_\infty$, además, por definición de $\mathcal{G}_k^*$, $T \notin \mathcal{G}_k^+$, o sea no todos los elementos de la vecindad son nodos hoja de $\mathcal{F}_\infty$. Entonces podemos encontrar en $N_k(T)$ dos elementos, T' y T'' que verifiquen

   $$T' \in \mathcal{G}^+, \qquad T'' \notin \mathcal{G}^+, \qquad \text{y} \qquad T' \cap T'' \neq \emptyset$$

   Existirá, pues, un sucesor de T'' que verificará $H_T \in \mathcal{G}^+$ y $H_T \cap T' \neq \emptyset$. Entonces como el tamaño de una vecindad es comparable con el de sus integrantes y cada triángulo es comparable con el tamaño de sus sucesores, valdrá $|\omega_k(T)| \preceq |T'| \preceq |H_T|$. Luego, vale (3.14) para H_T también en este escenario.

Notemos que H_T es un sucesor que está asociado por su definición con la vecindad de T, no sólo con T, y estas vecindades pueden solaparse, por tanto puede ocurrir que un mismo sucesor esté relacionado con varios triángulos. Sin embargo, como la cantidad de elementos en una vecindad está acotada uniformemente para cualquier elemento, es decir que T pertenecerá, a lo sumo, a un número finito de vecindades y por ello, la cantidad de elementos del conjunto $\{T \in \mathcal{G}_k^* \mid H_T = H\}$ es menor o igual que cuatro para cualquier hoja $H \in \mathcal{G}^+ \setminus \mathcal{G}_k$, o puesto

de otro modo $\#\{T \in \mathcal{G}_k^* \mid H_T = H\} \preceq 1$ para cada uno de los elementos $H \in \mathcal{G}^+ \setminus \mathcal{G}_k$, luego $\#\mathcal{G}_k^* \preceq \#(\mathcal{G}^+ \setminus \mathcal{G}_k)$. Si además consideramos la relación (3.14), obtendremos:

$$|\Omega_k^*| \leq \sum_{T \in \mathcal{G}^*} |\omega_k(T)| \preceq \sum_{T \in \mathcal{G}_k^*} |H_T| \preceq \sum_{H \in \mathcal{G}^+ \setminus \mathcal{G}_k} |H|$$

El último término de la expresión de arriba es la cola de la serie $\sum_{H \in \mathcal{G}^+} |H|$, que es convergente puesto que todos sus términos son positivos y todas sus sumas parciales están acotadas por $|\Omega|$, luego la cola de la serie tiende a cero al tomar límite sobre k y por la seguidilla de desigualdades, o desigualdades salvo por una constante multiplicativa, podemos concluir que

$$\lim_{k \to \infty} |\Omega_k^*| = 0$$

Por otra parte, recordando la cota local para el error verdadero, el que se comete respecto de la solución verdadera u, sobre cada elemento, (1.3.10), podemos acotar al aporte local del error de $\mathcal{G}_k^*$ para cada T de la siguiente manera:

$$\eta_k(T) \preceq \|u - u_k\|_{H^1(\omega_T)} + \sum_{T' \in \omega_k(T)} h_{T'} \|f - f_{T'}\|_{L^2(T')}$$

intercalando u_∞ y aplicando la desigualdad triangular obtenemos

$$\eta_k(T) \preceq \|u_k - u_\infty\|_{H^1(\omega_k(T))} + \|u_\infty\|_{H^1(\omega_k(T))} + \|u\|_{H^1(\omega_k(T))} + \sum_{T' \in \omega_k(T)} h_{T'} \|f - f_{T'}\|_{L^2(T')} \quad (3.15)$$

y, sumando los aportes de cada elemento y argumentando de igual manera que en el caso de $\mathcal{G}_k^0$, obtenemos

$$\eta_k^2(\mathcal{G}_k^*) = \sum_{T \in \mathcal{G}_k^*} \eta_k^2(T) \preceq \sum_{T \in \mathcal{G}_k^*} \left(\|u_\infty - u_k\|^2_{H^1(\omega_k(T))} + \|u_\infty\|^2_{H^1(\omega_k(T))} + \|u\|^2_{H^1(\omega_k(T))} + \sum_{T' \in \omega_k(T)} h_{T'}^2 \|f - f_{T'}\|^2_{L^2(T')} \right)$$

