



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Análisis Asintótico de la Ecuación de Liénard.

Adrián Omar Alvarez

Director: Diego Rial

Martes 4 de junio de 2013

Agradecimientos: A mi Zule, a Paula, Facu y Eva. Desde ya a Tico su sabiduría y su infinita paciencia.

Al hermoso grupo de estudio que supimos generar en la camada del 2001, que han aceptado a este jovato, al que no le queda otra que trabajar y sin ellos hubiera sido imposible llegar a esta instancia.

A mis profes sensibles, con conciencia social verdadera, esos que dan una mano al que tienen al lado y no se amparan en utopías para justificar su elitismo.

A mis compas y jefes del CBC pues si no me hubieran aguantado jamás hubiera accedido a estos maravillosos conocimientos y en cambio estaría aun atendiendo un Kiosco.

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo se estudian los casos límite de los sistemas bidimensionales continuos caracterizados por la ecuación de Liénard 1.2, revisando algunos resultados de la teoría de sistemas dinámicos como el teorema de Poincaré Bendixon para probar una serie de lemas necesarios para el trabajo en cuestión, así mismo estudiando específicamente la ecuación de Liénard donde pudimos probar otros lemas útiles para el mismo fin.

Estas herramientas en conjunto nos permiten hacer algunas generalizaciones necesarias, con las que obtenemos un cúmulo de útiles resultados, que nos permiten poder tratar los casos límites de estos sistemas, que son el objeto de este estudio.

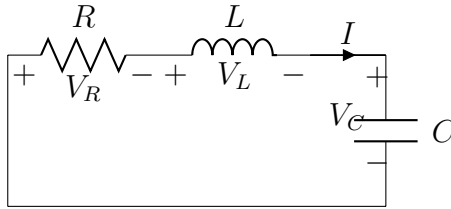
En particular nuestro trabajo se facilitó por el uso de algunas construcciones particulares basadas en los resultados antes mencionados, estas permiten establecer resultados valiosos como la cantidad exacta de las órbitas que estas ecuaciones establecen, en base a la función que participe en el sistema, además de proponer algoritmos sencillos para estimar los correspondientes períodos.

. Las soluciones de estos sistemas poseen un comportamiento dinámico nada sencillo, el análisis de las trayectorias que se establecen está lejos de ser trivial, por esta razón en un principio revisamos la aplicación de las técnicas generales de la dinámica diferenciable. Como en particular estudiamos los casos límites, se hizo necesario el uso de técnicas específicas según sea el caso, como el uso de las *transformadas de Abel* 4.2 para el caso tangente y el ensamble de la construcción que definimos como *tubos contenedores* 5.4 para el caso rígido. Estas herramientas permiten describir estos comportamientos dinámicos particulares, para lo cual hubo que probar algunos lemas específicos que nos permitieron afirmar varios resultados interesantes, tal es así que vienen con el valor agregado de resultar útiles en un sentido práctico concreto para su posterior aplicación en las situaciones problemáticas de la física o la biología modeladas por esta clase de sistemas.

1.1. La ecuación de Van der Pol

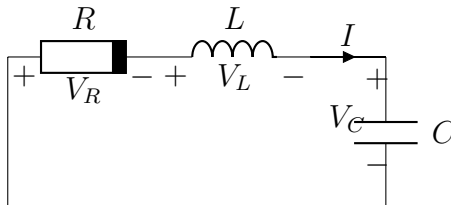
La ecuación de Van der Pol tiene una larga historia en la física y biología. Por ejemplo, en biología, Fitzhugh y Nagumo ([7], [14]) aplicaron la ecuación a un campo bidimensional en el modelo homónimo de "Fitzhugh Nagumo", para describir el potencial de acción de las neuronas a partir de la variaciones de potenciales de iones de potasio y sodio: K^+ y Na^+ , en las neuronas, las mismas representadas por bucles denominados de realimentación.

Es común en el campo de la ingeniería y de la física, que este tipo de sistemas modelen circuitos eléctricos, en Gonorovski [8] puede profundizarse el tema desde el punto de vista de estas aplicaciones. En una versión simple aparece el oscilador de Van der Pol como un problema de interés a partir de la siguiente situación.



Consideramos el circuito RLC serie con una resistencia constante, de este modo se impone una función lineal al sistema, siendo este caso un tema de estudio básico en las carreras de grado de física e ingeniería, basta un trivial análisis para concluir que la resistencia consume cualquier excitación que se le provea, incluso la que se almacene en forma de corriente en la bobina y de tensión el condensador, cuando sucesivamente la bobina se descargue cargando al condensador y viceversa uno en el otro, la resistencia atenúa la respuesta en cada ciclo. Para entender la matemática del modelo basta resolver el sistema que surge en este caso, donde las soluciones son las inmediatas del oscilador amortiguado que corroboran el análisis intuitivo, la respuesta está regida por una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya solución tiene una amplitud dominada por una exponencial negativa que atenúa inmediatamente la respuesta. En un ejercicio experimental inmediato fácilmente se puede medir lo que anteriormente intuimos y que calculamos a groso modo en base al modelo, que para este caso el comportamiento del circuito posee un sumidero en el origen.

En línea con el anterior pensamiento, pensemos la situación con un resistor no lineal es decir: V_R/I no es constante, mas adelante veremos con especial interés el caso polinómico. Usando que $V_L = L dI/dt$, $I = C dV_C/dt$ vemos que



la evolución temporal de la corriente eléctrica está dada por la ecuación:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{dV_R(I)}{dt} + \frac{1}{C} I = 0.$$

Reemplazando $t \rightarrow \sqrt{LC}t$, $x \rightarrow I$ si $y = dx/dt$, $f(x) = \sqrt{C/L}V'_R(x)$, la ecuación anterior se transforma en el sistema donde estudiaremos su diagrama de fases:

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - f(x)y.$$

Claramente el origen es el único punto de equilibrio del sistema, si asumimos que la conductancia diferencial f es positiva entonces será estable. Más aún, cualquier orbita del sistema converge asintóticamente al origen. Pero si $f(0) < 0$, entonces el origen es un repulsor.

El sistema (1.1) con: $f(x) = x^2 - 1$ se conoce como ecuación de Van der Pol y fue propuesta en [19] (ver [8], pag. 392). El oscilador de van der Pol fue descrito por el ingeniero y físico Balthasar Van der Pol mientras trabajaba en Philips. Van der Pol encontró oscilaciones estables, que llamó oscilaciones de relajación, conocidas en la actualidad como ciclos límite, en circuitos que usaban válvulas de vacío. Cuando esos circuitos se hacen funcionar cerca del ciclo límite entran en acoplamiento y la señal entra en fase con la corriente. Van der Pol y su colega, Van der Mark observan que para determinadas frecuencias aparecía un ruido irregular, siempre cerca de las frecuencias de acoplamiento, se dice que estas experiencias fueron las primeras observaciones empíricas de la teoría del caos, para nuestro caso nos interesan las importantes definiciones surgidas en estas observaciones, las órbitas estables o atractoras también llamadas sumideros y las inestables o repulsoras, las cuales según estos experimentos se concatenan alternadamente, las mismas se establecieron para los sistemas dinámicos en general.

Existe una forma alternativa de escribir el sistema (1.1) conocida como ecuación de Liénard ([11]). Dado que F sea impar y una primitiva de f , vale:

$$dF(x)/dt = f(x)y$$

reemplazando $y \rightarrow y + F(x)$ obtenemos:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Se sabe que la ecuación de Van der Pol, o equivalentemente (1.2) con:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

tiene un único ciclo límite (órbita periódica atractora). En un caso general, es posible ver que el número de ciclos es finito. Lins, de Melo y Pugh ([12]) encontraron ejemplos de funciones polinomiales F de grado $d = 2k + 1$ tales que el sistema (1.2) posee

k ciclos límites, a partir de la técnica desarrollada en el artículo de Sanjuan [17] a partir de la teoría de Melnikov, que probamos válida para el caso tangente en el corolario 4.1. Melo y Pugh conjeturaron que esta es una cota superior, pero en [6] se presentan contraejemplos. Los autores prueban la existencia de un polinomio de grado 7 con 4 ciclos límite. Sin embargo, aunque podrían existir cotas para el número de ciclos límites que tengan relación lineal con el grado de F , no se encontró hasta la fecha ninguna cota de la forma $k \leq \text{gr}(F)^\alpha$. En [13] Lloyd y Linch consideran el problema de Liénard generalizado $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ con f y g polinomios. Muestran una cota inferior de $K(n, m)$ definido como el número máximo de ciclos límites para $\text{gr}(f) = n$ y $\text{gr}(g) = m$. En algunos casos $K(n, m)$ ha sido calculado:

$$\begin{aligned} K(2, 1) &= 1 && (\text{ver [12]}), \\ K(2, 1) &= 1 && (\text{ver [2]}), \\ K(3, 1) &= 1 && (\text{ver [6] y [4]}), \\ K(2, 2) &= 1 && (\text{ver [5]}). \end{aligned}$$

Esto es un caso particular del decimosexto problema de Hilbert, donde se plantea la acotación del número de ciclos límites de un campo polinomial en el plano:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

El problema se puede enunciar de la siguiente forma: ¿existe una cota para el número k de ciclos límites del sistema (1.3) de la forma $k \leq d^\alpha$, con d el máximo de los grados de los polinomios P y Q y α una constante universal?. En [3], Dulac afirma que el problema (1.3) siempre tiene un número finito de ciclos límites. En [16], Petrovskii y Landis dieron una respuesta positiva, pero Shi ([18]) encontró un contraejemplo para la cota obtenida en el caso $d = 2$. Más tarde, Ilyashenko ([9]) descubrió un error en el trabajo de Dulac, pero demostró el resultado sin dar cotas ([10]). En [1], los autores consideran problemas (1.3) que sean perturbaciones pequeñas de un sistema hamiltoniano polinomial. Usando integrales abelianas, obtienen la cota $K(n, n) = 2^{2^n}$ para $n \leq 60$. Para (1.2), las cotas que se obtienen son concordantes con la conjetura de Lins, de Melo y Pugh (ver capítulo 4).

1.2. Estudio a Realizar

En el presente trabajo se pretende analizar los sistemas que se establecen con las antes mencionadas ecuaciones de segundo orden, para ello comenzamos en el Capítulo 2, revisando la teoría de Sistemas Dinámicos, las definiciones de ciclos límite en las órbitas que se establecen y el Teorema de Poincare Bendixon, de donde obtenemos la proposición 1.1, valiosa para usarla luego en el caso rígido.

En el Capítulo 3 se desarrolla un análisis del caso de la ecuación de Liénard, pero a diferencia de los análisis usuales, en los cuales entre otras suposiciones se toma que: $F(x) \rightarrow \infty$ con $x \rightarrow \infty$, para probar la existencia de órbitas periódicas, aquí se va a usar que si se verifica: $\liminf_{x \rightarrow +\infty} F(x) > 0$, entonces existen órbitas periódicas, que las

mismas son una cantidad finita para los casos de polinómios impares con derivada negativa en el origen y que a partir de que la función se hace monótona dejan de haber tales órbitas.

En los Capítulos 4 y 5 proponemos la siguiente forma del problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \lambda F(x) \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

De este modo nos permite analizar casos límite:

- **Problema Tangente**, $0 < \lambda \ll 1$, donde usando el Método de Melnikov llegamos al teorema de Perko²⁴ que usamos para probar un lema que nos permite encontrar el número de orbitas periódicas del sistema en base a la transformada de Abel de la F , aquí se pone en evidencia que los ciclos límite se ajustan a círculos concéntricos de acuerdo a la polinómica que se aplique al sistema.

También se propone un ejemplo numérico donde se calculan los ciclos límite, para luego en términos de coeficientes de Fourier, calcular el apartamiento armónico (THD) de la solución, tomando la proyección que nuestra solución y midiendo la norma a la diferencia con soluciones circulares se observa que a valores casi nulos del parámetro estas proyecciones son similares a los círculos y sus períodos tienden a 2π , con lo cual nos deja como ganancia adicional un cálculo práctico para cada caso con importante precisión.

-**Problema Rígido**, $\lambda \gg 1$, donde proponemos una construcción topológica que denominamos Tubo Contenedor³⁴, la que nos permite hacer un análisis del problema según la topología que imponga la polinómica usada en el sistema siempre que cumpla con las condiciones pedidas. Estos resultados nos permiten probar combinatoriamente un lema³⁶ para dar la cota de los k ciclos límites y cuanto mas al límite se lleve el sistema mejor se ajustan las órbitas a la forma de pseudo paralelogramo que observamos a partir de varios ejemplos numéricos.

Como consecuencia adicional a partir de cada topología podemos proponer un algoritmo sencillo para estimar los períodos de cada órbita, si bien no hay una demostración rigurosa se puede hacer un sencillo análisis para ver que los tramos horizontales casi rectos aparecen necesariamente por el gran valor de parámetro y por la misma razón en las inmediaciones de la polinómica se ajustan a ella.

