



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teoría de juegos evolutivos

Mauro Rodriguez Cartabia

Director: Juan Pablo Pinasco

28 de Mayo de 2013

A Mariano, Joaquín, Pablo, Rafael, Lucila y todos los gloriosos chicos del pabellón uno, ¡los quiero mucho!

A Letu por bancarme durante este trabajo.

A los miembros del jurado por corregir tan rápido.

A Daniel porque sin él no hubiera conocido a Juan Pablo.

A Juan Pablo y Nicolás porque sin ellos no habría tesis.

A Jorge, Susana, Carlos, Mary, Marcia y Nuria porque sin ellos no habría nada.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Agradecimientos | II |
| Introducción | 2 |
| 1. Elementos de la teoría de juegos | 3 |
| 1.1. Equilibrio de Nash en estrategias puras | 3 |
| 1.1.1. Definiciones básicas y noción de mejor respuesta | 3 |
| 1.1.2. Algunos ejemplos | 4 |
| 1.2. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas | 6 |
| 1.2.1. Estrategias mixtas | 6 |
| 1.2.2. Equilibrio de Nash | 7 |
| 1.2.3. Vuelta a los ejemplos | 8 |
| 2. Juegos evolutivos | 9 |
| 2.1. Estrategias evolutivamente estables | 10 |
| 2.1.1. Definiciones | 10 |
| 2.1.2. Una definición equivalente | 11 |
| 2.1.3. Relación entre estrategias evolutivamente estables y equi- librios de Nash | 12 |
| 2.1.4. Monomorfismos y polimorfismos | 13 |
| 2.2. Ecuación del replicador y dinámica evolutiva | 15 |
| 2.2.1. Ecuación del replicador | 15 |
| 2.2.2. Dinámicas evolutivas | 16 |
| 2.2.3. Ejemplos | 18 |
| 2.2.4. Dinámica del replicador y estrategias evolutivamente es- tables | 19 |
| 2.3. Referencias | 20 |
| 3. Inexistencia de equilibrios mixtos en juegos asimétricos | 21 |
| 3.1. Juegos en poblaciones | 22 |
| 3.2. Estrategias evolutivamente estables | 23 |
| 3.3. Modelos para conflictos asimétricos | 24 |
| 3.4. Resultados | 26 |
| 3.5. Referencias | 29 |

| | |
|---|-----------|
| 4. Juegos exteriores | 30 |
| 4.1. Juego <i>completo</i> | 30 |
| 4.2. ¿Juegos simétricos o asimétricos? | 31 |
| 4.3. El juego | 32 |
| 4.4. Equilibrios de Nash | 35 |
| 4.5. Barrera de invasión | 39 |
| 4.6. Referencias | 45 |
| 5. Menor oferta única | 46 |
| 5.1. Modelos de estrategias para ofertar | 47 |
| 5.2. Múltiples apuestas hechas por un mismo jugador | 48 |
| 5.3. Modelo evolutivo | 49 |
| 5.3.1. Modelo sin mutaciones aleatorias | 50 |
| 5.3.2. Mutaciones aleatorias | 50 |
| 5.4. Simulaciones numéricas | 51 |
| 5.5. Resultados | 51 |
| 5.6. Una variante asimétrica | 52 |
| 5.6.1. Invasiones | 54 |
| 5.7. Referencias | 54 |
| 5.8. Comentarios finales | 56 |

Introducción

Consideremos una gran población de jugadores en constante interacción. Los agentes pueden ser por ejemplo animales, hombres, agentes económicos, otro, que identificamos con un índice $i \in \mathcal{I}$. Modelamos la interacción entre dos o más de ellos mediante un juego de carácter determinístico que sólo depende de las acciones que realicen los jugadores.

Cada agente j se programa para usar una determinada estrategia que elige entre un conjunto S_j de estrategias posibles. El resultado de esta interacción entre el agente j y el resto de los jugadores lo representamos mediante una función de pagos $E_j : (S_i)_{i \in \mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{R}$. Por ejemplo, en el caso de una población de dos jugadores i y j jugando con estrategias $s_i \in S_i$ y $s_j \in S_j$ respectivamente, la función $E_j(s_j, s_i)$ representa el *beneficio* (pago) que obtiene el jugador j al optar por s_j cuando su oponente juega s_i . También podemos notarlo $E_j(s_j, s_{-j})$ para abreviar la escritura cuando los agentes sean más de dos, donde s_{-j} representa el vector de estrategias que emplean los otros agentes.

Estudiamos interacciones y modelos que permitan comprender la evolución en el tiempo del comportamiento de los jugadores, de manera que las estrategias con mejores pagos se expandan y las que no obtengan buenos resultados se reduzcan; representado en que hay menos jugadores que utilizan estas últimas. Además buscamos definiciones y estrategias que nos permitan dar una noción de *estabilidad* en el tiempo.

Para empezar consideremos un grupo de jugadores que elige jugar con una determinada estrategia (podemos identificar a cada uno con su estrategia y pensar que no es capaz de cambiarla) de tal forma que población no se altera si aparece otro grupo (pequeño) jugando una estrategia distinta. Podemos pensarlo como una comunidad que se mantiene estable cuando es sometida a una invasión de otros (pocos) individuos. Para esto debe suceder que si una pequeña fracción de la población original tiene descendencia que puede mutar a una nueva estrategia con probabilidad muy baja, los pagos esperados que recibirán los mutantes serán menores que los de aquellos que copien a sus ascendientes sin modificación alguna y por lo tanto las nuevas estrategias no prosperarán.

Existe cierta dualidad entre las distribuciones de estrategias que son un equilibrio del juego, situaciones donde a nadie le conviene modificar su manera de jugar y los puntos de equilibrio para ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias tipo Lotka-Volterra cuya dinámica se deriva de los pagos promedio del juego.

Uno de los objetivos de la tesis es estudiar esta dualidad entre equilibrios de juegos y estabilidad de poblaciones que evolucionan según modelos discretos de ecuaciones en diferencias o modelos continuos que involucran ecuaciones diferenciales. En ambos casos la evolución puede ser estocástica o determinística, si bien en este trabajo nos limitaremos al caso determinístico.

Otro objetivo es estudiar un caso particular de subastas, las llamadas subastas de menor oferta única (LUB). En estas cada participante ofrece de manera privada un pago dentro de un conjunto discreto predeterminado (puede ser un número entero de pesos o múltiplo de 1, 5 o 10 centavos) por un determinado

bien. De todas las ofertas recibidas se elige la menor entre todos los valores que fueron ofrecidos por exactamente un único jugador. Este juego ha sido estudiado en los últimos diez años por distintos economistas (ver por ejemplo [18, 19, 16, 17]) y no han podido modelar el comportamiento de los participantes ni la estrategia utilizada. Recientemente, F. Radicchi, A. Baronchelli y L.A.N. Amaral en [6] estudiaron un gran número de datos reales de sitios web donde se realizan este tipo de subastas y encontraron que los participantes ofertan desplazándose entre las ofertas siguiendo un proceso de *vuelo de Lévy*.

En un nuevo trabajo, F. Radicchi y A. Baronchelli [7] propusieron un modelo evolutivo donde los agentes juegan con distribuciones de Lévy con diferentes exponentes (α entre 1 y 5, si bien a partir de 2 se tiene un movimiento Browniano sólo que con menor varianza) y cada cierto número de juegos, el jugador con menor ganancia cambia su estrategia copiando la de uno de los jugadores con mayor ganancia. En simulaciones numéricas obtuvieron que toda la población termina jugando con un proceso de Lévy de exponente $\alpha \approx 1,3$. Además, introduciendo ruido tal que los jugadores perturban su α con una distribución uniforme en el intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, obtuvieron resultados muy similares, lo cual sugiere que el equilibrio al que se llega es estable.

Un problema natural es analizar la posibilidad de invasión a una población de oferentes que llegó a un equilibrio, vemos que esta es posible si los invasores juegan con un proceso de Lévy con $\alpha > 1,3$ pero realizan una cantidad diferente de ofertas. Para esto, realizaremos modificaciones en el modelo de [7] para introducir el costo de las apuestas y realizamos simulaciones que muestran la invasión.

La tesis está organizada de la siguiente manera; en el primer capítulo introducimos algunas herramientas básicas de la teoría de juegos. El segundo está dedicado a los juegos evolutivos. En el tercero y cuarto analizamos la posibilidad de tener equilibrios puros o mixtos en juegos asimétricos. El último capítulo lo dedicamos a la subasta de menor oferta única.

Capítulo 1

Elementos de la teoría de juegos

1.1. Equilibrio de Nash en estrategias puras

1.1.1. Definiciones básicas y noción de mejor respuesta

Para definir un juego necesitamos tres elementos.

- Un conjunto de jugadores \mathcal{I} .
- Un conjunto de acciones o estrategias (puras) S_i para cada jugador $i \in \mathcal{I}$.
- Una función E_i para cada jugador $i \in \mathcal{I}$

$$E_i : \prod_{j \in \mathcal{I}} S_j \rightarrow \mathbb{R}$$

que determina el beneficio o pago que (según las reglas del juego) obtiene el jugador i .

Notamos a un juego como $\langle \mathcal{I}, (S_i)_{i \in \mathcal{I}}, (E_i)_{i \in \mathcal{I}} \rangle$ y una noción fundamental es la de equilibrio de Nash introducida por J.F. Nash en 1950.

Definición 1.1.1 (Equilibrio de Nash). *Un equilibrio de Nash puro es un conjunto de estrategias $s^* \in \prod_{i \in \mathcal{I}} S_i$ tal que para cada jugador $i \in \mathcal{I}$ se tiene que*

$$E_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq E_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \text{para cualquier } s_i \in S_i.$$

Si la desigualdad es estricta decimos que el equilibrio también lo es.

Intuitivamente, s^* es un equilibrio de Nash si ningún jugador i tiene interés en cambiar de estrategia sabiendo que los demás jugadores usan las estrategias s_{-i}^* (y permanecen en ellas).

También puede pensarse como una situación en la cual el jugador opta por la mejor respuesta que puede elegir considerando la elección de los demás participantes. Formalicemos esta idea.

Definición 1.1.2 (Mejor respuesta). *Decimos que la estrategia $s_i \in S_i$ es una mejor respuesta para el jugador $i \in \mathcal{I}$ respecto de las estrategias $s_{-i} \in \prod_{j \neq i} S_j$ si*

$$E_i(s_i, s_{-i}) = \max_{\sigma \in S_i} E_i(\sigma, s_{-i}).$$

Notamos $MR_i(s_{-i})$ al conjunto de mejor respuesta para el jugador i cuando los demás jugadores juegan s_{-i} .

Podemos ahora reformular la definición de equilibrio de Nash:

Proposición 1.1.1. *Un conjunto de estrategias $s^* \in \prod_{i \in \mathcal{I}} S_i$ es un equilibrio de Nash si*

$$s_i^* \in MR_i(s_{-i}^*)$$

para todo jugador $i \in \mathcal{I}$.

Veamos ahora algunos ejemplos clásicos que muestran que no siempre existe un equilibrio de Nash (puro). O que si existe no tiene porqué ser único.

1.1.2. Algunos ejemplos

El juego de *Halcones y Palomas*

Introduzcamos un ejemplo típico de la teoría de juegos. Consiste en que dos jugadores elijan entre dos opciones posibles, ser *halcones* o *palomas*. Pueden actuar agresivamente, la primer opción, o no confrontar con el oponente, la segunda. En caso de que ambos decidan confrontar, se produce una pérdida y el beneficio social total se ve reducido, es decir, la suma de los pagos de todos los jugadores devuelve un valor menor a cualquier otra situación. Podemos hacer una analogía con la explotación de un recurso. Actuar agresivamente es tratar de hacerse por completo del bien a la fuerza. Si ambos deciden ser pacíficos pueden repartirse el recurso en partes iguales. Por último, si tienen comportamientos diferentes, el que actúe como *paloma* se queda con las manos vacías.

Para modelar este juego consideremos el beneficio $V > 0$ otorgado por el recurso y el costo $C > 0$ en caso de que lo repartan a la fuerza. Además definamos la matriz de pagos como en la figura 1.1.1.

Para analizar el problema usemos las definiciones recién vistas. Supongamos primero que $V > 2C$. Entonces existe un único equilibrio de Nash (estricto) que es (*halcón*, *halcón*).¹ El equilibrio es único y estricto porque no importa qué juegue el oponente, *siempre* resulta más beneficioso comportarse como *halcón*. Esto es en cierto punto paradójico, pues si ambos colaboraran pacíficamente obtendrían un mayor beneficio social: V contra $(V - 2C)$.

¹Esta situación es análoga al *dilema del prisionero*.

| | | Jugador 2 | |
|-----------|---------------|----------------------|---------------|
| | | <i>Halcón</i> | <i>Paloma</i> |
| Jugador 1 | <i>Halcón</i> | $(V/2 - C, V/2 - C)$ | $(V, 0)$ |
| | <i>Paloma</i> | $(0, V)$ | $(V/2, V/2)$ |

Figura 1.1.1: Matriz de pagos del juego *Halcones y palomas*. Aquí identificamos al jugador 1 como el «jugador columna» y al 2, como el «jugador fila».

En el caso $V = 2C$ obtenemos tres equilibrios, pero ninguno estricto. Estos son todos los pares de opciones menos el caso *(paloma, paloma)*.

Por último, si $V < 2C$ tenemos dos equilibrios: *(halcón, paloma)*, *(paloma, halcón)*.

El juego del *penal*

Ahora consideremos un juego que representa un *tiro desde el punto de penal*. Aquí el jugador 1 debe decidir donde patear un penal, a la izquierda o a la derecha. Y el jugador 2, el arquero, debe tratar de atajarlo desplazándose hacia algún costado. Si los jugadores eligen lados opuestos el resultado es un gol y gana el primer jugador. Y si optan por lo mismo, gana el segundo porque ataja el penal. La matriz de pago se muestra en la figura 1.1.2.

| | | Jugador 2 | |
|-----------|------------------|------------------|----------------|
| | | <i>Izquierda</i> | <i>Derecha</i> |
| Jugador 1 | <i>Izquierda</i> | $(0, 1)$ | $(1, 0)$ |
| | <i>Derecha</i> | $(1, 0)$ | $(0, 1)$ |

Figura 1.1.2: Matriz de pagos que representa un tiro desde el punto de penal.

Este es un ejemplo de un juego de *suma cero*; el agregado de todos los pagos es constantemente igual a cero, cuando uno obtiene un pago positivo es porque el otro tuvo uno negativo, y viceversa.

Además, en este ejemplo, ningún par de estrategia puras es un equilibrio de Nash.

El juego de *piedra, papel o tijera*

Por último consideremos el juego *piedra, papel o tijera* y representemos las opciones con las letras R, P y S , respectivamente. La matriz del juego puede escribirse como en la figura 1.1.3.

Nuevamente este juego no tiene ningún equilibrio de Nash en estrategias puras.

| | | Jugador 2 | | |
|-----------|---------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | | <i>Piedra</i> | <i>Papel</i> | <i>Tijera</i> |
| Jugador 1 | <i>Piedra</i> | (γ, γ) | $(-1, 1)$ | $(1, -1)$ |
| | <i>Papel</i> | $(1, -1)$ | (γ, γ) | $(-1, 1)$ |
| | <i>Tijera</i> | $(-1, 1)$ | $(1, -1)$ | (γ, γ) |

Figura 1.1.3: Matriz de pagos del juego *Piedra, papel o tijera*.

1.2. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas

1.2.1. Estrategias mixtas

Como vemos en los últimos dos ejemplos, no siempre existe un equilibrio de Nash (puro). Para obtener un resultado de existencia de equilibrio de Nash conviene volver *convexos* a los conjuntos de estrategias S_i . Entonces consideremos que un jugador no elige una única estrategia, sino que asigna una *probabilidad* a cada una de ellas. Esto nos lleva a la noción de estrategias mixtas.

Definición 1.2.1. Una estrategia mixta σ_i para el jugador i es una medida de probabilidad sobre su conjunto de estrategias S_i .

Si el cardinal de las estrategias es finito, $\#S_i = K_i$, decimos que el juego es finito y llamamos

$$\Sigma_i = \{p \in \mathbb{R}^{K_i} \text{ tal que } p_i \geq 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \text{ y } \sum_{k=1}^{K_i} p_k = 1\}$$

al conjunto de estrategias mixtas de i . Denotamos con Σ al conjunto de todas las combinaciones de estrategias que pueden emplear los jugadores,

$$\Sigma := \prod_{i \in \mathcal{I}} \Sigma_i.$$

Notemos que cada Σ_i es convexo y compacto si suponemos S_i finito. Además, podemos representar $\sigma_i \in \Sigma_i$ como

$$\sigma_i = (p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^{K_i}) \quad \text{con } p_i^1 + p_i^2 + \dots + p_i^{K_i} = 1,$$

donde p_i^t es la probabilidad con que el jugador i juega la acción $s_i^t \in S_i$.

Algunas veces cuando queramos referirnos al peso p_i^t que asigna la estrategia σ_i a la acción s_i^t podemos usar $\sigma_i(s_i^t)$. Así para cada acción $s_i^t \in S_i$, la estrategia pura σ'_i que representa a esta es aquella que tiene todos ceros salvo un 1 en el lugar t -ésimo.

Extendemos ahora las funciones de pagos E_i ($i = 1, 2, \dots$) a Σ mediante el valor esperado de los pagos:

$$E_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \int_{S_1} \cdots \int_{S_N} E_i(s_1, \dots, s_N) d\sigma_1(s_1) \cdots d\sigma_N(s_N), \quad (1.2.1)$$

donde $N = \#\mathcal{I}$ es la cantidad de jugadores.

Entonces debemos extender la definición de equilibrio de Nash.

1.2.2. Equilibrio de Nash

Definición 1.2.2. *Un equilibrio de Nash en un juego $\langle \mathcal{I}, \Sigma, (E_i)_{i \in \mathcal{I}} \rangle$ es un conjunto de estrategias $(\sigma_i^*)_{i \in \mathcal{I}} \in \Sigma$ tal que para cada jugador $i \in \mathcal{I}$ se tiene*

$$E_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq E_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \quad \text{para cualquier } \sigma_i \in \Sigma_i.$$

Extendemos de la misma manera el concepto de mejor respuesta definido en la sección 1.1.2 al juego $\langle \mathcal{I}, \Sigma, (E_i)_{i \in \mathcal{I}} \rangle$.

Debido a que en un principio trabajamos con juegos en los cuales el conjunto de acciones es el mismo para cada jugador y en pos de ahorrar notación, no indicamos el subíndice en cada estrategia que usemos. También nos referiremos al concepto de equilibrio de Nash diciendo simplemente *equilibrio*, ya que si bien hay otros refinamientos, no los utilizamos en esta tesis.

Un resultado central en la teoría de juegos es que todo juego finito con una cantidad finita de jugadores tiene, por lo menos, un equilibrio de Nash.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Nash). *Todo juego finito $\langle \mathcal{I}, \Sigma, (E_i)_{i \in \mathcal{I}} \rangle$ con \mathcal{I} también finito tiene, al menos, un equilibrio de Nash.*

Para probarlo usaremos el siguiente teorema.

Teorema 1.2.2 (Teorema del punto fijo de Brouwer). *Sea $F : K \rightarrow K$ continua con $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y convexo. Entonces existe un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in K$ tal que $F(x_0) = x_0$.*

Demostración del Teorema de Nash. Supongamos que tenemos N jugadores. Además sean $m_i = \#S_i$ con $1 \leq i \leq N$ y

$$c_i^j(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \max\{0; E_i(s_i^j, \sigma_{-i}) - E_i(\sigma_i, \sigma_{-i})\},$$

para reducir la notación usaremos c_i^j (dejando implícito (σ_i, σ_{-i})).

