UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Propiedad de aproximación y funciones holomorfas en espacios infinito-dimensionales

Pablo Turco

Directora: Silvia Lassalle

30 de Marzo de 2010

Agradecimientos

A mis padres, Jorge y Beatriz y mi hermano Martín por estar incondicionalmente en todos los momentos de mi vida. Apoyando en los malos momentos y alegrandose en los buenos.

A Ceci que, con gran paciencia, estuvo a mi lado a lo largo de este trabajo y va a estar a lo largo de mi vida.

A Silvia Lassalle. Sin ella, este trabajo nunca hubiese existido. Su forma de trabajar, su experiencia y su comprensión de mis tiempos fueron y son modelos a seguir.

A todo el grupo de Análisis Funcional: La buena onda que tienen Nacho, Dani, Vero, Silvia, Damián, Santi, Dany, Pablito y Martín, hacen que sea un gusto ir y escucharlos.

A todos lo que me acompañaron a lo largo de la carrera: Marce, Lau, Ani S., Ani F., Lucas, Mara, Alexis, Charly, Manolo, Magalí, Sol, Caro, Manu M., Nico, Paulita, Abigail, Julián, María Laura, Mer, Martín, René, Lean, Sebas, Mauro... y muchos mas. Haberlos conocido en las materias que hicimos juntos hacía más fácil ir a la facu.

A Silvia S., Hagi y todos los pibes *del Trico*... Ellos saben porque...

A los equipos TVFC, Champagne y las 4G.

A Vero S., Ricardo M., Jorge S., Roberto M.C. y Diego L. que me inculcaron el gusto por las matemáticas desde chico

Por último, a todos aquellos que, una vez que termine de escribir estas lineas, me acuerde de que me olvidé de incluirlos...

Índice

Introducción

La propiedad de aproximación juega un rol fundamental en la teoría de estructuras de espacios de Banach. El primer estudio sistemático sobre esta propiedad y algunas de sus variantes puede adjudicarse a Grothendieck y su trabajo de 1955. La idea subyacente radica en la relación existente entre los conceptos de compacidad y dimensión finita. La mayoría de los resultados acerca de transformaciones lineales entre espacios de dimensión finita se pueden generalizar a ciertas clases de operadores en espacios infinitos dimensionales, estos son los operadores compactos.

Para ciertos espacios, los operadores compactos pueden aproximarse por operadores de rango finito, que sucede por ejemplo para espacios de Hilbert separables o en espacios de Banach con base de Schauder. En ambos casos, esto es posible gracias a la existencia de proyecciones finitas uniformemente acotadas. En [11] Grothendieck establece que todo operador lineal y compacto de un espacio E con valores en F se aproxima por operadores de rango finito si y sólo si F tiene la siguiente propiedad: *Dado $\varepsilon > 0$, β seminorma continua de F y $K \subset F$ compacto, existe un operador lineal T de rango finito tal que $\sup_{x\in K} \beta(T(x) - x) \leq \varepsilon$.*

La propiedad de aproximación mostró valiosas aplicaciones al campo del estudio de espacios de funciones. Si un espacio de funciones tiene la propiedad de aproximación, hay ciertas fórmulas que sirven para describirlo. Y, como no todo espacio E tiene la propiedad de aproximación, resulta útil encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio de funciones definidas sobre E tenga la propiedad de aproximación. En 1976, R.Aron y M. Schottenloher en [4] estudiaron cuándo el espacio de funciones holomorfas con dominio en un espacio de Banach, $\mathcal{H}(E)$, tiene la propiedad de aproximación.

Dado E un espacio de Banach, $\mathcal{H}(E)$ no resulta un espacio de Banach, sino que, por lo general, resulta ser un espacio de Fréchet. Es por eso que en la primera sección estudiaremos algunos resultados elementales sobre espacios localmente convexos y la estructura de ellos. La topología de un espacio localmente convexo queda determinada por sus entornos del origen. Aquí veremos de que manera se le puede dar distintas topologías al espacio dual de un espacio localmente convexo. Es conocido que, si E es un espacio de Banach, al espacio dual, E', se lo puede dotar de la topología dada por los entornos del origen de la forma $B = \{x' \in E' \colon |\langle x, x'\rangle| < 1 \ \forall x \in E, \|x\| \leq 1\}$. Estos conjuntos proporcionan una buena topología para el dual de E y hacen a E' un espacio normado. Esta manera de dar una topología al dual de un espacio se extiende cuando E es un espacio localmente convexo. Para ello se introduce la noción de lo conjunto polares y topologías polares, haciendo a E' un espacio localmete convexo. Usando técnicas similares, se le dará una topología al espacio vectorial formado por los operadores lineales entre dos espacios localmente convexos. Finalmente presentaremos el ϵ-Producto entre dos espacios localmente convexos, estudiado por L. Schwartz en 1957.

La importancia del ϵ-Producto se verá en la segunda sección, ya que se estudiará la relación que tiene con la propiedad de aproximación, estableciendo la equivalencia

(a) E tiene la propiedad de aproximación.

(b) $E \otimes F$ es denso en $E\epsilon F$ para todo F espacio de Banach.

En esta sección también se estudiarán las propiedades mas importantes de un espacio localmente convexo E cuando tiene la propiedad de aproximación.

En la sección 3 veremos las definiciones y generalidades de las funciones holomorfas con dominio en un espacio de Banach E, asi como tambíen las distintas topologías con las que se lo puede dotar al espacio $\mathcal{H}(E)$. Introduciremos tanto las topologías compacto-abierta, τ_0, y la topología de Nachbin, τ_ω. Debido a que τ_0 no es tan fuerte como se espera, se introducen las topologías τ_∞ (de convergencia uniforme sobre compactos de las derivadas) y la topología bornológica asociada a τ_0, τ_δ. Debido a la relación que hay entre la propiedad de aproximación y los operadores lineales compactos, definiremos el concepto de función holomorfa compacta entre espacios de Banach E y F, $\mathcal{H}_K(E;F)$, así como también veremos sus propiedades. Finalizando esta sección, veremos que si E es un espacio metrizable y F es un espacio localmente convexo, entonces se tiene la fórmula

$$F\epsilon(\mathcal{H}(E),\tau_0) \cong (\mathcal{H}(E;F),\tau_0) \tag{1}$$

y si E y F son espacio de Banach, entonces

$$F\epsilon(\mathcal{H}(E),\tau_\omega) \cong (\mathcal{H}_K(E;F),\tau_\omega) \tag{2}$$

Estas dos relaciones, junto a la equivalencia anterior son claves para la sección 4, en la cual veremos que $(\mathcal{H}(E),\tau_0)$ tiene la propiedad de aproximación si y sólo si E la tiene. También estudiaremos condiciones necesarias y suficientes para que $(\mathcal{H}(E),\tau)$ tenga la propiedad de aproximación cuando $\tau = \tau_\infty, \tau_\omega$ o τ_δ. Estos resultados los ejemplificaremos usando los espacios ℓ_1 y ℓ_2. Veremos que $\mathcal{H}(\ell_1)$ tiene la propiedad de aproximación cuando al espacio se lo dota de cualquiera de las topologías mencionadas anteriormente, mientras que $(\mathcal{H}(\ell_2),\tau)$ no tiene la propiedad de aproximación para $\tau = \tau_\infty, \tau_\omega$ o τ_δ. Por último, comentaremos brevemente el trabajo de J. Mujica, [15], que estudia la propiedad de aproximación en $\mathcal{H}^\infty(U)$, el espacio de funciones holomorfas acotadas sobre un conjunto $U \subset E$ abierto. Este trabajo nos resulta de interés ya que utiliza un métodos de linealización para estudiar la propiedad de aproximación. Se mostrarán condiciones necesarias para que $\mathcal{H}^\infty(U)$ tenga la propiedad de aproximación. Hoy en día, las condiciones suficientes no son conocidas. Es más, si Δ es el disco de $\mathbb{C}$, es desconocido si $\mathcal{H}^\infty(\Delta)$ tiene la propiedad de aproximación.

1. Espacios localmente convexos

En este trabajo estamos interesados en ciertas topologías definidas sobre espacios de funciones que respeten la estructura algebraica. Más precisamente, nos enfocaremos en espacios de funciones holomorfas definidas sobre un espacio de Banach. La necesidad de trabajar con estas topologías surge del hecho de que el espacio de funciones holomorfas con las *topologías clásicas* no resulta ser un espacio de Banach, pero suele constituir un espacio de Fréchet.
En lo que sigue, salvo que se aclare lo contrario, E denotará un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ será el cuerpo de números reales o complejos.

1.1. Topologías en espacios vectoriales

Para un espacio vectorial E, es de esperar que los entornos de un punto $x \in E$ estén determinados por los entornos del origen via la traslación en x. Una de las clases más importantes y útiles de este tipo de topologías son las localmente convexas, que son aquellas que tienen una base de entornos convexos y que describiremos con detalle en esta sección. Un ejemplo clásico de topología localmente convexa sobre un espacio vectorial normado es la topología débil.
Un espacio puede admitir diferentes toplogías. Si τ_1 y τ_2 definen dos topologías para E, diremos que τ_1 *es más fina que* τ_2 si todos los abiertos de τ_2 son también abiertos de τ_1. Esto es, τ_1 tiene "más" abiertos que τ_2, admitiendo que puedan tener los mismos abiertos. En términos de bases de abiertos, τ_1 es más fina que τ_2 si para cada $x \in E$ todo abierto de una base de entornos de x de τ_2, es un entorno de x para la topología τ_1. Para destacar que τ_2 tiene "menos" abiertos que τ_1 diremos que τ_2 *es más gruesa que* τ_1. Así como es posible que dos toplogías comparables sean idénticas, también es posible tener sobre E dos topología no comparables. En este caso, cada una tendrá un abierto que no lo es para la otra. Es momento oportuno introducir algunas definiciones.

Definición 1.1.1 *Sea E un espacio vectorial. Una topología τ en E se dice compatible con la estructura algebraica de E si las operaciones «suma» y «producto por escalar» son continuas con esta topología. Un espacio vectorial topológico (E, τ) es un espacio vectorial E con una topología compatible τ.*

Observación En este caso, si $x \in E$ y U es un entorno del origen, $x + U$ resulta un entorno de x. Recíprocamente, todo entorno de x produce un entorno del origen al trasladarlo en $-x$. Luego, para definir una base de entornos de una topología de un espacio vectorial topológico, basta definir una base de entornos del origen, a los que llamaremos, simplemente, entornos a menos que otra aclaración sea necesaria.

Definición 1.1.2 *Un espacio localmente convexo (E, τ) es un espacio vectorial topológico que tiene una base de entornos del origen convexos.*

Definición 1.1.3 *Sea E un espacio vectorial y $A \subset E$ un subconjunto. A se dice absolutamente convexo si para todo par de puntos $x, y \in A$ se cumple que $\lambda x + \mu y \in A$ cuando* $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

De la definición se deduce que un conjunto es absolutamente convexo si y sólo si es convexo y equilibrado.

Definición 1.1.4 *Sea E un espacio vectorial. Un subconjunto A de E se dice absorbente si para todo $x \in E$ existe $\lambda > 0$ tal que $x \in \mu A$ para todo μ tal que $|\mu| \geq \lambda$.*

Si sobre un espacio vectorial E está definida una norma $||.||$, el conjunto B_E definido por $B_E = \{x \in E \colon ||x|| < 1\}$ es absolutamente convexo y absorbente.

El siguiente teorema da una caracterización de los entornos de un espacio localmente convexo. También muestra como dada una familia de subconjuntos con ciertas propiedades, podemos hacer de un espacio vectorial, un espacio localmente convexo. Una demostración puede verse en [18].

Teorema 1.1.5 *Todo espacio localmente convexo tiene una base de entornos $\mathcal{U}$ con las siguientes propiedades*:

(a) *Si $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$, entonces existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U \cap V$;*

(b) *Si $U \in \mathcal{U}$ y $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda U \in \mathcal{U}$;*

(c) *Cada $U \in \mathcal{U}$ es absolutamente convexo y absorbente.*

Recíprocamente, dada una colección $\mathcal{U}$ no vacía de subconjuntos de un espacio vectorial E con las propiedades (a), (b) y (c), *existe una topología τ tal que (E, τ) es un espacio localmente convexo con $\mathcal{U}$ una base de entornos.*

Cuando no haya confusión, al espacio localmente convexo (E, τ) lo notaremos simplemente por E.

El siguiente resultado, cuya demostarción puede verse en [16], formaliza la manera de comparar dos topologías a partir de sus bases de entornos.

Lema 1.1.6 *Sea E un espacio vectorial y sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre E que lo hacen un espacio vectorial topológico. Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de entornos de τ_1 y τ_2 respectivamente, entonces son equivalentes*:

(a) *τ_2 es mas fina que τ_1.*

(b) *Para cada $V_1 \in \mathcal{B}_1$ existe $V_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $V_2 \subset V_1$.*

Ahora podemos establecer el siguiente resultado que nos permitirá definir distintas topologías sobre un espacio vectorial.

Corolario 1.1.7 *Sea $\mathcal{V}$ una colección de conjuntos absolutamente convexos y absorbentes de un espacio vectorial E. Entonces, existe una topología en E compatible con la estructura algebraica tal que cada conjunto de $\mathcal{V}$ es un entorno. La topología más gruesa que cumple esta propiedad, a la que llamaremos η, viene dada por una base de entornos de la forma*

$$U = \{\varepsilon \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_i : \varepsilon > 0, V_i \in \mathcal{V}, i = 1, \ldots, n\}.$$

En particular, (E, η) resulta un espacio localmente convexo.

Demostración: La existencia de una topología compatible con la estructura algebraica de E para la cual cada conjunto en $\mathcal{V}$ es un entorno está asegurada ya que los conjuntos U cumplen con las propiedades (a), (b) y (c) del Teorema 1.1.5. Veamos que resulta ser la menor topología que hace que los conjuntos de $\mathcal{V}$ sean entornos. Sea τ una topología con base de entornos $\mathcal{B}$ tal que cada elemento de $\mathcal{V}$ es un entorno. Si $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_i$. Por el lema anterior η es mas gruesa que τ. $\square$

En particular, si se cumple que $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \{0\}$, la topología resulta Hausdorff. Esto es, dados dos puntos x_1, x_2 distintos del espacio, existen dos abiertos V_1, V_2 de la base de entornos que los separa, es decir, $(x_1 + V_1) \cap (x_2 + V_2) = \emptyset$. De ahora en más, cada vez que hablemos de un espacio localmente convexo, asumimiremos que el espacio es Hausdorff. En lo que sigue enunciaremos los ejemplos más conocidos de espacios localmente convexos. Si E es un espacio localmente convexo, notaremos con E^* al dual algebraico de E, el conjunto de todas las funciones lineales de E en el cuerpo $\mathbb{K}$. El espacio dual de E, denotado E', es el subconjunto de E^* de todas las funciones lineales y continuas.

Ejemplos 1.1.8

1. Si sobre el espacio vectorial E está definida una distancia d invariante por traslaciones, esto es $d(x + y, z + y) = d(x, z)$ para todo $x, y, z \in E$, y consideramos los conjuntos $V_r = \{x \in E \colon d(x, 0) < r\}$, la familia $\mathcal{V} = \{V_r : r \in \mathbb{Q}\}$ cumple con las propiedades del Corolario 1.1.7. La topología generada por esta familia tiene una base de entornos numerable y hace de E un espacio localmente convexo. Estos espacios son los espacios metrizables y si resultan completos con esta topología se denominan espacios de Frechét.

2. Si sobre el espacio vectorial E está definida una norma $||.||$, el conjunto B_E cumple las hipótesis del corolario anterior. Los conjuntos λB_E con $\lambda > 0$ forman una base de entornos y define sobre E un espacio localmente convexo. Estos son los espacios normados y los notaremos por $(E, ||.||)$. Si $(E, ||.||)$ es completo, es decir, que toda sucesión de Cauchy es convergente, se llaman espacios de Banach.

3. Si E es un espacio localmente convexo y la familia $\mathcal{V}$ está formada por todos los conjuntos de la forma $V_{x'} = \{x \in E \colon |x'(x)| < 1\}$ con $x' \in E'$, los conjuntos de la forma
$$U = \{x \in E \colon \sup_{j=1,\ldots,n} |x'_j(x)| < 1; x'_1, \ldots, x'_n \in E'\}$$
forman una base de entornos de una topología que hace a E un espacio localmente convexo. A esta topología la denominamos topología débil y la notamos $\sigma(E, E')$ y, en general, al espacio E con esta topología lo notamos (E, w).

4. Si E' es el dual de un espacio localmente convexo E, la familia $\mathcal{V} \subset E'$ formada por los conjnutos $V_x = \{x' \in E' \colon |x'(x)| < 1\}$ cumplen las condiciones del Corolario 1.1.7. Los conjuntos de la forma
$$U = \{x' \in E' \colon \sup_{j=1,\ldots,n} |x'(x_j)| < 1; x_1, \ldots, x_n \in E\}$$
forman una base de entornos de una topología, haciendo de E' un espacio localmente convexo. Esta topología se denomina topología débil* y la notamos como $\sigma(E', E)$. A E' con esta topología lo notamos (E', w^*).

Los entornos de un espacio localmente convexo vienen dados por seminormas. En efecto, veremos que para definir una topología de un espacio localmente convexo es equivalente dar una base de entornos que dar una familia de seminormas continuas. Recordemos la definición de seminorma:

Definición 1.1.9 *Sea E un espacio vectorial. Una función $p \colon E \to \mathbb{R}$ se la llama seminorma si satisface*:

(a) $p(x) \geq 0$ *para todo* $x \in E$;

(b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}, x \in E$;

(c) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *para todo* $x, y \in E$.

Proposición 1.1.10 *Sea E un espacio vectorial. Entonces*:

(a) *Si p es una seminorma de E y $\lambda > 0$, los conjuntos $\{x: p(x) < \lambda\}$ y $\{x: p(x) \leq \lambda\}$ son absolutamnete convexos y absorbentes.*

(b) *Cada conjunto $A \subset E$ absolutamente convexo y absorbente está asociado a la seminorma p, definida por*

$$p(x) = \text{ínf}\{\lambda: \lambda > 0, x \in \lambda A\}$$

y con la propiedad

$$\{x: p(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x: p(x) \leq 1\}.$$

Esta seminorma p se la llama la funcional de Minkowski de A.