En un análisis intuitivo se puede observar que en los entornos de los puntos críticos el sistema se comporta como una ecuación de segundo orden sin término lineal con lo cual la solución resulta una trigonométrica que muestra que la demora se da en los tramos con curvatura, en cambio en los tramos rectos la solución resulta en armónicas amortiguadas dependiendo del parámetro de potencia cuadrada negativa, con lo cual damos una primera explicación de lo que la evidencia numérica nos permite observar. En definitiva bastaría con aplicar el algoritmo a cada tubo que surja por la topología que el problema nos proponga ya que en los tramos horizontales el tiempo cae asintóticamente con el cuadrado del parámetro.

-Consecuencias del trabajo

Por supuesto que quedan las pruebas mencionadas para trabajos posteriores, de todos modos dadas las construcciones teóricas que utilizamos nos han permitido probar cotas claras a las conjeturas propuestas en estos casos, las cuales cuentan con un alto grado de precisión, como evidencia la contundente prueba numérica.

Como consecuencia adicional, obtenemos que estos resultados en los casos límite, dan algoritmos útiles para aplicaciones concretas del campo de la biología, la ingeniería y la física, permitiendo anticipar para una excitación inicial, según sea la perturbación polinómica de la carga del sistema, la cantidad de ciclos límite y los períodos correspondientes a las respectivas oscilaciones en que termina convergiendo la respuesta a la excitación dada.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos

2.1. Flujos

Consideramos el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(2.1a) \quad \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)),$$

$$(2.1b) \quad \gamma(0) = q_0,$$

donde $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo localmente Lipschitz. Se sabe que existe una única solución $\gamma(t)$ de (2.1) definida en un intervalo (t_-, t_+) , que llamaremos órbita de q_0 . Vamos a suponer de ahora en más que para todo $q_0 \in \mathbb{R}^n$, la órbita existe para todo t . Definimos la aplicación $\Phi_X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, llamado flujo de X , como $\Phi_X(t, q_0) = \gamma(t)$. Vale que Φ_X es continuamente diferenciable en t y $\Phi_X^t = \Phi_X(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo localmente Lipschitz que verifica:

$$\text{I. } \Phi_X^0 = \text{id},$$

$$\text{II. } \Phi_X^t \circ \Phi_X^s = \Phi_X^{t+s},$$

es decir, $t \mapsto \Phi_X^t$ representa un grupo uniparamétrico de homeomorfismos de \mathbb{R}^n . Observemos que la regularidad de Φ_X^t es igual que la de X , es decir si $X \in C^\beta$, con $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta = \infty$ o $\beta = \omega$, entonces $\Phi_X^t \in C^\beta$.

2.2. Singularidades y órbitas periódicas

Un punto $q \in \mathbb{R}^n$ es una singularidad de X si $X(q) = 0$, en otro caso decimos que q es regular. Es fácil ver que q es singular si y sólo si $\Phi_X^t(q) = q$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Una órbita γ es periódica si no es singular y existe $T > 0$ tal que $\gamma(t+T) = \gamma(t)$, el mínimo valor de $T > 0$ es el período de la órbita.

Si q_0 es un punto singular de X definimos:

$$W_s(q_0) = \{q \in \mathbb{R}^n : \Phi(t, q) \rightarrow q_0, \text{ si } t \rightarrow +\infty\},$$

$$W_u(q_0) = \{q \in \mathbb{R}^n : \Phi(t, q) \rightarrow q_0, \text{ si } t \rightarrow -\infty\},$$

claramente $W_s(q_0), W_u(q_0)$ son conexos, invariantes por el flujo y verifican $q_0 \in W_s(q_0) \cap W_u(q_0)$. Decimos que q_0 es atractor (repulsor) si existe un entorno U de q_0 tal que $U \subset W_s(q_0) (W_u(q_0))$.

2.3. Conjuntos α -límite y ω -límite

Dado $q_0 \in \mathbb{R}^n$ en las condiciones antes mencionadas, definimos los conjuntos α -límite y ω -límite como

$$\begin{aligned}\alpha(q_0) &= \{q \in \mathbb{R}^n : \text{existen } t_k \rightarrow -\infty \text{ tales que } \gamma(t_k) \rightarrow q\}, \\ \omega(q_0) &= \{q \in \mathbb{R}^n : \text{existen } t_k \rightarrow +\infty \text{ tales que } \gamma(t_k) \rightarrow q\}.\end{aligned}$$

Observemos que si $q_1 = \gamma(t_1)$, entonces $\alpha(q_1) = \alpha(q_0)$ y $\omega(q_1) = \omega(q_0)$. Por lo tanto podemos hablar del α -límite y ω -límite de una órbita $\{\gamma(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Proposición 2.1. Sea $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo C^β , Ω abierto de \mathbb{R}^n , si $\{\gamma(t)\}_{t \geq 0} \subset K$ órbita del campo X , donde K es un conjunto compacto de Ω , entonces

- I. $\omega(q_0)$ es un conjunto no vacío, compacto y conexo.
- II. $\omega(q_0)$ es invariante por el flujo de la ecuación.

Demostración. Vemos la parte (i), primero $\omega(q_0) \neq \emptyset$ pues dada una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ por hipótesis vale que $\{\gamma(t_n)\} \subset K$ con lo cual:

$$\exists \{\gamma(t_{n_k})\} \subset K / \gamma(t_{n_k}) \rightarrow q \in K \text{ con } k \rightarrow \infty.$$

Para la compacidad, como $\omega(q_0) \subset \overline{\{\gamma(t)\}} \subset K$, basta ver que $\omega(q_0)$ es cerrado. Sea $q_n \rightarrow q$ con $q_n \in \omega(q_0)$, con lo cual para cada uno de estos $\exists t_{n_m} \rightarrow \infty$ con $m \rightarrow \infty$ que $\gamma(t_{n_m}) \rightarrow q_n$. Armando una sucesión t_n eligiendo un término de cada subsucesión, del siguiente modo: $t_n = t_{n_m} > n$ y tal que $d(\gamma(t_n), q_n) < \frac{1}{n}$. Luego aplicando la desigualdad triangular:

$$d(\gamma(t_n), q) < d(\gamma(t_n), q_n) + d(q_n, q) < \frac{1}{n}. \text{ Con lo cual } q \in \omega(q_0).$$

Para ver la conexidad pensemos que: $\omega(q_0) = A \cup B$ cerrados disjuntos y no vacíos, mirando en A como es un cerrado no vacío hay una $t_n^A \rightarrow \infty$ con $n \rightarrow \infty$ y $\gamma(t_n^A) \rightarrow a \in A$ (análogamente hay otra para B).

Sea $d = d(A, B) > 0$, se puede armar una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ con $n \rightarrow \infty$ de modo que para todo n impar valga $d(\gamma(t_n), A) < \frac{d}{2} \wedge d(\gamma(t_{n+1}), A) > \frac{d}{2}$. Usando el Teorema de los Valores Intermedios del Análisis Básico dada la continuidad de la distancia en función de t definida como: $d(t) = d(\gamma(t), A)$ vale para todo n impar, $\exists t_n^*/t_n < t_n^* < t_{n+1}$, de modo que vale que:

$$d(\gamma(t_n^*), A) = \frac{d}{2}.$$

El conjunto: $\{\gamma(t_n^*)\}$ está contenido en el compacto $\{x \in \Omega / d(x, A) = \frac{d}{2}\}$, con lo cual tendrá una subsucesión convergente $\gamma(t_{n_j}^*) \rightarrow p^*$ con $j \rightarrow \infty$.

Pero $p^* \notin A$ por construcción y por lo anterior $p^* \in \omega(q_0)$, además como: $d(A, p^*) + d(p^*, B) \geq d$ queda fuera de B también, con lo cual llegamos a una contradicción. Para la parte (ii) sea un $q \in \omega(q_0)$ y dada ψ una curva integral de X que pase por q , usando la continuidad de $\gamma(t, q_0)$.

Sea: $q^* = \psi(t^*) = \gamma(t^*, q) = \gamma\left(t^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma(t_n, q_0)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma(t^*, \gamma(t_n, q_0)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma(t^* + t_n, q_0)$, con lo cual $q^* \in \omega(q_0)$.

□

2.4. Teorema de Poincaré Bendixson

Teorema 2.1 (Poincaré–Bendixson). *Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo localmente Lipschitz con finitas singularidades y $\gamma(t)$ una solución de (2.1) tal que $\{\gamma(t)\}_{t \geq 0} \subset K$, donde K es un conjunto compacto de \mathbb{R}^2 , se verifica:*

1. *Si $\omega(q_0)$ no contiene puntos singulares, entonces $\omega(q_0)$ es una órbita periódica.*
2. *Si $\omega(q_0)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(q_0)$ es un punto singular.*
3. *Si $\omega(q_0)$ contiene puntos singulares y regulares, entonces existen singularidades de X , $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ y órbitas $\gamma_1(t), \dots, \gamma_k(t)$ tales que:*

$$\omega(q_0) = \bigcup_{1 \leq j \leq k} \{\mathbf{z}_j\} \cup \{\gamma_j(t) : t \in \mathbb{R}\},$$

$$\text{con } \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_j(t) = \mathbf{z}_j \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_j(t) = \mathbf{z}_{j+1} \text{ } (\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_1).$$

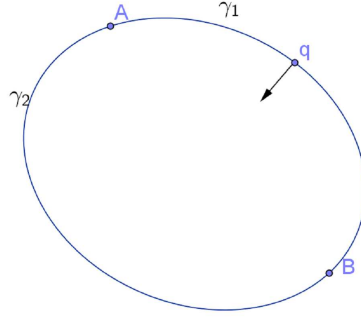
Corolario 2.1. *Si $X \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tiene una única singularidad $\{\mathbf{z}\}$ que es un atractor o un repulsor y $\{\gamma(t)\}$ verifica las condiciones del teorema (2.1), entonces $\omega(q_0)$ es una órbita periódica o un punto singular.*

Corolario 2.2. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $X \in C^1(\mathbb{R}^2)$, si $\{\gamma(t)\}$ es una curva de Jordan, órbita cerrada de X tal que Δ_γ sea la región acotada correspondiente, de modo que $\mathring{\Delta}_\gamma \subset D$, entonces existe un punto z singular de X tal que $z \in \mathring{\Delta}_\gamma$.*

Proposición 2.2. *Sea $D \in \mathbb{R}^2$ compacto cuya $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$ con γ_i segmentos curvilíneos suaves a trozos. Sea $X \in C^k(\mathbb{R}^2)$, para $q \in D$ con $X(q) \neq 0$ de modo que:*

- $X(q) \cdot \eta_{ext}(q) < 0 \quad q \in \gamma_1$
- $X(q) \cdot \eta_{ext}(q) > 0 \quad q \in \gamma_2$

Entonces para $q \in \gamma_1 \quad / \quad \exists \quad \check{t} = t(q) \in (0, +\infty) \quad / \quad q(\check{t}) \in \gamma_2$



Demostración. Sea $q_0 \in \gamma_1$, si $\forall t > 0$, $\{\gamma(t)\} \subset D$, como $X(q(t)) \neq 0$ resulta en las condición 1 del teorema (2.1), entonces $\gamma(t)$ tiene una órbita periódica. Pero $\{\gamma(t)\}$ queda en las condiciones del corolario (2.2), por lo tanto \exists un punto singular $z \in \Delta_\gamma$, quedando una contradicción.

Con lo cual $\exists \check{t} = t(q_0) \in (0, +\infty)$ / $q(\check{t}) \in \partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$ de modo que: $X(q(\check{t})) \cdot \eta_{ext}(q(\check{t})) > 0$, por lo tanto por hipótesis $q(\check{t}) \in \gamma_2$, lo que prueba la proposición. \square

Capítulo 3

Ecuación de Liénard

3.1. Introducción

El problema (1.2) se puede escribir como (2.1) con

$$X(x, y) = (y - F(x), -x).$$

Vemos que $(0, 0)$ es el único punto singular y que $X \in C^k(\mathbb{R}^2)$ si y sólo si $F \in C^k(\mathbb{R})$. Vamos a suponer las siguientes condiciones sobre F

(I) Existe $c > 0$ tal que $\min_{x \geq 0} F(x) \geq -c$.

(II) $F(-x) = -F(x)$.

Usando (II) podemos probar que si $\gamma(t)$ es la solución, entonces $-\gamma(t)$ es también solución. Vamos a probar que todas las soluciones están globalmente definidas para $t > 0$.

