



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Números de Ramsey

Tatiana Romina Hartinger

Director: Guillermo Durán (Instituto de Cálculo, Departamento de Matemática)

Junio de 2013

Índice

Capítulo 1: Introducción: La teoría de Ramsey	3
Capítulo 2: Definiciones útiles	6
Capítulo 3: Números exactos	10
Números de la forma $R(3, n)$	12
$R(3, 3)=6$	12
$R(3, 4)=9$	14
$R(3, 5)=14$	17
$R(3, 6)=18$	18
$R(3, 7)=23$	22
$R(3, 8)=28$	40
$R(3, 9)=36$	50
Números de la forma $R(4, n)$	60
$R(4, 4)=18$	60
$R(4, 5)=25$	62
Capítulo 4: Cotas para números de Ramsey	72
Cota inferior para $R(4, 6)$	72
Cotas inferiores para $R(6, 12)$, $R(6, 14)$ y $R(6, 15)$	75
Cota superior para $R(5, 5)$	76
Capítulo 5 : Conclusiones	83
Bibliografía	86
Apéndice A: Algoritmos	88
Apéndice B: Demostraciones de lemas de $R(3, 7)$	94

Introducción: La teoría de Ramsey

La teoría de Ramsey obtiene su nombre en honor a Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) y a su célebre teorema, que demostró en 1928.

Sin haber llegado a sus 27 años, Ramsey hizo grandes contribuciones a la lógica, la filosofía, la economía y la matemática. Trabajó en el King's College de Cambridge, y en 1928, a la edad de 25 años realizó su paper titulado "On a problem of formal logic" (Un problema de lógica formal) que fue publicado póstumamente en 1930. Este contenía las versiones finita e infinita de lo que se conoce como teorema de Ramsey o principio de Ramsey, que incluimos más adelante.

Pero, ¿Qué es la teoría de Ramsey? Aunque no hay una definición universal podríamos decir que la teoría de Ramsey es una arista de la combinatoria que estudia la preservación de propiedades bajo particiones de conjuntos. En otras palabras, dado un conjunto S con una propiedad P , intenta responder preguntas del tipo: ¿Es cierto que cuando S es partido en finitos subconjuntos, uno de esos subconjuntos debe tener también la propiedad P ? [10]

Algunos ejemplos de este tipo de problemas son:

- (i) Dada alguna partición de los enteros en finitas clases, siempre hay alguna clase que contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas (Teorema de Van der Waerden).
- (ii) Dado un conjunto \mathcal{F} formado por los subconjuntos de cardinal k de un conjunto infinito S , y una partición de \mathcal{F} en finitas clases, entonces existe un subconjunto infinito de S para el cual todos sus subconjuntos de cardinal k pertenecen a una misma clase. (Teorema de Ramsey).
- (iii) Para alguna partición del conjunto de puntos en el plano en finitas clases, alguna clase siempre contiene tres puntos formando un triángulo recto de área 1.

Para un tratamiento más detallado de estos problemas, ver [5].

Antes de describir el contenido a desarrollar, veamos un resultado básico asociado a la teoría de Ramsey:

Principio del palomar: Si un conjunto de cardinal n es partido en r subconjuntos disjuntos, donde $n > r$, entonces al menos uno de los subconjuntos tiene más de un elemento.

Este principio se puede generalizar:

Principio del palomar generalizado: Si más de mr elementos son divididos en r conjuntos, entonces algún conjunto contiene más de m elementos.

El teorema de Ramsey podría ser considerado como un refinamiento del principio del palomar, donde no solo se garantiza un cierto número de elementos en un conjunto sino que además se garantiza cierta relación entre estos elementos.

A continuación incluimos los teoremas o principios de Ramsey:

Principio infinito de Ramsey:

Para k y r números enteros positivos, si la colección de todos los subconjuntos de r elementos de un subconjunto infinito S es coloreada con k colores, es decir que se le asigna un mismo color dentro de los k posibles a todos los elementos de un mismo conjunto, entonces S contiene un subconjunto infinito S_1 tal que todos los subconjuntos de S_1 de r elementos tienen asignado el mismo color. [5]

Principio finito de Ramsey:

Dados 3 enteros positivos r, n y k existe un entero $m_0 = R(r, n, k)$ tal que es el mínimo entero m que cumple que si la colección de todos los subconjuntos de r elementos de un conjunto S_m de m elementos es coloreada con k colores, entonces S_m contiene un subconjunto S_n de n elementos tal que todos sus subconjuntos de r elementos tienen asignado el mismo color. En el caso en que $k = 2$, podemos escribir $R(r, n, k) = R(r, n)$. [5]

Más adelante veremos una demostración del principio finito de Ramsey para el caso en que se colorean las aristas de un grafo con 2 colores ($k = 2$).

En esta tesis nos centramos en los números de Ramsey aplicados a la teoría de grafos.

Para eso comenzamos, en el capítulo 2, con algunas definiciones útiles en referencia a los grafos y a la teoría de Ramsey que serán necesarias para el desarrollo de la misma.

En el capítulo 3 veremos algunos resultados generales sobre números de Ramsey, así como la demostración del valor de todos aquellos números de dos colores, hallados de manera exacta. Este capítulo se divide en los números de la forma $R(3, n)$, con $3 \leq n \leq 9$, y los números de la forma $R(4, n)$, con $n = 4$ y $n = 5$.

En el capítulo 4 se encuentran las demostraciones de 5 cotas, 4 inferiores y una superior, a modo de ejemplificar los métodos que podrían utilizarse para el cálculo de las mismas.

Finalmente, el capítulo 5 incluye las conclusiones, así como un vistazo general a los problemas que se encuentran abiertos y en los que están trabajando los matemáticos hoy en día en términos de números de Ramsey. También se exponen algunas posibles aplicaciones a problemas cotidianos de los números de Ramsey.

Además, se incluyen 2 apéndices, el primero con programas de Matlab utilizados para comprobar las cotas inferiores de ciertos números, y que fueron aplicados a las matrices de adyacencia de los grafos contruidos como contraejemplo para corroborar la no existencia de ciertos K_n . El segundo apéndice incluye las demostraciones de 2 lemas utilizados en la demostración de la igualdad $R(3, 7) = 23$.

Definiciones útiles

En esta tesis nos enfocaremos en los números de Ramsey con $k=2$ y utilizaremos la formulación de estos problemas mediante teoría de grafos. Para esto, comenzaremos por dar algunas definiciones que nos serán de utilidad.

DEFINICIÓN 1: Un grafo G es un par (V, E) donde V es un conjunto finito y E es un conjunto de pares de elementos distintos en V . Llamamos a V el conjunto de nodos o vértices, y a E el conjunto de aristas.

DEFINICIÓN 2: Un conjunto $I \subseteq V$, es llamado un conjunto independiente si para ningún conjunto de 2 nodos de I , $\{v, w\}$ se cumple que $(v, w) \in E$.

DEFINICIÓN 3: Una clique $C \subseteq V$ es un conjunto de nodos tal que para todo subconjunto de 2 nodos de C , $\{v, w\}$ se cumple que $(v, w) \in E$.

DEFINICIÓN 4: Se denota K_n al grafo completo de n nodos. Un grafo es completo si contiene todas las aristas posibles, es decir, que dado cualquier nodo v éste está unido por una arista a todos los demás nodos del grafo.

DEFINICIÓN 5: Dado un grafo $G = (V, E)$ se define su complemento como el grafo $G^c = (V, E^c)$, es decir el grafo formado por los mismos nodos y las aristas que no se encuentran en el grafo original.

DEFINICIÓN 6: La definición de los números de Ramsey para teoría de grafos sería la siguiente:

$R(n, m) = \beta$ si β es el mínimo número de nodos que debe tener un grafo completo de manera que coloreamos sus aristas con 2 colores, digamos rojo y verde, entonces, o bien tiene incluido un K_n rojo o bien tiene incluido un K_m verde.

Análogamente, podemos decir que β es el mínimo número de nodos que debe tener un grafo para que o bien el grafo incluya un K_n o bien su complemento

incluya un K_m . Lo que a su vez es análogo a decir que o bien el grafo incluye una clique de tamaño n o bien incluye un conjunto independiente de tamaño m .

DEFINICIÓN 7: Dado un nodo v de un grafo G , definimos su grado en G , notamos $d(v)$, como las cantidad de nodos que están unidos a v mediante una arista en $E(G)$.

DEFINICIÓN 8: Decimos que un grafo G es k –regular, para k entero, si cada nodo de G tiene grado k .

DEFINICIÓN 9: dados los enteros k, t, n, e, δ , definimos los (k, t, n, e, δ) –grafos como el conjunto de todos los grafos simples, sin cliques de tamaño k , sin conjuntos independientes de tamaño t , de orden n , con e aristas, y grado mínimo δ .

Podríamos no incluir alguno de los argumentos si quisiéramos que el mismo sea libre. Tenemos que $(k, t, n, e) = \cup_{\delta}(t, n, e)$ y $(k, t, n) = \cup_e(k, t, n, e)$.

DEFINICIÓN 10: Si G es un grafo, $V(G)$ es el conjunto de nodos de G , $N(v)$ denota el vecindario abierto de v , es decir aquellos nodos que son adyacentes a v , y $N[v]$ es el vecindario cerrado de v , compuesto por los nodos adyacentes y por v . En esta tesis, por motivos de practicidad, usaremos la notación $H_1(v)$ como el conjunto de los vecinos de v en G , sin incluir a v , y $H_2(v) = V(G) - H_1(v) - \{v\}$.

DEFINICIÓN 11: Dado $G = (V, E)$ se define un subgrafo de G como un grafo $H = (X, Y)$ donde $X \subseteq V$ e $Y \subseteq E$.

Si W está incluido en $V(G)$, $G[W]$ denota el subgrafo de G inducido por W , es decir, el grafo que tiene los nodos de W y las aristas de G que hay entre los mismos.

DEFINICIÓN 12: El número $e(k, t, n, \delta)$ es el mínimo número de aristas en cualquier (k, t, n, δ) -grafo.

DEFINICIÓN 13: Sea G un $(3, l)$ -grafo. Sea $V_i = l - 1 - i$, y definimos s_i como el número de nodos de G de grado V_i .

En un $(3, l)$ -grafo, $H_1(v)$ es un conjunto independiente del vértice v . Por lo tanto el grado máximo en un $(3, l)$ -grafo es $l - 1$, así que en la definición anterior, $i \geq 0$. Luego el número i es la diferencia entre el grado del vértice y el mayor grado posible en G . Notemos que el valor de V_i depende de l tanto como de i .

Dado un (k, l, n) -grafo, y un vértice v de grado d , sabemos que $H_2(v)$ es un $(k, l - 1, n - d - 1)$ -grafo. Luego, debemos tener que $|H_2(v)| \geq e(k, l - 1, n - d - 1)$.

DEFINICIÓN 14: Un vértice v de grado d en un (k, l, n) -grafo se llama completo si $|H_2(v)| = e(k, l - 1, n - d - 1)$

En un $(3, l)$ -grafo, si tomamos un vértice v , entonces cada arista está en $H_2(v)$ o es adyacente a exactamente un vértice en $H_1(v)$, ya que $H_1(v)$ es un conjunto independiente.

Un grafo G es regular de grado d o d -regular si todos los nodos de G tienen grado d .

DEFINICIÓN 15: A un nodo v se lo llama preferido cuando se divide el conjunto de los nodos del grafo en dos subconjuntos complementarios, el de sus vecinos, $H_1(v)$, y el de sus no vecinos, $H_2(v)$.

DEFINICIÓN 16: Si un vértice v es preferido en un (k, l) -grafo, se define $Z(v)$ como la suma de los grados de los vecinos de v . Si $Z(v) = s$, se dice que v tiene Z -suma s .

DEFINICIÓN 17: Dado un grafo G , si v es un vértice de grado d , decimos que v es un d -vértice. El subgrafo de G generado por todos los d -nodos se llama un d -subgrafo.

DEFINICIÓN 18: $I(G)$ es el cardinal del mayor conjunto independiente de G .

DEFINICIÓN 19: $C(G)$ es el cardinal del mayor clique de G .

DEFINICIÓN 20: G es un (x, y) -grafo si $x > C(G)$ e $y > I(G)$.

DEFINICIÓN 21: $R'(x, y)$ es el mayor entero tal que existe un (x, y) -grafo con $R'(x, y)$ nodos. Definido de esta forma, $R'(x, y) = R(x, y) - 1$.

DEFINICIÓN 22: Sea G un (x, y) -grafo y sea v el grado mínimo entre los nodos de G ; definimos

$$\sigma(G) = R(x - 1, y) - v.$$

DEFINICIÓN 23: Se entiende por un conjunto independiente máximo en G a un conjunto independiente en G que contenga $I(G)$ nodos. Un nodo p de un grafo G se llamará esencial si pertenece a todo conjunto independiente máximo de G .

DEFINICIÓN 24: Un grafo G de n nodos es cíclico si existen enteros $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq [n/2]$, de manera que los nodos de G pueden ser identificados con los enteros módulo n ($x = a(n)$, es decir que x es igual a a módulo n si a es el resto de dividir x por n) y dos nodos r y s de G están unidos por una arista si y sólo si $|r - s| = i_j$ para algún $j = 1, 2, \dots, k$.

DEFINICIÓN 25: Un grafo se dice conexo si partiendo de un nodo cualquiera del grafo siempre existe un camino que va desde ese nodo hacia cualquier otro nodo del grafo.

DEFINICIÓN 26: Un circuito en un grafo es un camino cerrado (camino que comienza y termina en el mismo nodo).

DEFINICIÓN 27: La circunferencia de un grafo es la longitud del ciclo más corto contenido en el mismo. Si el grafo es acíclico, se dice que su circunferencia es ∞ .

Números exactos

Hasta el momento se conoce con exactitud el valor de pocos números de Ramsey.

Para dos colores y valores de r y s a lo sumo 10 se conocen los siguientes valores exactos y cotas:

r, s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	40–43
4	1	4	9	18	25	36–41	49–61	56–84	73–115	92–149
5	1	5	14	25	43–49	58–87	80–143	101–216	126–316	144–442
6	1	6	18	36–41	58–87	102–165	113–298	132–495	169–780	179–1171
7	1	7	23	49–61	80–143	113–298	205–540	217–1031	241–1713	289–2826
8	1	8	28	56–84	101–216	132–495	217–1031	282–1870	317–3583	331–6090
9	1	9	36	73–115	126–316	169–780	241–1713	317–3583	565–6588	581–12677
10	1	10	40–43	92–149	144–442	179–1171	289–2826	331–6090	581–12677	798–23556

A continuación veremos las demostraciones de todos aquellos números para los cuales se conoce su valor exacto.

Primero veamos un par de resultados generales que nos serán útiles para la demostración de números concretos.

Observación 1: $R(n, m) = R(m, n)$

Teorema 1: $R(n, 2) = n$ [14]

Dem:

Si coloreamos las aristas de K_n de rojo y verde entonces o bien todas las aristas son verdes o bien al menos una arista es roja. En el primer caso, hay un K_n verde y en el segundo caso, hay un K_2 rojo. Luego, $R(n, 2) \leq n$. Veamos que vale el igual. Si $R(n, 2) = r < n$, la coloración rojo-verde que consiste en pintar todas las aristas con verde no contiene ningún K_n verde ni ningún K_2 rojo. \square

Teorema 2: $R(n, m) \leq R(n - 1, m) + R(n, m - 1)$ para todo $n, m \geq 3$ [10]

Dem:

Por inducción en $n + m$:

$$R(2, m) = m \leq R(1, m) + R(2, m - 1) = 1 + (m - 1) = m$$

lo cual vale para $m \geq 1$

Supongamos ahora que existen $R(n - 1, m)$ y $R(n, m - 1)$ y que cumplen la desigualdad y veamos que $R(n, m)$ cumple con la desigualdad.

Supongamos que tenemos una coloración rojo-verde de las aristas del grafo completo de $R(n - 1, m) + R(n, m - 1)$ nodos, llamémoslo G , y sea v un nodo cualquiera de G . Entonces de las $R(n - 1, m) + R(n, m - 1) - 1$ aristas que inciden en v hay al menos $R(n - 1, m)$ que son verdes o al menos $R(n, m - 1)$ que son rojas (ya que si ninguna de estas dos opciones se cumpliera, entonces la cantidad de aristas que inciden en v sería menor a $R(n - 1, m) + R(n - m - 1) - 1$).

Si hay al menos $R(n - 1, m)$ aristas verdes que inciden en v , elijamos $R(n - 1, m)$ nodos en el conjunto $\{w / (v, w) \text{ está pintada de verde}\}$ y consideramos el subgrafo completo de G que tiene esos $R(n - 1, m)$ nodos, con la coloración inducida. Entonces, por hipótesis inductiva, este subgrafo contiene un K_{n-1} verde o un K_m rojo. En el segundo caso, claramente G contiene un K_m rojo. En el primer

caso, agregando a ese K_{n-1} el nodo v y todas las aristas de v a cada uno de esos nodos del K_{n-1} (que sabemos que son verdes) se obtiene un K_n verde.

De manera análoga se ve que si en v inciden al menos $R(n, m - 1)$ aristas rojas, entonces hay en G un K_m rojo o un K_n verde. \square

Números de la forma $R(3, n)$

Ahora comencemos con los números de la forma $R(3, k)$. Se conocen los valores para $3 \leq k \leq 9$. Daremos previamente un par de lemas útiles.

LEMA 1: $R(3, k) \leq n$ si para cada grafo G libre de triángulos con n nodos existe un conjunto independiente I tal que $|I| \geq k$. [16]

LEMA 2: $R(3, k) > n$ si existe un grafo G libre de triángulos con n nodos que no contiene un conjunto independiente I tal que $|I| \geq k$. [16]

Para la demostración de ciertas cotas inferiores de los números de Ramsey utilizamos unos algoritmos en Matlab para corroborar que ciertos grafos no contengan una estructura particular (triángulos, K_4 , K_5 , K_6). Estos algoritmos que sólo serán nombrados en este capítulo, pueden verse en el Apéndice A: Algoritmos.

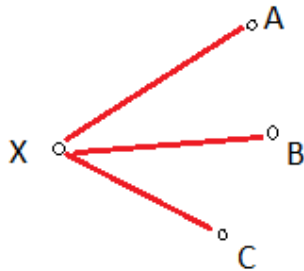
$R(3, 3)=6$ [10]

Teorema 1: $R(3,3)=6$

Dem:

Supongamos que hay una fiesta con 6 personas. Quiero ver que hay 3 personas que son desconocidos entres sí o 3 personas que se conocen todas entre sí. La arista entre 2 personas es roja si las personas se conocen y verde si no se conocen.

Sea X una persona cualquiera. Entonces conoce al menos a 3 personas o hay 3 personas que no conoce. Supongamos que hay 3 personas que conoce, llamémosla A , B y C . Entonces tenemos:

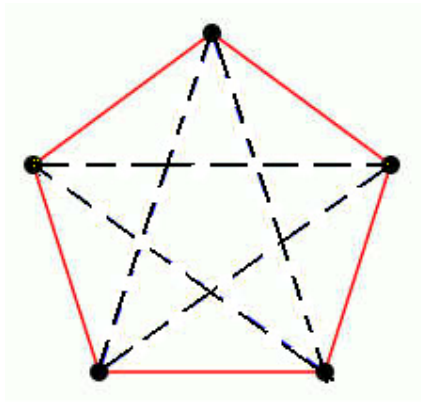


Si existe alguna arista roja entre A , B y C , obtenemos un triángulo rojo. Si no, deben ser todas las aristas entre A , B y C verdes, por lo tanto tenemos un triángulo verde.

El caso en que X tiene 3 personas a las que no conoce es análogo.

Luego, obtuvimos $R(3,3) \leq 6$.

La siguiente coloración de K_5 demuestra que $R(3,3) > 5$, ya que es una coloración con 2 colores en donde no hay ningún triángulo monocromático.



Ver Apéndice A. En matlab aplicamos: $\text{triangulos}(M1)=0$, $\text{triangulos}(M2)=0$, donde $M1$ es la matriz de adyacencia del grafo dado por las aristas rojas, con línea completa, y $M2$ la del grafo dado por las aristas verdes, con línea punteada (ambos

son complementarios). El programa triángulos, que se aplica a matrices de adyacencia de grafos, da 1 si existe un triángulo en ese grafo y 0 sino.

Por lo tanto, $R(3,3) = 6$. \square

$R(3, 4)=9$ [1]

Teorema 1 (Hand Shaking's Theorem o Teorema del apretón de manos):
 $\sum_{u \in V(G)} d(u) = 2 \cdot |E|$ para todo grafo $G=(V, E)$ [Euler, 1736]

Dem:

Lo haremos por inducción en $m = |E|$.

Para $m = 0$: En este caso, la parte izquierda de la igualdad es 0, pues $|E| = 0$, y la parte derecha es 0 pues, al no haber aristas, $d(u) = 0$ para todo nodo u .

Para $m = 1$: Hay por lo menos 2 nodos v_1 y v_2 con $d(v_1) = 1$ y $d(v_2) = 1$, y si hay más nodos, $d(v_i) = 0$, $i \geq 3$. Entonces: $\sum_{v \in V} d(v) = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot |E|$, demostrando la afirmación en este caso.

Supongamos que el resultado vale para m , queremos ver que esto implica que el resultado vale para $m + 1$: Tengo un grafo G con $m + 1$ aristas. Dada una arista cualquiera de G , e_1 , considero el grafo $H = G - \{e_1\}$. Entonces por hipótesis inductiva, $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E(H)| = 2 \cdot m$

Como saqué una arista, hay 2 nodos v_i y v_j cuyo grado disminuyó en uno, suponiendo $e_1 = (v_i, v_j)$. Luego, $\sum_{v \in V(H)} d(v) + 2 = \sum_{v \in V} d(v)$ y $\sum_{v \in V(H)} d(v) + 2 = 2 \cdot m + 2$ por lo tanto $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot (m + 1)$ lo que demuestra el teorema. \square

Teorema 2: $R(3,4)=9$

Dem:

Por teorema:

$$R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10$$

Veamos que toda coloración rojo-verde de K_9 tiene un triángulo verde o un K_4 rojo, y que esto no vale para K_8 .

Supongo que existe una coloración R-V de K_9 tal que no contiene ningún K_3 verde y ningún K_4 rojo.

Entonces en cada nodo inciden a lo sumo 3 aristas verdes. Esto es porque si en algún nodo u incidieran 4 aristas verdes $(u, v_1), (u, v_2), (u, v_3), (u, v_4)$. Como no hay ningún K_3 verde, ninguna arista (v_i, v_j) puede ser verde, luego todas son rojas, pero entonces existiría un K_4 rojo, lo cual es absurdo pues supusimos que no.

En cada nodo inciden a lo sumo 5 aristas rojas, pues si en algún nodo w incidieran 6 aristas rojas $(w, v_1), \dots, (w, v_6)$, entonces como $R(3,3) = 6$ el grafo completo con nodos v_1, \dots, v_6 contendría un triángulo monocromático, que debe ser rojo (pues supuse que no había ningún K_3 verde). Si v_i, v_j, v_k son los nodos del triángulo rojo, entonces el subgrafo completo w, v_i, v_j, v_k es un K_4 rojo, lo cual es un absurdo.

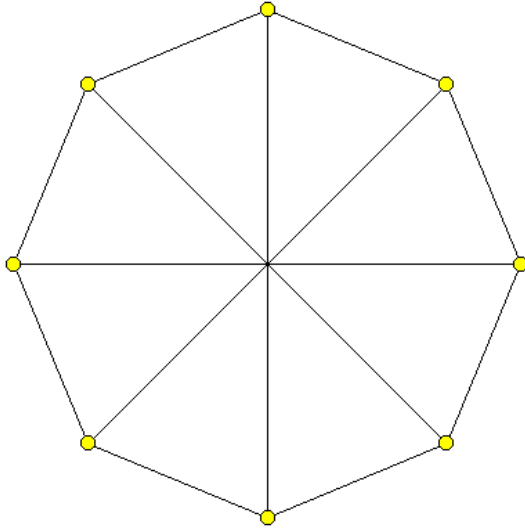
Por lo tanto, en cada nodos inciden exactamente 3 aristas verdes y 5 aristas rojas.

Si consideramos el subgrafo G de K_9 formado por todos los nodos y todas las aristas verdes, entonces cada nodo de G tiene grado 3, luego tenemos que:

$$\sum_{u \in V(G)} d(u) = 3 \cdot 9 = 27 \neq n \cdot 2 \quad n \in \mathbb{N}$$

Lo cual contradice el lema anterior.

Veamos que $R(3,4) > 8$, exhibiendo un grafo de 8 nodos que no contenga ningún K_3 y cuyo complemento no contenga ningún K_4 .



Ver Apéndice A: En matlab aplicamos: $\text{triangulos}(M3)=0$, $k4(M4)=0$, donde $M3$ es la matriz de adyacencia del grafo de arriba y $M4$ la de su complemento. El programa $k4$ recibe una matriz de adyacencia de un grafo y devuelve un 1 si existe un K_4 dentro de ese grafo y o sino.

De cualquier manera, en este caso, debido a la simetría del grafo podemos ver de manera directa que no posee ni triángulos ni 4-CI. Tomemos un nodo cualquiera, que llamaremos 1, ese nodo está unido entonces con los nodos 2, 5 y 8. Ahora, si existiera un triángulo debería estar formado por el nodo 1 y 2 nodos más de entre sus vecinos. Hay $\binom{3}{2} = 3$ posibilidades: $\{1, 2, 5\}$ (el cual no puede ser un triángulo pues no hay una arista entre 2 y 5); $\{1, 2, 8\}$ (que no puede ser porque no hay una arista entre 2 y 8) o el $\{1, 5, 8\}$ (que tampoco puede ser porque no hay una arista entre 5 y 8). Por lo tanto, el grafo es libre de triángulos. Ahora veamos que no posee ningún 4-CI: el nodo 1 no está unido con los nodos 3, 4, 6 y 7. Por lo tanto las posibilidades de que haya un 4-CI que incluya al nodo 1 son $\binom{4}{3} = 4$. El hecho de que haya una arista entre 3 y 4, implica que $\{1, 3, 4, 7\}$ y $\{1, 3, 4, 6\}$ no pueden ser 4-CI, y el hecho de que exista una arista entre 6 y 7 implica que $\{1, 3, 6, 7\}$ y $\{1, 4, 6, 7\}$ tampoco pueden serlo. Luego el grafo tampoco posee 4-CI. \square

$$R(3, 5)=14 \text{ [1]}$$

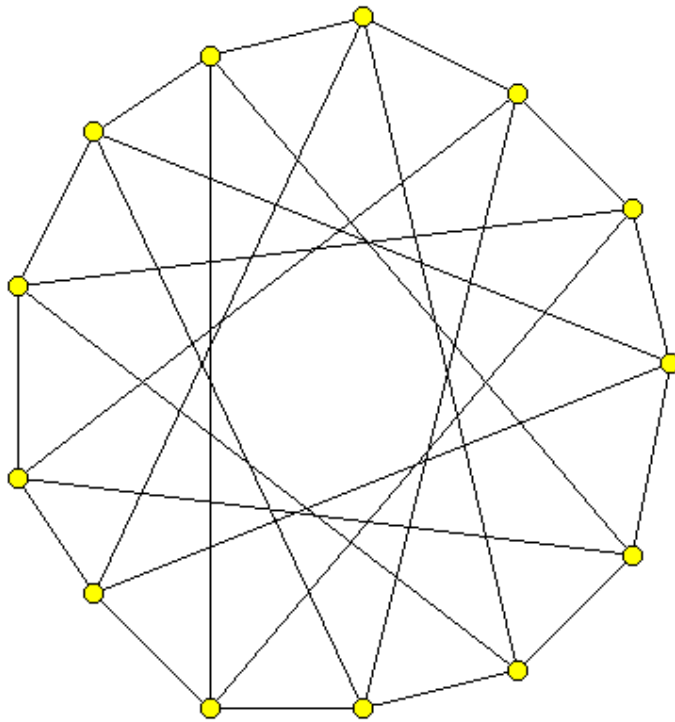
Teorema 1: $R(3,5) = 14$

Dem:

Por la desigualdad del teorema,

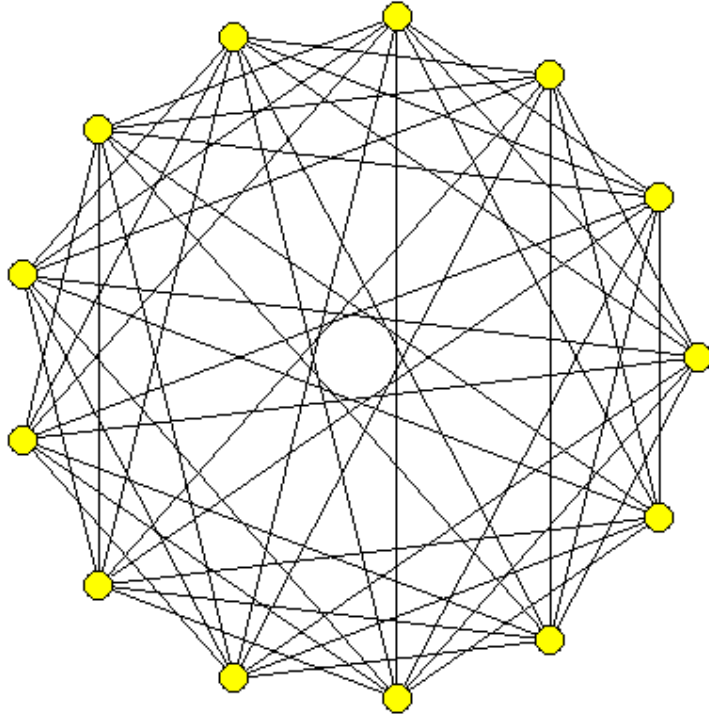
$$R(3,5) \leq R(2,5) + R(3,4) = 5 + 9 = 14$$

Luego, exhibiendo un grafo con 13 nodos que no contenga ningún K_3 y cuyo complemento no contenga ningún K_5 obtenemos el resultado deseado. En este grafo, cada nodo está unido con el primer y quinto vecinos. El grafo es libre de triángulos.