Demostración:

(a) Veamos primero que $\{x: p(x) < \lambda\}$ es absolutamente convexo. Tomemos x_1, x_2 en $\{x: p(x) < \lambda\}$ y $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ con $|\mu_1| + |\mu_2| \leq 1$. Luego,

$$p(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) \leq |\mu_1| p(x_1) + |\mu_2| p(x_2) < \lambda(|\mu_1| + |\mu_2|) \leq \lambda.$$

Para ver que $\{x: p(x) < \lambda\}$ es absorbente, tomemos $x \in E$. Si $p(x) = 0$ no hay nada que probar, si $p(x) > 0$, para todo $\mu > \lambda^{-1} p(x)$, se tiene que $p(\mu^{-1} x) = \mu^{-1} p(x) < \lambda$. Luego $\mu^{-1} x \in \{x: p(x) < \lambda\}$, es decir $x \in \mu\{x: p(x) < \lambda\}$.

(b) Como A es absorbente, $p(x)$ esta bien definida para todo $x \in E$. Las demostraciones de que p es una seminorma y que valen las inclusiones son standard.

□

Con lo hecho, se obtiene en forma inmediata la siguiente proposición.

Proposición 1.1.11 *Sea E un espacio localmente convexo y $U \subset E$ un conjunto absolutamente convexo y abosrbente. Si p es la funcional de Minkowski de U, entonces p es continua si y sólo si U es un entorno de E.*

Finalmente podemos asociar familias de seminormas con topologías localmente convexas.

Proposición 1.1.12 *Sea E espacio vectorial, entonces:*

(a) *Dada $\mathcal{P}$ una familia de seminormas, existe una topología sobre E para la cuál cada seminorma de $\mathcal{P}$ es continua. Además, E resulta un espacio localmente convexo con los entornos asociados a las seminormas de $\mathcal{P}$.*

(b) *Si (E,τ) es un espacio localmente convexo y $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las seminormas continuas para τ, los conjuntos $\{x : p(x) < 1\}$ con $p \in \mathcal{P}$ definen a τ.*

Demostración:

(a) Por la Proposición 1.1.10, dado $\lambda > 0$, los conjuntos $\{x : p(x) < \lambda\}$ y $\{x : p(x) \leq \lambda\}$ son absolutamente convexos y absorbentes para toda $p \in \mathcal{P}$. La existencia de la topología se deduce del Corolario 1.1.7.

(b) Si (E,τ) es un espacio localmente convexo y $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las seminormas continuas, de la Proposiciones 1.1.10 y 1.1.11 se deduce que $\mathcal{P}$ es el conjunto de las funcionales de Minkowski de cada entorno de E. La topología generada por los conjuntos $\{x : p(x) < 1\}$ y la generada por $\{x : p(x) \leq 1\}$ con $p \in \mathcal{P}$ coinciden ya que cada seminorma p es continua. Luego, por la Proposición 1.1.10, resulta que para cada entorno U de τ, y p la funcional de Minkowski de U, se cumple que $\{x : p(x) < 1\} \subset U \subset \{x : p(x) \leq 1\}$. Aplicando el Lema 1.1.6 queda que los conjuntos $\{x : p(x) < 1\}$ con $p \in \mathcal{P}$ generan la topología τ.

□

1.2. Topologías polares

En esta sección vamos a ver distintas topologías que se le pueden dar al dual de un espacio localmente convexo, denominadas topologías polares. Veremos también que todo espacio localmente convexo es el dual de otro y la topología que lo hace localmente convexo en una topología polar.

En lo que sigue, mostraremos que todo espacio localmente convexo E admite una topología más gruesa que la original para la cuál el dual de E con esta nueva topología es un subespacio F^* donde $F^* \subset E^*$, para esto usaremos el siguiente resultado elemental:

Lema 1.2.1 *Sea E un espacio vectorial y $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$. Si $\ker \varphi \supseteq \bigcap_{1 \leq j \leq n} \ker \varphi_j$, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j$.*

Proposición 1.2.2 *Sea E un espacio localmente convexo y sea F^* subespacio de E^* que contiene a E'.*

(a) *Para cada $\varphi \in F^*$, la función dada por $p(x) = |\varphi(x)|$ define una seminorma en E y $V_\varphi = \{x \in E : |\varphi(x)| < 1\}$ es un conjunto absolutamente convexo y absorbente.*

(b) *Existe una topología que hace de E un espacio localmente convexo, para la cual los conjuntos V_φ son entornos. La base de entornos de la topología más gruesa que cumple esta propiedad viene dada por los conjuntos*

$$U = \{x \in E\colon \sup_{i=1,\ldots,n} |\varphi_i(x)| < 1; \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in F^*\}.$$

Esta topología será notada $\sigma(E, F^*)$ y hace de E un espacio localmente convexo.

(c) *El dual de E bajo la topología $\sigma(E, F^*)$ es F^* y esta es la topología más gruesa que se le puede dar a E para que el dual sea F^*.*

Demostración:

(a) La linealidad de φ muestra que p es una seminorma. Luego V_φ es absolutamente convexo y absorbente gracias a la Proposición 1.1.10.

(b) Aplicando el Corolario 1.1.7 a la familia $\mathcal{V} = \{V_\varphi\colon \phi \in F^*\}$ obtenemos la existencia de la topología $\sigma(E, F^*)$ y la descripción de su base de entornos.

(c) Es claro que si $\varphi \in F^*$, entonces φ es $\sigma(E, F^*)$-continua. Recíprocamente, si ψ es una funcional de E $\sigma(E, F^*)$-continua, entonces existe un $\sigma(E, F^*)$-entorno

$$U = \{x \in E\colon \sup_{i=1,\ldots,n} |\varphi_i(x)| < 1; \varphi_1, \ldots \varphi_n \in F^*\},$$

tal que $|\psi(U)| < 1$. Si $x \in \bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_i$, entonces $\lambda x \in U$ para todo $\lambda > 0$, luego $|\psi(\lambda x)| < 1$ para todo $\lambda > 0$, es decir $|\psi(x)| < \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$. Se sigue que $\ker \psi \supseteq \bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_i$ y por el Lema 1.2.1 existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que $\psi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$. Por lo tanto $\psi \in F^*$.

Falta ver que esta es la topología más gruesa para la cuál F^* es el dual de E. Sea $\varphi \in F^*$, si φ es continua bajo una topología τ de E, entonces existe U entorno de la topología τ tal que $|\varphi(U)| < 1$. Luego $U \subset V_\varphi$ y por la Proposición 1.1.6 τ es más fina que $\sigma(E, F^*)$.

$\square$

Observaciones

1. La proposición anterior generaliza la definición de topología débil. En efecto, si tomamos $F^* = E'$, obtenemos $\sigma(E, E')$ y de la proposición se deduce también que es la topología más gruesa para la cuál el dual de $(E, \sigma(E, E'))$ es E'.

2. Dado un espacio localmente convexo E con dual E', consideramos la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon E\times E'\to\mathbb{K}$ dada por $\langle x,x'\rangle=x'(x)$ para $x\in E$ y $x'\in E'$. Se cumple que:

   - Si $\langle x,x'\rangle=0$ para todo $x\in E$, entonces $x'=0$.
   - Si $\langle x,x'\rangle=0$ para todo $x'\in E'$, entonces $x=0$.

   Estas son las propiedades que satisface un par dual. La primera propiedad es trivial, mientras que la segunda se debe al Teorena de Hahn-Banach. Así, E resulta algebraicamente isomorfo a un subespacio de E'^* vía la aplicación $J: E\to E'^*$ dada por $J(x)=<x,\cdot>$. De esta manera, a E' se le puede dar una topología que lo convierte en un espacio localmente convexo y cuyo dual es $J(E)$ y, de esta forma, se obtiene la topología $\sigma(E',E)$.

Según la Proposición 1.2.2 y la observación 2, a E' se le puede dar una topología localmente convexa a partir de una colección de conjuntos de E. Más aún, distintas colecciones de conjuntos de E producen en E' distintas topologías localmente convexas. Para ver esto con mas detalle, necesitamos la noción de conjunto polar.

Definición 1.2.3 *Sea E un espacio localmente convexo y sea F^* un subespacio de E^* que contiene a E'. Si $A\subset E$, el polar de A tomado en F^* será el conjunto de F^* dado por $A^\circ_{F^*}=\{\varphi\in F^*\colon|\langle x,\varphi\rangle|\le 1\ \ \forall x\in A\}$.*

Notar que $A^\circ_{F^*}$ es $\sigma(F^*,E)$-cerrado, puesto que $A^\circ_{F^*}=\bigcap_{x\in A}\{\varphi\in F^*\colon|\langle x,\varphi\rangle|\le 1\}$. Además $A^\circ_{F^*}$ es un conjunto absolutamente convexo, aún cuando A no lo sea. El menor conjunto absolutamente convexo que contiene a A es su cápsula convexa equilibrada que notaremos por coe(A). En particular, si E es un espacio normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada entonces se tiene que $\mathrm{coe}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)=\{\sum_{j=1}^m x_{n_j}\lambda_j,\ |\lambda_1|+\cdots+|\lambda_m|\le 1,\ m\in\mathbb{N}\}$ y su clausura $\overline{\mathrm{coe}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}=\{\sum_{n=1}^\infty x_n\lambda_n,\ |\lambda_1|+|\lambda_2|+\cdots\le 1\}$. En la siguiente proposición damos las propiedades elementales relacionadas con el polar de un conjunto asociado a F^* un subespacio de E^*. Las demostraciones correspondientes son sencillas y vamos a omitirlas.

Proposición 1.2.4 *Sea E un espacio localmente convexo con dual E', sea F^* un subespacio de E^* que contiene a E' y sea $A\subset E$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) *$A^\circ_{F^*}$ es absolutamente convexo y $\sigma(F^*,E)$-cerrado.*

(b) *Si $A\subset B$, entonces $B^\circ_{F^*}\subset A^\circ_{F^*}$.*

(c) *Si $\lambda\neq 0$, entonces $(\lambda A)^\circ_{F^*}=(\frac{1}{|\lambda|})A^\circ_{F^*}$.*

(d) *Si* $(A_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subset E$*, entonces* $(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^\circ_{F^*} = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha)^\circ_{F^*}$.

(e) $A^\circ_{F^*} = (\mathrm{coe}(A))^\circ_{F^*}$.

(f) $A^\circ_{F^*} = (\overline{A})^\circ_{F^*}$.

En general, cuando hablemos del polar de un conjunto $A \subset E$, nos referimos al polar tomado en E', en tal caso notamos a $A^\circ_{E'}$ como A°.

Hay una manera útil de describir el dual de un espacio localmente convexo E a partir de los conjuntos polares de una base de entornos de E.

Proposición 1.2.5 *Sea* (E,τ) *un espacio localmente convexo y sea* $\mathcal{U}$ *una base de entornos de* τ*. Entonces* $(E,\tau)' = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U^\circ_{E^*}$

Demostración: Sea $x^* \in E^*$, x^* es continua si y sólo si existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $|\langle x, x^*\rangle| \leq 1$ para todo $x \in U$. Es decir, si y sólo si $x^* \in U^\circ_{E^*}$. □

Para los subconjuntos $A \subset E$ absorbentes, el siguiente resultado da una forma de caracterizar su polar vía la funcional de Minkowski de A.

Proposición 1.2.6 *Sea* E *un espacio localmente convexo y sea* $A \subset E$ *absorbente. Entonces* $A^\circ = \{x' \in E' \colon |\langle x, x'\rangle| \leq p(x),\ \forall x \in E\}$*, donde* p *es la funcional de Minkowski de* A*.*

Demostración: Si $x' \in E'$ es tal que $|\langle x, x'\rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in E$, entonces se cumple que $|\langle x, x'\rangle| \leq 1\ \forall x \in A$, puesto que $p(x) \leq 1$ si $x \in A$. Luego $x' \in A^\circ$.

Si $x' \in A^\circ$ y $x \in E$, al ser A absorbente, $p(x)$ esta bien definido y por lo tanto para todo $\varepsilon > 0$, $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in A$. Luego $|\langle \frac{x}{p(x)+\varepsilon}, x'\rangle| \leq 1$. Se sigue que $|\langle x, x'\rangle| \leq p(x) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Es decir, $A^\circ \subset \{x' \in E' \colon |\langle x, x'\rangle| \leq p(x)\ \forall x \in E\}$. □

De esta manera, cada elemento de A° está acotado por la funcional de Minkowski de A. Esta estrecha relación que percibimos entre un conjunto de un espacio y su polar en el espacio dual nos permitirá, un poco más adelante, dar una topolgía convexa en E' por medio de ciertos entornos de la topología de E.

Como vimos, toda familia $\mathcal{V}$ de conjuntos absolutamente convexos y absorbentes de un espacio vectorial, tiene asociada una topología localmente convexa. La menor de estas topologías tiene una base de entornos como se describe en el Colorario 1.1.7. Ahora bien, si el espacio vectorial es E', se tiene que A° es absolutamente convexo en E' cualquiera sea $A \subset E$. Queremos ver qué propiedad debe cumplir A para que su polar sea absorbente y así podremos definir una topología en E' que lo hace localmente convexo. En la Proposición 1.2.8 caracterizaremos a los conjuntos de E con la propiedad deseada. Para eso necesitaremos la siguiente definición:

Definición 1.2.7 *Sea E un espacio localmente convexo y $\mathcal{U}$ una base de entornos de E. Un conjunto $A \subset E$ se dice acotado si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset \mu U$ para todo $|\mu| > \lambda$.*

Proposición 1.2.8 *Sea E un espacio localmente convexo con dual E' y sea $A \subset E$. Son equivalentes:*

(a) *A es $\sigma(E, E')$-acotado;*

(b) *$p'(x') = \sup\{|\langle x, x'\rangle| : x \in A\}$ es una seminorma en E';*

(c) *A° es un conjunto absorbente en E'.*

Demostración:

(a)⇒(b) Basta ver la buena definición de p'. Si $x' \in E'$, $V = \{x \in E : |\langle x, x'\rangle| < 1\}$ es un $\sigma(E, E')$-entorno y, como A es $\sigma(E, E')$-acotado, existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset \mu V$ para todo $|\mu| > \lambda$. Luego, fijando $\mu = |\lambda| + 1$, para todo $x \in A$, $|\langle \frac{x}{\mu}, x'\rangle| < 1$ y, por lo tanto, el conjunto $\{|\langle x, x'\rangle|, x \in A\}$ esta acotado por $|\lambda| + 1$ y p' está bien definida.

(b)⇒(c) Sea $x' \in E'$. Si $x' \in A^\circ$ no hay nada que probar. Si $x' \notin A^\circ$, tomemos $x \in A$ arbitrario. Se tiene $|\langle x, \frac{x'}{p'(x')}\rangle| \leq 1$ y por tanto $\frac{x'}{p'(x')} \in A^\circ$. Se sigue que $x' \in \mu A^\circ$ para todo $|\mu| > p'(x')$ y A° es absorbente.

(c)⇒(a) Veamos que dado un $\sigma(E, E')$-entorno U, existe un $\lambda > 0$ tal que $A \subset \mu U$ para todo $|\mu| > \lambda$. Basta probarlo para una base de entornos de $\sigma(E, E')$. Sean $x'_1, \ldots, x'_n \in E'$ tales que $U = \{x \in E : |\langle x, x'_j\rangle| < 1, j = 1, \ldots, n\}$. Como A° es absorbente, existe $\lambda > 0$ tal que $x'_1, \ldots, x'_n \in \mu A^\circ$ para todo $|\mu| > \lambda$. Por lo tanto si $x \in A$ resulta que $|\langle x, \frac{x'_j}{\mu}\rangle| \leq 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Luego $|\langle \frac{x}{\mu}, x'_j\rangle| \leq 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Así se ve que $A \subset \mu U$ para todo $|\mu| > \lambda$.

□

Vimos que, dada $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos de E $\sigma(E, E')$-acotados, las Proposiciones 1.2.4 y 1.2.8 garantizan la existencia de una familia de conjuntos absolutamente convexos y absorbentes en E', $\mathcal{A}^\circ$, formada por los conjuntos A°, con $A \in \mathcal{A}$. Esta familia permite definir, por el Corolario 1.1.7, una topología τ' sobre E' para la cual los conjuntos A° con $A \in \mathcal{A}$ son entornos del origen. Visto esto y usando la misma notación, podemos dar las topologías polares:

Definición 1.2.9 *Sea E un espacio localmente convexo con dual E' y sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos de E, $\sigma(E, E')$-acotados. Llamamos topología polar asociada a $\mathcal{A}$ a la menor topología en E' que contiene a todos los conjuntos de $\mathcal{A}^\circ$.*

Cada familia $\mathcal{A}$ de conjuntos $\sigma(E,E')$-acotados, define una una topología polar, que también llamaremos topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de $\mathcal{A}$ o la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia. Una base de entornos de esta topología viene dada por

$$\varepsilon \bigcap_{1\le i\le n} A_i^\circ = (\varepsilon^{-1} \bigcup_{1\le i\le n} A_i)^\circ, \quad \varepsilon > 0, A_i \in \mathcal{A}.$$

Observaciones

1. Sea $(x'_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ en E' una red que converge a un punto x' en la topología de la $\mathcal{A}$- convergencia. Luego, dado $A \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in \Gamma$ tal que si $\alpha > \alpha_0$, $x'_\alpha - x' \in \varepsilon A^\circ$. Es decir $|\langle x, x'_\alpha - x'\rangle| \le \varepsilon$ para todo $x \in A$. Resulta que si una red en E' converge en la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, converge uniformemente sobre cada $A \in \mathcal{A}$. Por eso la topología polar asociada a $\mathcal{A}$ recibe el nombre de convergencia uniforme sobre los conjuntos de $\mathcal{A}$.