Definamos la función $F_i : \prod_{k=1}^N \Sigma_k \rightarrow \Sigma_i$ como

$$F_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N) = \left(\frac{\sigma_i(s_i^1) + c_i^1}{1 + \sum_{k=1}^{K_i} c_k^j}, \frac{\sigma_i(s_i^2) + c_i^2}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} c_k^j}, \dots, \frac{\sigma_i(s_i^{m_i}) + c_i^{m_i}}{1 + \sum_{k=1}^{m_k} c_k^j} \right)$$

para $k = 1, 2, \dots, N$.

Finalmente, sea $F : \prod_{k=1}^N \Sigma_k \rightarrow \prod_{k=1}^N \Sigma_k$, de la forma $F = (F_1, \dots, F_N)$. Como $\prod_{k=1}^N \prod_{k=1}^N \Sigma_k$ es compacto y convexo, existe $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_N^*)$ tal que es un punto fijo de F , el cual es un equilibrio de Nash. Si no lo fuese, alguno de los c_i^j sería positivo, pero no pueden ser positivos para todo j , pues

$$E_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{j=1}^{m_i} \sigma(s_i^j) E_i(s_i, \sigma_{-i})$$

es un promedio de todos estos valores. □

En muchos casos vamos a estudiar juegos en los cuales todos los participantes tengan las mismas opciones y los mismos pagos ante iguales situaciones. Para eso introduzcamos la siguiente definición.

Definición 1.2.3. Sea $\langle \mathcal{I}, \Sigma, (E_i)_{i \in \mathcal{I}} \rangle$ un juego. Si $\Sigma_i = \Sigma_j$ y $E_i \equiv E_j$ para todo i, j entonces decimos que el juego es simétrico.

En estos casos obviamos indicar los subíndices.

1.2.3. Vuelta a los ejemplos

Juego de *Halcones y Palomas*

Retomemos el caso $0 < V < 2C$ en el juego de *Halcones y Palomas*. Ahora podemos ver que tenemos un tercer equilibrio que viene representado por jugar H con probabilidad $V/2C$. Veamos que este valor es un equilibrio mixto pues deja indiferente al oponente. Para cumplir esto los pagos esperados para el oponente jugando H o P deben ser iguales independientemente de la probabilidad con que elija una u otra opción.

Así, sea p la probabilidad de jugar *halcón*. Buscamos p de manera que

$$p \left(\frac{1}{2}V - C \right) + (1 - p)V = p0 + (1 - p)\frac{V}{2}$$

es decir $p = V/2C$.

Juego del *penal*

Dijimos que este juego no tiene ningún equilibrio puro. Si buscamos equilibrios mixtos, el único equilibrio es aquel en el cual ambos jugadores eligen cada acción con igual probabilidad.

El juego de *piedra, papel o tijera*

Para cualquier γ hay un equilibrio mixto que es $\sigma^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ ya que el pago esperado en todas las situaciones es $\gamma/3$. Este ejemplo lo usamos en el próximo capítulo cuando estudiamos *equilibrios estables*.

Referencias

Los resultados básicos de teoría de juegos mencionados aquí pueden verse en los libros de Binmore [22], Ferguson [23], Osborne y Rubinstein [24].

Capítulo 2

Juegos evolutivos

En este capítulo trabajamos con juegos simétricos, es decir, juegos en los cuales todos los participantes tienen el mismo espacio de estrategias y los mismos pagos ante iguales situaciones (ver definición 1.2.3).

Nos interesa estudiar los equilibrios *estables* (si es que hay). Pero antes de definirlos consideremos que tenemos una población enorme de jugadores (infinita a los fines prácticos). El tamaño importa porque queremos trabajar pensando que cada individuo tiene *medida cero*. Por ejemplo consideremos un juego con sólo dos estrategias s y s' y sea p el porcentaje que juega s . No importa que jugador seleccionemos, suponemos que enfrenta con probabilidad p a jugadores que utilizan s y con $(1 - p)$ a jugadores que usan s' .

Hagamos la siguiente analogía. Supongamos que tenemos $s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(K)}$ posibles acciones y que cada individuo juega solamente una de éstas. Llamemos p_s a la proporción que juega s . Entonces, cada uno tiene probabilidad p_s de enfrentarse a cada estrategia s . Y si existe un vector de distribución de proporciones *estable* donde todos tienen el mismo pago esperado, es decir $E(s', \sum_s p_s s) = E(s'', \sum_s p_s s)$ para todo s', s'' con $p_{s'}$ y $p_{s''}$ positivos podemos esperar que las futuras generaciones en esta población mantengan la misma proporción de individuos (pues todos reproducen individuos con su misma estrategia).

Por otro lado, consideremos un juego simétrico de dos participantes con K acciones $(s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(K)})$ y una función de pagos E definida en cada s' como $E_i(s', \sum_s p_s s) = E(s', \sum_s p_s s)$ para $i = 1, 2$. Supongamos que esta función es la del juego del párrafo anterior donde enfrentar una población lo evaluamos igual a confrontar con un individuo que juega una estrategia mixta equivalente al vector de proporciones de estrategias en la población $(p_{s^{(j)}})_{(j=1, \dots, K)}$. Si los agentes se enfrentan con una misma estrategia $\sigma^* = (p_{s^{(1)}}, p_{s^{(2)}}, \dots, p_{s^{(K)}})$ podemos pensar que en realidad eligen con igual probabilidad un individuo de la población anterior y se fijan qué estrategia usa éste. Si volvemos a considerar el mismo vector *estable* anterior vale que $E_i(s', \sum_s p_s s) = E_i(s'', \sum_s p_s s)$ (nuevamente $i = 1, 2$) para todas las acciones con $p_{s'}$ y $p_{s''}$ positivas, lo cual es equivalente a decir que σ^* resulta un equilibrio de Nash en el juego de dos participantes.

Por esto vamos a trabajar haciendo una semejanza entre una estrategia σ en un juego simétrico de dos participante y un vector $(p_s)_{(s \in S)}$ que representa las diferentes proporciones en una población muy grande de individuos que sólo pueden jugar una estrategia pura. Notemos que evitamos el superíndice de cada estrategia pura. Por último aclaremos que esta idea puede extenderse a juegos de más de dos participantes.

2.1. Estrategias evolutivamente estables

2.1.1. Definiciones

Para relacionar esto con procesos evolutivos en grandes poblaciones, imaginemos que llevamos el juego de *Halcones y Palomas* representado en la matriz 1.1.1 a varios agentes y que los pagos se relacionan con la descendencia que tendrán. Supongamos que tenemos a todos los individuos optando por *paloma*. Si entonces alguno de ellos muta su comportamiento a *halcón*, empieza a dominar la situación pues produce una mayor descendencia. Esto genera una invasión (total si $V > 2C$) de *halcones* que reemplazan por completo a las *palomas*.

Con esto nos preguntamos ¿bajo qué condiciones una estrategia puede ser *estable*? Es decir, si tuviéramos una población jugando una estrategia σ^* ¿qué debería suceder para que se mantenga en el tiempo si apareciera un pequeño grupo eligiendo una nueva estrategia σ ? ¿Qué debería pasar para que perdure si se producen algunas mutaciones?

Consideremos una gran población que juega σ^* y un pequeño grupo de invasores que utiliza otra estrategia σ . El pago esperado de un integrante de este pequeño grupo invasor es de la forma

$$(1 - \varepsilon)E(\sigma, \sigma^*) + \varepsilon E(\sigma, \sigma)$$

considerando $0 < \varepsilon \ll 1$. Esto es ver el pago esperado como resultado de competir con los jugadores σ^* en mayor medida y complementarlo con la pequeña proporción de mutantes. De igual forma, el pago esperado para el resto de los individuos de la población original es

$$(1 - \varepsilon)E(\sigma^*, \sigma^*) + \varepsilon E(\sigma^*, \sigma).$$

Para que la población original pueda perdurar ante estos mutantes, debe mantener un mejor valor esperado de sus pagos sobre el de los mutantes, es decir

$$(1 - \varepsilon)E(\sigma^*, \sigma^*) + \varepsilon E(\sigma^*, \sigma) > (1 - \varepsilon)E(\sigma, \sigma^*) + \varepsilon E(\sigma, \sigma),$$

lo que es equivalente a

$$E(\sigma^*, (1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma) > E(\sigma, (1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma)$$

por la linealidad de la esperanza E . De hecho

$$\begin{aligned}(1 - \varepsilon)E(\sigma^*, \sigma^*) + \varepsilon E(\sigma^*, \sigma) &= \sum_s [(1 - \varepsilon)\sigma^*(s) + \varepsilon\sigma(s)]E(\sigma^*, s) \\ &= E(\sigma^*, (1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma).\end{aligned}$$

Por lo visto anteriormente, introducimos las siguientes definiciones:

Definición 2.1.1. *Una estrategia $\sigma^* \in \Sigma$ es evolutivamente estable si existe $\delta > 0$ tal que para cada $\sigma \neq \sigma^*$ y $0 < \varepsilon < \delta$ sucede que*

$$E(\sigma^*, (1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma) > E(\sigma, (1 - \varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma). \quad (2.1.1)$$

A este δ lo llamaremos barrera de invasión.

En esta definición, la barrera de invasión δ representa una defensa que preserve inmutable a la población σ^* siempre que la proporción de invasores no supere este valor.

2.1.2. Una definición equivalente

Otra formulación más fácil de corroborar cuando analicemos casos particulares la siguiente.

Proposición 2.1.1. *Si el juego es finito y simétrico entonces una estrategia $\sigma^* \in \Sigma$ es evolutivamente estable si y solo si cumple las dos condiciones.*

1. *Equilibrio. Para cualquier σ resulta que*

$$E(\sigma^*, \sigma^*) \geq E(\sigma, \sigma^*)$$

2. *Estabilidad. Si vale que $E(\sigma^*, \sigma^*) = E(\sigma, \sigma^*)$ entonces*

$$E(\sigma^*, \sigma) > E(\sigma, \sigma)$$

para todo $\sigma \neq \sigma^$.*

Recordemos que un juego finito es aquel que tiene finitas acciones posibles para cada individuo, pero nada dice de la cantidad de jugadores.

Demostración. Supongamos que la estrategia $\sigma^* \in \Sigma$ es evolutivamente estable en el sentido de la definición 2.1.1. Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ en (2.1.1) y usando la continuidad de E obtenemos que σ^* cumple la condición de equilibrio. Además, si $E(\sigma^*, \sigma^*) = E(\sigma, \sigma^*)$, entonces de (2.1.1) se deduce

$$\varepsilon E(\sigma^*, \sigma) + (1 - \varepsilon)E(\sigma^*, \sigma^*) > \varepsilon E(\sigma, \sigma) + (1 - \varepsilon)E(\sigma, \sigma^*)$$

con lo cual

$$\varepsilon E(\sigma^*, \sigma) > \varepsilon E(\sigma, \sigma)$$

para $\varepsilon \neq 0$. Luego, la condición de estabilidad también se verifica.

Para la vuelta supongamos que σ^* cumple las condiciones de equilibrio y estabilidad. Como el juego es finito, si $E(\sigma^*, \sigma^*) > E(\sigma, \sigma^*)$ entonces debe necesariamente existir un δ tal que si $0 < \varepsilon < \delta$ sucede que

$$E(\sigma^*, \varepsilon\sigma + (1 - \varepsilon)\sigma^*) > E(\sigma, \varepsilon\sigma + (1 - \varepsilon)\sigma^*).$$

Y si $E(\sigma^*, \sigma^*) = E(\sigma, \sigma^*)$ entonces

$$E(\sigma^*, \sigma) > E(\sigma, \sigma)$$

implica que

$$\varepsilon E(\sigma^*, \sigma) > \varepsilon E(\sigma, \sigma)$$

para $\varepsilon > 0$. Sumando $(1 - \varepsilon)E(\sigma^*, \sigma)$ de cada lado obtenemos (2.1.1). \square

Es importante el suponer que el juego es finito, pues en caso contrario la primer definición es más «fuerte». Consideremos un juego con infinitas estrategias puras. Sea σ^* una estrategia que cumple la definición 2.1.1 y sea $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de estrategias tales que para todo n

$$\begin{aligned} E(\sigma^*, \sigma_n) &= 0; & E(\sigma_n, \sigma_n) &= 1; \\ E(\sigma^*, \sigma^*) &= 0, & \text{y} & & E(\sigma_n, \sigma^*) &= -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Estas estrategias cumplen que $E(\sigma^*, \sigma^*) = 0 > -1/n = E(\sigma_n, \sigma^*)$ pero si fijamos $0 < \delta < 1$ y elegimos un $0 < \varepsilon < \delta$, siempre podemos encontrar σ_n con $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon > 1/n$ y que

$$\begin{aligned} E(\sigma_n, \varepsilon\sigma_n + (1 - \varepsilon)\sigma^*) &= \varepsilon E(\sigma_n, \sigma_n) + (1 - \varepsilon)E(\sigma_n, \sigma^*) = \varepsilon + (\varepsilon - 1)\frac{1}{n} \\ &> \varepsilon + (\varepsilon - 1)\varepsilon = \varepsilon^2 \\ &> 0 = E(\sigma^*, \varepsilon\sigma_n + (1 - \varepsilon)\sigma^*). \end{aligned}$$

Entonces σ^* no posee una barrera de invasión positiva, aunque es *evolutivamente estable* según la definición de la proposición 2.1.1.

2.1.3. Relación entre estrategias evolutivamente estables y equilibrios de Nash

A partir de ahora supondremos que los juegos son finitos. El siguiente lema resume las relaciones entre las nociones de estrategias evolutivamente estables y equilibrios de Nash:

Proposición 2.1.2. *Consideramos un juego simétrico. Dado $\sigma^* \in \Sigma$ consideramos las siguientes aserciones:*

- (i) σ^* es un equilibrio de Nash estricto,

(ii) σ^* es una estrategia evolutivamente estable,

(iii) σ^* es un equilibrio de Nash.

Entonces, valen las implicaciones

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$$

Las recíprocas no son ciertas en general.

La demostración de las implicaciones $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ es inmediata usando la proposición 2.1.1.

Contruyamos un ejemplo que muestre que un equilibrio de Nash puede no ser evolutivamente estable. Consideremos el juego *piedra, papel o tijera* cuya matriz de pago se muestra en la figura 1.1.3. Para cualquier γ , el único equilibrio es $\sigma^* = (1/3, 1/3, 1/3)$. Si $\gamma > 0$ resulta que σ^* no es evolutivamente estable. De hecho

$$E(\sigma^*, \sigma^*) = \frac{\gamma}{3} = E(R, \sigma^*)$$

pero

$$E(\sigma^*, R) = \frac{\gamma}{3} < \gamma = E(R, R).$$

Luego σ^* verifica la condición de equilibrio pero no la de estabilidad en la proposición 2.1.1.

Este ejemplo muestra además que las estrategias evolutivamente estables no siempre existen.

Veremos a continuación que el juego de *Halcones y Palomas* da un ejemplo de una estrategia evolutivamente estable que no es un equilibrio estricto.

2.1.4. Monomorfismos y polimorfismos

La siguiente definición es clave para analizar el tipo de equilibrios evolutivamente estables a los que se puede llegar.

Definición 2.1.2. Una estrategia evolutivamente estable se dice

- *monomorfismo* si todos los agentes usan la misma estrategia pura.
- *polimorfismo* cuando coexisten diferentes estrategias.

Veamos como ejemplo una aplicación al juego de *Halcones y Palomas*. Como dijimos antes, si $V > 2C$ el único equilibrio es $(\text{halcón}, \text{halcón}) = (H, H)$ y al ser estricto, también es evolutivamente estable. Además es un monomorfismo.

En cambio, si $V = 2C$, este equilibrio ya no es más estricto. Sin embargo sigue siendo evolutivamente estable y monomorfismo. Si $\sigma = (p, 1 - p) \neq H$ siendo $p \neq 1$ la probabilidad de elegir H , tenemos

$$E(\sigma, H) = pE(H, H) + (1 - p)E(P, H) = 0 = E(H, H),$$

ya que $E(H, H) = E(P, H) = 0$. Por otra parte, recordando que $E(H, P) = V$ y $E(P, P) = \frac{V}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} E(\sigma, \sigma) &= p^2 E(H, H) + p(1-p)E(H, P) + (1-p)pE(P, H) + (1-p)^2 E(P, P) \\ &= p(1-p)V + (1-p)(1-p)\frac{V}{2} \\ &= (1-p)V \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2} \right) \end{aligned}$$

Como $p < 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} E(\sigma, \sigma) &< (1-p)V = pE(H, H) + (1-p)E(H, P) \\ &= E(H, \sigma), \end{aligned}$$

con lo cual se verifica la condición de estabilidad.

Obtenemos así un ejemplo que muestra que un equilibrio evolutivamente estable no necesariamente es un equilibrio estricto.

Continuemos con el último caso, $0 < V < 2C$. Como dijimos antes, tenemos tres equilibrios. Estos son (H, P) , (P, H) y uno mixto σ^* en el cual la probabilidad de jugar H es $V/2C$. Resulta que σ^* es evolutivamente estable. Sea $\sigma = (q, 1-q)$ otra estrategia donde $q \neq p = V/2C$ es la probabilidad de elegir H . Como σ^* es un equilibrio, tenemos $E(\sigma^*, \sigma^*) \geq E(\sigma, \sigma^*)$. Supongamos que estas utilidades son iguales y verifiquemos que $E(\sigma^*, \sigma) > E(\sigma, \sigma)$. Tenemos

$$\begin{aligned} E(\sigma^*, \sigma) &= q \frac{V}{2C} \left(\frac{V}{2} - C \right) + (1-q) \frac{V}{2C} V \\ &\quad + q \left(1 - \frac{V}{2C} \right) 0 + \left(1 - \frac{V}{2C} \right) (1-q) \frac{V}{2} \end{aligned}$$

y

$$E(\sigma, \sigma) = q^2 \left(\frac{V}{2} - C \right) + q(1-q)V + q(1-q)0 + (1-q)^2 \frac{V}{2}.$$

Luego

$$E(\sigma^*, \sigma) - E(\sigma, \sigma) = C \left(q - \frac{V}{2C} \right)^2 > 0$$

pues $C > 0$. Con lo cual σ^* es evolutivamente estable.

Además de mostrar que existen polimorfismos evolutivamente estables, este ejemplo revela que existen equilibrios mixtos evolutivamente estables. Remarquemos que en este caso hay información simétrica en el sentido que ambos jugadores se encuentran en la misma situación de información. Al contrario, si suponemos una situación de información asimétrica, mostramos en el próximo capítulo que no puede haber equilibrios mixtos evolutivamente estables.

2.2. Ecuación del replicador y dinámica evolutiva

2.2.1. Ecuación del replicador

Consideremos que todos los jugadores tienen el mismo conjunto de estrategias puras posibles $S = (s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(K)})$. Notamos p_s la fracción de la población que juega con la estrategia s y

$$\sigma = (p_{s^{(1)}}, \dots, p_{s^{(K)}})$$

la estrategia mixta que consiste en jugar s con probabilidad p_s . Consideremos en cada instante a cada agente interactuando aleatoriamente con otro agente de una gran población. Luego

$$E(s, \sigma) = \sum_{s' \in S} p_{s'} E(s, s')$$

es el pago esperado para los agentes que juegan s cuando se encuentran en un ambiente compuesto por una proporción $\sigma_i = p_{s^{(i)}}$ de agentes que usan la acción $s^{(i)}$.