Ver Apéndice A. En matlab aplicamos: `triangulos(M5)=0`, donde M5 es la matriz de adyacencia del grafo mostrado arriba.

También comprobamos que su complemento, dado por el siguiente grafo, no contiene ningún K_5 .



Ver Apéndice A. En matlab aplicamos: $k5(M6)=0$, donde $M6$ es la matriz de adyacencia del grafo de arriba. El programa $k5$ recibe una matriz de adyacencia de un grafo y devuelve 1 si existe un K_5 en el grafo y 0 sino. \square

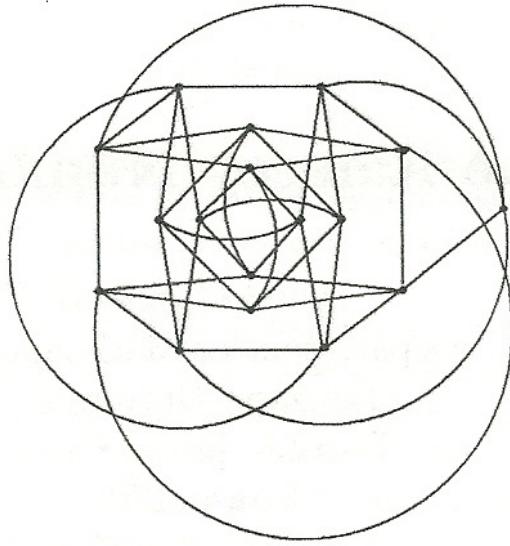
$R(3, 6)=18$ [2]

Teorema 1: $R(3,6) = 18$

Dem:

Dado que el número de Ramsey $R(3,6)$ es el mínimo número de nodos que debe tener un grafo para que o contenga un triángulo o su complemento contenga un K_6 , la existencia de un grafo G de 17 nodos, en el cual no haya triángulos y en cuyo complemento no existan K_6 implicaría que 17 no puede ser el mínimo número de nodos para que eso pase, por lo tanto eso demostraría que $R(3,6) \geq 18$.

A continuación damos un grafo de 17 nodos sin triángulos y cuyo complemento no contiene ningún K_6 para así demostrar la cota inferior antes nombrada.



Ver Apéndice A. En matlab aplicamos: $\text{triangulos}(M7)=0$, y $k6(M8)=0$, donde $M7$ es la matriz de adyacencia del grafo de arriba y $M8$ es la matriz de adyacencia de su complemento. El programa $k6$, dada una matriz de adyacencia de un grafo da 1 si existe un K_6 en el grafo y 0 sino.

Queremos ver entonces que $R(3,6) \leq 18$.

Sea G un grafo libre de triángulos de 18 nodos. Probaremos por el absurdo que G contiene un conjunto independiente de 6 nodos. Para ello suponemos que G no tiene ningún conjunto independiente de tamaño 6. Primero demostramos las siguientes afirmaciones:

- 1) G es 5-regular:

Como G es libre de triángulos, para cualquier nodo v , $N(v)$ es un conjunto independiente (sino, habría un triángulo). Entonces $|N(v)| \leq 5$, es decir, $d(v) \leq 5$. Supongamos que $d(v) < 5$, sea $H = G - n[v]$. Claramente $|H| \geq 13$, pues si $|H| \geq 14 = R(3,5)$, entonces H tiene un conjunto independiente de 5 nodos que junto con v forma un CI de 6 nodos, lo cual es absurdo. Luego $|H| = 13$ y por lo tanto $d(v) = 4$, entonces H es el único

$R(3,5)$ –crítico (grafo con $R(3,5) - 1$ nodos libre de triángulos y sin conjuntos independientes de cardinal 5) y es en particular 4-regular [17]. Sea t en $N(v)$, entonces t tiene 3 nodos t_1, t_2, t_3 en H cada uno independiente de $N(v) - \{t\}$ (porque t_1, t_2, t_3 tienen 4 vecinos en H y uno más en $\{t\}$). Luego, $(N(v) - \{t\}) \cup \{t_1, t_2, t_3\}$ es un conjunto independiente de cardinal 6, lo cual es un absurdo. Luego, $|N(v)| = 5$.

- 2) Para cualquier nodo v hay exactamente 4 no vecinos p_i de v tal que $|N(v) \cap N(p_i)| = 1$ y 8 no vecinos q_i de v tal que $|N(v) \cap N(q_i)| = 2$. Más aún, los p_i comparten 4 vecinos distintos con v y los q_i comparten 8 pares de vecinos distintos con v .

Sean u y v no adyacentes. Probemos que $1 \leq |N(u) \cap N(v)| \leq 2$.

Si $|N(u) \cap N(v)| = 0$ entonces en particular, v es independiente de $N(u)$ de tal manera que el conjunto $\{v\} \cup N(u)$ es un conjunto independiente de cardinal 6. Lo cual es un absurdo. Luego, $|N(v) \cap N(u)| \geq 1$. Ahora supongamos que $|N(v) \cap N(u)| \geq 3$. Sea $H = G - N[u] \cup N[v]$, entonces $|H| \geq 9 = R(3,4)$, por lo tanto, como H es libre de triángulos existe en H un conjunto independiente de cardinal 4. Este conjunto junto con u y v dan un conjunto independiente de cardinal 6. Lo cual es un absurdo.

Sea ahora $H = G - N[v]$, es fácil ver que hay exactamente 20 aristas entre H y $N[v]$. Esto es así pues, por (1) cada nodo del grafo tiene grado 5 y por lo tanto los 5 nodos de $N[v]$ distintos de v deben tener 4 vecinos más, pero ninguno puede estar en $N[v]$ o sino se formaría un triángulo. Ahora, simplemente contando esos nodos en H que mandan 2 aristas a $N[v]$ y aquellos que mandan sólo 1 tenemos la primera parte de nuestra afirmación. Para la segunda parte, supongamos que los nodos p_1 y p_2 son adyacentes al mismo nodo u en $N(v)$, entonces en particular el conjunto $\{p_1, p_2\} \cup (N(v) - \{u\})$ es un conjunto independiente de tamaño 6, lo cual es un absurdo. Luego, cada uno de p_1, p_2, p_3, p_4 está unido con un nodo distinto de $N(v)$. Por último, supongamos que q_1, q_2 perteneciente a $V(H)$ están unidas con el mismo par $\{x, y\}$ incluido en $N(v)$, entonces en

particular los nodos no adyacentes x, y tienen los vecinos comunes $\{v, q_1, q_2\}$, lo cual es absurdo (por la primera parte).

- 3) Con la notación de (2), $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ induce un 4-ciclo en G .

Nombremos los nodos de G tal que $N(v) = \{t, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ donde usando (2) asumimos que $s_1p_1, s_2p_2, s_3p_3, s_4p_4$ son las aristas entre los p_i y $N(v)$. Notemos que ningún p_i es vecino de t porque los p_i (por (2)) comparten un único vecino con v . Renombremos los q_i de la siguiente manera: sea $N(t) - \{v\} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ y sean los q_i que quedan: w_1, w_2, w_3, w_4 . Luego, $V(G) = \{v, t, s_1, s_2, s_3, s_4, t_1, t_2, t_3, t_4, p_1, p_2, p_3, p_4, w_1, w_2, w_3, w_4\}$, cada uno de los s_i manda exactamente una arista a v , una arista a los p_i , una a los t_i (pues t_i es uno de los q_i y por lo tanto debe compartir 2 vecinos con v , uno de ellos es t y el otro debe ser uno de los s_i), y por lo tanto 2 aristas a los w_i . Más aún, no pueden haber 2 s_i , digamos s_1 y s_2 que se unan con el mismo par, digamos $\{w_1, w_2\}$ de los w_i , de otra manera s_1, s_2 compartirían 3 vecinos $\{v, w_1, w_2\}$ lo que es un absurdo (por (2)). Similarmente, ningún w_i es adyacente a más de dos s_i ya que sino el par $\{v, w_i\}$ compartiría más vecinos de los permitidos.

Ahora, supongamos que 2 de los s_i , digamos s_1, s_2 son adyacentes al mismo w_i , supongamos que es w_1 . Ninguno de los nodos p_1, p_2, s_1, s_2, w_1 está unido a ninguno de los 3 nodos independientes $\{s_3, s_4, t\}$, de tal manera que para evitar un conjunto independiente de tamaño 6, el subgrafo inducido por $\{p_1, p_2, s_1, s_2, w_1\}$ no contiene un conjunto independiente de tamaño 3 y por lo tanto (para evitar triángulos) debe haber un 5-ciclo.

Luego, en particular, p_1 y p_2 son adyacentes. Un argumento similar puede usarse para cualquier par en $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ que tienen a un w_i como vecino en común y como hay exactamente 4 pares, hay exactamente 4 aristas en el subgrafo inducido por $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y por lo tanto (para evitar triángulos) ese subgrafo es un 4-ciclo, lo que demuestra este punto.

- 4) Sin pérdida de generalidad, supongo que $p_1p_2p_3p_4p_1$ es el 4-ciclo inducido por $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ en G . Cada p_i comparte por lo menos un vecino con t (por

el ítem (2)). Además, también por (2) junto con el hecho de que G es libre de triángulos, los p_i no tienen vecinos comunes excepto en $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Entonces cada uno de los p_i está unido a un único t_i , y asumimos (quizás con un renombramiento de los t_i) que $p_i t_i$ pertenece a $E(G)$ para $i = 1, \dots, 4$. Hay exactamente 4 nodos entre los p_i y los w_i y (quizás renombrando los w_i) podemos asumir que son los nodos $p_i w_i$, $i = 1, \dots, 4$. Los nodos v y w_1 comparten exactamente 2 vecinos y los únicos candidatos posibles están en el conjunto $\{s_2, s_3, s_4\}$. Análogamente, t y w_1 comparten exactamente 2 vecinos y los únicos candidatos posibles están en $\{t_2, t_3, t_4\}$. Entonces, hay un i distinto de 1 tal que el nodo w_1 está unido a s_i y t_i . Si $i = 2$ o $i = 4$, los nodos p_i y w_1 tienen 3 vecinos en común, lo cual contradice (2). Luego, $i = 3$. Por simetría, podemos asumir que $w_1 s_2$ pertenece a $E(G)$. Luego, como vimos arriba que w_1 no puede estar unido a s_2 y t_2 a la vez, tenemos que $w_1 t_4$ pertenece a $E(G)$. Consideremos el nodo s_2 . Arriba vimos que cada s_i es adyacente a exactamente un t_i . No puede ser que $s_2 t_3$ pertenezca a $E(G)$ para evitar el triángulo $s_2 w_1 t_3$, tampoco puede ser que $s_2 t_2$ pertenezca a $E(G)$ para evitar el triángulo $s_2 p_2 t_2$, y por último, no puede ser que $s_2 t_4$ pertenezca a $E(G)$ para evitar el triángulo $s_2 w_1 t_4$. Luego, la única posibilidad es que $s_2 t_1$ pertenezca a $E(G)$, pero ahora s_2 y p_1 tienen 3 vecinos comunes $\{p_2, w_1, t_1\}$ lo que contradice (2). Esta última contradicción finaliza la demostración del teorema. \square

R(3, 7)=23 [6]

En este caso la demostración, que incluye numerosos resultados teóricos, tiene como objetivo llegar a que $(3, 7, 23) = \emptyset$, con lo cual tendríamos que no existen grafos de 23 nodos que no posean ni triángulos ni 7-conjuntos independientes. De esta manera obtendríamos la cota superior. Para la cota inferior se exhibirá un grafo de 22 nodos sin triángulos y sin conjuntos independientes de tamaño 7.

Lema 1: Sea \bar{G} el complemento de G , entonces $I(\bar{G}) = C(G)$ y $C(\bar{G}) = I(G)$. Por lo tanto, G es un (x, y) –grafo sii \bar{G} es un (y, x) –grafo.

Lema 2: Si G es un (x, y) –grafo con n nodos entonces $R'(x - 1, y)$ es el grado máximo posible para un nodo de G y $(n - 1) - R'(x - 1, y)$ es el grado mínimo posible para un nodo de G .

Dem:

Sea $d(p)$ el grado de p y sea H_1 el subgrafo de G generado por los nodos de G que están unidos a p por una arista. Claramente, $I(H_1) \leq I(G) < y$, ya que cualquier conjunto de nodos independiente en H_1 lo es en G . Ahora, si K es un subgrafo completo de H_1 con k nodos, el grafo generado por K y p en G es un subgrafo completo de G con $k + 1$ nodos. Por lo tanto,

$$C(H_1) \leq C(G) - 1 < x - 1.$$

Tenemos luego que H_1 es un $(x - 1, y)$ –grafo. Por lo tanto,

$$d(p) \leq R'(x - 1, y).$$

Usando el argumento de arriba junto con el lema 1, mostramos que $\bar{d}(p)$, el grado de p en \bar{G} , es menor o igual a $R'(x, y - 1)$. Pero $d(p) + \bar{d}(p) = n - 1$. Por lo tanto,

$$d(p) \geq (n - 1) - R'(x, y - 1). \square$$

Proposición 1: Si G es un (x, y) –grafo con n nodos,

- a) $n \leq R'(x - 1, y) + R'(x, y - 1) + 1 - \sigma(G)$,
- b) $\sigma(G) \leq R'(x - 1, y) + R'(x, y - 1) + 1 - n$.

Dem:

Del lema 2 tenemos que $(n - 1) - R'(x, y - 1) \leq d(p)$ para todos los nodos p de G . Elegimos p de manera que $d(p) = R'(x - 1, y) - \sigma(G)$. Combinando esos dos hechos, se obtienen a) y b). \square

Obs: Los grados de los nodos de un grafo G van desde $R'(x - 1, y) - \sigma(G)$ hasta $R'(x - 1, y)$.

Proposición 2: Sea G un (x, y) –grafo con n nodos y e aristas. Sea e_k el número de aristas en H_k (para $k = 1, 2$). Finalmente, sea $v_i = R'(x - 1, y) - i$ y sea s_i el número de nodos en G con grado v_i . Ahora supongamos que un nodo p con grado v_i es el nodo preferido y notemos t_j el número de nodos en H_1 que tienen grado v_j en G . Entonces:

$$e_2 - e_1 = R'(x-1, y) \left[\frac{n}{2} - R(x-1, y) + i \right] + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right).$$

Dem:

Vamos a contar el número de aristas en G de dos maneras diferentes:

- 1) La suma de los grados de los nodos en H_1 menos el número de aristas en H_1 (que han sido contadas 2 veces) más el número de aristas en H_2 (que no han sido contadas antes).

$$e = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} t_j v_j - e_1 + e_2.$$

- 2) La suma de los grados de todos los nodos de G dividido 2 (se debe al teorema del apretón de manos).

$$e = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j v_j.$$

Igualando obtenemos:

$$e_2 - e_1 = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} \left(\frac{s_j}{2} - t_j \right) v_j.$$

Luego,

$$e_2 - e_1 = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} \left(\frac{s_j}{2} - t_j \right) (R'(x-1, y) - j).$$

Como $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j = n$ y $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} t_j = v_i$, obtenemos:

$$e_2 - e_1 = \left(\frac{n}{2} - v_i \right) R'(x-1, y) + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right).$$

Lo que concluye la demostración. \square

Corolario 1: Si G es un $(3, y)$ -grafo con n nodos, p es un nodo preferido de grado v_i , entonces:

$$e_2 = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + i \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right).$$

Dem:

En este caso $e_1 = 0$ (pues los vecinos de un nodo con grado $y - 1 - i$ en un $(3, y)$ –grafo forman un conjunto independiente) y $R'(2, y) = y - 1$. \square

Proposición 3: Sea G un $(3, y)$ –grafo con dos nodos de grado v_i unidos por una arista. Entonces prefiriendo uno de esos nodos podemos obtener:

$$e_2 \leq (y - 1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + i \right).$$

Dem:

Usaremos la notación de la proposición 2, donde p es uno de los dos nodos dados. Sea p' el otro nodo y sea t'_j el número de nodos de grado v_j en H_1 cuando p' es preferido.

Como p y p' están unidos por una arista, no pueden tener aristas a un punto en común. Luego, $t_j + t'_j \leq s_j$ para todo j . Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{\sigma(G)} j(t_j - \frac{s_j}{2}) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j(t'_j - \frac{s_j}{2}) = \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j(t_j + t'_j - s_j) \leq 0.$$

Lo cual demuestra la proposición, pues por el corolario 1 tendríamos:

$e_2 = (y - 1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + i \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j(t_j - \frac{s_j}{2})$ y vimos que el segundo sumando es menor o igual a 0. \square

Corolario 2: Si $\sigma(G) = 1$ para un $(3, y)$ –grafo G , existe algún nodo de grado v_1 para el cual

$$e_2 \leq (y - 1) \left(\frac{n}{2} - y + 2 \right).$$

Más aún, la desigualdad estricta va a valer para algún nodo a menos que los nodos de grado v_1 pueden dividirse en dos clases, cada una con $s_1/2$ nodos de manera tal que cada nodo de una clase tenga una arista a cada uno de los nodos de la otra clase.

Dem:

Si hay dos nodos de grado v_1 unidos por una arista, la proposición 3 nos dará la desigualdad. Si, en cambio, todos los nodos de grado v_1 están desconectados entre sí, tenemos:

$$e_2 = (y - 1) \left(\frac{n}{2} - y + 2 \right) - \frac{s_1}{2}.$$

Ahora supongamos que $e_2 = (y - 1) \left(\frac{n}{2} - y + 2 \right)$ para todos los nodos de grado v_1 .

En este caso, $t_1 = s_1/2$ para todos los nodos de grado v_1 . Como no hay triángulos, el grafo bipartito descrito anteriormente resulta. \square

Proposición 4: Si G es un $(3, y)$ –grafo de n nodos con e aristas, entonces

$$ne \geq \sum_{i \geq 0} e(3, l - 1, n - v_i - 1) s_i + (v_i)^2 s_i$$

Donde v_i y s_i son los definidos en la proposición 2.

Dem:

Se verá más adelante en el lema 1 de la demostración de que $R(3, 9) = 36$. \square

En vista de las proposiciones anteriores es claro que la cantidad de aristas de un (x, y) –grafo es información útil. Por ejemplo, se podría ver que $e(x, y, n) \geq q$ lo cual ayudaría en la demostración de que $(x, y) = \emptyset$ y por lo tanto, en la demostración de que $R(x, y) \geq n$.

Lema 3: Sea G un grafo y G' un grafo obtenido de G a partir de la remoción de una arista (digamos la arista entre los nodos p y q). Entonces:

- (1) Cualquier conjunto independiente en G es independiente en G' .
- (2) Si p y q son esenciales en G' , entonces $I(G') = I(G) + 1$.
- (3) Si p o q no son esenciales en G' , $I(G') = I(G)$.
- (4) Si p es esencial en G , p es esencial en G' y q no es esencial en G' .

Dem:

El punto (1) sale del hecho de que G' se obtuvo removiendo una arista de G . De este hecho se desprende que $I(G) \leq I(G')$. Ahora, si p no es esencial en G' existe un conjunto independiente máximo en G' que no contiene a p ; claramente este conjunto es también independiente en G ; luego se obtuvo (3). También se obtiene que p no es esencial en G , lo que demuestra la primera parte de (4). Si $I(G) = I(G')$ entonces cualquier conjunto independiente máximo en G es también un conjunto independiente máximo en G' y este conjunto no debe contener o a p o a q . Luego, si p y q son ambos esenciales en G' , $I(G) < I(G')$; sin embargo la remoción de p o q de un conjunto independiente en G' produce un conjunto independiente en G ; y se demuestra de esta forma (2). También se

obtiene de esto, que si p y q son esenciales en G' ninguno de los dos es esencial en G , lo que completa la demostración de (4). \square

Proposición 5: Sea G un grafo con circunferencia z y sea g_i el número de subgrafos de G conexos con i aristas. Entonces para todo entero $0 \leq w < z$,

$$(-1)^w I(G) \leq (-1)^w \sum_{i=0}^w (-1)^i g_i.$$

Se da la igualdad si G es libre de circuitos y la sumatoria es sobre todos los subgrafos conexos.

Dem:

La haremos por inducción en el número de aristas en el grafo.

Hipótesis inductiva (HI): Sea G un grafo con circunferencia mayor a w , y sea p un nodo de G . Existe una partición de los subgrafos conexos de G con w o menos aristas entre dos clases, los subgrafos de una clase serán llamados positivos y los de la otra clase negativos. Para $i = 0, 1, \dots, w - 1$ existen funciones $f_i: S_i^+ \rightarrow S_{i+1}^-$ (donde S_j^+ es el conjunto de subgrafos positivos con j aristas y S_j^- es el conjunto de subgrafos negativos con j aristas). Además, se satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) S_0^- es un conjunto independiente máximo;
- (2) si el nodo p pertenece a S_0^- entonces p es esencial en G ;
- (3) f_i es biyectiva para $i = 0, 2, \dots, w - 1$;
- (4) Para todos los subgrafos positivos H con menos de w aristas, p es un nodo de H si p es un nodo de $f_i(H)$;
- (5) Si G tiene w o menos aristas entonces $S_w^+ = \emptyset$.

Observemos primero que, si la HI es satisfecha por el grafo G , entonces

$$\sum_{i=0}^w (-1)^i g_i = I(G) + (-1)^w |S_w^+|,$$

(pues $|S_i^+|$ cancela $|S_{i+1}^-|$ para $i = 0, 1, \dots, w - 1$ por la biyección) y por lo tanto la proposición vale para G , ya que multiplicando ambos lados por $(-1)^w$:

$$(-1)^w \sum_{i=0}^w (-1)^i g_i = (-1)^w I(G) + (-1)^{2w} |S_w^+| = (-1)^w I(G) + |S_w^+|, \text{ en donde } |S_w^+| \geq 0 \text{ lo cual nos da la desigualdad buscada.}$$

En segundo lugar, notamos que la HI es satisfecha por todos los grafos que no tienen aristas. Finalmente, si G es un grafo que satisface la HI para algún nodo p , entonces G unido con cualquier nodo aislado también va a satisfacer la hipótesis (condiciones (2) y (4) son satisfechas trivialmente por cualquier nodo aislado).

Ahora, supongamos que la HI es satisfecha por todos los grafos con menos de n aristas. Sea G un grafo con n aristas y p un nodo de G que no es aislado.

Caso 1: p es esencial en G .

Elijamos cualquier arista de G que tenga a p como un extremo; llamemos q al otro extremo. Sea G' el grafo obtenido removiendo la arista que une p con q del grafo G . Aplicamos la HI a G' usando el nodo p . Sea la partición de los subgrafos conexos denotada por π' y las funciones f_i' . Usamos la HI de nuevo para el grafo G' y el nodo q . Llamemos a la partición π'' y a las funciones f_i'' en este caso.

Dado un subgrafo conexo H de G teniendo w o menos aristas, notemos que es libre de circuitos (pues la circunferencia de G es más grande que w), por lo tanto no podemos tener circuitos. Luego, si H contiene una arista entre p y q , la remoción de una arista desconecta H . Llamaremos a la componente que contiene a p la p -componente de H y a la otra componente la q -componente de H .

Los subgrafos conexos de G con w o menos aristas son ahora partidos en las clases positivas y negativas de la siguiente manera; si $H \subset G'$, entonces H conserva el signo de la clase dada por la partición π' , si $H \not\subset G'$, H tiene el signo de su q -componente bajo la partición π'' . La asignación de los subgrafos positivo es especificado de la siguiente manera: si H es positivo y tiene $i < w$ aristas y $H \subset G'$, definimos $f_i(H) = f_i'(H)$; pero si H es positivo y tiene $i < w$ aristas y $H \not\subset G'$, entonces $f_i(H)$ va a ser igual al grafo conexo con p -componente de la misma forma que en H y q -componente igual a f_i'' aplicada a la q -componente de H . Notemos que este será un subgrafo conexo de G ya que (4) de la HI asegura que q es un nodo de f_i'' aplicado a la q -componente de H .

Por el lema 3, $I(G) = I(G')$ y p es esencial en G' , por lo tanto (1) y (2) de la HI son satisfechas (notemos que todos los nodos con partidos por π'). Para demostrar (3), elegimos un subgrafo H de la clase negativa con $i + 1$ aristas donde $i \geq 0$. Primero supongamos que $H \subset G'$; como f_i' satisface (3) existe uno y sólo un grafo H' con i aristas para el cual $f_i(H') = H$. Ahora, supongamos que $H \not\subset G'$; entonces vemos que la q -componente de H contiene por lo menos una arista (ya que $q \in S_0^+$, cualquier $H \not\subset G'$ cuyo q componente es el nodo aislado q debe ser la clase positiva). Como f_i'' satisface las condiciones (3) y (4) existe un subgrafo $K \subset G'$ tal que q es un nodo de K y $f_i''(K)$ equivale al q componente de H . Luego, el único subgrafo conectado H' con q componente K y p componente al igual que el de H es asignado en H por f_i y es el único. La condición (4) se sigue directamente del hecho de que f_i' satisface (4), y todos los subgrafos no mapeados por el f_i' contienen la arista entre p y q , por lo tanto contienen a p de cualquier manera.

Finalmente, consideramos el caso en que G tiene w o menos aristas. Claramente, $S_w^+ = \emptyset$ si hay menos de w aristas o si G no es conectado (conexo). Ahora, si G es conexo y tiene w aristas hay un solo grafo conexo con w aristas, llamemoslo G . La

q -componente de G es el máximo subgrafo conexo de G' que contiene a q ; además observamos que tiene menos de w aristas. El hecho de que f_i'' debe satisfacer (4) requiere que el q -componente de G y en consecuencia G sean la clase negativa; por lo tanto S_w^+ es vacío.

Caso 2: p no es esencial en G .

Elijamos cualquier arista con p como uno de los extremos y sean q y G' como arriba.

Caso 2a: $I(G) = I(G')$.

Por el lema 3 sabemos que p no es esencial en G' . En este caso simplemente aplicamos la HI al grafo G' con p como el nodo y usamos solo las funciones f_i' para definir f_i (los subgrafos no contenidos en G' son partidos y mapeados por sus p componentes). La verificación de las condiciones (1), (2), (3), (4), y (5) es igual que en el caso 1.

Caso 2b: $I(G) = I(G') - 1$.

De nuevo, por el lema 3, p y q son esenciales en G' . Como en el caso 1, aplicamos la HI a G' con p como el nodo y a G' con q como el nodo, realizando los procedimientos del caso 1 con una excepción. Como q es esencial, $q \in S_0^-$, pero cada subgrafo conexo $H \not\subset G'$ cuyo q componente consiste en el nodo aislado q sería de signo negativo aun sin ser la imagen de algún subgrafo bajo la función f_i , por lo tanto los subgrafos que contienen a la arista entre p y q van a ser clasificados y mapeados de acuerdo a sus q componentes a menos que sus q componentes consistan en un único nodo. En este último caso vamos a partirlos y asignarlos de acuerdo a sus p componentes.

Aun quedan 2 detalles menores. Primero, la arista entre p y q tiene signo negativo pero no es la imagen de f_i . En segundo lugar, S_0^- es independiente en G' pero no en G . Ambos detalles se corrigen removiendo p de S_0^- (ver lema 3), esto es, poniendo en S_0^+ y asignando p en la arista entre p y q . La verificación de las condiciones (1), (2), (3), (4) y (5) son rutinarios. Por lo tanto la proposición ha sido demostrada. \square

OBSERVACIÓN 1: Este teorema da estimaciones y en algunos casos el valor exacto del tamaño del máximo clique del grafo.

Usamos esta proposición para estudiar ciertos subgrafos de (x, y) –grafos. Estos subgrafos son descritos a continuación.

Consideremos un conjunto independiente H_1 en un $(3, y)$ –grafo y sea H_2 el subgrafo generado por los nodos restantes o si H_1 es el conjunto de nodos unidos a un nodo p tomamos H_1 y H_2 los usuales cuando p es preferido. Para indicar la primera situación diremos que H_1 es preferido y para indicar lo último decimos

que p es preferido. Un nodo p de H_2 se dice que esta sobre un conjunto de nodos S de H_1 si todas las aristas de p hacia H_1 tienen el otro extremo en S . Cualquier subgrafo de H_2 se dice que está sobre S si todos sus nodos están sobre S . Finalmente, definimos el grafo con soporte S como el subgrafo en H_2 generado por los nodos de H_2 que están sobre S .