2. Generalmente, la familia $\mathcal{A}$ cumple las propiedades:

   B1: Si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}$, entonces existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $A \cup B \subset C$.

   B2: Si $A \in \mathcal{A}$ y λ es un escalar, entonces $\lambda A \in \mathcal{A}$.

   B3: Span $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = E$. Es decir, si $x \in E$, entonces existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ escalares tal que $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ para algunos $x_j \in A_j, j = 1, \ldots, n$.

   Las propiedades B1 y B2 nos aseguran que los polares de $\mathcal{A}$ forman una base de entornos de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia. En efecto, si $\varepsilon \bigcap_{1\le i\le n} A_i^\circ$ es un entorno de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, luego existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $\varepsilon^{-1} \bigcup_{1\le i\le n} A_i \subset C$ y por la Proposición 1.2.4, $C^\circ \subset \varepsilon \bigcap_{1\le i\le n} A_i^\circ$. Aplicando el Lema 1.1.6 se ve que $\mathcal{A}^\circ$ es una base de entornos de la topología.

   La propiedad B3 es condición suficiente para que la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia sea más fina que la débil*. Llamemos τ a la topología de la $\mathcal{A}$-convergenica y veamos que E está incluido en el dual de (E', τ). Como la topología débil* es las más gruesa para la cuál E está incluido en el dual de E', resulta que a topologia de $\mathcal{A}$-convergencia es más fina que la topología débil*.

   Sea $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ con $x_j \in A_j, j = 1, \ldots, n$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos el conjunto $U = \delta \bigcap_{1\le j\le n} A_j^\circ$, con $\delta > 0$ a determinar. Si $x' \in U$ se tiene la desigualdad $|\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, x'\rangle| \le \sum_{j=1}^n |\lambda_j||\langle x_j, x'\rangle| \le \delta \sum_{j=1}^n |\lambda_j|$. Basta tomar $\delta < \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^n |\lambda_j|}$, para que $|\langle x, x'\rangle| \le \varepsilon$ para todo $x' \in U$. Luego $E \subset (E', \tau)'$. En particular, como la topología débil* es Hausdorff, la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia resulta Hausdorff.

3. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que los conjutos $A \in \mathcal{A}$ son absolutamente convexos y $\sigma(E, E')$-cerrados ya que, por la Proposición 1.2.4, A y $\overline{coe(A)}$ tienen los mismos polares.

4. La topología de la $\mathcal{A}$-convergencia se puede describir mediante seminormas. Si el conjunto $\mathcal{A}$ cumple con las propiedades B1, B2 y B3, una base de entornos de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia son los conjuntos A° con $A \in \mathcal{A}$ y sus funcionales de Minkowski pueden expresarse en términos de A. En efecto, si p'_A es la funcional de Minkowski de A° se tiene que

$$\begin{aligned} p'_A(x') = & \text{ ínf}\{\lambda \colon \lambda > 0, x' \in \lambda A^\circ\} \\ = & \text{ ínf}\{\lambda \colon \lambda > 0, x' \in (\tfrac{1}{\lambda}A)^\circ\} \\ = & \text{ ínf}\{\lambda \colon \lambda > 0, |\langle \tfrac{x}{\lambda}, x'\rangle| \leq 1 \ \forall x \in A\} \\ = & \text{ ínf}\{\lambda \colon \lambda > 0, |\langle x, x'\rangle| < \lambda, \ \forall x \in A\} \\ = & \text{ sup}\{|\langle x, x'\rangle| \colon x \in A\} \end{aligned}$$

Por la Proposición 1.1.10 p'_A es seminorma y $A^\circ = \{x' \in E' \colon p'_A(x') \leq 1\}$ y por la Proposición 1.1.12 la familia de seminormas $\{p'_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ definen la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia.

Ejemplos 1.2.10 *Los siguientes ejemplos muestran las topologías polares más distinguidas.*

1. En el caso que la familia $\mathcal{A}$ es la familia de todos los conjuntos finitos de E, la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia es la topología débil* debido a que ambas están definida por los mismos entornos:

$$\{x' \in E' : \sup |\langle x_j, x'\rangle| < 1, x_1, \ldots, x_n \in E\}.$$

Bajo esta topología una red $(x'_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ converge a x' si y sólo si $\langle x, x'_\alpha\rangle$ converge a $\langle x, x'\rangle$ para todo $x \in E$.

2. Si $\mathcal{A}_1$ es una familia de conjuntos débil acotados de E y $\mathcal{A}_2$ es una sub-familia de $\mathcal{A}_1$, la topología de la $\mathcal{A}_1$- convergencia es más fina que la topología de la $\mathcal{A}_2$- convergencia. Por esto, la topología polar más fina se obtiene cuando $\mathcal{A}$ es la familia de todos los conjuntos débil acotados de E. A esta topología se la denomina topología fuerte y se denota con $\beta(E', E)$.

3. Si $\mathcal{A}$ está formado por todos los conjuntos absolutamente convexos y compactos, $\mathcal{A}$ cumple las propiedades B1, B2 y B3. Es claro que cumplen B2 y B3. La propiedad B1 se cumple ya que si A y B son conjuntos absolutamente convexos y compactos, $\overline{\text{coe}\{A \cup B\}}$ es un subconjunto cerrado de $A + B$ que es compacto. Esta topología es una topología intermedia entre la débil* y la fuerte.

En general, no es cierto que en todo espacio localmente convexo la cápsula absolutamente convexa cerrada de un conjunto compacto sea compacta. Si esto ocurre, la topología polar de la convergencia sobre los compactos coincide con la topología polar de la convergencia sobre los absolutamente convexos y compactos. Nosotros usaremos en particular el dual de un espacio localmente convexo E dotado con la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos absolutamente convexos y compactos que notaremos por E'_c.

El siguiente teorema permitirá calcular más adelante el dual de un espacio localmente convexo cuando tiene una topología polar.

Teorema 1.2.11 *Sea E un espacio localmente convexo con dual E', $A \subset E$ y sea F un subespacio de E'^* que contiene a E. Entonces el bipolar de A tomado en F, $A_F^{\circ\circ} = (A^\circ)_F^\circ$, es la clausura en $\sigma(F, E')$ de $coe(A)$ (el primer polar se toma en E').*

Demostración: Sea $B = \overline{coe(A)}$ donde la clausura se toma en $\sigma(F, E')$. Por la Proposición 1.2.4, $A \subset A_F^{\circ\circ}$. Además, $A_F^{\circ\circ}$ es $\sigma(F, E')$-cerrado y absolutamente convexo. Luego $B \subset A_F^{\circ\circ}$. Si $a \notin B$, por el Teorema de Hahn-Banach, existe $x' \in E'$ tal que $\langle a, x' \rangle > 1$ y $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$ para todo $x \in B$. Como $A \subset B$, entonces $x' \in A^\circ$ y, por lo tanto, $a \notin A_F^{\circ\circ}$. Se concluye que $A_F^{\circ\circ} \subset B$, de donde $A_F^{\circ\circ} = B$. $\square$

Como aplicación del resultado anterior, podremos describir el dual de E'_c. Para ello necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1.2.12 *Sea E un espacio localmente convexo con dual E'. Si $K \subset E$ es absolutamente convexo y compacto, entonces $K^{\circ\circ} = K$.*

Demostración: Por el Teorema 1.2.11, como K es absolutamente convexo, $K^{\circ\circ}$ es la $\sigma(E'^*, E')$-clausura de K. Dado que K es compacto en E, es $\sigma(E, E')$-compacto. Como $\sigma(E'^*, E')$ induce en E la topología $\sigma(E, E')$, resulta que K es $\sigma(E'^*, E')$-compacto. Por lo tanto $\sigma(E'^*, E')$-cerrado. Luego $K^{\circ\circ} = K$. $\square$

Proposición 1.2.13 *Sea E un espacio localmente convexo con dual E'. Entonces se tiene la igualdad $(E'_c)' = E$.*

Demostración: Sea $\mathcal{K}$ la familia de todos los conjuntos absolutamente convexos y compactos de E. Los entornos en E'_c son los conjuntos K° donde $K \in \mathcal{K}$. Entonces por la Proposición 1.2.5 $(E'_c)' = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K^{\circ\circ}$. Por el lema anterior, $(E'_c)' = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$. Por la propiedad B3, sabemos que $E = \text{Span} \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$. Entonces si $x \in E$, existe $K_1, \ldots, K_n$ tal que $x \in K_1 + \cdots + K_n$ y, como la suma de conjuntos absolutamente convexos y compactos es absolutamente convexo y compacto, resulta que $K_1 + \cdots + K_n \in \mathcal{K}$. Por lo tanto $E = \text{Span} \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = (E'_c)'$, como se quería ver. $\square$

Usando técnicas similares a las de la proposición anterior, veremos que si (E, τ) es un espacio localmente convexo, entonces τ es una topología polar. Antes necesitaremos la siguiente definición.

Definición 1.2.14 *Sea E un espacio localmente convexo con dual E'. Un conjunto A' de E' se dice equicontinuo si para cada $\lambda > 0$ existe un entorno $U \subset E$ tal que $|\langle U, x' \rangle| < \lambda$ para todo $x' \in A'$.*

Proposición 1.2.15 *Sea (E, τ) un espacio localmente convexo con dual E' y sea $\mathcal{U}$ una base de entornos cerrados absolutamente convexos de τ. Entonces,*

(a) *Si tomamos $U^{\circ\circ} = (U^\circ)^\circ_E$, se tiene $U^{\circ\circ} = U$ para todo $U \in \mathcal{U}$.*

(b) *Si $A' \subset E'$ es equicontinuo, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A' \subset U^\circ$.*

(c) *τ es la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de E'.*

Demostración:

(a) Dado $U \in \mathcal{U}$, $U \subset U^{\circ\circ}$. Veamos la otra inclusión. Si $y \notin U$, por el Teorema de Hahn-Banach, existe $x' \in E'$ tal que $\langle y, x' \rangle > 1$ y $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$ para todo $x \in U$. Luego $x' \in U^\circ$, implicando que $y \notin U^{\circ\circ}$. Así, $U^{\circ\circ} \subset U$ y vale $U^{\circ\circ} = U$.

(b) Si $A' \subset E$ es equicontinuo, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $|\langle U, x' \rangle| < 1$ para todo $x' \in A'$. Luego $A' \subset U^\circ$.

(c) Por el ítem (a), τ es la topología de la convergecia uniforme sobre los conjuntos U° con $U \in \mathcal{U}$. Como cada conjunto U° es equicontinuo, τ es más gruesa que la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de E'. Veamos que ambas topologías coinciden. Por el ítem (b), si A' es equicontinuo, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A' \subset U^\circ$. Por la Proposición 1.2.4 y el ítem (a), $U \subset A'^\circ$ y, por el Corolario 1.1.6, la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de E' es más gruesa que τ, de donde se sigue el resultado.

$\square$

Es posible calcular la funcional de Minkowski de un entorno en E en términos de elementos de E'. Usaremos esta caracterización más adelante, cuando hablemos de topologías localmente convexas en el espacio de operadores continuos. Cuando $x' \in E'$ y p una seminorma en E cumplan que $|\langle x, x' \rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in E$ usaremos la notación $|x'| \leq p$, con desigualdad estricta cuando sea el caso.

Proposición 1.2.16 *Sea E un espacio localmente convexo y sea $U \subset E$ un entorno absolutamente convexo, cerrado y absorbente. Entonces si p es la funcional de Minkowski de U se tiene $p(x) = \sup\{|\langle x, x'\rangle| \colon |x'| \leq p\}$.*

Demostración: Sea $x \in E$ y pongamos $a = p(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, $\frac{x}{a+\varepsilon} \in U = U^{\circ\circ}$ por la Proposición 1.2.15. Entonces, $|\langle \frac{x}{a+\varepsilon}, x'\rangle| \leq 1$ para todo $x' \in U^\circ$ y, por la Proposición 1.2.6, obtenemos que $|\langle x, x'\rangle| \leq a + \varepsilon$ para todo $|x'| \leq p$. Haciendo tender ε a 0, tenemos que $\sup\{|\langle x, x'\rangle| \colon |x'| \leq p\} \leq p(x)$.

Ahora, si $b = \sup\{|\langle x, x'\rangle| \colon |x'| \leq p\}$, dado $\varepsilon > 0$, $|\langle \frac{x}{b+\varepsilon}, x'\rangle| \leq 1$ para todo $x' \in U^\circ$. Luego $\frac{x}{b+\varepsilon} \in U^{\circ\circ} = U$, por la Proposición 1.2.6. Queda así que $p(x) \leq b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y, por lo tanto, $p(x) \leq \sup\{|\langle x, x'\rangle| \colon |x'| \leq p\}$; de donde se sigue la igualdad. $\square$

1.3. Topologías en el espacio de operadores lineales

El conjunto de operadores lineales entre espacios vectoriales es en sí mismo un espacio vectorial. Si consideramos operadores entre espacios localmente convexos E y F, tenemos naturalmente asociada una noción de continuidad. Diferentes topologías sobre E y F dan diferentes conjuntos de operadores lineales continuos. En esta sección vamos a estudiar espacios de operadores asociados a topologías polares. Como es usual, notaremos por $L(E;F)$ al conjunto de los operadores lineales de E en F y por $\mathcal{L}(E;F)$ al subconjunto de operadores continuos.

Nuestro primer paso va a ser poder definir sobre $\mathcal{L}(E;F)$ una seminorma que involucre conjuntos de las topologías de E y de F o seminormas asociadas. Siguiendo la literatura tradicional en el tema, vamos a considerar conjuntos de E y seminormas sobre F con la menor cantidad de requisitos posible.

Dado $A \subset E$ acotado y β una seminorma continua de F, vamos a dar una seminorma $\beta_A \colon \mathcal{L}(E;F) \to \mathbb{R}$. Estas seminormas son las que nos permitirán definir distintas topologías localmente convexas en $\mathcal{L}(E;F)$.

Proposición 1.3.1 *Sean E y F espacios localmente convexos, $A \subset E$ acotado, sea β una seminorma de F y sea $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Entonces:*

(a) *$T(A)$ es acotado en F.*

(b) *$\beta(T(A))$ es acotado en $\mathbb{K}$.*

(c) *$\beta_A(T) = \sup\{\beta(T(x)) \colon x \in A\}$ es una seminorma en $\mathcal{L}(E;F)$.*

Demostración:

(a) Sea V un entorno de F, queremos ver que existe $\lambda > 0$ tal que si $|\mu| > \lambda$, entonces $T(A) \subset \mu V$. Como T es continuo, exite U entorno de E tal que $T(U) \subset V$ y como $A \subset E$ es acotado, luego existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset \mu U$ para todo $|\mu| > \lambda$. Por ser T lineal, $T(A) \subset T(\mu U) = \mu T(U) \subset \mu V$ para todo $|\mu| > \lambda$.

(b) Sea $V = \{x \in F : \beta(x) \leq 1\}$. Como $T(A)$ es acotado, existe $\lambda > 0$ tal que $T(A) \subset \mu V$ para todo $|\mu| > \lambda$. Por la Proposición 1.1.10, $\beta(\mu^{-1}T(A)) \leq 1$ luego $\beta(T(A)) \leq |\mu|$.

(c) Por el ítem anterior, $\beta_A(T)$ está bien definido, entonces es una seminorma.

□

Definición 1.3.2 *Sean E y F espacios localmente convexos, $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos acotados en E, y sea $\mathcal{Q}$ el conjuntos de todas las seminormas continuas en F. Se define en $\mathcal{L}(E;F)$ la topología de la convergencia uniforme sobre $\mathcal{A}$ como la topología generada por las seminormas $\{\beta_A : A \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{Q}\}$.*

Observaciones

1. Si $(T_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ es una red en $\mathcal{L}(E;F)$ que converge a T con la topología de la convergencia uniforme sobre $\mathcal{A}$, entonces $\beta_A(T_\alpha - T)$ converge a 0 para toda seminorma β_A. Resulta que, fijado $A \in \mathcal{A}$, $T_\alpha(x)$ a converge $T(x)$ uniformemente para $x \in A$. Esto justifica el nombre de la topología.

2. Si E y F son espacios de Banach entonces la topología de la convergencia uniforme sobre $\mathcal{A}$ en $\mathcal{L}(E;F)$ es la topología usual de operadores entre espacios de Banach.

Si E y F son espacios localmente convexos con duales E' y F' respectivamente y $T \in \mathcal{L}(E;F)$ se tiene definida la forma bilineal en $E \times F'$ dada por $(x, y') \longmapsto \langle T(x), y' \rangle$. Esta forma bilineal tiene asociada la funcional sobre E definida por $x \longmapsto f_{T,y'}(x) = \langle T(x), y' \rangle$. Esta funcional es única ya que (E, E') y (F, F') son pares duales.

Definición 1.3.3 *Sean E y F espacios localmente convexos con dual E' y F' respectivamente y sea T un operador lineal entre E y F. La traspuesta de T es un operador $T' : F' \to E^*$ tal que $T'(y') = f_{T,y'}$, es decir:*

$$\langle x, T'(y') \rangle = \langle T(x), y' \rangle$$

Si E y F son espacios localmente convexos y T es un operador lineal entre E y F nos interesa saber cuándo $T'(F') \subset E'$ y, en ese caso, cuándo $T' : F' \to E'$ es continua.

Proposición 1.3.4 *Sean E y F espacios localmente convexos con dual E' y F' respectivamente y sea $T \in L(E;F)$. Son equivalentes*:

(a) *T es w-w continuo, esto es $T\colon (E, \sigma(E,E') \to (F, \sigma(F,F'))$ es continuo.*

(b) *$T'(F') \subset E'$.*

Demostración:

(a)⇒(b) Sea $y' \in F'$. La composición $y' \circ T : (E, \sigma(E,E')) \to \mathbb{K}$ resulta continua. Para $y' \in F'$ se tiene,

$$y' \circ T(x) = \langle T(x), y' \rangle = \langle x, T'(y') \rangle = T'(y')(x).$$

Entonces $T'(y')$ es una funcional continua de E con la topología débil, es decir $T'(y') \in E'$.

