



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

**Método de Disparo aplicado a un Problema con
condiciones de Neumann**

Jorge Riú

Director: Dr. Pablo Amster

Marzo 2013

Índice

1. Introducción	1
2. El proceso de electrodifusión	3
2.1. Introducción	3
2.2. Una familia de ecuaciones diferenciales surgida de la electrodifusión multiiónica.	4
2.2.1. Descripción del proceso	4
2.2.2. Forma adimensional	6
2.2.3. Los casos de una y dos cargas	7
2.2.4. Generalización a un sistema de iones	8
2.3. Existencia para problemas de valores de contorno en electrodifusión de dos iones	9
2.3.1. El problema de valores de borde	9
2.3.2. Existencia de soluciones	14
2.3.3. Soluciones por <i>Shooting</i>	14
2.3.4. Iones de diferentes valencias	15
2.4. Ecuaciones del problema con condiciones de Neumann de electrodifusión	17
2.4.1. Ecuación del modelo	18
3. Método de disparo	21
3.1. Problema unidimensional	23
3.1.1. Ecuación con condiciones Dirichlet homogéneas	23
3.1.2. Ecuación del péndulo	24
3.1.3. Cotas <i>a priori</i>	25

3.2. Problema bidimensional	30
3.2.1. Extensión a un sistema de ecuaciones	31
3.2.2. Utilizando Análisis Complejo	35
4. Aplicación al problema con condiciones de Neumann para un modelo de electrodifusión de dos iones	38
4.1. El caso $\nu_+ + \nu_- = 0$	38
4.1.1. Una reducción a Painlevé II	39
4.1.2. Un Problema Equivalente	42
4.2. El caso $\nu_+ + \nu_- \leq 0$	56
5. Conclusiones y aspectos pendientes	68
6. Bibliografía	73

1. Introducción

El presente trabajo trata de un problema con condiciones de Neumann que tiene la particularidad de poseer, en su ecuación, los valores desconocidos de la función en el borde. Más precisamente, se tiene la ecuación

$$\begin{aligned}y'' = & \left(\frac{\nu_+ + \nu_-}{\sqrt{-\nu_+\nu_-}} \right) yy' + \frac{y^3}{2} + \delta \left[\lambda l + \frac{1}{2}(y^2(0) - y^2(1)) \right] xy \\& - \left[\frac{y^2(0)}{2} - \lambda \right] y - \delta \left[\lambda l + \frac{1}{2}(y^2(0) - y^2(1)) \right] D,\end{aligned}\quad x \in [0, 1],$$

sujeta a las condiciones de contorno

$$y'(0) = y'(1) = 0,$$

donde $\nu_+, \nu_- \in \mathbb{Z}$, $\nu_+\nu_- < 0$ y δ, λ, l y D son constantes.

Esta mencionada particularidad lleva a la imposibilidad de tratar este problema con los métodos habituales del análisis y surge la necesidad de abordar su estudio con otras herramientas. El método propuesto a tal efecto en los trabajos [5] y [9], con antecedentes en [2], es un *Método de Disparo o Shooting bidimensional*.

El problema en cuestión surge de la teoría de electrodifusión de iones a través de una barrera de material, con vastos antecedentes de estudio, y múltiples aplicaciones especialmente en el campo de la Biología, con importantes implicancias en fenómenos fisiológicos, especialmente en el campo de la Neurología.

Este trabajo de Licenciatura comienza con la descripción del *paper* de *H. R. Leuchtag* [1], en el cual se deduce la familia de ecuaciones diferenciales a la cual pertenece la ecuación diferencial arriba mencionada, a partir del sistema de ecuaciones de *Nernst-Planck* y la *Ley de Gauss*, que describe una mezcla arbitraria de iones en estado estacionario. Continúa con los trabajos de *H. B. Thompson* [2] y [3], en los cuales se centra el estudio en la ecuación para el caso de dos iones de la misma valencia y se arriba a la prueba de la existencia de solución estableciendo una condición para los parámetros físicos involucrados, y culmina con los trabajos de *P. Amster, M.K. Kwong y C. Rogers* [5] y [9], en los que esta restricción es eliminada mediante la aplicación del mencionado *Shooting bidimensional* con un argumento de índice topológico, estableciéndose los resultados de existencia de solución para los casos de valencias iguales, en el primer trabajo, y para el caso general de valencias distintas, en el segundo, en donde además se deduce la

ecuación del modelo.

Se presenta también aquí, una sección dedicada a comentar dicho método de disparo en una y dos dimensiones, que se usa en la prueba principal de la existencia, con la finalidad de facilitar la comprensión del mismo aplicado a este novedoso problema. Se muestran ejemplos del caso unidimensional, y luego su extensión al caso bidimensional, el cual se trata, además, con herramientas básicas del Análisis Complejo, que es como se utiliza en las demostraciones.

2. El proceso de electrodifusión

2.1. Introducción

El trabajo de *H. R. Leuchtag* [1] trata de la electrodifusión unidimensional en régimen estacionario sin restricción en el número de iones presentes. Como allí se menciona, la teoría de electrodifusión es una descripción macroscópica del transporte de partículas cargadas a través de barreras de material, por una combinación de flujos migratorios y difusión, que tiene su origen en la teoría de la juntura líquida de *Nernst y Planck*, la cual se convierte en la base de la teoría de la membrana de *Bernstein* de los potenciales nerviosos. Como mencionan los autores en [15], con sus estudios se inició la electrofisiología moderna. Él determinó las bases electroquímicas de los fenómenos bioeléctricos y desde sus trabajos se ha reconocido el papel fundamental de la concentración del potasio intracelular en la generación de los potenciales de reposo y de lesión en músculo y nervio. *Bernstein* desarrolló su teoría para explicar los biopotenciales de membrana a consecuencia de la hipótesis de *du Bois-Reymond*, quien había postulado la existencia de partículas eléctricas regularmente ordenadas a lo largo de la superficie del músculo y del nervio. Lo hizo sobre la base de los trabajos de *Ostwald* y de *Nernst* sobre la diferencia de potencial eléctrico entre dos soluciones del mismo electrolito a dos concentraciones diferentes, separadas por una membrana selectivamente permeable. El electrolito de mayor movilidad tenderá a avanzar más rápidamente que los demás. Creará pues un frente eléctrico de su mismo signo, manifiesto como una diferencia de potencial eléctrico entre las dos soluciones. La diferencia de potencial generada se puede calcular mediante la ecuación derivada por *Nernst*. Ha sido usada extensamente en la descripción de membranas biológicas y las membranas artificiales diseñadas para modelarlas. Aplicaciones en sistemas de materia condensada incluyen las corrientes limitadas de carga espacial (*Space Charge Limited Currents*) en dieléctricos sólidos. Fórmulas vinculadas aparecen en el estudio de la inestabilidad de corrientes disipativas en la física del plasma.

Se relata, en la referencia [1], la existencia de una familia de ecuaciones diferenciales no lineales que surgen de su formulación y que describen regímenes estacionarios de electrodifusión de arbitraria complejidad, siendo el orden de la ecuación igual al número de diferentes cargas presentes en el sistema.

Como se menciona en [2], en referencia a su trabajo de 1988 [3], el problema de valores de contorno surge naturalmente del estudio de la conducción nerviosa, del cual el problema físico es, básicamente, el estudio de dos iones con la misma valencia difundiéndose y migrando a través de una juntura líquida tal como una membrana. La juntura separa dos comparativamente grandes reservorios eléc-

tricamente neutros cada uno de ellos compuesto de electrolitos que contienen especies de iones tales como sodio y cloruro. Los depósitos son agitados para mantener constantes las diferentes concentraciones de los iones de distintas especies que tienen, a su vez, distintas constantes de difusión. Como la constante de difusión y el gradiente de concentración determinan la velocidad de difusión de una dada especie a través de la juntura, aparece un campo eléctrico E . Por la *Ley de Gauss*, este campo eléctrico varía en proporción a las diferentes concentraciones locales de las especies de iones. El campo eléctrico ejerce una fuerza equilibrante sobre los iones. Para reservorios grandes, se alcanza un estado estacionario en el que macroscópicamente hay transferencia neta de masa pero no de carga y por lo tanto no hay corriente eléctrica a través de la juntura. El número de iones se conserva. Con dos especies de iones este modelo de estado estacionario da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales para las concentraciones iónicas y la intensidad del campo eléctrico.

2.2. Una familia de ecuaciones diferenciales surgida de la electrodifusión multiiónica.

Aquí abordamos el análisis del trabajo de *Leuchtag* [1], que describe, someramente, el proceso de difusión y arrastre de una mezcla de iones arbitraria en régimen de estado estacionario en la juntura, mediante el sistema de ecuaciones de *Nernst-Planck* y la *Ley de Gauss*, que culmina mostrando su equivalencia con una simple ecuación diferencial ordinaria cuyo orden es igual al número de las distintas cargas iónicas presentes en el sistema.

2.2.1. Descripción del proceso

Como se cita en el mencionado trabajo, es conveniente dividir los iones presentes en el sistema de difusión-arrastre, en clases de la misma carga q_i . Las diferentes especies pertenecientes a una dada clase de carga se indexan por j .

Las dos ecuaciones que describen el sistema de electrodifusión en estado estacionario son la ecuación de *Nernst-Planck*

$$J_{ij} = -q_i u_{ij} \theta \frac{dN_{ij}}{dX} + u_{ij} q_i^2 E N_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (2.2.1)$$

la cual establece que la densidad de corriente J_{ij} debida al ión ij se compone de un término debido a la *difusión* y otro debido a la migración por efecto de

arrastre del campo eléctrico E , y la *Ley de Gauss*

$$\frac{dE}{dX} = \frac{4\pi}{\epsilon} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} q_i N_{ij}. \quad (2.2.2)$$

En éstas hemos llamado X a la coordenada normal al borde plano, N_{ij} es la *densidad de iones* ij (o sea, la cantidad de iones por unidad de volumen), u_{ij} es la *movilidad* de los iones ij , ϵ es la *constante dieléctrica* y θ la *temperatura expresada en unidades de energía* (o sea, $\theta = k_B T$, donde k_B es la *constante de Boltzmann*, y T la *temperatura absoluta* medida en grados Kelvin). Estas tres últimas magnitudes se suponen constantes a lo largo de la membrana.

En régimen estacionario, y en ausencia de fuentes o sumideros, se supone que las densidades de corrientes J_{ij} son también independientes de X .

Implícita en la ecuación (2.2.1) está la *ecuación de Einstein* $D_{ij} = u_{ij}\theta$, la cual relaciona la movilidad u_{ij} con el *coeficiente de difusión* D_{ij} .

El número total de especies iónicas es $\sum_{i=1}^m k_i$ (por cada carga q_i hay k_i especies diferentes de iones con esa carga).

Las interacciones entre los iones de diferentes especies no está presente en la ecuación (2.2.1), pero surge del acoplamiento electrostático, a través de la ley de Gauss.

En el estudio de las membranas, las cantidades de interés a observar en los datos experimentales son la *diferencia de potencial eléctrico*

$$V = - \int_0^L E \, dX, \quad (2.2.3)$$

donde L es el espesor de la membrana, y por otro lado, la *corriente* neta a través de la membrana (relacionada con la magnitud microscópica J).

En este estudio se muestra que el sistema de m ecuaciones diferenciales acopladas de (2.2.1), más la ecuación (2.2.2) se pueden reducir a una ecuación diferencial simple de orden m dependiente de la variable E . Las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) constituyen un sistema no lineal, así que las soluciones no están sujetas a superposición ni a multiplicación por una constante. Sin embargo, para un arbitrario $\alpha \neq 0$, si se define la transformación T_α por

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \alpha^{-1}X \\ V &\longrightarrow V \\ E &\longrightarrow \alpha E \\ N &\longrightarrow \alpha^2 N \\ J &\longrightarrow \alpha^3 J \end{aligned}$$

se puede ver fácilmente que el sistema definido por las ecuaciones (2.2.1) a (2.2.3) es invariante para T_α , así es que de cualquier solución dada pueden generarse una infinidad de soluciones adicionales. El conjunto de transformaciones T_α forma un grupo abeliano, donde $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha\beta}$, T_1 es la identidad y $T_{\frac{1}{\alpha}}$ la inversa de T_α .

2.2.2. Forma adimensional

Las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) se pueden escribir, de manera equivalente, en forma adimensional, suprimiendo simultáneamente el subíndice j (lo cual muestra que el comportamiento del sistema refleja las clases de cargas presentes más que las especies de iones diferentes, aunque esto debe ser justificado en las condiciones de borde). En efecto, si q_0 es el *quantum* de carga eléctrica ($q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} C$), entonces $\nu_i = q_i/q_0$ es la *valencia con signo* del ión (siendo $q_i \neq q_k$ y por lo tanto $\nu_i \neq \nu_k$, si $i \neq k$). Para una unidad de densidad de iones arbitraria N_0 , se define la *Longitud de Debye* λ , como

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon\theta}{4\pi q_0^2 N_0}}.$$

Sean ahora,

$$n_i = \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{k_i} N_{ij},$$

es decir, se suman las densidades de concentraciones de las distintas especies de iones de carga q_i (de las que hay k_i) y se obtiene una cantidad relativa de iones de carga q_i respecto de la unidad de densidad N_0 .

Y sean

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{\lambda}{N_0 q_i \theta} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{J_{ij}}{u_{ij}}, \\ p &= \frac{q_0 \lambda}{\theta} E, \\ x &= \left(\frac{X}{\lambda} \right) + x_1, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

donde x_1 es una constante a definir.

En estas unidades adimensionales, las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) se vuelven

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dx} &= \nu_i p n_i - c_i, \quad 1 \leq i \leq m \\ \frac{dp}{dx} &= \sum_{i=1}^m \nu_i n_i. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

2.2.3. Los casos de una y dos cargas

El caso de un solo ion fue resuelto por *F. Borgnis* en 1936, en [10], y *H. Y. Fan* en [11], introdujo la más conveniente forma de *función de Airy* de la solución en 1948. *H. R. Leuchtag y J. C. Swihart* en [12] señalaron que la solución para un único ion se puede generalizar al caso de los iones de una sola carga, llamado el *caso homovalente*. Las densidades de iones individuales puede ser recuperadas mediante el uso de una fórmula obtenida por *R. Schlögl* en [13].

Con $m = 1$, las ecuaciones (2.2.5) se vuelven

$$\begin{aligned} n' &= \nu p n - c, \\ p' &= \nu n, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

donde los apóstrofos denotan las derivadas respecto de x . Despejando n de la segunda y reemplazando en la primera da $n' = pp' - c$, e integrando se tiene

$$n = \frac{1}{2}p^2 - cx, \quad (2.2.7)$$

en donde se ha usado la constante x_1 de la última ecuación de las (2.2.4) para absorber la constante de integración. Luego, la ecuación diferencial equivalente al sistema de ecuaciones de (2.2.6) nos queda

$$p' = \frac{1}{2}\nu p^2 - \nu cx. \quad (2.2.8)$$

Esta ecuación es el primer miembro de la familia de ecuaciones diferenciales que se describe en este trabajo citado ([1]), donde se omite la reconversión a variables físicas.

Para un sistema que contiene iones de dos diferentes valencias, $m = 2$, y las ecuaciones (2.2.5) se vuelven

$$n'_1 = \nu_1 p n_1 - c_1, \quad (2.2.9)$$

$$n'_2 = \nu_2 p n_2 - c_2, \quad (2.2.10)$$

$$p' = \nu_1 n_1 + \nu_2 n_2. \quad (2.2.11)$$

Sumando las ecuaciones (2.2.9) y (2.2.10), obtenemos

$$n'_1 + n'_2 = (\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2)p - (c_1 + c_2),$$

con lo que tenemos que

$$\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 = \frac{1}{p}(n'_1 + n'_2 + c), \quad \text{donde } c = c_1 + c_2.$$

Reemplazando en la ecuación (2.2.11), multiplicando por p , tenemos

$$p'p = n'_1 + n'_2 + c$$

la cual, integrando nos da

$$\frac{1}{2}p^2 = n_1 + n_2 + cx, \quad (2.2.12)$$

con lo cual, despejando n_2 y sustituyéndola en (2.2.11), nos da

$$p' = \frac{1}{2}\nu_2 p^2 + (\nu_1 - \nu_2)n_1 - \nu_2 cx$$

De esta última ecuación, obtenemos, por un lado,

$$n_1 = \frac{p' - \frac{1}{2}\nu_2 p^2 + \nu_2 cx}{\nu_1 - \nu_2} \quad (2.2.13)$$

y por otro lado, derivándola,

$$p'' = \nu_2 pp' + (\nu_1 - \nu_2)n'_1 - \nu_2 c \quad (2.2.14)$$

Reemplazando ahora el valor de n_1 , obtenido en la ecuación (2.2.13), en la ecuación (2.2.9), tenemos

$$n'_1 = \frac{\nu_1 pp' - \frac{1}{2}\nu_1 \nu_2 p^3 + \nu_1 \nu_2 cxp}{\nu_1 - \nu_2},$$

la cual, reemplazada en la ecuación (2.2.14), nos da la deseada ecuación diferencial en p ,

$$p'' - (\nu_1 + \nu_2)pp' + \frac{1}{2}\nu_1 \nu_2 p^3 - \nu_1 \nu_2 cxp + \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 = 0 \quad (2.2.15)$$

Este es el segundo miembro de la familia de ecuaciones diferenciales , la cual fue derivada por *L. J. Bruner* en 1965 para un ión positivo y otro negativo. Con iones de iguales cargas y signos opuestos, el segundo término, que contiene a $\nu_1 + \nu_2$, se anula, versión que (para ± 1) fue obtenida por *L. Bass* en 1964 y por *H. Cohen y L. W. Cooley* en 1965.

2.2.4. Generalización a un sistema de iones

El procedimiento para un sistema de iones con un número arbitrario de cargas diferentes es una generalización directa de estos casos especiales, como puede verse en [1], donde se observa que la complejidad del comportamiento del sistema en régimen estacionario depende de este número de distintas cargas. El sistema de ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2), para m cargas, se describe por una ecuación diferencial de orden m , deducida en [1], donde además se muestran la tercera y cuarta ecuaciones de la familia.

2.3. Existencia para problemas de valores de contorno en electrodifusión de dos iones

En el trabajo de *H. B. Thompson* [2], que en esta parte de esta sección se analiza, que extiende y unifica el anterior propio del año 1988 [3], se considera el problema de valores de borde

$$y''(x) = y(x) \left\{ \lambda - \frac{y^2(0) - y^2(x)}{2} + \left[l\lambda + \frac{y^2(0) - y^2(1)}{2} \right] x \right\} - \left[l\lambda + \frac{y^2(0) - y^2(1)}{2} \right] D, \quad x \in [0, 1], \quad (2.3.1)$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \quad (2.3.2)$$

el cual surge cuando dos iones de la misma valencia migran y se difunden a través de una juntura líquida bajo la influencia de un campo eléctrico E . Aquí y es proporcional al campo eléctrico E y, después de reescalar, la juntura ocupa la región $0 \leq x \leq 1$. Los parámetros l , λ y D , son funciones de las constantes físicas del problema, siendo el rango de interés físico $l, \lambda > 0$ y $-1 < D < 1$.

2.3.1. El problema de valores de borde

Como se menciona en [2], en el trabajo anterior [3], se muestra que si y es solución para los parámetros l, D, λ , entonces $-y$ lo es para parámetros $l, -D, \lambda$. Luego, aquí se considera el caso $l, \lambda, D > 0$. Para este caso, se probó que si existe una constante positiva m que cumple

$$m(\lambda - \frac{m^2}{2}) - l\lambda D - \frac{m^2 D}{2} > 0, \quad (2.3.3)$$

entonces existe al menos una y , solución del problema dado por las ecuaciones (2.3.1)-(2.3.2), que cumple $0 < y < m$ y que es estrictamente decreciente.

La prueba de existencia usa super y sub soluciones junto con el principio del máximo para obtener una cota *a priori* necesaria para aplicar la teoría de grado, lo cual requiere que

$$m(1 + \frac{l}{2}) - lD > 0.$$

También en otro resultado del mismo trabajo (Teorema 4.2 de [3]), se probó la existencia de soluciones cuando al menos uno de los parámetros l o D son pequeños, usando método de disparo (*shooting*) y el teorema de la función implícita.

Así, la existencia fue establecida para un gran rango de valores de los parámetros de interés físico.

En [2], se considera el problema sólo en el caso $l, D, \lambda > 0$. Usando el principio del máximo se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1 *Sean $l, D, \lambda > 0$. El problema de valores de contorno (2.3.1)-(2.3.2) no tiene soluciones negativas y las soluciones positivas son estrictamente decrecientes y satisfacen*

$$0 < y(1) \leq y(0) \leq (1 + l)y(1). \quad (2.3.4)$$

Dem. Teorema 2.3.1 Si llamamos

$$\gamma = l\lambda + \frac{y_0^2 - y_1^2}{2} \quad y \quad h(x, y) = \lambda - \frac{y_0^2 - y^2}{2} + \gamma x,$$

reemplazando en (2.3.1), tenemos que

$$\begin{aligned} y'' &= yh(x, y) - \gamma D, \\ y''(0) &= y_0\lambda - \gamma D, \\ y''(1) &= y_1\lambda(1 + l) - \gamma D \end{aligned}$$

llamando y_0 a $y(0)$, y_1 a $y(1)$, y usando que $h(0, y_0) = \lambda$ y $h(1, y_1) = \lambda(1 + l)$.