OBSERVACIÓN 2: Supongamos que H_1 contiene z nodos y S contiene w nodos. Sea K el subgrafo soportado por S . Un conjunto independiente de K junto con los nodos de H_1 pero no de S forman un conjunto independiente de G . Se puede ver que K es un $(3, y - (z - w))$ –grafo. En general K tendrá pocas aristas, y por lo tanto pocos circuitos y por eso la proposición 5 dará una buena aproximación al máximo conjunto independiente de K , $I(K)$.

Proposición 6: Sea G un $(3, y)$ –grafo con un nodo preferido p o un conjunto independiente preferido H_1 . En cualquier caso, H_1 contiene v nodos y sea $r_i(j)$ el número de subgrafos conexos de H_2 con j aristas y teniendo un total de i aristas desde esos nodos de H_2 hacia los nodos de H_1 . Además, sea ϑ_i el conjunto de grafos conexos de H_2 con j aristas. Para K un subgrafo de H_2 , sea $\omega(K)$ el número de nodos de H_1 que están unidos a K por una arista y $\mu(K)$ el número de aristas de K hacia H_1 . Entonces:

$$[k + y - 1 - v] \binom{v}{k} \geq \sum_{j=0}^a (-1)^j \left(\sum_{i=0}^K \binom{v-i}{k-i} r_i(j) \right) + \epsilon(a, k, p),$$

Donde a es impar y todos los subgrafos de G con un k –conjunto como soporte tiene circunferencia más grande que a , y donde:

$$\epsilon(a, k, p) = \sum_{j=0}^a (-1)^j \left\{ \sum_{G \in \vartheta_i} \left[\binom{v-\omega(K)}{k-\omega(K)} - \binom{v-\mu(K)}{k-\mu(K)} \right] \right\}.$$

Dem:

Sea S un conjunto de k nodos en H_1 , entonces pueden haber a lo sumo $[(y-1) - (v-k)]$ nodos independientes en K (el subgrafo de H_2 soportado por S). Tenemos entonces $[k + y - 1 - v] \geq I(K)$; y por la proposición 5,

$$I(K) \geq \sum_{i=0}^a (-1)^i g_i$$

Donde g_i es el número de subgrafos conexos de K que tiene j aristas.

Por lo tanto,

$$[k + y - 1 - v] \geq \sum_{i=0}^a (-1)^i g_i.$$

Ahora, suponiendo esta desigualdad sobre todos los subconjuntos de H_1 que contienen k nodos, el lado izquierdo es $[k + y - 1 - v] \binom{v}{k}$.

Para escribir el lado derecho consideremos un grafo conexo K con j aristas ($K \in \mathcal{G}_i$). K va a estar sobre exactamente $\binom{v-\omega(K)}{k-\omega(K)}$ k -conjuntos de H_1 y por lo tanto va a aparecer en la sumatoria esa misma cantidad de veces con $(-1)^i$ como coeficiente cada vez. Luego,

$$[k + y - 1 - v] \binom{v}{k} \geq \sum_{j=0}^a (-1)^j \left\{ \sum_{G \in \mathcal{G}_i} \binom{v-\omega(K)}{k-\omega(K)} \right\}.$$

Y el lado derecho también puede escribirse de esta forma:

$$\sum_{i=0}^a (-1)^i \left\{ \sum_{G \in \mathcal{G}_i} \binom{v-\mu(K)}{k-\mu(K)} + \sum_{G \in \mathcal{G}_i} \left[\binom{v-\omega(K)}{k-\omega(K)} - \binom{v-\mu(K)}{k-\mu(K)} \right] \right\}.$$

O simplemente,

$$\sum_{i=0}^a (-1)^i \left(\sum_{i=0}^k \binom{v-i}{k-i} r_i(j) \right) + \epsilon(a, k, p).$$

Lo cual concluye la demostración. \square

Para poder discutir las consecuencias de la proposición 6 introducimos la siguiente terminología. Un nodo de H_2 que tiene exactamente j nodos se llamará un j -nodo, y la arista entre un i -nodo y un j -nodo se llamará una i, j -arista.

OBSERVACIÓN 1: El número a de la proposición 6 se puede elegir igual a 1 o 3 en todos los casos en que G es un $(3, y)$ -grafo ya que un $(3, y)$ -grafo y por lo tanto sus subgrafos tienen circunferencia por lo menos 4.

OBSERVACIÓN 2: Si G es un $(3, y)$ -grafo y H_1 tiene $y - 1$ nodos, entonces:

- (1) $r_0(0) = 0$;
- (2) Hay a lo sumo un 1-nodo sobre cualquier 1-conjunto de H_1 ;
- (3) Puede haber a lo sumo tres nodos sobre un 2-conjunto de H_1 ;

- (4) Si hay tres nodos sobre un 2-conjunto de H_1 , dos de ellos deben ser 1-nodos unidos por una arista y el tercero un 2-nodo;
- (5) Puede haber a lo sumo $(R(3, k + 1) - k)$ nodos sobre un k -conjunto de H_1 .

Dem:

- (1) Cualquier 0-nodo junto con H_1 da un conjunto independiente de G .
- (2) Dos 1-nodos sobre un 1-conjunto junto con los otros $y - 2$ nodos de H_1 forman un conjunto independiente de G .
- (3) Es un caso especial de (5).
- (4) Dados tres nodos sobre un 2-conjunto, notamos que estos tres nodos junto con el nodo en el 2-conjunto deben formar un $(3, 3)$ -grafo de 5 nodos y por dado que el único $(3, 3)$ -grafo con 5 nodos en donde cada nodo tiene grado 2 es el pentágono, este es un pentágono. Esto requiere la descripción dada.
- (5) Consideremos el grafo K dado por un k -conjunto de H_1 y los nodos sobre este conjunto. Los nodos de K no tienen aristas hacia los otros $y - 1 - k$ nodos de H_1 , por lo tanto si K contenía $k + 1$ nodos independientes vamos a producir de nuevo un y -conjunto independiente. Luego, K puede contener a lo sumo $R(3, k + 1)$ nodos y de ellos a lo sumo $R(3, k + 1) - k$ pueden estar sobre el k -conjunto de H_1 . \square

Proposición 7: Si G es un $(3, y)$ -grafo, $v = y - 1, k = 3$, entonces podemos elegir $a = \infty$ y

$$\epsilon(\infty, 3, p) = \sum_{i=1}^4 c_i$$

Donde c_i es el número de configuraciones posibles del tipo C_i (ver FIGURA 1) que están contenidas en G (por contenidas se entiende que hay un 3-conjunto de H_1 tal que el grafo dado por ese 3-conjunto y los nodos sobre él es de tipo C_i).

Dem:

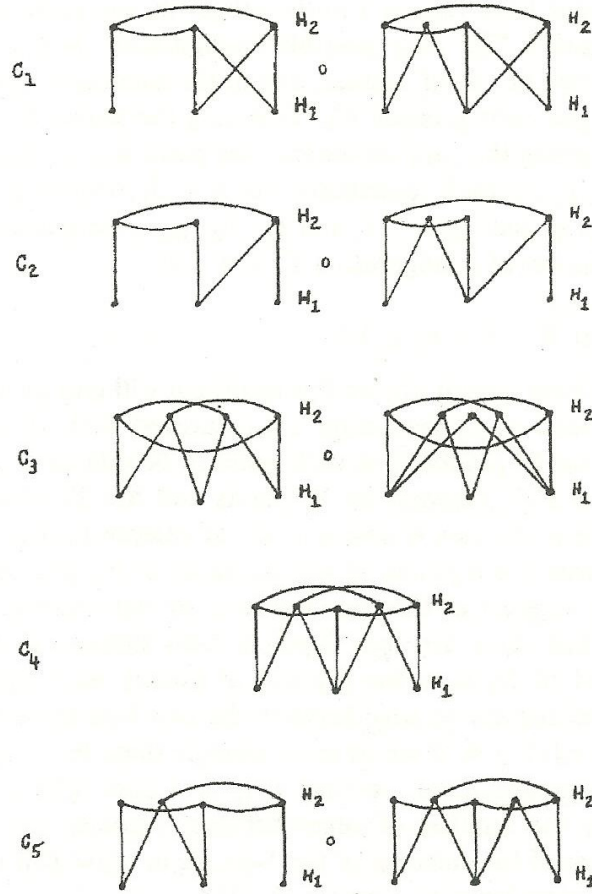


FIGURA 1

Notemos primero que los extremos de una arista en H_2 tiene un soporte distinto para evitar la formación de un triángulo por lo tanto $\omega(K) = \mu(K)$ si K consiste de sólo una arista y dos nodos (o si K es un único nodo).

Consideremos un grafo conexo K con al menos 2 aristas que este sobre un 3-conjunto. Sea p un nodo que tiene dos aristas adyacentes en K y denotemos por q_1, q_2 los otros extremos de esas aristas. Entonces ninguno de los nodos, p, q_1, q_2 pueden ser j -nodos para $j > 2$ y si p fuera un 2-nodo necesariamente tendríamos q_1 y q_2 ambos 1-nodos sobre el mismo nodo en H_1 , y esto no es posible.

Concluimos entonces, que p es un 1-nodo. Esto excluye la posibilidad de un circuito sobre un 3-conjunto, ya que un circuito debe contener más de tres nodos de los cuales todos tendrían que ser 1-nodos y sabemos que h 1-nodos deben tener un h -conjunto como soporte.

Consideremos ahora todos los posibles subgrafos conexos de H_2 que tiene dos aristas sobre un 3-conjunto. Manteniendo la notación que usamos antes, q_1 y q_2 son ambos 1-nodos, o q_1 es un 1-nodo y q_2 es un 2-nodo, o ambos son 2-nodos.

Si ambos son 1-nodos, $\omega(K) = \mu(K)$ y no hay contribución a $\epsilon(\infty, 3, p)$, el término del error. En el segundo caso, de las configuraciones C_2 es posible y habría una contribución de 1 a $\epsilon(\infty, 3, p)$ en ese caso. Finalmente, si ambos q_1 y q_2 son 2-nodos, debemos tener C_1 y de nuevo hay una contribución de 1 a $\epsilon(\infty, 3, p)$.

A continuación consideramos los posibles subgrafos conexos que tengan tres aristas y como soporte a un 3-conjunto de H_1 . Primero consideramos tres aristas adyacentes a un nodo p . Si esto fuera posible entonces p sería un 1-nodo y los otros 3 extremos de esas tres aristas estarían sobre un 2-conjunto de H_1 , pero esos tres nodos son independientes de manera que podríamos producir un y -conjunto independiente con esos tres nodos y los nodos restantes de H_1 . Luego, el único subgrafo conexo con tres aristas sobre un 3-conjunto es un camino simple de longitud 3. Sea q_1 un nodo unido por una arista a p_1 que está unido con p_2 que a su vez está unido con q_2 . Hemos mostrado que p_1 y p_2 deben ser 1-nodos, q_1 y q_2 no pueden ser ambos 1-nodos ya que cuatro 1-nodos deben estar sobre un 4-conjunto. Si q_1 es un 1-nodo y q_2 es un 2-nodo tenemos la configuración C_5 . El grafo generado por p_1, p_2 y q_1 no contribuye con nada en $\epsilon(\infty, 3, p)$. El grafo dado por p_1, p_2 y q_2 contribuye en 1 y todo el grafo en C_5 contribuye -1 de manera tal que la contribución neta es 0. Si q_1 y q_2 son 2-nodos tenemos la configuración C_3 y se puede ver que esto contribuye 1 en $\epsilon(\infty, 3, p)$.

Finalmente, consideramos los subgrafos sobre un 3-conjunto que tienen más de tres aristas. Al igual que antes, ningún nodo puede ser adyacente a tres aristas, todos los 2-nodos en el subgrafo deben tener grado 1 en el subgrafo, y puede haber más de tres 1-nodos. La única configuración posible es un camino de cuatro aristas con los dos nodos de grado uno en el subgrafo siendo 2-nodos. Esto solo puede darnos la configuración C_4 . Notando los nodos por q_1, p_1, p_2, p_3, q_2 , en el orden en que están en el camino, vemos que los caminos $q_1, p_1, p_2; p_2, p_3, q_2$; y q_1, p_1, p_2, p_3, q_2 cada uno contribuye con 1 a $\epsilon(\infty, 3, p)$ mientras que q_1, p_1, p_2, p_3 y p_1, p_2, p_3, q_2 cada uno contribuye con -1 y p_1, p_2, p_3 contribuye con nada, de manera que la contribución de la red de configuración C_4 es +1. \square

Proposición 8: $e(3, 5, 13) = 40$; $e(4, 4, 17) = 40$; $e(4, 4, 16) \geq 40$.

Dem:

Las primeras dos se siguen del hecho de que $\sigma(G) = 0$ para cada grafo. En la tercera, $\sigma(G) \leq 1$ y si todos los nodos son de grado 7 (el mínimo grado posible), tenemos 56 aristas. \square

Proposición 9: $e(3, 6, 17) \geq 38$.

Dem:

La proposición 4 junto con el lema anterior nos da el sistema:

$$17e \geq (15 + 25)s_0 + (20 + 16)s_1 + (26 + 9)s_2,$$

$$2e = 5s_0 + 4s_1 + 3s_2,$$

$$17 = s_0 + s_1 + s_2.$$

La solución que minimiza e es $s_0 = 8, s_1 = 9, s_2 = 0$, y $e = 38$. \square

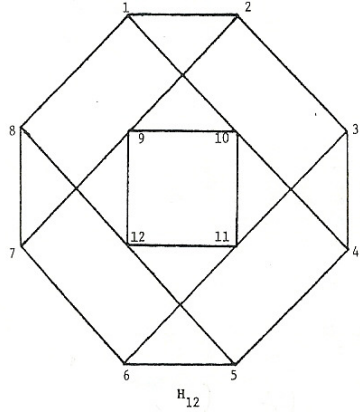
Proposición 10: $e(3, 6, 17) \geq 40$.

Dem:

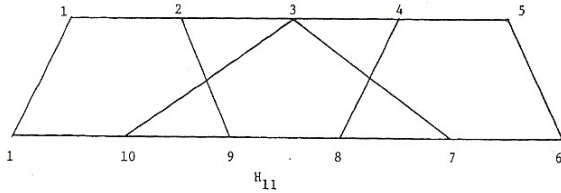
Sea p el nodo preferido de grado 3 en un $(3, 6)$ –grafo G de 17 nodos. Como había sólo una solución en el sistema de la proposición 9 teniendo el valor mínimo en 38 para $e(3, 6, 17)$ y como $s_2 = 0$ en esta solución, podemos concluir que G tiene 39 o más aristas. Notemos que H_2 es un $(3, 5)$ –grafo de 13 nodos, por lo tanto tiene 26 aristas. Esto implica que H_1 contiene por lo menos un nodo q de grado 5 (la suma de los grados de los nodos en H_1 es 13 o más). Sin embargo, los nodos de H_2 son todos de grado 4 en H_2 y por lo tanto sólo pueden existir 0-nodos o 1-nodos. Los cuatro 1-nodos sobre q , y los dos nodos de H_1 diferentes de q , forman un conjunto independiente de tamaño 6 en G . Luego, un $(3, 6)$ –grafo de 17 nodos nunca puede tener un nodo de grado 3.

Ahora, sea G un $(3, 6)$ –grafo de 17 nodos con 38 aristas. Es fácil mostrar que si p es un nodo preferido de grado 4 entonces H_2 debe contener un 0-nodo, llamémoslo q . Podríamos entonces unir p con q por una arista, de esta manera extendemos G a un $(3, 6)$ –grafo de 17 nodos con 39 aristas. Por lo tanto, si demostramos la no existencia de un $(3, 6)$ –grafo de 17 nodos con 39 aristas, la no existencia de un $(3, 6)$ –grafo con 17 nodos y 38 aristas se demuestra simultáneamente.

Sea G un $(3, 6)$ –grafo con 17 nodos y 39 aristas; G debe entonces contener 7 nodos de grado 4 y 10 nodos de grado 5. Si existe un nodo p de grado 4 adyacente con 3 nodos de grado 5, H_2 (cuando p es preferido) es un $(3, 5)$ –grafo con 12 nodos y 20 aristas. Este grafo es único y está dado a continuación:



Usando la proposición 6 y el alto grado de simetría de H_{12} , uno podría mostrar sin mayor dificultad que es imposible poner las aristas entre H_1 y $H_2 = H_{12}$ de tal manera de producir un $(3, 6)$ –grafo. Por lo tanto concluimos que cada nodo de grado 4 en G es adyacente a dos o más nodos de grado 4. De este hecho se desprende que algún nodo de grado 5 debe ser adyacente a 4 otros nodos de grado 5. Prefiriendo este nodo encontramos que H_2 es un $(3, 5)$ –grafo de 11 nodos y 15 aristas. Este grafo es único y es el siguiente:



Como antes se puede mostrar que es imposible poner aristas entre H_1 y $H_2 = H_{11}$ de manera tal que se forme un $(3, 6)$ –grafo. Se sigue entonces que cualquier $(3, 6)$ –grafo debe tener 40 aristas o más. \square

Teorema 1: $R'(3, 7) \leq 22$.

Dem:

Sea G un $(3, 7)$ –grafo de 23 nodos y sea p un nodo de grado 5, H_2 es un $(3, 6)$ –grafo de 17 nodos y por lo tanto de 40 o más aristas.

Aplicando el corolario de la proposición 3 obtenemos

$$40 \leq 6 \lceil 23/2 - 7 + 2 \rceil = 39.$$

Por lo tanto, G contiene sólo nodos de grado 6.

Vamos a dividir el resto de la demostración en diferentes lemas, ya que es demasiado extensa.

LEMA 4: Para cualquier nodo preferido p , $r_i(0) = 0$ cuando $i \geq 4$.

Dem:

Sea p' un i -nodo. Sea K_1 el subgrafo de G formado por los nodos que son adyacentes a p o p' o a ambos; sea K_2 el subgrafo de G formado por los nodos de G distintos de p y p' y de los puntos en K_1 . Como cualquier conjunto independiente en K_2 puede ser extendido (incluyendo p y p') a un conjunto independiente en G , vemos que K_2 debe ser un $(3, 5)$ -grafo. Como K_1 tiene $(12 - i)$ nodos, K_2 tiene $(9 + i)$ nodos. En vista del hecho de que $R(3, 5) \leq 13$, concluimos que $i \leq 4$.

Supongamos que $i = 4$. Todos los 13 nodos en K_2 tienen grado 4 en K_2 , por lo tanto existen exactamente 26 aristas entre K_1 y K_2 . La suma de los grados de los nodos de K_1 es 48. Doce de este total corresponden a las aristas que van a p y p' , 26 corresponden a las aristas a K_2 , y los 10 restantes deben corresponder a las 5 aristas en K_1 . Sin embargo, K_1 puede tener a lo sumo 4 aristas (las únicas aristas posibles en K_1 son entre dos nodos adyacentes a p pero no a p' y los dos nodos adyacentes a p' pero no a p). Con esto concluimos la demostración.

LEMA 5: Para cualquier nodo p , $r_1(0) = 2 + r_3(0)$ y $r_2(0) = 14 - 2r_3(0)$. (1)

Más aún, si z es el número de aristas entre 1-nodos y 3-nodos y $\epsilon = \epsilon(\infty, 3, p)$, entonces:

$$2r_2(1) \geq [6 - 2r_3(0)] + r_3(2) + (z + \epsilon). \quad (2)$$

Dem:

Recordemos que $r_0(0) = 0$ y que $r_i(0) = 0$ cuando $i \geq 4$ de tal manera que

$r_1(0) + r_2(0) + r_3(0) = 16$ (el número de nodos en H_2). Cada nodo en H_1 tiene 5 aristas hacia H_2 , por lo tanto tenemos:

$$r_1(0) + 2r_2(0) + 3r_3(0) = 30.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos (1). Aplicando la proposición 6 con $a = \infty, k = 3$ tenemos:

$$3 \binom{6}{3} \geq \binom{5}{2} r_1(0) + \binom{4}{1} r_2(0) + \binom{3}{0} r_3(0) - \binom{4}{1} r_2(0) - \binom{3}{0} r_3(1) + \binom{3}{0} r_3(2) + \epsilon. \quad (3)$$

La suma de los grados de los 1-nodos en H_2 está dada por $2r_2(0) + r_3(1) + z$ y a su vez por $5r_1(0)$. Por lo tanto, $r_3(0) = 5r_1(0) - z - 2r_2(1)$.

Y usando esto y las ecuaciones en (1) para eliminar $r_3(1), r_1(0),$ y $r_2(0)$ de (3) obtenemos (2).

LEMA 6: Para cualquier nodo p , $2 \leq r_3(0) \leq 4$.

Dem:

Recordemos que puede haber a lo sumo seis 1-nodos en H_2 (por la observación luego de la proposición 6). Este hecho junto con (1) en Lema 4 muestran que $r_3(0) \leq 4$. Ahora, si $r_3(0) = 0$ entonces $r_1(0) = 2$, de manera tal que $r_2(1) \leq 1$. Si las sustituimos en (2) del lema 4 vemos que $2 \geq 6 + r_3(2) + (z + \epsilon)$.

Por la proposición 7, $\epsilon \geq 0$ de manera tal que la desigualdad no se cumple y por lo tanto la suposición de que $r_3(0) = 0$ lleva a una contradicción. Si suponemos que $r_3(0) = 1$ entonces $r_1(0) = 3$, de manera tal que $r_2(1) \leq 2$. Pero si $r_2(1) = 2$ entonces $r_3(2) = 1$. Entonces (2) nos da $2r_2(1) \geq 4 + r_2(2) + (z + \epsilon) \geq 4 + r_3(2)$.

Lo cual no se puede cumplir. Por lo tanto concluimos la demostración del lema.

LEMA 7: Para cualquier nodo p , $r_3(0) \neq 2$.

Dem:

Ver apéndice B.

LEMA 8: Para cualquier nodo p , $r_3(0) \neq 3$.

Dem:

Ver apéndice B.

LEMA 9: Para cualquier nodo p , $r_3(0) \neq 4$.

Dem:

Sea p un nodo cualquiera de G , por los lemas 6, 7 y 8, $r_3(0) = 4$ y por lo tanto, por el lema 5, $r_2(0) = 6$. Cualquier cuadrilátero que contenga a p contiene exactamente un nodo de H_2 . Los 1-nodos no pertenecen a ninguno de esos cuadriláteros, los 2-nodos están contenidos en exactamente uno cada uno, y cada 3-nodo está contenido en exactamente 3 cuadriláteros. Por lo tanto, hay 18 cuadriláteros en G que contienen p y $(18 \cdot 23)/4$ cuadriláteros en total en G , lo cual es imposible.

Por lo tanto, vimos que $r_3(0)$ no puede tomar ninguno de los valores posibles, lo cual es un absurdo. Luego, $(3,7,22) = \emptyset$, lo cual implica el resultado del teorema. \square

Proposición 11: $R'(3,7) \geq 21$.

Dem:

En la definición de grafo cíclico, tomamos $k = 3, i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 8$. \square

Teorema 2: $R'(3,7) \geq 22$.

Dem:

Sea p un nodo con aristas hacia los nodos p_1, p_2, \dots, p_6 . Sean p_{ij} los nodos para $1 \leq i < j \leq 6$ y digamos que p_{ij} tiene una arista hacia p_i y hacia p_j (las mismas serán aristas entre H_1 y H_2 cuando p sea preferido). Finalmente, unimos p_{ij} con p_{kh} si i, j, k y h son todos distintos entre sí. El grafo producido de esta manera tiene 22 nodos, no tiene conjuntos independientes de tamaño 7, pero sí triángulos. Es fácil ver que todos los triángulos están en H_2 . Ahora, H_2 tiene un circuito Hamiltoniano C (el orden de los nodos en C es $p_{12}, p_{35}, p_{16}, p_{23}, p_{56}, p_{24}, p_{36}, p_{45}, p_{13}, p_{46}, p_{15}, p_{26}, p_{14}, p_{25}, p_{34}$) pasando por cada triángulo exactamente una vez. Sea G el grafo obtenido borrando las aristas de C del grafo descrito anteriormente. Entonces G es un $(3,7)$ -grafo.

Se puede ver sin demasiada dificultad que el nuevo H_2 es un $(3,6)$ –grafo. Asumiendo esto, cualquier conjunto independiente de tamaño 7 debería contener 2 o más nodos entre los de p_1, p_2, \dots, p_6 .

Primero elegimos dos nodos cualesquiera entre los p_1, p_2, \dots, p_6 y llamemos a los nodos restantes p_a, p_b, p_c, p_d .

Si los dos nodos elegidos pertenecen a un conjunto independiente de tamaño 7 entonces los 5 nodos restantes deben estar sobre $\{p_a, p_b, p_c, p_d\}$. Los nodos sobre estos 4 nodos son $p_{ab}, p_{cd}, p_{ac}, p_{bd}, p_{ad}, p_{bc}$, y fueron unidos de a pares por las 3 aristas de la construcción original. Luego, tendremos 5 nodos independientes entre ellos en G si la remoción de las aristas de C sacó 2 o más de estas aristas. Ahora, es fácil chequear que cada arista de C esta sobre un 4-conjunto distinto de H_1 de tal manera que haya a lo sumo 4 nodos independientes sobre $\{p_a, p_b, p_c, p_d\}$.

Si elegimos un 3-conjunto de p_1, \dots, p_6 entonces el 3-conjunto complementario tiene sólo 3 nodos de H_2 sobre él, por lo tanto ningún 3-conjunto de p_1, \dots, p_6 puede ser extendido a un 7-conjunto independiente eligiendo nodos de H_2 . De manera análoga no se puede extender 4-conjuntos y 5-conjuntos de p_1, \dots, p_6 a 7-conjuntos independientes. De manera que tenemos un $(3,7)$ –grafo de 22 nodos, de lo cual se desprende el resultado. \square

Teorema 3: $R(3,7) = 23$

Dem:

Sale inmediatamente de unir las proposiciones que nos dan las dos desigualdades. Tenemos que $R'(3,7) = 22$, por lo tanto, $R(3,7) = 23$. \square

$R(3,8)=28$ [12]

A lo largo de esta demostración escribiremos (t,n) al referirnos a un $(3,t,n)$ –grafo. Una herramienta para la construcción de los (t,n) -grafos es la siguiente:

Lema 1: para $t \geq 2$, sea G en (t,n, δ, e) y sea v en $V(G)$ con grado δ . Luego,

- a) $n - R(3, t - 1) \leq \delta \leq \min\{t - 1, n/2\}$
- b) $G[H_2(v)]$ pertenece a $(t - 1, n - \delta - 1, \delta', e')$ para algunos δ' y e' que cumplen:
- $$\delta'(n - \delta' - 1) - \delta'(t - 2) \leq 2e' \leq (t - 1)(n - \delta' - 1) - \delta'(\delta' - 1)$$

Dem:

- a) Si δ fuera mayor o igual a t , los vecinos de v serían un conjunto independiente de tamaño mayor o igual a t , lo cual es absurdo, pues G no puede tener conjuntos independientes de tamaño mayor o igual a t por definición. Son un conjunto independiente pues como G es libre de triángulos si dos de ellos estuvieran unidos entre ellos, junto con v formarían un triángulo.

Además, ningún grafo libre de triángulos de n vértices tiene más de $n^2/4$ ramas, por lo tanto, δ es menor o igual a $n/2$.

Antes de seguir, veamos un resultado: si G es un (k, l) –grafo y v es un vértice de G , entonces $H_1(v)$ es un $(k - 1, l)$ –grafo y $H_2(v)$ es un $(k, l - 1)$ –grafo. Esto es así pues cualquier clique de tamaño x en $H_1(v)$ se convierte en una clique de tamaño $x + 1$ cuando agregamos v , y cualquier conjunto independiente de tamaño y en $H_2(v)$ se convierte en un conjunto independiente de tamaño $y + 1$ cuando agregamos v .

Si δ fuera menor que $n - R(3, t - 1)$ la existencia de $G[H_2(v)]$ contradice la definición de $R(3, t - 1)$. Si valiera que $\delta > n - R(3, t)$, entonces $R(3, t - 1) > n - \delta$, pero $G[H_2(v)]$ es un grafo libre de triángulos y cuyo mayor conjunto independiente tiene tamaño menor que $t - 1$. El tamaño de $G[H_2(v)]$ es $n - \delta - 1$, lo cual lleva a un absurdo.

- b) Sea D la suma de los grados en G de los vértices de $H_2(v)$, entonces,

$$\delta(n - \delta - 1) \leq D \leq (t - 1)(n - \delta - 1)$$

En efecto: $|G[H_2(v)]| = |V(G)| - |H_1(v)| - 1 = n - \delta - 1$

Pues la cantidad de nodos es n , la cantidad de vecinos de v es δ y el uno que resta es debido a v . Luego, en D hay por lo menos $n - \delta - 1$ sumandos.

Sea $w \in H_2(v)$, veamos que $\delta \leq d(w) \leq t - 1$.

Supongamos que $d(w) > t - 1$, entonces $d(w) \geq t$, por lo tanto existe un conjunto independiente de tamaño t o más (ya que las ramas adyacentes a w no pueden estar unidas entre sí pues el grafo es libre de triángulos), lo cual es absurdo.

Ahora supongamos que $\delta > d(w)$. Esto también es absurdo pues δ era el grado mínimo en G .