(b)⇒(a) Veamos que dado $V \subset F$ un $\sigma(F,F')$-entorno, existe $U \subset E$ un $\sigma(E,E')$-entorno tal que $T(U) \subset V$. Sea $V = \{y \in F\colon \sup_{1 \le i \le n} |\langle y, y_i' \rangle| \le 1\}$ con $y_1', \ldots, y_n' \in F'$ un entorno básico. Como suponemos que $T'(F') \subset E'$, podemos tomar el $\sigma(E,E')$-entorno U definido por $U = \{x \in E\colon \sup_{1 \le i \le n} |\langle x, T'(y_i') \rangle| \le 1\}$. Si $x \in U$ luego se tiene que $\sup_{1 \le i \le n} |\langle T(x), y_i' \rangle| = \sup_{1 \le i \le n} |\langle x, T'(y_i') \rangle| \le 1$, concluyendo que $T(U) \subset V$ y así, T es $w - w$ continuo.

$\square$

Proposición 1.3.5 *Sean E y F espacios localmente convexos con dual E' y F' respectivamente y sea $T \in L(E;F)$ w-w continuo. Se tiene que*:

(a) *Si $A \subset E$, entonces $T(A)^\circ = (T')^{-1}(A^\circ)$.*

(b) *Si E' tiene la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia y F' tiene la topología de la $T(\mathcal{A})$-convergencia, entonces T' es continua.*

Demostración:

(a) La primera afirmación es inmediata. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} T(A)^\circ = &\ \{y' \in F'\colon |\langle T(x), y' \rangle| \le 1\ \forall x \in A\} \\ = &\ \{y' \in F'\colon |\langle x, T'(y') \rangle| \le 1\ \forall x \in A\} \\ = &\ \{y' \in F'\colon T'(y') \in A^\circ\} = (T')^{-1}(A^\circ). \end{aligned}$$

(b) Como $A \in \mathcal{A}$ es $\sigma(E, E')$-acotado y T $w - w$ continuo, entonces $T(A)$ $\sigma(F, F')$-acotado y, por lo tanto, la topología en F está bien definida.

Sea $U \subset E'$ el entorno $U = \varepsilon \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i^\circ$ con $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Luego si un entorno de F' es $V = \varepsilon \bigcap_{1 \leq i \leq n} T(A_i)^\circ$, por el ítem anterior se tiene que

$$T'(V) \subset \varepsilon \bigcap_{1 \leq i \leq n} T'(T(A_i)^\circ) = \varepsilon \bigcap_{1 \leq i \leq n} T'((T')^{-1}(A_i^\circ)) = \varepsilon \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i^\circ = U$$

y, por lo tanto, T' es continua.

□

1.4. El ϵ-Producto

El ϵ-Producto entre dos espacios localmente convexos fue introducido por L. Schwartz en 1957. Es una extensión del producto tensorial entre espacios localmente convexos con la topología tensorial ϵ y tiene una estrecha relación con la propiedad de aproximación, como veremos en la Sección 2. Más aún, cuando uno de los espacios tiene la propiedad de aproximación, el ϵ-producto entre dos espacios coincide con el producto tensorial de ellos.

Antes de dar la definición y ver propiedades, vamos a necesitar el siguiente resultado que, en el contexto de espacios localmente convexos, es equivalente al Teorema de Alaoglu.

Teorema 1.4.1 *Sea E un espacio localmente convexo con dual E' y $U \subset E$ un entorno. Entonces, U° es $\sigma(E', E)$-compacto.*

Demostración: Consideremos $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones de E en el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $Y = \mathbb{K}^E = \prod_{x \in E} \mathbb{K} = \{\omega = (\omega_x)_{x \in E} : \omega_x \in \mathbb{K}\}$ dotado con la topología producto.

Definimos $\Psi : \mathcal{F} \to Y$ por $\Psi(f) = (f(x))_x$. Afirmamos que Ψ es un isomorfismo algebraico. Claramente Ψ es lineal. Por otra parte, si definimos $\widetilde{\Psi} : Y \to \mathcal{F}$ como $\widetilde{\Psi}(\omega)(x) = \omega_x$ la coordenada $x - ésima$, resulta que $\widetilde{\Psi} \circ \Psi = Id_{\mathcal{F}}$ y $\Psi \circ \widetilde{\Psi} = Id_Y$. De donde Ψ es isomorfismo algebraico.

Para ver que U° es compacto, veremos que $\Psi(U^\circ)$ es compacto y que Ψ es abierta, esto es $\tilde{\Psi}$ es continua.

Veamos primero que $\Psi(E^*)$ es cerrado en Y. Para eso, consideremos para cada $x, y \in E$ y cada $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ fijos, la función $g_{x,y,\lambda,\mu} : Y \to \mathbb{K}$ dada por

$$g_{x,y,\lambda,\mu}(\omega) = \omega_{\lambda x + \mu y} - \omega_{\lambda x} - \omega_{\mu y}.$$

Si mostramos que $g_{x,y,\lambda,\mu}$ es continua para cada $x, y \in E$ y para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, tendremos que $\Psi(E^*)$ es cerrado en Y puesto que podemos escribir $\Psi(E^*) = \bigcap_{x,y \in E; \lambda,\mu \in \mathbb{K}} g_{x,y,\lambda,\mu}^{-1}(0)$.

Ahora bien, una red $(\omega^\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ converge a ω en Y, que tiene la topología producto, si y sólo si ω_x^α converge a ω_x para todo $x \in E$. Por lo tanto, si $x, y \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $g_{x,y,\lambda,\mu}(\omega^\alpha) = \omega^\alpha_{\lambda x+\mu y} - \lambda\omega^\alpha_x - \mu\omega^\alpha_y$ converge a $\omega_{\lambda x+\mu y} - \lambda\omega_x - \mu\omega_y = g_{x,y,\lambda,\mu}(\omega)$. De donde se obtiene la continuidad de $g_{x,y,\lambda,\mu}$ para todo $x, y \in E$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Como U es absorbente, por la Proposición 1.2.6, si p es la funcional de Minkowski de U tenemos que $U^\circ = \{x' \in E' \colon |\langle x, x'\rangle| \leq p(x)\ \forall x \in E\}$, luego

$$\Psi(U^\circ) \subset \{\omega \in Y \colon |\omega_x| \leq p(x), \quad \forall x \in E\}.$$

Este último conjunto es compacto por el Teorema de Tychonoff. Así tenemos la igualdad $\Psi(U^\circ) = \Psi(E^*) \cap \{\omega \in Y \colon |\omega_x| \leq p(x), \quad \forall x \in E\}$, con lo cual $\Psi(U^\circ)$ es compacto.

Falta ver que $\Psi \colon E' \to \Psi(E')$ es abierta cuando E' tiene la topología débil*. El teorema queda demostrado, ya que U° es la imagen por una función continua de un compacto.

Sea V un $\sigma(E', E)$ entorno básico de E', $V = \{x' \in E' \colon \sup |\langle x_i, x'\rangle| < 1, \quad i = 1, \ldots, n\}$ con $x_1, \ldots, x_n \in E$. Así, $\Psi(V) = \prod_{1\leq y\leq n}\{c \in \mathbb{K} \colon |c| < 1\} \times \prod_{x\in E; x\neq x_1,\ldots,x_n} \mathbb{K}$, que es un abierto en la topología producto. Luego Ψ es abierta, como queríamos demostrar. $\square$

Proposición 1.4.2 *Sea E un espacio localmente convexo con dual E' y sea $U \subset E$ un entorno de E. Entonces U° es compacto en E'_c, el dual de E con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos absolutamente convexos y compactos de E.*

Demostración:

Como $U^\circ \subset E'$ es equicontinuo, la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos absolutamente convexos y compactos y la topología $\sigma(E', E)$ coinciden sobre U°. Por el Teorema de Tychonoff, $U^\circ \subset (E', \sigma(E', E))$ es compacto, luego $U^\circ \subset E'_c$ es compacto.

$\square$

Observación En la demostración anterior comparamos la topología $\sigma(E', E)$ con la de la convergencia uniforme sobre conjuntos absolutamente convexos y compactos. Este resultado puede verse como una consecuencia del siguiente teorema más general. Ver por ejemplo [16].

Teorema 1.4.3 *Sea X un espacio topológico e Y un espacio uniforme. Si $A \subset C(X, Y)$ es equicontinuo, entonces la topología de la convergencia puntual y la topología de la convergencia sobre compactos coinciden.*

Ahora tenemos todo listo para poder definir el ϵ-producto.

Definición 1.4.4 *Sean E y F espacios localmente convexos con duales E' y F'. Se define el ϵ-producto de F y E como el conjuto de todos los operadores lineales continuos de E'_c en F, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de E'. Este espacio será notado por $F\epsilon E$ o $\mathcal{L}_\epsilon(E'_c; F)$ indistintamente.*

Observaciones

1. Por la Proposición 1.2.15, si A' es equicontinuo, existe U entorno de E tal que $A' \subset U^\circ$ y por la Proposición 1.4.2, U° es compacto en E'_c y, por lo tanto, acotado. Resulta que A' es acotado en E'_c, luego la Definición 1.3.2 asegura que la topología está bien definida.

2. Haciendo la misma demostración que se hizo en la Proposición 1.2.15, ítem (c), se ve que la definición de $F\epsilon E$ es equivalente si se toma la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos U°, donde U varía sobre los entornos cerrados y absolutamente convexos de E.

3. Hay una forma de describir las seminormas del ϵ-producto. De la observación anterior y la Proposición 1.3.2, las seminormas en $E\epsilon F$ son $\beta_{U^\circ}(T) = \sup_{x' \in U^\circ} \beta(T(x'))$, con β seminorma en F y U entorno absolutamente convexo y cerrado en E. Por la Proposición 1.2.6, $\beta_{U^\circ}(T) = \sup\{\beta(T(x')) : |x'| \leq \alpha\}$, donde α es la funcional de Minkowski de U. Por la Proposición 1.2.16, $\beta(T(x')) = \{|\langle T(x'), y' \rangle| : |y'| \leq \beta\}$. Luego $\beta_{U^\circ}(T) = \sup\{|\langle T(x'), y'\rangle| : |y'| \leq \beta, |x'| \leq \alpha\}$. Debido a esta última igualdad, las seminormas de $F\epsilon E$ las notamos $\alpha\epsilon\beta$. En resúmen, las seminormas que generan la topología en $F\epsilon E$ son de la forma $\alpha\epsilon\beta$, donde

$$\alpha\epsilon\beta(T) = \sup\{|\langle T(x'), y'\rangle| : |y'| \leq \beta, |x'| \leq \alpha\}$$

con α una seminorma continua de E y β una seminorma continua de F.

4. Un entorno W de $F\epsilon E$ es de la forma $W = \{T \in \mathcal{L}(E'_c; F) : \beta_{U^\circ}(T) \leq 1\}$ con $U \subset E$ entorno absolutamente convexo y cerrado y β seminorma continua de F. El conjunto $V = \{y \in F : \beta(y) \leq 1\} \subset F$ es un entorno absolutamente convexo y cerrado y $W = \{T \in \mathcal{L}(E'_c; F) : T(U^\circ) \subset V\}$. Por lo tanto, una base de entornos de $F\epsilon E$ viene dada por los conjuntos

$$W(U^\circ, V) = \{T \in \mathcal{L}(E'_c; F) : T(U^\circ) \subset V\},$$

donde U y V varían sobre los entornos absolutamente convexos y cerrados de E y F respectivamente.

5. En particular, por el Lema 1.2.12, usando que los entornos de E'_c son los conjuntos K° con $K \subset E$ absolutamente convexo y compacto y que $K^{\circ\circ} = K$, un entorno en $E'_c\epsilon F$ es de la forma $W(K, V) = \{T \in \mathcal{L}(E; F) : T(K) \subset V\}$ con $K \subset E$ absolutmente convexo y compacto y $V \subset F$ entorno en F absolutamente convexo y cerrado. De la misma forma que en el ítem anterior, se ve que $E'_c\epsilon F$, es el conjunto de los

operadores lineales de E en F dotado de la convergencia uniforme sobre los conjuntos absolutamente convexos y compactos, que notaremos por $\mathcal{L}_c(E;F)$

6. Si E y F son espacios normados, entonces $F\epsilon E$ es normado. En efecto, veamos que $W_1(U_1^\circ, V_1)$ un entorno en $F\epsilon E$ con U_1 entorno absolutamente convexo y cerrado en E y V_1 entorno absolutamente convexo en F, es acotado. Esto es equivalente a que $F\epsilon E$ es normado [18, Cap 3]. Tomemos $W_2(U_2^\circ, V_2)$ otro entorno en $F\epsilon E$ con $U_2 \subset E$ y $V_2 \subset F$ entornos absolutamente convexos y cerrados. Al ser E y F normados, existen $\lambda_0 > 0$ y $\mu_0 > 0$ tales que $U_1 \subset \lambda U_2$ y $V_1 \subset \mu V_2$ para todo $|\lambda| > \lambda_0$ y $|\mu| > \mu_0$. Por la Proposición 1.2.4, $\frac{1}{\lambda}U_2^\circ \subset U_1^\circ$ y, por lo tanto se tiene
$$\begin{aligned} W_1(U_1^\circ, V_1) = &\ \{T \in \mathcal{L}(E_c'; F) \colon T(U_1^\circ) \subset V_1\} \\ \subset &\ \{T \in \mathcal{L}(E_c'; F) \colon T(\tfrac{1}{\lambda}U_2^\circ) \subset V_1\} \\ \subset &\ \{T \in \mathcal{L}(E_c'; F) \colon T(\tfrac{1}{\lambda}U_2^\circ)\mu V_2\} \\ = &\ \{T \in \mathcal{L}(E_c'; F) \colon \tfrac{1}{\lambda\mu}T(U_2^\circ) \subset V_2\}. \end{aligned}$$
Luego $W_1(U_1^\circ, V_1) \subset |\lambda\mu| W_2(U_2^\circ, V_2)$ para todo $\lambda\mu > \lambda_0\mu_0$, es decir $W_1(U_1^\circ, V_1)$ es acotado, como se quería ver.

Veamos ahora que $F\epsilon E$ es topológicamente isomorfo a $E\epsilon F$.

Proposición 1.4.5 *(Schwartz) Sean E y F espacios localmente convexos y sea $T \in F\epsilon E$. Luego $T' \in E\epsilon F$. Mas aún, al aplicación $\Psi \colon T \longmapsto T'$ establece un isomorfismo topológico entre $F\epsilon E$ y $E\epsilon F$.*

Demostración:

Sea $T \in \mathcal{L}_\epsilon(E_c'; F)$. Si $y' \in F'$, la aplicación $x' \longmapsto \langle T(x'), y'\rangle$ es una funcional continua sobre E_c'. Debido a que $\langle T(x'), y'\rangle = \langle x', T'(y')\rangle$, resulta que $T'(y') \in (E_c')'$. Como, por la Proposición 1.2.13, $(E_c')' = E$, resulta que $T' \in L(F', E)$. Por la Proposición 1.2.15, si $\mathcal{U}$ es una base de entornos absolutamente convexos y cerrados de E, E tiene la topología de la $\mathcal{U}^\circ$-convergencia. Por la Proposición 1.3.5, T' es continua si F' tiene la topología de la convergencia uniforme sobre los $T(U^\circ)$ con $U \in \mathcal{U}$. Por la Proposición 1.4.2, U° es absolutamente convexo y compacto en E_c' y, al ser T continuo, $T(U^\circ)$ es absolutamente convexo y compacto en F. Por lo tanto, como la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos $T'(U^\circ)$ con $U \in \mathcal{U}$ en F' es más gruesa que la topología de la convergencia uniforme sobre los absolutamente convexos y compactos, se concluye que $T' \in \mathcal{L}(F_c', E)$.

La aplicación $\Psi \colon F\epsilon E \to E\epsilon F$ dada por $\Psi(T) = T'$ es lineal y como $T'' = T$, Ψ es isomofismo algebraico. Para ver que es un isomorfismo topológico notemos que
$$\begin{aligned} \beta\epsilon\alpha(T') = &\ \sup\{|\langle x', T'(y')\rangle| \colon |y'| \leq \beta, |x'| \leq \alpha\} \\ = &\ \sup\{|\langle T(x'), y'\rangle| \colon |y'| \leq \beta, |x'| \leq \alpha\} \\ = &\ \alpha\epsilon\beta(T). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $U = \{T \in F\epsilon E : \alpha\epsilon\beta(T) \leq 1\}$ y $V = \{T \in E\epsilon F : \beta\epsilon\alpha(T) \leq 1\}$ son entornos de $F\epsilon E$ y $E\epsilon F$ respectivamente, entonces $\Psi(U) = V$ y $\Psi^{-1}(V) = U$, de donde se sigue el resultado. $\square$

2. Propiedad de aproximación

La propiedad de aproximación juega un rol fundamental en la teoría de estructuras de espacios de Banach. El primer estudio sistemático sobre el tema puede adjudicarse a Grothendieck y su trabajo de 1955, [11]. Esta propiedad surge relacionada con el concepto de base de Schauder. Si un espacio de Banach E tiene base de Schauder entonces, los operadores compactos a valores en E se pueden aproximar por operadores rango finito, que son, de alguna manera, los operadores con propiedades más cercanas a las de las trasformaciones lineales entre espacios finito dimensionales. La pregunta recíproca, conocida como *el problema de aproximación*, motivó los avances de esta teoría. En [11], Grothendieck relaciona el problema de aproximación con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Establece que el problema de aproximación es equivalente a poder aproximar uniformemente la identidad sobre ciertos conjuntos compactos del espacio por operadores de rango finito, lo que se conoce como *propiedad de aproximación*. El problema de aproximación, estuvo abierto por varias décadas hasta que en 1972, P. Enflo dio una respuesta en forma negativa. A partir de entonces se sabe que existen espacios sin propiedad de aproximación.