$$\eta_k^2(\mathcal{G}_k^*) \preceq \|u_k - u_\infty\|^2_{H^1(\Omega_k^*)} + \|u_\infty\|^2_{H^1(\Omega_k^*)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega_k^*)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega_k^*)} \quad (3.16)$$

y finalmente, considerando que las normas tanto de H_0^1 y de L^2 son absolutamente continuas y como $|\Omega_k^*| \to 0$ si $k \to \infty$, resulta que

$$\lim_{k \to \infty} \eta_k(\mathcal{G}_k^*) = 0 \quad (3.17)$$

Por último, nos queda estudiar el comportamiento de las contribuciones que hacen al error los elementos contenidos en $\mathcal{G}_k^+$. En este punto cobrará importancia la estrategia de marcado y el conjunto $\mathcal{M}_k$, recordemos que los elementos de $\mathcal{G}_k^+$ son hojas, es decir que no vuelven a subdividirse por lo cual no vuelven a ser marcados, de esto podemos deducir que

$$\mathcal{M}_k \subset \mathcal{G}_k \setminus \mathcal{G}_k^+ = \mathcal{G}_k^0 \cup \mathcal{G}_k^*$$

por lo tanto podemos asegurar que

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} \eta_k(\mathcal{M}_k) \leq \lim_{k \to \infty} \eta_k(\mathcal{G}_k^0 \cup \mathcal{G}_k^*) = 0 \quad (3.18)$$

debido a lo ya probado para $\mathcal{G}_k^0$ y para $\mathcal{G}_k^*$.
La estrategia de marcado lo que hace, en términos generales, es marcar a los elementos cuyo error es superior a cierta cota. Más precisamente tiene la siguiente propiedad, de acuerdo con lo dicho en (1.4.11):

$$\forall T \in \mathcal{G}_k \setminus \mathcal{M}_k \text{ se tiene que } \eta_k(T) \leq g(\eta_k(\mathcal{M}_k)) \tag{3.19}$$

Entonces, juntando (3.19) con (3.18), tendremos

$$\forall T \in \mathcal{G}^+ \qquad \lim_{k\to\infty} \eta_k(T) = 0 \tag{3.20}$$

Notemos que esto no es exactamente lo mismo que probar que $\lim_{k\to\infty} \eta_k(\mathcal{G}_k^+) = 0$ que es lo que en verdad precisamos. Para lograr nuestro propósito será necesario reformular la noción de convergencia por elementos, como ocurre en la expresión de arriba, como una convergencia puntual de funciones en $L^1(\Omega)$ y en ese nuevo contexto utilizar el teorema de convergencia mayorada.
Para poder aplicar la convergencia mayorada será preciso tomar en cuenta una serie de hechos que verifican todos los elementos de $\mathcal{G}_k^+$. En primer término, por la definición del conjunto $\mathcal{G}_k^+$ una vecindad de cualquiera de sus elementos estará formada por hojas, y por eso no volverán refinarse, es decir que $\omega_k(T) = \omega_l(T)$, para todo $l \geq k$, así que podemos llamar simplemente $\omega(T)$ a estos conjuntos. Explotando nuevamente la cota (1.3.10) con respecto al error verdadero, y operando de igual manera que para el caso de $\mathcal{G}_k^*$, intercalando u_∞, aplicando la desigualdad triangular, etc. obtendremos

$$\eta_k^2(T) \preceq \|u_k - u_\infty\|^2_{H^1(\omega(T))} + \|u_\infty\|^2_{H^1(\omega(T))} + \|u\|^2_{H^1(\omega(T))} + \sum_{T'\in\omega(T)} h_{T'}^2 \|f - f_{T'}\|_{L^2(T')}$$

y notemos que salvo el primer término, los restantes no dependen de k, luego podemos considerarlos a los tres juntos simplemente como una constante independiente del número de iteración, y rebautizarlo como C_T^2. Recurriendo nuevamente al mismo argumento utilizado para acotar la suma de los elementos en $\mathcal{G}_k^0$ y $\mathcal{G}_k^*$, podemos concluir lo siguiente