Análogamente, si E es la suma de las ramas en G entre $H_1(v)$ y $H_2(v)$, entonces

$$\delta(\delta - 1) \leq E \leq \delta(t - 2).$$

El resultado sale de notar que $2e' = D - E$.

Sea H un $(t - 1, n - \delta - 1)$ -grafo y sea G un grafo de orden n y grado mínimo $\delta \leq t - 1$ tal que $G[H_2(v)] = H$ para algún v en $V(G)$ de grado δ . En estas circunstancias decimos que G es una extensión de H .

Sea $H_1(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_\delta\}$ y para $1 \leq i \leq \delta$, defino $X_i = H_1(v_i) \cap H_2(v)$. Notemos que $|X_i| = d(v_i) - 1$ para $1 \leq i \leq \delta$. \square

Lema 2: Sea G una extensión de H , con $H = G[H_2(v)]$ perteneciente a $(t - 1, n - \delta - 1)$. Luego, G pertenece a (t, n) si y solo si se cumplen:

- a) $H_1(v)$ es un conjunto independiente de G
- b) Cada X_i es un conjunto independiente de H
- c) Para cada I incluido en $\{1, 2, \dots, \delta\}$, ningún conjunto independiente de tamaño $t - |I|$ está contenido en $V(H) - \coprod_{i \in I} X_i$

Dem:

Como las condiciones a) y b) juntas equivalen a requerir que G sea libre de triángulos, es suficiente considerar la existencia de conjuntos independientes de tamaño t .

Como H es un $(t - 1, n - \delta - 1)$ -grafo no puede haber conjuntos independientes de tamaño t que incluyan a v .

Por otro lado, un conjunto de esa forma que no incluye a v existe si y solo si no se cumple la condición c). \square

Como cualquier G en (t, n, δ) puede tener más de un vértice de grado δ , puede ser construido a través de varios H en $(t - 1, n - \delta - 1)$ distintos.

Para reducir el número de veces que cada G fue construido, se emplean diferentes técnicas.

Consideramos una función $\theta(G)$ definida para cualquier grafo G y que cumple las siguientes propiedades:

- 1) $\theta(G)$ es una órbita de la acción del grupo de automorfismos $Aut(G)$ en $V(G)$
- 2) Los vértices en $\theta(G)$ tienen grado mínimo en G
- 3) Para cualquier permutación γ de $V(G)$ vale $\theta(\gamma(G)) = \gamma(\theta(G))$

El programa *nauty* computa una permutación $k = k(G)$ de $V(G)$ tal que $k(\gamma(G)) = k(G)$ para cualquier permutación γ de $V(G)$. Una permutación así se llama nombramiento canónico (canonical labelling) de G .

Nauty también puede computar órbitas de $Aut(G)$.

Supongo $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$. Si defino $\theta(G)$ como la órbita que contiene el vértice de mínimo grado que aparece en la primera secuencia $k - 1(1), k - 1(2), \dots, k - 1(n)$. Luego, se ve que θ cumple los requerimientos 1), 2) y 3) de antes.

Para $t \leq 7$, restringimos G a ser solo construida a través de $H = G[H_2(v)]$ para algún v en $\theta(G)$. Los requerimientos de θ implican que isomorfismos de G pueden solo aparecer dentro de las extensiones del mismo H , lo que simplifica en gran medida el rechazo por isomorfismos.

Para $t = 8$, no había tanto interés en el rechazo de isomorfismos pues se esperaba hallar pocos o ningún grafo. Por lo tanto no se usó $\theta(G)$ como arriba sino que aceptamos cualquier grafo producido. En ese caso construimos G solo por algunos

H en $(t - 1, n - \delta - 1, \delta')$ con δ' tan pequeño como se pueda, con la ayuda del siguiente lema.

Lema 3: Sean v y w distintos vértices de un grafo G en (t, n) , entonces el mínimo grado de $G[H_2(v)]$ es a lo sumo $t - 1 - |G(v) \cap G(w)|$

Dem:

Si v y w son adyacentes, entonces $|G(v) \cap G(w)| = 1$ y por lo tanto quisiera ver que el mínimo grado de los nodos en $H_2(v)$ es a lo sumo $t - 2$. Supongamos que no.

Entonces:

$$\min\{d(p): p \in H_2(v)\} > t - 2$$

Lo que es equivalente a

$$\min\{d(p): p \in H_2(v)\} \geq t - 1$$

Pero entonces dado un nodo p en $H_2(v)$, sus vecinos (que serían por lo menos $t - 1$) junto con v formarían un conjunto independiente de tamaño t , lo cual es un absurdo.

Si v y w no son adyacentes, entonces $|G(v) \cap G(w)| = 0$ y por lo tanto quisiera ver que el mínimo grado de los nodos en $H_2(v)$ es a lo sumo $t - 1$. Supongamos que no.

Entonces:

$$\min\{d(p): p \in H_2(v)\} > t - 1$$

Entonces

$$\min\{d(p): p \in H_2(v)\} \geq t$$

Por lo tanto existiría un conjunto independiente de tamaño t o más dado por los nodos adyacentes a p . Los mismo no están conectados entre sí pues sino se formaría un triángulo. Pero no es posible que existan conjuntos independientes de tamaño t o más. \square

EL MÉTODO COMPUTACIONAL:

Los subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ fueron representados como arreglos de bits en una maquina de 32-bits. Esto permite realizar operaciones de conjuntos tales como unión, intersección y contención con solo un par de instrucciones en la maquina.

Supongamos que tenemos algún H en $(t - 1, n - \delta - 1)$ y queremos encontrar las extensiones G en (t, n, δ) de H . Sean S_1, S_2, \dots, S_N una lista de conjuntos independientes de H con cardinalidad entre $\delta - 1$ y $t - 2$ inclusive.

Para cada w en $V(G)$ y X_1, X_2, \dots, X_i incluidos en $V(G)$, definimos:

$$d_i(w) = d_i(w, X_1, X_2, \dots, X_i) = d_H(w) + |\{X_j / w \text{ pertenece a } X_j, 1 \leq j \leq i\}|$$

Ahora, consideramos el siguiente procedimiento:

Procedimiento make X ($k, (X_1, \dots, X_{k-1}), (Y_1, \dots, Y_K)$)

k y K son enteros, cada X_i y cada Y_i son subconjuntos de $V(G)$

Si $k > \delta$ entonces process $((X_1, \dots, X_\delta))$

Sino

Construir la lista (Z_1, \dots, Z_L) de todos los elementos Z de (Y_1, \dots, Y_K)

tales que:

- i) Para cada w en $V(H)$, si $d_{k-1}(w) < k-1$, entonces w esta en Z
- ii) Para cada w en $V(H)$, si $d_{k-1}(w) = t-1$, entonces w no está en Z
- iii) H no tiene ningún conjunto independiente de tamaño $t-1-|I|$ disjunto de $Z \cup \bigcup_{i \in I} X_i$ para algún I en $\{1, 2, \dots, k-1\}$

Para i desde 1 hasta L hacer

make X($k+1, (X_1, \dots, X_{k-1}, Z_i), (Z_i, Z_{i+1}, \dots, Z_L)$)

fin si

fin make X.

Lema 4: Supongamos que en el procedimiento make X están invocados los argumentos $(0, (), (S_1, \dots, S_N))$. Luego, el procedimiento process va a ser invocado exactamente una vez por cada secuencia $X_1 = S_{i_1}, X_2 = S_{i_2}, \dots, X_\delta = S_{i_\delta}$, tal que $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_\delta \leq N$ y se cumplan las condiciones del lema 2 y para ninguna otra secuencia.

Dem:

El procedimiento make X tiene la forma general de un procedimiento de backtracking para este problema. Los argumentos de un procedimiento recursivo general representan el índice k del conjunto X_k , que va a determinarse en este nivel por los valores de X_1, \dots, X_{k-1} , determinados hasta el momento, y por una lista de posibilidades para X_k . Las condiciones i) y ii) respectivamente aseguran que el grafo final G va a tener mínimo grado delta y máximo grado a lo sumo $t - 1$. La condición iii) asegura que el requerimiento c) del lema 2 se cumpla. \square

Usando la representación descrita anteriormente, los tests i) y ii) son implementados en unidad de tiempo por cada conjunto Z . La parte que mas tiempo toma del procedimiento es iii) y se usaron 2 métodos para implementarla.

Supongamos que tenemos un conjunto S en $V(H)$ y queremos determinar si H tiene un conjunto independiente de tamaño q disjunto de S .

El primer método era simplemente recorrer una lista de todos los conjuntos independientes de tamaño q . Solo se necesitan unas pocas instrucciones por cada conjunto independiente, pero la cantidad de conjuntos independientes puede ser muy grande.

Para entender el segundo método, admitamos que los subconjuntos de $V(H)$ pueden ser identificados con los enteros $1, 2, \dots, M$, donde $M = 2^{|V(H)|-1}$,

interpretando la representación binaria de un entero como el vector característico de un conjunto. Podemos construir previamente un vector de bits (b_0, b_1, \dots, b_M) , tal que $b_i = 1$ si y solo si el conjunto representado por i es disjunto con algún conjunto independiente de tamaño q . Este vector permite que el test iii) se ejecute con costo uno. La construcción del vector en sí es costosa, pero se halló una técnica basada en Códigos Gray que resultaba suficientemente eficiente. Después de muchos experimentos, se halló que los mejores resultados se obtenían utilizando el segundo método para q grande, digamos mayor o igual que $t - 3$, y utilizando el primer método para q pequeño.

Para $t \leq 7$, el procedimiento *process* computa la función $\theta(G)$ definida antes. Si v no pertenece a $\theta(G)$, G es automáticamente rechazado, en otro caso es escrito en un archivo de manera canónica. El nombramiento canónico se realizó por el programa *nauty*. El rechazo a isomorfismos fue hecho usando el sorting del sistema *nauty*.

Dados cada uno de los conjuntos (t, n, δ) producidos de esta manera, por el lema 1, cada conjunto de esta forma con $4 \leq t \leq 7$ puede ser obtenido extendiendo miembros de otros conjuntos.

Para el caso $(7, 20)$, no se generaron todos los conjuntos de grafos, ya que nuestro interés principal radicaba en extenderlos a $(8, 28, 7)$. Para $(7, 20, 2)$ y $(7, 20, 3)$, se generó el conjunto completo con 49 vértices. En el caso de $(7, 20, 4)$ se restringió la generación a aquellos grafos de 49 ramas que no tienen ningún par de vértices distintos con 4 o más vecinos comunes.. Este fue el cálculo computacional más costoso de realizar. La aplicación directa del procedimiento *make X* a $(6, 15)$ produjo casi 695 millones de grafos, entre los cuales había 2820645 grafos no isomorfos del subconjunto recién definido.

En el proceso de extender $(7, n)$ a $(8, 28)$ se evitó el uso de la función θ pero en cambio se aceptó cualquier grafo G generado por el procedure make X. Los pasos se detallan a continuación, notando que por el lema 1, $(8, 28) = \bigcup_{\delta=5}^7 (8, 28, \delta)$.

- a) $(8, 28, 5)$ fue encontrado vacío aplicando make X a los 191 miembros de $(7, 22)$
- b) $(8, 28, 6)$ fue encontrado vacío aplicando make X a cada uno de los grafos en $\bigcup_{\delta=3}^5 (7, 21, \delta)$. Esos valores de δ son suficientes por el lema 1.
- c) $(8, 28, 7)$ puede encontrarse extendiendo todos los miembros de $\bigcup_{\delta=2}^4 (7, 20, \delta', 49)$. Esto se hizo simplemente aplicando make X para $\delta' = 2$ y $\delta' = 3$. Para $\delta' = 4$, este enfoque parecía ser de una enorme dificultad, así que se modificó el algoritmo para usar el lema 3. Como ya se habían computado todas las extensiones para $\delta' < 4$, se pudo evitar la construcción de grafos que se sabe que contienen 2 vértices con 4 vecinos comunes. Esta prueba se realizó en 3 días. En primer lugar, cualquier grafo H que falle este test se puede ignorar. En segundo lugar, ningún X_i puede contener 4 vértices adyacentes a algún w en $V(H)$, ni ningún par de vértices w, x en $V(H)$ puede tener 3 vecinos comunes en H . Por último, $X_i \cap X_j$ debe tener cardinal a lo sumo 2 para $i \neq j$. Se obtuvo que $(8, 28, 7) = \emptyset$.
- d) Finalmente, uniendo a), b) y c) obtenemos que $(8, 28) = \emptyset$.

Teorema: $28 \leq R(3, 8)$ [7]

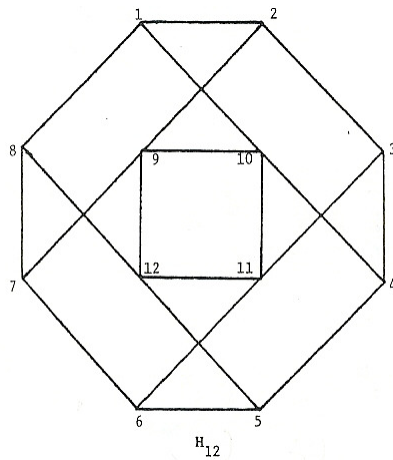
Dem:

Dando un grafo de 27 nodos libre de triángulos y sin conjuntos independientes de tamaño 8, obtendremos que $28 \leq R(3, 8)$.

El grafo que cumple lo requerido, al que llamaremos J_{27a} , está definido en la siguiente tabla:

Grafo	Parámetros	Vecinos de vértices en $H_1(v)$	$H_2(v)$
J_{27a}	$(3, 8, 27, 87)$	$26 - 1, 5, 7, 11, 20$ $25 - 1, 3, 6, 9, 13, 18$ $24 - 2, 4, 6, 12, 17, 21$ $23 - 2, 5, 8, 10, 14, 19$	H_{22}
H_{22}	$(3, 7, 22, 60)$	$21 - 5, 11, 13, 14$ $20 - 6, 12, 13, 14$ $19 - 1, 3, 7, 12, 15$ $18 - 2, 4, 7, 11, 15$ $17 - 3, 5, 8, 10, 15$ $16 - 4, 6, 8, 9, 15$	J_{15a}
J_{15a}	$(3, 6, 15, 26)$	$14 - 1, 9$ $13 - 2, 10$	H_{12}

Y H_{12} , es el siguiente grafo de 12 vértices:



En la tabla, el subíndice del grafo determina cuál es el nodo preferido, por ejemplo en J_{27a} el nodo preferido es el 27. En la tercera columna están los vecinos de este nodo y luego del guión, aquellos nodos adyacentes al primer nodo dado. \square

Teorema: $R(3, 8) = 28$

Dem:

En el paso previo al anterior se vio que mediante un método computacional se obtuvo que $(8, 28) = \emptyset$, es decir que no existen grafos libres de triángulos de 28 vértices tales que el mayor conjunto independiente tenga tamaño menor que 8. Luego, si un grafo tiene 28 nodos y es libre de triángulos, entonces deberá tener un conjunto independiente de tamaño mayor o igual a 8. Esto implica que su complemento tiene un K_8 , por lo tanto obtuvimos que $R(3, 8) \leq 28$.

Esto unido al hecho de que $R(3, 8) \geq 28$, dado por el teorema anterior, nos da el resultado. \square

$R(3, 9) = 36$ [7]

Lema 1: Sea G un (k, l, n, e) –grafo.

Sea $\Delta = ne - \sum_{i \geq 0} \{e(3, l - 1, n - v_i - 1) + v_i^2\} s_i$. Entonces, $\Delta \geq 0$, y hay por lo menos $n - \Delta$ nodos completos en G .

Dem:

Para todos los i y j , definimos

$$\beta_{ij}(v) = \begin{cases} \text{el número de vértices en } H_1(v) \text{ de grado } v_j & \text{si } d(v) = v_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Notemos que $\sum_v \beta_{ij}$ es el número de ramas entre los nodos de grado v_i y los de grado v_j , luego se obtiene que $\sum_v \beta_{ij} = \sum_v \beta_{ji}$. Si v es de grado v_i , y es preferido, entonces

$$e = |H_2(v)| + (v_i)^2 + \sum_{j \geq 0} (i - j) \beta_{ij}(v).$$

Si sumamos esto para todos los nodos de G , obtenemos

$$ne = \sum |H_2(v)| + (v_i)^2 + \sum_{i \geq 0} \sum_{\substack{v \\ \deg(v)=i}} \sum_{j \geq 0} (i - j) \beta_{ij}(v). \quad (1)$$

En todos los casos se tiene que

$$|H_2(v)| \geq e(3, l - 1, n - v_i - 1), \quad (2)$$

Y si v es un vértice completo, se cumple la igualdad.

Si i y j están unidos, la suma $\sum_v \beta_{ij}(v)$ ocurre en (1) con un coeficiente de $(i - j)$ y la suma de $\sum_v \beta_{ji}(v)$ ocurre con un coeficiente de $(j - i)$.

Por la afirmación del principio de la demostración se ve que las dos sumas se cancelan en (1).

Por lo tanto, usando (1) y (2) tenemos

$$\begin{aligned} ne &\geq \sum_{i \geq 0} e(3, l - 1, n - v_i - 1) s_i + (v_i)^2 s_i \\ &= \sum_{i \geq 0} \{e(3, l - 1, n - v_i - 1) + (v_i)^2\} s_i \end{aligned}$$

Lo cual es equivalente a que $\Delta \geq 0$, y se ve fácilmente que cada vértice que no sea completo contribuye con al menos 1 a Δ , luego, debe haber por lo menos $(n - \Delta)$ nodos completos. \square

Teorema 1: (i) $36 \leq R(3, 9)$ [6]

(ii) Si G es un $(3, 9, 36)$ -grafo entonces es un grafo regular de grado 8. Si algún vértice en G es preferido, entonces $H_2(v)$ es un $(3, 8, 27, 80)$ -grafo.

Dem:

(i) Veamos que $R'(3, 9) \geq 35$, lo que es equivalente a ver que $R(3, 9) \geq 36$. En la definición de grafo cíclico tomamos: $k = 4, i_1 = 1, i_2 = 7, i_3 = 11, i_4 = 16$.

(ii) Ahora, dado un $(3, 9, 36)$ –grafo, queremos ver que es un grafo regular de grado 8. Sea v un nodo en G , queremos ver que $d(v) = 8$.

Supongamos que $d(v) > 8$. Preferimos v y separamos en $H_1(v)$ y $H_2(v)$. Entonces, $|H_1(v)| > 8$, entonces existe un conjunto independiente de tamaño 9 o más, lo cual es absurdo.

Por otro lado, debido a un resultado visto en la demostración del valor de $R(3, 8)$, sabemos que $d(v) \geq R'(3 - 1, 9) = 8$.

Por lo tanto, $d(v) = 8$.

Finalmente, veamos que si un nodo v es preferido, entonces $H_2(v)$ es un $(3, 8, 27, 80)$ -grafo. El grafo no tiene triángulos pues $H_2(v) \subset G$ y tampoco tiene conjuntos independientes de tamaño 8, ya que si tuviera alguno, entonces ese conjunto unido a v daría un conjunto independiente de tamaño 9 en G , lo cual es absurdo. Como $d(v) = 8$, tenemos que $|H_2(v)| = 36 - 8 = 27$. Y vimos antes que $e(3, 8, 27) = 80$, lo que completa la demostración. \square

Lema 2: Si G es un $(3, 7, 19, 36)$ -grafo, entonces G contiene un K_3 o un K_4 .

Dem:

Si v es un 2, 3 o 4-nodo completo, entonces $Z(v) = 4, 11$ o 16 respectivamente. No hay 1-nodos ya que $e(3, 6, 17) = 40$. Si G contiene algún 2-nodo entonces el 2-nodo forma una componente de G , ya que ningún v 2-nodo puede tener ningún vecino que no sea 2-nodo, pues $Z(v) \leq 4$.

Sea el 2-subgrafo G_2 . Entonces tenemos $I(G) = I(G_2) + I(G - G_2)$.

Pero G tiene 19 nodos y es fácil chequear que para todas las particiones posibles de 19 en dos enteros m y n , en donde $|V(G_2)| = m$ y $|V(G - G_2)| = n$, debemos tener $I(G) \geq 7$. Luego, no hay 2-nodos.

Ahora aplicamos el lema 1. Tenemos el siguiente sistema (1):

$$\Delta = 648 - 34s_3 - 36s_2 - 40s_1 - 47s_0 \geq 0,$$

$$72 = 3s_3 + 4s_2 + 5s_1 + 6s_0,$$

$$19 = s_3 + s_2 + s_1 + s_0.$$

Ahora suponemos que no hay 3 o 4-nodos completos. Por el lema 1, se obtiene que

$$19 - \Delta = s_0 + s_1, \quad \text{o} \quad \Delta \geq s_2 + s_3.$$

Esta relación, junto con (1) implica que

$$s_0 = 2s_3 + s_2 - 23, \quad (2)$$

$$85 \geq 9s_3 + 4s_2. \quad (3)$$

De (2) obtenemos que

$$2s_3 + s_2 \geq 23$$

Lo que implica que

$$8s_3 + 4s_2 \geq 92$$

Esto contradice (3), lo que completa la demostración. \square

Lema 3: $e(3, 7, 19) = 37$.

Dem:

Antes se vio que $36 \leq e(3, 7, 19) \leq 37$. Mediante algoritmos de computación se observa que la situación descrita en el lema anterior no puede ocurrir, luego, $e(3, 7, 19) \geq 37$. Luego, se cumple lo buscado. \square

Lema 4: Si G es un $(3, 7, 21, 50)$ –grafo, entonces G contiene un K_4 con 2 4-nodos y dos 5-nodos como vecinos.

Dem:

Recordemos que $e(3, 6, 27) = 40$, por lo tanto, si algún 3-nodos v en G es preferido, entonces $Z(v) \leq 10$, lo que implica que v debe tener por lo menos 2 3-nodos, llamémoslos w_1 y w_2 , como vecinos. Si w_1 es preferido, entonces w_2 tiene por lo menos 2 ramas hacia otros nodos de en $H_2(w_1)$. Pero $H_2(v_1)$ es un $(3, 6, 17)$ –grafo, y como $R(3, 5) = 14$, $H_2(w_1)$ no puede tener nodos de grado 2 o menos. Luego, G no contiene 3-nodos.

Ahora aplicamos lema 1 para obtener el siguiente sistema:

$$\Delta = 1050 - 56s_0 - 50s_1 - 48s_2 \geq 0,$$

$$100 = 6s_0 + 5s_1 + 4s_2,$$

$$21 = s_0 + s_1 + s_2.$$

Resolviendo este sistema, se obtiene

$$s_2 = 5 + s_0$$

$$s_1 = 16 - s_0$$

$$\Delta = 10 - 4s_0$$

Como $\Delta \geq 0$, debemos tener $s_0 \leq 2$.

Para establecer el lema, solo debemos mostrar que algún 4-nodos v tiene como máximo 2 4-nodos como vecinos. Para ver por que esto es suficiente, notemos que como $e(3, 6, 16) = 32$, debemos tener que $Z(v) \leq 18$. Si v tiene como mucho 2 4-nodos como vecinos, luego $Z(v) \geq 4 + 4 + 5 + 5$, por lo tanto la igualdad debe valer, y por lo tanto v tiene exactamente 2 4-nodos y 2 5-nodos como vecinos.

Ahora, asumimos que cada 4-nodos tiene por lo menos 3 4-nodos como vecinos. Luego, el 4-subgrafo es un grafo libre de triángulos en el cual cada vértice tiene

grado por lo menos 3. No hay grafos de esta forma con menos de 6 nodos, y los únicos grafos de esta forma con 6 y 7 nodos respectivamente son $K_{3,3}$ y $K_{3,4}$. Como $s_2 = 5 + s_0$, solo necesitamos considerar esos 2 casos.

En el primer caso, partimos el 4-nodos en conjuntos T_1 y T_2 tales que $|T_1| = |T_2| = 3$, y tal que cada vértice en T_1 es adyacente a cada uno de los nodos de T_2 . Hay 3 ramas que van de nodos de T_1 a nodos en $G - (T_1 \cup T_2)$, luego hay por lo menos 12 nodos en $G - (T_1 \cup T_2)$ que no son adyacentes a ningún vértice en T_1 . De este conjunto de 12 nodos, podemos elegir un conjunto independiente T_3 de tamaño 4, pues $R(3, 4) = 9$. Luego, $T_1 \cup T_2$ es un conjunto independiente de tamaño 7 en G , lo cual es imposible.

En el segundo caso, si el 4-subgrafo es partido en dos conjuntos T_1 y T_2 , al igual que antes, con $|T_1| = 3$ y $|T_2| = 4$, usando un argumento similar se puede ver que T_1 es parte de un conjunto independiente de tamaño 7. \square

Lema 5: $e(3, 7, 21) = 51$.

Dem:

Antes se vio que $50 \leq e(3, 7, 21) \leq 51$. Mediante algoritmos de computación se observa que lo descrito en el lema anterior no puede ocurrir, luego $e(3, 7, 21) \geq 51$. Lo que completa la demostración. \square

Lema 6: Si G es un $(3, 7, 22, e)$ –grafo y $e \leq 62$, entonces G no contiene nodos de grado menor a 5.

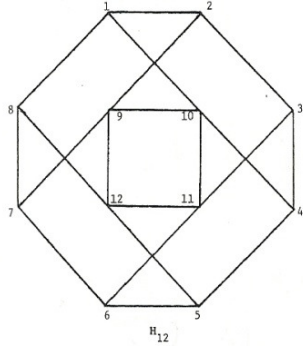
Dem:

Si v es un 4-nodo, entonces $H_2(v)$ es un $(3, 6, 17)$ –grafo. Todos los grafos de esta forma son conocidos. Los algoritmos utilizados para descartar los valores de $e \leq 61$ se describen a continuación.

Supongamos que G es un $(3, 7, 22, 59)$ –grafo y que v es un 5-nodo completo. Por el lema 4, G no tiene 4-nodos, y como $Z(v) = 27$, v debe tener tres 5-nodos, llamémoslos w_1, w_2, w_3 , y dos 6-nodos, digamos w_4, w_5 , como vecinos. Queremos ver que es imposible unir nodos de $H_1(v)$ con nodos de $H_2(v)$ de manera que el grafo resultante sea un $(3, 7)$ –grafo. Notemos que dado un nodo preferido v , una lista de los grados de los nodos en $H_1(v)$ y el grafo $H_2(v)$, el siguiente algoritmo generará, si existe alguno, todos los grafos posibles con esta estructura. En nuestro caso, notemos que $H_2(v)$ es un $(3, 6, 16, 32)$ –grafo. Todos los grafos de esta forma están listados. Elegimos uno de esos grafos, digamos H_{16a} y procedemos. La descripción del grafo H_{16a} es la siguiente:

Parámetros	Vecinos de nodos en H_1	H_2
(3, 6, 16, 32)	15 – 4, 7 14 – 3, 5, 10 13 – 4, 6, 8, 9	H_{12}

Donde:



Para evitar triángulos durante la construcción de G , es suficiente unir cada nodo w_i en H_1 con un conjunto independiente S_i en H_{16a} . Si w_i es un m –nodo en G , entonces S_i es un conjunto independiente de tamaño $(m - 1)$.

Dados dos nodos w_i y w_j en H_1 es usualmente imposible tener $S_i = S_j$, y la condicion que asegura esto es fácil de chequear a mano. Procedemos como sigue: si $S_i = S_j$, entonces w_i y w_j tienen los mismos vecinos. Si w_i y w_j son preferidos simultáneamente entonces G es partido en 3 grafos: $\{w_i, w_j\}$, $H_1(w_i) = H_1(w_j)$ y $H_2(w_i) - w_j = H_2(w_j) - w_i$. A este último grafo lo llamaremos $H_2(w_i, w_j)$. Es fácil ver que como w_1 y w_2 no son adyacentes, $H_2(w_i, w_j)$ debe ser un (3, 5) –grafo. Más aún, $H_1(w_i)$ tiene por lo menos seis nodos, de manera que $H_2(w_i, w_j)$ tiene por lo menos $22-6-2=14$ nodos. Pero no existe ningún (3, 5, 14) –grafo, pues $R(3, 5) = 14$.

Para construir G , debemos elegir tres 4-conjuntos independientes distintos S_1, S_2 y S_3 , y dos 5-conjuntos independientes distintos, S_4 y S_5 , unir w_i con cada nodo en S_i y luego chequear para ver si el grafo resultante tiene algún 7-conjunto independiente. Si no hay 7-conjuntos independientes, entonces G es un (3, 7, 22, 59) –grafo.

Dada una selección de conjuntos S_i , donde pueden los 7-conjuntos independientes estar en el grafo G . Si T es un 7-CI en G , y T contiene a v , entonces T no contiene a ninguno de los nodos en $H_1(v)$. Entonces, $T - \{v\}$ es un 6-CI en $H_2(v)$, lo cual es imposible. Si T contiene menos de 2 nodos en $H_1(v)$, el mismo problema ocurre. Luego, t debe contener al menos dos nodos en $H_1(v)$.

Ahora, supongamos que T es un 7-conjunto independiente en G , como antes, y supongamos que T contiene exactamente k nodos $w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_k}$ en $H_1(v)$, donde $k \geq 2$.