Queremos estudiar la interacción entre todos ellos en el tiempo y definir una forma en la cual crece o decrece la proporción de jugadores que usan s respecto a las proporciones que ocurren en la población total. Para esto definamos como crece $p_s(t)$. Usamos la *ecuación del replicador*

$$p_s(t + \tau) - p_s(t) = \tau p_s(t) \left(E(s, \sigma(t)) - \bar{E}(\sigma(t)) \right) \quad (2.2.1)$$

para cada s y para todo t y τ , donde

$$\bar{E}(\sigma(t)) := E(\sigma(t), \sigma(t)) = \sum_s p_s(t) E(s, \sigma(t))$$

es la ganancia promedio de toda la población en el instante t y $\sigma(t)$ es el vector de las proporciones $p_s(t)$ (en particular, $\|\sigma\|_1 = \sum_s p_s(t) = 1$ para todo t).

Intuitivamente, cuanto mayor o menor es la capacidad (de replicarse) de una determinada estrategia en relación al promedio de todas, se incrementa o disminuye su participación en la población, respectivamente. Podemos interpretar esta ecuación desde un punto de vista biológico. Imaginemos una especie definida por una estrategia (puede ser un comportamiento determinado, un gen). Si esta le proporciona una ventaja (o desventaja) con respecto al promedio de la población en su conjunto entonces puede reproducirse más (o menos), con lo cual ayuda a la diseminación (o extinción) de esa estrategia al transmitirla (o no) a sus descendientes.

Pasando al límite $\tau \rightarrow 0$ en (2.2.1) obtenemos la ecuación diferencial del replicador.

Definición 2.2.1 (Ecuación del replicador). *La ecuación diferencial del replicador es*

$$p'_s(t) = p_s(t) \left(E(s, \sigma(t)) - \bar{E}(\sigma(t)) \right) \quad (2.2.2)$$

para toda estrategia $s \in S$.

Observemos que

$$\sum_{s \in S} p_s(t) = 1 \quad \text{para todo } t$$

ya que, por definición de \bar{E} , la función $\phi(t) := \sum_{s \in S} p_s(t)$ verifica

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \bar{E}(\sigma(t))(1 - \phi(t)), \\ \phi(0) &= 1 \end{aligned}$$

por lo que $\phi(t) = 1$ para todo t en vista del teorema de Cauchy-Lipschitz. En particular la solución $p(t)$ existe para todo $t \geq 0$.

Además si $p_s(0) = 0$ para alguna estrategia $s \in S$ entonces $p_s(t) = 0$ para todo t (de nuevo por el teorema de Cauchy-Lipschitz). Volviendo a la analogía, si una estrategia no está presente en la población inicialmente, entonces nunca puede aparecer.

Identifiquemos cada estrategia de S con un vértice del simplex canónico de \mathbb{R}^K , vemos que una solución de (2.2.2) es una curva en este simplex y que cualquier vértice o faceta es invariante por el flujo.

En la próxima sección no interesa el comportamiento asintótico del flujo y su relación con la noción de equilibrio de Nash.

2.2.2. Dinámicas evolutivas

Pensemos que tenemos una población con una distribución aleatoria de estrategias. Hay dos preguntas naturales: ¿convergerá a una distribución que se mantenga estable? En caso de que así sea, ¿será un equilibrio de Nash del juego?

Para intentar contestarlas, veamos algunas definiciones.

Definición 2.2.2. *Un vector $\sigma^* = p^*$ es un punto fijo (o un equilibrio) para la dinámica del replicador si para cualquier estrategia pura s del sistema de ecuaciones (2.2.2) se tiene que $p_s^{*'}(t) = 0$ es decir*

$$E(s, \sigma^*) = E(\sigma^*, \sigma^*) \quad \text{para toda estrategia } s \in S \text{ tal que } p_s^* > 0 \quad (2.2.3)$$

Definición 2.2.3. *Un vector p^* es un punto fijo estable (o un equilibrio estable) para la dinámica del replicador si dado un entorno U de p^* existe un entorno V de p^* tal que si $p_0 \in V \subset U$, la solución $p(t)$ del sistema de ecuaciones (2.2.2) con condición inicial $p(t_0) = p_0$ satisface $p(t) \in U$ para todo $t \geq t_0$.*

Definición 2.2.4. *Una distribución p^* es un punto fijo (o un equilibrio) asintóticamente estable para la dinámica del replicador si es estable y además existe un entorno V de p^* tal que si $p(t_0) = p_0 \in V$, entonces $p(t) \rightarrow p^*$ cuando t tiende a infinito.*

El siguiente teorema, conocido en la literatura como el «folk theorem», da las relaciones existentes entre las nociones de punto de equilibrio para la dinámica del replicador y la de equilibrio de Nash para el juego.

Teorema 2.2.1. *Valen las siguientes aserciones*

- (i) *si σ es un equilibrio de Nash entonces es un punto fijo para la dinámica del replicador,*
- (ii) *si σ es un equilibrio de Nash estricto entonces σ es un punto de equilibrio asintóticamente estable,*
- (iii) *si σ^* es estable entonces σ^* es un Nash,*
- (iv) *si σ^* es límite de una órbita interior, es decir*

$$\sigma^* = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) \quad \text{con } p_s(0) > 0 \text{ para toda } s \in S,$$

entonces σ^ es un equilibrio de Nash.*

Demostración. Prueba de (i). Si σ Nash entonces $E(s, \sigma) \leq E(\sigma, \sigma)$ para toda $s \in S$. Luego

$$E(\sigma, \sigma) = \sum_{s \in S} p_s E(s, \sigma) \leq E(\sigma, \sigma) \sum_{s \in S} p_s = E(\sigma, \sigma)$$

Deducimos que $E(s, \sigma) = E(\sigma, \sigma)$ para toda $s \in S$ tal que $p_s > 0$, con lo cual σ es un equilibrio.

Prueba de (iii). Supongamos que σ^* es estable pero que no es un equilibrio de Nash. Luego existe una estrategia pura $h \in S$ y un $\delta > 0$ tal que

$$E(h, \sigma^*) - E(\sigma^*, \sigma^*) \geq 2\delta.$$

Por continuidad de E con respecto a σ obtenemos que existe $r_0 > 0$ tal que

$$E(h, \sigma) - E(\sigma, \sigma) \geq \delta \quad \text{si } |\sigma - \sigma^*| \leq r_0. \quad (2.2.4)$$

Como σ^* es estable, existe $r_1 > 0$ tal que para todo $t > 0$,

$$|\sigma^* - \sigma(t)| \leq r_0 \quad \text{si } |\sigma(0) - \sigma^*| \leq r_1.$$

Elegimos $\sigma(0)$ tal que $|\sigma(0) - \sigma^*| \leq r_1$ y $p_h(0) > 0$. Luego usando (2.2.4) con $\sigma(t)$ obtenemos que

$$p'_h(t) = p_h(t)[E(h, \sigma(t)) - E(\sigma(t), \sigma(t))] \geq \delta p_h(t) \quad \text{con } p_h(0) > 0$$

para todo $t > 0$ lo cual es absurdo.

Prueba de (iv) Supongamos que σ^* no es un equilibrio de Nash. Entonces (2.2.4) vale. Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = \sigma^*$ podemos aplicar (2.2.4) a $\sigma(t)$ para t grande (digamos $t \geq t_0$):

$$E(h, \sigma(t)) - E(\sigma(t), \sigma(t)) \geq \delta \quad \text{para } t \geq t_0.$$

Como $p_h(0) > 0$ por hipótesis, resulta $p_h(t) > 0$ para todo $t > 0$ y obtenemos

$$p'_h(t) = p_h(t)[E(h, \sigma(t)) - E(\sigma(t), \sigma(t))] \geq \delta p_h(t) \quad \text{para todo } t \geq t_0$$

lo cual es absurdo. □

Ninguna de las recíprocas es cierta en general. Para verlo examinemos los ejemplos del juego de *Halcones y palomas* y de *piedra, papel o tijera*.

2.2.3. Ejemplos

Juego de *Halcones y palomas*

Notamos $p = p_H$ la fracción de la población que juega *halcón* y $1 - p = p_P$ la fracción que juega Paloma. Luego la ecuación del replicador para p es

$$\begin{aligned} p'(t) = & p(t) \left(pE(H, H) + (1-p)E(H, P) \right. \\ & \left. - p^2E(H, H) - p(1-p)E(H, P) - p(1-p)E(P, H) \right. \\ & \left. - (1-p)^2E(P, P) \right). \end{aligned}$$

Después de simplificar obtenemos

$$p'(t) = Cp(t)(p(t) - 1) \left(p(t) - \frac{V}{2C} \right).$$

Vemos que los puntos de equilibrio son 0, 1 y $\frac{V}{2C}$ si $\frac{V}{2C} < 1$.

Si $\frac{V}{2C} \geq 1$ entonces 0 es inestable y 1 es asintótica y globalmente estable. Por otro lado si $\frac{V}{2C} > 1$, 1 es el único Nash lo cual muestra que un punto de equilibrio (acá 0) no es necesariamente un equilibrio de Nash. Si $\frac{V}{2C} = 1$ entonces los Nash son 0 y 1 y no son estrictos. En particular un equilibrio asintóticamente estable (acá 1) no es necesariamente un Nash estricto.

Finalmente en el caso $\frac{V}{2C} < 1$ la dinámica tiene tres puntos de equilibrios: 0 y 1 (ambos inestables) y $V/2C$ (asintóticamente globalmente estable). Además esos puntos son los equilibrios de Nash. En particular un Nash (acá 0 o 1) no es necesariamente estable.

Juego de Papel-Piedra-Tijera

Otro ejemplo de interés es el de *piedra, papel o tijera* generalizado en el que la matriz de pago tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & -a_3 \\ -a_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

con $a_i, b_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Se puede probar que la dinámica del replicador asociada a este juego tiene un único punto de equilibrio interior σ^* que es también el único Nash del juego. Además resulta que

1. σ^* es globalmente estable si y sólo si es asintóticamente estable si sólo si $\det A > 0$;
2. si $\det A = 0$ entonces las órbitas son ciclos alrededor de z ;
3. si $\det A > 0$ entonces z el conjunto ω -límite de cualquier órbita distinta de z es el borde del simplex.

En particular los casos $\det A \leq 0$ muestran que un equilibrio de Nash no es necesariamente límite de una órbita interior.

2.2.4. Dinámica del replicador y estrategias evolutivamente estables

Hasta ahora consideramos que los agentes jugaban estrategias puras. Podríamos enriquecer el modelo suponiendo que juegan estrategias mixtas $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in \Sigma$. Notamos $p_i(t)$ la fracción de la población jugando con la estrategia σ_i . La estrategia promedio $\bar{\sigma}(t)$ en la población al tiempo t es por lo tanto

$$\bar{\sigma}(t) = \sum_{i=1}^N p_i(t) \sigma_i.$$

Luego el pago de la estrategia σ_i contra la estrategia promedio es

$$E(\sigma_i, \bar{\sigma}(t)) = \sum_{j=1}^N p_j(t) E(\sigma_i, \sigma_j)$$

y el pago esperado es

$$\bar{E}(\bar{\sigma}(t)) = E(\bar{\sigma}(t), \bar{\sigma}(t)) = \sum_{j=1}^N p_j(t) p_i(t) E(\sigma_j, \sigma_i).$$

Podemos entonces plantear la dinámica del replicador como

$$p'_i(t) = p_i(t) \left(E(\sigma_i, \bar{\sigma}(t)) - \bar{E}(\bar{\sigma}(t)) \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Supongamos ahora que se juegan únicamente dos estrategias: una estrategia «residente» $\hat{\sigma}$ jugada en un principio por la mayoría de la población y otra «invasora» σ jugada por una minoría. Notemos $p(t)$ la fracción jugando con σ y $(1 - p(t))$ la fracción jugando con $\hat{\sigma}$. Después de simplificar, obtenemos que

$$p'(t) = p(t)(1 - p(t)) \left(Ap(t) + B(1 - p(t)) \right)$$

con

$$A = E(\sigma, \sigma) - E(\hat{\sigma}, \sigma), \quad \text{y} \quad B = E(\sigma, \hat{\sigma}) - E(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}).$$

Luego la estrategia invasora σ tiende a desaparecer de la población en el sentido que $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 0$ cuando $p(0) < 1$ si y solo si $(Ap + B(1 - p)) < 0$

para $0 < p \ll 1$; es decir $B < 0$ o $B = 0$, $A < B$. Esas condiciones son exactamente las condiciones de equilibrio y estabilidad de la Proposición 2.1.1. Luego la estrategia $\hat{\sigma}$ es evolutivamente estable si y solo si es asintóticamente estable para la dinámica del replicador.

Nuevamente no vale la recíproca. Para verlo consideremos un juego donde los jugadores reciben 1 cada uno si ambos juegan la estrategia A y 0 en cualquier otro caso. Aquí que ambos jueguen la estrategia B es un equilibrio de Nash pero no es estricto y cualquier perturbación llevaría a los agentes a desplazarse a A .

2.3. Referencias

La noción de estrategias evolutivamente estables se debe a Maynard Smith y Price en [3]. Desde entonces numerosos trabajos explotaron la posibilidad de llegar a los equilibrios de Nash vía puntos fijos de ecuaciones diferenciales. Recordemos que si bien la existencia de equilibrios se tiene asegurada, no existen algoritmos que permitan obtenerlos.

Una referencia obligada es el muy completo [2] de Hofbauer y Sigmund. Para una presentación de las distintas ramas de la teoría de juegos evolutivos (incluyendo entre otras los juegos estocásticos y dinámicas discretas modeladas con ecuaciones en diferencias, aplicaciones a problemas biológicos y sociales) se puede ver los libros de Sandholm [8], Nowak [5] y los minicursos en [10].

Capítulo 3

Inexistencia de equilibrios mixtos en juegos asimétricos

Un conflicto asimétrico (para nosotros un juego) entre animales es una situación donde los oponentes asumen diferentes roles en la disputa. Estos pueden ser tales como «originario» o «intruso» en un conflicto territorial. Además estos pueden definirse como una combinación de varias variables; por ejemplo tamaño o edad. Consideramos información incompleta en el sentido de que el rol del oponente no puede ser percibido de forma totalmente certera por el jugador. En este capítulo asumimos que dos individuos nunca pueden encontrarse en un ámbito en el cual ambos tengan la misma de situación de información. Esto lo llamamos *información asimétrica*. Para satisfacer esta condición bastará con que los dos jugadores nunca tengan el mismo rol y será una condición esencial en lo que sigue.

El objetivo es ver que en los modelos asimétricos considerados aquí las estrategias *evolutivamente estables* solamente pueden ser equilibrios puros. En esta situación, una vez que cada jugador sabe su rol y obtiene la información (inexacta) de su rival, decide actuar siempre de igual forma. Es importante señalar que este resultado depende del supuesto de información incompleta. Como ya vimos en el capítulo anterior, sí existen estrategias mixtas evolutivamente estables, como en el juego de *Halcones y palomas* cuando $0 < V < 2C$.

La idea intuitiva de la inestabilidad de las estrategias mixtas en equilibrio reside en el hecho de que siempre es posible encontrar otra estrategia óptima variando el comportamiento en solamente una situación de información (*conjunto de información* en juegos en forma extensiva). Así, consideremos un mutante que realiza una respuesta óptima alternativa con esta característica. Entonces el éxito de su estrategia es el mismo que el del resto en aquellas situaciones en las cuales ambos se comportan de igual forma. Pero como suponemos información asimétrica, tampoco hay diferencias en la situación en la cual éste difiere

de la población original. Esto sucede porque siempre sus oponentes, ante esta situación de información, se comporta siguiendo la estrategia original, sean o no mutantes. Haciendo una analogía con lo que vimos en el capítulo anterior, nada impide la proliferación del «gen» mutante en las futuras generaciones.

3.1. Juegos en poblaciones

Originalmente, se introdujo el concepto de estrategia evolutivamente estable para juegos en forma *normal*. Otra forma de describir un juego es la forma *extensiva*, donde el juego se representa con un árbol dirigido y cada nodo representa una situación donde el jugador debe tomar una decisión; las aristas salientes corresponden a las acciones que puede usar el jugador. Si bien el juego sigue un recorrido desde el nodo raíz hasta uno de los nodos terminales donde cada participante recibe su pago, es posible que un jugador no sepa en qué nodo está y no pueda distinguir entre dos o más a partir de la información que tiene. A este conjunto de nodos lo llamaremos un *conjunto de información* y para prescindir de la descripción de la forma extensiva, y asumiendo que los jugadores eventualmente tomarán decisiones en más de un caso, hablaremos de un *situación de información*.

Vamos a introducir las nociones necesarias para juegos de poblaciones con información incompleta.

- *Situación de información.* Como dijimos, se corresponde a un conjunto de información. La noción de juegos de información incompleta recae en la idea de que los jugadores deben decidir en diferentes escenarios posibles de datos. Cada situación difiere para el jugador respecto de la información que recibe. Al conjunto de todas las situaciones de información lo llamamos U y asumimos que es finito y no vacío.
- *Acciones.* Para cada situación de información u el jugador posee un conjunto C_u (también finito y no vacío) de posibles acciones a realizar. Sea $C : U \rightarrow \{C_u\}_{u \in U}$ la función que asigna a cada situación de información su conjunto de acciones.
- *Estrategia local.* Una estrategia local $\sigma_u : C_u \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ para una situación de información u es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de elecciones C_u . Notamos $\sigma_u(s)$ a la probabilidad que le asigna σ_u a cada acción $s \in C_u$. Al conjunto de todas las estrategias locales para u lo llamamos Σ_u .
- *Estrategia global.* Una estrategia global $\sigma : U \rightarrow \cup_{v \in U} \Sigma_v$ es una función que asigna a cada situación de información u una estrategia local σ_u . Llamamos Σ al conjunto de todas las estrategias globales.
- *Función de pagos.* La función de pagos $E : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ asigna un valor a cada par de estrategias globales. Este es el pago (esperado) que recibe el

jugador uno. La forma de esta función dependerá del modelo que estemos estudiando.

- *Juego de población.* Un juego de población $G = (U, C, E)$ consiste en un conjunto de situaciones de información U , una función de elección C y otra función de pagos E como las recién descritas.

Podemos pensar el juego como si hubiera una elección aleatoria de un animal (jugador). El pago $E(p, q)$ es la aptitud esperada con la cual podrá reproducirse y tener descendencia si se comporta acorde a p , en un entorno de conflicto con otros animales de su especie que actúan según q . Hay dos formas de interpretar esto.

1. Primero imaginemos que la población consta de N animales que tienen diferentes roles. Cada jugador es asignado a un animal con igual probabilidad. A esto lo llamamos *estudio con muchos jugadores* (y consideramos a N muy grande). Entonces E es una función de pagos definida parcialmente para un juego simétrico; el pago de un jugador sólo está definido para los casos en los cuales todos los demás jugadores usan la misma estrategia (q). Para las restantes situaciones, los pagos no están especificados. Pero esto no nos preocupa ya que la teoría evolutiva estudia estrategias estables en las cuales muy pocos individuos mutan, es decir, se desvían de la estrategia común.
2. La segunda interpretación posible es considerar que sólo hay un pequeño número de jugadores, digamos n . En este modelo de asimetría en la información consideramos que tenemos $n = 2$. Supongamos que una situación de conflicto es elegida al azar dentro de un universo de posibles conflictos, que m de los n jugadores son elegidos aleatoriamente y asignados a los m animales realmente involucrados en la disputa. Cada jugador tiene igual probabilidad de ser asignado a cada animal. A este caso lo llamamos *estudio con pocos jugadores*. En el caso $n = 2$ de esta interpretación tenemos la ventaja de que $G = (U, C, E)$ se transforma en un juego simétrico de dos personas con una matriz de pagos completa.