$$\sum_{T\in\mathcal{G}_k^+} C_T^2 \preceq 1 \tag{3.21}$$

es decir que la sumatoria puede acotarse con una constante que no depende de k.
Procedamos ahora a reformular nuestro problema de convergencia sobre elementos en uno de convergencia en L^1. Para esto, sea $\Omega^+ := \bigcup\{T : T \in \mathcal{G}^+\}$ el dominio subyacente a los elementos que son hojas de $\mathcal{F}_\infty$, y recordemos que la vecindad de un elemento hoja a partir de cierta iteración comienza a ser siempre igual, es decir que los nodos hojas pertenecen a todas las grillas sucesivas y son hojas de cada uno de sus bosques asociados. Por esto valdrá que $\mathcal{G}^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{G}_k^+$, donde la sucesión $\{\mathcal{G}_k^+\}_k$ es una sucesión creciente de conjuntos. Dado un $x \in \Omega^+$ y elegiendo el número de iteración más chico, $l = l(x)$, tal que haya un elemento que sea una hoja y que x esté contenido dentro de esa hoja, o sea $T \in \mathcal{G}_l^+$ con $x \in T$. Y a partir de este l definimos

$$\epsilon_k(x) = M_k(x) = 0 \qquad k < l$$

y

$$\epsilon_k(x) := \frac{1}{|T|}\eta_k^2(T), \qquad M_k(x) := \frac{1}{|T|}(\|u_k - u_\infty\|^2_{H^1(\omega_T)} + C_T^2) \qquad \text{para } k \geq l$$

Entonces tendremos para cada $k \in \mathbb{N}_0$, dado que ϵ_k es constante en cada $T \in \mathcal{G}_k^+$

$$\eta_k^2(\mathcal{G}_k^+) = \sum_{T\in\mathcal{G}_k^+} \eta_k^2(T) = \sum_{T\in\mathcal{G}_k^+} \frac{1}{|T|}\int_T \eta_k^2(T) = \sum_{T\in\mathcal{G}_k^+}\int_T \epsilon_k(x)\,dx = \int_{\Omega^+}\epsilon_k(x)\,dx$$

y (3.20) implicará la convergencia puntual en Ω^+ de ϵ_k a 0, o sea:

$$\epsilon_k(x) = \frac{1}{|T|}\eta_k^2(T) \to 0, \qquad \text{cuando } k \to \infty.$$

Por otro lado, la función M_k domina a la función ϵ_k, salvo por una constante multiplicativa, pues

$$\int_{\Omega^+}\epsilon_k(x)\,dx \preceq \sum_{T\in\mathcal{G}_k^+}\|u_\infty - u_k\|^2_{H^1(\omega(T))} + C_T^2 = \int_{\Omega^+} M_k(x)\,dx.$$

Veamos que la sucesión $\{M_k\}_k$ de funciones, no sólo mayora a $\{\epsilon_k\}_k$ en $L^1(\Omega^+)$ sino que además converge en dicho espacio, a una cierta función M que definimos como sigue

$$M(x) := \frac{1}{|T|}C_T^2 \qquad \text{para } x \in T \text{ y } T \in \mathcal{G}^+$$

Para ver que se verifica esta convergencia hará falta ver que la norma de la diferencia tiende a 0:

$$\|M_k - M\|_{L^1(\Omega^+)} = \sum_{T\in\mathcal{G}^+}\|M_k - M\|_{L^1(T)} = \sum_{T\in\mathcal{G}_k^+}\|M_k - M\|_{L^1(T)} + \sum_{T\in\mathcal{G}^+\setminus\mathcal{G}_k^+}\|M_k - M\|_{L^1(T)}.$$

Pero como la sucesión de conjuntos $\{\mathcal{G}_k^+\}$ es creciente y anidada, la función M_k será nula en todos los elementos correspondientes al subconjunto $\mathcal{G}^+ \setminus \mathcal{G}_k^+$, es decir, aquéllos que serán hojas de $\mathcal{F}_\infty$ pero que no son hojas de $\mathcal{F}_k$. Entonces, la última parte de la expresión de arriba puede reescribirse

$$\|M_k - M\|_{L^1(\Omega^+)} = \sum_{T\in\mathcal{G}_k^+}\|M_k - M\|_{L^1(T)} + \sum_{T\in\mathcal{G}^+\setminus\mathcal{G}_k^+}\|M\|_{L^1(T)}$$

El primer término puede acotarse de la siguiente forma

$$\sum_{T\in\mathcal{G}_k^+}\|M_k - M\|_{L^1(T)} = \sum_{T\in\mathcal{G}_k^+}\|u_k - u_\infty\|^2_{H^1(\omega(T))} \preceq \|u_k - u_\infty\|^2_{H^1(\Omega)}$$

y el último miembro de la expresión tiende a cero debido a (3.2).
Por otro lado, el segundo término es la cola de la serie $\sum_{T\in\mathcal{G}^+}\|M\|_{L^1(T)} = \sum_{T\in\mathcal{G}^+} C_T^2$, que es finita gracias a (3.21). Luego al tender ambos términos a cero podemos concluir que $M_k \to M$ en $L^1(\Omega^+)$.