Proposición 3.1. *Para toda solución $\gamma(t)$ del sistema (1.2), se verifica $|\gamma(t)| \leq |\gamma(0)| + ct$, $t \geq 0$.*

Demostración. Basta ver el caso en que $\gamma(0) \neq 0$. Si $\rho(t) = |\gamma(t)|$, vale $\dot{\rho} = -\rho^{-1}xF(x)$. Si $x \geq 0$ entonces $-F(x) \leq c$ y por lo tanto $-\rho^{-1}xF(x) \leq c$. Usando la imparidad de F , vemos que $-\rho^{-1}xF(x) \leq c$ para $x \in \mathbb{R}$, integrando $\dot{\rho}$ obtenemos $\rho(t) \leq \rho(0) + ct$. En particular, $T^* = +\infty$. \square

3.2. Aplicación de Poincaré

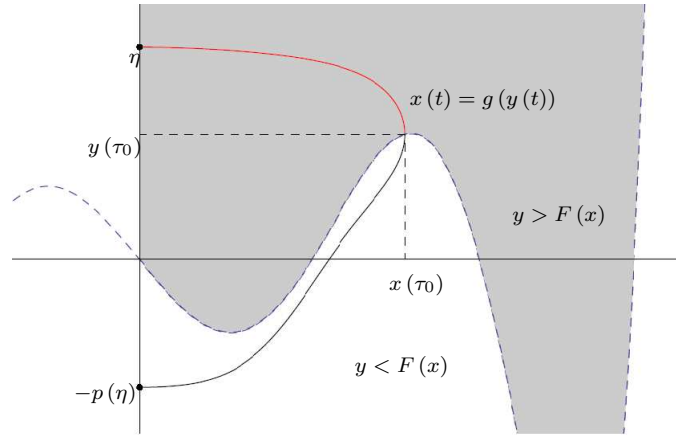
Si el origen fuera un atractor, la dinámica podría ser trivial: para todo $q_0 \in \mathbb{R}^2$, $\omega(q_0) = (0, 0)$. Vamos a considerar la condición adicional sobre F

(III) Existe $x_1 > 0$ tal que $F(x) < 0$ en el intervalo $(0, x_1)$.

Proposición 3.2. *Dado $\eta > 0$, existen $0 < \tau_0 < \tau$ tal que si $(x(t), y(t))$ es la solución con datos iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = \eta$, entonces:*

- $x(t) > 0, y(t) > F(x(t)),$ si $0 < t < \tau_0,$
- $y(\tau_0) = F(x(\tau_0)),$
- $x(t) > 0, y(t) < F(x(t)),$ si $\tau_0 < t < \tau,$
- $(x(\tau), y(\tau)) = (0, -p(\eta)),$ con $p(\eta) > 0.$

Además existe $g : (-p(\eta), \eta) \rightarrow \mathbb{R}_+$ derivable tal que: $g(y(t)) = x(t)$ para $0 < t < \tau,$ $g'(y) > 0$ si $-p(y) < \eta < y(\tau_0)$ y $g'(y) < 0$ si $y(\tau_0) < y < \eta.$



Demostración. Si $\tau_0 = \sup \{t > 0 : x(s) > 0, y(s) > F(x(s)), s \in (0, t)\},$ vamos a ver que $\tau_0 < \infty.$ Siendo $(x(t), y(t))$ una solución de (1.2), vale que $x(t)$ es creciente e $y(t)$ es decreciente en el intervalo $(0, \tau_0).$ Sea $t_1 \in (0, \tau_0),$ podemos mostrar que $y(t) \leq y(t_1) - x(t_1)(t - t_1),$ como $F(x(t)) > -c,$ se verifica $\tau_0 < \infty$ y $F(x(\tau_0)) = y(\tau_0).$

Si tomamos $\tau = \sup \{t > \tau_0 : x(s) > 0, y(s) < F(x(s)), s \in (\tau_0, t)\},$ vemos que $x(t), y(t)$ son decrecientes en $(\tau_0, \tau).$ Si $(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{t \uparrow \tau} (x(t), y(t)),$ claramente $\bar{x} \geq 0, \bar{y} \leq F(\bar{x}).$

Supongamos que $\tau = +\infty,$ si se verifica $F(\bar{x}) - \bar{y} > \delta > 0,$ entonces existe $t_1 > \tau_0$ tal que $F(x(t)) - y(t) > \delta$ para $t > t_1,$ por lo tanto $x(t) \leq x(t_1) - \delta(t - t_1),$ lo que contradice $\bar{x} \geq 0.$ Si $\bar{y} = F(\bar{x}),$ como $(x(t), y(t)) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}),$ el límite tiene que ser una singularidad del campo y por lo tanto $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0).$ En ese caso existe $t > \tau_0$ tal que $x(t) < x_1$ y por lo tanto $y(t) < F(x(t)) < 0,$ siendo $y(t)$ decreciente, contradice $\bar{y} = 0.$ Concluimos que $\tau < +\infty$ y argumentos similares a los anteriores y la unicidad muestran que $\bar{x} = 0, \bar{y} < 0.$

Si tomamos $p(\eta) = -\bar{y} > 0,$ como $y(t)$ es decreciente en el intervalo $(0, \tau),$ podemos definir $g(y) = x(t(y))$ en el intervalo $(-p(\eta), \eta).$

□

Algunas ideas

La aplicación $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ se llama aplicación de Poincaré o de primer retorno. Usando la unicidad de las soluciones vemos que p es monótona creciente. La aplicación de Poincaré permite estudiar las órbitas periódicas, si $\eta > 0$ es un punto fijo de $p,$ usando la simetría respecto al origen de las órbitas, vemos que la solución de (1.2)

con dato inicial $(0, \eta)$ es periódica de período 2τ . Las funciones $\tau, p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ son tan regulares como F . En efecto, si denominamos $x(t, \eta)$ a la componente x de la solución, la función τ está definida implícitamente por $x(\tau(\eta), \eta) = 0$ y vale $p(\eta) = -y(\tau(\eta), \eta)$. Observemos que

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\tau(\eta), \eta) = y(\tau(\eta), \eta) < 0,$$

lo que implica τ (y por lo tanto p) está bien definida y es tan regular como x . En los siguientes pasos vamos a considerar la siguiente función:

$$P(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Pues usando (1.2) sirve para establecer :

$$\frac{dP(x, y)}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = x(y - F(x)) + yx = -xF(x)$$

$$P(0, p(\eta)) - P(0, \eta) = -\frac{1}{2}(\eta^2 - p(\eta)^2)$$

3.3. Existencia de órbitas periódicas

La siguiente proposición nos da una estimación del desplazamiento, definido como $d(\eta) = p(\eta) - \eta$, en términos de integrales curvilíneas.

Proposición 3.3. *Se verifica*

$$\eta^2 - p(\eta)^2 = 2 \int_{-p(\eta)}^{\eta} F(g(y)) dy$$

Demostración. Aplicando el teorema de la divergencia en la región

$$D = \{(x, y) : -p(\eta) \leq y \leq \eta, 0 \leq x \leq g(y)\},$$

como $\operatorname{div} X = -F'$ y X es tangente al gráfico de g , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-p(\eta)}^{\eta} y dy &= - \oint_{\partial D} X \cdot dn = \int_D F'(x) dx dy \\ &= \int_{-p(\eta)}^{\eta} \int_0^{g(y)} F'(x) dx dy = \int_{-p(\eta)}^{\eta} F(g(y)) dy, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado. □

Proposición 3.4. *Si F verifica (I), (II) y (III), entonces existe $\eta_* > 0$ tal que $p(\eta) > \eta$ para $\eta \in (0, \eta_*)$.*

Demostración. Sea $x_* = \inf \{x > 0 : F(x) \geq 0\}$ y $(x(t), y(t))$ la solución de (1.2) con datos iniciales $x(0) = x_*$, $y(0) = 0$, definamos $\tau_0 > 0$ como:

$$\tau_0 = \sup \{t > 0 : x(s) > 0, s \in (-t, 0)\},$$

tenemos que $x(t), y(t)$ son decrecientes e $y(t) > 0 > F(x(t))$ en $(-\tau_0, 0)$. Sea $t_1 \in (-\tau_0, 0)$, para $-\tau_0 < t < t_1$ se verifica

$$x(t_1) - x(t) = \int_t^{t_1} (y(s) - F(x(s))) ds > y(t_1) \cdot (t_1 - t),$$

por lo tanto $\tau_0 < \infty$ y $x(-\tau_0) = 0$. Si tomamos $\eta_* = y(-\tau_0)$, vemos que la solución con dato inicial $(0, \eta_*)$ está dada por $(x(t - \tau_0), y(t - \tau_0))$ y verifica $x(t - \tau_0) \in (0, x_*)$ para $t \in (0, \tau)$. Entonces $g(y) < x_*$ si $y \in (-p(\eta), \eta)$ con $\eta < \eta_*$ y usando la proposición anterior, obtenemos

$$\eta^2 - p(\eta)^2 = 2 \int_{-p(\eta)}^{\eta} F(g(y)) dy < 0,$$

lo que prueba el enunciado. □

Vamos a ver que si se verifica

$$(IV) \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} F(x) > 0,$$

entonces existen órbitas periódicas. Observemos que esta condición, junto con la continuidad, implica (I). De ahora en más, supondremos que F verifica (II), (III) y (IV).

Lema 3.1. *Dadas las mismas condiciones de la propiedad 13, sean $x_0 > 0$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$, se define $M = \max_{0 \leq x \leq x_0} |F(x)|$ y*

$$(3.1) \quad \eta_0 = \max \{2M, 2\varepsilon^{-1/2}x_0\}.$$

Si $\eta, p(\eta) > \eta_0$, existen t_*, t^* con $0 < t_* < \tau_0 < t^* < \tau$ tales que

1. Para $t \in (0, t_*)$, $(x(t), y(t)) \in (0, x_0) \times ((1 - \varepsilon)\eta, \eta)$.
2. Para $t \in (t^*, \tau)$, $(x(t), y(t)) \in (0, x_0) \times (-p(\eta), -(1 - \varepsilon)p(\eta))$.
3. Si $t \in (t_*, t^*)$, $x(t) > x_0$.

Demostración. Si $t_* = \sup \{t > 0 : x(s) \in (0, x_0) \text{ si } s \in (0, t)\}$, tenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \eta - \int_0^t x(s) ds \geq \eta - x_0 t, \\ x(t) &= \int_0^t (y(s) - F(x(s))) ds \\ &\geq (\eta - M)t - \frac{x_0}{2}t^2 \geq \frac{t}{2}(\eta - x_0 t). \end{aligned}$$

La función cuadrática $t(\eta - x_0 t)$ es creciente en el intervalo $(0, \eta/(2x_0))$, por lo tanto si $t_* > \varepsilon\eta/x_0$, entonces $x(\varepsilon\eta/x_0) \geq \varepsilon(1-\varepsilon)\eta^2/(2x_0) > x_0$, lo que contradice la definición de t_* , por lo tanto $t_* \leq \varepsilon\eta/x_0$ y vale $x(t_*) = x_0$. Usando la desigualdad obtenida para y , vemos que $y(t) \geq \eta - \varepsilon\eta$. Como se verifica $y(t) \geq (1-\varepsilon)\eta > M \geq F(x(t))$, vemos que $t_* < \tau_0$.

De forma similar tomamos $t^* = \inf \{t < \tau : x(s) \in (0, x_0) \text{ si } s \in (t, \tau)\}$ y se verifica

$$-p(\eta) = y(t) - \int_t^\tau x(s) ds \geq y(t) - x_0(\tau - t),$$

por lo tanto $y(t) \leq -p(\eta) + x_0(\tau - t)$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} 0 &= x(t) + \int_t^\tau (y(s) - F(x(s))) ds \\ &\leq x(t) - (p(\eta) - M)(\tau - t) + \frac{x_0}{2}(\tau - t)^2 \\ &\leq x(t) + \frac{\tau - t}{2}(x_0(\tau - t) - p(\eta)), \end{aligned}$$

lo que implica $t^* > \tau - \varepsilon p(\eta)/x_0$, $y(t) \leq -(1-\varepsilon)p(\eta) < -M \leq F(x(t))$, por lo tanto $t^* < \tau_0$. Siendo que $x(t)$ es creciente en (t_*, τ_0) , decreciente en (τ_0, t^*) y como $x(t_*) = x(t^*) = x_0$, se verifica la última afirmación. \square

Proposición 3.5. *Existe $\eta^* > 0$ tal que si $\eta \in (\eta^*, +\infty)$, entonces $p(\eta) < \eta$.*

Demostración. Sea $-c = \min_{x \geq 0} F(x) < 0$ y $x_0 > 0$ tal que $F(x) \geq d > 0$ si $x > x_0$. Dado $\varepsilon < \min \{1/2, d/(d+c)\}$, tomamos $\eta^* = \eta_0$ definido por (3.1). Si $\eta > \eta^* \geq p(\eta)$ vale el resultado. Supongamos $\eta, p(\eta) > \eta^*$, tenemos

$$\begin{aligned} \eta^2 - p(\eta)^2 &= \int_{-p(\eta)}^{-(1-\varepsilon)p(\eta)} F(g(y)) dy \\ &\quad + \int_{-(1-\varepsilon)p(\eta)}^{(1-\varepsilon)\eta} F(g(y)) dy + \int_{(1-\varepsilon)\eta}^\eta F(g(y)) dy \\ &\geq -c\varepsilon(\eta + p(\eta)) + \int_{-(1-\varepsilon)p(\eta)}^{(1-\varepsilon)\eta} F(g(y)) dy \end{aligned}$$

Si $y(t) \in (-(1-\varepsilon)p(\eta), (1-\varepsilon)\eta)$, $t \in (t_*, t^*)$ y $x(t) > x_0$. Por lo tanto $F(g(y)) > d$ y se verifica

$$\eta^2 - p(\eta)^2 \geq -c\varepsilon(\eta + p(\eta)) + d(1-\varepsilon)(\eta + p(\eta)) > 0,$$

lo que prueba el resultado. \square

Teorema 3.1 (Liénard). *Si F verifica (II), (IV) y (III), entonces el sistema (1.2) tiene al menos una solución periódica.*

Demostración. Sea η_*, η^* como en las proposiciones 3.5 y 3.4, la aplicación $p : [\eta_*, \eta^*] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es continua creciente y $p([\eta_*, \eta^*]) \subset [\eta_*, \eta^*]$, por lo tanto existe η punto fijo de p .