Sea y una solución. Como $y'(0) = 0 = y'(1)$, si y tiene un máximo local en t y un mínimo local en u ,

$$y'(t) = 0 \quad y \quad y'(u) = 0, \quad \text{mientras que} \quad y''(t) \leq 0 \leq y''(u).$$

Supongamos que existe $y(x)$, una solución negativa, y consideremos primero que $\gamma > 0$. Entonces,

$$y''(0) = y_0\lambda - \gamma D < 0, \quad \text{dado que} \quad y_0 \leq 0.$$

Como $y'(0) = 0$, la solución y tiene un mínimo negativo en $u > 0$ (pues $y''(0) < 0$), con $y(u) < y_0 \leq 0$.

Entonces, $h(u, y(u)) > h(0, y_0) = \lambda$, dado que h es una función decreciente en y , pues

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y \leq 0, \quad \text{si} \quad y \leq 0, \quad y \quad \frac{\partial h}{\partial y} < 0, \quad \text{si} \quad y < 0.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$0 \leq y''(u) = y(u)h(u, y(u)) - \gamma D < y_0\lambda - \gamma D < 0,$$

una contradicción.

Supongamos entonces que $\gamma \leq 0$. Entonces es

$$l\lambda + \frac{y_0^2 - y_1^2}{2} \leq 0 \implies \frac{y_0^2 - y_1^2}{2} \leq -l\lambda < 0 \implies y_0^2 < y_1^2,$$

luego, dado que y es negativa,

$$y_1 < y_0 \leq 0. \quad (2.3.5)$$

Como y alcanza un máximo en t , se tiene que $y''(t) \leq 0$, y como $0 \geq y(t) \geq y_0$, se tiene que $h(t, y(t)) \leq h(0, y_0) = \lambda$, así que

$$y_0\lambda - \gamma D \leq y(t)h(t, y(t)) - \gamma D = y''(t) \leq 0.$$

Entonces,

$$y_0\lambda \leq \gamma D. \quad (2.3.6)$$

Ahora, y tiene su mínimo en u , con $y(u) \leq y_1 \leq 0$, con $y''(u) \geq 0$.

Como $0 \geq y_1 \geq y(u)$, $h(u, y(u)) \geq h(1, y_1) = \lambda(1+l) - \gamma D$, entonces

$$y_1\lambda(1+l) \geq \gamma D \geq y_0\lambda,$$

y entonces de (2.3.6), se tiene que

$$0 \geq y_1(1+l) \geq y_0,$$

en contradicción con (2.3.5).

Luego, no existen soluciones negativas. Por lo tanto, podemos tener o bien soluciones positivas, o bien soluciones que inicialmente lo son y que luego se vuelven negativas.

Para demostrar la segunda parte del teorema, supongamos entonces que tenemos una solución $y \geq 0$, y , nuevamente, supongamos primero que $\gamma \leq 0$. Entonces, $0 \leq y_0 \leq y_1$, y consideremos una vez más que y tiene un máximo en t . Entonces, $y''(t) \leq 0$, y $y(t) \geq y_1$. Luego, $h(t, y(t)) \geq h(1, y_1) = \lambda(1+l) > 0$ (dado que ahora $\frac{\partial h}{\partial y} = 2y \geq 0$), y por lo tanto,

$$0 \geq y(t)h(t, y(t)) - \gamma D \geq y_1\lambda(1+l) - \gamma D.$$

Similarmente, consideramos un mínimo de y en u , con $0 \leq y(u) \leq y_0$ y $y''(u) \geq 0$. Entonces acá tenemos que $h(u, y(u)) \leq h(0, y_0) = \lambda$, así que

$$0 \leq y(u)h(u, y(u)) - \gamma D \leq y_0\lambda - \gamma D,$$

y por lo tanto,

$$y_0 \geq y_1(1 + l) \geq 0,$$

en contradicción con lo supuesto.

Así, arribamos a que $\gamma > 0$ y seguidamente mostremos que la solución es estrictamente decreciente.

Supongamos que no lo es. Entonces y tiene un mínimo local en u y un máximo local en t , con $t > u$, $y(t) \geq y(u) \geq 0$, y con $y''(u) = y(u)h(u, y(u)) - \gamma D \geq 0 \geq y''(t)$. Entonces, $h(t, y(t)) > h(u, y(u)) \geq 0$, así que

$$0 \geq y(t)h(t, y(t)) - \gamma D > y(u)h(u, y(u)) - \gamma D \geq 0,$$

una contradicción.

Por lo tanto, y es estrictamente decreciente.

Para mostrar que $0 < y(1) \leq y(0) \leq (1 + l)y(1)$, es suficiente mostrar que $y(0) \leq y(1)(1 + l)$, dado que y es estrictamente decreciente.

Como y tiene su máximo en 0 y su mínimo en 1,

$$y''(0) = y_0\lambda - \gamma D \leq y_1\lambda(1 + l) - \gamma D = y''(1),$$

y el resultado es inmediato. \square

También se tiene el resultado siguiente para la existencia de solución, cuya demostración no incluimos, que puede verse en [2]:

Teorema 2.3.2 Si m es una solución positiva de

$$m\lambda - \left[l\lambda + \frac{m^2}{2} \left(1 - \frac{1}{(1 + l)^2} \right) \right] D \geq 0, \quad (2.3.7)$$

entonces el problema (2.3.1)-(2.3.2) tiene una solución estrictamente decreciente satisfaceiendo $0 \leq y \leq m$ y (2.3.4).

Nota. Observamos que (2.3.7) se cumple si y sólo si

$$\lambda \geq 2l \left(1 - \frac{1}{(1 + l)^2} \right) D^2. \quad (2.3.8)$$

En efecto, escribiendo la desigualdad (2.3.7) en la forma $am^2 + bm + c \geq 0$, donde

$$a = -\frac{1 - \frac{1}{(1+l)^2}}{2} D$$

$$b = \lambda$$

$$c = -l\lambda D,$$

vemos que $a < 0$, y por lo tanto el conjunto solución será el intervalo $[m_1, m_2]$, donde m_1 y m_2 son los ceros de la parábola dados por la conocida fórmula

$$m_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4 \left(-\frac{1 - \frac{1}{(1+l)^2}}{2} D \right) (-l\lambda D)}}{2 \left(-\frac{1 - \frac{1}{(1+l)^2}}{2} D \right)}$$

los cuales existirán si el radicando es no negativo, es decir

$$\lambda^2 \geq 2l\lambda D^2 \left(1 - \frac{1}{(1+l)^2} \right),$$

lo que equivale, dado que $\lambda > 0$, a la ecuación (2.3.8).

Observación. Las soluciones positivas m de (2.3.7), satisfacen $m_- \leq m \leq m_+$, donde

$$m_{\pm} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda - 2l(1 - \frac{1}{(1+l)^2})D^2}}{(1 - \frac{1}{(1+l)^2})D},$$

y las soluciones positivas y , obtenidas en el teorema 2.3.2 anterior, satisfacen que $0 < y < m_-$, lo cual puede verse con un argumento de contradicción, utilizando la demostración del teorema 2.3.1. Si además se hace la suposición adicional citada: $m(1 + l/2) - lD > 0$, se puede usar la teoría de grado para probar existencia de soluciones. También la demostración del teorema 2.3.1 se utiliza en la inmediata demostración del siguiente lema, que se usa en el resultado de la existencia usando el método de disparo (*shooting*), obtenido en el trabajo precedente [3], que establece que, para determinados valores de los parámetros, las soluciones no cambian de signo.

Lema 2.3.1 *Sea $D = 0$, y $l, \lambda \geq 0$. Entonces $y \equiv 0$ es la única solución del problema dado por (2.3.1) - (2.3.2). Si $D, \lambda > 0$ y $l = 0$, entonces $y \equiv 0$ es la única solución. Si $\lambda = 0$, y $l, D \geq 0$, entonces las únicas soluciones son las constantes.*

En este trabajo se muestra que las soluciones obtenidas en el trabajo anterior por método de disparo y el teorema de la función implícita, son positivas para l o D pequeños, con λ, l y $D > 0$.

Los resultados de existencia mejorados derivan de mejores cotas *a priori* establecidas por el principio del máximo, el uso de super y sub soluciones, y el uso de la teoría de grado de Leray-Schauder, en un dominio en un espacio diferente, que permite una mayor independencia y control en el borde del dominio, sobre los valores de una solución en comparación con sus valores de borde.

Aunque no se tienen aquí resultados de existencia para soluciones que cambian de signo, se puede demostrar que, si existen, están acotadas en término de sus valores de borde, en particular, si $\gamma > 0$, entonces $y(0) > 0$, y la solución y está acotada en términos de $y(0)$, y si $\gamma \leq 0$, entonces $y(1) \leq 0$, y la solución está acotada en términos de $y(1)$. También se puede mostrar que si existen soluciones positivas grandes, son asintóticamente lineales, lo cual se puede usar para mostrar que no hay soluciones positivas grandes en al menos casos muy especiales. Usando el principio del máximo, es posible mostrar que si soluciones de este tipo existen, tienen la forma asintótica

$$y = y_0(1 - x) + y_1x + \frac{c(x, y)}{y_0 + y_1},$$

donde $c(x, y)$ está acotada independientemente de x y y .

2.3.2. Existencia de soluciones

Para establecer la existencia se usa el grado de Leray-Schauder el cual se calcula usando homotopías. Así se integra el problema a una familia paramétrica de problemas para los cuales se necesita una cota *a priori*, y para los que hay que poder calcular el grado para un valor del parámetro. Para llevar a cabo esto se modifica la ecuación diferencial para valores de y, y_0 , y y_1 fuera de una cierta región y se construye la familia paramétrica de la ecuación modificada y las condiciones de frontera. Por la teoría de grado de Leray-Schauder, hay una solución de la ecuación diferencial modificada y se muestra que esta solución se encuentra en la región donde la ecuación no fue modificada.

2.3.3. Soluciones por *Shooting*

Se tratan en [2] los siguientes resultados de existencia, obtenidos en [3] por *shooting*, y sus relaciones con el teorema 2.3.2.

Teorema 4.2 de [3] Sean $l_0 D_0 = 0$ y $\lambda_0 > 0$, entonces hay una $\delta > 0$ tal que para $|l - l_0| + |D - D_0| + |\lambda - \lambda_0| < \delta$ existe una solución y del problema (2.3.1)-(2.3.2), con $y(i) = y_i(l, D, \lambda)$, $|y(i)| < \delta$, $i = 0, 1$.

Teorema 4.3 de [3] Si $l_0 D_0 \neq 0$ y $\lambda_0 = 0$ existe una solución y del problema (2.3.1)-(2.3.2), con $y(0) = y_0(y(1), l, D)$, $\lambda = \lambda(y(1), l, D)$, continuamente diferenciable en un entorno de $(0, l_0, D_0)$, con $y_0(0, l_0, D_0) = 0 = \lambda(0, l_0, D_0)$. Además esta es la única solución en un entorno de $(y(0), y(1), l, D, \lambda) = (0, 0, l_0, D_0, 0)$.

Se observa que, en el teorema 4.2 de [3], las soluciones obtenidas son $\lambda = 0$, e y constante, en un entorno de $y(0) = y(1) = \lambda_0 = 0$. Además, por una técnica similar, se puede ver que $\lambda = 0$ e y constante son las únicas soluciones en un entorno de $y(0) = c = y(1)$, ($c = \text{constante}$), y $\lambda_0 = 0$.

Del lema 2.3.1 se ve que las constantes son las únicas soluciones del problema (2.3.1)-(2.3.2), las cuales no cambian de signo por lo que no podemos obtener soluciones adicionales por este enfoque.

También por el mismo lema 2.3.1, en el caso $lD = 0$, $y \equiv 0$ es la única solución del problema (2.3.1)-(2.3.2), la cual no cambia de signo, así que tampoco se puede tener soluciones positivas adicionales por este enfoque.

Se tiene también en [2] el siguiente resultado cuya prueba allí se realiza:

Teorema 2.3.3 Para $l, D, \lambda > 0$ las soluciones obtenidas del teorema 4.2 de [3] son positivas.

2.3.4. Iones de diferentes valencias

Por último se obtiene la ecuación diferencial más general, de la cual la ecuación en estudio es un caso particular.

Siguiendo la notación de Leuchtag [1], procediendo de forma enteramente similar aunque con ligeras modificaciones, la juntura líquida ocupa la región $0 \leq t \leq \delta$, ϵ es la constante dieléctrica, k la constante de Boltzmann, T la temperatura, E el campo eléctrico, N_0 una arbitraria unidad de densidad iónica, q_0 la carga del protón, q_{\pm} la carga de los iones, N_{\pm} sus densidades, u_{\pm} sus movilidades, y, de acuerdo a las relaciones de Einstein, $D_{\pm} = u_{\pm} kT$ sus coeficientes de difusión. Poniendo $\nu_{\pm} = q_{\pm}/q_0$, $n_{\pm} = N_{\pm}/N_0$, ahora la longitud de Debye queda expresada como

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon k T}{4\pi q_0^2 N_0}},$$

y además

$$p = \frac{q_0 \lambda}{kT} E \quad y \quad n = n_+ + n_-.$$

Integrando las ecuaciones de estado estacionario para la conservación de los iones se obtienen las *ecuaciones de Nernst-Planck*

$$n'_- = \nu_- p n_- - c_- \tag{2.3.9}$$

$$n'_+ = \nu_+ p n_+ - c_+ \tag{2.3.10}$$

y las corrientes inducidas por los iones están dadas por

$$J_\pm = \frac{q_0 N_0}{\lambda} \nu_\pm D_\pm c_\pm.$$

La *ecuación de Gauss* tiene la forma

$$p' = \nu_+ n_+ + \nu_- n_- . \tag{2.3.11}$$

Sumando las ecuaciones (2.3.9) y (2.3.10), usando (2.3.11) para sustituir a $p(\nu_+ n_+ + \nu_- n_-)$, e integrando, se obtiene, poniendo $c = c_+ + c_-$,

$$n_+ + n_- - n(0) = \frac{p^2 - p^2(0)}{2} - ct, \tag{2.3.12}$$

que corrige la ecuación (20) de [1], la cual hemos utilizado en una expresión equivalente en la sección anterior (ecuación (2.2.12)). Usando ahora esta ecuación (2.3.12) para sustituir por n_+ en la ecuación (2.3.11), se obtiene

$$p' = (\nu_- - \nu_+) n_- + \nu_+ \frac{p^2 - p^2(0)}{2} - \nu_+ ct + \nu_+ n(0). \tag{2.3.13}$$

Diferenciando, usando la ecuación (2.3.9) para sustituir por n'_- , y la (2.3.13) para sustituir por n_- , se tiene

$$\begin{aligned} p'' &= (\nu_+ + \nu_-) p p' - \\ &\quad \nu_+ \nu_- \left\{ p \left[n(0) + \frac{p^2 - p^2(0)}{2} - ct \right] + \frac{D_+ - D_-}{\nu_+ D_+ - \nu_- D_-} c \right\}, \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

ecuación equivalente a la (21) de [1], tratada en la subsección anterior como ecuación (2.2.15), el segundo miembro de la familia de ecuaciones diferenciales allí tratada.

Usando el hecho de que no hay corriente neta a través de la juntura se obtiene que $\nu_- D_- c_- + \nu_+ D_+ c_+ = 0$. Resolviendo (2.3.12) para c , cuando $t = \delta$ y notando que la agitación de los reservorios resulta en n_+ y n_- constantes en 0 y δ , se

elimina c de (2.3.14). También la neutralidad eléctrica en el reservorio junto con la ecuación (2.3.11) da que $p'(0) = 0 = p'(\delta)$.

Poniendo $\delta x = t$, y

$$D = \sqrt{-\nu_-\nu_+} \frac{D_+ - D_-}{\nu_+ D_+ - \nu_- D_-}, \quad l = \frac{n(1) - n(0)}{n(0)}, \quad \lambda = -\delta^2 \nu_- \nu_+ n(0),$$

$$\chi = \frac{\nu_- + \nu_+}{\sqrt{-\nu_-\nu_+}}, \quad y = \delta \sqrt{-\nu_-\nu_+} p,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} y'' &= \chi y y' + y \left\{ \lambda - \frac{y^2(0) - y^2}{2} + \left[l\lambda + \frac{y^2(0) - y^2(1)}{2} \right] x \right\} \\ &\quad - \left[l\lambda + \frac{y^2(0) - y^2(1)}{2} \right] D, \quad \text{para } x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Nota. Observamos que $\nu_+\nu_- < 0$, y para el caso $n(1) > n(0)$ y $\nu_- + \nu_+ = 0$ se obtiene la ecuación (2.3.1).

2.4. Ecuaciones del problema con condiciones de Neumann de electrodifusión

Consideramos aquí el trabajo realizado en [9], en donde, como comentamos en la introducción, se deduce la ecuación diferencial objeto de análisis, basado en la deducción anterior de [2]. Aquí se investiga el problema con condiciones de Neumann en el caso general en el que $\nu_+ + \nu_- \neq 0$, novedoso en que, como mencionáramos en la introducción, la ecuación del modelo para el campo eléctrico contiene los valores de borde de la solución aún no determinada. También allí en la referencia, se obtiene una reducción del problema en términos de funciones elípticas para relaciones privilegiadas de las valencias.

2.4.1. Ecuación del modelo

Se retoma el análisis de *Thompson* [2], restringido al caso de dos iones, utilizándose la misma notación, con un tratamiento ligeramente diferente, en donde

$$n'_+ = \nu_+ n_+ p - c_+, \quad (2.4.1)$$

$$n'_- = \nu_- n_- p - c_-, \quad (2.4.2)$$

$$p' = \nu_+ n_+ + \nu_- n_-. \quad (2.4.3)$$

Procediendo como en [2], sumando (2.4.1) y (2.4.2), usando la (2.4.3) e integrando, da

$$n_+ + n_- = \frac{p^2}{2} - cx - k, \quad (2.4.4)$$

donde $c = c_+ + c_-$ y k es una arbitraria constante de integración.

Eliminando n_+ entre las ecuaciones (2.4.3) y (2.4.4), se tiene

$$p' = n_- (\nu_- - \nu_+) + \nu_+ \frac{p^2}{2} - c\nu_+ x - \nu_+ k$$

de donde, derivando respecto de x ,

$$\begin{aligned} p'' &= (\nu_- - \nu_+) (\nu_- n_- p - c_-) + \nu_+ pp' - c\nu_+ \\ &= \nu_- p \left[p' - \nu_+ \frac{p^2}{2} + c\nu_+ x + k\nu_+ \right] - c_- [\nu_- - \nu_+] + \nu_+ pp' - c\nu_+ \end{aligned}$$

así que

$$p'' = (\nu_+ + \nu_-) pp' - \left(\frac{\nu_+ \nu_-}{2} \right) p^3 + (cx + k) \nu_+ \nu_- p - (\nu_+ c_+ + \nu_- c_-). \quad (2.4.5)$$

La condición considerada en [2], de que no hay corriente neta a través de la juntura, da

$$\nu_+ d_+ c_+ + \nu_- D_- c_- = 0, \quad (2.4.6)$$

donde, como vimos, $D_{\pm} = u_{\pm} kT$, así que

$$\nu_+ u_+ c_+ + \nu_- u_- c_- = 0 \quad (2.4.7)$$

de donde

$$(\nu_+ u_+ c_+ + \nu_- u_- c_-)(\nu_+ - \nu_-) = 0. \quad (2.4.8)$$

Como consecuencia,

$$\nu_+ c_+ + \nu_- c_- = \frac{(D_+ - D_-) c \nu_+ \nu_-}{\nu_+ D_+ - \nu_- D_-}, \quad (2.4.9)$$

y entonces (2.4.5) se vuelve

$$p'' - (\nu_+ + \nu_-)pp' + \nu_+\nu_- \left[\frac{p^3}{2} - (cx + k)p \right] + \frac{(D_+ - D_-)c\nu_+\nu_-}{\nu_+D_+ - \nu_-d_-} = 0. \quad (2.4.10)$$

Si la juntura tiene bordes $x = 0$ y $x = \delta$, entonces, reescalando con

$$x = \delta x^*, \quad p = \frac{y}{\delta\sqrt{-\nu_+\nu_-}}, \quad (2.4.11)$$

la ecuación (2.4.10) nos da

$$y'' = \left(\frac{\nu_+ + \nu_-}{\sqrt{-\nu_+\nu_-}} \right) yy' + \frac{y^3}{2} + \delta^2\nu_+\nu_-(c\delta x^* + k)y - c\delta^3D\nu_+\nu_- \quad (2.4.12)$$

donde el apóstrofo denota la derivada con respecto a x^* , y donde

$$c = n(0) - n(1) + \frac{1}{2\delta^2\nu_+\nu_-}[y^2(0) - y^2(1)], \quad (2.4.13)$$

$$k = \frac{y^2(0)}{2\delta^2\nu_+\nu_-} - n(0), \quad (2.4.14)$$

$$D = \frac{\sqrt{-\nu_+\nu_-}(D_+ - D_-)}{\nu_+D_+ - \nu_-D_-}, \quad \nu_+\nu_- < 0. \quad (2.4.15)$$

Se observa que las ecuaciones (2.4.10) y (2.4.12) incorporan a través de c y k los valores de borde $n(0) = n_+(0) + n_-(0)$, $n(1) = n_+(1) + n_-(1)$, junto con $y(0)$ y $y(1)$. Está previsto que las concentraciones de la interfase $n_+(0)$, $n_-(0)$, $n_+(1)$, $n_-(1)$, sean conocidas. Sin embargo, los términos de borde $y(0)$ y $y(1)$ que permanecen en la ecuación, dependen de la solución todavía no determinada.