Sea $V_2 = V(H_2(v))$. Entonces $T - \{w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_k}\}$ es un $(7 - k)$ –conjunto

independiente en $V_2 - (S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k})$. Recíprocamente, si los k conjuntos S_{i_1}, \dots, S_{i_k} tienen la propiedad de que cuando son removidos de V_2 , un $(7 - k)$ –conjunto independiente S queda, entonces $S \cup \{w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_k}\}$ es un 7-conjunto independiente en G . Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente para que la selección $\{S_{i_1}, \dots, S_{i_k}\}$ represente un $(3, 7)$ –grafo es que para cada subselección $\{S_{i_1}, \dots, S_{i_k}\}$ con $k \geq 2$, tenemos que el conjunto $V_2 - (S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k})$ no contiene ningún $(7 - k)$ –conjunto independiente.

Decimos que los conjuntos S_i y S_j forman un “buen” par si $V_2 - (S_i \cup S_j)$ no tiene 5-conjuntos independientes. De lo anterior, vemos que si la selección $\{S_1, \dots, S_3\}$ representa un $(3, 7)$ –grafo, entonces es necesario, pero no suficiente, que cada par de conjuntos S_i, S_j sea un buen par. La propiedad de ser un buen par depende solo de $H_2(v)$, que en este caso es H_{16a} .

Construimos ahora tres matrices M_{44} , M_{45} y M_{55} . El primer algoritmo nos da listas de 4- y 5-conjuntos independientes. Los llamaremos $\{S_i^4: i \leq d_4\}$ y $\{S_i^5: i \leq d_5\}$, donde G contiene d_4 4-conjuntos independientes y d_5 5-conjuntos independientes. Si $i < j$ entonces definimos la entrada ij de la matriz M_{44} como 1 si S_i^4 y S_j^4 forman un buen par y 0 sino. La matriz M_{55} se define de la misma manera. Para todos los i y j definimos la entrada ij de M_{45} como 1 si S_i^4 y S_j^5 son un buen par y 0 sino. Una manera eficiente de generar estas matrices es descrita a continuación.

Para estas matrices generamos una lista de todos los conjuntos de la forma $A = \{S_a^4, S_b^4, S_c^4, S_d^5, S_e^5\}$ en donde cada par en el conjunto es un buen par. Para obtener todos los conjuntos de esta forma, tomamos la primera fila $M_{44}^{(1)}$ en la matriz M_{44} y elegimos la primera columna j para la cual la entrada ij es un 1. Hemos ahora elegido los conjuntos S_1^4 y S_j^4 . A continuación, la operación “&” es aplicada a la primera y la j –ésima filas y la primera entrada distinta de cero, digamos en la k –ésima columna, es elegida. Esto corresponde a elegir S_k^4 . Notemos que en el conjunto $\{S_1^4, S_j^4, S_k^4\}$ todos los pares son un buen par. Debemos ahora elegir dos 5-conjuntos independientes. De la matriz M_{45} , elegimos la primera, la j –ésima y la k –ésima filas y tomamos sus “&”. Supongamos que en el resultado el primer 1 ocurre en la l –ésima columna. Entonces los 5-conjuntos independientes S_l^5 forman un buen par con cada uno de los tres 4-conjuntos independientes que ya han sido elegidos. Finalmente, el resultado de la ultima “&” operación es “&-ada” con la l –ésima columna de M_{55} . Si la m –ésima columna en el resultado es 1 entonces el conjunto S_m^5 puede ser adjuntado para completar el conjunto A . Los 10 pares en A son buenos pares. Entonces hacemos backtrack.

Si algún conjunto de la forma A existe, entonces chequeamos cada conjunto para ver si para todas las elecciones de k conjuntos de A , $k \geq 3$, cuando esos k conjuntos son removidos de V_2 , no queda ningún $(7 - k)$ –conjuntos independientes. Si ese es el caso, entonces el conjunto A representa un $(3, 7, 22, 59)$ –grafo.

Ahora describimos como las matrices M_{ij} son construidas. Primero construimos la matriz N_4 (y de manera similar, N_5). La matriz N_4 es una matriz de tamaño $d_4 \times d_5$. Se pone un 1 en la posición bc de N_4 si y solo si $S_b^5 \cap S_c^5 = \emptyset$.

Llamemos $N_i^{(k)}$ a la k -ésima fila de N_i . Para encontrar la entrada kl de la matriz M_{44} , donde $k < l$, miramos las filas de $N_4^{(k)}$ y $N_4^{(l)}$. Si $N_4^{(k)} \& N_4^{(l)}$ tiene unos en ella, entonces la entrada kl de M_{44} recibe el valor 1. Para ver porque esto funciona, notemos que no hay unos en $N_4^{(k)} \& N_4^{(l)}$ si y solo si cada 5-conjunto independiente S_j^5 interseca a $S_4^{(k)}$ o a $S_4^{(l)}$. Esto pasa si y solo si el par $(S_4^{(k)}, S_4^{(l)})$ es un buen par, lo cual es cierto si y solo si la entrada kl de M_{44} es un 1. \square

Lema 7: Si G es un $(3, 8, 27, 80)$ -grafo entonces G no tiene nodos de grado menor a 5.

Dem:

En esta demostración usamos que $e(3, 7, 19) = 37$, $e(3, 7, 20) = 44$, $e(3, 7, 21) = 51$ y $e(3, 7, 22) = 60$. Las primeras 3 igualdades fueron demostradas anteriormente y la ultima se encuentra en el lema anterior.

Si G contiene un vértice v de grado menor a 4, luego $H_2(v)$ sería un $(3, 7, n)$ -grafo, donde $n \geq 23$, lo cual es imposible pues $R(3, 7) = 23$.

Si v es un 4-nodo con 2 4-nodos, digamos w_1 y w_2 , como vecinos, entonces w_2 está en $H_2(w_1)$ y w_2 tiene grado por lo menos 3 en este subgrafo. Pero $H_2(w_1)$ es un $(3, 7, 22)$ -grafo, y $R(3, 6) = 18$, por lo tanto $H_1(w_1)$ no puede tener 3-nodos.

Por lo tanto, cada 4-nodo en G tiene por lo menos un 4-nodo como vecino. Luego, si v es un 4-nodo, entonces $Z(v) \geq 19$. Por lo tanto, $|H_2(w_1)| \leq 61$. El lema anterior implica que $H_2(v)$ no contiene 4-nodos, por lo cual G tiene a lo sumo 2 4-nodos, v y quizás alguno de sus vecinos.

Usando el lema 1 tenemos el siguiente sistema:

$$\Delta = 2160 - 86s_0 - 80s_1 - 76s_2 - 76s_3 \geq 0,$$

$$160 = 7s_0 + 6s_1 + 5s_2 + 4s_3,$$

$$27 = s_0 + s_1 + s_2 + s_3.$$

Para resolver el sistema, podemos tomar 2 casos:

Caso 1: $s_3 = 2$.

$$\Delta = 2008 - 86s_0 - 80s_1 - 76s_2 \geq 0,$$

$$152 = 7s_0 + 6s_1 + 5s_2,$$

$$25 = s_0 + s_1 + s_2.$$

Caso 2: $s_3 = 1$.

Resolviendo el sistema obtenemos que $s_2 \leq 2$. Luego, el 4-nodos v tiene Z-suma por lo menos $5+5+6+6=22$, por lo tanto, $|H_2(v)| \leq 58$. Pero $H_2(v)$ es un $(3, 7, 22)$ -grafo, y $e(3, 7, 22) = 60$, lo que nos da una contradicción.

Esto completa la demostración. \square

Lema 8: Si G es un $(3, 8, 27, 80)$ –grafo, entonces o G contiene un K_6 con seis 6-nodos como vecinos, o un K_5 con un 5-nodo como vecino.

Dem:

Vamos a usar el sistema de desigualdades planteado en el lema anterior, pero tomando $s_3 = 0$. De esto obtenemos:

$$s_2 = s_0 + 2,$$

$$s_1 = 25 - s_0,$$

$$\Delta = 8 - 2s_0 \geq 0.$$

Por lo tanto, $s_0 \leq 4$, y $2 \leq s_2 \leq 6$. Notemos que como $e(3, 7, 20) = 44$ y $e(3, 7, 21) = 51$, si v es un 5-nodos, entonces $Z(v) \leq 29$, y si v es un 6-nodos, entonces $Z(v) \leq 36$. En particular, el número de $(5, 6)$ –ramas es por lo menos tan grande como el de $(6, 7)$ –ramas, pues de otro modo algún 6-nodo v tendría más 7-nodos que 5-nodos como vecinos, lo que forzaría $Z(v) > 36$.

Caso1: $s_2 \leq 4$.

Cada 5-nodos tiene por lo menos 4 6-nodos como vecinos, y ningún 6-nodos es adyacente a ningún 7-nodos ni a ningún 5-nodos, por lo tanto hay como máximo 16 6-nodos adyacentes a un 5-nodos o a un 7-nodos. Pero hay por lo menos 21 6-nodos, luego, hay un 6-nodos con 6 6-nodos como vecinos.

Caso 2: $s_2 = 5$.

Si no existe ningún 6-nodo con 6 6-nodos como vecinos, entonces cada 6-nodo es adyacente a por lo menos un 5-nodos, y como hay 19 6-nodos, debe haber por lo menos 19 $(5, 6)$ -ramas. Pero hay solo 5 5-nodos, entonces algún t –nodo v tiene por lo menos 4 6-nodos como vecinos. Como $Z(v) \leq 29$, v debe tener exactamente 4 6-nodos y un 5-nodos como vecinos.

Caso 3: $s_2 = 6$.

En este caso, $\Delta = 0$, por lo tanto el lema 1 implica que todos los nodos son completos. Si v es un 7-nodo, entonces $Z(v) = 43$, luego v debe tener por lo menos un 7-nodo como vecino. Por lo tanto, solo hay 4 posibilidades para el 7-subgrafo y son las siguientes:



Si v es un 7-nodo que tiene i 7-nodos como vecinos, entonces v tiene $(i - 1)$ 5-nodos como vecinos, pues $Z(v) = 43$. Luego, en cualquiera de los 4 casos, hay como máximo 4 $(5,7)$ –ramas. Teniendo en cuenta que hay 6 5-nodos, debe haber un 5-nodo w con ningún 7-nodo como vecino. Dado que $Z(w) = 29$, w debe tener 4 6-nodos y un 5-nodo como vecinos.

Esto completa la demostración. \square

Lema 9: $e(3, 8, 27) \geq 81$.

Dem:

Antes se vio que $e(3, 8, 27) \geq 80$. Mediante algoritmos computacionales se observa que las condiciones dadas en el lema anterior no pueden ocurrir, luego, $e(3, 8, 27) \geq 81$. \square

Teorema 2: $R(3, 9) = 36$.

Dem:

La no existencia de un $(3, 8, 27, 80)$ –grafo implica el resultado. Habíamos visto que si G es un $(3, 9, 36)$ –grafo entonces es un grafo regular de grado 8; y que si algún vértice en G es preferido, entonces $H_2(v)$ es un $(3, 8, 27, 80)$ –grafo. Luego, como no existe ningún $(3, 8, 27, 80)$ –grafo, tampoco puede existir ningún $(3, 9, 36)$ –grafo. \square

Números de la forma $R(4, n)$

$$R(4, 4)=18 \text{ [4]}$$

Teorema: $R(4,4) = 18$

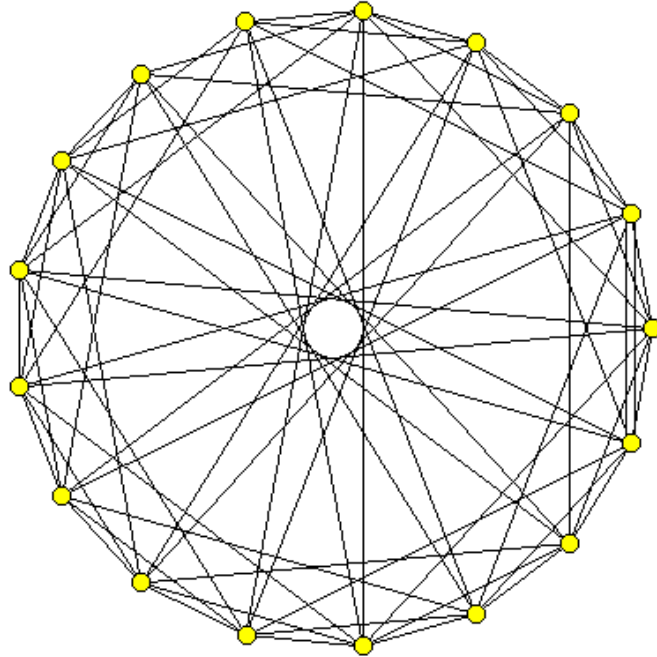
Veremos que para todo grafo G con por lo menos 18 nodos, o G o su complemento \bar{G} contiene un subgrafo K_4 .

Elijamos un nodo w cualquiera. Los nodos de G se dividen en 2 grupos, los que están unidos con w , grupo S , y los que no, grupo T . Tenemos que $|S| \geq 9$ o $|T| \geq 9$, pues sino $|S \cup T|$ es menor a 18, lo cual es absurdo.

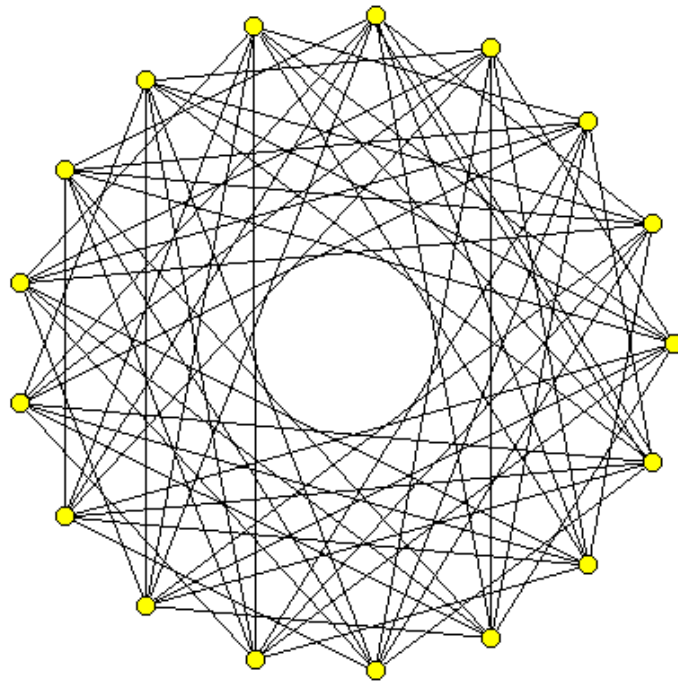
Si $|T| \geq 9$, entonces, como $R(4,3) = 9$, o hay un K_4 en T o hay un conjunto independiente de 3 nodos. En el primer caso, ya obtenemos un K_4 . En el segundo caso, juntando w con los 3 nodos del conjunto independiente tenemos un K_4 en \bar{G} .

Si $|S| \geq 9$, usamos el hecho de que $R(3,4) = 9$ (como vimos antes) para afirmar que o existe un K_3 en S o existe un conjunto independiente de 4 nodos. En el segundo caso, inmediatamente tenemos un K_4 en \bar{G} . En el primer caso, juntando w con el K_3 en S tenemos un K_4 en G .

Finalmente, para probar que $R(4,4) = 18$, mostramos un grafo de 17 nodos en el cual ni G ni \bar{G} tienen un K_4 .



En este grafo cada nodo está unido con su primer, segundo, cuarto y octavo vecinos hacia la derecha y hacia la izquierda. El grafo que se encuentra a continuación es su complemento.



Ver Apéndice A. En matlab aplicamos: $k_4(M_9)=0$ y $k_4(M_{10})=0$, donde M_9 y M_{10} son las matrices de adyacencia de los grafos descritos arriba. \square

$R(4, 5)=25$ [13]

Para esta demostración se intentará construir una familia de $(4, 5, 24)$ –grafos, definida de tal manera que cada $(4, 5, 25)$ –grafo debe ser una extensión de un nodo a por lo menos uno de los grafos de nuestra familia.

Para $k = 7, 8, 9, 10$, sea $\mathcal{R}'(3, 5, k)$ el conjunto de $(3, 5)$ –grafos de orden menor o igual a k , tal que cada $(3, 5, k)$ –grafo contiene por lo menos uno de ellos. De manera similar, para $k = 11, 12$, sea $\mathcal{R}'(4, 4, k)$ el conjunto de los $(4, 4)$ –grafos de orden menor o igual a k , tal que cada $(4, 4)$ –grafo contiene por lo menos uno de ellos.

Supongamos que \tilde{F} es un $(4, 5, 25)$ –grafo. Elegimos un nodo x de \tilde{F} tal que:

- (i) Si x es un nodo de \tilde{F} de grado $d \leq 10$, sea v un nodo de $H_1(x)$ tal que $H_1(x) - v$ contiene algún miembro de $\mathcal{R}'(3, 5, d)$.
- (ii) Si x tiene grado $d \geq 12$, sea v el nodo de $H_2(x)$ tal que $H_2(x) - v$ contiene algún miembro de $\mathcal{R}'(4, 4, 24 - d)$.

Como \tilde{F} no puede ser regular de grado 11, teniendo orden impar, por lo menos una elección de v es posible. Por lo tanto, al menos un subgrafo de \tilde{F} ocurre en el conjunto de todos los $(4, 5, 24)$ –grafos F de manera tal que para algún x , $H_1(x)$ y $H_2(x)$ están representados por alguna fila de la siguiente tabla:

$H_1(x)$	$H_2(x)$
$\mathcal{R}'(3, 5, 7)$	$\mathcal{R}(4, 4, 17)$
$\mathcal{R}'(3, 5, 8)$	$\mathcal{R}(4, 4, 16)$
$\mathcal{R}'(3, 5, 9)$	$\mathcal{R}(4, 4, 15)$
$\mathcal{R}'(3, 5, 10)$	$\mathcal{R}(4, 4, 14)$
$\mathcal{R}(3, 5, 12)$	$\mathcal{R}'(4, 4, 12)$
$\mathcal{R}(3, 5, 13)$	$\mathcal{R}'(4, 4, 11)$

El proceso de construir F de un par $(H_1(x), H_2(x))$ se llamará “pegado”. La cantidad de pegados requeridos en la tabla anterior es demasiado grande para métodos comunes. Más adelante se describirá un algoritmo de eficiencia suficiente tal que todos los pegados requeridos se puedan hacer en un tiempo razonable.

Para $k = 7, 8, 9$ tomamos $\mathcal{R}'(3, 5, k) = \mathcal{R}(3, 5, k - 1)$. Pese a que conjuntos más pequeños hubieran sido más eficientes, se quería computar el conjunto completo de $(4, 5, 24)$ –grafos teniendo un nodo de grado 8 o menos. Para $\mathcal{R}'(3, 5, 10)$

tomamos un conjunto de 53 (3, 5, 9) –grafos elegidos, de acuerdo con la experiencia, lo menos denso posibles.

Supongamos que G y H son un (3, 5) –grafo y (4, 4) –grafo respectivamente. Definimos $F(G, H)$ como el conjunto de todos los (4, 5) –grafos F tales que para algún nodo x en VF , $H_1(x) = G$ y $H_2(x) = H$. Vamos a utilizar F como un representante de $F(G, H)$. Vamos a suponer que los nodos de G son nombrados con enteros continuos $0, 1, 2, \dots$ y que los subgrafos inducidos de G también son nombrados de esta manera $0, 1, 2, \dots$ en el orden inducido por el nombramiento de G .

Definimos un cono factible como un subconjunto de VH que no cubre ninguna clique de tamaño 3. Si H es un (4, 4, 14) –grafo, hay generalmente alrededor de 4000 conos factibles. La relevancia de los mismos es que $N_F(v, VH)$ debe ser un cono factible para cada nodo v de VG . Nuestro problema es elegir conos factibles C_0, C_1, \dots , uno para cada nodo de G , tal que ningún clique de orden 4 ni ningún conjunto independiente de tamaño 5 aparezca en F . Las diversas posiciones en las cuales estos subgrafos prohibidos podrían ocurrir son las siguientes:

K_2 : Dos nodos adyacentes v, w en VG tienen $C_v \cap C_w$ que cubre alguna arista de H .

E_t : Para algún conjunto independiente w_0, \dots, w_{t-1} de G , existe un conjunto independiente de orden $5 - t$ en H que no se encuentra en $C_{w_0} \cup C_{w_1} \cup \dots \cup C_{w_{t-1}}$ ($t = 2, 3, 4$).

La operación de pegado puede ser lograda por una búsqueda regresiva de profundidad $|VG|$, pero esto es insuficientemente eficiente debido al gran número de conos factibles. En lugar de eso, vamos a partir el conjunto de conos factibles en familias bien estructuradas que pueden ser procesadas en paralelo. Un intervalo de conos factibles, que de ahora en adelante llamaremos intervalo, es un conjunto de conos factibles de la forma $\{X: B \subseteq X \subseteq T\}$ para algunos conos factibles $B \subseteq T$. Este intervalo lo vamos a notar por $[B, T]$, y llamaremos a B y T su ínfimo y supremo respectivamente. Obviamente, $[B, T]$ contiene $2^{|T|-|B|}$ conos factibles. Usando una búsqueda heurística, el típico conjunto de 4000 conos factibles cuando H es un (4, 4, 14) –grafo puede ser escrito como la unión disjunta de aproximadamente 100 intervalos. Las dimensiones $|T| - |B|$ van desde 0 hasta 8.

Supongamos $m = |VG|$. Si C_0, \dots, C_{m-1} son conos factibles, entonces $F(G, H, C_0, \dots, C_{m-1})$ denota el grafo F con nodo x tal que $H_1(x) = G$, $H_2(x) = H$, y $C_i = N_F(i, VH)$ para $0 \leq i \leq m - 1$. Claramente, este es un (4, 5, 25) –grafo si y sólo si las condiciones K_2, E_2, E_3, E_4 son evitadas. Similarmente, si I_0, I_1, \dots, I_{m-1} son intervalos, entonces $F(G, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1})$ representa el conjunto de todos los (4, 5, 25) –grafos $F(G, H, C_0, \dots, C_{m-1})$ tales que $C_i \in I_i$ para $0 \leq i \leq m - 1$.

Dado H , definimos 3 funciones $H_1, H_2, H_3: 2^{VH} \rightarrow 2^{VH}$. Para $X \subseteq VH$ sean

$$H_1(X) = \{w \in VH: vw \in EH \text{ para algún } v \in X\};$$

$$H_2(X) = \{w \in VH: vw \notin EH \text{ para algún } v \notin X\};$$

$$H_3(X) = \{w \in VH: \{u, v, w\} \text{ es un conjunto independiente de } H \text{ para algún } u, v \notin X\}.$$

Estas funciones pueden ser calculadas por recursiones. Usando las mismas, podemos definir algunas “reglas de colapso” que se aplican a las secuencias I_0, I_1, \dots, I_{m-1} de intervalos. Las reglas dependen de los grafos G y H . En cada caso, o un intervalo es remplazado por un intervalo contenido en el, o el evento especial FALLA ocurre. Supongamos $I_i = [B_i, T_i]$ para cada i , y definimos las reglas de colapso (a)-(d) como siguen:

- (a) Supongamos $\{u, v\} \in EG$.
 Si $B_u \cap B_v \cap H_1(B_u \cap B_v) \neq \emptyset$ entonces FALLA
 Sino $T_u := T_u - (H_1(B_u \cap B_v) \cap B_v)$
- (b) Supongamos $\{u, v\} \notin EG$, donde u, v son nodos distintos de G .
 Si $H_3(T_u \cup T_v) \notin T_u \cup T_v$ entonces FALLA
 Sino $B_u := B_u \cup (H_3(T_u \cup T_v) - T_v)$
- (c) Supongamos $\{u, v, w\}$ es un conjunto independiente de tamaño 3 de G .
 Si $H_2(T_u \cup T_v \cup T_w) \notin T_u \cup T_v \cup T_w$ entonces FALLA
 Sino $B_u := B_u \cup (H_2(T_u \cup T_v \cup T_w) - (T_v \cup T_w))$
- (d) Supongamos que $\{u, v, w, z\}$ es un conjunto independiente de tamaño 4 de G .
 Si $T_u \cup T_v \cup T_w \cup T_z \neq VH$ entonces FALLA
 Sino $B_u := B_v \cup (VH - (T_u \cup T_w \cup T_z))$.

Notemos que, por ejemplo en la regla (c) el papel que juega u podría jugarlo v o w .

La razón por la que se usan estas reglas de colapso esta dada por el siguiente lema.

Lema 1: Supongamos que unas reglas de colapso se aplican a I_0, I_1, \dots, I_{m-1} .

Si FALLA ocurre, entonces $F(G, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1}) = \emptyset$.

De otra manera, $F(G, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1}) = F(G, H, I_0', I_1', \dots, I_{m-1}')$ donde $I_0', I_1', \dots, I_{m-1}'$ es una secuencia de intervalos luego de aplicar la regla.

Dem:

Consideremos la regla (a), por ejemplo. Sea $\{y, z\}$ en EH una arista tal que y está en $B_u \cap B_v$ y z está en $T_u \cap B_v$. Claramente u no puede ser adyacente a z , ya que eso implicaría la formación de una 4-clique $\{u, v, w, z\}$ (condición K_2). Por lo tanto,

$F(G, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1}) = \emptyset$ si z está en B_u ; de otra forma z puede ser removida de T_u . La aplicación de esta regla simultáneamente a todas las aristas $\{y, z\}$ es precisamente la regla (a).

Las reglas (b)-(d) salen de aplicar ideas similares para evitar 5-conjuntos (condiciones $E_2 - E_4$ respectivamente). \square

Si las reglas de colapso se aplican reiteradamente, eventualmente encontraremos o una condición de FALLA o una situación estable donde ninguna regla de colapso puede dar FALLA o reducir un intervalo estrictamente. Resulta que la etapa final es independiente del orden de la aplicación de las reglas de colapso. Este es un caso especial del siguiente resultado elemental.

Sea (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado, y sea Φ una familia de funciones de X en X . Supongamos que para x, x' en X y ϕ en Φ tenemos que $\phi(x) \leq x$ y $x \leq x' \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(x')$. Llamamos a x en X Φ -estable si $\phi(x) = x$ para todo $\phi \in \Phi$. Sea $\phi^*(x)$ la clausura de $\{x\}$ bajo ϕ .

Lema 2: Para cada x en X , $\phi^*(x)$ contiene como mucho un elemento Φ -estable.

Dem:

Supongamos que para $\phi_1, \dots, \phi_r, \phi_1', \dots, \phi_s' \in \Phi$, ambos $y = \phi_r(\dots \phi_1(x) \dots)$ y $y' = \phi_s'(\dots \phi_1'(x) \dots)$ son Φ -estables. Entonces $y = \phi_s'(\dots \phi_1'(\phi_r(\dots \phi_1(x) \dots) \dots))$ ya que y es Φ -estable, y por lo tanto $y \leq y'$ por las condiciones establecidas en Φ . Similarmente $y' \leq y$ y por lo tanto $y = y'$. \square

Para aplicar el lema 2 para G y H dados, sea X el conjunto de las m -uplas $(I_0, I_1, \dots, I_{m-1})$ de intervalos, junto con el valor especial FALLA. Definimos $x \leq x'$ si o $x = \text{FALLA}$ o $x = (I_0, I_1, \dots, I_{m-1})$, $x' = (I_0', I_1', \dots, I_{m-1}')$ y $I_i \subseteq I_i'$, $0 \leq i \leq m$. Sea Φ el conjunto de todas las reglas de colapso disponibles, extendido a asignar FALLA con FALLA siempre. Los requerimientos del lema 2 se chequean fácilmente, notando que las funciones H_1, H_2, H_3 son monótonas no decrecientes, no decrecientes y no crecientes respectivamente, y que la finitud de $\phi^*(x)$ garantiza que contiene por lo menos un elemento Φ -estable.

El resultado de aplicar reglas de colapso hasta que una condición FALLA o una estabilidad ocurran va a ser llamado colapso, reemplaza $(I_0, I_1, \dots, I_{m-1})$ con $C(G, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1})$, donde la última es o FALLA o existe una secuencia $(I_0', I_1', \dots, I_{m-1}')$ tal que $I_i' \subseteq I_i$ $0 \leq i \leq m - 1$. La última secuencia estable se dice que es totalmente colapsada (para G y H).

El teorema fundamental sobre colapsos es el siguiente:

Teorema 1: Si $C(G, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1}) = FALLA$, entonces $F(G, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1}) = \emptyset$. De otra manera, definimos $(I'_0, I'_1, \dots, I'_{m-1}) = C(G, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1})$. Entonces $F(G, H, I'_0, I'_1, \dots, I'_{m-1}) = F(G, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1})$ y si, además, $|I_0| = |I_1| = \dots = |I_{m-1}| = 1$ entonces $F(G, H, I'_0, I'_1, \dots, I'_{m-1})$ consiste en un único $(4, 5)$ -grafo.

Dem:

Todas las afirmaciones, a excepción de la última, salen de la aplicación reiterada del lema 1. Para la última parte, notemos que la existencia de algún 4-ciclo o un conjunto independiente de tamaño 5 llevarían a que la correspondiente regla de colapso cause la condición FALLA. \square

Notemos que cada vez que una regla de colapso modifica un intervalo, el número de conos factibles que representa es dividido por una potencia de 2. Esta habilidad de colapsar para descartar muchas configuraciones no factibles al mismo tiempo es la principal razón del éxito de este algoritmo.