La solución de (1.2) con datos iniciales $x(0) = 0, y(0) = \eta$ es una órbita periódica. \square

Observemos que si F es una función analítica, p también resulta analítica en \mathbb{R}_+ y por lo tanto $p(\eta) - \eta$ es idénticamente nula o tiene ceros aislados, como $p(\eta) - \eta > 0$ para $\eta \in (0, \eta_*)$ (proposición 3.5), vemos que p tiene finitos puntos fijos y (1.2) tiene finitos ciclos límites.

Corolario 3.1. Si $F(x) = axQ(x^2)$ con $a > 0$, Q un polinomio mónico y $Q(0) < 0$, entonces el sistema (1.2) tiene finitos ciclos límites.

Demostración. Siendo que se verifican (II)–(III) ($\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$) y F es analítica obtenemos el resultado. \square

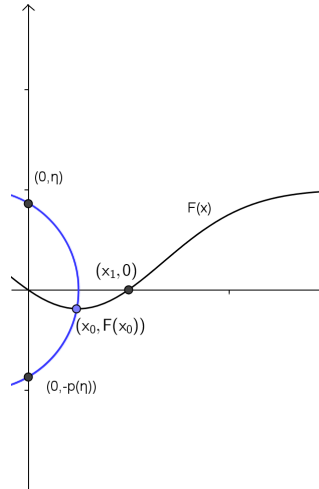
Proposición 3.6. Si F verifica (II), (IV), (III) y F en el intervalo $(x_1, +\infty)$ es monótona creciente, entonces la solución periódica es única.

Demostración. Para ver que la solución periódica es única, se trata de que la función $d(\eta) = p(\eta) - \eta$ tenga un único cero, apelando a la proposición (3.3) analizamos:

$$R(\eta) = \eta^2 - p(\eta)^2 = 2 \int_{-p(\eta)}^{\eta} F(g_{\eta}(y)) dy$$

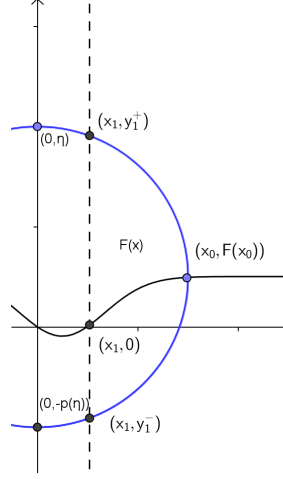
Estudiaremos los ceros de R pues es claro que sus conjuntos de positividad y de momotonía, resultan los mismos que los de $-d$.

Caso $x_0 < x_1$, puede pasar que las absisas de la órbita no lleguen al punto $(x_1, 0)$ siendo x_0 la absisa donde la solución corta a la F , ver figura:



Como $F < 0$ en $(0, x_1)$ vale que $2 \int_{-p(\eta)}^{\eta} F(g_{\eta}(y)) dy < 0$ con lo cual $p(\eta) > \eta$, de este modo $d(\eta) > 0$.

Caso $x_0 > x_1$, puede pasar que las absisas de la órbita superen al punto $(x_1, 0)$ ver figura:



Estudiando la integral en estas regiones, tomando que cada órbita depende de la ordenada de su punto de salida η .

$$R(\eta) = 2 \int_0^{x_1} \frac{-xF(x)}{g_\eta^{-1}(x) - F(x)} dx + 2 \int_{y_1^-}^{y_1^+} F(g_\eta(y)) dy + 2 \int_{x_1}^0 \frac{-xF(x)}{g_\eta^{-1}(x) - F(x)} dx$$

Para analizar el crecimiento de R analizaremos como crece cada integral de las anteriores.

En el caso de la integral definida en $(x_1, +\infty)$, vale que $F > 0$ y monótona creciente. Dado $\varepsilon > 0$ sucede que $x_{0\eta} < x_{0\eta+\varepsilon}$, con lo cual la $g_\eta(y) < g_{\eta+\varepsilon}(y)$ quedando que $F(g_\eta(y)) < F(g_{\eta+\varepsilon}(y))$, pero donde $g^{-1}(x) < F(x)$ va a suceder que $y_{1-\eta} > y_{1-\eta+\varepsilon}$ y viceversa en $g^{-1}(x) > F(x)$, por lo tanto vale:

$$\begin{aligned} & 2 \int_{y_{1-\eta}}^{y_{1^+ \eta}} F(g_\eta(y)) dy < \\ & < 2 \int_{y_{1-\eta+\varepsilon}}^{y_{1^+ \eta}} F(g_{\eta+\varepsilon}(y)) dy + 2 \int_{y_{1-\eta}}^{y_{1^+ \eta}} F(g_{\eta+\varepsilon}(y)) dy + 2 \int_{y_{1^+ \eta}}^{y_{1^+ \eta+\varepsilon}} F(g_{\eta+\varepsilon}(y)) dy \end{aligned}$$

Para las otras integrales definidas en el intervalo $(0, x_1)$, tenemos que como $F < 0$, en el numerador resulta que: $-xF(x) > 0$.

El denominador depende de la región, si vamos de $-p(\eta) \rightarrow y_{1-\eta}^-$ si integramos por el eje x los límites toman el sentido $0 \rightarrow x_1$, análogamente resulta idéntico para $-p(\eta + \varepsilon) \rightarrow y_{1-\eta+\varepsilon}^-$ respecto de $0 \rightarrow x_1$, quedando $g_\eta^{-1}(x) > g_{\eta+\varepsilon}^{-1}(x)$ con lo cual: $0 > g_\eta^{-1}(x) - F(x) > g_{\eta+\varepsilon}^{-1}(x) - F(x)$ por lo tanto:

$$2 \int_0^{x_1} \frac{-xF(x)}{g_\eta^{-1}(x) - F(x)} dx < 2 \int_0^{x_1} \frac{-xF(x)}{g_{\eta+\varepsilon}^{-1}(x) - F(x)} dx$$

Si vamos de $y_{1^+ \eta} \rightarrow \eta$ o por $y_{1^+ \eta+\varepsilon} \rightarrow \eta + \varepsilon$ en el eje x para ambas queda el sentido $x_1 \rightarrow 0$, quedando negativas las integrales, luego resulta que $g_\eta^{-1}(x) < g_{\eta+\varepsilon}^{-1}(x)$ con lo cual: $0 < g_\eta^{-1}(x) - F(x) < g_{\eta+\varepsilon}^{-1}(x) - F(x)$ por lo tanto:

$$2 \int_{x_1}^0 \frac{-xF(x)}{g_\eta^{-1}(x) - F(x)} dx < 2 \int_{x_1}^0 \frac{-xF(x)}{g_{\eta+\varepsilon}^{-1}(x) - F(x)} dx$$

Resultando R creciente a partir de x_1 . En conclusión, la función $d|_{(0,x_1)} > 0$ y en $(x_1, +\infty)$ monótona decreciente, de este modo por el teorema (3.1) queda probada la proposición.

□

Capítulo 4

Problema Tangente

4.1. Introducción

En este capítulo consideramos el problema perturbado con condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (0, \eta)$:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - \lambda F(x), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

donde F verifica las condiciones (II), (IV) y (III) del capítulo 3 y $0 < \lambda \ll 1$. Para $\lambda = 0$, (4.1) es un sistema hamiltoniano, $H(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, y las soluciones son: $\gamma(t) = \eta(\sin(t + \phi), \cos(t + \phi))$, es decir que todas las órbitas son periódicas con período $T = 2\pi$ ($\tau = \pi$) y la aplicación de Poincaré es la identidad ($p(\eta) = \eta$). Siendo que el flujo varía continuamente con el parámetro, para valores de λ pequeños tendremos $p(\eta, \lambda) \approx \eta$ y $\tau(\eta, \lambda) \approx \pi$. Si conociéramos los desarrollos asintóticos

$$\begin{aligned} \tau(\eta, \lambda) &= \pi + \lambda \tau_1(\eta) + O(\lambda^2), \\ p(\eta, \lambda) &= \eta + \lambda p_1(\eta) + O(\lambda^2), \end{aligned}$$

podríamos afirmar que las órbitas periódicas del problema perturbado pasan cerca de los puntos $(0, \eta)$ con $p_1(\eta) = 0$ y sus períodos son aproximadamente $T = 2\pi + 2\lambda \tau_1(\eta)$. Para hallar los desarrollos consideramos las ecuaciones que deben satisfacer las soluciones perturbadas

$$\gamma(t, \lambda) = \eta(\sin(t), \cos(t)) + \lambda \gamma_1(t).$$

4.2. Método de Melnikov

Consideramos el sistema forzado:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(t), \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

con datos iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = \eta$, la solución viene dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \eta \sin(t) - \int_0^t f(s) \cos(t-s) ds, \\ y(t) &= \eta \cos(t) + \int_0^t f(s) \sin(t-s) ds. \end{aligned}$$

Tomando $f(t) = \lambda F(x(t))$, podemos escribir la solución de (4.1) de la forma $x(t) = \eta \sin t - \lambda x_1(t)$ y $y(t) = \eta \cos t + \lambda y_1(t)$, donde

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t F(x(s)) \cos(t-s) ds = \int_0^t F(\eta \sin(s) - \lambda x_1(s)) \cos(t-s) ds, \\ y_1(t) &= \int_0^t F(x(s)) \sin(t-s) ds = \int_0^t F(\eta \sin(s) - \lambda x_1(s)) \sin(t-s) ds. \end{aligned}$$

Para valores pequeños de λ , podemos tomar

$$F(\eta \sin(s) - \lambda x_1(s)) = F(\eta \sin(s)) + O(\lambda)$$

y obtener las soluciones aproximadas a primer orden

$$(4.2a) \quad \tilde{x}(t, \eta, \lambda) = \eta \sin(t) - \lambda \int_0^t F(\eta \sin(s)) \cos(t-s) ds,$$

$$(4.2b) \quad \tilde{y}(t, \eta, \lambda) = \eta \cos(t) + \lambda \int_0^t F(\eta \sin(s)) \sin(t-s) ds.$$

En $t = \pi$ se verifica

$$\begin{aligned} \int_0^\pi F(\eta \sin s) \cos(\pi - s) ds &= \int_0^{\pi/2} F(\eta \sin s) \cos(\pi - s) ds \\ &\quad + \int_{\pi/2}^\pi F(\eta \sin s) \cos(\pi - s) ds, \end{aligned}$$

usando que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} F(\eta \sin s) \cos(\pi - s) ds &= - \int_0^{\pi/2} F(\eta \sin s) \cos(s) ds \\ \int_{\pi/2}^\pi F(\eta \sin s) \cos(\pi - s) ds &= \int_0^{\pi/2} F(\eta \sin s) \cos(s) ds \end{aligned}$$

obtenemos $\tilde{x}(\pi, \eta, \lambda) = 0$ y por lo tanto $x(\pi) = O(\lambda^2)$. De forma similar vemos que $y(\pi) = -\eta + 2\lambda \hat{F}(\eta) + O(\lambda^2)$, donde

$$\begin{aligned} \hat{F}(\eta) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi F(\eta \sin s) \sin(\pi - s) ds \\ (4.3) \quad &= \frac{1}{2} \int_0^\pi F(\eta \sin s) \sin(s) ds = \int_0^\eta \frac{F(\xi) \xi}{\eta \sqrt{\eta^2 - \xi^2}} d\xi, \end{aligned}$$

en la última igualdad usamos la imparidad de F . Tenemos entonces

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = -2\hat{F}(\eta),$$

por lo tanto $p(\eta, \lambda) \approx \eta - 2\lambda\hat{F}(\eta)$, lo que muestra que los puntos fijos de $p(\cdot, \lambda)$ están cerca de los ceros de \hat{F} . La idea de obtener información de la aplicación de Poincaré mediante integrales curvilíneas sobre las curvas solución se conoce como método de Melnikov (ver [15]). Es fácil ver que $\hat{F} \in C^\beta(\mathbb{R})$ si $F \in C^\beta(\mathbb{R})$ y vale:

$$\hat{F}^{(k)}(\eta) = \int_0^{\pi/2} F^{(k)}(\eta \cos \theta) \cos^{k+1} \theta d\theta,$$

en particular si F es localmente Lipschitz, \hat{F} también. Por cálculo directo vemos que si $F(x) = \sum_{0 \leq k \leq d} c_k x^k$, entonces $\hat{F}(\eta) = \sum_{0 \leq k \leq d} \hat{\mu}_k c_k \eta^k$, donde $\hat{\mu}_k = 0$ si k es par y si k es impar