En este punto tendremos que la sucesión $\{\epsilon_k\}_k$ está mayorada por $\{M_k\}_k$, además la primera sucesión converge puntualmente a cero y la segunda converge en $L^1(\Omega^+)$, es decir que estamos en las hipótesis del teorema de convergencia mayorada generalizado, que dice

Teorema 3.1. *Dadas f y $\{f_n\} \in L^1(\Omega)$ tales que $f_n \to f$ en casi todo punto, si existe una sucesión $\{g_n\}$ tal que $\|f_n\| \le g_n$ para todo n, y una función g tal que $g_n \to g$ en casi todo punto de Ω y además converge $\{g_n\}$ converge a g en $L^1(\Omega)$. Luego valdrá*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n$$

Entonces podremos concluir que

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k(\mathcal{G}_k^+)^2 = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega^+} \epsilon_k = 0. \tag{3.22}$$

Entonces, por (3.5), junto con (3.12), (3.17) y (3.22), tenemos que el error de aproximación global tiende a cero cuando k tiende a infinito

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k(\mathcal{G}_k)^2 = \lim_{k\to\infty} \eta_k^2(\mathcal{G}_k^0) + \eta_k^2(\mathcal{G}_k^*) + \eta_k^2(\mathcal{G}_k^+) = 0$$

que es lo que queríamos demostrar.

Capítulo 4

Implementación y resultados

En este capítulo daremos algunos ejemplos numéricos que ofrece el algoritmo sobre el cuál hemos trabajado. Mostraremos las soluciones aproximadas que obtiene para diversos ejemplos.

Comenzamos con un detalle resumido de los algoritmos correspondientes a los distintos módulos

- El módulo RESOLVER es estándar, se ocupa de obtener la aproximación de la solución vía funciones continuas y lineales sobre cada triángulo para una malla dada.

- El módulo ESTIMAR, cuyo fin es obtener una estimación local del error para cada elemento de la malla, requiere del cálculo de $\|f\|_{L^2(T)}$ y de $\|\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}\|_{L^2(S)}$.

  Para este propósito, y en el primer caso utilizamos la aproximación la regla cuadratura de los puntos medios de los lados en cada T, que es exacta para funciones cuadráticas. Por otra parte, el valor $\|\nu_S \nabla u_{\mathcal{G}}\|_{L^2(S)}$ se calcula directamente dado que al ser $u_{\mathcal{G}}$ lineal sobre cada elemento,$\nabla u_{\mathcal{G}}$ es un vector constante.

- El módulo MARCAR está ocupado de indicar los elementos cuyo estimador local sea demasiado grande. En nuestra implementación hemos optado por la llamada estrategia del máximo; ésta consiste en identificar el elemento cuyo estimador de error local sea máximo, llamésmole η_{Max}, y elegir a todos aquellos triángulos T tales que $\eta_{\mathcal{G}}(T) \geq \theta \eta_{Max}$, con $0 \leq \theta \leq 1$. Es claro que cuanto mayor sea el valor de θ, menos elementos serán elegidos, y viceversa, sin embargo resulta conveniente tomar un valor cercano a 1 para evitar un refinamiento excesivo con el consecuente aumento de la cantidad de operaciones, aquí hemos utilizado $\theta = 0{,}9$.

- El módulo REFINAR que es el encargado de refinar a los elementos marcados por el módulo anterior, es simplemente el algoritmo refinemesh de MATLAB, en modo 'longest', esto es según la estrategia de refinar bisectando cada elemento por su lado más largo, y manteniendo la conformidad de la malla por lo cual pueden refinarse más elementos que los marcados. Por los tipos de dominios que utilizamos en los ejemplos (cuadrados y $L-$*shaped*) y el tipo particular de grillas iniciales puede verificarse, como hemos mencionado ya, que todas las mallas involucradas cumplen las propiedades requeridas por el algoritmo.