Parece natural adoptar la segunda interpretación para retomar los juegos ya estudiados. Sin embargo, para las definiciones formales no es necesario decidir cuál de los dos caminos seguir. El análisis se focaliza en un solo jugador que puede o no desviar su conducta de la estrategia usada. Como el número de jugadores no importa realmente, no necesitamos especificarlo para un juego de población G .

3.2. Estrategias evolutivamente estables

Aunque vimos en el capítulo anterior la equivalencia de las dos definiciones, en este caso trabajaremos con la segunda. Además consideremos las siguientes definiciones.

Definición 3.2.1 (Mejor respuesta). Sean r y q dos estrategias globales para un juego de población $G = (U, C, E)$. Decimos que r es la mejor respuesta para q si vale

$$E(r, q) = \max_{p \in \Sigma} E(p, q). \quad (3.2.1)$$

Definición 3.2.2 (Estrategia en equilibrio). Decimos que una estrategia p está en equilibrio si es la mejor respuesta para p , es decir, verifica la primer condición de evolución estable.

Esto es igual a pedir que (p, p) resulte un equilibrio de Nash.

Definición 3.2.3 (Mejor respuesta alternativa). Sea p una estrategia en equilibrio. A otra estrategia r que resulte mejor respuesta para p la llamamos mejor respuesta alternativa.

Así, una estrategia p es evolutivamente estable si y solo si está en equilibrio y además si r es una mejor respuesta alternativa para p vale que

$$E(p, r) > E(r, r).$$

3.3. Modelos para conflictos asimétricos

Trabajamos ahora con un esquema de información asimétrica que modela un conflicto entre animales. Tenemos un juego de poblaciones en el cual dos animales están involucrados en cada conflicto. Podemos seguir interpretándolo como el caso de «estudio con pocos jugadores».

- *Roles.* Numeremos con $1, 2, \dots, I$ la cantidad de roles que pueden tocarle a un jugador. Como antes, podemos pensarlos como características físicas en una disputa por un territorio.
- *Estímulo percibido.* No necesitamos restringir el modelo a una situación en la cual el rol del oponente es conocido con total exactitud por cada jugador. Así asumimos que existen S estímulos percibidos. Nuevamente los numeramos $1, 2, \dots, S$. La probabilidad de recibir alguno de estos estímulos depende del rol del oponente (le da una percepción al jugador, pero no con certeza absoluta). Podemos pensar cada estímulo como un imagen imprecisa del rol del oponente.
- *Situación de información.* Un par (i, s) siendo i un rol y s un estímulo aporta los datos que los jugadores utilizarán para elegir el curso de sus acciones en cada juego. Este par usamos como la definida *situación de información* anterior y resulta la base por la cual cada jugador se guía para saber en que contexto se encuentra. Entonces cada par $(i, s) \in U$. Pedimos que el conjunto sea no vacío, pero tampoco incluimos los pares que sabemos que nunca ocurrirán.

- *Competencia.* Una competencia es un par (u, v) donde u y v son situaciones de información. El conjunto de todos estos pares lo llamamos X . Cada competencia describe la situación de ambos jugadores al inicio de la disputa.
- *Distribución básica.* Con la interpretación de pocos jugadores que estamos usando, elegimos aleatoriamente una competencia y de igual forma asignamos los dos jugadores. Así sea w_{uv} la probabilidad de que la competencia sea con el par (u, v) , es decir, que las situaciones de información para el primer y segundo jugador sean u y v , respectivamente. Asumimos que w_{uv} no depende de la estrategia utilizada.

Como (u, v) y (v, u) sólo difieren cuando formalizamos el modelo, pero en la interpretación son situaciones simétricas, pedimos que valga que

$$w_{uv} = w_{vu} \text{ para todo } (u, v) \in X.$$

Los modelos considerados tienen la propiedad poseer información asimétrica; dos oponentes nunca pueden encontrarse con la misma situación de información, es decir,

$$w_{uu} = 0 \text{ para todo } u \in U.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $w_{uv} > 0$, eliminando de $U \times U$ aquellos pares con probabilidad nula.

- *Acciones.*¹ Asumimos que un jugador con una situación de información u tiene $K = K(u) \in \mathbb{N}$ acciones que elegir, s_1, s_2, \dots, s_K . Notemos $C_u = (s_1, \dots, s_K)$ al conjunto de elecciones válidas para la situación u . Entonces llamemos S al conjunto de todas las acciones posibles. Como antes, podemos interpretarlas de acuerdo a un comportamiento animal de «ataque», «huida» o «exposición».
- *Función de pagos.* Sea $h : X \times S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ la función de pagos tal que $h_{uv}(s, s')$ sea el pago del jugador uno si con la información u juega la acción s y el segundo jugador opta por s' con información v . Debemos interpretar a h_{uv} como una matriz de pagos con $K(u)$ filas y $K(v)$ columnas, dependiente de las acciones que decidan los jugadores una vez dadas las situaciones de información. Asumimos que estas matrices existen para todo par (u, v) tal que $w_{uv} > 0$.

Podemos tener estrategias locales mixtas (algún jugador no elige con certeza una acción) con lo cual trabajamos con la función de pagos esperados $H : X \times \cup_{v \in U} P_v \times \cup_{v \in U} P_v \rightarrow \mathbb{R}$. Si tenemos la situación de información (u, v) y el primer jugador (I) usa σ_u y el segundo (II), $\hat{\sigma}_v$, la función de pagos esperados resultante es

$$H_{uv}(\sigma_u, \hat{\sigma}_v) = \sum_{s \in C_u} \sum_{s' \in C_v} \sigma_u(s) \hat{\sigma}_v(s') h_{uv}(s, s'). \quad (3.3.1)$$

¹También podremos referirnos como «elecciones» indistintamente.

- *Pago local.* Sean σ_u una estrategia local y $\hat{\sigma}$ una estrategia global. Definimos el pago local del jugador I para $(\sigma_u, \hat{\sigma})$ con información u de la forma

$$H_u(\sigma_u, \hat{\sigma}) = \sum_{v \in U} w_{uv} H_{uv}(\sigma_u, \hat{\sigma}_v) \quad (3.3.2)$$

donde $\hat{\sigma}_v$ es la estrategia local que asigna $\hat{\sigma}$ a la información v .²

- *Pago total.* Ahora estamos en condiciones de definir la función E . Para dos estrategias globales σ y $\hat{\sigma}$ definimos

$$E(\sigma, \hat{\sigma}) = \sum_{u \in U} \sum_{v \in U} w_{uv} H_{uv}(\sigma_u, \hat{\sigma}_v) \quad (3.3.3)$$

$$= \sum_{u \in U} H_u(\sigma_u, \hat{\sigma}). \quad (3.3.4)$$

Como señalamos, $E(\sigma, \hat{\sigma})$ representa el valor esperado del pago del jugador I si utiliza σ y el jugador II usa $\hat{\sigma}$. También en este caso, el pago esperado del jugador II resulta $E(\hat{\sigma}, \sigma)$. Esto se debe a la simetría de la situación.

- *Modelos.* Un modelo de la clase que estamos estudiando en este capítulo puede caracterizarse como un quintuplo $M = (Q, S, U, w, h)$ donde Q es la cantidad de roles, S el número de estímulos percibidos, U el conjunto de situaciones de información, C el conjunto de funciones de elección, w la distribución de probabilidad de los sucesos de X y h una función que asigna una matriz de pagos a cada par (u, v) de X con $w_{uv} > 0$. No es necesario mencionar C ya que toda la información relevante está contenida en h . Con esto sea K la clase de todos los modelos descriptos aquí.
- *Juegos de poblaciones de un modelo.* Cada modelo $M \in K$ da lugar a un juego de población $G = (U, C, E)$ con las U, C, E definidas igual que en el modelo M . A este juego G lo llamamos el juego de población del modelo M .

3.4. Resultados

Sigamos trabajando con un juego G de un modelo M . Tenemos las siguientes definiciones:

- *Estrategias puras y mixtas.* Una estrategia local σ_u es pura si asigna probabilidad 1 a una sola elección $s \in C_u$ (y cero a las demás). Siguiendo este criterio, una estrategia global σ es pura si dada cualquier situación de información u , σ_u resulta pura. A cualquier estrategia que no cumple alguna de estas características la llamamos *mixta*. Si una elección $s \in C_u$ aparece en el argumento de H_{uv} o H_u entendemos que hace referencia a una estrategia pura que asigna probabilidad 1 a esta acción.

²A partir de ahora, siempre mantendremos la misma letra para referirnos a las estrategia locales de cada estrategia global con la que trabajemos.

- *Acción localmente óptima.* Una acción $s \in C_u$ es localmente óptima contra $\hat{\sigma}$ si vale que

$$H_u(s, \hat{\sigma}) = \max_{s' \in C_u} H_u(s', \hat{\sigma}). \quad (3.4.1)$$

- *Mejor respuesta local.* Una estrategia local $\theta_u \in \Sigma_u$ es mejor respuesta local para $\hat{\sigma} \in \Sigma$ si vale que

$$H_u(\theta_u, \hat{\sigma}) = \max_{\sigma_u \in \Sigma_u} H_u(\sigma_u, \hat{\sigma}). \quad (3.4.2)$$

Ya tenemos toda la construcción que necesitamos para probar el teorema principal de esta parte.

Lema 3.4.1. *Una estrategia local θ_u es mejor respuesta local para $\hat{\sigma}$ si y solo si cualquier elección $s \in C_u$ tal que $\theta_u(s) > 0$ es localmente óptima para $\hat{\sigma}$.*

Demostración. Por la definición de la ecuación (3.3.2) y el hecho de que todas las sumatorias usadas son finitas, tenemos que

$$H_u(\theta_u, \hat{\sigma}) = \sum_{v \in U} w_{uv} H_{uv}(\theta_u, \hat{\sigma}_v) \quad (3.4.3)$$

$$= \sum_{v \in U} w_{uv} \sum_{s \in C_u} \sum_{s' \in C_v} \theta_u(s) \hat{\sigma}_v(s') h_{uv}(s, s') \quad (3.4.4)$$

$$= \sum_{s \in C_u} \theta_u(s) \sum_{v \in U} w_{uv} \sum_{s' \in C_v} \hat{\sigma}_v(s') h_{uv}(s, s') \quad (3.4.5)$$

$$= \sum_{s \in C_u} \theta_u(s) H_u(s, \hat{\sigma}). \quad (3.4.6)$$

Para que θ_u no sea mejor respuesta, debe existir una estrategia σ_u tal que $H_u(\sigma_u, \hat{\sigma}) > H_u(\theta_u, \hat{\sigma})$. Pero esto sucede si y solo si algún s con $\theta_u(s) > 0$ no es localmente óptimo para $\hat{\sigma}$; lo que prueba el lema. \square

Lema 3.4.2. *Una estrategia global θ es mejor respuesta para $\hat{\sigma}$ si y solo si cada estrategia local θ_u es mejor respuesta local para $\hat{\sigma}$.*

Demostración. Similar a lo anterior, θ no es mejor respuesta si existe σ tal que $E(\sigma, \hat{\sigma}) > E(\theta, \hat{\sigma})$. Entonces por ecuación (3.3.4) esto sucede si y solo si alguna estrategia local θ_u no es mejor respuesta. \square

Lema 3.4.3. *Sea σ una estrategia mixta en equilibrio. Entonces existe otra estrategia alternativa, pura, tal que es mejor respuesta para σ .*

Demostración. Para cada $u \in U$ sea $s(u) \in C_u$ una acción localmente óptima para σ . Así basta considerar la estrategia pura θ que para todo $u \in U$, su estrategia local θ_u elige $s(u)$ con probabilidad 1. Por el lema 3.4.1 cada k_u es mejor respuesta local para σ , entonces por el lema anterior, θ resulta una estrategia mejor respuesta para σ . \square

Lema 3.4.4. Sean σ una estrategia en equilibrio y $\hat{\sigma}$ una mejor respuesta alternativa para σ . Luego existe una estrategia θ que es mejor respuesta alternativa para σ y que sus estrategias locales θ_u son iguales a las σ_u salvo en una única situación de información.

Demostración. Como θ es distinta de σ , existe una situación de información v tal que $\hat{\sigma}_v \neq \sigma_v$. Sea θ la estrategia global tal que

$$\begin{aligned}\theta_v &= \hat{\sigma}_v \\ \theta_u &= \sigma_u \text{ para todo } u \neq v.\end{aligned}$$

Por el lema 3.4.2, θ resulta mejor respuesta alternativa para σ . \square

Lema 3.4.5. Sea σ una estrategia evolutivamente estable, entonces no existe una estrategia tal que sea mejor respuesta alternativa para σ .

Demostración. Supongamos que existe una mejor respuesta alternativa para σ . Por el lema 3.4.4 existe una mejor respuesta alternativa θ que difiere de σ en una única situación de información v . Entonces $E(\sigma, \sigma) = E(\theta, \sigma)$. Además resulta que para todo $\hat{\sigma}_v \in \Sigma_v$ vale que

$$\begin{aligned}H_v(\hat{\sigma}_v, \theta) &= \sum_{u \in U} w_{vu} H_{vu}(\hat{\sigma}_v, \theta_u) \\ &= \sum_{u \in U} w_{vu} H_{vu}(\hat{\sigma}_v, \sigma_u) = H_v(\hat{\sigma}_v, \sigma)\end{aligned}$$

ya que $\theta_u = \sigma_u$ para cualquier $u \neq v$ y $w_{vv} = 0$ pues estamos trabajando con información asimétrica.

Como σ y θ son mejores respuestas globales para σ , por el lema 3.4.2 sabemos que σ_v y θ_v son mejores respuestas locales para σ . Así,

$$H_v(\sigma_v, \sigma) = H_v(\theta_v, \sigma).$$

Y si en la primera igualdad reemplazamos $\hat{\sigma}_v$ por σ_v y luego por θ_v , obtenemos que

$$H_v(\sigma_v, \theta) = H_v(\sigma_v, \sigma) = H_v(\theta_v, \sigma) = H_v(\theta_v, \theta).$$

Además sabemos que σ y θ sólo difieren en la situación de información v , es decir,

$$H_u(\theta_u, \theta) = H_u(\sigma_u, \theta) \text{ para todo } u \neq v$$

y si combinamos ambas ecuaciones, resulta que

$$E(\theta, \theta) = E(\sigma, \theta).$$

Esto contradice la condición de estabilidad de la estrategia σ , lo cual niega que sea una estrategia evolutivamente estable como pedimos en la hipótesis. Por lo tanto no puede existir una mejor respuesta alternativa para σ . \square

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema.

Teorema 3.4.1. *Sean $G = (U, C, E)$ un juego con un modelo $K \in M$ y σ una estrategia evolutivamente estable para G . Entonces σ es una estrategia pura. Además no existe una mejor respuesta alternativa para σ .*

Demostración. Si σ fuera una estrategia mixta, por el lema 3.4.3 debería existir una mejor respuesta alternativa para σ . Pero si suponemos que es una estrategia evolutivamente estable, por el lema 3.4.5 no existe una mejor respuesta alternativa. Por lo tanto σ debe ser pura. \square

3.5. Referencias

En este capítulo desarrollamos el trabajo [9] de Reinhard Selten, quien ganó el Premio Nobel de Economía de 1994 junto con John C. Harsanyi y J. Nash. El estudio de conflictos entre animales fue el origen de la teoría de juegos evolutiva, con el trabajo pionero de John Maynard Smith [4, 3].

Capítulo 4

Juegos exteriores

Como hicimos varias veces, retomemos el juego de *Halcones y palomas*. Observemos la matriz de pagos de la figura 1.1.1 y consideremos una gran población de jugadores. Supongamos que juegan repetida y aleatoriamente un juego como este. Nos referiremos al juego de *Halcones y palomas* en este contexto como un *juego exterior* pues involucra a todos los miembros compitiendo entre ellos uno a uno. Pero cuando los hacemos jugar debemos «ubicarlos» en filas o columnas. En un comienzo consideramos que cualquier característica usada para colocar a un jugador en una fila o una columna no puede ser percibida por los participantes. Así no pueden condicionar su accionar al rol que se les asigna en el juego exterior.

Un juego de evolución como el planteado debe ser más interesante de lo que puede observarse en el juego exterior. Consideremos la posibilidad de que los jugadores sean capaces de usar la estructura del juego para condicionar su comportamiento en el juego de *Halcones y palomas* dependiendo de su posición en una columna o en una fila. Interpretamos que el lugar de «jugador de fila» o «jugador de columna» representa una asimetría observable por los agentes. Podemos pensarlo como dos animales en disputa por un territorio, jugar en la fila puede identificarse como ser oriundo del lugar y columna, ser el animal invasor.

4.1. Juego *completo*

Con esta idea, si el comportamiento puede ser condicionado por el rol, tenemos cuatro estrategias puras: HH , HP , PH y PP , donde PH significa jugar *paloma* si en el juego exterior tiene asignada una fila y *halcón* si toca columna. Entonces en lugar de tener una matriz de pagos de dos por dos, debemos trabajar con una matriz de cuatro por cuatro. Observemos la figura 4.1.1, en esta construcción suponemos que es equiprobable jugar en la posición de fila o columna. Por ejemplo, el pago esperado a un jugador que elige HH cuando el

| | | Jugador 2 | | | |
|-----|------|----------------------------------|---|---|---|
| | | PP | PH | HP | HH |
| J 1 | PP | $\frac{1}{2}V$ $\frac{1}{2}V$ | $\frac{3}{4}V$ $\frac{1}{4}V$ | $\frac{3}{4}V$ $\frac{1}{4}V$ | V 0 |
| | PH | $\frac{1}{4}V$ $\frac{3}{4}V$ | $\frac{1}{2}V$ $\frac{1}{2}V$ | $\frac{1}{2}(V - C)$ $\frac{1}{2}(V - C)$ | $\frac{3}{4}V - C$ $\frac{1}{4}V - \frac{1}{2}C$ |
| | HP | $\frac{1}{4}V$ $\frac{3}{4}V$ | $\frac{1}{2}(V - C)$ $\frac{1}{2}(V - C)$ | $\frac{1}{2}V$ $\frac{1}{2}V$ | $\frac{3}{4}V - C$ $\frac{1}{4}V - \frac{1}{2}C$ |
| | HH | 0 V | $\frac{1}{4}V - \frac{1}{2}C$ $\frac{3}{4}V - C$ | $\frac{1}{4}V - \frac{1}{2}C$ $\frac{3}{4}V - C$ | $\frac{1}{2}V - C$ $\frac{1}{2}V - C$ |

Figura 4.1.1: Matriz de pagos del juego completo de *Halcones y palomas*.

oponente juega HP resulta

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}V - C \right) + \frac{1}{2}V = \frac{3}{4}V - C$$

pues espera recibir $(V/2 - C)$ la mitad de las veces (cuando juega H contra H) y V en la otra mitad (H contra P). A este juego con una matriz de cuatro por cuatro lo llamamos *juego completo* porque incorpora la posibilidad de que la «Naturaleza» determine que rol ocupa cada jugador en el juego exterior.

Si queremos analizar una situación con esta teoría, en general esta matriz resulta poco práctica; incluso es factible que no refleje de forma certera la situación a modelar. Más aún, los pagos probablemente tengan pequeñas variaciones que dependan de los rasgos propios de cada jugador. Por ejemplo, si pensamos nuevamente en animales, aquel que esté hambriento le dará mayor valor a un alimento que otro que encontró como suplir ese recurso. Nos preguntamos entonces si conviene modelar esta situación como un juegos simétrico o asimétrico.

4.2. ¿Juegos simétricos o asimétricos?

Redefinamos y llamaremos *juegos simétricos* a aquellos en los cuales los jugadores no puedan identificarse con distintos roles.