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sin \theta)^{k+1} d\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{2^{-k/2} k!}{((k+1)/2)!}$$

En este caso particular donde las órbitas del problema no perturbado son círculos concéntricos, la integral (4.3), nos da $\hat{F}(\eta) = \frac{1}{2}\eta^{-2}(\mathcal{A}G)(\eta^{-1})$, donde $G(r) = r^{-3}F(r^{-1})$ y \mathcal{A} es la transformada de Abel definida como:

$$(\mathcal{A}G)(\rho) = 2 \int_\rho^\infty \frac{G(r)r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dr$$

A partir de la transformada inversa de Abel dada por:

$$G(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{(\mathcal{A}G)'(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} d\rho$$

podemos recuperar F a partir de \hat{F} mediante la fórmula

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\hat{F}(x \cos \theta) + x \cos \theta \hat{F}'(x \cos \theta) \right) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\hat{F}(\eta) + \eta \hat{F}'(\eta)}{\sqrt{x^2 - \eta^2}} d\eta. \end{aligned}$$

El problema (4.1) se generaliza de la siguiente forma: se consideran perturbaciones no conservativas de un sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y(x, y) + \lambda Q(x, y), \\ \dot{y} = -H_x(x, y) - \lambda P(x, y), \end{cases}$$

Para $\lambda = 0$, las soluciones parametrizan curvas de nivel $H = \epsilon$. Cerca de un mínimo o un máximo local estricto, existen infinitas curvas de nivel cerradas. Si para λ pequeño tenemos una órbita cerrada γ , por el teorema de la divergencia vale

$$0 = \int_{\text{int}(\gamma)} (Q_x(x, y) - P_y(x, y)) \, dx dy = \int_{\gamma} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy,$$

la curva γ está próxima a una órbita cerrada del sistema Hamiltoniano $H = \epsilon$, por lo tanto a primer orden, la condición para que el sistema (infinitesimalmente) perturbado tenga una órbita periódica es

$$\int_{H=\epsilon} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = 0$$

Para la ecuación (4.1), $H(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, $P = 0$ y $Q(x, y) = -F(x)$, las curvas de nivel de H son círculos con centro en el origen.

4.3. Bifurcaciones

En esta sección vamos a justificar los argumentos heurísticos dados en la introducción. El resultado principal nos dice que el número de ciclos límites del sistema y sus amplitudes están determinados por los ceros de la función \hat{F} . Además, las órbitas periódicas convergen a círculos centrados en el origen cuando $\lambda \rightarrow 0$ y sus períodos convergen a 2π .

Teorema 4.1 (Perko). *Si \hat{F} tiene k ceros η_1, \dots, η_k donde cambia de signo, entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, el problema (4.1) tiene por lo menos k órbitas periódicas $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, los cuales verifican*

$$\gamma_j(t, \lambda) = \tilde{\eta}_j(\lambda) (\sin(\omega_j(\lambda)t), \cos(\omega_j(\lambda)t)) + h_j(t, \lambda),$$

donde $\omega_j(\lambda) = 1 + O(\lambda^2)$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{\eta}_j(\lambda) = \eta_j$ y $h_j(\cdot, \lambda)$ es una función periódica de período $T_j(\lambda) = 2\pi/\omega_j(\lambda)$ que verifica $|h_j(t, \lambda)| = O(\lambda)$.

Si F es C^2 y $\hat{F}'(\eta_j) \neq 0$, entonces el problema (4.1) tiene exactamente k ciclos límites y vale que $\tilde{\eta}_j(\lambda) = \eta_j + O(\lambda)$.

Vamos a descomponer la demostración en varios lemas.

Lema 4.1. *Sea $(x(t, \eta, \lambda), y(t, \eta, \lambda))$ la solución de (4.1) con datos iniciales $\gamma(0, \eta, \lambda) = (0, \eta)$. Para $\eta^*, T > 0$, existe λ_0 tal que si $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $\eta \in [0, \eta^*]$, entonces*

$$(4.4a) \quad \max_{0 \leq t \leq T} |x(t, \eta, \lambda) - \tilde{x}(t, \eta, \lambda)| \leq C(\eta^*, T) \lambda^2,$$

$$(4.4b) \quad \max_{0 \leq t \leq T} |y(t, \eta, \lambda) - \tilde{y}(t, \eta, \lambda)| \leq C(\eta^*, T) \lambda^2,$$

donde (\tilde{x}, \tilde{y}) está dada por (4.2).

Demostración. Sean M una cota y L una constante de Lipschitz de la función F en el intervalo $[0, \eta^* + 1]$, tomando

$$\lambda_0 = \min \left\{ (2MT)^{-1}, (2LMT)^{-1/2} \right\},$$

para $\eta \leq \eta^*$ se verifica $|\tilde{x}(t, \eta, \lambda)| \leq \eta^* + \lambda MT \leq \eta^* + 1/2$. Consideremos

$$T^* = \sup \left\{ t \in [0, T] : \max_{0 \leq s \leq t} |x(s, \eta, \lambda) - \tilde{x}(s, \eta, \lambda)| \leq 1/2 \right\},$$

siendo que $x(0, \eta, \lambda) = \tilde{x}(0, \eta, \lambda) = 0$, por continuidad $T^* > 0$ y se verifica $|x(t, \eta, \lambda)| \leq \eta^* + 1$ para $t \in [0, T^*]$. Además se verifica

$$\begin{aligned} |x(t, \eta, \lambda) - \tilde{x}(t, \eta, \lambda)| &\leq \lambda \int_0^t |F(x(s, \eta, \lambda)) - F(\eta \sin(s))| ds \\ &\leq \lambda L \int_0^t |x(s, \eta, \lambda) - \eta \sin(s)| ds \\ &= \lambda^2 L \int_0^t |F(x(s, \eta, \lambda))| ds \leq \lambda^2 LMT. \end{aligned}$$

Tenemos $|x(t, \eta, \lambda) - \tilde{x}(t, \eta, \lambda)| < 1/2$ y $T^* = T$, tomando $C(\eta^*, T) = LMT$ obtenemos (4.4a). De forma similar podemos probar (4.4b). \square

Lema 4.2. *Existen $\lambda_0, \eta_* > 0$ tal que si $\lambda \in (0, \lambda_0)$ y $\eta \in (0, \eta_*)$, entonces $p(\eta, \lambda) > \eta$ y por lo tanto $p(\cdot, \lambda)$ no tiene puntos fijos en $(0, \eta_*)$.*

Lema 4.3. *Existen $\lambda_0, \eta^* > 0$ tal que si $\lambda \in (0, \lambda_0)$ y $\eta \in (\eta^*, +\infty)$, entonces $p(\eta, \lambda) < \eta$ y por lo tanto $p(\cdot, \lambda)$ no tiene puntos fijos en $(\eta^*, +\infty)$.*

Demostración. Vamos a suponer $\lambda < 1$, se definen c, x_0, d como en la proposición 3.5. Observemos que $\min_{x \geq 0} \lambda F(x) = -\lambda c$, $\inf_{x \geq x_0} \lambda F(x) \geq \lambda d$ y por lo tanto podemos tomar ε de la misma forma. Como $\max_{0 \leq x \leq x_0} |\lambda F(x)| \leq M$, vemos que $\eta^* = \eta_0$ definido por (3.1) verifica el enunciado. \square

Demostración del teorema 4.1. Para $\lambda = 0$ y $t = \pi$ se verifica

$$x(\pi, \eta, 0) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial t}(\pi, \eta, 0) = -\eta,$$

usando el teorema de la función implícita, existe $\lambda_0 > 0$ y una única aplicación $\tau : [\eta_*, \eta^*] \times [0, \lambda_0] \rightarrow \mathbb{R}$ verificando $x(\tau(\eta, \lambda), \eta, \lambda) = 0$. Vale que τ es continua y $\tau(\eta, 0) = \pi$, lo que implica que para $\delta > 0$, existe λ_0 suficientemente pequeño tal que $|\tau(\eta, \lambda) - \pi| < \delta$ para $(\eta, \lambda) \in [\eta_*, \eta^*] \times [0, \lambda_0]$. Siendo $\partial x / \partial t$ continua en $[\pi - \delta, \pi + \delta] \times [\eta_*, \eta^*] \times [0, \lambda_0]$, tenemos escribiendo:

$$\begin{aligned} 0 &= x(\tau(\eta, \lambda), \eta, \lambda) = x(\pi, \eta, \lambda) + \int_{\pi}^{\tau(\eta, \lambda)} \frac{\partial x}{\partial t}(t, \eta, \lambda) dt \\ &= x(\pi, \eta, \lambda) - \eta \cdot (\tau(\eta, \lambda) - \pi) + \int_{\pi}^{\tau(\eta, \lambda)} \left(\frac{\partial x}{\partial t}(t, \eta, \lambda) - \frac{\partial x}{\partial t}(\pi, \eta, 0) \right) dt \end{aligned}$$

para δ, λ_0 pequeños, tenemos

$$\frac{1}{2}\eta_* |\tau(\eta, \lambda) - \pi| \leq |x(\pi, \eta, \lambda)| \leq C\lambda^2,$$

en la última desigualdad hemos usado (4.4a) y $\tilde{x}(\pi, \eta, \lambda) = 0$. Por la simetría respecto al eje y tenemos que el período de una órbita periódica es $T = 2\tau$ y $\omega = 1 + O(\lambda^2)$.

Usando (4.4b), obtenemos $|p(\eta, \lambda) + \tilde{y}(\tau(\eta, \lambda), \eta, \lambda)| \leq C\lambda^2$, y siendo que $|\tilde{y}(\tau(\eta, \lambda), \eta, \lambda) - \tilde{y}(\pi, \eta, \lambda)| \leq C\lambda^2$, vemos que

$$|p(\eta, \lambda) - \eta + 2\lambda\hat{F}(\eta)| \leq C\lambda^2.$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideramos $\min_{|\eta - \eta_j| \geq \varepsilon} |F(\eta)| = \delta > 0$. Tomando λ_0 suficientemente pequeño, obtenemos $|(p(\eta, \lambda) - \eta) / \lambda + 2\hat{F}(\eta)| < \delta$ para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, lo que implica que $d(\eta, \lambda) = p(\eta, \lambda) - \eta$ cambia de signo en $(\eta_j - \varepsilon, \eta_j + \varepsilon)$ y por lo tanto se anula en algún punto $\tilde{\eta}_j(\lambda)$ perteneciente a ese intervalo.

Usando que

$$x_j(t, \lambda) = \tilde{\eta}_j(\lambda) \sin(t) - \lambda \int_0^t F(x_j(s, \lambda)) \cos(t - s) ds,$$

obtenemos para $t \in [0, 2\pi/\omega_j(\lambda)]$

$$\begin{aligned} |h_j^{(1)}(t, \lambda)| &= |x_j(t, \lambda) - \tilde{\eta}_j(\lambda) \sin(\omega_j(\lambda)t)| \\ &\leq \tilde{\eta}_j(\lambda) |\sin(\omega_j(\lambda)t) - \sin(t)| + \lambda \int_0^t |F(x_j(s))| ds \\ &\leq (\tilde{\eta}_j |\omega_j(\lambda) - 1| + \lambda M) 2\pi/\omega_j(\lambda) \leq C\lambda. \end{aligned}$$

Acotaciones se prueban para $h_j^{(2)}$.