En esta implementación, para garantizar la finalización del ciclo utilizamos una tolerancia, que hemos fijado en 0.005, y hacemos que el ciclo se detenga si en una iteración dada el estimador total es menor que dicha tolerancia limitando además la cantidad posible de vértices a 5000. En consecuencia se ha corrido el algoritmo hasta violar alguna de estas condiciones.

A continuación presentaremos algunos gráficos de las soluciones obtenidas para diferentes funciones y la evolución de los estimadores. En primer término nos restringimos a un dominio cuadrado. En este caso, por ser convexo, siempre que se tenga un dato $f \in L^2(\Omega)$ se esperan soluciones en H^2.
La primera solución que mostramos es para $f(x, y) = 1$, esto aparece en la Figura 1 junto con la respectiva evolución del estimador. Notemos que en este y en los subsiguientes ejemplos la pendiente p obtenida por la evolución del estimador aproxima el valor $-0{,}5$.

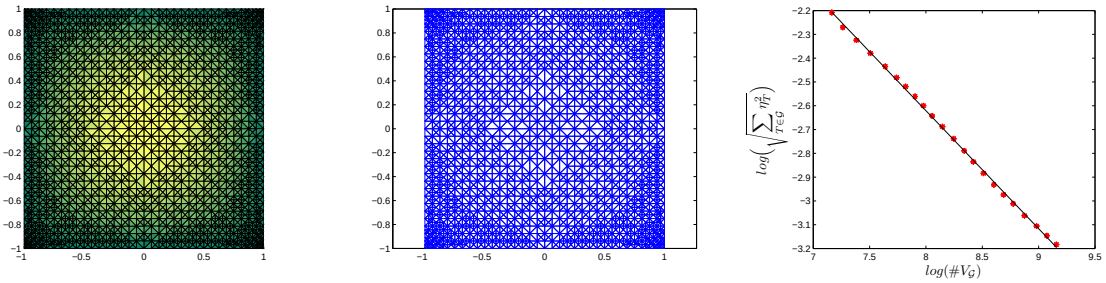

Figura 1: Izq. y Centro: Gráfico de u_k y su malla correspondiente con $f(x, y) = 1$, Der.: evolución del estimador global (pendiente aproximada $p \sim -0{,}48$).

En el próximo ejemplo tomamos $f(x, y) = 10 \exp^{-[100((x-1/2)^2+(y+1/2)^2)]}$, en la Figura 2 puede verse una representación de la solución, la malla obtenida por el algoritmo así como la evolución del estimador global.

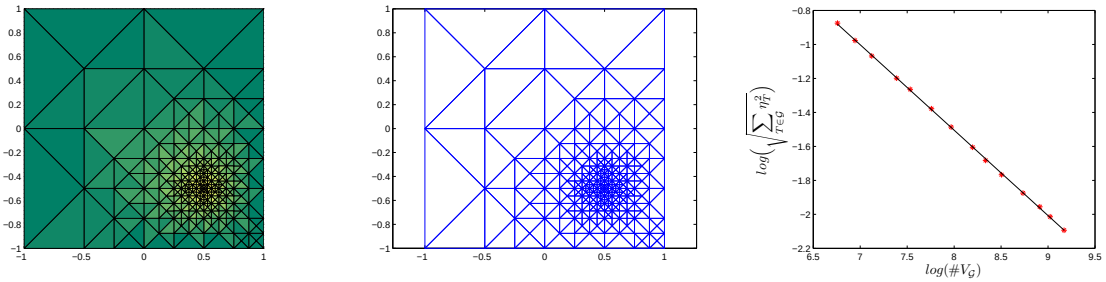

Figura 2: Izq. y Centro: Gráfico de u_k y su malla correspondiente con $f(x, y) = 10 \exp^{-[100((x-1/2)^2+(y+1/2)^2)]}$, Der.: evolución del estimador ($p \sim -0{,}5$).

Siguiendo la idea del ejemplo anterior probamos con otras fuentes que varían abruptamente. Esta vez a lo largo de una recta en vez de un punto. Tomamos en particular

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - y \geq 0, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

La Figura 3, ilustra esta situación, con la misma secuencia de las figuras anteriores. En este caso la variación de f se concentra en una curva. En particular tomamos

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)| - \frac{1}{20}(x^2 + |x|) \leq 0, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \tag{4.1}$$

que es una ligera modificación de una indicadora de la curva lemniscata, y sirve una vez mas para poner a prueba el algoritmo. En la Figura 4 se muestran los resultados.