Si permitimos la identificación en roles (y consideramos que nunca dos jugadores pueden hallarse en la misma situación) y no trabajamos con perturbaciones en los pagos vimos en el capítulo anterior que todos los equilibrios estables son puros. ¿Pero qué sucede si permitimos perturbaciones en los pa-

gos? ¿Puede haber equilibrios evolutivamente estables en el juego completo que sean equilibrios mixtos en los juegos externos?

Construimos un juego completo que permita observar las perturbaciones y asignar distintos roles a los jugadores. Un modelo de estas características *siempre* tiene una estrategia que aproxima el equilibrio mixto del juego externo y es su mejor respuesta estricta, lo que lo hace evolutivamente estable. Llamamos a esta estrategia *equilibrio independiente de los roles* de un juego completo; es equivalente a un animal que condiciona su comportamiento a las perturbaciones que tiene en sus pagos e ignora las asimetrías en la identificación de los roles.

Pero antes debemos tener en consideración ciertas cuestiones. Como ya vimos, una estrategia σ^* es evolutivamente estable si una población que juega σ^* no puede ser invadida por un pequeño número de mutantes que jueguen σ . Pero en el caso que los mutantes sean exitosos y logren generar una «masa crítica»¹ ya no podemos asegurar mejores pagos para la estrategia σ^* .

Para cada mutante σ existe una *barrera de invasión* $\delta(\sigma)$ tal que mientras no superen esta proporción, obtienen menores pagos esperados que la estrategia estable. Esta definición permite diferentes barreras para las potenciales mutaciones que pueden surgir. Cuando el juego completo es finito, la dependencia de barreras es insignificante: basta considerar la menor de todas las posibles estrategias puras distintas para encontrar una barrera positiva que proteja a la estrategia σ^* de cualquier invasión. Pero aparecen problemas interesantes cuando trabajamos con juegos de infinitas estrategias.

4.3. El juego

Trabajemos con un juego externo de pagos simétricos representado por la primer matriz de la figura 4.3.2 donde $A < B$ y $C > D$. Tenemos un equilibrio mixto que viene dado por jugar X con probabilidad $p = (C - D)/(B + C - A - D)$ ya que

$$\begin{aligned} pA + (1 - p)C &= pB + (1 - p)D \\ C - D &= pB - pD - pA + pC = p(B - D - A + C) \end{aligned}$$

y entonces

$$p = \frac{C - D}{B + C - A - D}.$$

Además hay dos equilibrios puros; estos son (X, Y) e (Y, X) .

Un ejemplo que debemos tener presente es el de *Halcones y palomas* con $0 < V < 2\hat{C}$, $A = V/2$, $B = V$, $C = 0$ y $D = V/2 - \hat{C}$ valores de la matriz.²

Para introducir perturbaciones en el modelo, supongamos que los pagos A , B , C y D son valores esperados y que cuando dos jugadores se enfrentan, en realidad reciben los pagos de la segunda matriz de la figura 4.3.2.

¹La definición pedía que los pagos esperados fueran mejores para σ^* si los mutantes eran una cantidad menor a δ .

²Notamos con \hat{C} al costo de enfrentar *halcón* contra *halcón*.

| | | Jugador 2 | | | | Jugador 2 | |
|-----|---|-----------|---|-----|---|----------------|----------------|
| | | X | Y | | | X | Y |
| J 1 | X | A | B | J 1 | X | $A + \beta_2$ | $B + \gamma_2$ |
| | Y | C | D | | Y | $C + \beta_2$ | $D + \gamma_2$ |
| | | A | C | | | $A + \beta_1$ | $C + \beta_1$ |
| | | B | D | | | $B + \gamma_1$ | $D + \gamma_1$ |

Figura 4.3.2: Matrices de pagos del juego exterior y del juego exterior perturbado.

Las perturbaciones β_i y γ_i ($i = 1, 2$) son realizaciones de variables aleatorias independientes (entre animales y entre enfrentamientos) con media cero y rango \mathbb{R} . Suponemos que los jugadores conocen los valores de sus propias perturbaciones, pero no las de sus oponentes. Para mantener el concepto de independencia en los pagos, suponemos que estas no dependen de que lugar ocupe el jugador en el juego externo (fila o columna), con lo cual β_1 y β_2 tienen la misma distribución de probabilidad; al igual que γ_1 y γ_2 .

Además en este modelo suponemos que las perturbaciones de cada jugador dependen sólo de su propia estrategia y no de la del oponente. Haciendo una analogía con el juego de *Halcones y palomas*, equivale a pensar que el valor del recurso en disputa varía de animal en animal, pero el costo de pelear por él es igual para todos.

Para trabajar con la identificación en roles suponemos que cada participante recibe una señal que llamaremos «rol 1» o «rol 2». Esta etiqueta representa la asimetría entre los jugadores. Tenemos ejemplos como hombre o mujer, viejo o joven, grande o pequeño, diferentes estatus sociales, comprador o vendedor, empleado o empleador, etc. Aunque algunas de estas características son de fácil e inconfundible observación por parte de los participantes, debemos considerar los casos en los cuales determinar qué rol ocupa cada jugador resulta ambiguo. Podemos imaginar problemas al identificar roles como estatus, edad, riqueza, o quien es el real dueño de un recurso.

| | 1 | 2 |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1 | $\frac{1}{2}\zeta$ | $\frac{1}{2}(1 - \zeta)$ |
| 2 | $\frac{1}{2}(1 - \zeta)$ | $\frac{1}{2}\zeta$ |

Figura 4.3.3: Matriz de distribución de los roles.

Entonces asumimos que los dos señales de los roles son realizaciones de variables aleatorias relacionadas cuya distribución de probabilidad conjunta viene

| Jugador 2 | | | J 1 | Jugador 2 | | |
|-----------|-------------------------|--------------------|-----|------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| | X | Y | | | X | Y |
| X | $-(1-k)\alpha + \psi_2$ | 0 | X | $-(1-k) + \psi_2\alpha^{-1}$ | 0 | |
| | $-(1-k)\alpha + \psi_1$ | $k\alpha + \psi_1$ | | | $-(1-k) + \psi_1\alpha^{-1}$ | $k + \psi_1\alpha^{-1}$ |
| Y | $k\alpha + \psi_2$ | 0 | Y | $k + \psi_2\alpha^{-1}$ | 0 | |
| | 0 | 0 | | | 0 | 0 |

Figura 4.3.4: Matrices de pagos transformadas del juego exterior perturbado.

dada por la figura 4.3.3 donde $0 \leq \zeta < 1/2$.

El caso $\zeta = 0$ es aquel en el cual no hay errores en la identificación. Las señales se vuelven uniformes cuando ζ tiende a $1/2$. Y el caso $\zeta > 0$ significa que los jugadores tienen problemas en identificar los roles. También asumimos que estas señales son independientes de las perturbaciones de los pagos. Como antes, los jugadores pueden aprender sólo su propia señal y no la del oponente. Si un agente descubre que ocupa el rol 2, entonces sabe que la probabilidad condicional de que su oponente ocupe el rol 1 es $(1 - \zeta)$.

Al desarrollar el juego exterior de forma tal que incluya los diferentes pagos por las perturbaciones y los roles asignados estamos construyendo lo que llamamos el *juego completo*. Para esto es conveniente transformar la segunda matriz de la figura 4.3.2 en una equivalente que ayude a analizar el juego. En la nueva figura 4.3.4 tenemos la matriz transformada de forma tal que

$$\begin{aligned}\alpha &= B + C - A - D > 0, \\ \psi_i &= \beta_i - \gamma_i \text{ y} \\ k &= \frac{C - D}{\alpha}\end{aligned}$$

es la probabilidad asociada a la acción X en la estrategia mixta de equilibrio en el juego externo.³ Por lo anterior, ψ_1 y ψ_2 resultan con la misma distribución de probabilidad, lo cual nos permite evitar diferencias y notarlas sin el subíndice. Finalmente consideremos a f y F como sus funciones de densidad y de distribución de probabilidad, respectivamente; y supongamos que f es positiva y diferenciable sobre \mathbb{R} .

La matriz de pagos nueva permite tres interpretaciones diferentes de la variable α como una medida de la importancia de la perturbaciones en los pagos esperados.

- Primero podemos pensar que un incremento en α es proporcional a un aumento en cada pago A, B, C y D manteniendo la distribución F constante. Así se eleva la proporción de los valores esperados de pagos respecto de las perturbaciones, quitándoles importancia a la hora de elegir una estrategia.

³Notemos que $0 < k < 1$ pues $B > A$.

- La segunda matriz muestra que a medida que aumenta α las perturbaciones se acercan a cero y los pagos esperados se mantienen constantes.
- Y por último podemos expresar el pago de la forma $A + \lambda\psi_i + (1 - \lambda)\xi_i$, donde $\alpha^{-1} = \lambda \in [0, 1]$ y ψ_i y ξ_i son realizaciones de variables aleatorias independientes de esperanza cero. En este caso debemos interpretar a ψ_i como un valor conocido por el jugador, mientras que desconoce ξ_i . Cuando $\lambda = 0$ significa que no tiene información y si $\lambda = 1$ esta es completa. En tal caso, variar α da una medida de la información que posee el individuo.

4.4. Equilibrios de Nash

Una estrategia pura en un juego completo permite a un jugador elegir una acción b o c tal que dependa del valor de ψ y de la señal de su rol. Con esto, una estrategia pura es una función medible $\sigma : \mathbb{R} \times \{1, 2\} \rightarrow \{X, Y\}$ cuyos valores notamos como $\sigma(\psi, Z)$ donde $Z \in \{1, 2\}$ significa la señal de rol que recibe el jugador. Con esta definición, construimos infinitas estrategias puras.

Ahora vemos la existencia de equilibrios para estrategias tanto dependientes como independientes de los roles. Sin embargo como σ es una medida y queremos ver la unicidad de equilibrios, trabajamos cocientando sobre las funciones de medida nula. Es decir, si tenemos σ y σ' tal que difieren en un conjunto de medida cero, las consideramos iguales.

Lema 4.4.1. *El juego completo posee un único y estricto equilibrio de Nash independiente de los roles. Este viene dado por*

$$\sigma^*(\psi, Z) = \begin{cases} X & \text{si } \psi > \psi^* \\ Y & \text{si } \psi < \psi^* \end{cases}, \quad (4.4.1)$$

donde ψ^* es la única solución de la ecuación $(1 - k)\alpha = \psi + F(\psi)\alpha$.

Lema 4.4.2. *Existe una función creciente $\alpha(\zeta) : [0, 1/2) \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para todo $\alpha > \alpha(\zeta)$ hay dos equilibrios de Nash estrictos dependientes de los roles, dado por*

$$\sigma(\psi, Z) = \begin{cases} X & \text{si } (Z = 1 \wedge \psi > \psi_1^*) \vee (Z = 2 \wedge \psi > \psi_2^*) \\ Y & \text{si } (Z = 1 \wedge \psi < \psi_1^*) \vee (Z = 2 \wedge \psi < \psi_2^*) \end{cases}, \quad (4.4.2)$$

donde ψ_1^* y ψ_2^* son las soluciones complejas conjugadas de la ecuación

$$\begin{aligned} (1 - k)\alpha &= \psi_1 + \alpha(\zeta F(\psi_1) + (1 - \zeta)F(\psi_2)) \\ &= \psi_2 + \alpha(\zeta F(\psi_1) + (1 - \zeta)F(\psi_2)) \end{aligned}$$

con $\psi_1 \neq \psi_2$.

Veamos la demostración del primero.

Demostración. Dada la estructura del juego, el pago esperado de jugar X aumenta cuando se incrementa ψ , mientras que el de Y permanece constante e igual a cero. Con esto, si un jugador elige X para un determinado valor $\hat{\psi}$ entonces para todo $\psi > \hat{\psi}$ el pago en X será mayor y el de Y , igual. Y lo mismo para el caso inverso. Así la estrategia de equilibrio debe caracterizarse por un valor ψ^* con los jugadores eligiendo X si $\psi > \psi^*$ e Y en caso contrario. Entonces el equilibrio debe ser de la forma planteada en (4.4.1).

Sean σ^* tal estrategia y $E(X|\psi, \sigma^*)$ el pago esperado para un agente que elige X cuando observa ψ y su oponente juega con la estrategia σ^* . Además sabemos

$$\begin{aligned} E(X|\psi, \sigma^*) &= [1 - F(\psi^*)](-(1-k)\alpha + \psi) + F(\psi^*)(k\alpha + \psi) \text{ y} \\ E(Y|\psi, \sigma^*) &= 0. \end{aligned}$$

Una estrategia como ésta está en equilibrio si y solo si $E(X|\psi^*, \sigma^*) = 0$, es decir

$$\begin{aligned} 0 &= [1 - F(\psi^*)](-(1-k)\alpha + \psi^*) + F(\psi^*)(k\alpha + \psi^*) \\ &= -(1-k)\alpha + \psi^* + F(\psi^*)\alpha - F(\psi^*)k\alpha - F(\psi^*)\psi^* \\ &\quad + F(\psi^*)k\alpha + F(\psi^*)\psi^* \\ &= -(1-k)\alpha + \psi^* + F(\psi^*)\alpha \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

entonces resulta

$$(1-k)\alpha = \psi^* + F(\psi^*)\alpha.$$

Como el lado derecho de la igualdad se incrementa monótonamente desde $(-\infty)$ hasta ∞ cuando ψ^* va desde $(-\infty)$ hasta ∞ , existe una única solución de la ecuación que devuelve el resultado buscado. Además, en la primera igualdad de la ecuación (4.4.3) el lado derecho se incrementa cuando aumenta ψ , con lo cual si un jugador elige X para un $\psi < \psi^*$, el pago esperado será menor a cero (que es el pago por elegir Y). O si para un $\psi > \psi^*$ juega Y , obtendrá un pago menor al pago de elegir X (que devuelve un valor esperado positivo). Esto muestra que este equilibrio es estricto. \square

Continuemos ahora con la prueba del lema 4.4.2.

Demostración. Llamemos con ψ_1 y ψ_2 a las realizaciones de ψ recibidas por un jugador si observa que su rol es 1 o 2, respectivamente. El pago esperado por elegir X se incrementa en ψ_i si su rol es i ($i = 1, 2$). Así el equilibrio debe estar dado por la elección de X cuando $\psi_i > \psi_i^*$ e Y cuando $\psi_i < \psi_i^*$. Por ejemplo, si observa que su rol es 1, la probabilidad de que su oponente juegue X resulta de la suma de la probabilidad de que posean el mismo rol (ζ) y su perturbación sea mayor a ψ_1^* ($1 - F(\psi_1^*)$); más la probabilidad de que sea del rol 2 ($1-\zeta$) y

su perturbación sea mayor a $\psi_2^* (1 - F(\psi_2^*))$. De esto obtenemos que

$$\begin{aligned}
E(X|\psi_1, \sigma^*) &= (-(1-k)\alpha + \psi_1) [\zeta(1 - F(\psi_1^*)) + (1 - \zeta)(1 - F(\psi_2^*))] \\
&\quad + (k\alpha + \psi_1) [\zeta F(\psi_1^*) + (1 - \zeta)F(\psi_2^*)] \\
E(Y|\psi_1, \sigma^*) &= 0 \\
E(X|\psi_2, \sigma^*) &= (-(1-k)\alpha + \psi_2) [(1 - \zeta)(1 - F(\psi_1^*)) + \zeta(1 - F(\psi_2^*))] \\
&\quad + (k\alpha + \psi_2) [(1 - \zeta)F(\psi_1^*) + \zeta F(\psi_2^*)] \\
E(Y|\psi_2, \sigma^*) &= 0.
\end{aligned}$$

La condición necesaria y suficiente para que resulte un equilibrio resulta de reemplazar ψ_i por ψ_i^* e igualar a cero. Además si despejamos tenemos que

$$0 = (-\alpha + k\alpha + \psi_1^*) [\zeta - \zeta F(\psi_1^*) + 1 - \zeta - (1 - \zeta)F(\psi_2^*)] \quad (4.4.4)$$

$$+ (k\alpha + \psi_1^*) [\zeta F(\psi_1^*) + (1 - \zeta)F(\psi_2^*)] \quad (4.4.5)$$

$$= (-\alpha + k\alpha + \psi_1^*) + \alpha [\zeta F(\psi_1^*) + (1 - \zeta)F(\psi_2^*)] \text{ y } \quad (4.4.6)$$

$$(1 - k)\alpha = \psi_1^* + \alpha [\zeta F(\psi_1^*) + (1 - \zeta)F(\psi_2^*)], \quad (4.4.7)$$

y, análogamente

$$(1 - k)\alpha = \psi_2^* + \alpha [(1 - \zeta)F(\psi_1^*) + \zeta F(\psi_2^*)]. \quad (4.4.8)$$

De forma similar a la anterior, dado que $E(X|\psi_1, \sigma^*)$ y $E(X|\psi_2, \sigma^*)$ aumentan cuando ψ_1 y ψ_2 crecen (ver (4.4.6)), el equilibrio es estricto. De las ecuaciones (4.4.7) y (4.4.8) podemos deducir otra dos implícitas: $\psi_2 = h_1(\psi_1)$ de la primera y $\psi_2 = h_2(\psi_1)$ de la segunda. Como vimos antes, existe un solución que es $\psi_1 = \psi_2 = \psi^*$. Además si existe un par (ψ_1, ψ_2) que es solución, entonces el par (ψ_2, ψ_1) también debe serlo. Con lo cual debemos ver que estas ecuaciones tiene al menos dos soluciones.

La función h_1 puede definirse en el dominio $(\underline{\psi}_1, \bar{\psi}_1)$ que viene dado por

$$\lim_{\psi_1 \rightarrow \underline{\psi}_1} h_1(\psi_1) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\psi_1 \rightarrow \bar{\psi}_1} h_1(\psi_1) = -\infty.$$

Y la función h_2 podemos definirla con dominio \mathbb{R} , pero con imagen restringida a $(\underline{\psi}_2, \bar{\psi}_2)$, de forma que

$$\lim_{\psi_1 \rightarrow -\infty} h_2(\psi_1) = \bar{\psi}_2 \quad \text{y} \quad \lim_{\psi_1 \rightarrow \infty} h_2(\psi_1) = \underline{\psi}_2.$$

Debido a la forma de estas funciones, como se intersecan en ψ^* , si h_2 tiene una derivada más pronunciada en este punto (más negativa) entonces necesariamente h_1 y h_2 deben tocarse en, al menos, otros dos puntos. Pues si efectivamente la derivada de h_2 tiene mayor pendiente, sucede que en un entorno a la izquierda de ψ^* , h_2 debe ser más grande que h_1 . Pero esta última función tiene una asíntota vertical hacia $+\infty$ a la izquierda de ψ^* , por lo que necesariamente deben intersectarse (al menos una vez). El caso a la derecha de ψ^* es el inverso.