Utilizando las ecuaciones (2.4.13) y (2.4.14) en (2.4.12), nos da

$$\begin{aligned} y'' = & \left(\frac{\nu_+ + \nu_-}{\sqrt{-\nu_+\nu_-}} \right) yy' + \frac{y^3}{2} + \delta \left[\delta^2\nu_+\nu_-(n(0) - n(1)) + \frac{1}{2}(y^2(0) - y^2(1)) \right] x^*y \\ & - \left[\frac{y^2(0)}{2} + \delta^2\nu_+\nu_-n(0) \right] y - \delta \left[\delta^2\nu_+\nu_-(n(0) - n(1)) + \frac{1}{2}(y^2(0) - y^2(1)) \right] D, \end{aligned}$$

y poniendo $\lambda = -\delta^2\nu_+\nu_-n(0)$ y $l = [n(1) - n(0)]/n(0)$, se tiene

$$\begin{aligned}
y'' = & \left(\frac{\nu_+ + \nu_-}{\sqrt{-\nu_+\nu_-}} \right) yy' + \frac{y^3}{2} + \delta \left[\lambda l + \frac{1}{2}(y^2(0) - y^2(1)) \right] x^* y \\
& - \left[\frac{y^2(0)}{2} - \lambda \right] y - \delta \left[\lambda l + \frac{1}{2}(y^2(0) - y^2(1)) \right] D
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

La participación de los términos de borde $y(0)$ y $y(1)$ en (2.4.16) representa un impedimento extraordinario para su análisis y motiva la adopción de métodos no tradicionales para lograrlo. En la sección 3 de [9], se aplica un método exacto de *shooting* a esta ecuación (2.4.16), con condiciones de Neumann, que reproducimos en la sección 4, para el caso de $\nu_+ + \nu_- \leq 0$, luego de considerar el caso $\nu_+ + \nu_- = 0$, tratado en [5], con anterioridad, y que resulta contenido en aquel.

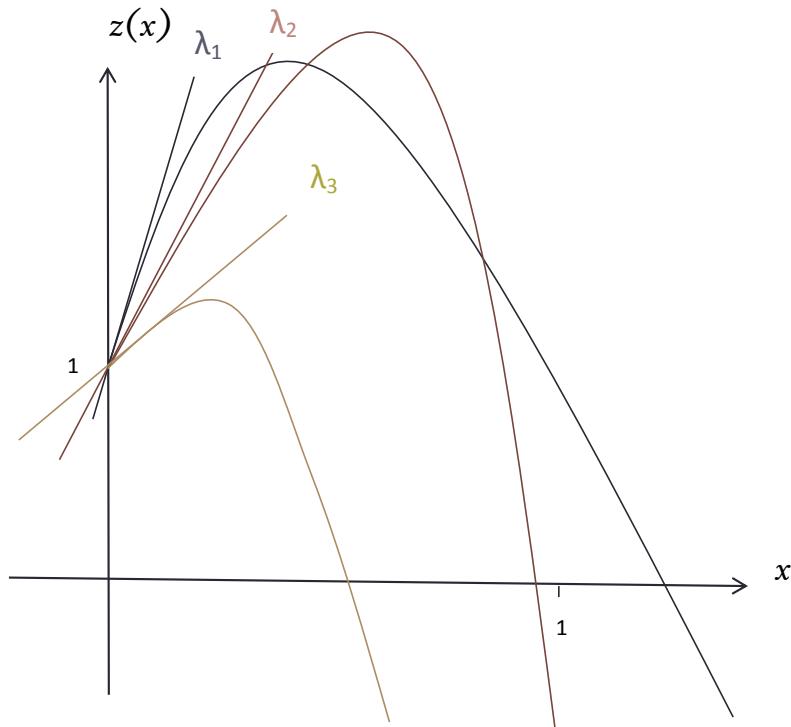


Figura 1: Una solución con cada λ

3. Método de disparo

Sintéticamente, el Método de Disparo o *Shooting* aplicado a un problema de valores de contorno dado, consiste en solucionar primeramente un problema de valores iniciales con un parámetro libre λ y luego tratar de hallar un valor apropiado de este λ tal que la solución obtenida satisfaga la deseada condición de borde del problema original en cuestión.

Más precisamente hablando, tenemos, en general, un problema de valores de contorno de orden n :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right), \quad \text{con } x \in [a, b],$$

con r condiciones de contorno en $x = a$

$$y(a) = A_1, \frac{dy}{dx}(a) = A_2, \frac{d^2y}{dx^2}(a) = A_3, \dots, \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}}(a) = A_r,$$

y con s condiciones de contorno en $x = b$

$$y(b) = B_1, \frac{dy}{dx}(b) = B_2, \frac{d^2y}{dx^2}(b) = B_3, \dots, \frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}}(b) = B_s, \quad (3.0.1)$$

donde $r + s = n$.

La idea del método de disparo (*shooting*) es sustituir las s condiciones de contorno en $x = b$, por s condiciones iniciales en $x = a$, planteando el siguiente *Problema de Valores Iniciales*

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \quad \text{con } x \in [a, b], \\ y(a) = A_1, \frac{dy}{dx}(a) = A_2, \frac{d^2y}{dx^2}(a) = A_3, \dots, \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}}(a) = A_r, \\ \frac{d^r y}{dx^r}(a) = \lambda_1, \frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}(a) = \lambda_2, \frac{d^{r+2}y}{dx^{r+2}}(a) = \lambda_3, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(a) = \lambda_s, \end{cases}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, son parámetros desconocidos a determinar, de los cuales depende la solución de este problema de valores iniciales. Para un dado conjunto de valores de estos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, obtendremos una solución del problema de valores iniciales. El problema original de valores de contorno estará resuelto si la solución obtenida para este conjunto de parámetros también cumple las s condiciones (3.0.1).

Para el caso de un problema de segundo orden como el que nos ocupa, tenemos

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \quad \text{con } x \in [0, \delta], \\ y(0) = A, \\ y(\delta) = B, \end{cases} \quad (3.0.2)$$

que transformamos en el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \quad \text{con } x \in [0, \delta], \\ y(0) = A, \\ \frac{dy}{dx}(0) = \lambda. \end{cases}$$

El método de disparo consiste en determinar la condición inicial λ para que se verifiquen las condiciones de contorno del problema original (3.0.2).

Esta tarea requiere algún análisis cualitativo. En algunos casos, se recurre a métodos numéricos para evaluar cada solución obtenida correspondiente a cada

valor del λ , de tal modo que dicha solución satisfaga la condición de borde del problema original, hasta una determinada cota de error pre establecida. En otros casos, es posible conocer anticipadamente el comportamiento de la solución del problema de valores iniciales con la variación del parámetro λ . En el trabajo realizado en [5] primero, y en [9] después, el análisis del comportamiento de la solución lleva a una adecuada elección de los parámetros de tal modo de obtener el resultado deseado, como veremos en la sección 4.

3.1. Problema unidimensional

Consideremos los siguientes problemas en una dimensión, tomados de [4], a modo de ejemplos.

3.1.1. Ecuación con condiciones Dirichlet homogéneas

Consideremos la siguiente ecuación de segundo orden

$$u''(t) = f(t, u(t)), \quad (3.1.1)$$

con las condiciones Dirichlet

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (3.1.2)$$

La idea del método de disparo es la siguiente: para un $\lambda \in \mathbb{R}$, resolvemos la ecuación (3.1.1), con las condiciones iniciales

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = \lambda. \quad (3.1.3)$$

Es decir, resolvemos el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = \lambda \end{cases}$$

Si f satisface los requisitos estándar de la teoría de problemas de valores iniciales, esto es, continua y localmente Lipschitz en u , entonces la solución u_λ está bien definida y es única. Luego, es suficiente hallar algún valor del parámetro de

disparo λ tal que $u_\lambda(1) = 0$.

En forma equivalente, buscamos un cero de la función Φ , definida por

$$\Phi(\lambda) := u_\lambda(1).$$

Luego, con una analogía mecánica, podemos explicar el nombre del método: el procedimiento consiste en el ajuste del valor del parámetro λ hasta que un ángulo de disparo apropiado sea obtenido, para así alcanzar a golpear el punto $(1, 0)$.

Como consecuencia del análisis del procedimiento, se suscita el problema de considerar si las soluciones del nuevo problema de valores iniciales están definidas hasta el valor $t = 1$. Si esto no ocurre, o sea, no están definidas hasta ese valor, entonces tampoco la función Φ lo está para todos los valores de λ .

Sin embargo, no obstante tal posibilidad, la función Φ tiene una destacable propiedad : Φ es continua.

En algunos casos, podemos asegurar que $\text{dom}(\Phi) = \mathbb{R}$. Por ejemplo, este es el caso cuando f crece a lo sumo linealmente en su segunda variable, es decir

$$|f(t, u)| \leq a|u| + b,$$

para algunas constantes a y b .

En particular, si f es acotada, el método de disparo funciona muy bien como se muestra en el siguiente ejemplo.

3.1.2. Ecuación del péndulo

Se examina la bien conocida ecuación del péndulo ideal, en régimen forzado por una perturbación p :

$$u''(t) + \text{senu}(t) = p(t), \quad t \in (0, 1).$$

en donde consideramos que la fuerza $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, es continua.

Esta ecuación es muy famosa y ha sido el tema de muchas obras importantes y, además, hay problemas todavía abiertos interesantes referidos a las condiciones periódicas. Sin embargo, la situación es completamente diferente cuando se trata de las condiciones de Dirichlet (3.1.2). La existencia de soluciones puede ser fácilmente comprobada por el método de disparo:

consideramos las condiciones iniciales (3.1.3)

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = \lambda.$$

Si u_λ es la única solución satisfaciendo estas condiciones, entonces, integrando se tiene

$$u'_\lambda(t) = \lambda + \int_0^t [p(s) - s e u_\lambda(s)] ds$$

y poniendo, $R := \int_0^1 |p(t)| dt + 1$, se deduce que u_λ es monótona para $|\lambda| \geq R$.

Más precisamente,

$$\begin{aligned} \lambda \geq R &\Rightarrow u'_\lambda(t) \geq 0, \quad \text{para todo } t \\ \lambda \leq -R &\Rightarrow u'_\lambda(t) \leq 0, \quad \text{para todo } t. \end{aligned}$$

En particular, dado que $u'_R(t) \geq 0$, entonces u_R es *no decreciente*, y dado que $u'_{-R}(t) \leq 0$, u_{-R} es *no creciente*. Como $u_\lambda(0) = 0$, para todo λ , implica que

$$\Phi(R) \geq 0 \geq \Phi(-R).$$

Entonces, por el *teorema de Bolzano*, Φ se anula en $[-R, R]$.

Evidentemente el mismo procedimiento se puede aplicar a ecuaciones más generales del tipo de la (3.1.1), para f arbitraria acotada. Pero esta condición de ser acotada es muy restrictiva. Desearíamos demostrar que el método de disparo puede ser aplicado a situaciones más generales, en las cuales no se exija esta restricción para la función f .

3.1.3. Cotas *a priori*

Del ejemplo anterior se puede inferir que el éxito del método de disparo en la prueba de existencia de soluciones, depende fuertemente del conocimiento de algunas propiedades del flujo asociado a la ecuación diferencial. Por lo menos necesitamos estar seguros de que las soluciones del problema de valores iniciales, para un apropiado conjunto de parámetros, están definidas hasta el fin del intervalo. Como se menciona más arriba, de los resultados estándar de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, esto está garantizado para todo λ , cuando la *no linealidad* tiene crecimiento, como máximo, lineal. Sin embargo, hay una cantidad de casos en los que esta restricción no se cumple, y el método de disparo es todavía aplicable en la determinación de la existencia de soluciones. En algunos casos, puede ser de mucha ayuda contar con cotas preestablecidas, o cotas *a priori*, de las soluciones.

La idea esencial es la siguiente: si se sabe de antemano que las soluciones de

un cierto problema están acotadas por alguna constante R , entonces se puede reemplazar la función no lineal f por otra función acotada, digamos \bar{f} , tal que $\bar{f}(t, u) = f(t, u)$, para $|u| \leq R$. Obviamente, esto se debe hacer de tal modo que las soluciones del problema modificado, $u'' = \bar{f}(t, u)$, sean también acotadas por R , de modo que ellas también sean soluciones del problema original (3.1.1). En los siguientes ejemplos, se aplica esta metodología, que extiende la utilidad del *shooting*, a más casos.

Ejemplo 3.1 Sea $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua y localmente Lipschitz en su segunda variable y supongamos que existe una constante $R > 0$, que cumple la siguiente condición

$$f(t, -R) < 0 < f(t, R) \quad \text{para todo } t \in [0, 1]. \quad (3.1.4)$$

llamada *condición de Hartman*.

Entonces el problema Dirichlet (3.1.1)-(3.1.2) tiene al menos una solución u , que cumple que $\|u\|_\infty \leq R$.

Para verlo, se define

$$\bar{f}(t, u) := \begin{cases} f(t, u) & \text{si } |u| \leq R \\ f(t, R) & \text{si } u > R \\ f(t, -R) & \text{si } u < -R. \end{cases}$$

Esta función así definida, \bar{f} , mantiene las propiedades de f de continuidad y es también localmente Lipschitz en u , pero además es acotada. Luego, el método de disparo provee de una solución u del problema

$$\begin{cases} u''(t) = \bar{f}(t, u) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, sólo resta probar que esta solución está acotada por R para todo t (o sea $|u| \leq R, \forall t$), dado que entonces se tiene que $\bar{f}(t, u) = f(t, u), \forall t$ y estamos, por ello, en el problema original.

Para verlo, supongamos que u alcanza su valor máximo en algún t_0 , siendo $u(t_0) > R$. Entonces tenemos que $t_0 \in (0, 1)$ y $u''(t_0) = \bar{f}(t_0, u(t_0)) = f(t_0, R) > 0$, de la definición de \bar{f} , lo cual contradice el hecho de que en t_0 u alcanza su máximo y, por lo tanto, $u''(t_0) \leq 0$. De modo análogo se prueba que $u(t) \geq -R$ para todo t .

Se observa que, en este caso, no es necesariamente cierto que todas las soluciones del problema original estén acotadas por R . Para el propósito de establecer existencia de solución fue suficiente probarlo para la función truncada \bar{f} .

En el siguiente problema, otra característica de la función, la monotonía, permite obtener además unicidad de solución.

Ejemplo 3.2 Sea $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua y localmente Lipschitz en su segunda variable y supongamos que f es no decreciente con respecto a u , a saber

$$f(t, u) \leq f(t, v), \quad \text{para todo } t \in [0, 1], \quad u, v \in \mathbb{R}, u \leq v.$$

Entonces el problema Dirichlet (3.1.1)-(3.1.2), tiene una única solución.

Es digno de observarse una notable novedad con respecto a los ejemplos anteriores: la solución es única, lo cual nos permite comprender el papel de la monotonía en la obtención de unicidad. Para ello, notemos que si u y v son soluciones del problema, entonces la función $w := u - v$ satisface

$$w''(t) = u''(t) - v''(t) = f(t, u) - f(t, v),$$

y entonces

$$w''(t)w(t) = [f(t, u) - f(t, v)](u(t) - v(t)) \geq 0, \quad (3.1.5)$$

dado que si $u \geq v$ entonces $f(t, u) \geq f(t, v)$, y viceversa, por la monotonía, y se tiene que los dos factores de la desigualdad anterior son ambos no negativos o bien no positivos simultáneamente. Además, integrando la (3.1.5) por partes, se tiene

$$0 \leq \int_0^1 w''(t)w(t)dt = w(t)w'(t)|_0^1 - \int_0^1 w'^2(t)dt,$$

en donde el primer término se anula pues $w(0) = 0 = w(1)$. Todo lo cual implica que $\int_0^1 w'^2(t)dt = 0$, y entonces $w' \equiv 0$, lo que a su vez nos dice que $w \equiv 0$ y por lo tanto se obtiene la deseada condición de unicidad: $u \equiv v$.

Resta entonces probar la existencia de solución del problema. Al respecto podemos mencionar que este es un caso particular de una clase bastante general de

problemas en los cuales decimos que *unicidad implica existencia*. Aquí reemplazaremos nuevamente la función dada f por otra función truncada \bar{f} , como en el ejemplo anterior, con la diferencia que en el presente problema no tenemos una cota R dada por anticipado, como la que surgía de la condición de Hartman vista. Por lo tanto debemos elegirla de un modo conveniente. Esta es la idea fundamental de una *cota a priori*: a veces es posible, antes de saber si el problema tiene o no solución, demostrar que la imagen de tal solución, si existe, se encuentra en un cierto conjunto acotado.

A tal efecto observamos que si $u(t)$ es solución del problema dado por las ecuaciones (3.1.1)-(3.1.2), entonces podemos escribir

$$u''(t) = f(t, u(t)) - f(t, 0) + f(t, 0),$$

y, como $u(0) = 0$, tenemos que

$$u''(t)u(t) = [f(t, u(t)) - f(t, 0)]u(t) + f(t, 0)u(t) \geq f(t, 0)u(t), \quad (3.1.6)$$

donde nuevamente usamos la monotonía de f respecto de u , dado que si $u(t) \geq 0 = u(0) \implies f(t, u(t)) \geq f(t, 0)$ y si $u(t) \leq 0 = u(0) \implies f(t, u(t)) \leq f(t, 0)$, con lo que $[f(t, u(t)) - f(t, 0)](u(t) - 0) \geq 0$.

Como, integrando por partes, tenemos que

$$\int_0^1 u''(t)u(t)dt = u(t)u'(t)|_0^1 - \int_0^1 u'^2(t)dt = - \int_0^1 u'^2(t)dt,$$

pues $u(0) = u(1) = 0$ (por (3.1.2)), integrando en ambos miembros de la desigualdad (3.1.6) tenemos

$$\int_0^1 u'^2(t)dt \leq - \int_0^1 f(t, 0)u(t)dt \leq \|u\|_\infty \int_0^1 |f(t, 0)|dt. \quad (3.1.7)$$

Por otra parte, podemos escribir

$$|u(t)| = \left| \int_0^t u'(s)ds \right| \leq \int_0^t |u'(s)|ds \leq \int_0^1 |u'(s)|ds, \quad \text{para todo } t.$$

Entonces, tomando el máximo de $|u(t)|$ y aplicando la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* al miembro derecho, llegamos a que

$$\|u\|_\infty \leq \left(\int_0^1 u'^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|u'\|_{L^2[0,1]}.$$

Luego, combinando esta última desigualdad con la (3.1.7), tenemos que

$$\|u\|_{\infty} \leq \int_0^1 |f(t, 0)| dt := R.$$

Si ponemos ahora \bar{f} exactamente como en el ejemplo anterior, entonces el problema modificado

$$\begin{cases} u''(t) = \bar{f}(t, u) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

tiene una solución u . La cota R fue obtenida usando sólo la monotonía de f . Como f es también no decreciente en su segunda variable y es $\bar{f}(t, 0) = f(t, 0)$, deducimos que $\|u\|_{\infty}$ está acotada por la misma R , y entonces es una solución del problema original.

Ejemplo 3.3 Sea $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua y localmente Lipschitz en su segunda variable y supongamos que f tiene crecimiento lineal en u , esto es

$$|f(t, u)| \leq c|u| + d,$$

para algunas constantes $c, d \geq 0$.

Si $c < 1$, entonces el problema con condiciones *Dirichlet* (3.1.1)-(3.1.2) tiene una solución.

Siguiendo la misma idea, buscamos una cota *a priori* para la f . Procedemos, buscando una cota para una solución, nuevamente multiplicando la ecuación diferencial (3.1.1) por u e integrando. Obtenemos

$$\int_0^1 u''(t)u(t)dt = u(t)u'(t)|_0^1 - \int_0^1 u'^2(t)dt = - \int_0^1 u'^2(t)dt,$$

por lo cual

$$\int_0^1 u'^2(t)dt = - \int_0^1 f(t, u(t))u(t)dt \leq c \int_0^1 u^2(t)dt + d \int_0^1 |u(t)|dt,$$

puesto que $-\int_0^1 f u dt \leq \left| \int_0^1 f u dt \right| \leq \int_0^1 |f||u|dt$, de donde se obtiene lo anterior dado que $|f| \leq c|u| + d$.

Luego, otra vez tomando el máximo como en la cuenta anterior, llegamos a

$$\| u \|_{\infty}^2 \leq c \| u \|_{\infty}^2 + d \| u \|_{\infty}$$

y entonces

$$\| u \|_{\infty} \leq \frac{d}{1-c}.$$

Se fija entonces $R \geq \frac{d}{1-c}$, suficientemente grande, y, definiendo la función truncada \bar{f} como antes, se tiene que $|\bar{f}(t, u)| \leq c|u| + d \leq R$, y las soluciones del problema truncado son, en particular, soluciones del problema original, dado que $\| u \|_{\infty} \leq \frac{d}{1-c} \leq R$ y, por lo tanto, $\bar{f}(t, u(t)) = f(t, u(t))$.