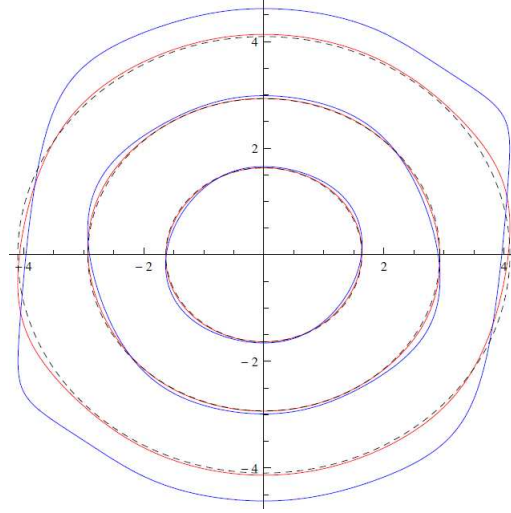
Consideramos ahora que F es C^2 y $\hat{F}'(\eta_j) \neq 0$, como d resulta C^2 , tenemos

$$\frac{\partial^2 d}{\partial \lambda \partial \eta}(\eta, 0) = -2\hat{F}'(\eta)$$

y por lo tanto $\frac{\partial d}{\partial \eta}(\eta, \lambda) = -2\lambda\hat{F}'(\eta) + o(\lambda)$. Vale entonces que $d(\eta, \lambda)$ es estrictamente monótona en $(\eta_j - \varepsilon, \eta_j + \varepsilon)$ si ε es suficientemente pequeño y por lo tanto existe un único $\tilde{\eta}_j(\lambda)$ donde d se anula. Además, $\delta \geq b\varepsilon$ con $0 < b < |\hat{F}'(\eta_j)|$, lo que muestra $\varepsilon < C\lambda/b$. \square

Ejemplo 4.1. Consideremos el polinomio impar que interpola los puntos $(1, -1), (2, 2), (3, -3), (4, 4)$ es decir

$$F(x) = \frac{4x^7}{315} - \frac{14x^5}{45} + \frac{88x^3}{45} - \frac{93x}{35},$$

Figura 4.1: ciclos límites para $\lambda = 0.2$ y $\lambda = 0.05$

tenemos $\hat{F}(\eta) = \pi \left(\frac{\eta^7}{576} - \frac{7\eta^5}{144} + \frac{11\eta^3}{30} - \frac{93\eta}{140} \right)$. Las raíces positivas de \hat{F} son aproximadamente $\eta_1 = 1.63144$, $\eta_2 = 2.92859$ y $\eta_3 = 4.09412$. En la figura 4.1 se muestra en azul los ciclos límites del problema (4.1) para $\lambda = 0.2$ y en rojo los correspondientes a $\lambda = 0.05$. En línea punteada se grafican los círculos de radio η_j . Las frecuencias angulares y las distancias máximas a los círculos se dan en la siguientes tablas

	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.05$		$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.05$
ω_1	0.98911	0.99931	$\ h_1\ $	0.15346	0.03798
ω_2	0.99093	0.99943	$\ h_2\ $	0.14883	0.03224
ω_3	0.95754	0.99703	$\ h_3\ $	0.73380	0.13040

Como consecuencia del teorema 4.1, tenemos

Corolario 4.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un polinomio F de grado $d = 2k + 1$ tal que el problema (1.2) tiene exactamente k ciclos límites.*

Demostración. Tomemos un polinomio \hat{F} de grado $d = 2k + 1$ impar tal que \hat{F} tenga exactamente k raíces positivas. Si F es la transformada inversa de Melnikov de \hat{F} , usando el teorema 4.1 vemos que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño el problema (4.1) tiene exactamente k ciclos límites. \square

4.4. Expansión Asintótica

En esta sección vamos a obtener una expresión aproximada de una órbita periódica $\gamma = (x, y)$ en términos de sus coeficientes de Fourier. Si escribimos $F(\eta \sin(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n(\eta) \sin(n\omega t)$ con $\omega = 1$ y en $[0, \pi]$:

$$\hat{F}_n(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\eta \sin(t)) \sin(nt) dt,$$

de (4.4) obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t, \eta, \lambda) &= \eta \sin(t) - \lambda \int_0^t F(\eta \sin s) \cos(t-s) ds \\ &= \eta \sin(t) - \frac{\lambda}{2} \hat{F}_1(\eta) t \sin(t) \\ &\quad - \lambda \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} \hat{F}_n(\eta) (\cos(t) - \cos(nt)).\end{aligned}$$

De manera similar llegamos a

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t, \eta, \lambda) &= \eta \cos(t) - \frac{\lambda}{2} \hat{F}_1(\eta) t \cos(t) + \frac{\lambda}{2} \hat{F}_1(\eta) \sin(t) \\ &\quad + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} \hat{F}_n(\eta) (\sin(t) - \sin(nt)).\end{aligned}$$

Como $\pi \hat{F}_1(\eta) = 4\hat{F}(\eta)$, el término *secular* $t \sin(t)$ desaparece si $\hat{F}(\eta) = 0$. Observemos que siendo F impar, $\hat{F}_n = 0$ si n es par. Usando que para $n = 2q - 1$, $k = 2p - 1$ con $n \leq k$ se verifica

$$\hat{\sigma}_{n,k} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^k(t) \sin(nt) dt = \frac{(-1)^{q-1} 2(2p)!}{4^p p(p-q)!(p+q-1)!}$$

y $\hat{\sigma}_{n,k} = 0$ si $n > k$, vemos que si $F(x) = \sum_{p=1}^d c_p x^{2p-1}$, entonces

$$\hat{F}_n(\eta) = \sum_{p=1}^d \hat{\sigma}_{n,2p-1} c_p \eta^{2p-1}$$

Sabemos por las estimaciones (4.4) y el teorema 4.1 que $T(\lambda) = 2\pi + O(\lambda^2)$ y $x(t, \eta, \lambda) = \tilde{x}(t, \eta, \lambda) + O(\lambda^2)$

$$\begin{aligned}x(t, \eta, \lambda) &= \eta \sin(t) - \lambda \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2q-1}{4q(q-1)} \hat{F}_{2q-1}(\eta) (\cos(t) - \cos(nt)) + o(\lambda) \\ y(t, \eta, \lambda) &= \eta \cos(t) + \lambda \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2q-1}{4q(q-1)} \hat{F}_{2q-1}(\eta) (\sin(t) - \sin(nt)) + o(\lambda)\end{aligned}$$

Para una función periódica se define la distorsión armónica total THD (total harmonic distortion) como el apartamiento relativo de la solución en media cuadrática de una oscilación armónica del mismo período, es decir si $x(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu \cos(\nu\omega t) + \beta_\nu \sin(\nu\omega t))$

$$\text{THD}^2 = 1 - \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{\|x\|_{L^2}^2} = \frac{\sum_{\nu=2}^{\infty} \alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}{\|x\|_{L^2}^2}$$

Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una solución periódica de (4.1), para valores pequeños de λ , se verifica $T = 2\pi + O(\lambda^2)$ y

$$x(t) = \eta \sin(t) - \lambda \int_0^t F(\eta \sin s) \cos(t-s) ds + O(\lambda^2).$$

Como F impar, tenemos $F(\eta \sin s) = \sum_{j=0}^k c_{2j+1}(\eta) \sin((2j+1)s)$, donde

$$c_{2j+1}(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(\eta \sin s) \sin((2j+1)s) ds,$$

en particular $c_1(\eta) = \frac{4}{\pi} \hat{F}(\eta)$. Podemos escribir

$$\begin{aligned} x(t) &= \eta \sin(t) - \frac{2\lambda}{\pi} \hat{F}(\eta) t \sin(t) \\ &\quad - \lambda \sum_{j=1}^k \frac{2j+1}{4j(j+1)} c_{2j+1}(\eta) (\cos(t) - \cos((2j+1)t)) + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

El término *secular* $t \sin(t)$ desaparece si $\hat{F}(\eta) = 0$, en este caso podemos escribir $\text{THD} = \lambda \text{ATHD} + o(\lambda)$, donde

$$\text{ATHD} = \frac{1}{\eta} \left(\sum_{j=1}^k \left(\frac{2j+1}{4j(j+1)} c_{2j+1}(\eta) \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Para el ejemplo 4.1 tenemos los siguientes valores

órbita	$\lambda = 0.2$		$\lambda = 0.05$		$\lambda = 0.01$	
	THD	λATHD	THD	λATHD	THD	λATHD
1	0.0530	0.0520	0.0130	0.0130	$2.6019 \cdot 10^{-3}$	$2.6019 \cdot 10^{-3}$
2	0.0849	0.0340	0.0100	0.0085	$1.7145 \cdot 10^{-3}$	$1.7016 \cdot 10^{-3}$
3	0.1142	0.0646	0.0178	0.0161	$3.2444 \cdot 10^{-3}$	$3.2305 \cdot 10^{-3}$

Capítulo 5

Problema Rígido

5.1. Introducción

En principio vamos a observar el sistema reescalado en el caso de Van der Pol, donde la solución numérica nos muestra la forma de paralelogramo curvo para la órbita, a continuación iniciamos la construcción de los denominados "Tubos contenedores" para usarlos en la elaboración del algoritmo que se propone para el caso de que F sea una función de Morse

5.2. Reescalamiento conveniente

Consideramos el problema (4.1) para $\lambda \gg 1$, en las variables reescaladas $\xi(t) = x(\lambda t)$ y $\eta(t) = y(\lambda t)/\lambda$, el problema se escribe como

$$(5.1) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = \lambda^2 (\eta - F(\xi)), \\ \dot{\eta} = -\xi. \end{cases}$$

Si $|\eta - F(\xi)| \gg \lambda^{-2}$, $|\dot{\xi}/\dot{\eta}| \gg 1$ por lo tanto la trayectoria es casi horizontal, hacia la derecha por arriba del gráfico de F y hacia la izquierda por debajo. Por otro lado, si $\eta = F(\xi) + O(\lambda^{-2})$, entonces $F'(\xi)\dot{\xi} \approx -\xi$ y por lo tanto

$$G(\xi(t)) - G(\xi(t_0)) \approx -(t - t_0)$$

donde $G(\xi)$ es una primitiva de $F'(\xi)/\xi$. Por lo tanto, podemos describir las órbitas como concatenación de segmento horizontales y tramos del gráfico $\eta = F(\xi)$. Los tramos horizontales se realizan en forma casi instantánea y sobre el gráfico vale la aproximación

$$\xi(t) = G^{-1}(G(\xi(t_0)) - (t - t_0))$$

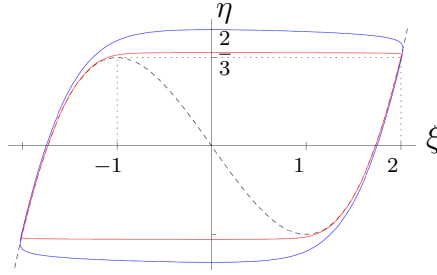
Consideremos como ejemplo la ecuación de Van der Pol (1.1)

Ejemplo 5.1. Si $F(\xi) = \frac{\xi^3}{3} - \xi$, sus valores extremos son $\eta = \mp \frac{2}{3}$ que se alcanzan en $\xi = \pm 1$. La solución positiva de $F(\xi) = \frac{2}{3}$ es $\xi = 2$ y siendo $G(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - \ln \xi$,

podemos estimar el período del ciclo límite por

$$\frac{T}{2} \approx G(2) - G(1) = \frac{3}{2} - \ln 2 = 0.806853$$

	$\lambda = 5$	$\lambda = 20$	$\lambda = 50$	$\lambda = 200$
$T/2$	1.16122	0.867058	0.825083	0.80979



5.3. El paralelogramo curvo

Definición 5.1. Tubo $\Theta(\xi_i, \xi_o)$: Llamaremos de ese modo al compacto tal que: $\partial(\Theta(\xi_i, \xi_o)) = \{\gamma(t)\} \subset \mathbb{R}^2$, curva de Jordan, que resulta de las siguientes construcciones dados: $\delta > 0; \varepsilon > 0; \delta^* |_{\{F \neq \gamma_{1e}\}} > 0$ siendo:

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ tramos curvilíneos suaves a trozos de modo que:

$$\gamma_1 = \gamma_{1a} \cup \gamma_{1b} \cup \gamma_{1c} \cup \gamma_{1d} \cup \gamma_{1e}$$

Caso lateral ver la figura 5.1, caso inicial ver figura 5.2.