Con esto, usemos el *teorema de la función implícita* para calcular las derivadas. Notemos $G(x, y) = 0 = x + \alpha [\zeta F(x) + (1 - \zeta)F(y)] - (1 - k)\alpha$ siendo $h_1(x) = y$, obtenemos que

$$\frac{dh_1}{dx}(x) = (-1) \frac{dG(x, y)}{dx} \left(\frac{dG(x, y)}{dy} \right)^{-1} = (-1) \frac{1 + \alpha \zeta f(x)}{\alpha(1 - \zeta)f(y)}$$

si evaluamos en ψ^* (recordemos que $h_1(\psi^*) = \psi^*$), obtenemos

$$\frac{dh_1}{dx}(\psi^*) = (-1) \frac{1 + \alpha \zeta f(\psi^*)}{\alpha(1 - \zeta)f(\psi^*)}.$$

Análogamente, para h_2 resulta

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dx}(x) &= (-1) \frac{\alpha(1 - \zeta)f(x)}{1 + \alpha \zeta f(y)} \\ \frac{dh_2}{dx}(\psi^*) &= (-1) \frac{\alpha(1 - \zeta)f(\psi^*)}{1 + \alpha \zeta f(\psi^*)}. \end{aligned}$$

Luego sucede que

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dx}(\psi^*) &> \frac{dh_2}{dx}(\psi^*) \Leftrightarrow \\ (-1) \frac{1 + \alpha \zeta f(\psi^*)}{\alpha(1 - \zeta)f(\psi^*)} &> (-1) \frac{\alpha(1 - \zeta)f(\psi^*)}{1 + \alpha \zeta f(\psi^*)} \Leftrightarrow \\ \frac{1 + \alpha \zeta f(\psi^*)}{\alpha(1 - \zeta)f(\psi^*)} &< \frac{\alpha(1 - \zeta)f(\psi^*)}{1 + \alpha \zeta f(\psi^*)} \Leftrightarrow \\ (1 + \alpha \zeta f(\psi^*))^2 &< (\alpha(1 - \zeta)f(\psi^*))^2 \Leftrightarrow \\ 1 + \alpha \zeta f(\psi^*) &< \alpha(1 - \zeta)f(\psi^*) \Leftrightarrow \\ 1 &< \alpha(1 - \zeta)f(\psi^*) - \alpha \zeta f(\psi^*) = \alpha(1 - 2\zeta)f(\psi^*) \end{aligned}$$

pues tanto $[1 + \alpha \zeta f(\psi^*)]$ como $[\alpha(1 - \zeta)f(\psi^*)]$ son positivos. Por lo tanto cuando α (dependiente de ζ) es suficientemente grande, la desigualdad es válida y existen, al menos, dos soluciones. \square

En el equilibrio dependiente de los roles los jugadores condicionan sus estrategias a las señales que reciben y tienden a especializarse en X en un rol y en Y en el otro. Este equilibrio se corresponde con los dos equilibrios asimétricos en el juego exterior. Aquí existen estos dos equilibrios porque es irrelevante si X suele ser jugado por el agente 1 o 2. Si α es muy pequeño, el equilibrio dependiente de los roles puede no existir ya que las perturbaciones en los pagos son muy significativas; así condicionar las acciones a estas perturbaciones se torna tan importante que vuelve irrelevante usar los equilibrios asimétricos del juego exterior. Cuanto más «ruidosa» es la identificación en roles (mayor ζ), menos importante resulta condicionar las acciones en roles. Y por el contrario, cuanto mayor sea α , más fuerte se vuelve este equilibrio.

En el equilibrio independiente de los roles los jugadores sólo condicionan sus elecciones a las características de los pagos dadas las perturbaciones. J. C. Harsanyi mostró que cuando α tienda a ∞ (las perturbaciones se vuelven cada vez más insignificantes) la frecuencia con la cual se utilizan las acciones X e Y tiende a las probabilidades con las cuales son usadas en la estrategia mixta del juego exterior. La estrategia dada en la ecuación (4.4.1) aproxima el equilibrio mixto en el juego exterior, aunque en realidad es un equilibrio puro en el juego completo en el cual los jugadores no condicionan sus acciones a los roles que recibieron.

4.5. Barrera de invasión

Estudiemos los equilibrios mixtos en los juegos exteriores de la figura. Este corresponde con los equilibrios independientes de los roles en el juego completo, que satisface la definición de equilibrio estable 2.1.1. Veamos cuándo un equilibrio admite una barrera de invasión *global*.

Teorema 4.5.1 (Barrera de invasión global). *Los equilibrios independientes de los roles en un juego completo dados en (4.4.1) admiten una barrera de invasión global.*

La demostración de este teorema es extensa, hagamos antes algunas consideraciones. Si el resto de la población utiliza la estrategia de equilibrio independiente de los roles σ^* entonces el pago esperado $E(X|\psi, \sigma^*)$ en el juego completo resulta

$$E(X|\psi, \sigma^*) = F(\psi^*)(k\alpha + \psi) + [1 - F(\psi^*)](-(1-k)\alpha + \psi) \quad (4.5.1)$$

$$= \psi + \alpha[F(\psi^*) - (1-k)] \quad (4.5.2)$$

$$= \psi - \psi^*. \quad (4.5.3)$$

Con lo cual resulta óptimo jugar X cuando $\psi > \psi^*$ e Y en el caso contrario.

Continuemos suponiendo que tenemos un mutante que usa la estrategia σ que condiciona sus acciones con el rol que observa, jugando X con el rol 1 e Y con el 2 cuando las perturbaciones de sus pagos se encuentran dentro de un conjunto H (H pequeño y centrado en ψ^*). El costo de este accionar resulta de ignorar las perturbaciones en H , jugando X cuando ψ es relativamente pequeño (cuando sería más beneficioso elegir Y) y jugando Y en el caso inverso. Como este costo es más chico cuanto más cerca esté ψ de ψ^* , la probabilidad del mutante de tener éxito aumenta si condiciona su accionar a los roles en un conjunto como H pues en los valores de $\psi \in H$ el pago entre X e Y es casi igual. Pero este mutante ha adquirido una importante ventaja. Como condiciona su accionar a los roles puede coordinarse con los de su misma clase para utilizar una estrategia pura que los coloque en un equilibrio asimétrico del juego exterior.

Sea $L < 0$ el pago esperado que pierde cada mutante al enfrentarse a un jugador original, es decir, $L = E(\sigma, \sigma^*) - E(\sigma^*, \sigma^*)$. Y sea $G > 0$ el pago esperado que gana cuando juega contra otro mutante, $G = E(\sigma, \sigma) - E(\sigma^*, \sigma)$.

Con estas consideraciones, y si llamamos ε a la proporción de mutantes dentro de la población, la estrategia mutante será incapaz de tener éxito si

$$(1 - \varepsilon)L + \varepsilon G < 0.$$

¿Cuándo existe una barrera de invasión global $\varepsilon(\sigma^*) > 0$ tal que la inecuación es válida para todo $\varepsilon < \varepsilon(\sigma^*)$ independientemente de la estrategia mutante?

Cuando analizamos un equilibrio estricto en un juego finito dijimos que esta barrera existía. Pero en el caso infinito, debemos concebir la posibilidad de que haya una sucesión de mutantes que generen que L tienda a cero. Por esto nos abocaremos a ver que L/G no puede acercarse a cero indefinidamente, sin importar comoelijamos a los mutantes. Teniendo presente estas observaciones, veamos la demostración.

Demostración. Sea $\sigma : \mathbb{R} \times \{1, 2\} \rightarrow \{X, Y\}$ un mutante. Sea $\Psi_i(X)$ el conjunto medible de valores de ψ para los cuales el mutante juega X en el rol i ($i = 1, 2$). Como los pagos de esta elección para ambos oponentes aumentan en ψ , mientras que los pagos en Y permanecen constantes, debe suceder que $\Psi_1(X)$ y $\Psi_2(X)$ contienen los valores suficientemente grandes de ψ y excluyen los valores suficientemente chicos.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existen $\hat{\psi}_1$ y $\hat{\psi}_2$ tales que $\Psi_i(X) = (\hat{\psi}_i, \infty)$ y que juega Y en el complemento. Para ver esto supongamos que σ no tiene esta estructura; entonces sea σ' otro mutante que se comporta de la forma

$$\sigma'(\psi, Z) = \begin{cases} X & \text{si } (Z = 1 \wedge \psi > \hat{\psi}_1) \vee (Z = 2 \wedge \psi > \hat{\psi}_2) \\ Y & \text{si } (Z = 1 \wedge \psi < \hat{\psi}_1) \vee (Z = 2 \wedge \psi < \hat{\psi}_2) \end{cases}, \quad (4.5.4)$$

siendo $\hat{\psi}_i$ tal que

$$(1 - F(\hat{\psi}_i)) = \int_{\Psi_i(X)} f(\psi) d\psi$$

para $i = 1, 2$. Si los mutantes compiten contra σ^* ambos juegan X con la misma probabilidad en cada uno de los roles, sólo que σ' concentra esta acción en los valores más grandes de ψ . Como vimos antes, el pago en X aumenta si también ψ se comporta así, mientras que en Y permanece constante, con lo cual el mutante σ' tiene un mayor pago esperado contra σ^* que el que posee σ . De igual forma si a cada mutante lo hacemos jugar contra un jugador de igual estrategia, sucederá que $E(\sigma', \sigma') \geq E(\sigma, \sigma)$ pues ambos mutantes juegan X (y por lo tanto también Y) con la misma probabilidad. Además por lo mismo tenemos que $E(\sigma^*, \sigma') = E(\sigma^*, \sigma)$. Entonces σ' tiene una menor barrera de invasión que σ , de esto deducimos que el mutante de menor barrera debe ser de esta forma.

También sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\hat{\psi}_1 \leq \hat{\psi}_2$. Empecemos suponiendo que $\psi^* < \hat{\psi}_1$. Entonces la estrategia de equilibrio σ^* es mejor respuesta para sí misma de lo que es el mutante pues este último juega X en ambos roles menos de lo que es óptimo: entre ψ^* y $\hat{\psi}_i$ jugar X contra σ^* tiene

un valor esperado positivo, mientras que jugar Y , cero. Además la estrategia en equilibrio σ^* es mejor respuesta contra el mutante σ de lo que este es contra sí mismo. Para ver esto supongamos que el mutante recibe el rol 1. Como $\psi^* < \hat{\psi}_1$, resulta que juega X menos veces que la estrategia σ^* , entonces la mejor respuesta contra el mutante es jugar X incluso más veces que la estrategia σ^* ya que

$$\begin{aligned} & [1 - F(\psi^*)](-(1-k)\alpha + \psi) + F(\psi^*)(k\alpha + \psi) \\ &= E(X, \sigma^* | \psi) < E(X, \sigma | \psi) \\ &= [1 - F(\hat{\psi}_1)](-(1-k)\alpha + \psi) + F(\hat{\psi}_1)(k\alpha + \psi). \end{aligned}$$

Pero en particular σ^* es mejor respuesta contra el mutante que él mismo. Un argumento similar se aplica si el mutante recibe el rol 2. Entonces las diferencias entre el pago esperado de un mutante menos el de uno de la población original son negativas siempre (sin importar contra quien jueguen) y por lo tanto existe una barrera de invasión.

Si tenemos el caso $\hat{\psi}_2 < \psi^*$, el mismo argumento (pero jugando más veces Y) prueba que existe una barrera de invasión.

Concentrémonos en el caso $\hat{\psi}_1 \leq \psi^* \leq \hat{\psi}_2$. Sea $H = [\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2]$. El mutante σ juega igual que σ^* excepto cuando observa un valor de $\psi \in H$, donde elige X si tiene el rol 1 e Y en el otro caso. Separemos el conjunto H de la forma $\underline{H} = [\hat{\psi}_1, \psi^*]$ y $\bar{H} = [\psi^*, \hat{\psi}_2]$ (alguno de los dos podría tener medida nula). Vimos que

$$\begin{aligned} E(X | \psi, \sigma^*) &= [1 - F(\psi^*)](-(1-k)\alpha + \psi) + F(\psi^*)(k\alpha + \psi) \\ &= -(1-k)\alpha + \psi + F(\psi^*)\alpha - F(\psi^*)k\alpha \\ &\quad - F(\psi^*)\psi + F(\psi^*)k\alpha + F(\psi^*)\psi \\ &= \psi - (1-k - F(\psi^*))\alpha \\ &= \psi - \psi^* \end{aligned}$$

pues por el lema 4.4.1 sabemos que ψ^* es solución de $(1-k)\alpha = \psi + F(\psi)\alpha$, con lo que $\psi^* = (1-k - F(\psi^*))\alpha$.

Calculemos la diferencia entre el pago esperado de un mutante y la estrategia de equilibrio σ^* cuando se enfrentan a la población original. El resultado es

$$E(\sigma, \sigma^*) - E(\sigma^*, \sigma^*) \tag{4.5.5}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (E(\sigma | \psi, \sigma^*) - E(\sigma^* | \psi, \sigma^*)) f(\psi) d\psi \tag{4.5.6}$$

$$= \int_{\underline{H}} \frac{1}{2}(\psi - \psi^*) f(\psi) d\psi + \int_{\bar{H}} \frac{1}{2}(\psi^* - \psi) f(\psi) d\psi \tag{4.5.7}$$

$$= L < 0. \tag{4.5.8}$$

La primer integral vale para $\psi \in \underline{H}$, donde la estrategia σ^* juega Y con pago cero; mientras que σ también recibe un pago de cero la mitad de las veces

(cuando recibe el rol 2 y juega Y) y un pago de $(\psi - \psi^*) < 0$ la otra mitad. En la segunda integral, con $\psi \in \bar{H}$, σ^* juega X con un pago esperado de $(\psi - \psi^*) > 0$ y el mutante elige X la mitad de las veces, con lo cual recibe el mismo pago esperado; e Y la otra mitad (con pago cero). Así para $\psi \in \bar{H}$ tenemos

$$\begin{aligned} E(\sigma|\psi, \sigma^*) - E(\sigma^*|\psi, \sigma^*) &= \frac{1}{2}(\psi - \psi^*) - (\psi - \psi^*) \\ &= \frac{1}{2}(\psi^* - \psi) < 0. \end{aligned}$$

Sea $S \subset \mathbb{R}$ y notemos con $E(\sigma, \sigma'|S)$ el pago esperado del mutante cuando enfrenta a σ' , este último condicionado con valores de ψ en S . Con esta escritura y por el hecho de que tanto el mutante como σ^* se comportan igual en H^c , sabemos que

$$\begin{aligned} E(\sigma, \sigma|H^c) &= E(\sigma, \sigma^*|H^c) \\ E(\sigma^*, \sigma|H^c) &= E(\sigma^*, \sigma^*|H^c) \end{aligned}$$

Pero también vale

$$\begin{aligned} L &= E(\sigma, \sigma^*) - E(\sigma^*, \sigma^*) \\ &= F(H)E(\sigma, \sigma^*|H) + [1 - F(H)]E(\sigma, \sigma^*|H^c) \\ &\quad - F(H)E(\sigma^*, \sigma^*|H) - [1 - F(H)]E(\sigma^*, \sigma^*|H^c). \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular

$$\begin{aligned} E(\sigma, \sigma) - E(\sigma^*, \sigma) &= F(H)E(\sigma, \sigma|H) + [1 - F(H)]E(\sigma, \sigma|H^c) \\ &\quad - F(H)E(\sigma^*, \sigma|H) - [1 - F(H)]E(\sigma^*, \sigma|H^c) \end{aligned}$$

sumamos cero

$$\begin{aligned} &= F(H)E(\sigma, \sigma|H) + [1 - F(H)]E(\sigma, \sigma|H^c) \\ &\quad + F(H)E(\sigma, \sigma^*|H) - F(H)E(\sigma, \sigma^*|H) \\ &\quad - F(H)E(\sigma^*, \sigma|H) - [1 - F(H)]E(\sigma^*, \sigma|H^c) \\ &\quad + F(H)E(\sigma^*, \sigma^*|H) - F(H)E(\sigma^*, \sigma^*|H) \end{aligned}$$

reemplazando

$$\begin{aligned} &= F(H)E(\sigma, \sigma|H) + [1 - F(H)]E(\sigma, \sigma^*|H^c) \\ &\quad + F(H)E(\sigma, \sigma^*|H) - F(H)E(\sigma, \sigma^*|H) \\ &\quad - F(H)E(\sigma^*, \sigma|H) - [1 - F(H)]E(\sigma^*, \sigma^*|H^c) \\ &\quad + F(H)E(\sigma^*, \sigma^*|H) - F(H)E(\sigma^*, \sigma^*|H) \end{aligned}$$

finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} &= F(H)E(\sigma, \sigma|H) - F(H)E(\sigma, \sigma^*|H) \\ &\quad - F(H)E(\sigma^*, \sigma|H) + F(H)E(\sigma^*, \sigma^*|H) + L \end{aligned}$$

Dado que ambas estrategias coinciden cuando $\psi \in H^c$ basta calcular $E(\sigma, \sigma|H) - E(\sigma^*, \sigma|H)$ y $E(\sigma^*, \sigma^*|H) - E(\sigma, \sigma^*|H)$ condicionado a valores para $\psi \in H$. Si

notamos $E(\sigma|H, \sigma|H)$ al enfrentamiento de dos mutantes restringidos a valores en H tenemos que

$$\begin{aligned} E(\sigma|H, \sigma|H) &= \int_H \frac{1}{2} (\zeta E(X, X) + (1 - \zeta) E(X, Y)) f(\psi) d\psi; \\ E(\sigma|H, \sigma^*|H) &= \int_H \frac{1}{2} \left(\frac{F(\bar{H})}{F(H)} E(X, X) + \frac{F(\underline{H})}{F(H)} E(X, Y) \right) f(\psi) d\psi; \\ E(\sigma^*|H, \sigma|H) &= \int_{\bar{H}} \frac{1}{2} (E(X, X) + E(X, Y)) f(\psi) d\psi \text{ y} \\ E(\sigma^*|H, \sigma^*|H) &= \int_{\bar{H}} \left(\frac{F(\bar{H})}{F(H)} E(X, X) + \frac{F(\underline{H})}{F(H)} E(X, Y) \right) f(\psi) d\psi. \end{aligned}$$

Ahora podemos retomar la cuenta anterior. Tengamos presente que

$$F(H) = F(\underline{H}) + F(\bar{H}).$$

Luego

$$\begin{aligned} E(\sigma, \sigma) - E(\sigma^*, \sigma) &= F(H) \int_H \frac{1}{2} (\zeta(-(1-k)\alpha + \psi) + (1-\zeta)(k\alpha + \psi)) f(\psi) d\psi \\ &\quad - \int_H \frac{1}{2} (F(\bar{H})(-(1-k)\alpha + \psi) + F(\underline{H})(k\alpha + \psi)) f(\psi) d\psi \\ &\quad - F(H) \int_{\bar{H}} \frac{1}{2} ((-(1-k)\alpha + \psi) + (k\alpha + \psi)) f(\psi) d\psi \\ &\quad + \int_{\bar{H}} (F(\bar{H})(-(1-k)\alpha + \psi) + F(\underline{H})(k\alpha + \psi)) f(\psi) d\psi + L \\ &= \frac{F(H)}{2} \int_H (-\zeta\alpha) f(\psi) d\psi - \frac{1}{2} \int_H (-F(\bar{H})\alpha) f(\psi) d\psi \\ &\quad - \frac{F(H)}{2} \int_{\bar{H}} (-\alpha) f(\psi) d\psi + \int_{\bar{H}} (-F(\bar{H})\alpha) f(\psi) d\psi + L \\ &= -\frac{F(H)^2}{2} \zeta\alpha + \frac{F(\bar{H})}{2} \alpha F(H) + \frac{F(H)}{2} \alpha F(\bar{H}) - F(\bar{H}^2)\alpha + L \\ &= \alpha \left(-\frac{F(H)^2 \zeta}{2} + F(\bar{H}) [F(H) - F(\bar{H})] \right) + L \end{aligned}$$

Entonces ahora estamos en condiciones de calcular la diferencia D entre el pago esperado de un mutante y de un jugador original cuando la proporción invasora es igual a ε . Para que pueda producirse la invasión en este caso debe suceder que $D > 0$.