Ahora podremos ver el procedimiento de pegado usando intervalos. Supongamos inductivamente que tenemos secuencias totalmente colapsadas de intervalos $(I'_0, I'_1, \dots, I'_{r-1})$ para $G[\{0, 1, \dots, r-1\}]$. Aquellos para los cuales $G[\{0, 1, \dots, r-1\}]$ tiene la forma $C(G[\{0, 1, \dots, r-1\}], H, I'_0, I'_1, \dots, I'_{r-1}, I_r)$, donde I_r es algún intervalo y las elecciones que causan FALLA son rechazadas.

Dadas unas secuencias totalmente colapsadas $(I'_0, I'_1, \dots, I'_{m-1})$ para G , podemos encontrar $F(G, H)$. Secuencias con $|I'_0| = \dots = |I'_{m-1}| = 1$ llevan a una única solución como vimos en el teorema 1. Aquellas que tienen algún $I'_i = [B'_i, T'_i]$ con $B'_i \neq T'_i$ pueden ser partidas recursivamente en las configuraciones disjuntas $C(G, H, I'_0, \dots, [B'_i \cup \{w\}, T'_i], \dots, I'_{m-1})$ y $C(G, H, I'_0, \dots, [B'_i, T'_i - \{w\}], \dots, I'_{m-1})$ para algún $w \in T'_i - B'_i$, con valores que causan FALLA siendo rechazados de la manera usual.

Una fuente de ineficiencia de este algoritmo es que hay generalmente 100 intervalos que podrían ser elegidos para I_r , y la mayoría de ellos llevan a condiciones de FALLA para un r módico. Podemos reducir el número de operaciones de colapso requeridas. Esto se logra con la ayuda de una estructura de datos que tiene una gran ventaja: muchos G 's pueden ser procesados simultáneamente.

Supongamos que $1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ son enteros tales que $a_i < i$ para $i \geq 2$. Vamos a definir dos relaciones en el conjunto de grafos nombrados donde los nombres son los enteros $\{0, 1, \dots, m-1\}$ si el orden es m . Supongamos que J es un tal grafo con $m \geq 2$ nodos. Entonces:

$$padre(J) = J[\{0, 1, \dots, m-2\}] \text{ y } adjunto(J) = J[\{0, 1, \dots, a_m-2, m-1\}],$$

Donde el nodo final de $adjunto(J)$ tiene el nombre $a_m - 1$ de acuerdo con nuestra convención para nombrar subgrafos. Se sigue de las definiciones que $padre(J)$ y $adjunto(J)$ tienen $m-1$ y a_m nodos respectivamente.

A partir del lema 2 tenemos lo siguiente:

Lema 3: Sean I_0, I_1, \dots, I_{m-1} intervalos. Si $C(padre(J), H, I_0, I_1, \dots, I_{m-2})$ da FALLA o si $C(adjunto(J), H, I_0, I_1, \dots, I_{a_m-2}, I_{m-1})$ da FALLA, entonces $C(J, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1})$ da FALLA. De otra manera, supongamos que $(I_0', I_1', \dots, I_{m-2}') = C(padre(J), H, I_0, I_1, \dots, I_{m-2})$ y $(I_0'', I_1'', \dots, I_{m-2}'') = C(adjunto(J), H, I_0, I_1, \dots, I_{a_m-2}, I_{m-1})$. Entonces, $C(J, H, I_0, I_1, \dots, I_{m-1}) = C(J, H, I_0' \cap I_0'', \dots, I_{a_m-2}' \cap I_{a_m-2}'', I_{a_m-1}', \dots, I_{m-2}', I_{a_m-1}'')$,

Donde el valor se toma como FALLA si alguna de las intersecciones es vacía.

La principal razón para usar el lema 3 es reducir el número de operaciones de colapso necesarias para deducir las configuraciones completamente colapsadas de J de aquellas de $padre(J)$. En lugar de quizás 100 posibilidades para I_{m-1} vamos a tener típicamente unas pocas, las otras van a causar una FALLA cuando se las pruebe para $adjunto(J)$. Más aún, las operaciones de colapso requeridas por $adjunto(J)$ son independientes de I_{m-2} y por lo tanto no necesitan ser repetidas, se realizan a lo sumo I_{m-2} cambios.

Para implementar estas ideas eficientemente se construyo un objeto que consiste en un par de arboles con raíces superpuestas. Lo llamaremos un árbol doble. Por definición, supongamos que queremos unir un solo H a una familia $\mathcal{R}' = \mathcal{R}'(3, 5, k)$. Los nodos de un árbol doble son grafos nombrados, los miembros de \mathcal{R}' y recursivamente los *padres* y *adjuntos* de cada nodo. El grafo K_1 no tiene *padre* ni *adjunto*; lo llamaremos la raíz. Las aristas $(J, padre(J))$ forman un árbol con raíz llamado árbol *padre*, en el cual esos nodos y aristas en un camino de un miembro de \mathcal{R}' a la raíz constituyen las ramas principales (un subárbol del árbol *padre*). Las aristas $(J, adjunto(J))$ forman otro árbol, llamado el árbol *adjunto*. Como $padre(adjunto(J)) = padre^{m-a_m+1}(J)$, donde $m = |VJ|$ y $a_m \geq 2$, el número total de nodos en el árbol doble es a lo sumo $k-1$ veces el número de ramas.

Ahora, se puede describir el principal algoritmo de pegado. Comenzando por la raíz, las ramas principales del árbol doble son recorridas en profundidad. Para la raíz, todos los intervalos son colapsados. Para otros nodos, las configuraciones colapsadas por el *padre* y el *adjunto* son combinadas como describe el lema 3. El cálculo de *adjunto* puede requerir recursivamente computaciones del *adjunto* del *adjunto*, y así sucesivamente. Típicamente, la experiencia mostró que cuando las configuraciones del conjunto *adjunto* fueron requeridas ya eran válidas aproximadamente un 90% de las veces.

Aun más rapidez se logró empleando las simetrías de los nodos de orden bajo en el árbol doble. Se encontró útil usar todas las simetrías de nodos de orden 4 o menos.

Para las últimas dos filas de la tabla, un algoritmo similar es utilizado. En lugar de buscar en una estructura espacial derivada de un conjunto de probabilidades para G , usando intervalos en H , los roles de G y H se intercambian. Los intervalos fueron definidos en el conjunto VG , y la búsqueda derivaba del conjunto de posibilidades de H . Como H es un $(4, 4)$ –grafo, la regla de colapso (d) no es necesaria, pero se necesita una nueva regla de colapso para triángulos en H . La cantidad de $(4, 4)$ –grafos, que es mucho mayor comparada con la de $(3, 5)$ –grafos nos lleva a elegir $\mathcal{R}'(4, 4, k)$ como grafos con menos de $k - 1$ nodos. Para $k = 12$ se usaron 23 $(4, 4, 7)$ –grafos y 51 $(4, 4, 8)$ –grafos. Para $k = 11$ se usaron 28 $(4, 4, 8)$ –grafos y 113 $(4, 4, 9)$ –grafos. La experiencia llevó a que se prefirieran grafos densos y los nombramos con sus subgrafos mas densos primero. En cada caso, la operación de pegado descrita antes nos lleva a grafos de 21 o 22 nodos. Esos fueron extendidos en todas las maneras posibles a 24 nodos usando un método que aplica reglas de colapso para determinar aristas que inciden en los nodos remanentes de H así como aquellas entre G y H .

Extensiones de un nodo

El requerimiento final es un algoritmo para extender $(4, 5)$ –grafos por un solo nodo. Supongamos que F es un $(4, 5, n)$ –grafo. Queremos encontrar todas las maneras en las que un nuevo nodo v puede ser unido con F para formar un $(4, 5, n + 1)$ –grafo. Claramente, es necesario y suficiente que $N(v, VF)$ no cubra ningún triángulo de F y que se dirija a cada conjunto independiente de tamaño 4 de F .

Sean X_1, X_2, \dots, X_r una lista que contiene todos los triángulos y los 4-conjuntos independientes de F en algún orden. Al igual que en el algoritmo de pegado vamos a considerar intervalos $[B, T]$ de subconjuntos de VF . El algoritmo de extensión usa un conjunto I de dichos intervalos.

$I := \{|\emptyset, VF|\}$

para $i = 1$ hasta r

 si X_i es un triángulo entonces

 para cada $[B, T]$ en I tal que $X_i \subseteq T$

 si $X_i \subseteq B$ entonces

 borrar $[B, T]$ de I

 sino reemplazar $[B, T]$ con $[B \cup \{y_1, \dots, y_{j-1}\}, T - \{y_j\}]$

 para $j = 1, \dots, k$ donde $X_i - B = \{y_1, \dots, y_k\}$.

 Fin si

 Fin para

 Fin si

 Sino [si X_i es un 4 – conjunto independiente]

 Para cada $[B, T]$ en I tal que $X_i \cap B = \emptyset$

 si $X_i \cap T = \emptyset$ entonces

 borrar $[B, T]$ de I .

 sino reemplazar $[B, T]$ por $[B \cup \{y_j\}, T - \{y_1, \dots, y_{j-1}\}]$

 para $j = 1, \dots, k$ donde $X_i \cap T = \{y_1, \dots, y_k\}$.

 Fin si

 Fin para

 Fin sino

Fin para

Al completarse el algoritmo I va a contener un conjunto de intervalos disjuntos cuya unión es el conjunto de posibles vecindades $N(v, VF)$.

La eficiencia del algoritmo depende considerablemente del orden de los elementos en la lista X_1, X_2, \dots, X_r . Un método razonablemente bueno es ordenar el mayor elemento, luego el segundo mayor, y así sucesivamente con los triángulos y los conjuntos independientes ordenados todos juntos. Con una buena implementación

este algoritmo puede llegar a extensiones de 24 a 25 nodos en aproximadamente 10 milisegundos.

La estructura general de ambas implementaciones era similar, pero algunos detalles eran diferentes. Por ejemplo, distintas particiones del conjunto de conos factibles en intervalos, y se utilizaron diferentes ordenes *adjuntos* a_i . Los $(4, 5, 24)$ –grafos generados fueron comparados para cada operación de pegado individual, o a veces en pequeños grupos, sin encontrar ninguna discrepancia. Algunos pegados representativos fueron hechos usando búsquedas diferentes, de nuevo con los mismos resultados. El testeo de isomorfismos se hizo utilizando el programa *nauty* de McKay.

Las dos implementaciones requirieron 3.2 años y 6 años de tiempo de CPU en computadoras de Sun Microsystems (mayormente Sparcstation SLC). Esto se logro sin mayor demora utilizando un gran número de computadoras a la vez (hasta 110).

Como resultado de las computaciones, aproximadamente 25000 $(4, 5, 24)$ –grafos fueron hallados. Estos, se vio que no son subgrafos inducidos de $(4, 5, 25)$ –grafos usando dos programas independientes para extender $(4, 5, n)$ –grafos a $(4, 5, n + 1)$ –grafos. Por lo tanto tenemos el teorema principal:

Teorema 2: $R(4,5) \geq 25$. [9]

Dem:

Espaciamos los nodos de K_n de manera equidistante alrededor de la circunferencia de un círculo de manera tal que todas las aristas del grafo se convierten en cuerdas del círculo. Una s -línea, o una arista de longitud s , es una arista del grafo que corta un arco del círculo que contiene $s-1$ nodos interiores. Un $(4,5)$ -coloreo regular, es un 2-coloreo en el cual no existen K_4 del primer color ni K_5 del segundo color y en el cual, para cada s , todas las aristas de longitud s tienen el mismo color. Dando un coloreo de esta forma, obtendremos que existe un grafo de 24 nodos en el cual no hay contenido ni un K_4 del color 1 ni un K_5 del color 2, lo que implica el resultado del teorema. Se puede ver que si coloreamos las 1-, 2-, 4-, 8- y 9-líneas del primer color obtenemos un $(4,5)$ -coloreo regular. \square

Teorema 3: $R(4, 5) = 25$.

Dem:

Antes se vió que ninguno de los $(4,5,24)$ –grafos obtenidos eran subgrafos inducidos de $(4,5,25)$ –grafos. Como un $(4,5,25)$ –grafo debía ser una extensión a un nodo de un $(4,5,24)$ –grafo de la familia definida, al ver que esto no es posible, concluimos que $(4,5,25) = \emptyset$, es decir, que no existe ningún grafo de 25 nodos tal que no contenga ni una 4-clique ni un 5-conjunto independiente, lo que nos da la cota superior: $R(4,5) \leq 25$.

Este hecho, unido al resultado del teorema 2, nos da el resultado principal, la igualdad $R(4,5) = 25$. \square

Cotas para números de Ramsey

A continuación mostraremos algunos resultados sobre cotas a modo de ejemplificar algunos métodos que se utilizan.

Cota inferior para $R(4, 6)$ [3]

Ya que el número $R(4,6)$ es el mínimo número de nodos que debe tener un grafo completo para que, dado un 2-coloreo, o el grafo incluya un K_4 del primer color o un K_6 del segundo color, al dar un coloreo de esa forma del grafo completo de 35, K_{35} , vemos que el mínimo número de nodos no puede ser 35 y por lo tanto se obtiene la cota $R(4, 6) \geq 36$. Más abajo se ve en la tabla 1 una lista de adyacencia para el grafo de color uno de un 2-coloreo de K_{35} . Todos los demás nodos tienen asignado color 2.

0:	2	6	7	9	11	13	15	17	18	20	21	23	24	26	28	32
1:	3	4	5	9	11	13	15	17	18	21	22	23	25	27	29	33
2:	0	4	5	8	10	12	14	16	19	20	21	22	25	27	28	32
3:	1	6	7	8	10	12	14	16	19	20	22	23	24	26	29	33
4:	1	2	7	8	10	11	13	17	19	20	22	24	26	31	34	
5:	1	2	6	8	9	11	14	17	19	21	23	24	26	30	34	
6:	0	3	5	9	10	11	12	16	18	21	23	25	27	31	34	
7:	0	3	4	8	9	10	15	16	18	20	22	25	27	30	34	
8:	2	3	4	5	7	9	12	15	17	23	24	27	29	31	32	
9:	0	1	5	6	7	8	13	14	16	22	25	26	29	31	32	
10:	2	3	4	6	7	11	13	14	18	21	25	26	28	30	33	
11:	0	1	4	5	6	10	12	15	19	20	24	27	28	30	33	
12:	2	3	6	8	11	13	15	17	18	20	22	25	31	33		
13:	0	1	4	9	10	12	14	16	19	21	23	24	31	33		
14:	2	3	5	9	10	13	15	17	18	20	22	24	30	32		
15:	0	1	7	8	11	12	14	16	19	21	23	25	30	32		
16:	2	3	6	7	9	13	15	19	21	24	27	29	32	34		
17:	0	1	4	5	8	12	14	18	20	25	26	29	32	34		
18:	0	1	6	7	10	12	14	17	22	24	27	28	33	34		
19:	2	3	4	5	11	13	15	16	23	25	26	28	33	34		
20:	0	2	3	4	7	11	12	14	17	23	27	29	30	31		
21:	0	1	2	5	6	10	13	15	16	22	26	29	30	31		
22:	1	2	3	4	7	9	12	14	18	21	26	28	30	31		
23:	0	1	3	5	6	8	13	15	19	20	27	28	30	31		
24:	0	3	4	5	8	11	13	14	16	18	26	27	32	33	34	
25:	1	2	6	7	9	10	12	15	17	19	26	27	32	33	34	
26:	0	3	4	5	9	10	17	19	21	22	24	25	28	29		
27:	1	2	6	7	8	11	16	18	20	23	24	25	28	29		
28:	0	2	10	11	18	19	22	23	26	27	29	31	34			
29:	1	3	8	9	16	17	20	21	26	27	28	30	34			
30:	5	7	10	11	14	15	20	21	22	23	29	34				
31:	4	6	8	9	12	13	20	21	22	23	28	34				
32:	0	2	8	9	14	15	16	17	24	25	33					
33:	1	3	10	11	12	13	18	19	24	25	32					
34:	4	5	6	7	16	17	18	19	24	25	28	29	30	31		

Tabla 1: Un $(4,6)$ -coloreo de K_{35}

Una gran cantidad de cotas inferiores fueron obtenidas mediante algoritmos computacionales de búsqueda. Tres de ellos, $R(4, 6)$, $R(3, 10)$ y $R(5, 5)$ son los casos más pequeños para los cuales se desconoce el valor exacto y sus cotas fueron obtenidas usando uno (o más) de los algoritmos descritos más abajo. El objetivo del método es producir coloreos sin subgrafos monocromáticos de orden s en el color 1 y sin subgrafos monocromáticos de orden t del color 2. Dichos grafos monocromáticos serán llamados subgrafos ‘malos’.

Método A: Se comienza con un coloreo de nodos generado aleatoriamente de un grafo completo cuyo orden n es lo suficientemente pequeño para que un buen coloreo se pueda obtener fácilmente. Entonces, usando el método de recocido simulado o una síntesis de recocido simulado y luego búsqueda tabú, el coloreo es transformado en un buen coloreo mirando nodos individuales y eligiendo el color que minimice el número de subgrafos malos. Cuando todos los subgrafos malos hayan sido eliminados, se incrementa n y se repite el proceso.

Método B: Es diferente del método anterior en dos aspectos. En lugar de comenzar con un grafo de orden pequeño, se comienza con un grafo completo del tamaño deseado. Pero la diferencia más importante se debe a la función objetivo. En lugar de recolorar nodos de manera tal de minimizar el número de subgrafos malos, agregamos un término al objetivo que intenta a maximizar el número de copias monocromáticas de P_4 (el camino de 4 nodos) inducidas. La importancia de la cuenta de P_4 en el objetivo puede ser mayor o igual a la cuenta de subgrafos malos.

Método C: Se comienza buscando coloreos altamente simétricos, por ejemplo coloreos cíclicos (coloreos de Cayley), que tengan relativamente pocos subgrafos malos y que tengan una propiedad adicional. Deben tener nodos individuales (en lugar de órbitas) que, al ser recoloreados, reduzcan el número de subgrafos monocromáticos. Una vez hallado ese coloreo, se procede con el método A.

Un comentario acerca del método B, generalmente se utiliza una variación más detallada del método. Hay 11 clases de isomorfismos de grafos de orden 4, y por lo tanto esencialmente 11 maneras diferentes de 2-colorear los nodos de un subgrafo de orden 4 en un 2-coloreo de K_n . Si contamos el número de conjuntos de nodos de tamaño 4 que induce cada uno de esos 11 coloreos posibles, producimos un vector de tamaño 11. Los nodos pueden ser por lo tanto coloreados de manera tal de minimizar la distancia entre el vector calculado y un vector objetivo postulado. El vector objetivo se puede determinar mirando coloreos buenos ya obtenidos por un proceso de optimización de alto nivel o por mera especulación. Según la experiencia se vio que maximizar el número de P_4 ’s inducidos es el elemento clave.

4-subgrafo	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
E_4	0	0	0	0	0
K_2	1886	1464	1475	1484	1500
$2K_2$	1640	1311	1303	1427	1273
P_3	4880	4204	4228	4364	4208
$K_{1,3}$	2167	2199	2215	2092	2247
P_4	9553	9190	9138	9359	9152
K_3	3204	2856	2834	3027	2804
$K_3 + e$	11268	11776	11784	11589	11770
C_4	2558	2900	2920	2687	2936
$K_4 - e$	7634	8645	8644	8534	8667
K_4	1586	1831	1835	1813	1819

Tabla 2: Cantidad de subgrafos inducidos en 5 (4, 6)-coloreos de K_{35}

Se utilizó el método B para mejorar la cota previa del $R(4, 6)$. En la tabla 2 se presentan datos sobre los subgrafos de color 2 de 5 nuevos (4, 6) –coloreos de K_{34} que fueron obtenidos simultáneamente. Esta tabla lista las cuentas para cada uno de los 11 tipos de subgrafos inducidos de orden 4. La columna más importante es la de G_1 , el resto están a modo de ejemplo. Los coloreos fueron obtenidos usando una variedad de vectores objetivo (para cuentas de coloreos inducidos de orden 4), creados más o menos ad hoc. Notemos que en la tabla el grafo descrito es el grafo de 2 colores.

Observemos que la cantidad de subgrafos inducidos es aproximadamente la misma en cada caso, a excepción de G_1 . Los otros 4 tienen una cantidad de subgrafos que es substancialmente la misma que la de los cientos de otros (4, 6) –coloreos. El coloreo G_1 diferente de todos ellos. La cantidad de K_4 es 1586, mientras que en ningún otro caso se encontró un coloreo con menos de 1780 K_4 's monocromáticos (en el color libre de K_6 's). Además, el número de P_4 's inducidos es significativamente más grande que en cualquiera de los otros coloreos. Una vez que se descubrieron esas diferencias, se intentó extender el coloreo a 35 nodos y se tuvo éxito inmediatamente. Todos los 37 coloreos hallados están altamente relacionados con G_1 .

El coloreo de la tabla 1 es el más simétrico de los 37 coloreos obtenidos. Tiene un automorfismo de orden 4. Hay 6 órbitas de tamaño 4, que consisten de los nodos $i, i + 1, i + 2$ e $i + 3$ para $i = 0, 4, 8, 12, 16, 20$. Hay 5 órbitas de tamaño 2, que consisten de los nodos j y $j + 1$ para $j = 24, 26, 28, 30, 32$. El nodo 34 es un punto fijo. Notemos que el mínimo grado en color 1 es 11 y por lo tanto el máximo grado en color 2 es 23, que es uno menos que el máximo posible, en vistas del hecho de que $R(4, 5) = 25$. De manera similar, el mínimo grado en color 2 es 18 y por lo tanto el máximo grado en color 1 es 16, el cual es también uno menos que el máximo posible, pues $R(3, 6) = 18$.

Hay dos coloreos que son adyacentes al coloreo dado arriba. Pueden ser obtenidos del original recoloreando la arista 1-3 y recoloreando las arista 1-3 y 29-33. En ambos casos, el coloreo resultante tiene un grupo de automorfismos de orden 2. En adición a estos 3 coloreos, otro grupo de 34 buenos coloreos fue hallado revirtiendo los colores de entre 20 y 25 aristas. Este grupo de 34 coloreos fue originalmente hallado por un programa que

busca sistemáticamente nuevos coloreos cambiando los colores de pequeños grupos de aristas. Algunos de estos coloreos fueron hallados también por el método B. El programa del método B que encontró esos coloreos llegó a una conclusión exitosa (buscando $(4, 6)$ –coloreos de K_{35}) cerca de 1000 veces. En casi todos los casos el coloreo hallado era uno de los 3 coloreos mencionados en el párrafo anterior. Sólo 5 veces se halló un coloreo en el grupo de 34.

Cotas inferiores para $R(6,12)$, $R(6,14)$ y $R(6,15)$ [8]

Para un número dado p , sea $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Se elije un conjunto $S \subset \{1, 2, \dots, (p-1)/2\}$. Sea G el grafo cuyos nodos son el conjunto $V_G = \mathbb{Z}_p$ y una arista se define de la siguiente manera: dos nodos x e y se conectan si y solo si $\min\{|x-y|, p-|x-y|\}$ pertenece a S . El grafo G es llamado el grafo cíclico de orden p con respecto al conjunto de parámetros S y se lo denota $G_p(S)$. Se construyen 3 grafos cíclicos de orden primo de la siguiente manera:

- 1) $p_1 = 223$ y el conjunto de parámetros del grafo G
 $S_1 = \{1, 2, 4, 7, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 41, 49, 52, 54, 56, 59, 60, 64, 66, 68, 82, 87, 91, 95, 98, 103, 104, 105, 108, 111\}$
- 2) $p_2 = 257$ y
 $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 24, 27, 28, 32, 33, 36, 42, 44, 48, 56, 62, 65, 66, 67, 71, 81, 82, 89, 90, 96, 99, 102, 103, 106, 108, 112, 113, 118, 125, 127, 128\}$
- 3) $p_3 = 337$ y
 $S_3 = \{1, 5, 6, 7, 8, 11, 17, 25, 27, 30, 35, 36, 39, 40, 42, 43, 47, 48, 49, 52, 55, 56, 57, 58, 59, 62, 64, 66, 69, 76, 77, 79, 85, 88, 92, 97, 102, 103, 111, 119, 121, 122, 123, 125, 127, 135, 136, 137, 142, 146, 148, 150, 157, 159, 162, 164\}$

Se verifico por computadora que: el grafo cíclico $G_{223}(S_1)$ en 1) no contiene ni una clique de tamaño 6 ni un conjunto independiente de tamaño 12, el grafo cíclico $G_{257}(S_2)$ en 2) no contiene ni una clique de tamaño 6 ni un conjunto independiente de tamaño 14 y que el grafo cíclico $G_{337}(S_3)$ en 3) no contiene ni una clique de tamaño 6 ni un conjunto independiente de tamaño 15. Lo cual nos da los siguientes resultados:

$$R(6, 12) \geq 224, R(6, 14) \geq 258 \text{ y } R(6, 15) \geq 338.$$

Cota superior para $R(5, 5)$ [11]

Para dos grafos J y G , se define $s(J, G)$ como el número de subgrafos inducidos de G que son isomorfos a J . Se define $s(K_0, G) = 1$ (donde K_0 es el grafo sin nodos) para todo G y $s(J, K_0) = 0$ para todo J distinto de K_0 .

Teorema 1:

- a) Para cada grafo no conexo J existe una secuencia de grafos conexos J_1, J_2, \dots, J_k y un polinomio p_J con coeficientes racionales tal que $s(J, G) = p_J(s(J_1, G), s(J_2, G), \dots, s(J_k, G))$ para todo grafo G .
- b) No existe una secuencia de grafos conexos isomorfos J_1, J_2, \dots, J_k y un polinomio no nulo tales que $p(s(J_1, G), s(J_2, G), \dots, s(J_k, G)) = 0$ para todo grafo G .

Para $m \geq 0$ y $0 \leq j \leq m$ se definen los $T_{m,j}$ grafos de la siguiente manera: para $m = 0$ se define $T_{0,0} = K_1$. Para $m > 0$ $T_{m,0}$ es el grafo no conexo $K_m \cup K_1$, y para $j \geq 0$, $T_{m,j+1}$ se forma añadiendo una arista a $T_{m,j}$. Esto define $T_{m,j}$ de manera única salvo isomorfismos y $T_{m,m} = K_{m+1}$.

Lema 1: Sea G un grafo con n nodos. Entonces para $m \geq 0$,

$$(n - m)s(K_m, G) = \sum_{j=0}^m \beta_{m,j} s(T_{m,j}, G),$$

$$\text{Donde } \beta_{m,j} = \begin{cases} m+1 & \text{si } j = m \\ 2 & \text{si } j = m-1 \\ 1 & \text{si } 0 \leq j \leq m-2 \end{cases}$$

Dem:

Como $n = s(K_1, G)$ y $T_{m,0}$ es el único grafo desconexo que aparece esta es una instancia especial del teorema 1.

Los casos $m = 0, 1$ son fáciles de chequear, así que podemos asumir $m \geq 2$. Ambos lados de la ecuación cuentan el número de subgrafos de la forma $K_m \cup K_1$, inducidos o no. El lado izquierdo es obvio en este contexto. Para el lado derecho, consideremos el número j de aristas que unen K_m con K_1 . Esas $m+1$ aristas inducen un subgrafo $T_{m,j}$. Finalmente, notemos que cada subgrafo $T_{m,j}$ puede aparecer en $s(K_m, T_{j,m}) = \beta_{m,j}$ de tal manera.

Para $m = 2$, el lema se convierte en

$$(n - 2)s(K_2, G) = s(T_{2,0}, G) + 2s(T_{2,1}, G) + 3s(K_3, G),$$

Que es la Identidad de Goodman. \square

Lema 2: Sean J y G grafos.

- a) Si J tiene $k \geq 1$ nodos de grado $|VJ| - 1$, entonces
 $ks(J, G) = \sum_{v \in VG} s(J', G_v^+)$, donde J' es el resultado de remover de J un nodo de grado $|VJ| - 1$.
- b) Si J tiene $k \geq 1$ nodos de grado 0, entonces

$$ks(J, G) = \sum_{v \in VG} s(J'', G_v^-),$$

Donde J'' es el resultado de remover de J un nodo de grado 0.

$$G_v^+ =$$

$$G[N_G(v, VG)], \quad G_v^- = G[VG - N_G(v, VG) - \{v\}]$$

Dem:

En el caso de (a) cada subgrafo isomorfo a J yace en $\{v\} \cup NG(v, VG)$ para exactamente k nodos v , de manera que los dos lados de la identidad cuentan subgrafos inducidos isomorfos a J con un nodo de grado máximo distinguido. El caso en (b) es similar. \square

Teorema 2: Para $m \geq 1$, cada grafo G satisface

$$\begin{aligned} \sum_{v \in VG} s(K_m, G_v^-) &= \sum_{v \in VG} \left(\binom{n}{m} - s(K_1, G_v^+) s(K_{m-1}, G_v^+) + (m-1) s(K_m, G_v^+) \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-2} \frac{(1 + \delta_{j, m-2}) j s(T_{m-1, j}, G_v^+)}{j+1} \end{aligned}$$

Donde $\delta_{i,j}$ es la función delta de Kronecker.