Esta sección está dedicada a la propiedad de aproximación. Expondremos aquellos resultados que usaremos más adelante para estudiar aproximación en espacios de funciones. Incluiremos algunas demostraciones con la intención de proporcionar elementos que ayuden a esclarecer el alcance y la profundidad de esta propiedad.

2.1. La propiedad de aproximación

Definición 2.1.1 *Un espacio localmente convexo E se dice que tiene la propiedad de aproximación si la identidad puede ser aproximada por operadores de rango finito sobre los conjuntos absolutamente convexos y compactos de E. Es decir, si para toda seminorma β continua de E, para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $K \subset E$ absolutamente convexo y compacto, existe un operador lineal $S\colon E \to E$, con dim $S(E)$ finita, tal que $\beta(x - S(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in K$.*

Los operadores continuos de rango finito entre espacios localmente convexos E y F pueden describirse, aunque no en forma única, a través de finitos elementos de F y de E'. Esto es, si $T \in \mathcal{L}(E;F)$ es un operador de rango finito, existen $y_1, \ldots, y_n \in F$ y $x'_1, \ldots, x'_n \in E'$ tales que $T(x) = \sum_{j=1}^n x'_j(x) y_j$, para todo $x \in E$. Una forma usual de escribir esto, omitiendo la evaluación, es a través de la notación de producto tensorial. Así, $T = \sum_{j=1}^n x'_j \otimes y_j$. Por tanto, usaremos $E' \otimes F$ para notar el espacio de operadores de rago finito (continuos) de E en F.

El siguiente resultado se debe tanto a Grothendieck como a Schwartz. En [9] puede encontrarse una demostración.

Teorema 2.1.2 *Sea E espacio localmente convexo. Son equivalentes:*

(a) *E tiene la propiedad de aproximación.*

(b) *$E' \otimes E$ es denso en $\mathcal{L}_c(E; E)$.*

(c) *$E' \otimes F$ es denso en $\mathcal{L}_c(E; F)$ para todo espacio localmente convexo F.*

(d) *$F' \otimes E$ es denso en $\mathcal{L}_c(F; E)$ para todo espacio localmente convexo F.*

Aquí $\mathcal{L}_c(E; F)$ denota al espacio $\mathcal{L}(E; F)$ dotado de la convergencia uniforme sobre los compactos absolutamente convexos de E.

Para E y F espacios de Banach, es posible caracterizar $\mathcal{L}_c(E; F)'$. Este resultado permite establecer cuando un espacio E tiene propiedad de aproximación en términos de pares de sucesiones en E y E'. También permite ver que un espacio E tiene propiedad de aproximación si su espcio dual E' la tiene.

Lema 2.1.3 *Sean E y F espacios de Banach. Una función lineal ϕ pertenece a $\mathcal{L}_c(E; F)'$ si y sólo si existen sucesiones $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} ||y'_n|| ||x_n|| < \infty$ y $\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n(T(x_n))$ para todo $T \in \mathcal{L}(E; F)$.*

Demostración: Sea ϕ una función que admite tal representación. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n ||y'_n|| ||x_n|| = M < \infty$. El conjunto $K = \{\frac{x_n}{||x_n|| a_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es compacto y

$$|\phi(T)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||y'_n|| ||T(x_n)|| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ||y'_n|| ||x_n|| ||T(\frac{x_n}{||x_n|| a_n})|| \leq M \sup_{x\in K} ||T(x)||.$$

Por lo tanto $\phi \in \mathcal{L}_c(E; F)'$. Recíprocamente si $\phi \in \mathcal{L}_c(E; F)'$, existe $K \subset E$ compacto tal que $|\phi(T)| \leq M \sup_{x\in K} ||T(x)||$ para todo $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Al ser K compacto y E espacio de Banach, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = 0$ y $K = \overline{\text{coe}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, [13, Proposición 1.e.2]. Luego, si $x \in K$, existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ con $||(\lambda_n)_n|| = 1$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ y, por lo tanto, $||T(x)|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|x_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||$. Tomando supremo sobre K se tiene la desigualdad

$$|\phi(T)| \leq M \sup_{n\in\mathbb{N}} ||T(x_n)||. \qquad (3)$$

Consideremos el espacio $c_0(F) = \{(y_1, y_2, \ldots) \colon y_n \in F,\ \lim_{n\mapsto\infty} ||y_n|| = 0\}$ dotado de la topología generada por la norma $||(y_1, y_2, \ldots)|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||y_n||$ y sea $Z \subset c_0(F)$ el subespacio definido por $Z = \{(T(x_1), T(x_2), \ldots) \colon T \in \mathcal{L}(E; F)\}$. La aplicación lineal $\widetilde{\phi} \colon Z \to \mathbb{C}$ definida por $\widetilde{\phi}(T(x_1), T(x_2), \ldots) = \phi(T)$ esta bien definida por (3) y

$$|\widetilde{\phi}(T(x_1), T(x_2), \ldots)| \leq M \sup_{x\in K} ||T(x)|| \leq M \sup_{n\in\mathbb{N}} ||T(x_n)||.$$

Por Hahn-Banach, existe $\psi \in c_0(F)'$ tal que $\psi|_Z = \widetilde{\phi}$. Como $c_0(F)' = \ell_1(F')$, luego existe $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} ||y'_n|| < \infty$ y $\psi = (y'_1, y'_2, \ldots)$. Por lo tanto obtenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} ||y'_n|| ||x_n|| < \infty$ y

$$\phi(T) = \psi(T(x_1), T(x_2) \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n(T(x_n))$$

como queríamos ver. □

Proposición 2.1.4 *Sea E un espacio de Banach. Entonces E tiene la propiedad de aproximación si y sólo si para todo par de sucesiones $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ que cumplen $\sum_{n=1}^{\infty} ||x'_n|| ||x_n|| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) x_n = 0$ para todo $x \in E$, se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n) = 0$.*

Demostración: Visto desde otro punto de vista, que E tenga la propiedad de aproximación es decir que la identidad esté en la clausura del subespacio $E' \otimes E \subset \mathcal{L}_c(E; E)$. Por Hahn-Banach, esto es equivalente a que toda funcional en $(\mathcal{L}_c(E; E))'$ tal que, restringida a $E' \otimes E$ es nula, entonces aplicada a la identidad es nula. Como es equivalente que una funcional en $(\mathcal{L}_c(E; E))'$ se anule en $E' \otimes E$ a que se anule en todos los operadores lineales de rango 1, llegamos a la conclusión de que es equivalente que E tenga la propiedad de aproximación a que si $\phi \in (\mathcal{L}_c(E; E))'$ se anula en los operadores de rango 1, denotado $\mathcal{F}(E)$, entonces se anula en la identidad. Esto último es exactamente lo que dice la segunda parte de la proposición. En efecto sea $\phi \in (L_c(E; E))'$ tal que $\phi|_{\mathcal{F}(E)} = 0$. Por el lema anterior, existen $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ dos sucesiones tales que $\sum_{n=1}^{\infty} ||x'_n|| ||x_n|| < \infty$ tales que $\phi(T) = \sum_{n=0}^{\infty} x'_n(T(x_n))$ para todo $T \in \mathcal{L}(E; E)$. Así, para todo $x' \in E'$ y $x \in E$, $x' \otimes x \in \mathcal{F}(E)$ y se tiene que

$$\phi(x' \otimes x) = \sum_{n=0}^{\infty} x'_n \left(x'(x_n) x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x'_n(x) x'(x_n) = x' \left(\sum_{n=0}^{\infty} x'_n(x) x_n\right) = 0.$$

Como E' separa puntos de E, luego $\sum_{n=0}^{\infty} x'_n(x) x_n = 0$. Esto implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x'_n(x_n) = \phi(Id_E) = 0$$

como queríamos ver. □

Proposición 2.1.5 *Sea E un espacio de Banach. Si E' tiene la propiedad de aproximación, entonces E la tiene.*

Demostración: Sean $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ dos sucesiones tales que cumplan $\sum_{n=1}^{\infty} ||x'_n||||x_n|| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x)x_n = 0$ para todo $x \in E$. Sea $J: E \longmapsto E''$ la inclusión canónica. Como J es isometría, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} ||x'_n||||J(x_n)|| < \infty$ y, además, para todo $x' \in E'$ y $x \in E$

$$\sum_{n=1}^{\infty} J(x_n)(x')x'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x'(x_n)x'_n(x) = x'(\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x)x_n) = 0.$$

Por lo tanto $(\sum_{n=1}^{\infty} J(x_n)(x')x'_n)(x) = 0$ para todo $x \in E$ y, como (E, E') es un par dual, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} J(x_n)(x')x'_n = 0$. Como E' tiene la propiedad de aproximación, por la Proposición 2.1.4 se tiene que $0 = \sum_{n=1}^{\infty} J(x_n)(x'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n)$ y, aplicando la misma proposición otra vez, resulta que E tiene la propiedad de aproximación. $\square$

La recíproca a esta proposición no es cierta. Es decir, existe un espacio de Banach E separable con base de Schauder y, por lo tanto, con propiedad de aproximación, tal que su dual E' es separable y sin propiedad de aproximación, ver [13, Teorema 1.e.7], donde se construye un ejemplo, usando el hecho de que existe un espacio de Banach sin propiedad de aproximación. Más aún, este mismo ejemplo muestra que existe un espacio de Banach con la propiedad de aproximación que contiene un subespacio que no tiene la propiedad de aproximación. Esto es, la propiedad de aproximación no es hereditaria.

Si E es un espacio de Banach con la propiedad de aproximación y F es un espacio de Banach cualquiera, para $T \in \mathcal{L}(F, E)$ compacto y $\varepsilon > 0$, existe $S \in E' \otimes E$ tal que $\varepsilon > \sup_{y\in T(B_F)} ||Sy - y|| = \sup_{x\in B_F} ||S \circ T(x) - T(x)||$. Es decir, todo operador compacto de F en E se aproxima por operadores de rango finito. La recíproca es cierta como veremos en la siguiente proposición. Antes necesitaremos un lema.

Lema 2.1.6 *Sea E un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_n \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = 0$. Sea $U = \overline{\text{coe}\{x_n/||x_n||^{\frac{1}{2}}\}}$ y consideremos al conjunto $Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kU$ dotado con la topología generada por la funcional de Minkowski de U que notaremos por $|||.|||$. Entonces:*

(a) $(Y, |||.|||)$ *es un espacio de Banach.*

(b) *Para todo $y' \in Y'$ y $\varepsilon > 0$ existe $x' \in E'$ tal que $|y'(x_n) - x'(x_n)| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

(a) Como U es absolutamente convexo y absorbente en Y, por la Proposición 1.1.10, $|||y||| = \text{ínf}\{\lambda > 0 : y \in \lambda U\}$ es una seminorma en Y. Si $0 \neq y \in Y$, entonces $y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n/||x_n||^{\frac{1}{2}}$ con $0 < \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < N$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Si $\delta > 0$ es tal que $0 < \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| - \delta$ luego $\frac{y}{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| - \delta} \notin U$ y por lo tanto $|||y||| > \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| - \delta}$, mostrando que $|||.|||$ es una norma. Para ver que $(Y, |||.|||)$ es completo tomemos una sucesión $|||.|||$-Cauchy $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $y_m = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^m x_n/||x_n||^{\frac{1}{2}}$, y veamos que es convergente. Si dado $\varepsilon > 0$ existe m_0 tal que para todo $m_1, m_2 > m_0$,

$$y_{m_1} - y_{m_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^{m_1} - \lambda_n^{m_2}) x_n/||x_n||^{\frac{1}{2}} \quad \in \varepsilon U,$$

luego $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n^{m_1} - \lambda_n^{m_2}| < \varepsilon$, con lo que se tiene que las sucesiones $(\lambda_n^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ son de Cauchy para cada $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, convergentes. Es fácil mostrar que si $\text{lím}_{m\to\infty} \lambda_n^m = \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n/||x_n||^{\frac{1}{2}} \in Y$.

(b) Sea $y' \in Y'$ y $\varepsilon > 0$. Como $x_n/||x_n||^{\frac{1}{2}} \in U$, entonces $|||x_n||| \leq ||x_n||^{\frac{1}{2}}$ y por lo tanto $\text{lím}_{n\to\infty} |||x_n||| = 0$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ $|y'(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $K_0 = \frac{2}{\varepsilon}\overline{coe\{x_n : n \geq n_0 + 1\}}$ y $F = \{x : x \in \text{Span}\ \{x_n : n = 1, \ldots n_0\},\ y'(x) = 1\}$. Como F es $||.||$-cerrado, K_0 es $||.||$-compacto y $F \cap K_0 = \emptyset$, por Hahn-Banach, existe $x' \in E'$ tal que $x'|_F = 1$ y $x'|_{K_0} < 1$. Por lo tanto, $x'(x_n) = y'(x_n)$ para $n \leq n_0$ y $|x'(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para $n > n_0$, obteniendo que $|y'(x_n) - x'(x_n)| \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

En lo que sigue, si E y F son espacios de Banach, notaremos por $\mathcal{K}(E; F)$ al conjunto de los operadores compactos de E en F dotado con la topología de la norma usual de operadores.

Proposición 2.1.7 *Sea E espacio de Banach. Entonces E tiene la propiedad de aproximación si y sólo si $F' \otimes E$ es denso $\mathcal{K}(F, E)$ para todo espacio de Banach F.*

Demostración: Sean $K \subset E$ compacto y $\varepsilon > 0$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión de elementos no nulos tal que $||x_n|| \to 0$ y $K = \overline{coe\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Sea $U = \overline{\text{coe}\{x_n/||x_n||^{\frac{1}{2}}\}}$ y sea $Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kU$ dotado de la topología generada por la funcional de Minkowski de U, $|||.|||$. Por la parte (a) del lema anterior, $(Y, |||.|||)$ es un espacio normado y completo y su bola unidad es $B_Y = \{y \in Y : |||y||| \leq 1\} = U$. Como $U \subset E$ es compacto, $Id|_Y : Y \to E$ es compacta y, por hipótesis, existen $y_1', \ldots, y_m' \in Y'$, $y_1, \ldots, y_m \in Y$ tales que

$$||\sum_{j=1}^{m} y_j'(x) y_j - x|| \leq \varepsilon/2$$

para todo $x \in U$ y, por lo tanto, para todo $x \in K$. Por la parte (b) del lema anterior, existen $x'_1, \ldots, x'_m \in E'$ tal que $|y'_j(x_n) - x'_j(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2m \max\{||y_j||\}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in K$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$ con $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
||\sum_{j=1}^{m} x'_j(x) y_j - x|| \leq \;& ||\sum_{j=1}^{m} x'_j(x) y_j - y'_j(x) y_j|| + ||\sum_{j=1}^{m} x'_j(x) y_j - x|| \\
\leq \;& \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\lambda_n| \sum_{j=1}^{m} ||x'_j(x_n) y_j - y'_j(x_n) y_j|| \right) + ||\sum_{j=1}^{m} x'_j(x) y_j - x|| \\
\leq \;& \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \varepsilon/2 + ||\sum_{j=1}^{m} x'_j(x) y_j - x|| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,
\end{aligned}$$

con lo cuál E tiene la propiedad de aproximación. $\square$

En vistas de las equivalencias (c) y (d) del Teorema 2.1.2, donde el rol de los espacios E y F es simétrico, es natural preguntarse si podemos intercambiar E y F en (b) de la proposición anterior. El resultado que sigue asegura que no, dado que se obtiene la equivalencia para E' con propiedad de aproximación; condición que, como ya mencionamos, es más fuerte. Una demostración de la siguiente proposición puede verse en [13, Teorema 1.e.5].

Proposición 2.1.8 *Sea E espacio de Banach. Son equivalentes*:

(a) *E' tiene la propiedad de aproximación.*

(b) *$E' \otimes F$ es denso en $\mathcal{K}(E; F)$ para todo espacio de Banach F.*

Como observamos antes, si $M \subset E$ es un subespacio y E tiene la propiedad de aproximación, en general no es cierto que M tenga la propiedad de aproximación. Sin embargo, si M es complementado en E la situación es diferente.

Proposición 2.1.9 *Sea E un espacio localmente convexo y sea $M \subset E$ un subespacio complementado. Si E tiene la propiedad de aproximación, entonces M tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración: Sea $P\colon E \to E$ un proyector continuo tal que $P(E) = M$. Como E tiene la propiedad de aproximación, por el Teorema 2.1.2 existe una red $(S_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} \in \mathcal{L}_c(E; E)$ de operadores de rango finito tales que $S_\alpha \to P$ uniformemente sobre los conjuntos absolutamente convexos y compactos. Luego $P \circ S_\alpha \to P$ y como $P \circ S \in \mathcal{L}_c(E, M)$, $P \circ S_\alpha \in \mathcal{L}_c(M, M)$ son de rango finito y $P|_M = Id_M$ se tiene el resultado. $\square$

2.2. La propiedad de aproximación y el ϵ-producto

Tanto el Teorema 2.1.2 como en la Proposiciónes 2.1.7 y 2.1.8, muestran que hay una estrecha relación entre la propiedad de aproximación y el espacio de operadores. El primer resultado caracteriza esta propiedad teniendo en cuenta cierta densidad en el espacio de operadores considerado con una topología particular, mientras que los otros dos involucran la subclase particular de operadores compactos. En esta sección estudiaremos la importante relación entre la propiedad de aproximación y el ϵ-producto. Para esto necesitaremos algo más de información sobre E'_c.
Como vimos en la Proposición 1.2.13, el dual de (E'_c) es E. Al considerar $(E'_c)'$ con la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos absolutamente convexos y compactos de E'_c tenemos sobre E una topología más fina que la original. El siguiente lema establece la continuidad de esta inclusión.

Lema 2.2.1 *Sea E un espacio localmente convexo. Entonces $Id_E\colon (E'_c)'_c \to E$ es continua.*

Demostración: Para ver la continuidad consideremos $\mathcal{U}$ una base de entornos cerrados y absolutamente convexos de E y tomemos $U \in \mathcal{U}$. Basta ver que U es entorno en $(E'_c)'_c$. Por la Proposición 1.4.2, U° es absolutamente convexo y compacto en E'_c, luego $U^{\circ\circ}$ es un entorno de $(E'_c)'_c$ y debido a la Proposición 1.2.15 resulta que $U^{\circ\circ} = U$, con lo cual U es un entorno en $(E'_c)'_c$. □

Ahora estamos en condiciones de caracterizar la propiedad de aproximación via el espacio de operadores dado por el ϵ-producto.