$$\begin{aligned} D &= (1 - \varepsilon)L + \varepsilon \left[\alpha \left(-\frac{F(H)^2 \zeta}{2} + F(\bar{H}) [F(H) - F(\bar{H})] \right) + L \right] \\ &= L + \varepsilon \alpha \left(-\frac{F(H)^2 \zeta}{2} + F(\bar{H}) F(\underline{H}) \right) \end{aligned}$$

Como L es negativa, para que esta diferencia sea mayor a cero tanto $F(\underline{H})$ como $F(\bar{H})$ deben ser positivos, con lo cual $\hat{\psi}_1 < \psi^* < \hat{\psi}_2$. D es negativa cuando $\varepsilon = 0$. Una barrera global de invasión ε^* (con α fijo) es aquella tal que cualquier ε positivo y menor que ε^* devuelve una D negativa, independientemente de como sea el conjunto H . De todos los ζ posibles en $[0, 1/2)$ aquel que maximiza D es $\zeta = 0$, con lo cual basta analizar este caso para cualquier ζ . Resulta que

$$D \leq L + \varepsilon \alpha F(\bar{H})F(\underline{H}).$$

Acotemos inferiormente (recordemos que $L < 0$)

$$\begin{aligned} \frac{-L}{F(\bar{H})F(\underline{H})} &= \frac{\int_{\underline{H}}(\psi^* - \psi)f(\psi)d\psi + \int_{\bar{H}}(\psi - \psi^*)f(\psi)d\psi}{2 \int_{\underline{H}} f(\psi)d\psi \int_{\bar{H}} f(\psi)d\psi} \\ &= \frac{\int_{\hat{\psi}_1}^{\psi^*}(\psi^* - \psi)f(\psi)d\psi + \int_{\psi^*}^{\hat{\psi}_2}(\psi - \psi^*)f(\psi)d\psi}{2 \int_{\psi^*}^{\hat{\psi}_2} f(\psi)d\psi \int_{\bar{H}} f(\psi)d\psi}. \end{aligned}$$

Como $f(\psi^*) \neq 0$ y es continua existe un intervalo $[b, c]$ tal que $b < \psi^* < c$ y que acota a f inferiormente tal que $0 < m = \min\{f(\psi) : \psi \in [b, c]\}$. Además sea $M = \max\{f(\psi) : \psi \in [b, c]\}$. Si $\hat{\psi}_1 < b$ entonces

$$\begin{aligned} &\frac{\int_{\hat{\psi}_1}^{\psi^*}(\psi^* - \psi)f(\psi)d\psi + \int_{\psi^*}^{\hat{\psi}_2}(\psi - \psi^*)f(\psi)d\psi}{2 \int_{\psi^*}^{\hat{\psi}_2} f(\psi)d\psi \int_{\bar{H}} f(\psi)d\psi} \\ &\geq \frac{\int_b^{\psi^*}(\psi^* - \psi)f(\psi)d\psi + \int_{\psi^*}^{\hat{\psi}_2}(\psi - \psi^*)f(\psi)d\psi}{2 \int_{\psi^*}^{\hat{\psi}_2} f(\psi)d\psi \int_{\bar{H}} f(\psi)d\psi} \\ &\geq \int_b^{\psi^*}(\psi^* - \psi)f(\psi)d\psi \geq \beta_0 \end{aligned}$$

para algún $\beta_0 > 0$ y de forma similar supongamos que $\beta_1 > 0$ acota inferiormente si $\hat{\psi}_2 > c$.

Consideremos el último caso, es decir, $b < \hat{\psi}_1 < \psi^* < \hat{\psi}_2 < c$. Luego

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_{\hat{\psi}_1}^{\psi^*} (\psi^* - \psi) f(\psi) d\psi + \int_{\psi^*}^{\hat{\psi}_2} (\psi - \psi^*) f(\psi) d\psi}{2 \int_{\psi^*}^{\hat{\psi}_2} f(\psi) d\psi \int_{\bar{H}} f(\psi) d\psi} \\
& \geq \frac{\int_{\hat{\psi}_1}^{\psi^*} (\psi^* - \psi) m d\psi + \int_{\psi^*}^{\hat{\psi}_2} (\psi - \psi^*) m d\psi}{2 \int_{\psi^*}^{\hat{\psi}_2} M d\psi \int_{\bar{H}} M d\psi} \\
& \geq \frac{m}{2M} \frac{\int_0^{\psi^* - \hat{\psi}_1} s ds + \int_0^{\hat{\psi}_2 - \psi^*} s ds}{(\psi^* - \hat{\psi}_1)(\hat{\psi}_2 - \psi^*)} \\
& \geq \frac{m}{4M} \frac{(\psi^* - \hat{\psi}_1)^2 + (\hat{\psi}_2 - \psi^*)^2}{(\psi^* - \hat{\psi}_1)(\hat{\psi}_2 - \psi^*)} \\
& = \frac{m}{4M} \left(\frac{\psi^* - \hat{\psi}_1}{\hat{\psi}_2 - \psi^*} + \frac{\hat{\psi}_2 - \psi^*}{\psi^* - \hat{\psi}_1} \right) \\
& \geq \frac{m}{4M} > 0.
\end{aligned}$$

Entonces, sea $\beta = \min\{\beta_0, \beta_1, m/(4M)\}$. Resulta $(-L/[F(\bar{H})F(\underline{H})]) \geq \beta > 0$ y además

$$D \leq L + \varepsilon \alpha F(\bar{H})F(\underline{H}) \leq L + \varepsilon \alpha \frac{-L}{\beta} = L \left(1 - \frac{\varepsilon \alpha}{\beta} \right),$$

con lo cual existe un ε^* suficientemente pequeño tal que $D < 0$ para todo $\varepsilon < \varepsilon^*$.

Lo cual prueba que existe una *barrera global*. \square

4.6. Referencias

En este capítulo seguimos el trabajo de Binmore y Samuelson [1].

Capítulo 5

Menor oferta única

Menor oferta única (LUB¹) es un juego de subasta *on line* en el cual el ganador puede adquirir un bien de elevado valor a un precio muy inferior: autos o incluso casas pueden adquirirse por decenas o cientos de dólares (o euros)². Veamos el mecanismo de este tipo de remates.

En un comienzo, un bien valuado en miles de dólares es puesto en subasta. El tiempo que dura está convenido desde el inicio; generalmente es un período de dos o tres semanas. Cada jugador participa realizando una oferta que puede ir desde un centavo hasta un valor máximo al cual llamamos M , siempre en múltiplos enteros de un centavo. Este debe ser un precio muy inferior al valor real del bien en cuestión; M suele ser no mayor a cien dólares. Por cada oferta que realiza un participante, éste debe pagar una pequeña cuota (por ejemplo, el costo de un mensaje o una llamada de celular, que va de unos pocos centavos a no más de diez dólares). Además, los jugadores pueden ofertar más de una vez por el mismo bien. Finalizado el plazo de la subasta, resulta ganador aquel que hizo la menor oferta única (LUB) y obtiene el derecho de comprar el bien por ese precio ofertado (que es el menor precio que ofertó de los que ningún otro propuso).

Por ejemplo, si al terminar el juego la menor oferta fue hecha por dos jugadores ($n_1 = 2$), mientras que la segunda menor fue hecha por tres jugadores ($n_2 = 3$) y, recursivamente, obtuvimos $n_3 = 1$, $n_4 = 2$, $n_5 = 1$, ... entonces el jugador ganador es aquel que ofertó el tercer menor valor pues es la LUB del juego, en el sentido de que fue hecha por un sólo participante. Es necesario aclarar que durante el período en el cual se desarrolla este juego, cada participante sabe si su estado es el de ganador o perdedor, pero no tiene acceso a ningún otro dato. Ninguno conoce que ofertas hizo otro jugador hasta que el juego finaliza.

F. Radicchi, A. Baronchelli y L.A.N. Amaral han estudiado en detalle los rasgos de la dinámica de las ofertas hechas en juegos de LUB en subastas reales. Observaron que la exploración del espacio de posibles ofertas es explosivo: las

¹Por sus siglas en inglés, the lowest unique bid.

²En nuestro país este mercado tiene un desarrollo muy incipiente.

ofertas hechas por un mismo jugador en forma consecutiva suelen ser cercanas entre sí. Pero cada tanto, los participantes realizan un «salto» de grandes distancias y luego vuelven a la conducta anterior de hacer ofertas consecutivas cubriendo muchos valores en un pequeño espacio.

Entonces, la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) $P(d)$ de las distintas ofertas depende de d , que representa la distancia entre dos valores. La densidad de probabilidad es consistente con $P(d) \sim d^{-\alpha}$. La exploración del espacio de apuestas resulta una versión de *vuelo de Lévy discreto*. Aún más importante, encontraron que la f.d.p. $g(\alpha)$ dependiente del exponente de $P(d)$ utilizado en estas subastas es de un valor que se acerca a 1,4 ($\alpha \simeq 1,4$) con desvío estándar de 0,2 ($\sigma \simeq 0,2$). Este desvío es el de la distribución de los valores medidos de α y no del vuelo de Lévy (que para $\alpha < 2$ tiene varianza infinita).

5.1. Modelos de estrategias para ofertar

Veamos un modelo para LUB. Dada la evidencia suponemos que los jugadores exploran el espacio de apuestas comportándose acorde a un modelo de vuelo de Lévy. Elegimos los exponentes de la f.d.p. con una variable aleatoria extraída de otra f.d.p. genérica y estudiamos una versión evolutiva del juego. Independientemente de la f.d.p. inicial, ésta evoluciona a una distribución estable centrada en un valor muy cercano al exponente medido en las subastas reales.

Consideremos una población de N jugadores cuyas estrategias quedan determinadas por un α obtenido en forma aleatoria de una f.d.p. $g(\alpha)$. Sin pérdida de generalidad consideramos que $g(\alpha) \geq 0$ si $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ y que vale 0 en otro caso. Durante el juego, cada agente puede ofertar sólo valores enteros en el espacio $[1, M]$. Como al principio del juego ninguno sabe qué valores ofertarán los demás, es natural pensar que un jugador genérico (con estrategia $P(\alpha)$) se sitúe lo más a la izquierda posible (que es la menor oferta posible). Así, para la posición inicial, oferta el i -ésimo valor con probabilidad

$$s(i, \alpha) = \frac{i^{-\alpha}}{m(\alpha)} g(\alpha), \quad (5.1.1)$$

siendo $m(\alpha) = \sum_{i=1}^M i^{-\alpha}$ la normalización para que el espacio discreto sea de probabilidad. Integrando podemos calcular la probabilidad de que un jugador genérico oferte el valor i , así

$$p(i) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} s(i, \alpha) d\alpha. \quad (5.1.2)$$

Después de la primer oferta de cada agente, llamemos n_k al número de ofertas hechas en el k -ésimo valor. La probabilidad de que suceda una configuración $\{n\} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ particular está dada por

$$P(\{n\}) = N! \prod_{k=1}^M \frac{p(k)^{n_k}}{n_k!}, \quad (5.1.3)$$

siendo $N = \sum_{k=1}^M n_k$ la cantidad de jugadores. En particular, la probabilidad de que sólo una oferta sea realizada en el valor i es

$$u(i) = \sum_{\sum_{k \neq i} n_k = N-1} P(\{n\}) = Np(i)[1 - p(i)]^{N-1}.$$

La probabilidad de que un valor i de oferta sea realizado por un sólo jugador y que sea el menor con esta característica podemos calcularlo sumando las probabilidades de la ecuación (5.1.3) sobre todas las $\{n\}$ configuraciones que satisfacen $n_i = 1$ y $n_j \neq 1$ para todo $j < i$. Pero como este cálculo es muy complejo, una buena aproximación, válida para valores de $p(i)$ y $u(i)$ suficientemente pequeños, es considerar la unicidad (en el sentido de LUB) del valor i -ésimo como independiente de la unicidad de otros. Así escribimos

$$l(i) = \begin{cases} \frac{u(i)}{N} & \text{si } i = 1 \\ \frac{u(i)}{N} \prod_{k < i} [1 - u(k)] & \text{otro} \end{cases},$$

como la probabilidad de que la oferta del valor i -ésimo sea la menor de todas las apuestas únicas. El resultado de esta ecuación es el producto de dos términos, $u(i)$ es la probabilidad de que sólo haya una oferta en el valor i ; mientras que $\prod_{k < i} [1 - u(k)]$ es la probabilidad de que ninguno de los valores menores reciba una única oferta. Finalmente, la probabilidad $w(\alpha)$ de que un vuelo de Lévy con exponente α sea la estrategia ganadora podemos inferirla por

$$w(\alpha) = \sum_{i=1}^M v(\alpha|i)l(i) = \sum_{i=1}^M \frac{s(i, \alpha)l(i)}{p(i)} \quad (5.1.4)$$

siendo $v(\alpha|i) = s(i, \alpha)/p(i)$ la probabilidad condicional de que el coeficiente del jugador que oferta el i -ésimo valor sea α . En estas ecuaciones, si bien no aparece en la notación M ni N que son valores de los cuales depende $w(\alpha)$, los evitamos para abreviar notación.

5.2. Múltiples apuestas hechas por un mismo jugador

El mismo análisis puede aplicarse para determinar el mejor exponente en un juego en el cual cada participante pueda realizar más de una apuesta. Llamemos T a la cantidad de ofertas que puede hacer un mismo jugador. Para resolver el nuevo problema necesitamos calcular $s_T(i)$. Esta es la probabilidad de que un jugador cualquiera oferte el valor i en alguna de sus T ofertas. Dado un jugador genérico fijemos de aquí en lo que queda de esta sección, su exponente (estrategia) en α . Su primer oferta puede ser realizada en el valor i con probabilidad $q_1(i|\alpha) = i^{-\alpha}/m(\alpha)$. Para las siguientes ofertas necesitamos definir una matriz de transición Q_α . El escalar $(Q_\alpha)_{ji}$ representa la probabilidad de que un

jugador oferte el valor i cuando su apuesta anterior fue j . Así tenemos

$$(Q_\alpha)_{ji} = \frac{|i - j|^{-\alpha}}{m_j(\alpha)}, \quad (5.2.1)$$

siendo el denominador nuevamente la normalización, es decir

$$m_j(\alpha) = \sum_{i=1}^M |i - j|^{-\alpha},$$

lo cual hace que Q_α sea una matriz de probabilidad. Entonces en un paso t cualquiera³, la probabilidad de que un jugador oferte el valor i es

$$q_t(i|\alpha) = \sum_{j=1}^M (Q_\alpha)_{ji} q_{t-1}(j|\alpha). \quad (5.2.2)$$

Y la probabilidad de que el jugador oferte el valor i en algún momento de la subasta es

$$S_T(i|\alpha) = 1 - \prod_{t=1}^T (1 - q_t(i|\alpha)). \quad (5.2.3)$$

El término $(1 - q_t(i|\alpha))$ representa la probabilidad de que el jugador no oferte el valor i en el paso t , con lo cual el producto en todos los pasos resulta la probabilidad de que no oferte en el valor i . Es muy importante aclarar que los jugadores aquí modelados no tienen memoria, pues pueden ofrecer el mismo valor más de una vez ya que la matriz Q_α sólo tiene en cuenta la posición actual y no las pasadas.⁴

Así llegamos a la probabilidad de que un jugador genérico en T pasos oferte el valor i , con lo cual

$$p_T(i) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} s_T(i|\alpha) g(\alpha) d\alpha. \quad (5.2.4)$$

Con esta nueva fórmula podemos reemplazar (5.1.2) para calcular $u_T(i)$ y $l_T(i)$ respectivamente. Y podemos obtener $w_T(\alpha)$.

5.3. Modelo evolutivo

Para estudiar y entender como una estrategia óptima puede ser transmitida entre individuos, trabajamos en un marco teórico evolutivo. Con esto, el modelo puede implementarse en términos de individuos competitivos que se seleccionan en base a los sucesos que se producen en el proceso selectivo. Este es el

³Es la t -ésima oferta.

⁴Esto también afecta el hecho de que un jugador al ofertar dos veces el mismo valor pierde la posibilidad de ganar él mismo aunque se el menor valor que nadie más ofreció (en este caso ya no sería única la oferta).

espíritu fundamental de un proceso de *Moran*. Al final de cada juego, el ganador se «reproduce» transmitiendo su exponente α : un nuevo individuo ingresa a la población con una estrategia de igual exponente, mientras que de forma azarosa otro jugador es removido para mantener constante la población del sistema. También es posible que el nuevo jugador tenga un exponente $\alpha + \xi$, siendo ξ una variable aleatoria que introduce una mutación. Como en el capítulo 2 de juegos evolutivos, la distribución estacionaria en la que se estabilice este proceso, donde los exitosos se reproducen y los que no lo son desaparecen, debería corresponderse con un equilibrio del juego.

5.3.1. Modelo sin mutaciones aleatorias

Primero consideremos el caso en el cual los perdedores copian la estrategia victoriosa sin error alguno (sin mutaciones). Supongamos que tenemos N jugadores en cada generación. Y participan realizando T pasos en cada subasta. Denominemos con un número e a cada generación; entonces empezamos con $e = 1$. Luego continuamos de la siguiente forma.

1. Los jugadores eligen aleatoriamente una estrategia α de una distribución de probabilidad $g^{(e)}(\alpha)$.
2. Luego juegan la subasta. El resultado es una f.d.p. $w_T^{(e)}(\alpha)$ que devuelve la probabilidad de que α sea la estrategia ganadora.
3. Entonces definimos $g^{(e+1)}(\alpha) = w_T^{(e)}(\alpha)$ y volvemos al primer punto.

Aquí hemos expresado la evolución de una población de jugadores que repiten sistemáticamente una subasta de LUB. Haciendo $g^{e+1}(\alpha) = w_T^{(e)}(\alpha)$ nos aseguramos que las «nuevas generaciones» tiendan a elegir estrategias ganadoras en lugar de perdedoras. Esto puede verse con la siguiente ecuación *maestra*

$$g^{e+1}(\alpha) - g^{(e)}(\alpha) = w_T^{(e)}(\alpha)(1 - g^{(e)}(\alpha)) - (1 - w_T^{(e)}(\alpha))g^{(e)}(\alpha). \quad (5.3.1)$$

de donde surge que $g^{(e+1)}(\alpha) = w_T^{(e)}(\alpha)$. Esta indica que la variación de los jugadores que usan α aumenta cuando crece la probabilidad de que sea la estrategia ganadora ($w_T^{(e)}$) por la probabilidad de encontrar jugadores que no la utilicen ($1 - g^{(e)}(\alpha)$). Y decrece cuando se incrementa la probabilidad de que no sea la estrategia ganadora ($1 - w_T^{(e)}$) multiplicado por la de hallar jugadores que la usen ($g^{(e)}(\alpha)$). En otras palabras, estamos diciendo que la probabilidad de replicarse de un jugador es proporcional a la probabilidad de que gane el juego.

5.3.2. Mutaciones aleatorias

Un supuesto más natural es considerar que cada vez que un jugador perdedor cambia de estrategia, su nuevo exponente es igual al del ganador más una variación aleatoria. Asumamos que la variación ξ es obtenida aleatoriamente

de una f.d.p. y que $(\xi, \alpha, \vec{\mu})$ depende de α y un conjunto de parámetros $\vec{\mu}$. La ecuación maestra que ahora describe la evolución resulta

$$g^{e+1}(\alpha) - g^e(\alpha) = \int d\beta \int d\xi \delta(\alpha - \beta + \xi) \quad (5.3.2)$$

siendo $\delta(x)$ la función delta de Dirac, $\delta(x) = 1$ si $x = 0$ y $\delta(x) = 0$ en otro caso.