<u>Caso lateral</u>	$\gamma_{1a} = (\xi, F(\xi_c))$	$\xi_o < \xi \leq \xi_c$
	$\gamma_{1b} = (\xi, F(\xi))$	$\xi_c < \xi \leq \xi_i$
	$\gamma_{1c} = (\xi_i, \eta)$	$F(\xi_i) - \varepsilon \leq \eta < F(\xi_i)$
	$\gamma_{1d} = (\xi, F(\xi) - \varepsilon)$	$\xi_c + \delta^* \leq \xi < \xi_i$
	$\gamma_{1e} = (\xi, F'(\xi_c + \delta^*)(\xi - (\xi_c + \delta^*)) + F(\xi_c + \delta^*))$	$\xi_o \leq \xi < \xi_c + \delta^*$
	$\gamma_2 = (\xi_o, \eta)$	$F(\xi_c + \delta^*) - F'(\xi_c + \delta^*)(\xi_c + \delta^* - \xi_o) - \varepsilon < \eta \leq F(\xi_c)$
<u>Caso inicial</u>	$\gamma_{1a} = (\xi, F(\xi_c))$	$\xi_s < \xi \leq \xi_c$
	$\gamma_{1b} = (\xi, F(\xi))$	$\xi_c < \xi \leq \xi_0 + \delta$
	$\gamma_{1c} = (\xi_0 + \delta, \eta)$	$F(\xi_0 + \delta) - \varepsilon \leq \eta < F(\xi_0 + \delta)$
	$\gamma_{1d} = (\xi, F(\xi) - \varepsilon)$	$\xi_c + \delta^* \leq \xi < \xi_0 + \delta$
	$\gamma_{1e} = (\xi, F'(\xi_c + \delta^*)(\xi - (\xi_c + \delta^*)) + F(\xi_c + \delta^*))$	$0 \leq \xi < \xi_c + \delta^*$
	$\gamma_2 = (\xi_s, \eta)$	$F(\xi_c + \delta^*) - F'(\xi_c + \delta^*)(\xi_c + \delta^* - \xi_s) - \varepsilon < \eta \leq F(\xi_c)$

Definición 5.2. Tramo Entrante: Así llamaremos a cada segmento curvo: $\gamma_1 \subset \partial(\Theta(\xi_i, \xi_o))$ que cumple:

$$X(q) \cdot \eta_{ext}(\Theta(\xi_i, \xi_o))(q) < 0 \quad q \in \gamma_1$$

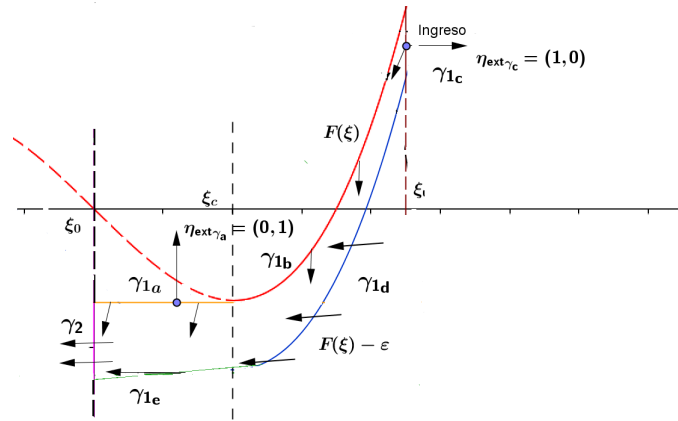


Figura 5.1: Tubo lateral $\Theta(\xi_i, \xi_o)$

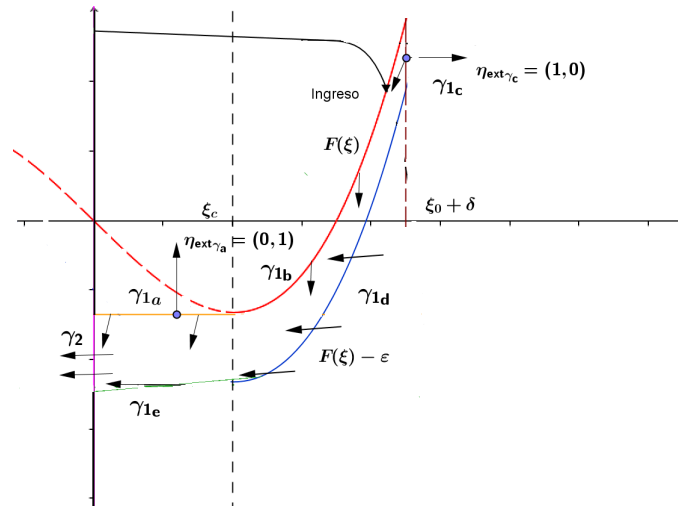


Figura 5.2: Tubo inicial

Definición 5.3. Tramo Saliente: Así llamaremos a cada segmento curvo: $\gamma_2 \subset \partial(\Theta(\xi_i, \xi_o))$ que cumple:

$$X(q) \cdot \eta_{ext}(\Theta(\xi_i, \xi_o))(q) > 0 \quad q \in \gamma_2$$

Definición 5.4. Tubo Contenedor Llamamos así a un $\Theta(\xi_i, \xi_o)$ tal que para el $\varepsilon > 0$ dado valen: $F'(\xi) > \varepsilon(*)$ y $F(\xi) - \eta > \varepsilon(**)$.

Proposición 5.1. Sea $\Theta(\xi_i, \xi_o)$ tubo contenedor, entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda > \lambda_0$ vale que $\partial(\Theta(\xi_i, \xi_o)) = \gamma_1 \cup \gamma_2$ tramos entrante y saliente respectivamente.

Demostración. Por la definición de $\Theta(\xi_i, \xi_o)$, vale:

$$\partial(\Theta(\xi_i, \xi_o)) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \text{ de modo que: } \gamma_1 = \gamma_{1a} \cup \gamma_{1b} \cup \gamma_{1c} \cup \gamma_{1d} \cup \gamma_{1e}$$

Vemos sus signos de los productos internos para cada tramo entre las normales exteriores y los campos:

γ_{1a}	$(0, 1) \cdot (\lambda^2(\eta - F(\xi)), -\xi) = -\xi$	—
γ_{1b}	$(-F'(\xi), 1) \cdot (0, -\xi) = -\xi$	—
γ_{1c}	$(1, 0) \cdot (\lambda^2(\eta - F(\xi_i)), -\xi_i) = \lambda^2(\eta - F(\xi_i))$, como $\eta < F(\xi_i)$	—
γ_{1d}	$(F'(\xi), -1) \cdot (\lambda^2(-\varepsilon), -\xi) = -F'(\xi)\lambda^2\varepsilon + \xi$, por (*) y (**) vale: $\lambda > \frac{\sqrt{\xi}}{\varepsilon}(\dagger)$	—
γ_{1e}	$(F'(\xi_c + \delta^*), -1) \cdot (\lambda^2(\eta - F(\xi)), -\xi) = F'(\xi_c + \delta^*)\lambda^2(\eta - F(\xi)) + \xi$, por (*) y (**), vale: \dagger	—
γ_2	$(-1, 0) \cdot (\lambda^2(\eta - F(\xi_o)), -\xi_o) = -\lambda^2(\eta - F(\xi_o))$, como $\eta < F(\xi_o)$	+

Con lo cual si tomamos $\lambda \geq \lambda_0 = \max\left\{\frac{\sqrt{\xi_0 + \delta}}{\varepsilon}; \frac{\sqrt{\xi_c + \delta^*}}{\varepsilon}\right\}$, para el caso inicial o $\lambda_0 = \max\left\{\frac{\sqrt{\xi_i}}{\varepsilon}; \frac{\sqrt{\xi_c + \delta^*}}{\varepsilon}\right\}$, para el caso lateral, vale la proposición. □

Definición 5.5. Tubos Empalmables

Sean $\Theta(\xi_{i_j}, \xi_{o_j}), \Theta(\xi_{i_{j+1}}, \xi_{o_{j+1}})$ tubos contenedores, tales que sus respectivas curvas concatenadas respectivamente son:

$$\gamma_j(t) = \gamma_{j1} \cup \gamma_{j2}, \text{ y } \gamma_{j+1}(t) = \gamma_{j+11} \cup \gamma_{j+12}, \text{ cumplen } \gamma_{j2} \subset \gamma_{j+11}.$$

Definición 5.6. Tubos Contenedores Consecutivos

Llamamos así al par de tubos contenedores $\Theta(\xi_{i_j}, \xi_{o_j}), \Theta(\xi_{i_{j+1}}, \xi_{o_{j+1}})$, tales que: $\xi_{o_j} = \xi_{i_{j+1}}$.

Proposición 5.2. Sea un par de tubos contenedores consecutivos entonces para los dados $\varepsilon_j, \delta_{j+1}^*, \delta_j^*$ existe $\varepsilon_{j+1} > 0$ para el cual son empalmables.

Demostración. Basta con tomar:

$$\varepsilon_{j+1} > F(\xi_{c_j}) - (F(\xi_{c_j} + \delta_j^*) - F'(\xi_{c_j} + \delta_j^*)(\xi_{c_j} + \delta_j^* - \xi_o)) + \varepsilon_j$$

con lo cual vale $\gamma_{j_2} \subset \gamma_{j+1_1}$ por lo tanto son empalmables.

□

Proposición 5.3. *Sea un par de tubos contenedores consecutivos contruidos de modo que sean empalmables entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda > \lambda_0$ vale que $\partial(\Theta(\xi_i, \xi_o)_j \cup \Theta(\xi_i, \xi_o)_{j+1}) = \gamma_1 \cup \gamma_2$ tramos entrante y saliente respectivamente.*

Demostración. Al ser contenedores para cada uno $\exists \lambda_j, \lambda_{j+1}$ para los cuales $\partial(\Theta(\xi_i, \xi_o))_k = \gamma_1 \cup \gamma_2$ tramos entrante y saliente respectivamente con $k = j, j+1$. Por ser consecutivos y empalmables si $q \in \{\gamma_{j_2}\}$ vale que $q \in \{\gamma_{j+1_1}\}$, como $\eta_{ext\Theta(\xi_{i_{j+1}}, \xi_{o_{j+1}})}(q) = -\eta_{ext\Theta(\xi_{i_j}, \xi_{o_j})}(q)$. con lo cual por valer:

$$X(q) \cdot \eta_{ext\Theta(\xi_{i_j}, \xi_{o_j})}(q) > 0 \text{ resulta } X(q) \cdot \eta_{ext\Theta(\xi_{i_{j+1}}, \xi_{o_{j+1}})}(q) < 0.$$

Ahora en el siguiente tubo vuelve a valer la propiedad ??, con lo cual vale que si $q \in \{\gamma_{j+1_2}\}$, va a suceder que $X(q) \cdot \eta_{ext\Theta(\xi_{i_{j+1}}, \xi_{o_{j+1}})}(q) > 0$. De este modo resulta $\partial(\Theta(\xi_i, \xi_o)_j \cup \Theta(\xi_i, \xi_o)_{j+1}) = \gamma_1 \cup \gamma_2$ donde $\gamma_2 = \gamma_{j+1_2}$ con lo cual es saliente y el resto que resulta ser entrante es γ_1 , para probar la propiedad basta con tomar a $\lambda > \lambda_0 = \max\{\lambda_j, \lambda_{j+1}\}$, entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda > \lambda_0$ vale la propiedad. □

Definición 5.7. Unión Contenedora

Llamamos así al conjunto $\Phi(\xi_{i_1}, \xi_{o_N}) = \bigcup_{j=1}^N \Theta(\xi_{i_j}, \xi_{o_j})$, tales que se cumpla que $\Theta(\xi_{i_j}, \xi_{o_j})$ y $\Theta(\xi_{i_{j+1}}, \xi_{o_{j+1}})$ sean tubos contenedores empalmables para cada para $j, j+1$ con $j = 1, \dots, N-1$.

Proposición 5.4. *Sea $P_c = \{\xi : F'(\xi) = 0\} \neq \emptyset$, $V_c = \{F(\xi) : \xi \in P_c\}$, dado tal que $\eta > F(\xi) / \forall \xi \in P_c$, $\eta \notin V_c$ valor regular de F , que cumple que $\max(P_c)$ es tal que $\min(V_c) = F(\max(P_c))$, para una F de Morse entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda > \lambda_0$ vale $p_\lambda(\eta) \neq \eta$.*

Demostración. Basta ver que la curva del campo a partir del dado η en las condiciones de las hipótesis, entre en un tubo contenedor pues de este modo vale $p_\lambda(\eta) \neq \eta$, con lo cual para este caso podemos construir el siguiente tubo contenedor inicial: $\Theta(\xi_0 + \delta, 0)$ siendo ξ_0 el ingreso de la línea de campo al tubo, ver figura 5.1, de este modo queda probada la proposición. □

Proposición 5.5. *Sea $P_c = \{0 < \xi_i : \xi_i \leq \xi_{i+1}; 1 \leq i \leq N \mid F'(\xi_i) = 0\}$, si se cumple que para $r \leq N = \#P_c$, $\xi_r = \sup\{\xi_i \in P_c : \min(V_c) = F(\xi_r)\}$. Dado $\eta > F(\xi) / \forall \xi \in P_c$, $\eta \notin V_c$, valor regular de F , entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda > \lambda_0$ vale $p_\lambda(\eta) \neq \eta$.*

Demostración. Sea $j = N - r$, vale: $0 \leq j \leq N - 1$, si $r = N$ que es el caso $j = 0$, vale por la Propiedad 5.4.