Nota. Se observa en [4] (Observación 2.1) que la condición $c < 1$ puede mejorarse usando la *desigualdad de Poincaré*

$$\int_0^1 u^2(t) dt \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 u'^2(t) dt,$$

con la cual se verifica que una condición suficiente para la existencia de solución es que $c < \pi^2$, la cual podemos ver que es una cota óptima. Efectivamente observemos que si $c = \pi^2$, si, por ejemplo, $f(t, u) = \operatorname{sen}(\pi t) - \pi^2 u$, no existe solución:

si suponemos que $u(t)$ es una solución, multiplicando ambos miembros de la ecuación diferencial (3.1.1), e integrando, se tiene que

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2(\pi t) dt = \int_0^1 [u''(t) + \pi^2 u(t)] \operatorname{sen}(\pi t) dt = 0,$$

lo cual es absurdo.

3.2. Problema bidimensional

Consideramos ahora, siguiendo a [4], la extensión del método a un problema de mayores dimensiones que uno, en particular, a dos dimensiones. El objetivo consiste en resolver, en lugar de una ecuación escalar, un sistema de dos ecuaciones. Esto es, se considera una ecuación diferencial como la (3.1.1), pero ahora con, por ejemplo, $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, y se busca una solución $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, que satisfaga las condiciones de *Dirichlet* (3.1.2).

Como se menciona en la referencia, los resultados del caso de dos dimensiones

pueden ser extendidos a más dimensiones ya que aquél contiene los elementos principales del análisis, como el argumento que utiliza la generalización del *Teorema de Bolzano*, a la vez que permite mayor simplicidad en el mismo, usando sólo el *Teorema de Green*, generalizándose luego a mayores dimensiones que dos. Por otra parte, es como será utilizado en el presente trabajo. También en función de su utilización, consideraremos más detenidamente el empleo de los elementos básicos del análisis complejo del índice de una curva cerrada y su invariancia por homotopías.

3.2.1. Extensión a un sistema de ecuaciones

Análogamente al caso escalar, sea ahora $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, continua y localmente *Lipschitz* en u , y definamos para $\lambda \in \mathbb{R}^2$, $u_\lambda(t) \in \mathbb{R}^2$ como la única solución del problema de valores iniciales (3.1.1)-(3.1.3)

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u) \\ u(0) = (0, 0), u'(0) = \lambda. \end{cases}$$

Entonces, como antes,

$$u'_\lambda(t) = \lambda + \int_0^t f(s, u(s))ds,$$

e integrando nuevamente,

$$u_\lambda(t) = \lambda t + \int_0^t \left(\int_0^\tau f(s, u(s))ds \right) d\tau.$$

Si u_λ está definida hasta $t = 1$, podemos una vez más definir

$$\Phi(\lambda) := u_\lambda(1),$$

y por lo tanto,

$$\Phi(\lambda) = \lambda + S,$$

donde las sumas anteriores se realizan en \mathbb{R}^2 , cumpliéndose que $\|S\| \leq \|f\|_\infty$. En este contexto, no podemos aplicar el *teorema de Bolzano* tal y como se realizó en los ejemplos en \mathbb{R} , dado que estamos tratando con un problema en \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, para probar la existencia de un cero de la función $\Phi \in \mathbb{R}^2$ no aparece el

camino seguido antes como obvio.

El procedimiento, que se sigue en [4], para tal fin, comienza considerando el siguiente argumento: en primer lugar, es claro que si $R > \|f\|_\infty$, entonces $\|\Phi(\lambda) - \lambda\| < R$, para todo λ .

Entonces,

$$\|\lambda\|^2 - 2\Phi(\lambda)\cdot\lambda + \|\Phi(\lambda)\|^2 < R^2$$

y, en particular, cuando $\|\lambda\| = R$, se deduce que

$$\Phi(\lambda)\cdot\lambda > \frac{1}{2}\|\Phi(\lambda)\|^2 \geq 0 \implies \Phi(\lambda)\cdot\lambda > 0.$$

Recordando que $\Phi(\lambda)\cdot\lambda = \|\Phi(\lambda)\| \cdot \|\lambda\| \cos\alpha$, donde α es el ángulo entre $\Phi(\lambda)$ y λ , el cálculo anterior implica que cuando $\|\lambda\| = R$, el $\cos\alpha > 0$, siendo entonces $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, y por lo tanto el vector Φ apunta hacia afuera de la bola $\overline{B_R(0)}$.

Se plantea la pregunta de si esta condición es suficiente para concluir que Φ se anula en $B_R(0)$. De suponer lo contrario, se deduce que para cada $\lambda \in \overline{B_R(0)}$, el vector $L_\delta := \lambda + \delta\Phi(\lambda)$ interseca la circunferencia $\partial B_R(0)$ en un único valor de $\delta = \delta(\lambda) \geq 0$. Más precisamente, de la ecuación

$$\|\lambda + \delta\Phi(\lambda)\|^2 = R^2,$$

desarrollando el cuadrado y hallando la raíz positiva, se tiene que

$$\delta(\lambda) = \frac{-\Phi(\lambda)\cdot\lambda + \sqrt{(\Phi(\lambda)\cdot\lambda)^2 + R^2 - \|\lambda\|^2}}{\|\Phi(\lambda)\|^2},$$

(el signo negativo corresponde a una raíz $\delta < 0$), en donde se puede ver que el radicando, para $\|\lambda\| = R$, es positivo, con lo que la función δ es tan regular como Φ .

Luego, se concluye que la aplicación $r : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$r(\lambda) = \lambda + \delta(\lambda)\Phi(\lambda)$$

es tan suave como Φ y tiene las dos propiedades siguientes:

1. $r(\overline{B_R(0)}) \subset \partial B_R(0)$
2. $\lambda \in \partial B_R(0) \implies r(\lambda) = \lambda$.

Es decir, r es una *retracción*, que aplica una bola cerrada en su borde y deja los puntos del borde fijos.

El siguiente teorema (Teorema 2.1 de [4]) que enunciamos sin demostración (en la cual se procede por un argumento de contradicción y se usa el *Teorema de Green*), afirma que una tal aplicación C^2 no puede existir.

Teorema 3.2.1 *No existe una aplicación C^2 , $r : \overline{B_1(0)} \rightarrow \partial B_1(0)$, tal que $r|_{\partial B_1(0)} = i_d$.*

Como consecuencia de esta versión del teorema de la no retracción se deduce, de los cálculos previos, que si Φ es una aplicación C^2 de la bola cerrada unitaria, que apunta hacia afuera en el borde, es decir $\Phi(x).x > 0$ para $x \in \partial B_1(0)$, entonces necesariamente se anula en el interior de la bola (Teorema 2.2 de [4]):

Teorema 3.2.2 *Supongamos que $\Phi : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación C^2 y satisface que $\Phi(x).x > 0$ para $x \in \partial B_1(0)$.*

Entonces Φ tiene un cero en $B_1(0)$.

Además, también se obtiene una versión C^2 del *Teorema de Brouwer* (Teorema 2.3 de [4]):

Teorema 3.2.3 *Sea $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ una aplicación C^2 . Entonces f tiene al menos un punto fijo, o sea, existe $x \in \overline{B_1(0)}$ tal que $f(x) = x$.*

Dem. Teorema 3.2.1 *Si $f(x) = x$ para algún $x \in \partial B_1(0)$, se cumple. Entonces supongamos que no. Luego definimos la aplicación $\Phi := x - f(x)$. Por lo tanto, para $x \in \partial B_1(0)$,*

$$\Phi(x).x = \|x\|^2 - f(x).x = 1 - f(x).x > 0$$

puesto que $f(x).x = \|f(x)\| \cdot \|x\| \cos(\widehat{f(x), x}) < 1$, dado que $f(x) \neq x$. Por lo tanto Φ se anula en $B_1(0)$. \square

El tratamiento del tema en [4] ahora continúa con el resultado siguiente (Teorema 2.4), que puede ser considerado como una generalización del teorema de Bolzano para campos vectoriales en \mathbb{R}^2 , también conocido como el *Teorema del valor intermedio generalizado* que en la referencia se prueba:

Teorema 3.2.4 (Poincaré-Miranda, versión C^2) .

Sea $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación C^2 tal que

$$\begin{aligned} f_1(-1, x_2) &< 0 < f_1(1, x_2) & \forall x_2 \in [-1, 1] \\ y \quad f_2(x_1, -1) &< 0 < f_2(x_1, 1) & \forall x_1 \in [-1, 1], \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Entonces existe $x \in (-1, 1) \times (-1, 1)$ tal que $f(x) = (0, 0)$.

Se observa, además, que tanto este teorema como el anterior Teorema 3.2.2 siguen siendo válidos si cualquiera de las desigualdades (3.2.1) y $\Phi(x).x > 0$ se invierten o si dejan de ser estrictas.

Esta parte concluye probando que los resultados precedentes son topológicos, es decir, que continúan valiendo sin la exigencia de regularidad, o sea, si las aplicaciones son sólo continuas. Para tal fin se utiliza el *Teorema de Stone-Weierstrass* para demostrar los siguientes teoremas (Teoremas 2.5, 2.6, 2.7 y 2.8 de [4]), versiones de los teoremas anteriores en los que la Φ (y por lo tanto también la r) es sólo continua, que enunciamos sin demostración, las que pueden verse en [4]:

Teorema 3.2.5 *No existe una aplicación continua, $r : \overline{B_1(0)} \rightarrow \partial B_1(0)$, tal que $r|_{\partial B_1(0)} = i_d$.*

Teorema 3.2.6 *Supongamos que $\Phi : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación continua y satisface que $\Phi(x).x > 0$ para $x \in \partial B_1(0)$. Entonces Φ tiene un cero en $B_1(0)$.*

Teorema 3.2.7 (Teorema de Brouwer, versión continua) .

Cualquier aplicación continua $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ tiene al menos un punto fijo.

Teorema 3.2.8 (Teorema de Poincaré-Miranda) .

Sea $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación continua tal que

$$\begin{aligned} f_1(-1, x_2) &< 0 < f_1(1, x_2) & \forall x_2 \in [-1, 1] \\ y \quad f_2(x_1, -1) &< 0 < f_2(x_1, 1) & \forall x_1 \in [-1, 1], \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Entonces existe $x \in (-1, 1) \times (-1, 1)$ tal que $f(x) = (0, 0)$.

Se observa además en [4], la equivalencia de estos teoremas, pese al orden específico en el que fueron presentados, es decir, cualquiera de ellos se puede usar para probar otro de ellos, y su validez en dimensiones mayores a dos. Además, cualquiera de ellos implica el *Axioma de completitud* de los números reales.

En síntesis, contando con estos resultados, podemos contestar afirmativamente la pregunta formulada al principio y concluir que efectivamente la función Φ tiene un cero en la bola $B_R(0)$, lo cual equivale a la existencia de solución en todo el intervalo $[0, 1]$, extendiendo el método utilizado para el caso de una dimensión al caso de dos dimensiones.

3.2.2. Utilizando Análisis Complejo

Comentamos aquí el tratamiento del caso de dos dimensiones mediante la utilización de herramientas del Análisis Complejo.

Repasamos los siguientes conceptos básicos muy difundidos.

Índice o Número de vueltas: sea $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$, una curva cerrada continua, que no pasa por el punto a .

Se define el *Índice de la curva γ con respecto al punto a* por la ecuación

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a},$$

también llamado *Número de vueltas de γ con respecto al punto a* .

Curvas homotópicas: interesa el comportamiento de un arco bajo deformaciones continuas. Intuitivamente hablando, surge la pregunta de si es posible deformarse de manera continua un arco γ_1 en otro arco γ_2 , teniendo ambos arcos sus extremos comunes, estando ambos contenidos en una región Ω y manteniéndose fijos los extremos y los arcos intermedios dentro de Ω . Dos tales arcos que puedan deformarse uno en el otro se dicen *homotópicos con respecto a Ω* , y esta es una clase de equivalencia. Este concepto físico de deformación tiene una interpretación casi inmediata en términos matemáticos:

se dice que dos arcos γ_1 y γ_2 , definidos por las ecuaciones $z = z_1(t)$ y $z = z_2(t)$ sobre el mismo intervalo paramétrico $\alpha \leq t \leq \beta$, son *homotópicos* en Ω , si existe una función continua $h : [\alpha, \beta] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, con las siguientes propiedades:

- 1) $h(t, s) \in \Omega$ para todo $(t, s) \in [\alpha, \beta] \times [0, 1]$,
- 2) $h(t, 0) = z_1(t)$ y $h(t, 1) = z_2(t)$, para todo $t \in [\alpha, \beta]$,
- 3) $h(\alpha, s) = z_1(\alpha) = z_2(\alpha)$ y $h(\beta, s) = z_1(\beta) = z_2(\beta)$, para todo $s \in [0, 1]$.

Se pueden efectuar con facilidad las demostraciones que muestran que la relación de homotopía, como está definida aquí, es una relación de equivalencia, siendo posible, por lo tanto, agrupar todos los arcos en clases de equivalencia llamadas *clases de homotopía*. Los arcos en una clase de homotopía tienen extremos comunes y pueden deformarse unos en otros dentro de Ω . Como se puede ver en [14], si se trazan sucesivamente dos arcos γ_1 y γ_2 empezando γ_2 en el punto terminal de γ_1 , forman un nuevo arco Γ_{12} (cuya parametrización no está determinada de manera única). Un razonamiento sencillo muestra que la clase de homotopía

de Γ_{12} depende sólo de las clases de γ_1 y γ_2 , por lo cual se la puede considerar como una multiplicación de clases de homotopía, la que está definida únicamente cuando coinciden el punto inicial de γ_2 con el inicial de γ_1 . Limitandonos a las clases de homotopía de curvas cerradas, el producto está siempre definido y forman un grupo.

Invariancia del Índice por homotopías: si $\gamma_1, \gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ son curvas cerradas, y $h : [\alpha, \beta] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$, es continua y satisface que $h(t, 0) = \gamma_1(t)$, $h(t, 1) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$, y $h(\alpha, s) = h(\beta, s)$ para todo $s \in [0, 1]$, entonces

$$I(\gamma_1, a) = I(\gamma_2, a).$$

Se considera ahora el siguiente lema (Lema 2.1 de [4]), que será de gran importancia en la prueba del resultado principal en la próxima sección.

Lema 3.2.1 *Sea $f : \bar{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, continua, y sea $\gamma(t) = e^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Entonces*

$$I(f \circ \gamma, 0) = 0.$$

Dem. Lema 3.2.1 *Es suficiente considerar la homotopía $h(t, s) = f(s\gamma(t))$. En efecto, dado que $h(t, 0) = f(0)$ y $h(t, 1) = f(\gamma(t))$, se tiene que $f \circ \gamma$ es homotópica al punto $f(0)$. Como $I(f(0), 0) = 0$, por la invariancia del índice por la homotopía se tiene el resultado. \square*

Utilización en la prueba del resultado principal de la Sección 4

Como consecuencia de este Lema 3.2.1, cuya validez se mantiene en un dominio homeomorfo al disco, como el dominio Ω que definiremos en el problema específico que se trata en el próximo capítulo, si consideramos que $I(f \circ \gamma, 0) \neq 0$, entonces la función continua f debe anularse. En la prueba del resultado principal de la próxima sección, basada en los trabajos [5] y [9], se prueba que el índice de la imagen por una transformación continua T del borde de este adecuado dominio Ω respecto de un punto determinado, no se anula, con lo cual, el uso de este Lema 3.2.1 permite obtener el resultado deseado.

Nota. Vemos también otra demostración del *teorema de Brouwer*, para aplicaciones continuas, mencionado en el punto anterior, utilizando estos elementos del Análisis Complejo.

Suponemos que $f : \bar{B}_1(0) \rightarrow \bar{B}_1(0)$ es continua y que $f(z) \neq z$ para todo $z \in \bar{B}_1(0)$. Luego definimos $g(z) = z - f(z)$. Como f no tiene puntos fijos, g no se anula. Por un lado, consideramos la homotopía $h(t, s) = \gamma(t) - sf(\gamma(t))$. Luego, $g \circ \gamma$ es homotópica a γ , pues $h(t, 0) = \gamma(t)$ y $h(t, 1) = g(\gamma(t))$ y por lo tanto $I(g \circ \gamma, 0) = I(\gamma, 0) = 1$. Por otra parte, el lema previo nos dice que, dado que g no se anula, $I(g \circ \gamma, 0) = 0$, en contradicción con lo anterior. \square

4. Aplicación al problema con condiciones de Neumann para un modelo de electrodifusión de dos iones

Analizamos en esta sección los trabajos [5] y [9], en los cuales se aplica el método de disparo explicado a este problema particular considerado, para los casos de valencias iguales $\nu_+ + \nu_- = 0$, y el más general de $\nu_+ + \nu_- \leq 0$, respectivamente.

4.1. El caso $\nu_+ + \nu_- = 0$

La eliminación de las concentraciones iónicas en el problema de dos iones conduce a una ecuación no lineal en la variable y , proporcional al *campo eléctrico* E , a saber:

$$y''(x) = f(x, y(x); y(0), y(1)), \quad x \in (0, 1) \quad (4.1.1)$$

donde

$$f(x, y; y(0), y(1)) := y \left[\lambda - \frac{y(0)^2 - y^2}{2} + Ax \right] - AD \quad (4.1.2)$$

con

$$A = l\lambda + \frac{y(0)^2 - y(1)^2}{2}, \quad (4.1.3)$$

y la juntura líquida ocupa la región $0 \leq x \leq 1$. Las cantidades $l > 0$, $\lambda > 0$ y D , con $-1 < D < 1$ son parámetros como se describen en [2], en donde notamos que si y es una solución de (4.1.1) para los parámetros l , λ y D , entonces $-y$ es una solución para los parámetros l , λ y $-D$. Es inmediato ver que cuando $D = 0$ la única solución es $y \equiv 0$. Por lo tanto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $D > 0$. La neutralidad eléctrica en los reservorios impone las condiciones de contorno de Neumann

$$y'(0) = y'(1) = 0 \quad (4.1.4)$$

Como comentáramos en la introducción, el problema determinado por las ecuaciones (4.1.1) - (4.1.4) es no convencional en el sentido que la ecuación no lineal del modelo (4.1.1) incluye las cantidades dependientes de la solución $y(0)$ e $y(1)$. Como vimos en la primera sección, *Thompson* en [2] utiliza la teoría de grado y el método bien establecido de super soluciones y subsoluciones (ver por ejemplo [6]) para probar la existencia de una solución positiva al problema de contorno (4.1.1)-(4.1.4) cuando $D>0$ y sujeto a la ya explicada restricción

$$\lambda \geq 2l \left[1 - \frac{1}{(1+l)^2} \right] D^2. \quad (4.1.5)$$

Con el método adoptado, que consiste en la reducción del problema original a uno equivalente, susceptible de aplicársele un método de disparo bidimensional, el cual, como vimos, es una extensión del unidimensional conocido, se elimina la restricción mencionada.

4.1.1. Una reducción a Painlevé II

Las ecuaciones de Painlevé

Las seis *Transcendentes clásicas de Painlevé* se introdujeron a comienzos del siglo XX por *Paul Painlevé* y su escuela, como la solución de un tipo específico de problemas para Ecuaciones Diferenciales de segundo orden no lineales, en el plano complejo, de la forma

$$u_{xx} = F(x, u, u_x)$$

donde F es una función *meromorfa* en x y racional en u y u_x .

El problema era encontrar todas las ecuaciones de esta forma, que tienen la propiedad de que sus soluciones son libres de puntos críticos móviles, es decir, la ubicación de las singularidades de la solución no depende de los datos iniciales. A fines del Siglo XIX y principios del XX, Painlevé y sus discípulos mostraron que existe una clase de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no lineales que poseen la propiedad, originalmente propuesta por *Picard*, llamada luego la *Propiedad de Painlevé*, de que pueden ser siempre transformadas en una de las cincuenta formas canónicas posibles, determinadas por ellos mismos. Seis de estas cincuenta ecuaciones requieren nuevas funciones trascendentales para expresar su solución. Estas funciones especiales que resuelven las seis ecuaciones referidas, son llamadas las *Trascendentes de Painlevé*, y sus únicas singularidades

móviles son polos, esto es que las singularidades dependen sólo de la ecuación en estudio y no de las condiciones iniciales del problema en cuestión.

Painlevé y *Gambier* mostraron a principios del siglo XX, mediante una transformación de *Möbius*,

$$x \mapsto \phi(x), \quad u \mapsto \frac{\alpha(x)u + \beta(x)}{\gamma(x)u + \delta(x)},$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y ϕ son funciones meromorfas en x , que existen sólo cincuenta de tales ecuaciones, cada una de las cuales o bien puede ser integrada en términos de funciones conocidas, o se puede asignar a un conjunto de seis ecuaciones que no pueden ser integradas en términos de funciones conocidas. Estas seis ecuaciones son llamadas *Ecuaciones de Painlevé*, y sus soluciones generales son llamadas *Trascendentes de Painlevé*.

Las formas canónicas de las Ecuaciones de Painlevé son:

1. $u_{xx} = 6u^2 + x$
2. $u_{xx} = xu + 2u^3 - \alpha$
3. $u_{xx} = \frac{1}{u}u_x^2 - \frac{u_x}{x} + \frac{1}{x}(\alpha u^2 + \beta) + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u}$
4. $u_{xx} = \frac{1}{2u}u_x^2 + \frac{3}{2}u^3 + 4xu^2 + 2(x^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{u}$
5. $u_{xx} = \frac{3u - 1}{2u(u - 1)}u_x^2 - \frac{1}{x}u_x + \frac{(u - 1)^2}{x^2} \left(\alpha u + \frac{\beta}{u} \right) + \frac{\gamma u}{x} + \frac{\delta u(u + 1)}{u - 1}$
6. $u_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u - 1} + \frac{1}{u - x} \right) u_x^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{u - x} \right) u_x + \frac{u(u - 1)(u - x)}{x^2(x - 1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{x}{u^2} + \gamma \frac{x - 1}{(u - 1)^2} + \delta \frac{x(x - 1)}{(u - x)^2} \right)$

en donde, α, β, γ y δ son parámetros complejos.