5.4. Simulaciones numéricas

La formulación analítica anterior permite plantear una ecuación diferencial, pero la dificultad de calcular las probabilidades $w_T(\alpha)$ en forma explícita impide obtener una expresión cerrada para la distribución de las estrategias ganadoras. Las diversas ecuaciones sólo pueden integrarse numéricamente para proveer una solución al modelo. Además algunas tienen aproximaciones, por lo cual tiene sentido preguntarse si la solución resultante de la integración (el resultado numérico) es ventajosa comparada con la alcanzada con una simulación directa del modelo.

La simulación puede llevarse a cabo con el siguiente forma.

1. Utilizamos una f.d.p. $g(\alpha)$ para obtener la estrategia de cada uno de los N jugadores;
2. simulamos el juego para cada participante, realizando T ofertas, basándonos en una función de densidad y determinamos el ganador (aquel que realiza la LUB).

En el caso de juegos evolutivos, al final de una serie de subastas debemos cambiar el exponente de alguno de los jugadores derrotados. Esto lo hacemos copiando el exponente de un ganador, con o sin una variable de mutación y reemplazando. Luego, con los «nuevos» jugadores repetimos el juego. Cuando cambiamos N exponentes (un mismo jugador puede cambiar varias veces) obtenemos una nueva «generación». La f.d.p. de la estrategia ganadora de cada generación la calculamos repitiendo completamente todo el proceso varias veces.

5.5. Resultados

Los resultados a los que llegaron Radicchi y Baronchelli fueron obtenidos con simulaciones para $N = 100$ jugadores y un valor máximo del bien de $M = 1000$. El orden de estos parámetros es similar al observado en la realidad. En la primer imagen de la figura 5.5.1 podemos observar el gráfico de la f.d.p. $w(\alpha)$ para $T = 1$ y $T = 10$; en ambos casos la función para elegir las estrategias iniciales fue

$$g(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } \alpha \in (0, 5) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Los jugadores empezaron aleatoriamente con estrategias de movimiento *ex-citado* (aquellos α menores a 1), *difusivo* (mayores a 3) y *super difusivo* o vuelos

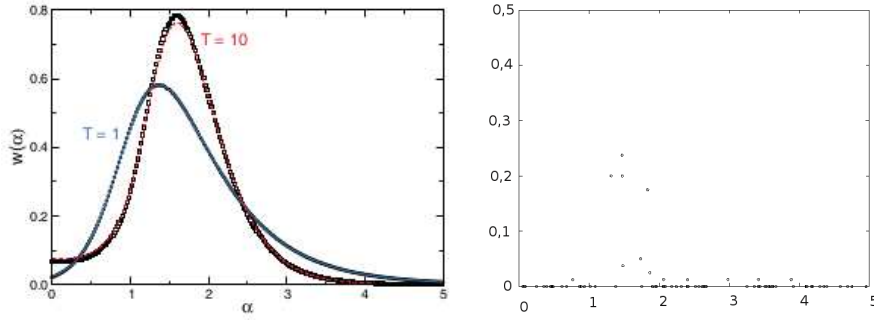


Figura 5.5.1: El primer gráfico es de la función de densidad hallada por Radicchi y Baronchelli en [6] de la estrategia ganadora $w(\alpha)$ en el caso en que las estrategias son elegidas con una función de probabilidad $g(\alpha)$ uniforme en $(0,5)$. T indica la cantidad de ofertas con las que cada jugador participó. El segundo son simulaciones propias con 80 jugadores, 10 ofertas, 10 juegos (antes de cada evolución) y 300 evoluciones. Podemos observar que los valores exitosos se concentran en la misma región.

de Lévy (α entre 1 y 3). Una distribución uniforme en el $(0,5)$ es equivalente a asumir que los participantes no conocen absolutamente nada sobre qué estrategia es mejor para ganar el juego. Luego de las simulaciones podemos observar que la situación resultó mucho más ventajosa para jugadores que usaron estrategias entre 1,2 y 1,5 que es un rango dentro de los vuelos de Lévy.

En el primer gráfico de la figura 5.5.2 los resultados son válidos para $T = 1$, mientras que en el segundo lo son para $T = 10$. Si bien las curvas parecen mostrar resultados distintos, cuando hacemos e tender a infinito, la función $w^{(e)}$ se acerca a una δ concentrada en un único punto, la estrategia óptima α^* . Es importante aclarar que este resultado es independiente de la función de distribución inicial $g(\alpha)$.

5.6. Una variante asimétrica

Modelemos nuevamente estas subastas LUB introduciendo un beneficio para el jugador que dependa del número de apuestas. Sea

$$B(b, a) = M - b - a \cdot c$$

el beneficio del jugador ganador, siendo M el valor del bien, b el menor precio que ofertó y que nadie más propuso (LUB), a la cantidad de ofertas hechas y c el costo que debe pagar por cada una. Para acercar este modelo a la realidad utilicemos como unidad de medida el signo de \$, M cercano a \$1000 y pensemos en un costo c de aproximadamente \$0,5. Así por ejemplo si tenemos los

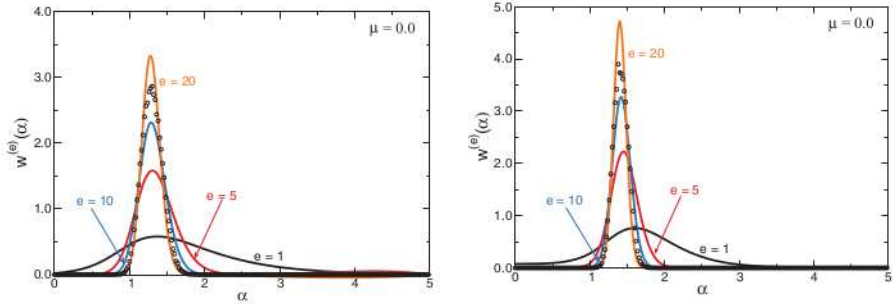


Figura 5.5.2: (Figura de [6]) Función de distribución de la estrategia ganadora $w^{(e)}(\alpha)$ en la generación e . El primero simula una cantidad de ofertas por jugador de $T = 1$ y el segundo, de $T = 10$.

siguientes resultados

| | |
|--------------------------|-----|
| dos jugadores ofrecen | \$1 |
| ninguno ofrece | \$2 |
| un jugador ofrece | \$3 |
| cuatro jugadores ofrecen | \$4 |
| ... | ... |

el ganador es aquel que ofertó \$3 y gana $\$(M - 3 - a \cdot c)$.

Este problema ha sido analizado desde el punto de vista de la teoría de juegos en [18], [19] y se demostró que para N jugadores y costos de participación altos $c > M/2$, existen N equilibrios de Nash en estrategias puras (un único jugador oferta \$1 y los demás no participan). Para costos menores, no existen equilibrios en estrategias puras.

Determinar el equilibrio mixto implica hallar una distribución de probabilidades sobre las $(M - 1)$ ofertas posibles, que contemple además el número de ofertas que cada jugador hará. Distintas propuestas (ver [16], [17]) mostraron que las distribuciones uniformes y de Poisson, entre otras, no reproducen los resultados observados en los sitios donde se puede participar de estas subastas.

Como ya mencionamos, se estudió en [6] las ofertas reales hechas en este juego en distintos sitios de Internet. Recordemos que los jugadores saben si alguna de sus ofertas está momentáneamente ganando la subasta y se enteran cuando dejan de tener la oferta ganadora (aunque no saben si otro ofertó este valor con el cual estaba ganando, o si alguien ofreció un número menor que estaba disponible). El apostador realiza entonces una búsqueda de Lévy (ver [20], [21]), donde la probabilidad de realizar la próxima búsqueda a distancia d es proporcional a $d^{-\alpha}$, para cierto parámetro $\alpha > 1$. Encontraron, además, que $\alpha \approx 1,3$ para todos los jugadores, independiente de su experiencia.

5.6.1. Invasiones

Los resultados anteriores sugieren que el juego se estabiliza en una situación donde todos juegan con un vuelo de Lévy con un mismo exponente. Cabe preguntarse si este es un equilibrio de Nash y en caso de serlo, si es evolutivamente estable.

Como vimos en el segundo capítulo, un juego simétrico con finitos jugadores idénticos y un espacio de estrategias compacto posee un equilibrio de Nash simétrico, con lo cual cabría suponer que efectivamente se obtuvo un equilibrio de Nash. Observemos que ningún jugador tiene incentivos para cambiar su α , pero si además se le permitiese cambiar el número de apuestas, podría ser que obtuviese una mayor ganancia esperada.

Para analizar esta posibilidad, tomamos los mismos parámetros de [7], asumimos el valor del bien $M = 1000$, una población de 100 jugadores idénticos, con un costo por apuesta de $c = 1$ que utilizan un vuelo de Lévy con exponente $\alpha = 1,3$ y ofertan 10 veces cada uno. Observemos que la ganancia esperada de un jugador i es

$$E(G_i) = \frac{M}{\#\{\text{jugadores}\}} - 10 \cdot c = 0.$$

Ahora, modificamos el exponente α de un jugador y le permitimos realizar más apuestas. Si bien la dinámica que utilizamos es similar a la anterior, ahora no permitimos que un jugador repita una misma oferta y si de las 10 ofertas realizadas sólo hay k diferentes, sólo pagará $(k \cdot c)\$$. Lo mismo ocurre con el jugador invasor, sólo pagará por las ofertas diferentes que realice.

La figura 5.6.4 representa el pago esperado cuando aumenta el número de ofertas que realiza el invasor. Claramente, la población de agentes con $\alpha = 1,3$ se ve perjudicada con la aparición de éste.

El mismo fenómeno observamos para diferentes valores de α mayores a 2, variando el número de ofertas y en todos los casos, el invasor logra reproducirse hasta que la población se estabiliza en un nuevo estado, donde un porcentaje corresponde a los invasores con diferente valor de α y realizando un mayor número de ofertas.

En la figura 5.6.4 observamos que dos invasores jugando con $\alpha = 2$ y realizando 90 ofertas, contra 98 jugadores que juegan con $\alpha = 1,3$ y realizan 10 ofertas, logran reproducirse e invadir parcialmente a la población original.

Lo mismo ocurre si se introducen 30 invasores jugando con $\alpha = 2$ y realizando 90 ofertas, contra 70 que juegan con $\alpha = 1,3$ como puede verse en la figura 5.6.5. En ambos casos la población final resulta mixta y se estabiliza (aproximadamente) en un 93 % de jugadores que utilizan $\alpha = 1,3$ y un 7 % que juegan con $\alpha = 2$.

5.7. Referencias

Como mencionamos varias veces, en esta capítulo seguimos principalmente el trabajo de F. Radicchi y A. Baronchelli en [7].

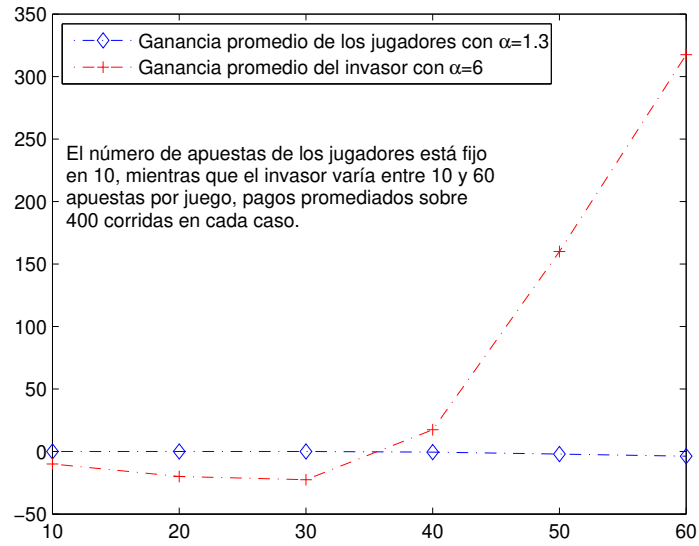


Figura 5.6.3: Ganancia promedio de jugadores con $\alpha = 1,3$ versus un invasor con $\alpha = 6$.

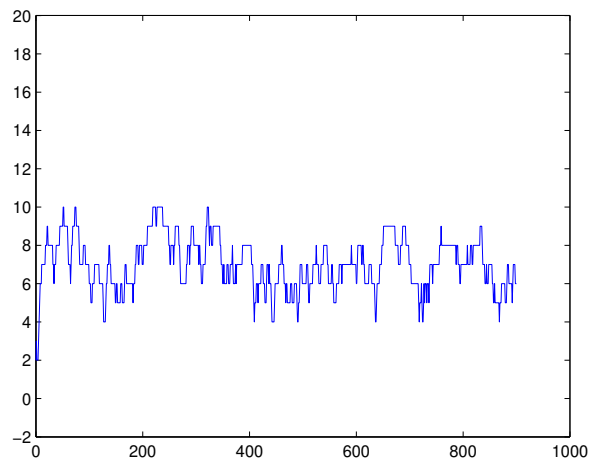


Figura 5.6.4: Porcentaje de jugadores con $\alpha = 2$, comenzando con 2% de invasores.

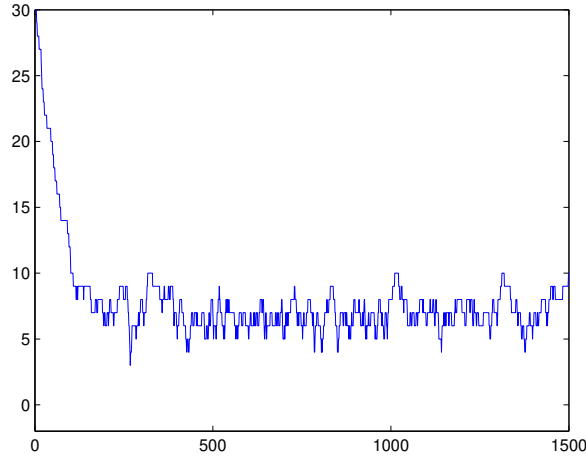


Figura 5.6.5: Porcentaje de jugadores con $\alpha = 2$, comenzando con 30 % de invasores.

5.8. Comentarios finales

En los dos primeros capítulos estudiamos la relación entre equilibrios de Nash, equilibrios evolutivamente estables, y los puntos fijos para la dinámica del replicador, si bien nos limitamos a juegos de sólo dos jugadores. La extensión a más jugadores es sólo técnica (ver por ejemplo [11] o [15], donde el número de jugadores es aleatorio).

Observemos que según los resultados del capítulo 3 no deberían existir equilibrios mixtos estables en juegos asimétricos. Una vez más, allí consideramos sólo finitas estrategias, pero los resultados de este capítulo pueden replicarse tomando valores discretos de α , sin ninguna dificultad. Cuando no hay mutaciones aleatorias, por ejemplo, sólo se juega con los valores de α iniciales.

En el capítulo 4 vimos para ciertos juegos, dentro de ciertas estrategias, es posible tener equilibrios mixtos estables, si bien algunas variables aleatorias introducían cierta asimetría. Aquí tenemos también esa asimetría en el número de ofertas que efectivamente realizará un jugador, pues aunque dos de ellos decidan realizar T ofertas (para un mismo exponente α) el «paseo» de Lévy puede modificar el número de ofertas que cada uno hace.

Quedan pendientes una serie de problemas para profundizar. Aclaremos que en realidad los resultados de los capítulos 2 y 3 no pueden aplicarse directamente y su extensión a juegos con múltiples jugadores ya ofrece una dificultad no menor.

Además en el problema de las subastas el espacio de estrategias es un con-

tinuo, con lo cual el sistema de ecuaciones ordinarias del replicador debe ser reemplazado por una ecuación en derivadas parciales o un operador integral. En estos casos la noción de estabilidad cambia completamente ya que una dinámica de imitación como la utilizada debe modificarse por otra donde se cambie de manera continua de estrategias (ver [13, 14, 12, 10]).

También la difusión espacial es un problema interesante para considerar y en el cual se introducen nuevas dificultades. Además del término fuente de la ecuación del replicador, uno podría esperar cambios en la proporción de individuos que usan una estrategia fija debido al movimiento de los jugadores.

Bibliografía

- [1] K. Binmore, L. Samuelson, *Evolution and Mixed Strategies*, Games and Economic Behavior 34, 200-226 (2001).
- [2] J. Hofbauer, K. Sigmund, *Evolutionary game dynamics*, Bulletin of the American Mathematical Society 40 (2003) 479-519.
- [3] J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 1982.
- [4] J. Maynard Smith, G.R. Price, *The logic of animal conflict*, Nature 246 (1973) 15-18.
- [5] M. Nowak, *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*. Harvard University Press, 2006.
- [6] F. Radicchi, A. Baronchelli and L.A.N. Amaral, *Rationality, irrationality and escalating behavior in online auctions*, PLoS ONE 7(1): e29910 (2012).
- [7] F. Radicchi and A. Baronchelli, *Evolution of optimal Lévy-flight strategies in human mental searches*, Phys. Rev. E 85, 061121 (2012).
- [8] W.H. Sandholm, *Population Games and Evolutionary Dynamics*. MIT Press, 2010.
- [9] R. Selten, *A note on evolutionarily stable strategies in asymmetric animal conflicts*, Journal of Theoretical Biology 84 (1980) 93-101.
- [10] K. Sigmund (editor) *Evolutionary Game Dynamics*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 69, American Mathematical Society, 2011.
- [11] M. Bukowski, J. Miekisz, *Evolutionary and asymptotic stability in symmetric multi-player games*, Int. J. Game Theory 33 (2004) 41-54.
- [12] H. Neunzert, *An introduction to the nonlinear Boltzmann-Vlasov equation*, en *Kinetic Theories and the Boltzmann Equation*, ed. C Cercignani, Lecture Notes in Mathematics 1048 (1984) 60-72.
- [13] J. Cleveland, A.S. Ackleh, *Evolutionary Game Theory on Measure Spaces: Well-Posedness*, preprint arXiv:1202.3685, 2012.

- [14] J. Cleveland, A.S. Ackleh, *Evolutionary Game Theory on Measure Spaces: Asymptotic Behavior of Solutions*, preprint arXiv:1202.3689, 2012.
- [15] H. Tembine, E. Altman, R. El-Azouzi, Y. Hayel, *Evolutionary games with random number of interacting players applied to access control*, Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc, and Wireless Networks and Workshops, 2008. WiOPT 2008.
- [16] F. T. Bruss, G. Louchard, M. Ward, *Inverse auctions: Injecting unique minima into random sets*, ACM Trans. on Algorithms 6, art 21 (2009).
- [17] S. Pigolotti, S. Bernhardsson, J. Juul, G. Galster, P. Vivo, *Equilibrium strategy and population-size effects in lowest unique bid auctions*, Phys. Rev. Lett. 108, 088701 (2012).
- [18] A. Rapoport, H. Otsubo, K. Hironori, B. Kim, W.E. Stein, *Unique bid auctions: Equilibrium solutions and experimental evidence*, MPRA, University Library of Munich, Germany (2007).
- [19] A. Rapoport, H. Otsubo, K. Hironori, B. Kim, W.E. Stein, *Unique Bid Auction Games*, Jena Econ. Research Papers, Max-Planck-Institute of Econ. (2009).
- [20] G. Viswanathan, V. Afanasyev, S. Buldyrev, S. Havlin, M. Da Luz, E. Raposo, H. Stanley, *Lévy flights in random searches* Physica A 282:1 (2000).
- [21] G. Viswanathan, F. Bartumeus, S. Buldyrev, J. Catalan, U. Fulco, S. Havlin, M. Da Luz, M. Lyra, E. Raposo, H. Stanley, *Lévy flight random searches in biological phenomena*, Physica A 314:208 (2002).
- [22] K. Binmore, *Playing for Real*. Oxford University Press, 2007.
- [23] T. S. Ferguson. *Game Theory*. UCLA 2007.
- [24] M. J. Osborne, A. Rubinstein, *A course in game theory*. MIT Press, 1994.