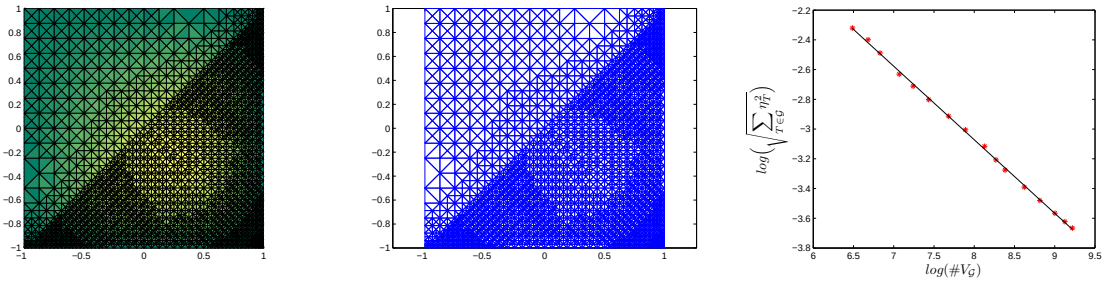

Figura 3: Resultados para la fuente $f(x,y) = I_{x\geq y}(x,y)$ $(p \sim -0{,}47)$

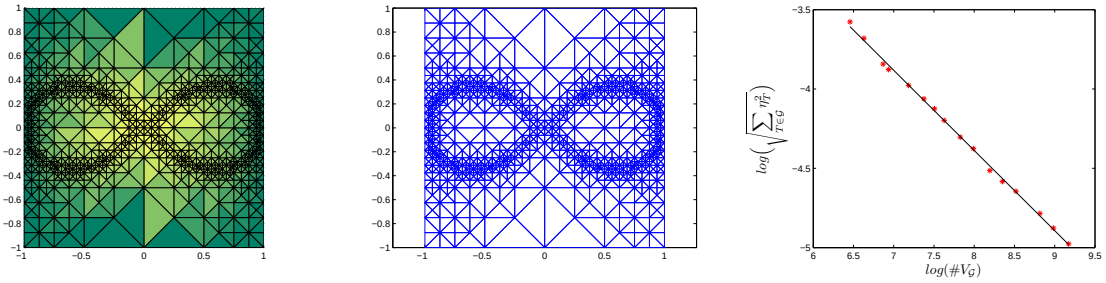

Figura 4: Resultados con fuente $f(x,y)$ soportada en un entorno de una lemniscata ($p \sim -0{,}5$)

En los ejemplos previos hemos probado con funciones suaves y ligeramente singulares pero siempre en $L^2(\Omega)$. Como Ω es convexo las soluciones esperadas pertenecen a $H^2(\Omega)$ en todos los casos. En los ejemplos restantes ponemos un dominio singular (con un ángulo mayor a π). Es bien sabido que en estos casos $u \notin H^2(\Omega)$ y típicamente deben introducirse pesos en la normas de Sobolev para controlar el comportamiento de la solución en un entorno del ángulo [5]. En particular tomamos un dominio en forma de $L = [-1,1]\times[-1,1]\setminus[-1,0]\times[0,1]$, muy utilizado para testear estimadores a posteriori. Este conjunto presenta un ángulo de $\frac{3}{2}\pi$ en el origen, y por ello en el origen presentará una singularidad. Para descartar la influencia de la fuente tomamos una muy regular $f(x,y) = 1$. Los resultados que pueden verse en la Figura 5.

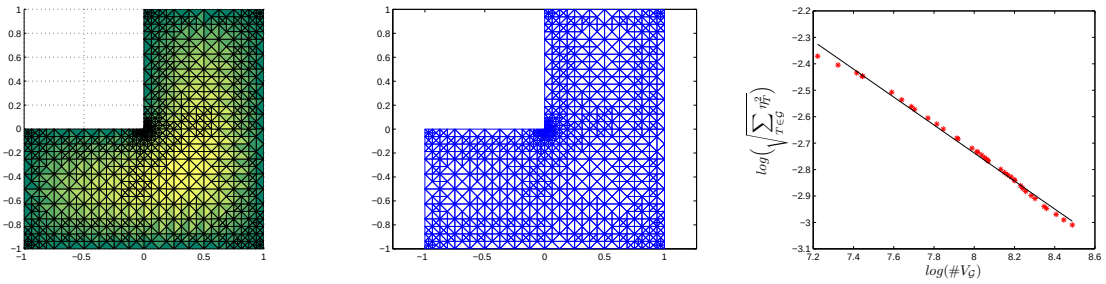

Figura 5: Resultado con f regular $(f(x,y) = 1)$ en un dominio singular, $(p \sim -0{,}55)$.