Si $j > 0$, tomamos $\widetilde{\xi}_{j_1} = \sup\{\xi < \xi_N : F(\xi) < F(\xi_N)\}$. Dado que ξ_N es mínimo local, se puede armar un tubo inicial contenedor $\Theta(\xi_0 + \delta, \widetilde{\xi}_{j_1})$ empalmarlo con $\Theta(\widetilde{\xi}_{j_1}, 0)$ si ξ_{j_1} es un mínimo global si no con $\Theta(\widetilde{\xi}_{j_1}, \widetilde{\xi}_{j_2})$ siendo un $\widetilde{\xi}_{j_2} = \sup\{\xi < \xi_{j_1} : F(\xi) < F(\xi_{j_1})\}$ con lo cual se plantea idéntica situación, repitiendo el proceso, j_1, j_2, j_3, \dots hasta $j_k = r$ que por hipótesis $\xi_r = \min(V_c)$ quedando para cada r la unión contenedora $\Theta(\xi_0 + \delta, 0)$ por lo tanto prueba la proposición. □

Proposición 5.6. Dado $\eta \notin V_c$, valor regular de F , tal que $\exists \xi_{j_0} \in P_c / \eta < F(\xi_0)$ si se cumple que para:

$r \leq N = \#(P_c \cap (0, \xi_0))$, $\xi_r = \sup\{\xi_i < \xi_{j_0} / \xi_i \in P_c : \min(V_c) = F(\xi_r)\}$ entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda > \lambda_0$ vale $p_\lambda(\eta) \neq \eta$.

Demostración. Basta con construir la función:

$$G(\xi) = \begin{cases} F(\xi) & \text{si } (-\infty, \xi_0) \\ F'(\xi_0)\xi + F'(\xi_0)\xi_0 - F(\xi_0) & \text{si } (\xi_0, +\infty) \end{cases}$$

La G nos pone en las condiciones de las hipótesis de la proposición 5.5. quedando probada la proposición. □

Proposición 5.7. Sea $V_c = \{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ los valores críticos de F y $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que si $\lambda > \lambda_0$ entonces

$$\{\eta > 0 : p_\lambda(\eta) = \eta\} \subset \bigcup_{1 \leq j \leq k} (\eta_j - \varepsilon, \eta_j + \varepsilon).$$

Demostración. Primero por las proposiciones 5.5 y 5.6, \exists un $\lambda = \lambda_0 > 0$.

Luego como $\#V_c < \infty$, dado $\delta > 0$ sea:

$$K = [0, \eta^*] \setminus \bigcup_{\eta \in V_c} (\eta - \delta, \eta + \delta) = \bigcup_{i=1}^{\#V_c} [a_i, b_i]$$

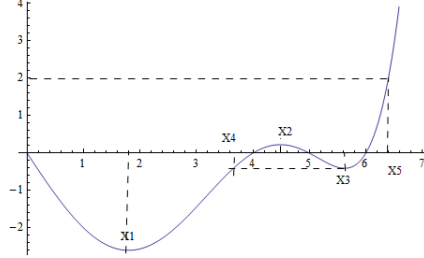
Con lo cual para cada $\eta \in [a_i, b_i]$ hay un $\lambda > 0 / p_\lambda(\eta) \neq \eta$. Por continuidad vale: $p_\lambda(\check{\eta}) \neq \check{\eta} \quad \check{\eta} \in (\eta - \gamma, \eta + \gamma)$. Dada la compacidad de K lo cubrimos con finitos intervalos: $I_k = (\eta_k - \gamma_k, \eta_k + \gamma_k)$, para cada $I_k \exists \lambda_k > 0 / p_{\lambda_k}(\eta) \neq \eta / \eta \in I_k$. Basta tomar $\lambda = \max_{0 \leq k \leq N} \{\lambda_k\}$. □

Ejemplo numérico:

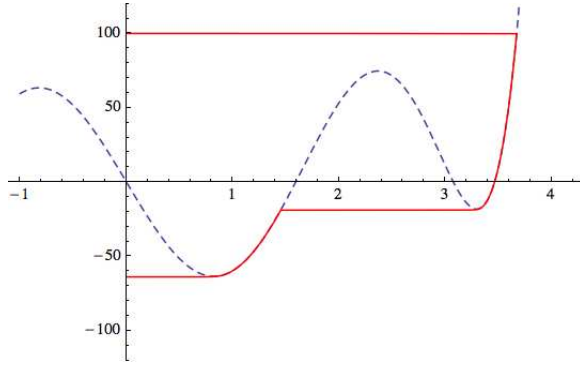
$$F(x) = -6x + \frac{7}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{48}x^7; \quad \lambda = 20$$

Sus puntos mínimos, y máximos:

Figura 5.3: Ejemplo con el polinomio $f(x) = -\frac{16x}{7} + \frac{67x^3}{225} - \frac{11x^5}{900} + \frac{x^7}{6300}$



$$(0.822141, -3.17042); (2.36703, 3.73581); (3.29608, -0.909441)$$



Traza ajustada a los tubos.

5.4. Orden estimado del período de las órbitas.

En base a la construcción antedicha y a la aproximación mencionada al principio del capítulo podemos conjeturar un algoritmo útil para calcular los períodos de las órbitas, a continuación aportamos un ejemplo con una abundante prueba numérica del funcionamiento para el caso dado.

Dada la presencia de la concatenación de tubos, para cada uno de ellos los tiempos valdrán:

$$G(\xi(t)) - G(\xi(t_0)) = \int_{\xi(t_0)}^{\xi(t)} \frac{F'(\xi)}{\xi} d\xi \approx -(t - t_0)$$

El valor x_5 representa el corte inicial de la órbita que dependerá del valor inicial, luego tomando los puntos críticos positivos que para nuestro ejemplo los llamamos: x_1, x_2, x_3 dado el caso valen 1.79741, 4.4852, 5.62604, mínimo, máximo y mínimo local respectivamente. Resulta que el tiempo del medio ciclo se puede obtener, calculando previamente el corte de la solución al polinomio y el mas grande de los valores donde el polinomio alcanza al último mínimo x_4 , que en nuestro caso es 3.65468 y luego aplicar la cuenta anterior a los dos tubos y sumarlos $\frac{T}{2} = G(x_5) - G(x_3) + G(x_4) - G(x_1)$, saliendo con un $\eta_0 = 2$ queda:

$$\{G(x_5) - G(x_3), G(x_4) - G(x_1)\} = \{0.389499, 0.769775\}$$

Figura 5.4: Solución para $\eta_0 = 2$ con $\lambda = 100$ con el detalle de como se tomaron los tiempos.

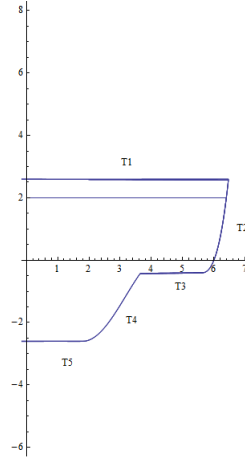
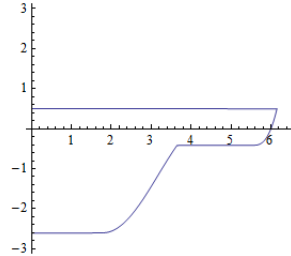


Figura 5.5: Solución para $\eta_0 = 0,5$ con $\lambda = 100$



También analizamos los casos:

- Para $\eta_0 = 0,5$ los tiempos resultan 0.150928, 0.769775
- Para $\eta_0 = 20$ los tiempos resultan 2.986180, 0.769775

A continuación la corroboración numérica, realizada con los valores ajustados a la traza.

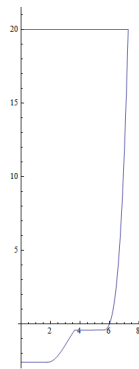
Figura 5.6: Solución para $\eta_0 = 20$ con $\lambda = 100$ 

Tabla de tiempos para $\eta_0 = 2$

λ	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
100	0.00035572	0.390195	0.00172601	0.767584	0.00231238
200	0.00009318	0.389811	0.00063987	0.768964	0.00092593
400	0.00002436	0.389633	0.00023907	0.769472	0.00036956
500	0.00001581	0.389600	0.00017452	0.769554	0.00027483
800	6.355938 ^{*^-6}	0.389555	0.00009029	0.769661	0.00014719
1000	4.120649 ^{*^-6}	0.389541	0.00006614	0.769692	0.00010941
2000	1.073986 ^{*^-6}	0.389516	0.00002533	0.769743	0.00004351
4000	2.799147 ^{*^-7}	0.389506	9.79382 ^{*^-6}	0.769763	0.00001728
16000	1.827766 ^{*^-8}	0.389500	1.492687 ^{*^-6}	0.769774	2.726783 ^{*^-6}
32000	4.585892 ^{*^-9}	<u>0.389500</u>	5.867345 ^{*^-7}	<u>0.769775</u>	1.082534 ^{*^-6}

Tabla de tiempos para $\eta_0 = 0,5$

λ	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
100	0.00088932	0.151244	0.00172601	0.767584	0.00231238
200	0.00023024	0.151141	0.00063987	0.768964	0.00092593
400	0.00005960	0.151035	0.00023907	0.769472	0.00036956
500	0.00003856	0.151012	0.00017452	0.769554	0.00027483
800	0.00001541	0.150977	0.00009029	0.769661	0.00014719
1000	9.966903 ^{*^-6}	0.150965	0.000066148	0.769692	0.00010941
2000	2.572904 ^{*^-6}	0.150944	0.000025337	0.769743	0.00004351
4000	6.634976 ^{*^-7}	0.150934	9.793750 ^{*^-6}	0.769763	0.00001728
16000	4.360480 ^{*^-8}	0.150929	1.492721 ^{*^-6}	0.769774	2.726785 ^{*^-6}
32000	1.163020 ^{*^-8}	<u>0.150928</u>	5.867311 ^{*^-7}	<u>0.769775</u>	1.082560 ^{*^-6}

Tabla de tiempos para $\eta_0 = 20$

λ	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
100	0.00007009	2.987070	0.00172601	0.767584	0.00231238
200	0.00001840	2.986540	0.00063987	0.768964	0.00092593
400	4.8323192 ^{*^-6}	2.986330	0.000239072	0.769472	0.00036956
500	3.1421865 ^{*^-6}	2.986290	0.000174526	0.769554	0.00027483
800	1.2685792 ^{*^-6}	2.986240	0.000090290	0.769661	0.00014719
1000	8.2347223 ^{*^-7}	2.986220	0.000066149	0.769692	0.00010941
2000	2.1151148 ^{*^-7}	2.986200	0.000025337	0.769743	0.00004351
4000	5.3165453 ^{*^-8}	2.986190	9.7939097 ^{*^-6}	0.769763	0.00001728
16000	3.3284344 ^{*^-9}	2.986180	1.4927207 ^{*^-6}	0.769774	2.7268252 ^{*^-6}
32000	8.321745 ^{*^-10}	<u>2.986180</u>	5.8673107 ^{*^-7}	<u>0.769775</u>	1.0825406 ^{*^-6}

Bibliografía

- [1] G. Binyamini, D. Novikov, and S. Yakovenko, *On the number of zeros of Abelian integrals*, arXiv:0808.2952v3.
- [2] W. A. Coppel, *Some quadratic systems with at most one limit cycle*, Dynamics Reported **2** (1988), 61–68.
- [3] H. Dulac, *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France **51** (1923), 45–188.
- [4] F. Dumortier and C. Li, *On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Liénard equations*, Nonlinearity **9** (1996), 1489–1500.
- [5] ———, *Quadratic Liénard equations with quadratic damping*, J. Differential Equations **139** (1997), 41–59.
- [6] F. Dumortier and C. Rousseau, *Cubic Liénard equations with linear damping*, Nonlinearity **3** (1990), 1015–1039.
- [7] R. FitzHugh, *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes*, **1** (1961), 445–466.
- [8] I. S. Gonorovski, *Señales y Circuitos Radiotécnicos*, Mir, 1972.
- [9] Y. Ilyashenko, *Dulac’s memoir “On limit cycles” and related problems of the local theory of differential equations*, Russian Math. Surveys VHO (1985), 1–49.
- [10] ———, *Finiteness theorems for limit cycles*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991).
- [11] A. Liénard, *Etude des oscillations entretenues*, Revue Generale de Electricite (1928), 901–912 & 946–954.
- [12] A. Lins, W. de Melo, and C. Pugh, *Geometry and Topology*, Lecture Notes in Math. **597** (1977), 335–357.
- [13] N. G. Lloyd and S. Lynch, *Small-amplitude limit cycles of certain Liénard systems*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **418** (1988), no. 1854, 199–208.
- [14] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, *An active pulse transmission line simulating nerve axons*, Proc IRL **50** (1960), 2061–2070.

- [15] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Texts in Applied Mathematics, Springer, 2000.
- [16] I.G. Petrovskii and E. M. Landis, *On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials*, Amer. Math. Soc. Transl. **14** (1960), 181–200.
- [17] M. A. F. Sanjuán, *Liénard systems, limit cycles, and Melnikov theory*, Phys. Rev. E **57** (1998), 340–344.
- [18] S. Shi, *On limit cycles of plane quadratic systems*, Sci. Sin. (1982), 41–50.
- [19] B. van der Pol and J. van der Mark, *Frequency demultiplication*, Nature **120** (1927), 363–364.