Desde entonces hasta hoy, una gran cantidad de hechos acerca de estas ecuaciones fueron descubiertos: la estructura de las singularidades móviles, familias de soluciones explícitas, sus propiedades de transformación, etc.

La reducción en nuestro caso

Observamos que la ecuación (4.1.1) adopta la forma

$$y'' = y \left(\zeta + \frac{y^2}{2} + \mu x \right) + \nu$$

donde

$$\zeta = \lambda - \frac{y(0)^2}{2}, \quad \mu = l\lambda + \frac{y(0)^2 - y(1)^2}{2}, \quad \nu = -\mu D$$

y, haciendo los cambios de variables

$$y = \xi U, \quad x = \eta X + \delta$$

se obtiene la reducción a la ecuación canónica

$$\frac{d^2U}{dX^2} = 2U^3 + XU + \bar{\alpha}$$

con

$$|\xi\eta| = 2, \quad \delta = -\zeta/\mu, \quad \eta = \mu^{-1/3}$$

y donde el parámetro $\bar{\alpha}$ está dado por

$$\bar{\alpha} = \frac{\eta^2\nu}{\xi} = -\frac{\mu^{1/3}D}{\xi}$$

Como $\mu = l\lambda + \frac{y_0^2 - y_1^2}{2} = l\lambda + 2\mu^{2/3}(U_0^2 - U_1^2)$, donde usamos la notación $y(0) = y_0, y(1) = y_1, U(0) = U_0$ y $U(1) = U_1$, obtenemos una ecuación del parámetro $\bar{\alpha}$ en función de los parámetros físicos l, λ, D y de los valores de borde $U_0 = U|_{X=-\delta/\eta}, U_1 = U|_{X=(1-\delta)/\eta}$. En general, entonces, el estudio de la existencia para el problema de borde original bajo esta reducción de Painlevé II no es abordable en vista de esta complicada dependencia de $\bar{\alpha}$ de los valores de borde.

Notemos que si $\delta = 1, \eta = -1$ y por lo tanto $\zeta = 1, \mu = -1$ entonces $x = 0 \Rightarrow X = 1, x = 1 \Rightarrow X = 0$ y $\bar{\alpha} = D/\xi$, bajo la reducción canónica. Por lo tanto, obtenemos un problema de Neumann para la ecuación de Painlevé II convencional, donde $\bar{\alpha}$ es independiente de las condiciones de contorno. Resultados de existencia para la ecuación de Painlevé II bajo condiciones Dirichlet y condiciones de borde periódicas han sido investigadas en [7], mientras que la aplicación de problemas de contorno se ha realizado en [8].

4.1.2. Un Problema Equivalente

Aquí, en vista de la naturaleza intratable del problema con condiciones de Neumann (4.1.1) - (4.1.4) bajo la reducción anterior, se adopta una formulación alternativa que permite una novedosa aplicación de un método de disparo exacto.

Consideramos el cambio de variable

$$z(x) = \frac{y(x)}{y(0)} \quad (4.1.6)$$

que introducida en (4.1.1) da

$$z''(x) = g(x, z(x), \gamma, z(1)), \quad x \in (0, 1) \quad (4.1.7)$$

donde

$$g(x, z, \gamma, z_1) =$$

$$z(x) \left\{ \lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(x)^2) + \left[l\lambda + \frac{\gamma^2}{2}(1 - z_1^2) \right] x \right\} - \frac{[l\lambda + \frac{\gamma^2}{2}(1 - z_1^2)]D}{\gamma} \quad (4.1.8)$$

$$\text{con} \quad \gamma = y_0 = y(0) > 0 \quad \text{y} \quad z_1 = z(1)$$

Si ponemos

$$\alpha = \frac{l\lambda + \frac{\gamma^2}{2}(1 - z_1^2)}{\gamma} \quad (4.1.9)$$

entonces la ecuación adopta la forma compacta

$$z''(x) = \left[\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(x)^2) + \gamma\alpha x \right] z(x) - \alpha D \quad (4.1.10)$$

donde, si α es conocida, entonces l puede ser obtenida de

$$l = \frac{\gamma\alpha - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z_1^2)}{\lambda} \quad (4.1.11)$$

y z ahora satisface las condiciones

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 0 \quad (4.1.12)$$

y

$$z'(1) = 0 \quad (4.1.13)$$

En el problema original, dados los parámetros físicos $\lambda, l > 0$ y D , buscamos una función $y(x)$ que satisfaga (4.1.1) - (4.1.4). Esto es equivalente a hallar una adecuada $\gamma > 0$ y una función $z(x)$ que satisface (4.1.10), (4.1.12), y (4.1.13). Tal como está, el último problema tiene la misma dificultad que el original ya que la ecuación diferencial (4.1.10) contiene el parámetro indeterminado γ tanto como el parámetro α dependiente del valor a ser determinado z_1 . El procedimiento consiste en modificar el problema no especificando el valor de l al principio, arrancando con dos valores dados de las constantes $\alpha > 0$ y $\gamma \geq 0$ (Notar que permitimos $\gamma = 0$ por conveniencia, ya que $\gamma > 0$ en el problema (4.1.6)-(4.1.8)). Aquí procedemos sin el requisito de la condición de borde (4.1.13). En consonancia, en lugar de un problema de valores de contorno estamos tratando con un problema de valores iniciales, o sea (4.1.10) - (4.1.12).

El Método de Disparo

Supongamos que existe una solución positiva en todo el intervalo $[0,1]$. Entonces podemos calcular el par de valores $z'(1), l$ (obtenida de (4.1.11)). Esto define un operador continuo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(\alpha, \gamma) = (z'(1), l)$. El problema de valores de contorno original tendrá una solución si y sólo si la ecuación del operador T , $T(\alpha, \gamma) = (0, l)$, con $\alpha > 0$ y $\gamma > 0$, donde el valor de l es el fijado en el problema original, tiene solución.

Llamamos a esta técnica el **método de disparo ("shooting") bidimensional**.

Se presenta el siguiente problema: es sabido que una solución del problema de valores iniciales siempre existe en un entorno del origen, pero ésta puede no ser una solución positiva definida en todo el $[0,1]$. En primer lugar, la solución puede anularse en algún punto del $[0,1]$ y volverse negativa más allá de él. En segundo lugar, debido a la existencia del término cuadrático z^2 en el miembro derecho de la ecuación (4.1.10), la solución puede *explotar* en algún punto del $[0,1]$ y entonces $z'(1)$ no estará definida. (En efecto, una cuenta sencilla muestra que la incidencia del término de grado 3 que resulta en el miembro derecho de la ecuación (4.1.10), produce una dependencia cuadrática de z' con z).

Más adelante se muestra que estas circunstancias no pueden ocurrir definiendo adecuadamente el operador T y un conveniente dominio Ω , que será un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , con borde $\partial\Omega$. Si $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ es un punto que no pertenece a la imagen de $\partial\Omega$ por T y notamos por A un punto cualquiera del borde $\partial\Omega$, como A recorre el borde (en un sentido dado, por ejemplo antihorario) su imagen $T(A)$ traza una curva cerrada que no pasa por el punto (c, d) . Podemos entonces definir el "*número de vueltas*" o "*Índice de la curva*" de esta curva $T(\partial\Omega)$ con respecto a (c, d) . Es útil recalcar que si T es homotópica a otra aplicación T_1 y el punto (c, d) no está en la imagen de $\partial\Omega$ bajo la homotopía, entonces el índice de T con respecto a (c, d) es el mismo que el de T_1 .

El Lema 3.2.1 de la sección anterior nos permite establecer que si el índice del punto (c, d) respecto de la curva no es cero, entonces la ecuación $T(\alpha, \gamma) = (c, d)$ tiene una solución (α, γ) en Ω .

Para aplicar este resultado a nuestro problema, ponemos $(c, d) = (0, l)$ y buscamos una adecuada región Ω tal que el *número de vueltas* de $T(\partial\Omega)$ con respecto a $(0, l)$ no sea cero.

En lo que sigue, se muestra que si se eligen dos números suficientemente grandes α^* y γ^* entonces el interior del rectángulo con vértices $P = (\lambda/D, 0)$, $Q = (\alpha^*, 0)$, $R = (\alpha^*, \gamma^*)$ y $S = (\lambda/D, \gamma^*)$ servirá como el Ω .

Lemas de utilidad:

El primer lema tratado en [5], se usa en la demostración de un lema posterior. Aquí consideramos adicionalmente que $z(x_0) \geq 0$ y que $z''(x_0) \geq 0$, que es como se utiliza.

Lema 4.1.1 *Sean $x_0 < x_1$ dos puntos del intervalo $[0, 1]$, tales que cumplen que $0 \leq z(x_0) \leq z(x_1)$, y supongamos además que $z''(x_0) \geq 0$. Entonces $z''(x_0) < z''(x_1)$.*

Dem. Lema 4.1.1 *Si derivamos el miembro derecho de la ecuación diferencial*

(4.1.10) respecto de z , para $x = x_0$, fijo, tenemos

$$\frac{\partial z''}{\partial z}|_{(x,z)=(x_0,z(x_0))} = \gamma^2 z(x_0)^2 + \left(\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(x_0)^2) + \gamma\alpha x_0 \right).$$

Como suponemos $z''(x_0) \geq 0$, la ecuación (4.1.10) nos dice que

$$\left[\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(x_0)^2) + \gamma\alpha x_0 \right] z(x_0) \geq \alpha D > 0,$$

lo cual, dado que $z(x_0) > 0$ (de ser $z(x_0) \geq 0$), nos muestra que

$$\left[\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(x_0)^2) + \gamma\alpha x_0 \right] > 0,$$

y entonces, siendo $\gamma^2 z(x_0)^2 \geq 0$, tenemos que

$$\frac{\partial z''}{\partial z}|_{z=z(x_0)} > 0.$$

Por otro lado, derivando la ecuación ahora respecto de x , para un $z = z(x_0)$ fijo, también tenemos

$$\frac{\partial z''}{\partial z}|_{(x,z)=(x_0,z(x_0))} = \gamma\alpha z(x_0) > 0$$

Por lo tanto, como $x_0 < x_1$ y $0 < z(x_0) \leq z(x_1)$, tenemos el resultado buscado. \square

El lema siguiente en [5], también es utilizado en demostraciones posteriores

Lema 4.1.2 Supongamos que $Z(x)$ y $U(x)$ son funciones definidas en el intervalo $[0, x_1]$ y que ellas satisfacen

$$Z''(x) \geq F(x, Z(x)), \quad (4.1.14)$$

$$U''(x) = F(x, U(x)), \quad (4.1.15)$$

donde la función continua $F(x, Z)$ es creciente en Z para cada $x \in [0, x_1]$ fijo. Si además se supone que

$$Z(0) \geq U(0), \quad Z'(0) \geq U'(0), \quad (4.1.16)$$

entonces

$$Z(x) \geq U(x), \quad Z'(x) \geq U'(x), \quad \forall x \in [0, x_1].$$

Dem. Lema 4.1.2 Primeramente se prueba en la suposición más fuerte de que las desigualdades en (4.1.14) y (4.1.16) son estrictas, para obtener la conclusión de que $Z(x) > U(x)$ para todo $x \in [0, x_1]$.

Suponiendo que la conclusión es falsa, existe un punto $\xi \in (0, x_1]$ en el cual $Z(\xi) = U(\xi)$, mientras $Z(x) > U(x)$ para todo $x < \xi$. Por lo tanto debe ser

$$Z'(\xi) \leq U'(\xi) \tag{4.1.17}$$

Por otro lado, como F es una función creciente de Z , $Z''(x) > F(x, Z(x)) \geq F(x, U(x)) = U''(x) \quad \forall x < \xi$, dado que $Z(x) > U(x) \quad \forall x < \xi$. Luego $Z''(x) > U''(x)$ que juntamente con la segunda desigualdad de (4.1.16) implica que $Z'(\xi) > U'(\xi)$ lo cual contradice (4.1.17). Esto prueba la proposición en el caso de desigualdades estrictas.

Al caso general llegamos utilizando el siguiente argumento de continuidad:

definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, y para cada $x \in [0, x_1]$

$$\begin{aligned} F_n(x, t) &= F(x, t) - \frac{1}{n}, \\ U_n(x) &= U(x) - \frac{(x+1)^2}{2n}. \end{aligned}$$

Entonces, $F_n(x, t)$ es continua y creciente en t para todo $x \in [0, x_1]$, fijo, y tenemos que

$$Z''(x) > F_n(x, t), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{dado que } F_n(x, t) < F(x, t), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y

$$U'_n(x) = U'(x) - \frac{(x+1)}{n}, \quad \text{y por lo tanto,} \quad U''_n(x) = U''(x) - \frac{1}{n},$$

con lo cual también se cumple que $U''_n(x) = F_n(x, t)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y, además, se verifican las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} Z(0) &> U_n(0), \quad \text{dado que } U_n(0) = U(0) - \frac{1}{2n} < U(0), \quad \text{y} \\ Z'(0) &> U'_n(0), \quad \text{puesto que } U'_n(0) = U'(0) - \frac{1}{n} < U'(0). \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{cases} Z''(x) > F_n(x, Z(x)), \\ U''_n(x, U_n(x)) = F_n(x, U_n(x)), \end{cases}$$

con las condiciones iniciales

$$Z(0) > U_n(0) \quad y \quad Z'(0) > U'_n(0),$$

con lo cual estamos en las condiciones más estrictas para las cuales ya hemos demostrado que

$$Z(x) > U_n(x) \quad y \quad Z'(x) > U'_n(x), \quad \forall x \in [0, x_1].$$

Por lo tanto, tomando límite de ambas desigualdades para n tendiendo a infinito, dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, Z(x)) = F(x, Z(x)) \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, U_n(x)) = F(x, U(x)),$$

por la continuidad de F , puesto que $U_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U(x)$, se tiene que $Z(x) \geq U(x)$ y $Z'(x) \geq U'(x)$ para cada $x \in [0, x_1]$, como queríamos demostrar. \square

Como mencionamos anteriormente, se considera el problema (4.1.10) - (4.1.12), sin considerar la condición (4.1.13). Se busca extender la solución a un máximo intervalo de definición (comenzando con un subconjunto del $[0, 1]$) con el requisito de que la solución permanezca positiva y acotada por un adecuado valor (*por ejemplo 2*). Existen tres posibilidades, esquematizadas en la figura 2 :

1^{er}caso(C1): La solución no alcanza el valor $z = 2$ y, eventualmente, dobla hacia abajo hasta intersecar el eje "x". Sea entonces $\sigma_0 \leq 1$ el primer valor en el $[0, 1]$ donde $z(\sigma_0) = 0$.

2^{do}caso(C2): La solución eventualmente se incrementa hasta alcanzar el valor $z = 2$. Sea $\sigma_1 \leq 1$ el primer punto en el $[0, 1]$ donde $z(\sigma_1) = 2$.

3^{er}caso(C3): La solución satisface $0 < z(x) < 2 \quad \forall x \in [0, 1]$.

En consecuencia se define el **punto final** de la solución z como los puntos $(\sigma_0, 0)$, $(\sigma_1, 2)$, $(1, z(1))$ y se denota por σ los valores $\sigma_0, \sigma_1, 1$ de acuerdo a los casos (C1) a (C3) respectivamente.

Una vez que el punto final de la solución está determinado, se define

$$\delta = z'(\sigma) \tag{4.1.18}$$

y, teniendo presente (4.1.11), se pone

$$L = \frac{\gamma\alpha - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(\sigma)^2)}{\lambda} \tag{4.1.19}$$

El punto final varía según varían los parámetros λ, α y γ , no necesariamente en forma continua. Tal situación puede ocurrir, por ejemplo, cuando una solución

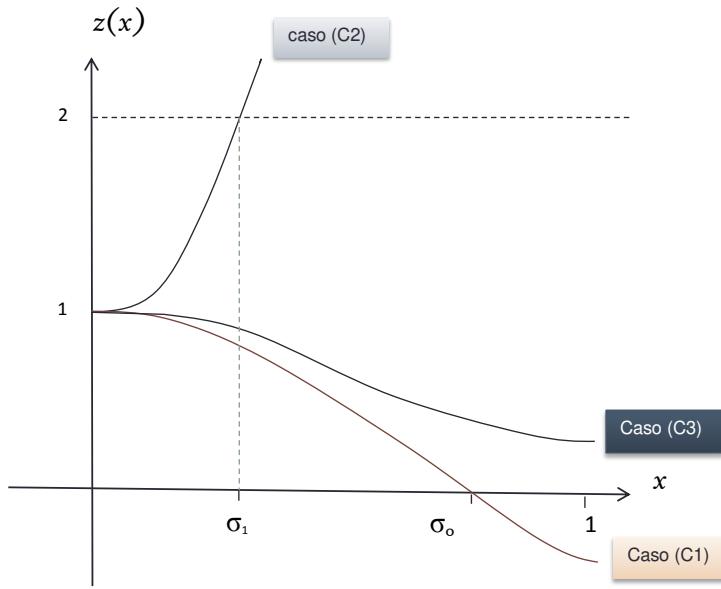


Figura 2: Casos posibles

$z(x)$ es no negativa y tangente el eje x en $\sigma_0 < 1$, pero por lo demás se puede extender a todo el intervalo $[0, 1]$. Al variar los parámetros ligeramente, puede ser posible elevar el gráfico de la solución de modo que no toque el eje "x". De tal manera, el punto final salta discontinuamente desde el punto $(\sigma_0, 0)$ a un punto situado en la línea vertical $x = 1$. En la figura 3 se esquematiza esta posibilidad.

El Lema siguiente muestra que esto no puede suceder con nuestra ecuación (4.1.10).

Lema 4.1.3 *Para los casos (C1) y (C2), la solución z satisface:*

1. $z'(\sigma_0) < 0$
2. $z'(\sigma_1) > 0$

Como consecuencia, el punto final, la derivada $z'(\sigma)$ en el punto final, y el valor L son todas funciones continuas de los parámetros λ, α y γ .

Dem. Lema 4.1.3 Caso (C1): como sabemos que $z'(\sigma_0) \leq 0$ (puesto que $z(\sigma_0) = 0$ y $z(\sigma_0 - h) > 0$ para $h > 0$ (suficientemente chica)) basta mostrar que $z'(\sigma_0) \neq 0$. Suponemos que $z'(\sigma_0) = 0$, entonces $z(\sigma_0)$ es un mínimo local (considerando el entorno a izquierda de σ_0), y por lo tanto $z''(\sigma_0) \geq 0$. Pero de la ecuación (4.1.7)

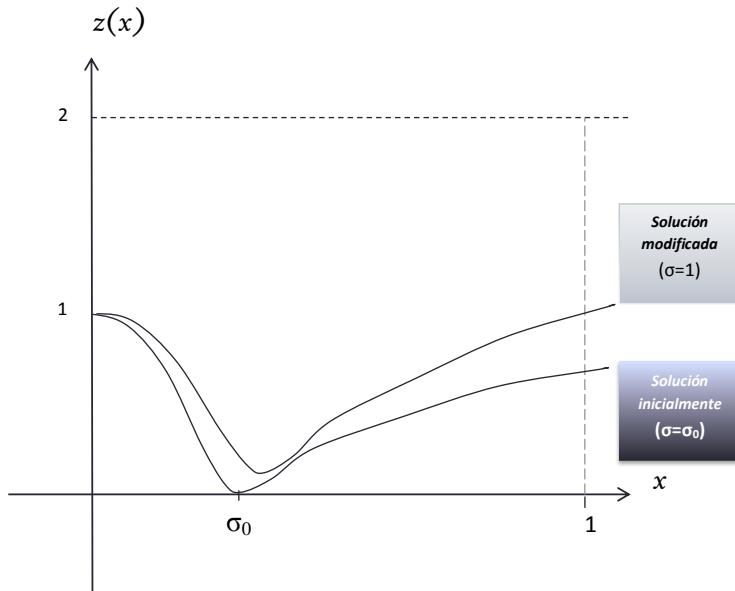


Figura 3: Salto discontinuo

(y la ecuación (4.1.8)) se tiene que $z''(\sigma_0) = -\alpha D < 0$, una contradicción. Caso (C2): sea $x_0 \in [0, \sigma_1]$ donde $z(x)$ alcanza su mínimo. Es claro que x_0 no puede ser σ_1 , así que debe ser $x_0 < \sigma_1$. En x_0 , $z'(x_0) = 0$ y $z''(x_0) \geq 0$. En $[x_0, \sigma_1]$, $z(x)$ es creciente. Por el Lema 4.1.1, $z''(x) > z''(x_0) \geq 0$ para todo $x \in (x_0, \sigma_1]$ y entonces implica que $z'(\sigma_1) > 0$.