Dem:

El caso $m = 1$ se puede corroborar de manera directa, así que suponemos $m > 1$. Del lema 2, usando (b) para $j = 0$ y (a) para $j > 0$, obtenemos

$$s(T_m, G) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \delta_{m,1}} \sum_{v \in VG} s(K_m, G_v^-) & \text{para } j = 0 \\ \frac{1}{j + \delta_{j,m}} \sum_{v \in VG} s(T_{m-1, j-1}, G_v^+) & \text{para } 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Aplicando el lema 2 (a) para $J = K_m$ podemos sustituir en lema 1 para obtener

$$\frac{n-m}{m} \sum_{v \in VG} s(K_{m-1}, G_v^+) = \sum_{v \in VG} s(K_m, G_v^-) + \sum_{j=1}^m \frac{\beta_{m,j}}{1 + \delta_{j,m}} \sum_{v \in VG} s(T_{m-1, j-1}, G_v^+). \quad (2)$$

Todos los subgrafos que aparecen en el primer argumento de $s()$ en la ecuación anterior son conexos a excepción de $T_{m-1,0}$. Usando el lema 1 de nuevo, tenemos que

$$s(T_{m-1,0}, G_v^+) = \frac{1}{\beta_{m-1,0}} ((s(K_1, G_v^+) - m + 1) s(K_{m-1}, G_v^+) - \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{m-1,j} s(T_{m-1,j}, G_v^+)).$$

Reemplazando en (2) y juntando los términos similares obtenemos la igualdad deseada. \square

Consideremos la identidad de la forma: $\sum_{v \in V_G} p(G_v^+, G_v^-) = 0$. Donde p es un polinomio de la formas $s(J, G_v^+)$ y $s(J, G_v^-)$. para alguna familia de grafos conexos J . Los coeficientes pueden ser funciones arbitrarias de $n = s(K_1, G)$. La restricción a J conexos se justifica por el teorema 2.1. De ahora en adelante no utilizaremos más el término $s(K_1, G - v)$ ya que puede ser reemplazado por $n - 1 - s(K_1, G + v)$.

Definimos el grado de p como el máximo número total de nodos que aparecen (como el primer argumento de s) en un término de p . El experimento consistió en tomar un número grande de grafos aleatorios del mismo orden, y contar los números $s(J, G + v)$ y $s(J, G - v)$ para cada nodo v y subgrafo pequeño conexo J . Luego se formó una matriz cuyos valores son los posibles términos de p , hasta cierto grado fijo con una fila por grafo y una columna por término. El rango de esta matriz y relaciones lineales entre columnas nos llevan a identidades que satisface el conjunto de grafos elegidos. En particular, utilizando la independencia lineal se puede probar la no existencia de tipos particulares de identidad para esos grafos y por lo tanto, para todos los grafos.

Por ejemplo, se estableció:

Lema 2.3: Las únicas identidades de grado a lo sumo 6, en las cuales p se puede separar como $p(G + v, G - v) = p_1(G + v) + p_2(G - v)$, son aquellas del teorema 2.2 y sus combinaciones lineales.

Si p no se separa como en el lema anterior, se cree que hay más identidades.

El teorema que demuestra que $R(4, 5) = 25$ implica que $R(5, 5) \leq 50$. Más aún, se deduce del mismo que cualquier $(5, 5, 49)$ –grafo G debe ser regular de grado 24, con cada $G + v$ un $(4, 5, 24)$ –grafo y cada $G - v$ el complemento de un $(4, 5, 24)$ –grafo.

Aplicando el caso $m = 2$ del teorema 2.2, hallamos que

$$\sum_{v \in V_G} s(K_2, G - v) = 588 + \sum_{v \in V_G} s(K_2, G + v).$$

Como también se tiene que $s(K_2, G - v) = \binom{24}{2} - s(K_2, \overline{G + v})$, tenemos que

$$\sum_{v \in V_G} s(K_2, G + v) + s(K_2, \overline{G + v}) = 12936.$$

Sin embargo, de la demostración de $R(4, 5) = 25$ se sabe que los $(4, 5, 24)$ –grafos tienen a lo sumo 132 aristas y que no hay grafos de esa forma cuyo grado máximo sea mayor a 11. Esto deja solamente grafos regulares de grado 11, lo cual nos lleva al siguiente lema:

Lema 3.1: Sea G un $(5, 5, 49)$ –grafo. Entonces, para cada nodo v , $G + v$ y $\overline{G + v}$ son $(4, 5, 24, 132)$ –grafos que son regulares de grado 11.

Vamos a hallar todos los $(4, 5, 24, 132)$ –grafos. Los siguientes grafos H_1 y H_2 fueron hallados por Thomason () bajo las condiciones de regularidad y cantidad constante de triángulos en cada arista.

H_1	H_2
$\begin{bmatrix} 010010001001 & 010011111001 \\ 101001000100 & 101001111100 \\ 010100100010 & 010100111110 \\ 001010010001 & 001010011111 \\ 100101001000 & 100101001111 \\ 010010100100 & 110010100111 \\ 001001010010 & 111001010011 \\ 000100101001 & 111100101001 \\ 100010010100 & 111100101000 \\ 010001001010 & 011111001010 \\ 001000100101 & 001111001011 \\ 100100010010 & 100111100101 \\ 010011111001 & 000011011000 \\ 101001111100 & 000001101100 \\ 010100111110 & 000000110110 \\ 001010011111 & 000000011011 \\ 100101001111 & 100000001101 \\ 110010100111 & 110000000110 \\ 111001010011 & 011000000011 \\ 111100101001 & 101100000001 \\ 111110010100 & 110110000000 \\ 011111001010 & 011011000000 \\ 001111100101 & 001101100000 \\ 100111110010 & 000110110000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 011010001011 & 100011000101 \\ 101101000101 & 110001100010 \\ 110110100010 & 011000110001 \\ 011011010001 & 101100011000 \\ 101101101000 & 010110001100 \\ 010110110100 & 001011000110 \\ 001011011010 & 000101100011 \\ 000101101101 & 100010110001 \\ 100010110110 & 110001011000 \\ 010001011011 & 011000101100 \\ 101000101101 & 001100010110 \\ 110100010110 & 000110001011 \\ 110100011000 & 011010001011 \\ 011010001100 & 101101000101 \\ 001101000110 & 110110100010 \\ 000110100011 & 011011010001 \\ 100011010001 & 101101101000 \\ 110001101000 & 010110110100 \\ 011000110100 & 001011011010 \\ 001100011010 & 000101101101 \\ 000110001101 & 100010110110 \\ 100011000110 & 010001011011 \\ 010001100011 & 101000101101 \\ 101000110001 & 110100010110 \end{bmatrix}$

Matrices de adyacencia de H_1 y H_2

De ahora en más, H será un $(4, 5, 24, 132)$ –grafo. Como H es 11-regular se puede ver que $s(K_2, H - v) = s(K_2, H + v) + 11$ para cada nodo v . Por lo tanto se puede hallar H por el proceso de “pegado” entre algún X en $R(3, 15, 11, e)$ y un Y en $R(4, 4, 12, e + 11)$ para algún e . El número de posibilidades se puede observar en la siguiente tabla:

e	$ R(3, 5, 11, e) $	$ R(4, 4, 12, e + 11) $
15	1	8
16	6	177
17	19	1906
18	31	13332
19	30	58131
20	13	163757
21	4	302088
22	1	370368

El teorema 2.2 nos ayudará a reducir posibilidades.

Lema 3.2: Para algún v , $s(K_2, H + v) \geq 19$.

Dem:

Para $15 \leq e \leq 18$, el lado derecho del teorema 2.2 es a lo sumo 9 para cada grafo en $R(3, 5, 11, e)$, pero el lado izquierdo es por lo menos 10 para cada grafo en $R(4, 4, 12, e + 11)$. Por lo tanto, no hay combinación posible de estos grafos que pueda satisfacer la identidad.

Dado este teorema, podemos construir todos los grafos de $R(4, 5, 24, 132)$ usando los métodos utilizados en $R(4, 5) = 25$, pero hay muchos más casos que procesar y por lo tanto más dificultad computacional. Así que se hace uso de la regularidad para mejorar la eficiencia de la búsqueda.

En $R(4, 5) = 25$ se utilizaron 4 reglas de colapso. Si tenemos restricciones en el tamaño de los conos factibles se pueden agregar más reglas de colapso.

Se definen 2 funciones $K, L: 2^{V^T} \rightarrow 2^{V^Y}$ de manera que $W \subset V^Y$,

$$K(W) = \cap \{ \{x, y\} \mid x, y \in W \text{ y } \{x, y\} \in EH \}$$

$$L(W) = \cap \{ \{w, x, y, z\} \mid w, x, y, z \in W \text{ son distintos y } \{w, x\}, \{y, z\} \in EH \}$$

Con la aceptación de que el valor de intersección es V^Y si no tiene argumentos.

Supongamos que para cada u en VX , C_u se requiere que satisfaga $l_u \leq |C_u| \leq h_u$. Sea el intervalo correspondiente $I_u = [B_u, T_u]$. Definimos las siguientes reglas:

- (a) Supongamos u en VX .
 Si $|B_u| > h_u$, entonces FALLA.
 Si $|B_u| = h_u$, entonces $T_u = B_u$.
- (b) Supongamos que u está en VX .
 Si $|T_u| < l_u$, entonces FALLA.
 Si $|T_u| = l_u$, entonces $B_u = T_u$.
- (c) Supongamos $\{u, v\}$ está en EX y $|T_u| = l_u + 1$
 Si $K(B_v \cap T_u) = \emptyset$, entonces FALLA
 Sino $B_u = B_u \cup (T_u - K(B_v \cap T_u))$
- (d) Supongamos que $\{u, v\}$ está en EX , $|T_u| = l_u + 1$ y $|T_v| = l_v + 1$.
 Si $|L(T_u \cap T_v)| \leq 1$, entonces FALLA
 Sino $B_u = B_u \cup (T_u - L(T_u \cap T_v))$

Lema 3.3: Las reglas (a)-(d) son reglas de colapso válidas.

Dem:

Las reglas (a) y (b) salen de la aplicación de las restricciones de tamaño. \square

Supongamos que $\{x, y\}$ está en EY , x, y , están en $B_v \cap T_u$ y $|T_u| = l_u + 1$. Nos puede ser que x, y estén en C_u porque entonces $\{u, v, x, y\}$ sería una clique, por lo tanto debe ser que alguno de los dos x o y no está en C_u y todo el resto de T_u es igual a C_u (o si no tendríamos que $|C_u| < l_u$).

Extendiendo este mismo argumento vemos que exactamente un elemento de $K(B_v \cap T_u)$ debe ser evitado y el resto de T_u incluido, lo cual es la regla (c).

Supongamos que $\{w, x\}, \{z, y\}$ están en EY , donde w, x, z, y son distintos elementos de $T_u \cap T_v$, $|T_u| = l_u + 1$ y $|T_v| = l_v + 1$. Al igual que antes, exactamente uno de w y x y exactamente uno de z e y no están en $C_u \cap C_v$. Las restricciones en cuanto al tamaño de T_u y T_v implican que cada C_u y C_v tiene uno menos de $\{w, x, z, y\}$ (pero no el mismo) de manera que deben igualar al resto de T_u y T_v respectivamente. Aplicando esta misma idea simultáneamente a todos los pares de aristas $\{w, x\}, \{y, z\}$ obtenemos la regla (d).

Teorema 3.1: Los únicos dos $(4, 5, 24, 132)$ –grafos son H_1 y H_2 .

Dem:

Se obtiene de la implementación de lo descrito anteriormente. \square

Teorema 3.2: $R(5, 5) \leq 49$.

Dem:

Si existiera un $(5, 5, 49)$ –grafo, entonces por lema 3.1 y teorema 3.1 sabríamos que $G + v$ y $G - v$ son uno de H_1 y H_2 . Consideramos la identidad del teorema 2.2 aplicada a G cuando $m = 4$.

Las cuentas relevantes de subgrafos son las siguientes:

$$s(K_2, H_1) = s(K_2, H_2) = 132,$$

$$s(K_3, H_1) = s(K_3, H_2) = 176,$$

$$s(K_4, H_1) = s(K_4, H_2) = 0,$$

$$s(T_{3,1}, H_1) = s(T_{3,1}, H_2) = 1584,$$

$$s(T_{3,2}, H_1) = s(T_{3,1}, H_2) = 792,$$

$$s(K_4, \overline{H_1}) = 144,$$

$$s(K_4, \overline{H_2}) = 138.$$

Los términos en el lado derecho de la identidad son 132 para ambos H_1 y H_2 , pero los términos en el lado izquierdo son 144 y 138 para los dos posibles subgrafos. Luego, la identidad no puede ser satisfecha, lo cual nos lleva a un absurdo. Como el absurdo provino

de suponer que existía un $(5, 5, 49)$ –grafo, obtenemos que no puede existir uno, lo cual nos indica que $R(5, 5) \leq 49$. \square

Conclusiones

Una de las principales conclusiones que se pueden extraer sobre la teoría de Ramsey es que el desorden absoluto no existe. La teoría de Ramsey afirma que, en sistemas suficientemente grandes siempre existen subsistemas con una estructura ordenada. Según la misma, si observamos la totalidad de estrellas del cielo nocturno siempre podremos seleccionar un conjunto de las mismas para formar un triángulo, un cuadrilátero o cualquier figura de nuestra elección, como un paraguas o un león.

A lo largo de esta tesis hemos dado una introducción a los números de Ramsey aplicados a la teoría de grafos, se han expuesto ciertos resultados teóricos de utilidad y hemos visto en detalle las demostraciones de todos los números exactos conocidos hasta el momento, así como las demostraciones de algunas cotas seleccionadas para ilustrar los métodos más comúnmente utilizados para el cálculo de las mismas.

Como hemos visto, $R(n, m) \leq r$ si para cada grafo G de r nodos, o existe una n –clique o un m –conjunto independiente.

Básicamente los métodos para obtener cotas superiores son de desarrollo teórico directo, haciendo uso de la cota general y de ciertos resultados teóricos de grafos, en el caso de números lo suficientemente pequeños.

En cambio se suelen utilizar métodos computacionales cuando los números son más grandes. En este caso, una idea que se repite es la de ver que el conjunto de los (n, m, r) –grafos, es decir aquellos grafos de r nodos que no poseen una clique de tamaño n y cuyo menor conjunto independiente no puede ser de tamaño m o menor, es vacío, lo que nos indicaría que dado un grafo de r nodos, el mismo siempre posee o una n –clique o un m –conjunto independiente, con lo cual el mínimo número de nodos que debe tener un grafo para que o contenga una n –clique o un m –conjunto independiente, es decir $R(n, m)$, debe ser menor o igual que r . De todas maneras, las demostraciones normalmente no dan una receta o procedimiento general para hallar los resultados. Además, a medida que aumentamos los números, la complejidad de las soluciones crece de manera sorprendente. De hecho, Paul Erdős dijo que suponiendo que los alienígenas invadieran la tierra y amenazaran con destruirla si en el curso de un año los seres humanos no hallaran el número de Ramsey $R(5,5)$ podríamos poner a trabajar a las mejores mentes y las computadoras más rápidas y obtener el número a tiempo, pero que si nos exigieran el número $R(6,6)$ deberíamos atacarlos de manera preventiva.

Por otro lado, vimos que $R(n, m) > r$ si existe un grafo G que no incluye una n –clique y tampoco un m –conjunto independiente.

Para las cotas inferiores siempre es necesario exhibir un grafo de $R(n, m) - 1$ nodos que no posea ni una clique de tamaño n ni un conjunto independiente de tamaño m , lo que indicaría que $R(n, m)$ debe ser mayor a $R(n, m) - 1$. Dichos grafos contraejemplo pueden generarse intuitivamente en el caso de los valores pequeños, y mediante la definición de grafos cíclicos o utilizando métodos computacionales en el caso de números más grandes. Hemos visto también que es posible utilizar metaheurísticas para la generación de estos grafos.

Actualmente, matemáticos como Exoo, Radziszowski, Nesetril, Graham o Soifer, entre otros, se encuentran trabajando en la realización de más cotas superiores e inferiores. Hay una investigación dinámica titulada “*Small Ramsey numbers*” en el *Electronic Journal of Combinatorics*, donde los últimos adelantos sobre cotas son publicados periódicamente.

Por el momento el principal problema que se encuentra abierto es el de hallar el valor exacto de $R(3, 10)$, acotado inferiormente por 40 y superiormente por 43 por lo que se sabe hasta el momento, que es el primer caso abierto de números de la forma $R(3, n)$. Soifer cree que el valor verdadero será 40. Según él, para poder determinar el mayor $(3, 10)$ –grafo, se necesita saber más sobre los $(3, 9, n \leq 35)$ –grafos, lo que a su vez requiere conocimiento sobre los $(3, 8, n \leq 22)$ –grafos, problemas que también se encuentran abiertos.

De ser hallados, los números de Ramsey podrían poseer una variedad de aplicaciones, en campos tales como teoría de la comunicación, diseño de redes, recuperación de la información o teoría de decisiones.

Dentro del campo de la teoría de la comunicación, por ejemplo, pueden crearse ‘grafos de confusión’, donde sus nodos son elementos de un alfabeto de transmisión y existe una arista entre dos elementos si y solo si al enviar un mensaje los dos elementos pueden ser recibidos como el mismo. El problema consiste en conseguir un conjunto de señales, de mayor tamaño posible, que no sean confundibles entre si para evitar que haya errores en la recepción de un mensaje, lo cual corresponde a un conjunto independiente del grafo de confusión. Para hallar la solución pueden utilizarse números de Ramsey. [15]

Otro ejemplo, en este caso dentro del área de diseño de redes, es el siguiente: podemos tomar un grafo completo donde los nodos representen equipos de comunicación unidos por líneas de comunicación (aristas). En algunas aplicaciones se toman pares de nodos y se quiere garantizar que en el caso de que falle alguna de las dos líneas siempre haya por lo menos una línea que una todos los pares de vértices. Para hallar la solución son útiles los números de Ramsey. [15]

Estos son sólo algunos casos en los cuáles los números de Ramsey serían de mucha utilidad para la resolución de problemas de la vida cotidiana. Es por esto que la investigación sobre los mismos dentro del marco de teoría de grafos sigue vigente y de hecho, en los últimos años ha habido una cantidad considerable de resultados.

Bibliografía

- [1] Balakrishnan, V.K. "Theory and problems of combinatorics". Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1995, p. 22-25.
- [2] Cariolaro, D. "On the Ramsey Number $R(3, 6)$ ". MSC 2000, 05C55. 2006.
- [3] Exoo, G. "On the Ramsey Number $R(4, 6)$ ". The Electronic Journal of Combinatorics 19, 2012, # P66.
- [4] Gowers, T. "The Princeton Companion to Mathematics". Princeton University Press, 2008, p.562.
- [5] Graham, R.L. "Rudiments of Ramsey Theory". Regional Conference Series in Mathematics. Number 45. 1979.
- [6] Graver, J. E. and Yackel, J. "Some Graph Theoretic Results Associated with Ramsey's Theorem". Journal of Combinatorial Theory 4, 125-175. 1968.
- [7] Grinstead, C. M. and Roberts, S. M. "On the Ramsey Numbers $R(3, 8)$ and $R(3, 9)$ ". Journal of Combinatorial Theory, Series B 33, 27-51. 1982.
- [8] Haipeng, L. Wenlong, S. and Qiao, L. "New lower bounds of classical Ramsey numbers $R(6, 12)$, $R(6, 14)$ and $R(6, 15)$ ". Chinese Science Bulletin. Vol 43. Nro. 10. Mayo 1998.
- [9] Kalbfleish, J.G. "Construction of special Edge-chromatic graphs", Canadian Math Bulletin 8 (1965) 575-584.
- [10] Landman, B. M. and Robertson, A. "Ramsey Theory on the integers". Student Mathematical Library. Volume 24. 2004.
- [11] McKay, B. and Radziszowski, S. "Subgraph Counting Identities and Ramsey Numbers".
- [12] McKay, B. D. and Ke Min, Z. "The value of the Ramsey Number $R(3, 8)$ ". Journal of Graph Theory, Vol. 16, Nro 1, 99-105. 1992.
- [13] McKay, B. D. and Radziszowski, S. " $R(4, 5)=25$ ". Journal of Graph Theory 19, p. 309-322. 1995.
- [14] Puddu, S. "Apuntes de Combinatoria", Apuntes de la materia dictada el segundo cuatrimestre de 2011 en el FCEN.
- [15] Roberts, F.S. "Applications of Ramsey Theory". Discrete Applied Mathematics 9 (1984) 251-261.

[16] Soifer, A. "Ramsey Theory. Yesterday, today and tomorrow." Progress in Mathematics, 285. Birkhäuser. 2011.

[17] Kery, G., "Ramsey egy graftelmaleti", Mat. Lapok, 15, 1964, 204-224.

Apéndice A: Algoritmos

Para poder comprobar la no existencia de ciertos K_n dentro de ciertos grafos, hemos usado estos programas en Matlab, que, dada una matriz de adyacencia determinan, dando como resultado 1 si la respuesta es sí y 0 si la respuesta es no, si un grafo posee o no alguna de estas cliques de tamaño n .

A continuación se pueden ver las matrices de adyacencia para las cuales los programas fueron corridos.

Matrices de adyacencia:

Para $R(3, 3)$:

$M1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1; \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1; \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$

$M2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1; \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1; \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$

Para $R(3,4)$:

$M3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1; \\ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1; \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1; \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$

$M4 = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1; \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1; \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0; \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1; \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1; \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$

Apéndice A: Algoritmos

Para $R(3, 5)$:

```
M6=[0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0;  
    0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0;  
    0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1;  
    1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1;  
    1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0;  
    0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1;  
    1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1;  
    1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0;  
    0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1;  
    1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1;  
    1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0;  
    0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0;  
    0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0]
```

```
M5=[0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1;  
    1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1;  
    1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0;  
    0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0;  
    0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1;  
    1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0;  
    0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0;  
    0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1;  
    1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0;  
    0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0;  
    0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1;  
    1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1;  
    1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0]
```

Para $R(3, 6)$:

```
M7=[0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0;  
    1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0;  
    0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0;  
    1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0;  
    0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0;  
    0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0;  
    1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0;  
    0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0;  
    0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0;  
    0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1;  
    1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0;  
    0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1;  
    0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0;  
    0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1;  
    0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0;  
    1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1;  
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0]
```

Apéndice A: Algoritmos

```
M8=[0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1;  
    0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1;  
    1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1;  
    0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1;  
    1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1;  
    1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1;  
    1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1;  
    1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1;  
    1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1;  
    1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 0;  
    0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1;  
    1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0;  
    1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1;  
    1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0;  
    1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1;  
    0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0;  
    1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0]
```

Para $R(4,4)$:

```
M9=[0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1;  
    1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1;  
    1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0;  
    0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1;  
    1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0;  
    0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0;  
    0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0;  
    0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1;  
    1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1;  
    1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0;  
    0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0;  
    0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0;  
    0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1;  
    1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0;  
    0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1;  
    1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1;  
    1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0]
```

```
M10=[0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0;  
    0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0;  
    0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1;  
    1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0;  
    0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1;  
    1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1;  
    1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1;  
    1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0;  
    0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0;  
    0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1;  
    1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1;  
    1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1;  
    1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0;  
    0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1;  
    1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0;  
    0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0;  
    0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0]
```

Algoritmos:

Para determinar la existencia o no de triángulos:

```
function triangulos(M)
n=length(M);
R=0;
for i=1:n
    for j=1:n
        if M(i,j)==1
            for k=j+1:n
                if M(i,k)==1
                    if M(j,k)==1
                        R=1;
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
R
```

Para determinar la existencia o no de algún K_5 :

```
function k5(M)
n=length(M);
R=0;
for i=1:n
    for j=i+1:n
        if M(i,j)==1
            for k=j+1:n
                if M(i,k)==1
                    for l=k+1:n
                        if M(i,l)==1
                            for s=l+1:n
                                if M(i,s)==1
                                    if M(j,k)==1
                                        if M(k,l)==1
                                            if M(l,s)==1
                                                if M(j,l)==1
                                                    if M(j,s)==1
                                                        if M(k,s)==1
                                                            R=1;
                                                        end
                                                    end
                                                end
                                            end
                                        end
                                    end
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
R
```

Apéndice A: Algoritmos

Para determinar la existencia o no de algún K_6 :

```
function k6(M)
n=length(M);
R=0;
for i=1:n
    for j=i+1:n
        if M(i,j)==1
            for k=j+1:n
                if M(i,k)==1
                    for l=k+1:n
                        if M(i,l)==1
                            for s=l+1:n
                                if M(i,s)==1
                                    for t=s+1:n
                                        if M(i,t)==1
                                            if M(j,k)==1
                                                if M(j,l)==1
                                                    if M(j,s)==1
                                                        if M(j,t)==1
                                                            if M(k,l)==1
                                                                if M(k,s)==1
                                                                    if M(k,t)==1
                                                                        if M(l,s)==1
                                                                            if M(l,t)==1
                                                                                if M(s,t)==1
                                                                                    R=1;
                                                                                end
                                                                            end
                                                                        end
                                                                    end
                                                                end
                                                            end
                                                        end
                                                    end
                                                end
                                            end
                                        end
                                    end
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
R
```

Apéndice B: Demostraciones de lemas de $R(3,7)$ [6]

Durante este apéndice vamos a asumir que un nodo p fijo de grado 6 en un $(3,7)$ –grafo de 23 nodos ha sido preferido. Denotamos los nodos de H_1 por a, b, c, d, e, f y los nodos de H_2 de acuerdo a su soporte. Por ejemplo, un 1-nodo sobre $\{b\}$ sería notado por $\langle b \rangle$ y un 2-nodo sobre $\{b, e\}$ sería notado por $\langle b, e \rangle$. Por la observación 2 luego de la Proposición 6, dos 1-nodos no pueden tener el mismo soporte, y dos 2-nodos y un 1-nodo no pueden ser soportados por un 2-conjunto de H_1 . En el caso de 2-nodos la única ambigüedad puede surgir en un caso del Lema 7. Finalmente ya que 3-nodos juegan un rol menor, no se generara confusión en referencia a este sistema.

Lema A: Sean x, y, z, w nodos distintos arbitrarios de H_1 y consideremos los siguientes patrones:

- (i) Si $\langle x \rangle, \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, z \rangle$ están en H_2 entonces hay una arista entre $\langle x \rangle$ y $\langle y, z \rangle$.
- (ii) Si $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, z \rangle$ están en H_2 entonces hay aristas entre $\langle x \rangle$ y $\langle y \rangle$, entre $\langle x \rangle$ y $\langle y, z \rangle$, y entre $\langle y \rangle$ y $\langle x, z \rangle$, de manera que se produce la configuración C3 de la proposición 7.
- (iii) $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle, \langle x, w \rangle, \langle y, w \rangle, \langle z, w \rangle$ no pueden ocurrir en H_2 .
- (iv) $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z, w \rangle, \langle x, z \rangle, \langle x, w \rangle, \langle y, z \rangle, \langle y, w \rangle, \langle x, y \rangle$ no pueden ocurrir en H_2 .
- (v) $\langle x \rangle, \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle x, y, z \rangle$ no pueden ocurrir en H_2 .

Dem:

- (i) Este es la única arista que no puede ocurrir entre esos nodos en H_2 sin formar un triángulo pero como esos 4 nodos tienen un 3-conjunto de soporte debe haber por lo menos una arista para evitar la formación de un 4-conjunto independiente, luego el eje $\langle x \rangle - \langle y, z \rangle$.

- (ii) En este caso el patrón (i) aparece dos veces:

$$\langle x \rangle, \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, z \rangle$$

e

$$\langle y \rangle, \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, z \rangle,$$

Ya que las aristas $\langle x \rangle - \langle y, z \rangle$ e $\langle y \rangle - \langle x, z \rangle$ y finalmente la arista $\langle x \rangle - \langle y \rangle$ es requerida (ver observación 2 luego de la proposición 6).

- (iii) Aquí el patrón (ii) aparece dos veces:

$$\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle x, y \rangle, \langle x, w \rangle, \langle y, w \rangle$$

e

$$\langle y \rangle, \langle z \rangle, \langle y, z \rangle, \langle y, w \rangle, \langle z, w \rangle,$$

De manera que, entre otros, las aristas $\langle y \rangle - \langle x, w \rangle$ e $\langle y \rangle - \langle z, w \rangle$ son requeridas. Entonces $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle x, w \rangle, \langle y, z, w \rangle$ son un 4-conjunto independiente sobre $\{x, z, w\}$ (cada uno tiene una arista sobre $\langle y \rangle$).

(iv) El patrón (i) aparece dos veces como:

$$\langle x \rangle, \langle x, z \rangle, \langle x, w \rangle, \langle z, w \rangle$$

e

$$\langle y \rangle, \langle y, z \rangle, \langle y, w \rangle, \langle z, w \rangle,$$

De manera tal que las aristas $\langle x \rangle - \langle z, w \rangle$ e $\langle y \rangle - \langle z, w \rangle$ son requeridas. Entonces la arista $\langle x \rangle - \langle y \rangle$, que es necesaria debido a $\langle x, y \rangle$, completa un triángulo.

(v) $\langle x \rangle, \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle x, y, z \rangle$ forman un 4-conjunto independiente sobre $\{x, y, z\}$ y no es posible que existan aristas entre ellos. \square

Lema 7: $r_3(0) \neq 2$.