Proposición 2.2.2 *Sea E un espacio localmente convexo. Son equivalentes:*

(a) *E tiene la propiedad de aproximación.*

(b) *$E \otimes F$ es denso en $E\epsilon F$ para todo espacio localmente convexo F.*

Demostración: Para ver que (b) implica (a), como $E \otimes F$ es denso en $E\epsilon F$ para todo F espacio localmente convexo, en particular se cumple si $F = E'_c$. Por lo tanto tenemos que $E' \otimes E$ es denso en $E\epsilon E'_c = \mathcal{L}_\epsilon((E'_c)'_c, E)$. Si $K \subset E$ es absolutamente convexo y compacto, K° es un entorno de E'_c y como $K^{\circ\circ} = K$, las seminormas en $E\epsilon E'_c$ son de la forma $\sup_{x\in K} \beta(T(x))$, donde β es una seminorma continua de E. Por el Lema 2.2.1, $Id_E \in E\epsilon E'_c$, así dados $K \subset E$ absolutamente convexo y compacto, β seminorma continua de E y $\varepsilon > 0$ existe $S \in E' \otimes E$ tal que $\sup_{x\in K} \beta(Id_E(x) - S(x)) < \varepsilon$. Luego E tiene la propiedad de aproximación.

Recíprocamente, sean $T \in E\epsilon F = \mathcal{L}_\epsilon(F'_c, E)$, $U \subset F$ un entorno, β seminorma continua de E y $\varepsilon > 0$. Como U° es absolutamente convexo y compacto en F'_c y T es lineal y continuo, se tiene que $T(U^\circ)$ es absolutamete convexo y compacto en E. Ya que, por hipótesis, E tiene la propiedad de aproximación, existe $S \in E' \otimes E$ tal que $\beta(x - S(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in T(U^\circ)$. Como $S \circ T \in F \otimes E$, resulta que $\sup_{y' \in U^\circ} \beta(T(y') - S \circ T(y')) < \varepsilon$. Se concluye que $E \otimes F$ es denso en $E\epsilon F$. □

El siguiente resultado muestra que es suficiente reemplazar F *localmente convexo* por F *Banach* en (b) de la proposición anterior. Esta reformulación, se debe a Bierstrad y Meise [5].

Proposición 2.2.3 *Sea E un espacio localmente convexo. Son equivalentes:*

(a) *E tiene la propiedad de aproximación.*

(b) *$E \otimes F$ es denso en $E\epsilon F$ para todo espacio de Banach F.*

Terminaremos esta sección dando el resultado análogo al Corolario 2.1.5 cuando se considera E' con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos absolutamente convexos y compactos de E. Usaremos este resultado en los próximos capítulos para hablar de propiedad de aproximación para espacios de funciones no lineales, como son los polinomios y las funciones holomorfas.

Corolario 2.2.4 *Sea E un espacio localmente convexo. Entonces E'_c tiene la propiedad de aproximación si y sólo si E tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración: Si E'_c tiene la propiedad de aproximación, por la Proposición 2.2.2, $E'_c \otimes F$ es denso en $F\epsilon E'_c$ para todo espacio localmente convexo F. Por la Observación 5 de la Definición 1.4.4, se tiene que $E'_c \otimes F$ es denso en $\mathcal{L}_c(E; F)$ para todo espacio localmente convexo F que, otra vez por la Proposición 2.2.2, es equivalente a que E tenga la propiedad de aproximación. □

3. Funciones holomorfas

Una función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $a \in \mathbb{C}$ cuando tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de ese punto. Resulta que, sobre $\mathbb{C}$, los únicos polinómios homogéneos son de la forma z^n, con $n \in \mathbb{N}$ que, desarrollados en un entorno de un punto a son de la forma $p_n(z) = (z - a)^n$. Luego, la definición de una función holomorfa en $a \in \mathbb{C}$ es equivalente a que admita un desarrollo en serie de polinomios homogéneos alrededor de a.

Las funciones holomorfas en espacios de dimensión finita, $\mathbb{C}^k$, también pueden caracterizarse por la convergencia de expansiones monomiales de orden n que, en un entorno del origen, son de la forma $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_k^{\alpha_k}$ con $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$. Este fue el primer acercamiento de Hilbert (1909) al tema de holomorfía infinito-dimensional, para funciones definidas en espacios de sucesiones, es decir, con variable $z = (z_1, z_2, z_3, \ldots)$. En los años siguientes los trabajos de Fréchet y Gâteaux mostraron que la expansión en serie de polinomios homogéneos proporcionaba una definición más adecuada. Además, permite el concepto de función holomorfa para cualquier espacio vectorial con alguna estructura topológica.

En este capítulo, introduciremos el concepto de función holomorfa sobre espacios localmente convexos y estudiaremos las propiedades del espacio formado por esta clase de funciones que será denotado $\mathcal{H}(E; F)$. Cuando F es Banach, veremos que hay distintas topologías naturales que hacen de $\mathcal{H}(E; F)$ un espacio localmente convexo. Vale aclarar que el espacio de funciones holomorfas como tal, rara vez resulta un Banach, aún cuando E y F lo son; de ahí la necesidad de estudiar espacios localmente convexos. Para empezar será necesario especificar a qué nos referimos con *polinomio homogéneo* en un espacio de dimensión infinita. Esto es lo que haremos en la sección que sigue.

3.1. Definiciones y generalidades

Antes de comenzar estableceremos algo de notación. El espacio de las aplicaciones n- lineales de E en F será notado por $L(^nE; F)$, pondremos $\mathcal{L}(^nE; F)$ para las aplicaciones n-lineales continuas y $\mathcal{L}^s(^nE; F)$ será el espacio de las aplicaciones n-lineales continuas y simétricas, esto es $B(x_1, \ldots, x_n) = B(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ para toda σ permutación de n elementos. Cuando $F = \mathbb{C}$, estos espacios serán notados simplemente por

$$L(^nE), \mathcal{L}(^nE), \mathcal{L}^s(^nE),$$

respectivamente.

Si $\Phi \in L(^nE, F)$ y $x, x_1, \ldots, x_k \in E$, denotamos

$$\Phi(x, \ldots, x) = \Phi(x^n)$$

y

$$\Phi(x_1, \overset{n_1}{\ldots}, x_1, \ldots, x_k, \overset{n_k}{\ldots}, x_k) = \Phi(x_1^{n_1}, \ldots, x_k^{n_k})$$

con $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0,\ n_1 + \cdots + n_k = n$.

Si E y F son espacios localmente convexos, $A \subset E$ es un conjuto, β es una seminorma continua de F y $h\colon E \to F$ es una función, usaremos la notación

$$\|h\|_{A,\beta} := \sup_{x \in A} \beta(h(x)).$$

En particular, cuando F es normado, notaremos

$$\|h\|_A := \sup_{x \in A} \|h(x)\|.$$

Empecemos viendo la definición de polinomio n-homogéneo.

Definición 3.1.1 *Sean E y F espacios localmente convexos. Una aplicación $P\colon E \to F$ se dice polinómio homogéneo de grado n si existe $\Phi \in L(^nE; F)$ tal que $P(x) = \Phi(x^n)$. En este caso diremos que la aplicación Φ esta asociada al polinomio P y lo notamos $P = \widehat{\Phi}$. Al conjunto de los polinomios n-homogéneos de E en F lo notamos $P(^nE; F)$ y al subconjunto de los polinomios n-homogéneos continuos lo notamos $\mathcal{P}(^nE; F)$. En el caso en que $F = \mathbb{C}$, entonces notamos $\mathcal{P}(^nE)$ en lugar de $\mathcal{P}(^nE; \mathbb{C})$.*

Observación Si $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, entonces existe $\Phi \in \mathcal{L}^s(^nE; F)$ tal que $P = \widehat{\Phi}$. En efecto, si $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{L}(^nE; F)$ esta asociada a P, entonces la aplicación n-lineal

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \widetilde{\Phi}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

es simétrica y cumple que $\Phi(x^n) = \widetilde{\Phi}(x^n)$.

Ejemplos 3.1.2

1. Si E es un espacio localmente convexo y $x'_1, \ldots, x'_k \in E'$, entonces $P(x) = \sum_{j=1}^k x'_j(x)^n$ es un polinomio n-homogéneo a valores escalares. Una aplicación n-lineal asociada es
$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^k x'_j(x_1)x'_j(x_2) \cdots x'_j(x_n).$$
En particular, si $x^* \in E^*$, la aplicación $P(x) = x^*(x)^n$ es un polinomio n-homogéneo que resulta continuo si y sólo si x^* lo es.

2. La aplicación $P: E \times E' \to \mathbb{C}$ dada por $P((x, x')) = x'(x)$ es un polinomio 2- homogéneo donde la aplicación bilineal asociada es

$$\Phi((x, x'), (y, y')) = \frac{1}{2}(x'(y) + y'(x)).$$

Este ejemplo de polinomio 2-homogéneo permite mostrar que no todos los polinomios vienen dados por combinaciones lineales de productos de funcionales. Veamos esto para el caso particular en que $E = \ell_2$. Consideremos en $\ell_2 \times \ell_2$ la norma definida por $\|(a, b)\| = (\|a\|_2 + \|b\|_2)^{\frac{1}{2}}$. La aplicación $\psi: \ell_2 \times \ell_2 \to \ell_2$ dada por $\psi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{2n-1}a_n + e_{2n}b_n$ es un isomorfismo isométrico. Se tiene que $(e_j, e_j) \overset{w}{\to} 0, j \to \infty$ pues $\psi((e_n), (e_n))) = e_{2n-1} + e_{2n}$. Ahora, si el polinomio definido por $P((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ fuera una combinación lineal de producto de funcionales lineales se tendría que $P(e_j, e_j) \to 0, j \to \infty$, pero $P(e_j, e_j) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

3. El operador $T: L(^2E) \to L(E; E')$ definido por $T(\Phi)(x)(y) = \Phi(x, y)$ es un isomorfismo algebraico. En particular muestra que hay tantas aplicaciones bilineales como operadores de E en E' y, por lo tanto, tantos polinómios 2-homogéneos como operadores de E en E'.

En la sección 3.2 veremos una forma de dar a $\mathcal{P}(^nE; F)$ una topología natural. Allí veremos mas ejemplos de polinomios n-homogéneos.

Veamos ahora la definición de función holomorfa.

Definición 3.1.3 *Sean E y F espacios localmente convexos, $U \subset E$ un abierto. Decimos que una función $f: U \to F$ es holomorfa si para todo $a \in U$ existe una sucesion de polinomios n-homogeneos, $P_n f(a) \in \mathcal{P}(^nE; F)$ y $V \subset U$ un entorno tal que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n f(a)(x - a),$$

donde la convergencia es uniforme para todo $x \in a + V$. Es decir, dado β una seminorma continua en F y $\varepsilon > 0$, existe α una seminorma continua de E, $r > 0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > m_0$ se cumple

$$\sup_{\alpha(x)<r} \beta\left(f(a + x) - \sum_{n=0}^{m} P_n f(a)(x)\right) \leq \varepsilon.$$

Al conjunto de funciones holomorfas de U a valores en F lo denotamos $\mathcal{H}(U; F)$. En el caso que $F = \mathbb{C}$, notamos $\mathcal{H}(U)$ en lugar de $\mathcal{H}(U; \mathbb{C})$.

Observaciones

1. $\mathcal{H}(U;F)$ es un espacio vectorial. Si $f,g \in \mathcal{H}(U;F)$ y $a \in U$ luego, al igual que en el caso finito dimensional, se cumple la igualdad $P_n(f+g)(a) = P_nf(a) + P_ng(a)$.

2. Si E y F son espacios localmente convexos y $U \subset E$ abierto, se tiene que $\mathcal{P}(^nE;F)$ es un subespacio de $\mathcal{H}(U;F)$. En efecto, sea Φ una aplicación n-lineal simétrica tal que $P = \widehat{\Phi}$. Sean $a, x \in U$. Utilizando la fórmula binomial de Newton obtenemos

$$P(x) = \Phi(x^n) = \Phi\left((a+x-a)^n\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \Phi\left(a^{n-j}, (x-a)^j\right).$$

   Como la aplicación $x \longmapsto \Phi\left(a^{m-j}, x^j\right)$ es un polinomio j- homogéneo, se tiene el resultado. En particular, se obtienen las ecuaciones $P_mP(a)(x) = \Phi(a^{n-m}, x^m)$ si $m < n$, $P_nP(a) = P$ y $P_mP(a) = 0$ si $n > m$.

3. Notemos por $P(E;F) = \text{Span}\,\{\mathcal{P}(^nE;F) \colon n \in \mathbb{N}\}$. De las dos observaciones anteriores se deduce que $\mathcal{P}(E;F)$ es un subespacio de $\mathcal{H}(U;F)$.

4. Si $f \in \mathcal{H}(U;F)$ entonces f es continua ya que f es localmente el limite uniforme de funciones continuas.

5. Al igual que en el caso finito dimensional, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_nf(a)(x-a)$, entonces la sucesión $P_nf(a)$ es única. Una demostración puede verse en [14, Cap. 1].

Ejemplo 3.1.4

Sea E un espacio de Banach y sea $(x_n')_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ una sucesión que converge puntualmente a 0. Luego, la función $f\colon E \to \mathbb{C}$ definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n'(x)^n$ es holomorfa. Veamos cómo es el desarrollo de Taylor alrededor de un punto. Por el Principio de Acotación Uniforme, existe $c > 0$ tal que $||x_n'|| \le c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para cada $a \in E$ y $0 \le r < 1/c$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!}|x_n'(a)|^{n-j}\|x_n'\|^j r^j &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!}|x_n'(a)|^{n-j}\|x_n'\|^j r^j = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(|x_n'(a)| + \|x_n'\|r)^n \le \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty}(|x_n'(a)| + cr)^n.
\end{aligned}$$

Luego, $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!}|x_n'(a)|^{n-j}\|x_n'\|^j r^j$ converge ya que $cr < 1$ y $x_n'(a) \to 0$.

De la desigualdad anterior obtenemos que la aplicación $Q_j: E \to \mathbb{C}$ definida por

$$Q_j(x) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} |x'_n(a)|^{n-j} x'_n(x)^j$$

está bien definida. Mas aún, $Q_j \in \mathcal{P}(^j E)$ y la aplicación j-lineal que define a Q_j es

$$\Phi_j(x_1, \ldots, x_j) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} |x'_n(a)|^{n-j} x'_n(x_1) \ldots x'_n(x_j).$$

Por la convergencia absoluta, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{n=0}^{\infty} (x'_n(a) + x'_n(x-a))^n = \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x'_n(a)^{n-j} x'_n(x-a)^j = \\ = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} x'_n(a)^{n-j} x'_n(x-a)^j = \\ = & \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(x-a). \end{aligned}$$

Notar que la convergencia es uniforme para $x \in B_r(a)$. Luego $f \in \mathcal{H}(E)$.

Varias de las propiedades que se tienen para funciones holomorfas definidas sobre $\mathbb{C}$ se mantienen para funciones en $\mathcal{H}(U; F)$. En lo que sigue veremos algunas de estas propiedades que usaremos a lo largo del trabajo.

Proposición 3.1.5 *Sean E, F, G espacios localmente convexos, $U \subset E$ abierto. Entonces si $f \in \mathcal{H}(U; F)$ y $T \in \mathcal{L}(F; G)$ se tiene que $T \circ f \in \mathcal{H}(U; G)$.*

Demostración:

Sea $T \in \mathcal{L}(F; G)$. Como T es continuo, dada α una seminorma continua de G y $\varepsilon > 0$, existe β una seminorma continua de F tal que si $y \in F$ y $\beta(y) \leq 1$, entonces $\alpha(T(y)) \leq \varepsilon$. Para $a \in U$ y $f \in \mathcal{H}(U; F)$, existe $M \in \mathbb{N}$ y $V \subset U$ un entorno de a tal que $\sup_{x \in V} \beta\left(\sum_{n=M}^{\infty} P_n f(a)(x-a)\right) \leq 1$. Por lo tanto se tiene que

$$\left\| T\left(f(x) - \sum_{n=0}^{M} P_n f(a)(x-a) \right) \right\|_{V,\alpha} \leq \varepsilon.$$

Como $T\left(f - \sum_{n=0}^{M} P_n f(a)\right) = T(f) - \sum_{n=0}^{M} T \circ P_n f(a)$ y $T \circ P_n f(a) \in \mathcal{P}(^n E; F)$, se obtiene que $T \circ f$ es holomorfa en $a \in U$ para todo $a \in U$. Luego $T \circ f \in \mathcal{H}(U; G)$. $\square$

Una función holomorfa $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admite una representación integral mediante la fórmula de Cauchy. Esto es, dado $a \in U$, $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tal que $a + \xi z \in U$ para todo $\xi \in \overline{\Delta}(0, r)$, para todo $\lambda \in \Delta(0, r)$ se tiene:

$$f(a + \lambda z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{f(a + \xi z)}{\xi - \lambda} d\xi.$$

Las funciones holomorfas entre espacios localmente convexos también admiten una represenación similar, donde las integrales son integrales de Bochner (a valores vectoriales). De esta representación se pueden deducir los siguientes resultados, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [14, Cap. 2] o [17].

Proposición 3.1.6 *(Desigualdades de Cauchy) Sean E y F espacios localmente convexos y $U \subset E$ abierto. Sean $a \in U$, $x \in E$ y $r > 0$ tal que $a + \xi x \in U$ para todo $\xi \in \overline{\Delta}(0, r)$. Si β es una seminorma continua de F entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\beta \left(P_n f(a)(x) \right) \leq r^{-n} \sup_{|\xi|=r} \beta((a + \xi x)) \,.$$

Proposición 3.1.7 *Sean E y F espacios localmente convexos y sea $f \in \mathcal{H}(E; F)$. Entonces, para todo $x \in E$, existe V_x entorno de x tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)(y)$ converge uniformemente para todo $y \in V_x$.*

El siguiente teorema que enunciaremos nos da una serie de equivalencias útiles para ver cuando una función es holomorfa. Para ello veamos algunas definiciones.