Cómo se establece la dependencia del punto final respecto de α y γ : para el caso (C3) es el resultado clásico de dependencia continua de una solución respecto de los parámetros. Para el caso (C1), $z(\sigma_0) = 0$ y $z'(\sigma_0) < 0$. La solución puede entonces ser continuada en un pequeño entorno de σ_0 , con $z(x) < 0$ para $x > \sigma_0$. Tomemos dos puntos muy cercanos a σ_0 , ξ_1 y ξ_2 , tales que $\xi_1 < \sigma_0 < \xi_2$. Entonces $z(\xi_1) > 0$ y $z(\xi_2) < 0$. Si se varían λ, α , y/o γ muy ligeramente, se puede asegurar que $\bar{z}(\xi_1)$ es todavía mayor a cero y $\bar{z}(\xi_2)$ es todavía menor a cero, donde \bar{z} llamamos a la solución del problema de valores iniciales con los valores de los parámetros ligeramente cambiados. Luego, por el Teorema de los Valores Intermedios, \bar{z} tiene un cero en el intervalo $[\xi_1, \xi_2]$ y, por lo tanto, muy cerca del cero original σ_0 de z .

La dependencia continua respecto de los parámetros para el caso (C2) la podemos ver de modo similar. \square

Lema 4.1.4 Para los casos (C2) o (C3), z no puede tener más que un mínimo

local en el intervalo $[0,1]$.

Si se supone que $\alpha D \geq \lambda$ y z tiene un mínimo local en $[0,1]$, entonces $\delta > 0$ y $L \geq 0$.

Dem.Lema 4.1.4 Si z tiene un mínimo local en el punto x_0 , entonces, por el Lema 4.1.1, $z''(x) > 0$ para $x > x_0$ (pues $z(x_0) \leq z(x)$ y $z''(x_0) \geq 0$). Entonces $\delta > 0$ (pues en ambos casos $\sigma > x_0$ y por lo tanto también $z''(\sigma) > z''(x_0)$) y z no puede tener otro mínimo local más allá de x_0 .

Para el caso (C2), $z(\sigma) = 2$ y de la ecuación (4.1.19) podemos ver que $L \geq 0$. En el caso (C3) tenemos que $\sigma = 1$ y si es $z(1) \geq 1$ nuevamente la (4.1.19) nos da $L \geq 0$. Supongamos entonces que $z(1) < 1$, considerando la ecuación original (4.1.7) y (4.1.8) en el valor $x = 1$, obtenemos

$$z''(1) = z(1)(\lambda + L\lambda) - \alpha D \quad (4.1.20)$$

y como $z''(1) > 0$, tenemos que

$$z(1)(\lambda + L\lambda) > \alpha D, \quad (4.1.21)$$

y por lo tanto

$$L\lambda > \frac{\alpha D}{z(1)} - \lambda \geq \alpha D - \lambda \geq 0 \quad (4.1.22)$$

(pues $z(1) < 1$). Así que entonces tenemos que $L \geq 0$ (pues $\lambda > 0$). \square

Definiendo el operador T

Se puede ahora definir el operador continuo $T : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, por

$$T(\alpha, \gamma) := (\delta, L) = (z'(\sigma), L). \quad (4.1.23)$$

En la Figura 4 vemos que T aplica el plano (α, γ) en el plano (δ, L) . Se puede ver que aunque en la reducción del problema de valores de borde original al nuevo problema de valores iniciales sólo se permite $\gamma > 0$, el nuevo problema del operador T puede ser estudiado para $\gamma \in (-\infty, +\infty)$. O sea, T puede definirse para $\gamma \leq 0$.

El Resultado Principal

Teorema 4.1.1 dados cualesquiera $\lambda, l > 0$ y $D \in (0, 1]$, el problema de valores de contorno (4.1.1) - (4.1.4) tiene una solución positiva.

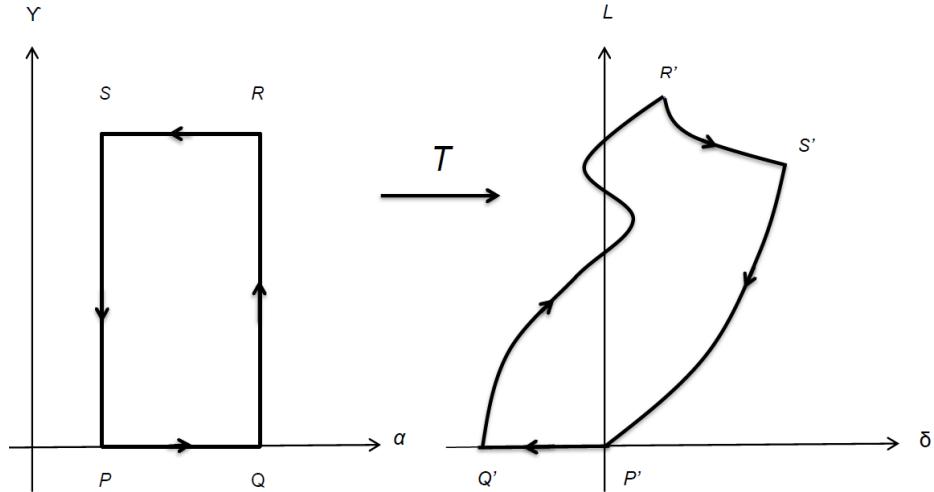


Figura 4: Operador T

Si $z'(\sigma) = 0$ entonces, por el Lema 4.1.3, debemos tener el caso (C3) y por lo tanto $\sigma = 1$. Si, además, $L = l$, entonces (4.1.19) coincide con (4.1.11) y z es una solución del problema de valores de contorno original. Por lo tanto, la validez del Teorema 4.1.1 es equivalente a la afirmación de que la ecuación del operador

$$T(\alpha, \gamma) = (0, l)$$

tiene una solución con $\alpha > 0$ y $\gamma > 0$.

En lo que sigue, esta afirmación se prueba usando el método descripto. Elegimos cualquier número

$$\alpha^* > \frac{\lambda + l\lambda}{D}, \quad (4.1.24)$$

y otro número suficientemente grande γ^* cuyo valor se determina a posteriori. Sea $PQRS$ el rectángulo cuyos vértices son $P = (\lambda/D, 0)$, $Q = (\alpha^*, 0)$, $R = (\alpha^*, \gamma^*)$ y $S = (\lambda/D, \gamma^*)$, como antes mencionamos. En los siguientes lemas se estudia la imagen de cada lado de este rectángulo bajo el operador T .

Lema 4.1.5 $T(A) = (\delta, 0)$, con $\delta < 0$ para cada punto $A = (\alpha, 0)$ en la línea PQ . En particular, el punto P se aplica a $P' = (0, 0)$ y $P'Q'$, la imagen de PQ , es un segmento contenido en la parte negativa del eje δ (ver Figura 4).

Dem. Lema 4.1.5 Si $\gamma = 0$ entonces $L = 0$ (haciendo $\gamma = 0$ en la ecuación (4.1.19)), mientras que la ecuación diferencial (4.1.10) se reduce a $z''(x) = \lambda z - \alpha D$, por lo cual z'' disminuye con el aumento de α y por lo tanto disminuye z' .

Para el punto P , $\alpha = \lambda/D$ y por lo tanto ($z''(x) = \lambda z - \lambda$) $z \equiv 1$ es la solución del problema de valores iniciales y entonces es $z' = 0$. Luego ($\sigma = 1$) $z'(1) = 0$ y entonces $T(P) = T(\lambda/D, 0) = (0, 0)$. Cuando α se incrementa al ir de P a Q , el correspondiente valor de $z'(\sigma)$ decrece desde cero, por lo que es negativo ($\delta < 0$). En concordancia con esto el punto $T(A)$ se encuentra en el semieje negativo del eje δ . \square

El siguiente Lema muestra que si $z(x)$ satisface también la condición de borde (4.1.13) (o sea en $x = 1$), entonces z debe ser una función decreciente y los únicos puntos críticos son $x = 0$ y $x = 1$. Notar que, por el Lema 4.1.3, la condición (4.1.13) implica que estamos en el caso (C3).

Lema 4.1.6 *Supongamos que $\gamma \geq 0$. Si la función positiva $z(x)$ también satisface (4.1.13), entonces $z'(x) \leq 0 \forall x \in [0, 1]$, $z''(0) \leq 0$ y $z''(1) \geq 0$.*

Dem. Lema 4.1.6 *Si $\gamma = 0$, z solo puede satisfacer la condición (4.1.13) cuando $\alpha = \lambda/D$ siendo $z \equiv 1$, con lo que cumple trivialmente. Así que podemos suponer que $\gamma > 0$. Dado que $\delta = 0$ y $\alpha \geq \lambda/D$, por el Lema 4.1.4, z no tiene un mínimo local en $[0, 1]$, de otro modo sería $\delta > 0$ contradiciendo la hipótesis (4.1.13). Por lo tanto $x = 1$ es el único mínimo local. Como consecuencia, $z(x)$ es una función decreciente en el intervalo $[0, 1]$, y por lo tanto $z'(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1]$. Las conclusiones $z''(0) \leq 0$ y $z''(1) \geq 0$ se siguen del hecho de que $x = 0$ es un máximo local ($z'(0) = 0$) y $x = 1$ es un mínimo local ($z'(1) = 0$). \square*

Los siguientes lemas nos muestran dónde se encuentran las imágenes de los lados QR y RS para una adecuada elección del parámetro γ, γ^* .

Lema 4.1.7 *Sea $A = (\alpha, \gamma)$ un punto del lado QR y $T(A) = (\delta, L)$. Si $\delta = 0$, entonces $L > l$.*

Dem. Lema 4.1.7 *Como A se encuentra en QR , $\alpha = \alpha^*$. Si $\delta = 0$, entonces tenemos el caso (C3) y el punto final debe ser $(1, z(1))$. Por el Lema 4.1.6, $z''(1) \geq 0$ y $z(1) \leq 1$ (pues $z'(x) \leq 0$ y $z(0) = 1$). Por el mismo argumento usado en la demostración del Lema 4.1.4 (considerando la ecuación original (4.1.7) y (4.1.8) en el valor $x = 1$), en $x = 1$,*

$$z''(1) = z(1)(\lambda + L\lambda) - \alpha^*D \geq 0 \quad (4.1.25)$$

y entonces, de la definición de α (4.1.9)

$$L\lambda \geq \frac{\alpha^*D}{z(1)} - \lambda > \alpha^*D - \lambda > l\lambda \quad (\text{pues } z(1) \leq 1) \quad (4.1.26)$$

y entonces tenemos que $L > l$. \square

Geométricamente, la importante conclusión de este Lema 4.1.7 es que la curva $Q'R'$, imagen por T del lado QR del rectángulo, interseca al eje L del plano imagen (δ, L) en uno o más puntos, que se encuentran, todos ellos, por encima del punto $(0, l)$. Como se ve en los Lemas siguientes, una vez que γ^* se elige lo suficientemente grande, la imagen del punto R, R' , se encuentra en el primer cuadrante del plano (δ, L) , y por lo tanto, el punto $(0, l)$ se encuentra en el interior de la imagen del rectángulo $PQRS$ (o sea $(0, l) \in T(\Omega)$) (Ver Figura (4) en la que estas curvas se dibujan de manera arbitraria, sólo para ilustrar las afirmaciones de los distintos lemas).

Lema 4.1.8 *La imagen del lado SP , $T(SP) = S'P'$, se encuentra en el primer cuadrante del plano (δ, L) . Además, excepto el punto $P' = T(P)$, no hay otro punto de la curva $S'P'$ que se encuentre sobre el eje L .*

Dem.Lema 4.1.8 *En los puntos de la línea SP , $\alpha = \lambda/D$ y $z(x)$ satisface la inecuación diferencial*

$$z''(x) \geq \left\{ \lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(x)^2) \right\} z(x) - \lambda$$

pues $\gamma\alpha x = \gamma \frac{\lambda}{D} x \geq 0$ en (4.1.10). Si se considera la ecuación diferencial

$$W''(x) = \left(\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - W(x)^2) \right) W(x) - \lambda, \quad (4.1.27)$$

entonces, $W(x) \equiv 1$ es solución y

$$W''(x) = \left(\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - 1^2) \right) 1\lambda = \lambda - \lambda = 0$$

y usando el Lema 4.1.2 (tomando como la $F(x, .)$ el segundo miembro de (4.1.27), y siendo $z(0) \geq 1 = W(0)$ y $z'(0) = 0 \geq 0 = W'(0)$), concluimos que $z(x) \geq W(x) \equiv 1$. Entonces, $x = 0$ es un mínimo local ($z(0) = 1$). Luego, por el Lema 4.1.4 (como $\alpha \geq \frac{\lambda}{D} \Leftrightarrow \alpha D \geq \lambda$) y dado que z tiene un mínimo local en $[0, 1]$ se sigue que $\delta > 0$ y $L \geq 0$, por lo tanto sólo P' tiene su imagen sobre el eje L . En efecto, si $\gamma = 0$ (pues $P = (\lambda/D, 0)$), estamos en que $z \equiv 1$ y entonces $z'(1) = 0 = \delta$, como vemos en la demostración del Lema 4.1.6. \square

El próximo Lema trata del restante lado del rectángulo: el lado RS .

Lema 4.1.9 *Con tal que γ^* se elija suficientemente grande, la imagen del lado RS está contenida en el primer cuadrante del plano (δ, L) .*

Dem.Lema 4.1.9 De acuerdo al Lema 4.1.4, sólo basta mostrar que z tiene un mínimo local en algún $x_0 < 1$, o equivalentemente, que $z'(x_0) = 0$. Por el Lema 4.1.8 ya sabemos que S' está en el primer cuadrante, de modo que podemos considerar un punto A en RS diferente de S . O sea, podemos suponer que $\alpha > \lambda/D$, lo cual implica que z es inicialmente decreciente cerca de $x = 0$ (reemplazando en la ecuación diferencial (4.1.10) x por 0 y $z(0)$ por 1 obtenemos $z''(0) = \lambda - \alpha D$, que con $\alpha > \lambda/D$ nos da $z''(0) < 0$). Si $z(\xi) = 1$ para algún $\xi > 0$, entonces z debe tener un mínimo local en el intervalo $(0, \xi)$ y entonces ya estamos en las hipótesis del Lema 4.1.4. Entonces supongamos que $z(x) < 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Seguidamente se muestra que esto no puede suceder si se elige γ^* suficientemente grande. Supongamos que sí ocurre y que podemos tener $z(x) < 1$, para todo $x \in (0, 1]$. Para puntos de RS , $\gamma = \gamma^*$, y entonces,

$$\frac{\gamma^{*2}}{2}(1 - z(x)^2)z(x) \leq \gamma^{*2}(1 - z(x)) \quad (4.1.28)$$

y como entonces,

$$-\gamma^{*2}(1 - z(x)) \leq -\frac{\gamma^{*2}}{2}(1 - z(x)^2)z(x),$$

z satisface la desigualdad diferencial

$$\begin{aligned} z''(x) &\geq -\gamma^{*2}(1 - z(x)^2) + (\lambda + \gamma^*\alpha x)z(x) - \alpha D \\ &\geq -\gamma^{*2}(1 - z(x)) + (\lambda + \gamma^*\alpha x)z(x) - \alpha \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

dado que $D \leq 1$.

Supongamos ahora que

$$z(x) \geq m := \frac{2\alpha^* + \lambda}{2(\alpha^* + \lambda)}, \quad (4.1.30)$$

Entonces de (4.1.29) tenemos que

$$z''(x) \geq -\gamma^{*2}(1 - z(x)) + (\lambda + \gamma^*\alpha x)m - \alpha \quad (4.1.31)$$

Sea ahora $W(x)$ la solución del problema de valores iniciales

$$W''(x) = -\gamma^{*2}(1 - W(x)) + (\lambda + \gamma^*\alpha x)m - \alpha \quad (4.1.32)$$

$$W(0) = 1, \quad W'(0) = 0 \quad (4.1.33)$$

Entonces, por el Lema 4.1.2, tomando como la $F(x,.)$ el miembro derecho de (4.1.31) o (4.1.32), y entonces cumpliéndose las condiciones (4.1.14) y (4.1.15), con $z(0) = 1 \geq 1 = W(0)$ y $z'(0) = 0 \geq 0 = W'(0)$, se tiene que $z(x) \geq W(x)$ y $z'(x) \geq W'(x)$. Si mostramos que $W(x) \geq m$, entonces (4.1.30) se verificará, y si podemos mostrar que $W(1) \geq 1$, entonces tendremos (evaluando $z(x) \geq W(x)$ en $x = 1$), que $z(1) \geq 1$ y obtendremos, por lo tanto, la contradicción a lo supuesto de que $z(x) < 1$ para todo $x \in [0, 1]$.

Resolviendo la ecuación diferencial (4.1.32) con las condiciones iniciales (4.1.33), por el método de variación de parámetros, obtenemos una expresión para $W(x)$

$$W(x) = \mathbb{C}_1 e^{\gamma^* x} + \mathbb{C}_2 e^{-\gamma^* x} + 1 - \frac{\alpha m}{\gamma^*} x - \frac{\lambda m - \alpha}{\gamma^{*2}} \quad (4.1.34)$$

donde \mathbb{C}_1 y \mathbb{C}_2 son las constantes de integración que calculamos por medio de las condiciones iniciales (4.1.33), las cuales nos dan

$$W(0) = \mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2 - \frac{\lambda m - \alpha}{\gamma^{*2}} = 1 \quad (4.1.35)$$

$$W'(0) = \gamma^*(\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2) - \frac{\alpha m}{\gamma^*} = 0 \quad (4.1.36)$$

y entonces

$$\mathbb{C}_1 = \frac{1}{2\gamma^{*2}}(m(\lambda + \alpha) - \alpha)$$

con lo que reemplazando m por su expresión en (4.1.30), tenemos que

$$\mathbb{C}_1 = \frac{\lambda(2\alpha^* + \lambda - \alpha)}{4\gamma^{*2}(\alpha^* + \lambda)}, \quad (4.1.37)$$

y

$$\mathbb{C}_2 = \frac{1}{2\gamma^{*2}}(m(\lambda - \alpha) - \alpha) \quad (4.1.38)$$

Por la aparición de γ^* en sus denominadores, $|\mathbb{C}_2|$ y $\left| -\frac{\alpha m}{\gamma^*} x - \frac{\lambda m - \alpha}{\gamma^{*2}} \right|$ en (4.1.34) pueden hacerse arbitrariamente pequeños eligiendo γ^* suficientemente grande. Por lo tanto, los dos últimos términos en el lado derecho de (4.1.34), así como el término que contiene a \mathbb{C}_2 pueden hacerse tan pequeños como sea necesario. Por otro lado, como $\alpha < \alpha^*$ (y entonces $\frac{2\alpha^* + \lambda - \alpha}{\alpha^* + \lambda} > 1$),

$$\mathbb{C}_1 \geq \frac{\lambda}{4\gamma^{*2}} > 0 \quad (4.1.39)$$

entonces el término e^{γ^*x} en el miembro derecho de (4.1.34) es positivo. Por lo tanto, se puede hacer que $W(x) > m$ para todo x eligiendo γ^* lo suficientemente grande y entonces se justifica (4.1.30) como habíamos supuesto ad hoc.

Además, en $x = 1$

$$\mathbb{C}_1 e^{\gamma^*} > \frac{\lambda}{4\gamma^{*2}} e^{\gamma^*}$$

y como

$$\lim_{\gamma^* \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{4\gamma^{*2}} e^{\gamma^*} = \infty \quad (4.1.40)$$

tenemos que $W(1) \rightarrow \infty$, cuando $\gamma^* \rightarrow \infty$, por lo tanto existe un $\beta > 0$ tal que $\gamma^* > \beta$ implica que $W(1) > 1$, y por lo tanto $z(1) > 1$ contradiciendo la suposición de que $z(x) < 1$ para todo $x \in (0, 1]$. Por lo tanto existe un punto $\xi \in [0, 1]$ tal que $z(\xi) = 1$, y entonces z tiene un mínimo local en algún $x_0 < 1$ y estamos en las hipótesis del Lema 4.1.4. Esto implica que $\delta > 0$ y $L \geq 0$ y por lo tanto $R'S'$ está contenida en el primer cuadrante del plano (δ, L) . \square

Conclusión. Los lemas 4.1.5, 4.1.7, 4.1.9 y 4.1.8 nos posibilitan conocer cómo es la imagen del borde del rectángulo $PQRS$, donde $P = (\lambda/D, 0), Q = (\alpha^*, 0), R = (\alpha^*, \gamma^*)$ y $S = (\lambda/D, \gamma^*)$, con las constantes α^* y γ^* elegidas del modo descripto, lo cual nos permite arribar a la conclusión de que el *número de vueltas* de la curva cerrada imagen $P'Q'R'S'P'$ con respecto al punto $(0, l)$ es -1 (lo que puede demostrarse rigurosamente usando deformación homotópica de la imagen del borde de $PQRS$ bajo T). Entonces, por lo anterior, la ecuación del operador T , $T(\alpha, \gamma) = (0, l)$ tiene una solución (α, γ) en el interior del rectángulo $PQRS$, lo cual es equivalente a la existencia de solución para el problema de valores en la frontera original, lo cual prueba el resultado principal, enunciado en el Teorema 4.1.1.

Observación. Procediendo más cuidadosamente con los cálculos de D se puede mostrar que el Lema 4.1.9 se mantiene para valores de D escasamente mayores a 1. Se puede probar que el Lema 4.1.9 y entonces el Teorema 4.1.1 siguen valiendo cuando $D \leq \sqrt{(l+1)^2 + 1} - l$.