Dem:

Asumimos que $r_3(0) = 2$, y por lo tanto que $r_1(0) = 4$ y que $r_2(0) = 10$ (ver las ecuaciones (1) del lema 5). Sin pérdida de generalidad podemos llamar a los 1-nodos $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \langle d \rangle$. Consideramos primero el caso en el que $\{e, f\}$ soporta dos 2-nodos; llamémoslos $\langle e, f \rangle$ y $\langle e, f \rangle'$.

Tenemos que $\langle e, x \rangle$ y $\langle f, x \rangle$ son imposibles para $x = a, b, c, d$ ya que $\langle e, f \rangle, \langle e, f \rangle', \langle e, x \rangle, \langle f, x \rangle$ serían un 4-conjunto independiente con un 3-conjunto como soporte. Eso significa que por lo menos cuatro de los diez 2-nodos tienen soporte en $\{a, b, c, d\}$. Pero como cada 2-nodo con soporte $\{a, b, c, d\}$ requiere una 1-arista, una arista entre 1-nodos (ver observación 2 luego de la proposición 6), y como los cuatro 1-nodos pueden tener a lo sumo cuatro aristas entre ellos y eso sólo puede ocurrir en el caso en que formen un cuadrilátero, podemos asumir sin pérdida de generalidad $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle$, y por lo tanto las aristas correspondientes $\langle a \rangle - \langle b \rangle, \langle b \rangle - \langle c \rangle, \langle c \rangle - \langle d \rangle$ y $\langle d \rangle - \langle a \rangle$. Como tres 2-nodos de la forma $\langle e, x \rangle$ (para $x = a, b, c, d$) llevarían al patrón (iii) del lema A, vemos que entre los 2-nodos $\langle a, x \rangle, \langle b, x \rangle, \langle c, x \rangle$ y $\langle d, x \rangle$ (donde $x = e, f$), x debe tomar los valores e y f exactamente dos veces cada uno. Ahora observemos que cada nodo en H_1 tiene exactamente cuatro aristas hacia 1-nodos y 2-nodos en H_2 de

manera tal que los 3-nodos tengan un soporte disjunto. Pero cualquier 3-nodo con soporte $\{a, b, c, d\}$ (digamos $\langle a, b, c \rangle$) involucraría al patrón (v) ($\langle a, b \rangle, \langle b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, b, c \rangle$) y eso no es posible. Esto nos deja con $\langle a, b, e \rangle$ y $\langle c, d, f \rangle$ o con $\langle a, c, e \rangle$ y $\langle b, d, f \rangle$.

En la primera alternativa, para evitar el patrón (v) debemos tener $\langle a, f \rangle$ y $\langle b, f \rangle$, pero entonces $\langle a, f \rangle, \langle b, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle e, f \rangle'$ y $\langle a, b, e \rangle$ es un conjunto independiente de tamaño 5 con un 4-conjunto como soporte. La segunda alternativa lleva a $\langle a, c, e \rangle, \langle e, f \rangle, \langle e, f \rangle'$, $\langle a, x \rangle, \langle c, y \rangle$, todos sobre el conjunto $\{a, c, e, f\}$ y, si $x = y = e$ o $x = y = f$, entonces habría un 5-conjunto independiente, así que asumimos $\langle a, e \rangle$ y $\langle c, f \rangle$ y por simetría también $\langle b, e \rangle$ y $\langle d, f \rangle$. Sobre $\{a, c, e\}$ están $\langle a, c, e \rangle, \langle a \rangle, \langle c \rangle, \langle a, e \rangle$, de manera que la arista $\langle c \rangle - \langle a, e \rangle$, y sobre $\{a, b, e\}$ están $\langle a, b \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, e \rangle, \langle a \rangle, \langle b \rangle$ (que es el patrón (ii)), por lo tanto la arista $\langle b \rangle - \langle a, e \rangle$, que completa el triángulo $\langle b \rangle, \langle c \rangle, \langle a, e \rangle$.

Luego, todos los 2-nodos tienen un soporte distinto. Vamos a considerar los distintos casos de 2-nodos soportados sobre $\{a, b, c, d\}$. Como notamos arriba, como mucho cuatro 2-nodos tiene soporte en $\{a, b, c, d\}$, comenzamos con:

Caso 1: Cuatro 2-nodos tienen soporte en $\{a, b, c, d\}$.

Podemos asumir sin pérdida de generalidad $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle$. Ahora, como tenemos a lo sumo un 2-nodo sobre $\{e, f\}$ hay por lo menos cinco 2-nodos con una arista hacia $\{a, b, c, d\}$ y la otra arista hacia $\{e, f\}$. Esto nos lleva al patrón (iii) con cualquier asignación de soporte de esos 2-nodos.

Caso 2: Ningún 2-nodo con soporte en $\{a, b, c, d\}$.

Como pueden haber como mucho ocho 2-nodos con una arista hacia $\{a, b, c, d\}$ y una arista hacia $\{e, f\}$ y a lo sumo un 2-nodo sobre $\{e, f\}$ debe haber al menos un 2-nodo sobre $\{a, b, c, d\}$.

Caso 3: Exactamente un 2-nodo sobre $\{a, b, c, d\}$.

En este caso el patrón (iv) no se puede evitar (podemos asumir $\langle a, b \rangle$, y también debe tener $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle a, e \rangle, \langle a, f \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle e, f \rangle$).

Caso 4: Dos 2-nodos sobre $\{a, b, c, d\}$.

Si esos 2-nodos tienen soporte disjunto (digamos $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle$) podemos asignar los restantes ocho 2-nodos de dos maneras:

$\langle a, e \rangle, \langle a, f \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, f \rangle$ o igual sólo modificando $\langle e, f \rangle$ por $\langle d, f \rangle$.

En el primer caso el patrón (iv) aparece sobre $\{a, b, e, f\}$, por lo tanto esto no es posible. En el segundo caso, se ve el patrón (ii) cuatro veces (sobre $\{a, b, c\}, \{a, b, f\}, \{c, d, e\}$ y $\{c, d, f\}$) de manera que la configuración C_3 aparece por lo menos cuatro veces y por lo tanto $\epsilon \geq C_3 \geq 4$. Además, en este caso $r_2(1) = 2, r_3(2) = 0$ (las 1-aristas $\langle a \rangle - \langle b \rangle$ y $\langle c \rangle - \langle d \rangle$ son forzados) o tendríamos $r_2(1) = 3, r_3(2) = 2$ (sumando la arista $\langle b \rangle - \langle c \rangle$) o $r_2(1) = 4, r_3(2) = 4$ (sumando otra arista $\langle a \rangle - \langle d \rangle$). Pero $2r_2(1) - r_3(2) = 4$ y la ecuación (2) del lema 4 se convierte en $4 = 2r_2(1) - r_3(2) \geq 2 + z + \epsilon \geq 6$.

Este absurdo reduce este caso a la posibilidad de $\langle a, b \rangle$ y $\langle b, c \rangle$ como los dos 2-nodos; de todas formas el patrón (iii) no puede ser evitado, por lo tanto excluimos el caso 4.

Caso 5: Tres 2-nodos con soporte en $\{a, b, c, d\}$.

Podemos asumir $\langle a, b \rangle$ y $\langle c, d \rangle$ sin pérdida de generalidad. Ahora, si también tenemos $\langle b, d \rangle$ entonces $\langle a, e \rangle$ y $\langle a, f \rangle$ pueden ser asumidos. También, si $\langle e, f \rangle$ entonces el patrón (i) y por lo tanto la arista $\langle a \rangle - \langle e, f \rangle$ aparecen. Notemos que en esta situación la arista $\langle b \rangle - \langle e, f \rangle$ no es permitida. El 1-nodo $\langle b \rangle$ tiene tres aristas en H_2 ya asignadas, por lo tanto tiene 2 aristas más. Estas aristas pueden ser de dos formas, una arista de $\langle b \rangle$ podría ir a un 3-nodo o a un 2-nodo entre $\langle a, e \rangle, \langle a, f \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, e \rangle, \langle d, f \rangle$: una arista de la primera forma incrementa z en uno y una arista de la segunda forma forma la configuración C_2 , incrementando ϵ en uno. Por lo tanto, las dos aristas restantes de $\langle b \rangle$ implican $(z + \epsilon) \geq 2$. Como $r_3(2) = 3$ esta asignación es imposible.

Podemos entonces asumir $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle$ y para evitar el patrón (iii) $\langle a, e \rangle, \langle a, f \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, e \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle$ son necesarias. Ahora el patrón (ii) aparece dos veces (sobre $\{a, b, e\}$ y $\{c, d, f\}$) por lo tanto tenemos aristas $\langle a \rangle - \langle b, e \rangle, \langle b \rangle - \langle a, e \rangle, \langle c \rangle - \langle d, f \rangle, \langle d \rangle - \langle c, f \rangle$ lo que implica que $C_3 \geq 2$. Además, el patrón (i) aparece sobre $\{a, e, f\}$ y $\{d, e, f\}$, requiriendo aristas $\langle a \rangle - \langle e, f \rangle$ y $\langle d \rangle - \langle e, f \rangle$. Como ya hemos mostrado que $\epsilon \geq 2$, y como $r_3(2) = 2$, debemos tener $z = 0$ y $\epsilon = 2$, es decir que ningún 1-nodo puede tener aristas hacia 3-nodos y debemos evitar cualquier configuración que incremente ϵ .

Ahora consideramos de nuevo las dos aristas restantes de $\langle b \rangle$ en H_2 . Aristas hacia $\langle e, f \rangle$ o $\langle d, f \rangle$ formarían triángulos ($\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle$

$e, f > o < b >, < c >, < d, f >$) y aristas hacia $< a, f > o < c, f >$ completarían la configuración C_2 , lo que incrementaría ϵ ; mientras que aristas hacia $< a, b >, < b, e >, < b, c >$ no son permitidas (todas tienen a $\{b\}$ en común) la arista $< b > - < a, e >$ ya ha sido contada, así que la única posibilidad es tener aristas $< b > - < c, d >$ y $< b > - < d, e >$. Por simetría, también tenemos las aristas $< c > - < a, b >$ y $< c > - < a, f >$.

Ahora consideremos las dos aristas no asignadas de $< a >$. Aristas hacia $< a, b >, < a, e >, < a, f >, < c, d >$ formarían triángulos (recordemos que tenemos la arista $< a > - < b >$) mientras que la arista $< a > - < b, c >$ completaría la configuración C_4 e incrementaría ϵ . Con aristas ya asignadas nos queda (y es requerido que tengamos) aristas $< a > - < d, f >$ y $< a > - < c, f >$ y de nuevo por simetría $< d > - < a, e >$ y $< d > - < b, e >$. A continuación observamos que a cada nodo en H_1 le han sido asignadas cuatro aristas hacia 1-nodos y 2-nodos dejando los dos 3-nodos para tener soporte disjunto, y para evitar el patrón (v) esos 3-nodos son $< a, b, d >$ y $< c, e, f >$ o $< a, c, d >$ y $< b, e, f >$ o $< a, c, e >$ y $< b, d, f >$ o $< a, c, f >$ y $< b, d, e >$.

La primera elección es descartada considerando $\{c, e, f\}$ y notando que $< c >, < c, f >, < e, f >$ y $< c, e, f >$ no pueden tener aristas debido a la existencia de las aristas $< c > - < d >$ y $< d > - < e, f >$; por lo tanto esos cuatro nodos son independientes y están sobre un 3-conjunto.

Similarmente, el 3-conjunto $\{b, e, f\}$ muestra que la segunda opción es imposible. El 3-conjunto $\{a, c, e\}$ y las aristas $< b > - < a, e >$ y $< b > - < c >$ muestran que la tercera elección no es posible. Finalmente, los nodos soportados por $\{a, c, e, f\}$, y en particular $< a, c, f >, < a, f >, < c, f >, < e, f >, < a, e >$ por el momento no tienen aristas entre ellos por lo cual la arista $< a, e > - < c, f >$ es requerida (todas las demás aristas formarían un triángulo). Pero entonces esta arista y las aristas $< d > - < a, e >$ y $< d > - < c, f >$ forman un triángulo, lo cual es absurdo. Luego, hemos demostrado que todas las posibilidades en las cuales $r_3(2) = 0$ son imposibles. \square

Lema 8: $r_3(0) \neq 3$.

Dem:

Supongamos que $r_3(0) = 3$, entonces $r_2(0) = 8$ y $r_1(0) = 5$. Vamos a notar a los 1-nodos por $< a >, < b >, < c >, < d >, < e >$. Si 5 de los 2-nodos tienen a f en su soporte entonces los tres 2-nodos están soportados en $\{a, b, c, d, e\}$ y por lo tanto al menos dos de ellos tienen un punto en

común en su soporte; esto necesita la ocurrencia del patrón (iii). Puede haber entonces como mucho cuatro 2-nodos soportados en $\{a, b, c, d, e\}$.

Supongamos ahora que exactamente cuatro 2-nodos están sobre $\{a, b, c, d, e\}$. Hay solamente tres asignaciones de 2-nodos (con permutación de índices) que evitan el patrón (iii) y triángulos entre las aristas requeridas entre 1-nodos. Esas son $\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle a, f \rangle, \langle b, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle$, o la misma pero cambiando $\langle c, e \rangle$ por $\langle d, e \rangle$, o la misma que la primera pero cambiando $\langle a, c \rangle$ por $\langle a, b \rangle$ y $\langle c, e \rangle$ por $\langle d, e \rangle$. En todos los casos f esta en el soporte de sólo uno de los 3-nodos de manera que dos 3-nodos tienen soporte en $\{a, b, c, d, e\}$. En la primera asignación un 3-nodo con c pero no f en su soporte produciría el patrón (v) así que podemos asumir $\langle a, b, d \rangle$. Pero entonces $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle d \rangle$ y $\langle a, b, d \rangle$ son un conjunto independiente de tamaño 4 soportado por $\{a, b, d\}$ y no hay ninguna arista posible ($\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle d \rangle$ están unidos a $\langle c \rangle$ por aristas).

Supongamos entonces la segunda asignación de arriba. El patrón (ii) aparece sobre $\{d, e, f\}$ dando aristas $\langle d \rangle - \langle e, f \rangle$ y $\langle e \rangle - \langle d, f \rangle$. Como c esta en el soporte de tres 2-nodos y un 1-nodo debe estar en el soporte de un 3-nodo. $\langle c, e, f \rangle$ no es posible pues $\langle c \rangle, \langle e \rangle, \langle e, f \rangle, \langle c, e, f \rangle$ son independientes (las aristas $\langle c \rangle - \langle d \rangle$ y $\langle d \rangle - \langle e, f \rangle$ excluyendo la arista $\langle c \rangle - \langle e, f \rangle$). Las únicas posibilidades que evitan el patrón (v) son $\langle a, c, e \rangle$ y $\langle b, c, e \rangle$. Por simetría elegimos $\langle a, c, e \rangle$. b debe estar en el soporte de ambos 3-nodos remanentes. $\langle a, b, d \rangle$ produciría un 4-conjunto independiente sobre $\{a, b, d\}$ de manera que debemos tener $\langle a, b, e \rangle$ y $\langle b, d, f \rangle$ o $\langle a, b, f \rangle$ y $\langle b, d, e \rangle$.

Supongamos primero $\langle a, b, e \rangle$ y $\langle b, d, f \rangle$; entonces consideremos los nodos soportados por $\{b, d, f\}$. Deben estar las aristas $\langle b \rangle - \langle b, d \rangle$ y $\langle d \rangle - \langle b, f \rangle$ (la arista $\langle b \rangle - \langle d \rangle$ no puede ocurrir debido a $\langle c \rangle - \langle b \rangle$ y $\langle c \rangle - \langle d \rangle$). Entonces $\langle e \rangle, \langle a, f \rangle, \langle b, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle a, b, e \rangle$ están sobre $\{a, b, e, f\}$, requiriendo la arista $\langle e \rangle - \langle a, f \rangle$ (las aristas $\langle d \rangle - \langle e \rangle$ y $\langle d \rangle - \langle b, f \rangle$ excluyen a $\langle e \rangle - \langle b, f \rangle$). Ahora, los nodos sobre $\{a, d, f\}$, debido a la arista $\langle e \rangle - \langle a, f \rangle$ que excluye a $\langle d \rangle - \langle a, f \rangle$, requieren la arista $\langle a \rangle - \langle d, f \rangle$. Finalmente $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle e \rangle$ cada uno tiene una arista hacia $\langle d, f \rangle$ de manera que son independientes y con $\langle a, b, e \rangle$ forman un 4-conjunto independiente soportado por un 3-conjunto en H_1 .

Esto nos deja $\langle a, b, e \rangle, \langle a, b, f \rangle$ y $\langle b, d, e \rangle$ como nuestra elección de 3-nodos. Un argumento similar (pero más extenso) muestra la contradicción. Vamos a dar únicamente la lista de conjuntos a considerar y las aristas relevantes a ser forzadas; el orden en que

consideramos los conjuntos es importante ya que cada paso se basa en el anterior:

$\{a, c, e\}$ implica la arista $\langle e \rangle - \langle a, c \rangle$.

$\{a, c, d\}$ implica la arista $\langle a \rangle - \langle c, d \rangle$.

$\{a, b, f\}$ implica las aristas $\langle a \rangle - \langle b, f \rangle$ y $\langle b \rangle - \langle a, f \rangle$.

$\{b, d, e\}$ implica la arista $\langle b \rangle - \langle d, e \rangle$.

$\{a, c, d, e\}$ implica la arista $\langle a, c \rangle - \langle d, e \rangle$.

Notemos que entre $\langle c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, c, e \rangle, \langle d, e \rangle$ la única posible arista es $\langle a, c \rangle - \langle d, e \rangle$.

$\{a, b, c\}$ implica la arista $\langle a \rangle - \langle b, c \rangle$.

$\{a, c, e, f\}$ implica la arista $\langle e \rangle - \langle a, f \rangle$.

Notemos que $\langle e \rangle, \langle c \rangle, \langle a, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle a, c, e \rangle$ permiten únicamente la arista $\langle e \rangle - \langle a, f \rangle$. Más aún, $\{a, d, f\}$ implica la arista $\langle a \rangle - \langle d, f \rangle$. Ahora tenemos $\langle a \rangle$, con aristas asignadas hacia $\langle c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, f \rangle, \langle b, c \rangle$ y $\langle b, f \rangle$, por lo tanto son independientes pero su soporte es un 4-conjunto.

Finalmente, tenemos la asignación $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle a, f \rangle, \langle b, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle$ como los 2-nodos. El patrón (ii) aparece sobre $\{a, b, f\}$ y sobre $\{d, e, f\}$; por lo tanto tenemos aristas $\langle a \rangle - \langle b, f \rangle, \langle b \rangle - \langle a, f \rangle, \langle d \rangle - \langle e, f \rangle, \langle e \rangle - \langle d, f \rangle$ junto con las aristas $\langle a \rangle - \langle b \rangle, \langle b \rangle - \langle c \rangle, \langle c \rangle - \langle d \rangle$ y $\langle d \rangle - \langle e \rangle$. Entonces a, c y e están cada una en el soporte de dos 3-nodos mientras que b, d , y f están cada una en el soporte de un 3-nodo.

A continuación consideramos cinco 2-nodos soportados por $\{a, b, c, d, e\}$. Sólo pueden existir dos configuraciones que no formen triángulos entre los 1-nodos; y ellas son: $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, a \rangle$ y $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, b \rangle$. En la primera asignación para evitar el patrón (iii) debemos tener $\langle a, f \rangle, \langle b, f \rangle$ y $\langle d, f \rangle$. Entonces el patrón (ii) aparece sobre $\{a, b, f\}$ dando las aristas $\langle a \rangle - \langle b, f \rangle$ y $\langle b \rangle - \langle a, f \rangle$. Los 3-nodos $\langle x, y, f \rangle$ donde $\langle x, y \rangle$ es un 2-nodo nos darán el patrón (v). Además, $\langle a, c, f \rangle$ es imposible pues $\langle a, c, f \rangle, \langle a \rangle, \langle c \rangle, \langle a, f \rangle$ deben ser independientes ($\langle c \rangle - \langle a, f \rangle$ no es permitida y la arista $\langle b \rangle - \langle a, f \rangle$ excluye a las otras). Esto nos deja solamente con $\langle a, d, f \rangle, \langle b, d, f \rangle$ y $\langle c, e, f \rangle$ como posibles 3-nodos con f en su soporte y debemos tener dos de dichos 3-nodos. Por simetría podemos elegir $\langle a, d, f \rangle$. Entonces sobre $\langle a, d, f \rangle$ tenemos

$\langle a \rangle - \langle d, f \rangle y \langle d \rangle - \langle a, f \rangle$. Entonces si también tenemos $\langle b, d, f \rangle$ la arista $\langle b \rangle - \langle d, f \rangle$ completaría un triángulo, de manera que debemos tener $\langle c, d, f \rangle y \langle b, c, e \rangle$. Entonces sobre $\{b, d, f\}$ la arista $\langle d \rangle - \langle b, f \rangle$ se necesita y en consecuencia $\langle c, e, f \rangle, \langle b, c, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c \rangle$ son independientes sobre $\{b, c, e, f\}$.

Consideremos la segunda asignación dada arriba. Los tres 2-nodos con f en su soporte pueden ser asignados en una de tres maneras (sin contra permutaciones) para evitar el patrón (iii). Debemos tener $\langle a, f \rangle y$ entonces tenemos la elección entre $\langle b, f \rangle y \langle d, f \rangle$ o $\langle c, f \rangle y \langle e, f \rangle$ o $\langle c, f \rangle y \langle d, f \rangle$. En la primera asignación a, c, e y f están cada una en el soporte de dos 3-nodos y d en el soporte de uno. Como e y c están cada una en el soporte de dos de los tres 3-nodos que hay debemos tener $\langle c, e, x \rangle$. Ahora, $\langle c, e, d \rangle$ lleva al patrón (v) y $\langle a, c, e \rangle$ lleva a tener un 4-conjunto independiente sobre $\{a, c, e\}$.

Por lo tanto tenemos $\langle c, e, f \rangle y \langle a, c, f \rangle, \langle a, e, d \rangle$ o $\langle a, e, f \rangle, \langle a, c, d \rangle$. El patrón (ii) aparece sobre $\{a, b, f\}$ de manera que tenemos las aristas $\langle a \rangle - \langle b, f \rangle y \langle b \rangle - \langle a, f \rangle$, pero entonces $\langle a \rangle, \langle c \rangle, \langle a, f \rangle, \langle a, c, f \rangle$ forman un 4-conjunto independiente sobre $\{a, c, f\}$ ($\langle a \rangle, \langle e \rangle, \langle a, f \rangle, \langle a, e, f \rangle$ sobre $\{a, e, f\}$). Luego, la primera asignación es imposible.

En la segunda asignación, $\langle a, f \rangle, \langle c, f \rangle y \langle e, f \rangle$, tenemos un 3-nodo soportado por $\{a, b, c, d, e\}$. Como antes, $\langle a, c, e \rangle$ nos da un conjunto independiente de tamaño 4 sobre $\{a, c, e\}$, y ya que debemos evitar el patrón (v) las únicas opciones posibles son $\langle a, c, d \rangle$ o $\langle a, e, d \rangle$ o $\langle a, b, d \rangle$. Como las primeras dos son simétricas vamos a considerar sólo las últimas dos. Completaríamos la asignación usando $\langle a, e, d \rangle$ de sólo una manera posible para evitar el patrón (v), y esto es usando $\langle a, c, f \rangle y \langle b, d, f \rangle$. Similarmente, $\langle a, b, d \rangle$ puede ser completado con $\langle a, d, f \rangle y \langle c, e, f \rangle$. En el último caso $\langle a, b, d \rangle, \langle a, d, f \rangle, \langle a, f \rangle, \langle a, b \rangle, y \langle a \rangle$ dan un 5-conjunto independiente sobre $\{a, b, d, f\}$. Por lo tanto el único caso a considerar es el primero. De nuevo vamos a dar sólo la secuencia de pasos ya que el argumento es demasiado largo.

$\{a, e, f\}$ implica las aristas $\langle e \rangle - \langle a, f \rangle y \langle a \rangle - \langle e, f \rangle$.

$\{a, e, d\}$ implica la arista $\langle a \rangle - \langle e, d \rangle$.

$\{b, d, e\}$ implica la arista $\langle d \rangle - \langle b, e \rangle$.

$\{b, c, e\}$ implica la arista $\langle e \rangle - \langle b, c \rangle$.

$\{b, c, d\}$ implica la arista $\langle b \rangle - \langle c, d \rangle$.

$\{c, d, e\}$ implica la arista $\langle c \rangle - \langle d, e \rangle$.

$\{b, c, d, f\}$ implica la arista $\langle d \rangle - \langle c, f \rangle$.

$\{c, e, f\}$ implica la arista $\langle c \rangle - \langle e, f \rangle$.

Ahora el conjunto $\{b, d, e, f\}$ tiene $\langle b \rangle, \langle d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, f \rangle$ y $\langle b, d, f \rangle$ como un conjunto independiente de tamaño 5 sobre él.

Debemos considerar ahora el arreglo con $\langle a, f \rangle, \langle c, f \rangle$ y $\langle d, f \rangle$. De nuevo, un 3-nodo tiene soporte en $\{a, b, c, d, e\}$ y de nuevo para evitar $\langle a, c, e \rangle$ y la aparición del patrón (v) debemos tener $\langle a, b, d \rangle$ o $\langle a, c, d \rangle$ o $\langle a, d, e \rangle$. Cada uno fuerza el resto de la asignación. Como el patrón (ii) aparece en $\{c, d, f\}$ debemos tener aristas $\langle c \rangle - \langle d, f \rangle$ y $\langle d \rangle - \langle c, f \rangle$. Entonces en la primera asignación de 3-nodos $\langle a, b, d \rangle, \langle a, e, f \rangle, \langle c, e, f \rangle$ obtenemos $\langle c \rangle, \langle e \rangle, \langle c, e, f \rangle, \langle c, f \rangle$ como conjunto independiente sobre $\{c, e, f\}$. La segunda asignación, $\langle a, c, d \rangle, \langle a, e, f \rangle, \langle b, e, f \rangle$ lleva a la siguiente secuencia de pasos:

$\{a, e, f\}$ requiere $\langle e \rangle - \langle a, f \rangle$.

$\{a, c, d\}$ requiere $\langle a \rangle - \langle c, d \rangle$.

$\{b, c, d\}$ requiere $\langle d \rangle - \langle b, c \rangle$.

$\{b, c, e\}$ requiere $\langle c \rangle - \langle b, e \rangle$.

$\{b, d, e\}$ requiere $\langle b \rangle - \langle d, e \rangle$.

$\{c, d, e\}$ requiere $\langle e \rangle - \langle c, d \rangle$.

Ahora, tanto $\langle c, d \rangle$ como $\langle a, f \rangle$ tienen aristas hacia $\langle e \rangle$ de manera que $\langle c, d \rangle, \langle a, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle c, f \rangle, \langle a, c, d \rangle$ son cinco nodos independientes sobre un 4-conjunto.

En el último caso los 3-nodos son $\langle a, d, e \rangle, \langle a, c, f \rangle$ y $\langle b, e, f \rangle$ y los pasos son los que siguen:

$\{a, c, f\}$ implica las aristas $\langle c \rangle - \langle a, f \rangle$ y $\langle a \rangle - \langle c, f \rangle$.

$\{a, d, e\}$ implica la arista $\langle a \rangle - \langle d, e \rangle$.

$\{b, d, e\}$ implica la arista $\langle d \rangle - \langle b, e \rangle$.

$\{b, c, e\}$ implica la arista $\langle e \rangle - \langle b, c \rangle$.

$\{b, c, d\}$ implica la arista $\langle b \rangle - \langle c, d \rangle$.

$\{c, d, e\}$ implica la arista $\langle c \rangle - \langle d, e \rangle$.

Entonces, $\langle a, f \rangle, \langle e, d \rangle$ y $\langle d \rangle$ todos tienen una arista hacia $\langle c \rangle$ y por lo tanto $\langle e, d \rangle, \langle a, f \rangle, \langle d \rangle, \langle a, d, e \rangle, \langle d, f \rangle$ es un conjunto independiente sobre $\{a, d, e, f\}$ de manera que esta asignación no puede funcionar.

El caso que queda ocurre cuando seis 2-nodos están soportados por $\{a, b, c, d, e\}$. Para evitar triángulos entre los 1-nodos tenemos (considerando permutaciones) los 2-nodos $\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, e \rangle$. Consideremos entonces los 3-conjuntos de H_1 , $\{a, b, x\}$ donde $x = c, d, e$; cada caso requiere la arista $\langle a \rangle - \langle b, x \rangle$ o una arista $\langle b \rangle - \langle a, x \rangle$. Podemos entonces asumir sin pérdida de generalidad que tenemos las aristas $\langle b \rangle - \langle a, c \rangle$ y $\langle b \rangle - \langle a, d \rangle$. Entonces $\langle b \rangle$ y los cinco nodos con f en su soporte (los tres 3-nodos y los dos 2-nodos) son un 6-conjunto independiente en H_2 , de manera que H_2 no es un $(3, 5)$ -grafo en este caso y por lo tanto la demostración del lema está completa. \square