Definición 3.1.8 *Sean E y F espacios localmente convexos y sea $U \subset E$ un abierto. Una función $f\colon U \to F$ es G-holomorfa si para todo $a \in U$, $x \in E$, la aplicación $\lambda \longmapsto f(a+\lambda x)$ es holomorfa sobre el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon a + \lambda x \in U\}$.*

Definición 3.1.9 *Sean E y F espacios localmente convexos y sea $U \subset E$ un abierto. Una función $f\colon U \to F$ es débil holomorfa si para todo $x' \in F'$ la composición $x' \circ f\colon U \to \mathbb{C}$ es holomorfa.*

Definición 3.1.10 *Sean E y F espacios localmente convexos y sea $U \subset E$ un abierto. Una función $f\colon U \to F$ se dice débil G-holomorfa si para todo $a \in U$, $x \in E$ e $y' \in F'$, la aplicación $\lambda \longmapsto y' \circ f(a + \lambda x)$ es holomorfa sobre el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon a + \lambda x \in U\}$.*

Una demostración del siguiente teorema puede encontrarse en [14, Cap. 2].

Teorema 3.1.11 *Sean E y F espacios localmente convexos y sea $U \subset E$ abierto y consideremos $f\colon U \to F$ una función. Son equivalentes*:

(a) $f \in \mathcal{H}(U;F)$.

(b) f *es continua y G-holomorfa.*

(c) f *es débil holomorfa.*

(d) f *es continua y débil G-holomorfa.*

Como una aplicación directa de este teorema, se extiende el principio de identidad. Una demostración puede verse en [14, Cap. 2].

Proposición 3.1.12 *(Principio de identidad) Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ un abierto conexo y sea $f \in \mathcal{H}(U;F)$. Si existe un abierto $V \subset U$ tal que $f|_V = 0$, entonces $f = 0$.*

3.2. Topologías en $\mathcal{H}(U;F)$

En esta parte estudiaremos varias topologías naturales sobre $\mathcal{H}(U;F)$ cuando F es un espacio normado y U es un abierto de un espacio localmente convexo. Los resultados más importantes los daremos para U un abierto de un espacio de Banach. Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que $0 \in U$ ya que si $f \in \mathcal{H}(U;F)$ y $a \in U$, luego la función $f_a(x) = f(x-a) \in \mathcal{H}(U-a,F)$ y se cumple que $P_n f_a(b) = P_n f(b-a)$ para todo $b \in U - a$. Una demostración de esto puede verse en [14, Cap. 2].

Empecemos viendo una topología en $\mathcal{P}(^nE;F)$. Para ello, de manera análoga a como definimos la topología fuerte para operadores lineales en el segundo ejemplo de 1.2.10, veremos la definicón de topología fuerte para aplicaciones n-lineales.

Definición 3.2.1 *Sean E y F espacios localmente convexos. Llamaremos topología fuerte en $\mathcal{L}(^nE,F)$ a la topología mas gruesa en la cuál todas las seminormas definidas por $p_{A,\alpha}(\Phi) = \sup\limits_{x_1,\ldots,x_n \in A} \alpha(\Phi(x_1,\ldots,x_n))$ son continuas, donde $A \subset E$ es acotado y α es seminorma continua de F. Esta topología la notaremos por β. En particular, si E y F son espacios normados, luego $(\mathcal{L}(^nE,F),\beta)$ resulta un espacio normado, cuya norma es $||\Phi|| = \sup_{||x_1||\leq 1,\ldots,||x_n||\leq 1} ||\Phi(x_1,\ldots,x_n)||$ para $\Phi \in \mathcal{L}(^nE;F)$.*

De la misma forma se tiene para el espacio de polinomios n-homogéneos la siguiente topología fuerte.

Definición 3.2.2 *Sean E y F espacios localmente convexos. Sobre $\mathcal{P}(^nE;F)$ se tiene la topología fuerte, que es la topología mas gruesa en la cuál todas las seminormas definidas por $p_{A,\alpha}(P) = \|P\|_{A,\alpha}$ son continuas, en donde $A \subset E$ es acotado y α es una seminorma continua de F. Al espacio de los polinomios n-homogéneos dotado de esta topología lo* *notamos $\mathcal{P}(^nE;F)_\beta$. En particular, si E y F son espacios normados, se tiene la igualdad $\mathcal{P}(^nE;F)_\beta = (\mathcal{P}(^nE,F), ||.||)$, donde $||.||$ es la norma usual de polinomios, es decir $||P|| = ||P||_{B_E}$.*

En la siguiente proposición veremos que $\mathcal{P}(^nE;F)_\beta$ es topológicamente isomorfo a $(\mathcal{L}^s(^nE;F),\beta)$. Antes recordaremos la fórmula de polarización cuya demostración puede verse en [14, Cap. 1].

Teorema 3.2.3 *(Fórmula de polarización) Sean E y F espacios localmente convexos y sea $B \in \mathcal{L}^s(^nE,F)$. Entonces, para todo $x_1,\dots,x_n \in E$ se tiene*

$$B(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n!2^n}\sum_{e_j=\pm 1} e_1\dots e_n B(e_1x_1+\dots+e_nx_n)^n$$

Proposición 3.2.4 *$\mathcal{P}(^nE,F)_\beta$ es topológicamente isomorfo a $(\mathcal{L}^s(^nE,F),\beta)$.*

Demostración: La aplicación $\Psi : \mathcal{L}^s(^nE,F) \to \mathcal{P}(^nE,F)$ definida por $\Psi(B)(x) = B(x^n)$ establece un isomorfismo algebraico entre $\mathcal{P}(^nE,F)_\beta$ y $(\mathcal{L}^s(^nE,F),\beta)$ con inversa

$$\Psi^{-1}(P)(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n!2^n}\sum_{e_j=\pm 1} e_1\dots e_n P(e_1x_1+\dots+e_nx_n).$$

Ψ es continua ya que, si $A \subset E$ es acotado y α es una seminorma continua de F, entonces

$$||\Psi(B)||_{A,\alpha} = \sup_{x\in A}\alpha(B(x^n)) \leq \sup_{x_1,\dots,x_n\in A}\alpha(\widehat{B}(x_1,\dots,x_n)).$$

Para ver que es un isomorfismo topológico, notemos que si $A \subset E$ es acotado, luego $\text{coe}\{A\}$ es acotado. Por la fórmula de polarización, para todo $x_1,\dots,x_n \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}\alpha(B(x_1,\dots,x_n)) \leq\ & \frac{1}{n!2^n}\sum_{e_j=\pm 1}\alpha(B(e_1x_1+\dots+e_nx_n)^n) = \\ =\ & \frac{1}{n!2^n}\sum_{e_j=\pm 1}\alpha(P(e_1x_1+\dots+e_nx_n)).\end{aligned}$$

Tomando supremo en ambos miembros, queda que

$$\sup_{x_1,\dots,x_n\in A}\alpha(B(x_1,\dots,x_n)) \leq \frac{n^n}{n!}||P||_{coe\{A\},\alpha}.$$

como queríamos mostrar. $\square$

Observaciones

1. La proposición anterior muestra en particular que si $P \in P({}^nE; F)$ y $B \in L^s({}^nE; F)$ es tal que $P = \widehat{B}$, entonces $P \in \mathcal{P}({}^nE; F)$ si y sólo si $B \in \mathcal{L}^s({}^nE; F)$.

2. Si E y F son espacios normados, $P \in \mathcal{P}({}^nE; F)$ y $B \in \mathcal{L}^s({}^nE; F)$ tal que $P = \widehat{B}$, luego se tienen la desigualdades

$$||P|| \leq ||\widehat{B}|| \leq \frac{n^n}{n!}||P||.$$

Las constantes de ambas desigualdades son óptimas. En efecto, si E es un espacio de Banach y $x' \in E'$ la aplicación $P(x) = x'(x)^n$ es un polinómio n-homogéneo y se tiene que $P = \widehat{B}$ donde $B(x_1, \ldots, x_n) = x'(x_1) \cdots x'(x_n)$. Es claro que, en este caso, $||P|| = ||A||$. Si $E = \ell_1$, la aplicación $B(x^1, x^2) = 1/2(x_1^1 x_2^2 + x_2^1 x_1^2)$ es bilineal y se tiene que $||B|| = 1/2$. Mas aún, $||B|| = ||B(e_1, e_2)||$. El polinomio definido por $P(x) = B(x, x)$ cumple que $P = \widehat{B}$ y $||P|| = 1/4$. Luego se tiene que $||B|| = 1/2 = \frac{1}{2!}\frac{2^2}{4} = \frac{2^2}{2!}||P||$. Este ejemplo se generaliza a grado n y se debe a Y. Sarantopoulos.

Veremos ahora distintas topologías definidas sobre $\mathcal{H}(U; F)$ y cómo se relacionan con las propiedades de los polinomio de la expansión de Taylor de cada función holomorfa. La primera topología que introduciremos es la más natural, es la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

Definición 3.2.5 *Sean E y F dos espacios localmente convexos y sea $U \subset E$ abierto. La topología de la convergenica uniforme sobre compactos en $\mathcal{H}(U; F)$ es la generada por las seminormas*

$$p_{\beta,K}(f) = ||f||_{\beta,K}$$

donde $K \subset U$ es compacto y β es una seminorma continua de F. Al espacio de las funciones holomorfas dotado de esta topología lo notamos $(H(U; F), \tau_0)$. Notaremos al espacio de los polinómios n-homogéneos con la topología inducida de la convergenica uniforme sobre conjuntos compactos por $\mathcal{P}({}^nE, F)_c$.

Observación Sea $U \subset \mathbb{C}^d$ es un abierto y consideremos en $\mathcal{H}(U)$ una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converge a $f \in \mathcal{H}(U)$ con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Afirmamos que la sucesión de derivadas cualquier orden converge uniformemente sobre compactos a la derivada correspondiente de f, es decir $||f_n^{(m)} - f^{(m)}||_K \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo compacto $K \subset U$. Daremos una idea de esto para $U \subset \mathbb{C}$ abierto. Sea $K \subset U$ es compacto y $\text{dist}(K, \mathcal{C}U) = r > 0$, donde $\mathcal{C}U$ es el complemento de U. Existen $z_1, \ldots, z_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{r/2}(z_j)$ y, por lo tanto, $B_{r/2}(z) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_r(z_j)$ para todo $z \in K$. Si $B = \overline{\bigcup_{j=1}^{n} B_r(z_j)}$, entonces $B \subset U$ es compacto y si $z \in K$, por el Teorema integral de representación de Cauchy se tiene

$$|(f_n^{(m)} - f^{(m)})(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - z| = r/2} \frac{(f_n - f)(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}} d\lambda \right| \leq C||f_n - f||_B$$

para alguna constante $C = C(r, m, d) > 0$. Al ser $z \in K$ arbitrario tenemos la afirmación.

Por lo general, esta propiedad no es cierta si el espacio es de dimensión infinita. En efecto, sean E es un espacio de Banach y $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E' tal que $||x_n'|| = 1$ y $x_n' \xrightarrow{w} 0$. Notemos que x_n' tiende a 0 uniformemente sobre compactos ya que, si $K \subset E$ es compacto, dado $\varepsilon > 0$, existen $x_1, \ldots, x_m \in E$ tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_\varepsilon(x_j)$. Como $x_n' \xrightarrow{w} 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n'(x_j)| \leq \varepsilon$ para todo $n > n_0$ y $j = 1, \ldots, m$. Si $x \in K$, luego existe j_0 tal que $||x - x_{j_0}|| \leq \varepsilon$ y, por lo tanto, se tiene que

$$|x_n'(x)| \leq |x_n'(x - x_{j_0})| + |x_n'(x_{j_0})| \leq 2\varepsilon$$

Si $f_n = x_n'$, luego $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(E)$ y tiende a 0 uniformemente sobre compactos. Si consideramos el operador $\widehat{d}f \colon E \to E'$ dado por $\widehat{d}f(a) = P_1 f(a)$, luego $\widehat{d}f_n(a) = x_n'$ para todo $a \in E$ y, por lo tanto, $(\widehat{d}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente sobre compactos a $0 = \widehat{d}0$ ya que $||\widehat{d}f_n||_K = ||x_n'|| = 1$.

La siguiente topología que veremos es más fina que τ_0 y asegura que si f_n tiende uniformemente sobre compactos a f, entonces $P_j(f_n)$ tiende uniformemente sobre compactos a $P_j(f)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

De ahora en más, a los fines de este trabajo, describiremos las distintas topologías en $\mathcal{H}(U; F)$ cuando F es un espacio normado.

Definición 3.2.6 *Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y sea F un espacio normado. Notaremos por τ_∞ a la topología en $\mathcal{H}(U; F)$ generada por las seminormas $p_K(f) = \|f\|_K$ con $K \subset U$ compacto y las seminormas definidas por*

$$p_{n,K,A}(f) = \sup\{||P_n f(a)(x)|| \colon\ a \in K,\ x \in A\}$$

con $K \subset U$ compacto, $A \subset E$ acotado, $n \in \mathbb{N}$.

La topología τ_∞ induce en $\mathcal{P}(^nE, F)$ la topología fuerte como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.7 *Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y F un espacio normado. Entonces $(\mathcal{H}(U; F), \tau_\infty)$ induce la topología β en $\mathcal{P}(^nE, F)$.*

Demostración: Sea $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$. Por la observación hecha al pie de la Definición 3.1.3 se tiene que $P_nP(x) = P$ para todo $x \in E$. Por lo tanto, si $A \subset E$ acotado se tiene que $||P||_A = p_{n,K,A}(P)$ para todo $K \subset E$ compacto, luego β es más gruesa que τ_∞ sobre $\mathcal{P}(^nE, F)$. Consideremos la seminorma $p_{m,K,A}$ con $K \subset U$ compacto y $A \subset E$ acotado y sea $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$. Si $m > n$ luego $p_{m,K,A}(P) = 0$. Si $m \leq n$, tomando y $P = \widehat{B}$, por la observación hecha en la Definición 3.1.3 y la Proposición 3.2.4, si $a \in K$ y $x \in A$ se tiene

$$\begin{aligned} ||P_mP(a)(x)|| = \; & ||B(a^{n-m}, (a-x)^m)|| \leq \\ & \leq \sup_{x_1,\ldots,x_n \in coe\{2A+K\}} ||B(x_1, \ldots, x_n)|| \\ & \leq \tfrac{n^n}{n!} ||P||_{coe\{2A+K\}}. \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre K y A, se tiene que $p_{m,K,A}(P) \leq \frac{n^n}{n!} ||P||_{coe\{2A+K\}}$ obteniendo el resultado. $\square$

Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto y $T \in \mathcal{H}(U)'$ es τ_0 continua, luego existe $K \subset U$ compacto y $c > 0$ tal que $|T(f)| \leq c||f||_K$. Como el conjunto $\{f|_K : f \in \mathcal{H}(U)\}$ es un subespacio de $C(K)$, el espacio de funciones continuas sobre K con la topología dada por la norma supremo, resulta que T es continua cuando $H(U)$ hereda la topología de $C(K)$ y, por el Teorema de Hahn-Banach y el Teorema de representación de Riesz, existe μ, medida de Borel finita sobre K, $||\mu|| < c$ tal que

$$T(f) = \int_K f(x) d\mu(x)$$

para toda $f \in \mathcal{H}(U)$. Debido a que K no es único y, mas aún, las extensiones por Hahn-Banach no son únicas, T tiene varias medidas que lo representan. Mientras Nachbin estudiaba como es el soporte de T, notó que existe una funcional S sobre $\mathcal{H}(U)$ y $K \subset U$ compacto tal que S no se representa bajo el signo integral por una medida finita Borel con soporte en K, pero que para todo abierto V tal que $K \subset V \subset U$ existe tal representación. Esto es, por el Teorema de representación de Riesz, para todo V abierto tal que $K \subset V \subset U$, existe $c(V) > 0$ tal que $|S(f)| \leq c(V)||f||_V$ para toda $f \in \mathcal{H}(U)$, pero no existe $c > 0$ tal que $|T(f)| \leq c||f||_K$. Motivado por esto, Nachbin define la topología que veremos a continuación.

Definición 3.2.8 *Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y sea F un espacio normado. Una seminorma p en $\mathcal{H}(U; F)$ se dice que es $\mathcal{K}$-portada si existe $K \subset U$ compacto tal que para todo abierto V incluido en U con $K \subset V$, existe una constante $C(V) > 0$ tal que $p(f) \leq C(V)||f||_V$ para todo $f \in \mathcal{H}(U; F)$.*

Definición 3.2.9 *Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y sea F un espacio normado. La topología en $\mathcal{H}(U; F)$ generada por las seminormas $\mathcal{K}$-portadas la denominamos la topología portada o de Nachbin y la notamos τ_ω.*

La última topología que veremos sobre $\mathcal{H}(U;F)$ es la denominada τ_δ. Esta topología es de interés ya que tiene mejores propiedades que τ_ω y muchas veces se usa como una *topología auxiliar* para estudiar propiedades de τ_ω.

Definición 3.2.10 *Sea E espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y sea F un espacio normado. Una seminorma p en $\mathcal{H}(U;F)$ se dice que es τ_δ continua si para cada cubrimiento por abiertos numerable $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de U tal que $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $c > 0$ tales que $p(f) \leq c||f||_{V_{n_0}}$ para toda $f \in \mathcal{H}(U;F)$.*

Definición 3.2.11 *Sea E espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y sea F un espacio normado. La topología en $\mathcal{H}(U;F)$ generada por las seminormas τ_δ-continuas será notada por τ_δ.*

En la siguiente proposición veremos la relación que hay entre estas cuatro topologías. Para simplificar la escritura, notaremos $\tau \leq \sigma$ si τ es una topología mas gruesa que σ.