4.2. El caso $\nu_+ + \nu_- \leq 0$

Abordamos ahora el caso más general tratado en el trabajo [9], en el cual además, como mostramos en el apartado 2.4 de la sección 2, se deduce la ecuación del modelo. Se extiende el método empleado en [5] para el caso de valencias iguales,

incluyéndolo. La consideración del caso estricto, es decir, el caso $\nu_+ + \nu_- < 0$, conlleva una dificultad mucho mayor, lo cual justifica la realización de este caso, como una generalización de la misma idea empleada para el caso anterior de $\nu_+ + \nu_- = 0$.

Aquí se considera (2.4.16) bajo condiciones de Neumann, a saber, el problema

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{\nu_+ + \nu_-}{\sqrt{-\nu_+\nu_-}} \right) yy' + \frac{y^3}{2} + \delta \left[\lambda l + \frac{1}{2}(y^2(0) - y^2(1)) \right] xy \\ &\quad - \left[\frac{y^2(0)}{2} - \lambda \right] y - \delta \left[\lambda l + \frac{1}{2}(y^2(0) - y^2(1)) \right] D \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$y'(0) = y'(1) = 0, \quad (4.2.2)$$

sin asumir ninguna relación privilegiada de valencias, excepto que sea $\nu_+ + \nu_- \leq 0$, y donde se observa que $\lambda = -\delta^2 \nu_+ \nu_- n(0) > 0$.

Observación. Si en (4.2.1) hacemos $\nu_+ + \nu_- = 0$ y $\delta = 1$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{y^3}{2} + \left[\lambda l + \frac{1}{2}(y^2(0) - y^2(1)) \right] xy - \left[\frac{y^2(0)}{2} - \lambda \right] y \\ &\quad - \left(\lambda l + \frac{1}{2}(y^2(0) - y^2(1)) \right) D \\ &= y \left(\lambda - \frac{(y^2(0) - y^2)}{2} + Ax \right) - AD \end{aligned}$$

Es decir, tenemos la ecuación dada por (4.1.1) y (4.1.2), donde A está dado por (4.1.3), o sea el caso tratado en [5], que mostramos en 4.1. El resultado por probar ahora extiende este último, al que incluye como caso particular.

El Resultado Principal

Teorema 4.2.1 *Suponiendo que $\nu_+ + \nu_- \leq 0$, $\delta \leq 1$ y $l > 0$, entonces el problema (4.2.1)-(4.2.2) admite al menos una solución, con tal que $0 < D < 1 + \frac{1}{l}$.*

Nota. Este valor de D mejora el valor obtenido para el caso anterior tratado de valencias iguales.

En la prueba de este resultado, primeramente procedemos análogamente al caso anterior poniendo $z = y/\gamma$, donde $\gamma = y(0)$, con lo que entonces (4.2.1) y (4.2.2) son equivalentes a

$$z''(x) - C\gamma z(x)z'(x) = \left[\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(x)^2) + \gamma\alpha x \right] z(x) - \alpha D \quad (4.2.3)$$

con condiciones

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = z'(1) = 0, \quad (4.2.4)$$

donde llamamos

$$\alpha = \frac{\delta}{\gamma} \left(l\lambda + \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(1)^2) \right) \quad (4.2.5)$$

y tomamos

$$C := \frac{\nu_+ + \nu_-}{\sqrt{\nu_+\nu_-}}. \quad (4.2.6)$$

En el problema original, vienen dados los parámetros l, λ, D , y δ y se busca una solución y de (4.2.1) la cual satisface las condiciones de borde dadas en (4.2.2). Como vimos anteriormente, el hecho de que la ecuación diferencial (4.2.1) contenga los desconocidos valores $y(0)$ y $y(1)$ dependientes de la solución y , hace al problema no convencional y no puede ser abordado por métodos tradicionales. Para sortear esta dificultad, se considera el nuevo problema dado por las ecuaciones (4.2.3) y (4.2.4) *donde el parámetro l no está dado de antemano*. En cambio se fijan los valores α y γ y se procede a resolver el problema de valores iniciales (4.2.3) con las primeras dos condiciones de (4.2.4) ($z(0) = 1, z'(0) = 0$). Ajustando adecuadamente el parámetro α podemos forzar la ocurrencia de la tercera de las condiciones de (4.2.4), $z'(1) = 0$, y luego obtener el valor de l desde la ecuación (4.2.5):

$$l = \frac{2\alpha\gamma - \delta\gamma^2(1 - z(1)^2)}{2\delta\lambda}. \quad (4.2.7)$$

Si de este cálculo obtenemos el valor coincidente al especificado inicialmente para l , entonces tenemos la solución deseada.

Así, como antes, sólo basta con encontrar un par de valores (α, γ) tal que la solución correspondiente del problema de valores iniciales satisfaga $z'(1) = 0$ y calcular l de (4.2.7). Sin embargo se observa que un obstáculo surge en el hecho de que z puede no estar *propiamente* definida a lo largo de todo el intervalo $[0, 1]$. Una situación que puede ocurrir es que z puede *explotar* hasta infinito antes de que x alcance el valor 1 en el intervalo $[0, 1]$. Otra posibilidad es que z pueda

alcanzar al eje x y se vuelva negativa más allá de ahí.

Del mismo modo que antes, se adopta la definición del *punto final* $\sigma \in (0, 1]$ como:

Caso1 (C1) : Si $0 < z < 2$ en $[0, x_0) \subset [0, 1]$ y $z(x_0) = 0$, entonces $\sigma := x_0$.

Caso2 (C2) : Si $0 < z < 2$ en $[0, x_0) \subset [0, 1]$ y $z(x_0) = 2$, entonces $\sigma := x_0$.

Caso3 (C3) : Si $0 < z < 2$ en $[0, 1]$ entonces $\sigma := 1$.

Así, somos capaces de definir a un operador de disparo bidimensional T dado por

$$T(\alpha, \gamma) := (z'(\sigma), L),$$

donde L está dado por

$$L = L(\alpha, \gamma) := \frac{2\alpha\gamma - \delta\gamma^2(1 - z(\sigma)^2)}{2\delta\lambda} \quad (4.2.8)$$

Aunque físicamente sólo interesan aquellos puntos (α, γ) ubicados en el primer cuadrante (excluyendo los ejes donde alguno de ellos se anula) notamos que T también está definido para $\gamma = 0$. Buscamos, nuevamente, un par (α, γ) tal que

$$T(\alpha, \gamma) = (0, l).$$

En ese caso se verá que $\sigma = 1$ y $\gamma \geq 0$, y por lo tanto la z correspondiente es una solución positiva de (4.2.3)-(4.2.4) con α como en (4.2.5).

En la prueba del resultado principal, se utilizan dos lemas de comparación; se vuelve a usar el **Lema 4.1.2** de la sección anterior, y el siguiente lema.

Lema 4.2.1 *Sea z una solución de (4.2.3) con $\alpha > 0$ y o bien $\gamma > 0$ o bien $\gamma = 0$, pero $\lambda \neq \alpha D$.*

Supongamos que $0 \leq z(x_0) \leq z(x_1)$ y $z''(x_0) \geq C\gamma z(x_0)z'(x_0)$ para algún $x_0 < x_1$. Entonces,

$$z''(x_0) - C\gamma z(x_0)z'(x_0) < z''(x_1) - C\gamma z(x_1)z'(x_1).$$

Nota. Si $\gamma = 0$ y $\lambda = \alpha D$, entonces (4.2.3) tiene solución $z(x) \equiv 1$ (la ecuación (4.2.3) se convierte en $z''(x) = \lambda z(x) - \alpha D$ que $z(x) \equiv 1$ cumple trivialmente siendo $\lambda = \alpha D$), y no se cumple la afirmación del lema.

Dem. Lema 4.2.1 *Supongamos primero que $\gamma > 0$. Como $z''(x_0) \geq C\gamma z(x_0)z'(x_0)$, entonces, $z''(x_0) - C\gamma z(x_0)z'(x_0) \geq 0$, y por lo tanto, el miembro derecho de la ecuación diferencial (4.2.3) es no negativo. O sea, tenemos que*

$$\left[\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(x_0)^2) + \gamma\alpha x_0 \right] z(x_0) \geq \alpha D > 0$$

Esto implica que, dado que $z(x_0) \geq 0$, $z(x_0) > 0$, y entonces

$$\left[\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(x_0)^2) + \gamma\alpha x_0 \right] > 0.$$

Si derivamos el miembro derecho de (4.2.3) respecto de z (tomando $x = x_0$, fijo), da

$$\gamma^2 z^2(x_0) \left[\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z(x_0)^2) + \gamma\alpha x_0 \right] > 0$$

pues todos los factores son positivos. Si derivamos ahora respecto de x con z fijo en x_0 , da

$$\gamma\alpha z(x_0) > 0, \text{ pues } z(x_0) > 0 \text{ (siendo } \gamma > 0).$$

Luego,

$$x_0 < x_1 \implies z''(x_0) - C\gamma z(x_0)z'(x_0) < z''(x_1) - C\gamma z(x_1)z'(x_1),$$

pues $z(x_0) \leq z(x_1)$, como queríamos demostrar.

Si ahora consideramos $\gamma = 0$ y $\lambda \neq \alpha D$, (4.2.3) se convierte en

$$z''(x) = \lambda z(x) - \alpha D, \quad (4.2.9)$$

una ecuación diferencial cuya resolución directa nos da

$$z(x) = \mathbb{C}_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + \mathbb{C}_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} + \frac{\alpha D}{\lambda}. \quad (4.2.10)$$

y entonces

$$z'(x) = \sqrt{\lambda} \left(\mathbb{C}_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - \mathbb{C}_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \right)$$

De las condiciones de contorno (4.2.4)

$$z(0) = 1 = \mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2 + \frac{\alpha D}{\lambda} \quad y \quad z'(0) = 0 = \sqrt{\lambda} (\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2),$$

con lo cual se deduce que $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha D}{\lambda} \right)$

y entonces

$$z(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha D}{\lambda} \right) \left(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x} \right) + \frac{\alpha D}{\lambda}. \quad (4.2.11)$$

Como $\gamma = 0$, la tesis equivale a probar que $z''(x_0) < z''(x_1)$, lo cual equivale a su vez, como vemos de (4.2.9), a mostrar que $z(x_0) < z(x_1)$, pero esto es inmediato de la ecuación (4.2.11) obtenida para z . En efecto, dado que $\lambda \neq \alpha D$, entonces $\left(1 - \frac{\alpha D}{\lambda} \right) \neq 0$, y como por hipótesis es $z(x_0) \leq z(x_1)$, debe ser $z(x_0) < z(x_1)$, como queríamos probar. \square

El Lema 4.2.1 nos permite establecer dos hechos fundamentales sobre el operador de disparo T . Estos están establecidos a continuación.

Lema 4.2.2 *T es continuo. Por otra parte, si $T(\alpha, \gamma) = (0, l)$ con $\gamma > 0$, entonces $y := \gamma z$ es una solución del problema original (4.2.1)-(4.2.2).*

Dem. Lema 4.2.2 Comenzamos probando la afirmación siguiente:

$$\text{Si } z'(\sigma) = 0 \implies 0 < z < 2 \text{ en } [0, 1].$$

En otras palabras, $z'(\sigma) = 0$ se opone a los casos (C1) y (C2) y debemos tener $\sigma = 1$ (Caso (C3)).

Supongamos que ocurre el Caso (C1). Entonces $x = \sigma$ es el mínimo global de z en el intervalo $[0, \sigma]$, lo cual implica que $z''(\sigma) \geq 0$ (dado que $z'(\sigma) = 0$). Pero, de la ecuación diferencial (4.2.3) (con $x = \sigma$, $z(\sigma) = 0$ y $z'(\sigma) = 0$) tenemos que $z''(\sigma) = -\alpha D < 0$ lo cual es una contradicción.

Supongamos entonces que ocurre el Caso (C2). Sea $x = x_0$ el mínimo global de z en $[0, \sigma]$. Entonces $0 < z(x_0) < z(\sigma)$ y $z''(x_0) \geq 0$. Como $z'(x_0) = z'(\sigma) = 0$, por el Lema 4.2.1 (dado que $z'(x_0) = 0$ y por lo tanto estamos en las condiciones del lema), obtenemos que $z''(\sigma) > 0$ (pues $z''(\sigma) > z''(x_0) \geq 0$), que no puede ocurrir dado que $z'(\sigma) = 0$, excepto en el caso en el que $\gamma = 0$ y $\lambda = \alpha D$, en cuyo caso, excepcional, la afirmación se cumple trivialmente (dado que tenemos $z''(x) = \lambda z(x) - \alpha D$ en (4.2.3) con la solución $z(x) \equiv 1$ como ya mencionáramos).

La continuidad de T se deduce a partir del resultado estándar de la dependencia continua para ecuaciones diferenciales ordinarias de la solución respecto de los parámetros.

Por último, si $T(\alpha, \gamma) = (0, l)$, entonces, por la afirmación que probamos, debe ser $\sigma = 1$ y por lo tanto $L = l$ ($\sigma = 1$ en (4.2.8) nos da (4.2.7)), y esto implica que α satisface la ecuación (4.2.5), y por lo tanto z es solución de (4.2.3) con las condiciones (4.2.4) donde además cumple $z'(1) = 0$, y entonces $y = \gamma z$ es una solución del problema original (4.2.1)-(4.2.2). \square

Con el fin de probar la existencia de un par (α, γ) tal que $T(\alpha, \gamma) = (0, l)$, encontraremos un dominio acotado $\Omega \subset (0, +\infty) \times [0, +\infty)$ tal que el índice topológico I de la curva $T \circ \partial\Omega$, la cual es la imagen de la frontera de Ω por T , satisface

$$I(T \circ \partial\Omega, (0, l)) \neq 0.$$

De la teoría estándar del índice topológico, esto implica que la ecuación $T = (0, l)$ tiene al menos una solución en Ω . Más específicamente, Ω se definirá como el

rectángulo $PQRS$ dado por los vértices

$$S := \left(\frac{\lambda}{D}, \gamma^* \right), \quad R := (\alpha^*, \gamma^*)$$

$$P := \left(\frac{\lambda}{D}, 0 \right), \quad Q := (\alpha^*, 0)$$

donde α^* y γ^* son constantes que se eligen adecuadamente a posteriori.

Lema 4.2.3 *Sea $\gamma > 0$. Si z alcanza un mínimo local en $x_0 < \sigma$, entonces $z'(x) > 0$ para $x > x_0$ (y por lo tanto $z'(\sigma) > 0$). Si además $\alpha D \geq 0$, entonces $L > 0$.*

Dem. Lema 4.2.3 *Si $z'(x_1) = 0$ para algún $x_1 > x_0$, entonces o bien $z(x_1) < z(x_0)$ o bien del Lema 4.2.1 obtenemos que $z''(x_1) > 0$ (pues $x_1 > x_0$ y $z(x_1) \geq z(x_0) \implies z''(x_1) > z''(x_0) \geq 0$ por el Lema) y x_1 es un mínimo local. En ambos casos, z alcanza un máximo local en algún $x_2 \in (x_0, x_1)$ (y por lo tanto con $z''(x_2) \leq 0$) y nuevamente obtenemos de la aplicación del Lema 4.2.1, $z(x_2) > z(x_0) \geq 0$, que lo contradice. Es así entonces que z' no se anula después de x_0 y por lo tanto $z'(x) > 0$, $\forall x > x_0$. Luego, observamos también que el Caso (C1) no puede ocurrir.*

Si ocurre el Caso (C2), o si ocurre el caso (C3) con $z(1) \geq 1$, entonces, de la definición de L (ecuación (4.2.8)), $L > 0$ independientemente de si $\alpha D \neq \lambda$ o no. Para el restante caso, Caso (C3) con $z(1) < 1$ ($\sigma = 1$), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &< z''(1) - C\gamma z(1)z'(1) \\ &= z(1) \left(\lambda(1 + L) + \gamma\alpha \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \right) - \alpha D \\ &< \lambda(1 + L) - \lambda = \lambda L. \end{aligned}$$

en donde la primera desigualdad es consecuencia de aplicar el Lema 4.2.1 ($x_0 < 1$ y $z(x_0) \leq z(1) \implies z''(1) - C\gamma z(1)z'(1) > z''(x_0) - C\gamma z(x_0)z'(x_0) \geq 0$ (con $z'(x_0) = 0$)), la igualdad en la segunda línea proviene de la ecuación diferencial (4.2.3) y la definición (4.2.8), y la desigualdad en la tercera línea, de la suposición de que $\delta \leq 1$, $z(1) < 1$, y $\alpha D \geq \lambda$. Luego, tenemos que $L > 0$. \square

Los siguientes lemas proporcionan una idea del aspecto de la imagen de $\partial\Omega$ bajo el operador T .

Lema 4.2.4 *El segmento PQ se aplica uno a uno sobre el segmento $P'Q'$, donde $P' = (0, 0)$ y $Q' = (-r, 0)$, para algún $r > 0$.*

Dem.Lema 4.2.4 A lo largo del segmento PQ , se tiene $\gamma = 0$ y entonces $z(x)$ está dada por la ecuación (4.2.11), es decir

$$z(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha D}{\lambda}\right) \left(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) + \frac{\alpha D}{\lambda}.$$

Entonces,

$$z'(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left(1 - \frac{\alpha D}{\lambda}\right) \left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right). \quad (4.2.12)$$

que, como $\alpha = \frac{\lambda}{D}$, se anula (y entonces $z'(x) = 0$, con $z(x) = 1, \forall x$, en particular $z'(1) = 0$, siendo $\sigma = 1$). Como además, de su ecuación de definición (4.2.8) se tiene que $L = 0$ (dado que $\gamma = 0$), obtenemos que $P' = T(P) = (0, 0)$.

Vemos la inyectividad de T sobre el segmento PQ (aunque no se necesite en la demostración del Teorema 4.2.1): de P a Q , α se incrementa desde el valor $\frac{\alpha}{D}$. Inicialmente tenemos Caso(C3), en el que $\sigma = 1$. Podemos entonces derivar la ecuación (4.2.11) de $z'(x)$, evaluada en $x = 1$, respecto del parámetro α , lo cual nos da

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} z'(1) = \frac{-D}{2\sqrt{\lambda}} \left(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}\right) < 0,$$

que nos permite ver que, inicialmente, $z'(\sigma)$ es decreciente en α . Sin embargo, después, α alcanza un valor crítico α_0 , es decir, para $\alpha > \alpha_0$, el Caso(C1) prevalece.

En efecto, si $\alpha > \frac{\lambda}{D}$ (siendo $\gamma = 0$), si hacemos en (4.2.11) $x = \sigma$ e igualamos a cero (Caso(C1)), obtenemos, (usando que $\frac{e^t+e^{-t}}{2} = \cosh(t)$),

$$z(\sigma) = \frac{\alpha D}{\lambda} + \left(1 - \frac{\alpha D}{\lambda}\right) \cosh(\sqrt{\lambda}\sigma) = 0,$$

y entonces debe ser

$$\cosh(\sqrt{\lambda}\sigma) = \frac{\alpha D / \lambda}{\frac{\alpha D}{\lambda} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\alpha D}}$$

Como $z'(\sigma) = \left(1 - \frac{\alpha D}{\lambda}\right) \sqrt{\lambda} \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}\sigma)$, (donde $\operatorname{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$),

usando la conocida relación $\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1$, una cuenta sencilla nos lleva a

$$z'(\sigma) = \left(1 - \frac{\alpha D}{\lambda}\right) \sqrt{\lambda} \sqrt{\left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\alpha D}}\right)^2 - 1} < 0$$

dado que $\alpha > \frac{\lambda}{D}$ (y por lo tanto el radicando es positivo).

Si hacemos ahora, $z'(\sigma) = (1 - \frac{\alpha D}{\lambda}) \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}\sigma) = 0$, vemos que esto ocurre en el caso $\frac{\alpha D}{\lambda} = 1$ (el Caso(C3), con $\sigma = 1$), o cuando $\operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}\sigma) = 0$, que da $\sigma = 0$, que no corresponde a un valor posible del punto final (estamos en $x = 0$ con $z'(0) = 0$ y $z(0) = 1$).

Otra manera de verlo (la mostrada en [9]), es multiplicar la ecuación diferencial que se obtiene con $\gamma = 0$, $z'' = \lambda z - \alpha D$, por z' , e integrar desde $x = 0$ a $x = \sigma$, para obtener

$$\frac{z'^2(\sigma)}{2} = \frac{\lambda z^2(\sigma)}{2} - \alpha D z(\sigma) - \frac{\lambda}{2} + \alpha D = -\frac{\lambda}{2} + \alpha D.$$

De donde se ve que $z'^2(\sigma)$ es una función creciente de α , lo que nos permite establecer, dado que $z'(\sigma)$ es negativa, que ésta es una función decreciente de α . Luego, $z'(\sigma)$ es negativa para la imagen por T , que resulta así inyectiva, de todo punto que se encuentra en el segmento PQ , con $\alpha > \frac{\lambda}{D}$. \square

El siguiente lema muestra que , excepto para el punto P , la imagen del segmento PS se encuentra en el primer cuadrante del plano $(z'(\sigma), L)$.

Lema 4.2.5 Si $\alpha = \lambda/D$ y $\gamma > 0$, entonces $z'(\sigma) > 0$ y $L > 0$.

Dem.Lema 4.2.5 Si suponemos que z es inicialmente creciente, entonces $x = 0$ es un mínimo local, y entonces, por el Lema 4.2.3, cuyas hipótesis se cumplen, tenemos que $z'(\sigma) > 0$ y como además $\alpha \geq \lambda/D$ se tiene que $L > 0$.