Notemos que hay una concentración de refinamientos en torno del origen en donde se localiza el ángulo problemático.

Finalmente agregamos en este mismo escenario una función singular

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - y \geq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Observamos en la Figura 6 los resultados. Notemos que sigue habiendo una importante concen-

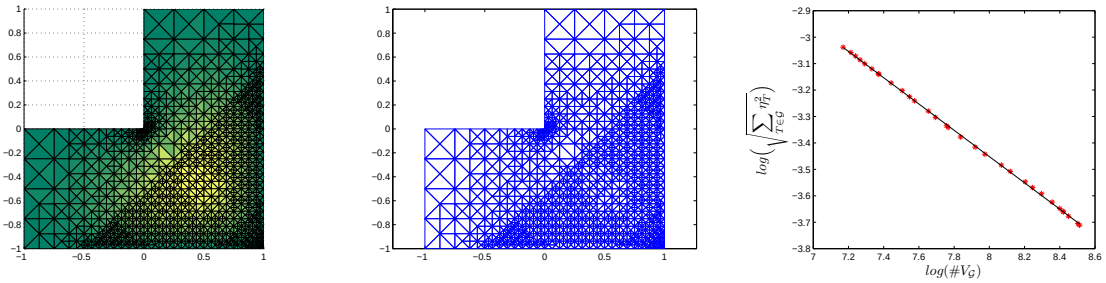

Figura 6: Resultados con fuente $f(x,y) = I_{x \geq y + \frac{1}{2}}(x,y)$ en un dominio singular.

tración de refinamientos en un entorno del origen, y la malla detecta la singularidad debida a la variación de la fuente.

Finalmente utilizamos un ejemplo con solución conocida y calculamos los errores

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)},$$

sobre cada malla generada para compararlos con los valores de los estimadores. Para ello tomamos $u(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$,que se anula en el borde del cuadrado $[-1;1]^2$, y calculamos su Laplaciano explícitamente utilizándolo como fuente.

La comparación puede verse en la Figura 7. donde podemos observar que tanto el error real como el estimador presentan un decaimiento idéntico.

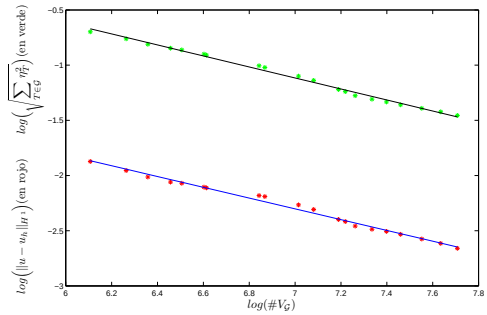

Figura 7: Evolución del estimador global (en verde) y del error real (en rojo).

Bibliografía

[1] I. Babŭska, W. Rheinboldt, Error estimates for adaptive finite elements computations, SIAM J. Numer. Anal. 15 (1978), 736-754.

[2] D. Boffi, L. Demkowickz, R. Durán, R.S. Falk, *Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions and Applications*, Lecture Notes in Mathematics (C.I.M.E. Summer School), 2008 Springer.

[3] P. Clément. *Approximation by finite element functions using local regularization* ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Volume 9 (2), pag. 77-84, 1975.

[4] W. Dörfler. *A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation.* SIAM J. Numer. Anal., 33(3), 11061124, 1996.

[5] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, 2011.

[6] P.Morín, K.Siebert, A. Veeser. *A basic convergence result for conforming adaptive finite elements.* Math. Models Methods Appl. Sci. 18, 707 (2008).

[7] R. Verfürth *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques.*Wiley-Teubner series, advances in numerical mathematics, 1996.

[8] W.F. Mitchell. *Unified Multilevel Adaptive Finite Element Methods for Elliptic Problems.* PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1988

[9] E. Bänsch. *Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions.*,IMPACT of Computing Science an Engineering, Volume 3, Issue 3, September 1991, Pages 181-191