Luego, consideramos que z es inicialmente decreciente. En ese caso, como la constante C , definida en (4.2.6) cumple $C \leq 0$ (dado que estamos en el caso $\nu_+ + \nu_- \leq 0$), y para algún $\epsilon > 0$ se cumple que $z'(x) \leq 0$ para $x \in [0, \epsilon]$, tenemos que

$$z'' \geq \left[\lambda - \frac{\gamma^2}{2}(1 - z^2) \right] z - \lambda \quad \text{en } [0, \epsilon]$$

Aplicando entonces nuevamente el Lema 4.1.2 con $W \equiv 1$, análogamente a como lo hicimos en la demostración del Lema 4.1.8, se deduce que $z(x) \geq 1$ para $x \in [0, \epsilon]$, contradiciendo la suposición.

Por último, si ninguna de las condiciones anteriores ocurre, z tendría más de un mínimo local, y esto contradice el Lema 4.2.3. \square

Los siguientes dos lemas restantes se refieren a la conveniente elección de las constantes α^* y γ^* .

Lema 4.2.6 Sean $\alpha > \frac{\lambda(1+l)}{D}$ y $\gamma \geq 0$. Si $z'(\sigma) = 0$, entonces $L > l$.

Dem.Lema 4.2.6 Como $z'(\sigma) = 0$, entonces estamos en el Caso(C3)(Lema 4.2.2), siendo fácil ver que $\gamma > 0$:

si suponemos que $\gamma = 0$, de la ecuación (4.2.12) (de la demostración del Lema 4.2.4), tenemos que

$$z'(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left(1 - \frac{\alpha D}{\lambda} \right) \left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x} \right) \neq 0, \quad \forall x,$$

(dado que $\alpha \neq \lambda/D$ y $x \neq 0$), lo cual contradice $z'(\sigma) = 0$.

Por el lema 4.2.3, z no puede tener un mínimo local en el intervalo $[0, 1]$. Por consiguiente, el mínimo global de z se alcanza en el punto final $\sigma = 1$, con lo que se deduce que $z''(1) \geq 0$ y que z es no creciente.

Luego, de la ecuación diferencial (4.2.3) también se puede ver que $z \neq 1$, y por lo tanto, $z(1) < 1$ y entonces, evualando en $x = 1$ y nuevamente de la definición de L (ecuación (4.1.19)) (similarmente como procedimos en la demostración del Lema 4.2.3), podemos establecer

$$\begin{aligned} 0 &\leq z''(1) \\ &= z(1) \left(\lambda(1 + L) + \gamma \alpha \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \right) - \alpha D \\ &< \lambda(1 + L) - \lambda(1 + l) = \lambda(L - l) \end{aligned}$$

lo cual implica que $L > l$. \square

En vista del resultado anterior, se fija una constante α^* tal que

$$\alpha^* > \frac{\lambda(1 + l)}{D}, \quad (4.2.13)$$

y se procede de acuerdo al lema siguiente, en la determinación de γ^* .

Lema 4.2.7 Si γ^* es suficientemente grande, entonces la imagen del segmento RS se encuentra en el primer cuadrante.

Dem.Lema 4.2.7 Del Lema 4.2.5 ya sabemos que la imagen del punto S , $S' = T(S)$, se encuentra en el primer cuadrante, así que podemos considerar los puntos del segmento RS con $\alpha > \lambda/D$. Entonces $z'' < 0$ en un entorno de 0 (en la ecuación diferencial (4.2.3)), con $x = 0$, y $z(0) = 1$ y $z'(0) = 0$, de las condiciones (4.2.4)), y z es entonces inicialmente decreciente. Si z alcanza un mínimo local en algún punto $x_0 < \sigma$, entonces, por el Lema 4.2.3, $z'(\sigma) > 0$ y además, como $\alpha > \lambda/D$, se tiene que $L > 0$. De modo que entonces es suficiente probar que z no puede ser estrictamente decreciente en todo el $[0, \sigma]$.

Supongamos que sí lo es. O sea que z decrece estrictamente hasta alcanzar el

punto final σ . Como $C \leq 0$, $z \geq 0$ y $z' < 0$, el término $C\gamma z(x)z'(x) \geq 0$, y siendo $z \leq 1$, lo que implica que $(1 - z^2)z \leq 2(1 - z)$, entonces, de la ecuación diferencial (4.2.3), se obtiene

$$z''(x) \geq -\gamma^{*2}(1 - z(x)) + (\lambda + \gamma^{*}\alpha x)z(x) - \alpha D, \quad (4.2.14)$$

(donde usamos el valor de γ , γ^{*}). Seguidamente, fijamos una constante m tal que $\alpha^{*}D/(\alpha^{*} + \lambda) < m < 1$, lo cual es posible ya que $D < 1 + \frac{1}{l}$. En efecto,

$$\frac{\alpha^{*}D}{\alpha^{*} + \lambda} < 1 \iff \alpha^{*} < \frac{\lambda}{D - 1},$$

entonces, de (4.2.13), debe ser

$$\frac{\lambda(1 + l)}{D} < \frac{\lambda}{D - 1},$$

lo que equivale a que $D < 1 + \frac{1}{l}$.

A continuación, análogamente a lo realizado en la demostración del Lema 4.1.9 del caso $\nu_+ + \nu_- = 0$, definimos W como la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} W''(x) &= -\gamma^{*2}(1 - W(x)) + (\lambda + \gamma^{*}\alpha x)m - \alpha D \\ W(0) &= 1, \quad W'(0) = 0, \end{aligned}$$

cuyo cálculo directo nos da

$$W(x) = \mathbb{C}_1 e^{\gamma^{*}x} + \mathbb{C}_2 e^{-\gamma^{*}x} + 1 - \left(\frac{\lambda m - \alpha D}{\gamma^{*2}} + \frac{\alpha mx}{\gamma^{*}} \right), \quad (4.2.15)$$

donde

$$\mathbb{C}_1 = \frac{(\lambda + \alpha)m - \alpha D}{2\gamma^{*2}} \quad y \quad \mathbb{C}_2 = \frac{(\lambda - \alpha)m - \alpha D}{2\gamma^{*2}}.$$

Dado que $\alpha \leq \alpha^{*}$, como elegimos m tal que $m > \alpha^{*}D/(\alpha^{*} + \lambda)$, y entonces $(\alpha^{*} + \lambda)m > \alpha^{*}D \geq \alpha D$, se tiene que $\mathbb{C}_1 > 0$. Eligiendo γ^{*} suficientemente grande, podemos hacer

$$\left| \mathbb{C}_2 e^{-\gamma^{*}x} - \left(\frac{\lambda m - \alpha D}{\gamma^{*2}} + \frac{\alpha mx}{\gamma^{*}} \right) \right| < 1 - m,$$

para cada $x \in [0, 1]$, lo cual implica, a su vez, que $W > m$ en el $[0, 1]$ (dado que en (4.2.15), tenemos 1 sumado al término $\mathbb{C}_1 e^{\gamma^{*}x}$, que es positivo). Supongamos ahora que z alcanza el valor m en algún punto x_0 , o sea, $z(x_0) = m$. Entonces, tenemos de (4.2.14) que

$$z''(x) \geq -\gamma^{*2}(1 - z(x)) + (\lambda + \gamma^{*}\alpha x)m - \alpha D \quad (4.2.16)$$

en $[0, x_0]$. Del Lema 4.1.2 de la sección anterior, tenemos que $z \geq W > m$ en $[0, x_0]$, contrario a lo supuesto de que $z(x_0) = m$. Por lo tanto, $z > m$ y la desigualdad (4.2.16) ocurre en todo el $[0, 1]$. Podemos aplicar entonces nuevamente el Lema 4.1.2 para concluir que $z \geq W$ en todo el $[0, 1]$. Como $C_1 e^{\gamma^* x} \rightarrow \infty$ cuando $\gamma^* \rightarrow \infty$, entonces, para γ^* suficientemente grande, tenemos que $W(1) > 1$, y por consiguiente, $z(1) > 1$, contradiciendo la suposición de que $z \leq 1$. \square

Demostración del Resultado Principal: Teorema 4.2.1

De los lemas anteriores se concluye que el índice de la curva $T \circ \partial\Omega$ con respecto al punto $(0, l)$ es -1 , y por lo tanto $T(\alpha, \gamma) = (0, l)$ para algún $(\alpha, \gamma) \in \Omega$ (en particular, el Lema 4.2.6 nos asegura que $(0, l) \in T \circ \Omega$). Por lo tanto existe solución para el problema de valores de contorno (4.2.1)-(4.2.2). \square

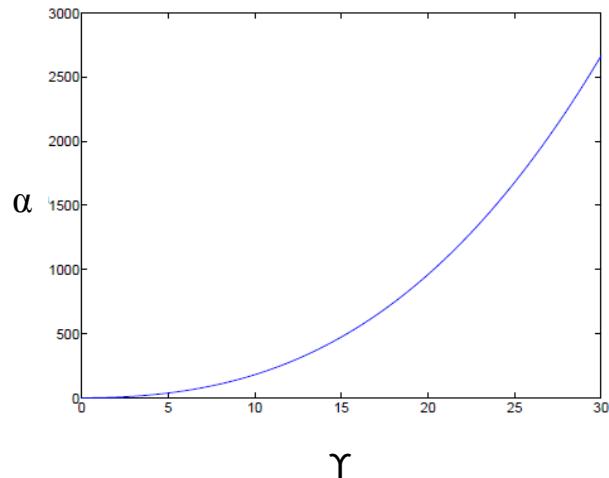


Figura 5: α en función de γ

5. Conclusiones y aspectos pendientes

Hemos podido ver con estas aplicaciones del método, en estos trabajos [5] y [9], su eficacia en el cometido propuesto de demostrar existencia de soluciones, en particular eliminando la restricción que se impone en [2] respecto de los parámetros físicos (ecuación (2.3.8) de la sección 2.3).

En ese mismo sentido podemos observar, en el trabajo [5], varias conclusiones de la implementación de experimentos numéricos allí realizados en los Apéndices del final. Como mencionan los autores, ningún tratamiento numérico del problema con condiciones de Neumann (4.1.1)-(4.1.4) ha sido emprendido en la literatura y la prueba de existencia topológica no conduce directamente a un algoritmo práctico.

En el *Apéndice I* se presentan estudios numéricos preliminares del problema, con $D = 1$, realizados mediante un algoritmo puesto en práctica en MATLAB. Los resultados numéricos indican que la dependencia de α con γ es siempre monótona y por lo tanto la asignación correspondiente es uno a uno, y la aplicación inversa existe y es continua. Sin embargo, no se está en capacidad de confirmarse esta teoría y se prefiere plantear esto como una conjectura, del modo siguiente:

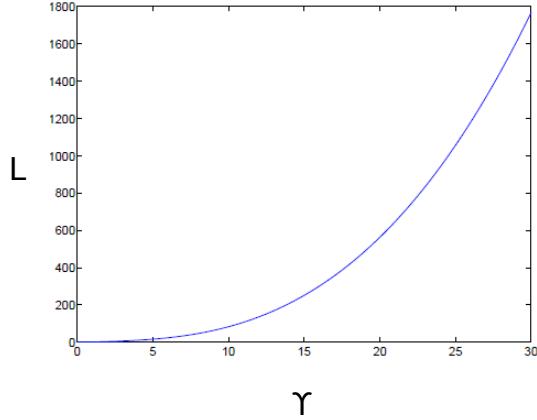


Figura 6: L en función de γ

Para cada $\gamma > 0$, dada, existe una y sólo una α , tal que la solución $z(x)$ del problema de valores iniciales asociado (4.1.10)-(4.1.12), también satisface la condición de frontera (4.1.13). La dependencia de α con γ es continua. El valor de L obtenido de α es también una función monótona de γ . Esta última afirmación es equivalente a la afirmación de que el problema de valores de contorno original tiene una solución única.

Si esta conjetura es cierta, entonces en el paso 4 del algoritmo allí expuesto, se puede afirmar que L es una función continua de γ y la existencia de un adecuado γ que da $L = l$ está garantizada. Esto equivale a una prueba alternativa del resultado principal sin recurrir a la teoría de grado topológico.

Las figuras 5 y 6 muestran el resultado numérico de uno de los experimentos, con $\lambda = 1$. La figura 5 muestra el gráfico de α como una función de γ , que es monótona y en el que se puede apreciar que $\alpha \rightarrow \infty$, cuando $\gamma \rightarrow \infty$. La figura 6 muestra el gráfico de L en función de γ , que de nuevo parece ser monótona. También se ve que $L \rightarrow 0$, cuando $\gamma \rightarrow 0$ y $L \rightarrow \infty$, cuando $\gamma \rightarrow \infty$. Por lo tanto, L toma cada valor posible de l .

En el *Apéndice II* se muestran resultados de experimentos similares para $D > 1$. Las figuras 7 y 8 representan los resultados para $D = 2$ correspondientes a los de las Figuras 5 y 6, respectivamente, donde se ha mantenido $\lambda = 1$. Se aprecia que α todavía depende de γ de forma continua y monótona. Sin embargo, la Figura 8 muestra que L ya no es monótona en γ . Existe un valor máximo $L^* = M(l)$ que

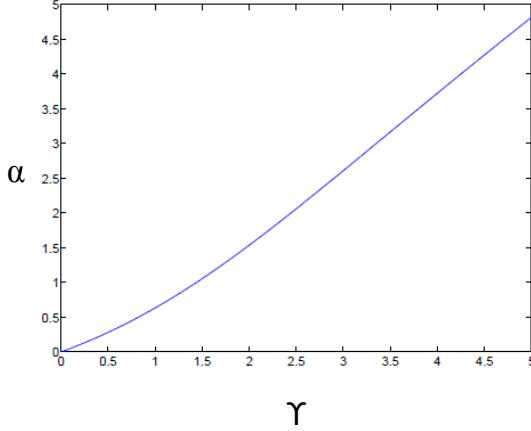


Figura 7: α en función de γ para $D = 2$

L puede alcanzar. En otras palabras, no habrá ninguna solución para el problema de contorno si $L > L^*$. Esto es equivalente a decir que una condición del tipo de la establecida en el trabajo de Thompson [2] tiene que ser impuesta para asegurar la existencia de una solución. Otra consecuencia de la forma de la curva es que, en general, para algunos valores dados de l puede haber dos soluciones diferentes.

La pregunta que se plantea es porqué no sigue valiendo la demostración del Teorema 4.1.1 para este caso de $D > 1$, dado que todos los lemas en la sección 4.1 siguen valiendo, excepto el Lema 4.1.9, aunque es importante notar que para $D > 1$, se observa que el Lema 4.1.7 se cumple en un contexto vacío, es decir, en realidad no se cumple la condición de que la curva $Q'R'$ interseca al eje δ . En el Lema 4.1.9, no se pueden establecer las desigualdades $W(x) > m$ y $W(1) > 1$. En la Figura 8 vemos que para un l^* suficientemente grande, no hay solución. La condición respecto a D establecida en el resultado principal (Teorema 4.2.1) de la sección 4.2,

$$D < 1 + \frac{1}{l},$$

implica que si $D = 2$, debe ser $l < \frac{1}{2-1} = 1$.

En el trabajo [9] para ayudar a visualizar la demostración, se muestra el dibujo de la imagen $P'Q'R'S'$ del rectángulo $PQRS$ bajo la aplicación T (Figura 9), correspondiente a un ejemplo numérico, realizado con la ayuda de MATLAB, para el caso especial en el cual los parámetros físicos han sido elegidos $\lambda =$

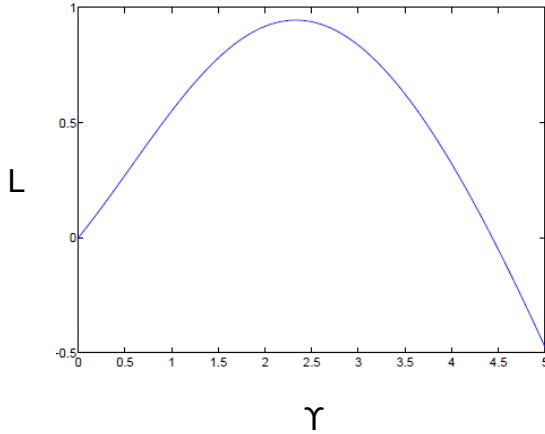


Figura 8: L en función de γ para $D = 2$

$1, D = 1, \delta = 1$, y las constantes α^* y γ^* , en la definición del rectángulo $PQRS$ elegidas 6 y 4 respectivamente. Si llamamos O al origen de coordenadas, y A al punto donde la curva $Q'R'$ interseca el eje L (eje de ordenadas), entonces el índice topológico de $P'Q'R'S'$ es -1 por cada punto que se encuentra en el segmento de línea OA . Por lo tanto, el problema de Neumann original tiene una solución para estos valores de L . Mediante el aumento de α^* y γ^* , se abarcan más valores de L (Lemas 4.2.6 y 4.2.7).

Si se reduce γ^* a 3, la imagen del lado RS se vuelve el $R''S''$, que, como se muestra en la Figura 9, no se encuentra enteramente en el primer cuadrante, lo cual da cuenta de que el Lema 4.2.7 sólo tiene validez si γ^* es suficientemente grande.

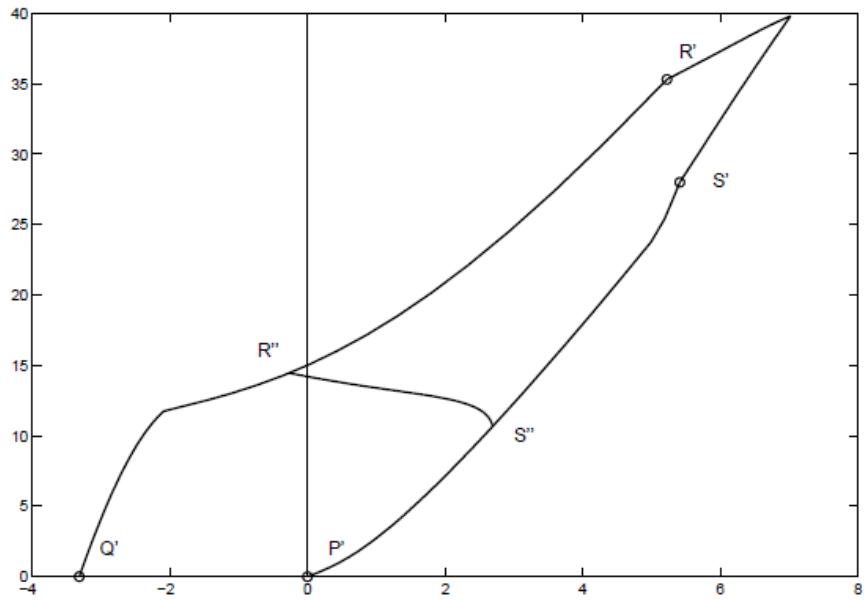


Figura 9: Imagen de PQRS por T

6. Bibliografía

Referencias

- [1] H.R.Leuchtag, *A family of differential equations arising from multi-ion electrodiffusion*, J. Math. Phys. 22(6) (1981).
- [2] H.B.Thompson, *Existence for two-point boundary value problems in two ion electrodiffusion*, J. Math. Anal. Appl. 184, 82-94 (1994).
- [3] H.B.Thompson, *Existence of solutions for a two point boundary value problem arising in electro-diffusion*, Acta Math. Sci. 8 (1988), 373-387.
- [4] P.Amster,*Métodos topológicos en el Análisis no lineal*,Libro de la serie Publicaciones Matemáticas del Instituto de Matemática Pura y Aplicada,Brasil(2009).
- [5] P.Amster,M.K.Kwong,C.Rogers,*On a Neumann Boundary Value Problem for Painlevé II in Two Ion Electro-Diffusion*, Nonlinear Analysis (2010)doi:10.1016/j.na.2010.06.063
- [6] C.De Coster and P.Habets, *Upper and lower solutions in the theory of ode boundary value problems: classical and recent results*, Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for ODES CISM Courses and Lectures, 371, Springer (1997).
- [7] M.C. Mariani, P. Amster and C. Rogers, *Dirichlet and periodic-type boundary value problems for Painlevé II*,J. Math. Anal. Appl, 265, 1-11 (2002).
- [8] C.Rogers, A.Bassom and W.K.Schief, *On a Painlevé II model in steady electrolysis: application of a Backlund transformation*, J. Math. Anal. Appl, 240, 367-381 (1999)
- [9] P.Amster, M.K.Kwong, C.Rogers, *A Neumann Boundary Value Problem in Two-Ion Electro-diffusion with Unequal Valencies*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B Vol. 17 No 7 (2012), 2299-2311.
- [10] F.Borgnis, Z.Physik, 100-117; 478 (1936).
- [11] H.Y.Fan, Physical Review; 74; 1505 (1948).

- [12] H.R.Leuchtag y J.C.Swhart, Biophys.J. 1, 27 (1977).
- [13] R. Schlögl, Z. Physik. Chem., N F 1, 30
- [14] L.V.Ahlfors *COMPLEX ANALYSIS. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable.* McGraw-Hill Book Company, Inc. (1953).
- [15] P.W.Lamberti, V.Rodríguez, *Desarrollo del modelo matemático de Hodgkin y Huxley en neurociencias*, Electroneurobiología 2007, 15 (4), pp. 31-60, URL <http://electroneurobio.secyt.gov.ar/index2.htm>.