Proposición 3.2.12 *Sea E un espacio de localmente convexo, $U \subset E$ abierto y sea F un espacio normado. Entonces, sobre $\mathcal{H}(U;F)$ se tiene*

$$\tau_0 \leq \tau_\infty \leq \tau_\omega \leq \tau_\delta.$$

Demostración: La relación $\tau_0 \leq \tau_\infty$ se desprende de la definición y de la observación hecha al pie de la Definición 3.2.5. Consideremos la seminorma $p_{n,K,A}$ con $K \subset U$ compacto y $A \subset E$ acotado y veamos que es $\mathcal{K}$-portada. Si V es un entorno E tal que $K \subset V$, como $A + K$ es acotado, existe $\lambda > 0$ tal que $A + K \subset \lambda V$. Como $p_{n,K,A}(f) = \sup_{a\in K}\{||P_n f(a)||_A\}$, por la desigualdad de Cauchy se tiene que

$$p_{n,K,A}(f) \leq \lambda^n ||f||_{\frac{1}{\lambda}(K+A)} \leq \lambda^n ||f||_V.$$

Así obtenemos que la seminorma $p_{n,K,A}$ es portada por el compacto K y, por lo tanto, τ_ω continua, con lo que se tiene que $\tau_\infty \leq \tau_\omega$. Resta ver que $\tau_\omega \leq \tau_\delta$. Supongamos que p es una seminorma portada por un compacto $K \subset U$. Si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento por abiertos numerable y creciente de U, al ser K compacto, existe n_0 tal que $K \subset V_{n_0}$. Por lo tanto, existe $C > 0$ tal que $p(f) \leq c||f||_{V_{n_0}}$, es decir, p es τ_δ-continua. $\square$

Como vimos anteriormente, $\mathcal{P}(^nE;F)$ es un subespacio de $\mathcal{H}(U;F)$. Si al espacio de polinomios lo dotamos con alguna de las topologías mencionadas, podremos ver que la inclusión está complementada, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.2.13 *Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y sea F un espacio normado. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:*

(a) $\mathcal{P}(^nE;F)_c$ *es un subespacio complementado de* $(\mathcal{H}(U;F),\tau_0)$.

(b) $\mathcal{P}(^nE;F)_\beta$ *es un subespacio complementado de* $(\mathcal{H}(U;F),\tau_\infty)$.

(c) $(\mathcal{P}(^nE;F),\tau_\omega)$ *es un subespacio complementado de* $(\mathcal{H}(U;F),\tau_\omega)$.

(d) $(P(^nE;F),\tau_\omega)$ *es un subespacio complementado de* $(\mathcal{H}(U;F),\tau_\delta)$.

Demostración: Consideremos la aplicación $D_0^n\colon \mathcal{H}(U;F)\to\mathcal{H}(U;F)$, conocida como la derivada de Frechét, definida por $D_0^n(f)=P_nf(0)$ y veamos que es un proyector. Es claro que $(D_0^n)^2=D_0^n$. Faltaría ver que D_0^n es continua con las respectivas topologías:

(a) Al ser E completo, basta tomar seminormas definidas sobre conjuntos absolutamente convexos y compactos. Sea $K\subset E$ absolutamente convexo y compacto y tomemos en $\mathcal{P}(^nE,F)_c$ un entorno V dado por $V=\{P\in\mathcal{P}(^nE,F)\colon ||P||_K\le 1\}$. El conjunto $W=\{f\in\mathcal{H}(U;F)\colon ||f||_K\le 1\}$ es un entorno de $(\mathcal{H}(U;F),\tau_0)$ y, si $f\in W$, por la desigualdad de Cauchy se tiene que

$$||D_0^n(f)||_K=||P_nf(0)||_K\le||f||_K\le 1.$$

Luego $D_0^n(W)\subset V$ y, por lo tanto, D_0^n es continua como se quería ver.

(b) Tomemos $A\subset E$ acotado y $f\in\mathcal{H}(U;F)$. Para cualquier $K\subset U$ compacto tal que $0\in K$, la desigualdad

$$\sup_{x\in A}||D_0^n(f)(x)||=||P_nf(0)||_A\le\sup_{a\in K}||P_nf(a)||_A=p_{n,K,A}(f)$$

muestra la continuidad de D_0^n. Aplicando la Proposición 3.2.7 se obtiene el resultado.

(c) Sea p una seminorma portada por un compacto $K\subset U$. Luego, si $V\subset U$ es un entorno, existe $\lambda>0$ tal que $K\subset\lambda V$. Por lo tanto, por la desigualdad de Cauchy se tiene

$$\begin{aligned} p(D_0^n(f)) = {} & p(P_nf(0))\le C(\lambda V)||P_nf(0)||_{\lambda V} \\ = {} & \lambda^nC(\lambda V)||P_nf(0)||_V\le\lambda^nC(\lambda V)||f||_V. \end{aligned}$$

Esta desigualdad muestra que D_0^n es continuo. En efecto, al ser D_0^n lineal, luego $p\circ D_0^n$ es una seminorma τ_ω-continua. Si $W=\{f\in\mathcal{H}(U;F)\colon p(f)<1\}$ es un τ_ω entorno, entonces $(D_0^n)^{-1}(W)=(D_0^n\circ p)^{-1}([0,1))$ es τ_ω-entorno.

(d) Veamos que $(\mathcal{H}(U;F),\tau_\delta)$ induce en la topología τ_ω en $\mathcal{P}(^nE,F)$. Sea p una seminorma en $(\mathcal{H}(U;F),\tau_\delta)$ continua y sea V un entorno abierto de E. Como V es absorbente, luego $\mathcal{V}=\{U\cap nV\colon n\in\mathbb{N}\}$ es un cubrimiento creciente por abiertos de U. Luego existe $n_0\in\mathbb{N}$ y $C>0$ tal que

$$p(D_0^n(f))=p(P_nf(0))\le C||P_nf(0)||_{U\cap n_0V}\le Cn^{n_0}||P_nf(0)||_V\le Cn^{n_0}||f||_V.$$

Usando el mismo argumento que en el ítem (c), la desigualdad anterior muestra que la seminorma $\widetilde{p}$ definida por $\widetilde{p}(f) = p(P_n f(0))$ es τ_ω-continua. Como se cumple que $p|_{\mathcal{P}(^nE;F)} = \widetilde{p}|_{\mathcal{P}(^nE;F)}$, obtenemos que τ_δ es más gruesa que τ_ω sobre $\mathcal{P}(^nE;F)$. Aplicando la Proposición 3.2.12, tenemos que $(\mathcal{P}(^nE;F), \tau_\omega) = (\mathcal{P}(^nE;F), \tau_\delta)$. Por el ítem (c) se obtiene el el resultado.

$\square$

De la demostración anterior se desprende el siguiente corolario.

Corolario 3.2.14 *Sea E un espacio localmente convexo $U \subset E$ un abierto y sea F un espacio normado. Si $a \in U$, la aplicación $D_a^n \colon (\mathcal{H}(U;F), \tau) \to (\mathcal{H}(U;F), \tau)$ dada por $D_a^n(f) = P_n f(a)$ es continua cuando $\tau = \tau_0, \tau_\infty, \tau_\omega$ o τ_δ.*

Si E y F son espacios de Banach, se puede decir más sobre la relación entre estas cuatro topologías. Empecemos viendo como se relacionan en $\mathcal{P}(^nE, F)$.

Proposición 3.2.15 *Sean E y F espacios de Banach. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(\mathcal{P}(^nE, F), \tau_\delta) = \mathcal{P}(^nE, F)_\beta$.*

Demostración: Es claro que β es más gruesa que τ_δ puesto que, si $A \subset E$ es acotado y $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento por abiertos creciente de E, existen V_{n_0} y $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda V_{n_0}$. Luego, si $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$, se tiene que $||P||_A \leq \lambda^n ||P||_{V_{n_0}}$. Ahora, si p es seminorma τ_δ-continua, la sucesión $(nB_E)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y cubre a E, luego existe n_0 y $C > 0$ tal que $p(P) \leq C||P||_{n_0 B_E} = Cn_0^n ||P||_{B_E}$, con lo que se tiene que $\tau_\delta \leq \beta$. $\square$

De las Proposiciones 3.2.7, 3.2.12 y 3.2.15 se deduce el siguiente corolario.

Corolario 3.2.16 *Sean E y F espacios de Banach. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple*

$$(\mathcal{P}(^nE, F), \tau_\delta) = (\mathcal{P}(^nE, F), \tau_\omega) = (\mathcal{P}(^nE, F), \tau_\infty) = \mathcal{P}_\beta(^nE, F).$$

Observación En general, estas igualdades no se cumplen cuando E no es un espacio de Banach. En [1] podemos ver un ejemplo de esto para E cierto espacio de Fréchet para el cual, sobre $\mathcal{P}(^nE)$, se tiene que $\tau_0 < \beta < \tau_\omega$. Más ejemplos donde se verifican las inclusiones estrictas pueden encontrarse en [8, Secc 1.2].

El siguiente teorema nos da una caracterización de mucha utilidad de la topología τ_ω cuando E y F son espacios de Banach.

Teorema 3.2.17 *Sean E y F espacios de Banach. Entonces*

(a) *La topología τ_ω en $\mathcal{H}(E;F)$ está generada por las seminormas*

$$q_p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} p(P_n f(0)),$$

donde p es una seminorma $\mathcal{K}$-portada.

(b) *La topología τ_ω en $\mathcal{H}(E;F)$ está generada por las seminormas*

$$p_{K,(a_n)}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} ||P_n f(0)||_{K+a_n B_E}$$

donde $K \subset E$ es absolutamente convexo y compacto y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

Demostración:

(a) Si p es una seminorma portada por el compacto $K \subset E$, entonces p es τ_ω continua y se tiene que $p(f) = p(\sum_{n=0}^{\infty} P_n f(0)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(P_n f(0)) = q_p(f)$. Resta ver que q_p es una seminorma $\mathcal{K}$-portada. Sea $V \subset E$ abierto tal que $K \subset V$. Como p es portada por K, existe $C(V) > 0$ tal que $p(h) \leq C(V)||h||_V$ para todo $h \in \mathcal{H}(E;F)$. Luego, por la desigualdad de Cauchy se tiene

$$\begin{aligned} q_p(f) = \;& \sum_{n=0}^{\infty} p(P_n f(0)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} C(V)||P_n f(0)||_V = \\ & C(V)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}||P_n f(0)||_{2V} \leq 2C(V)||f||_{2V}. \end{aligned}$$

Como $K \subset V$, $2K \subset 2V$, por lo tanto q_p es portada por el compacto $2K$, como se quería ver.

(b) Sea $K \subset E$ absolutamente convexo y compacto y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Afirmamos que $p_{K,(a_n)}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} ||P_n f(0)||_{K+a_n B_E}$ es portada por el compacto $2K$. En efecto, sea $V \subset E$ abierto tal que $K \subset V$. Si $d = \operatorname{dist}(K, \mathcal{C}V) > 0$, donde $\mathcal{C}V$ es el complemento de V, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < d$ para todo $n > n_0$. Por lo tanto, si $n > n_0$, $K + a_n B_E \subset V$. Además, al ser V abierto, V es absorbente y, por lo tanto, existe $\lambda > 0$ tal que $K + a_n B_E \subset \lambda V$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando esto y la desigualdad de Cauchy se tiene

$$\begin{aligned}
p_{K,(a_n)}(f) &= \sum_{n=0}^{\infty} ||P_n f(0)||_{K+a_nB_E} = \\
&= \sum_{n=0}^{n_0} ||P_n f(0)||_{K+a_nB_E} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} ||P_n f(0)||_{K+a_nB_E} \leq \\
&\leq \sum_{n=0}^{n_0} ||P_n f(0)||_{\lambda V} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} ||P_n f(0)||_{V} \leq \\
&\leq \sum_{n=0}^{n_0} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n ||P_n f(0)||_{2V} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n ||P_n f(0)||_{2V} \leq \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{n_0} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right) ||f||_{2V},
\end{aligned}$$

y, de la misma forma que en el ítem anterior, concluimos que $p_{K,(a_n)}$ es portada por $2K$. Veamos ahora que estas seminormas generan τ_ω. Sea p una seminorma portada por K compacto. Sea $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \in c_0$ y consideremos el conjunto $W_m = \overline{coe\{K\}} + a_m B_E$. Como W_m es abierto y $K \subset W_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, luego $p(P) \leq c_m ||P||_{W_m}$ para todo $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$.

Para $m = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $c_1^{1/n} \leq 2$ para todo $n \geq n_1$. Luego, tomando $V_1 = 2W_1$, se tiene

$$p(P) \leq c_1 ||P||_{W_1} = ||P||_{c_1^{1/n} W_1} \leq ||P||_{V_1}$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ y para todo $n \geq n_1$. Si $m = 2$, luego existe $n_2 > n_1$ tal que $c_2^{1/n} \leq 2$ para todo $n \geq n_2$. Luego, tomando $V_2 = 2W_2$, se tiene que si $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, entonces

$$p(P) \leq c_2 ||P||_{W_2} = ||P||_{c_2^{1/n} W_2} \leq ||P||_{V_2}$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$ y para todo $n \geq n_2$. Inductivamente, definimos los conjuntos $V_n, n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, como $K \subset V_1$ abierto y p es K-portada tenemos que

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} p(P_n f(0)) &= \sum_{n=0}^{n_1-1} p(P_n f(0)) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} p(P_n f(0)) \leq \\
&\leq c_1(V_1) \sum_{n=0}^{n_1-1} ||P_n f(0)||_{V_1} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} ||P_n f(0)||_{V_j} \leq \\
&\leq C \left(\sum_{n=0}^{n_1-1} ||P_n f(0)||_{V_1} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} ||P_n f(0)||_{V_j}\right)
\end{aligned}$$

donde $C = \text{máx}\{c_1(V_1), 1\}$.

Ahora, usando el ítem (a), τ_ω esta generada por las seminormas de la forma $q_p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} p(P_n f(0))$ donde p es una seminorma $\mathcal{K}$-portada. Si p esta portada por K y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, luego q_p esta dominada por la seminorma τ_ω-continua $p_{\widetilde{K},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ donde $\widetilde{K} = \overline{coe\{K\}}$ y $b_n = 2a_j$ si $n_j \leq n \leq n_{j+1}$. Esto prueba el resultado.

$\square$

Utilizando la proposición anterior podremos caracterizar a los conjuntos acotados de $(\mathcal{H}(E;F), \tau_\omega)$ como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.18 *Sean E y F espacios de Banach y sea $A \subset \mathcal{H}(E;F)$. Entonces, A es τ_0-acotado si y sólo si A es τ_ω-acotado.*

Demostración: Si A es τ_ω-acotado, como la seminorma $f \longmapsto ||f||_K$ con $K \subset E$ compacto es portada por K, existe $C > 0$ tal que $\sup_{f\in A} ||f||_K \leq C$. Por lo tanto A es τ_0-acotado. Recíprocamente, supongamos que A es τ_0-acotado y sea p una seminorma portada por K compacto. Afirmamos que existe $d > 0$ y $C > 0$ tal que $\sup_{f\in A} ||f||_{K+dB_E} \leq C$. Supongamos que no, luego si $d = 1$ existen $f_1 \in A$, $x_1 \in K$ e $y_1 \in E$, $||y_1|| = 1$ tales que $||f_1(x_1 + y_1)|| > 1$. Para $d = 2^{-1}$, existen $f_2 \in A$, $x_2 \in K$ e $y_2 \in E$, $||y_2|| = 1$ tales que $||f_2(x_2 + \frac{1}{2}y_2)|| > 2$. Siguiendo así, existen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ con $||y_n|| = 1$ tales que $||f_n(x_n + \frac{1}{n}y_n)|| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\sup_{f\in A} ||f||_{\{(x_n+\frac{1}{n}y_n) : n\in\mathbb{N}\}} = \infty$, lo cuál es una contradicción ya que el conjunto A es τ_0-acotado y el conjunto $\{(x_n + \frac{1}{n}y_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto. Obtenemos así las constantes C y d como mencionamos. Ahora, como p es portada por el compacto K y $K \subset K + dB_E$ es abierto, $\sup_{f\in A} p(f) \leq C_1 \sup_{f\in A} ||f||_{K+dB_E} \leq C_1 C$, como queríamos probar. $\square$

Corolario 3.2.19 *Sean E y F espacios de Banach y sea $A \subset \mathcal{H}(E;F)$. Son equivalentes*

(a) *A es τ_0-acotado.*

(b) *A es τ_∞-acotado.*

(c) *A es τ_ω-acotado.*

Demostración: De la Proposición 3.2.12, $\tau_0 \leq \tau_\infty \leq \tau_\omega$, con lo que se tiene (c)⇒(b)⇒(a). Vale la implicación (a)⇒(c) por la Proposición 3.2.18. $\square$

Por último, para ver cómo se relacionan las topologías mencionadas anteriormente con τ_δ, necesitaremos la definición de espacio bornológico. Si E es un espacio localmente convexo y $U \subset E$ es un entorno absolutamente convexo, luego U absorbe todo conjunto acotado de E. Si $V \subset E$ es un conjuto absolutamente convexo que absorbe todo conjunto acotado de E, V no es necesariamente un entorno de E. Por ejemplo, si E es un espacio de Banach de dimensión infinita y dotamos a E con la topología débil, luego B_E absorbe todo conjuto débil acotado, pero B_E no es un entorno débil. Inspirado en esto, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.2.20 *Sea E un espacio localmente convexo. Decimos que E es bornológico si todo conjunto absolutamente convexo $W \subset E$ tal que absorbe todo conjunto acotado en E es un entorno de E.*

La siguiente proposición, nos da distintas carecterizaciones de un espacio bornológico. Una demostración puede encontrarse en [8, Pag. 25].

Proposición 3.2.21 *Sea (E, τ) un espacio localmente convexo. Son equivalentes :*

(a) *(E, τ) es bornológico.*

(b) *Si α es una seminorma en E tal que $sup_{x \in A} \alpha(x) < \infty$ para todo conjunto $A \subset E$ acotado, entonces α es una seminorma continua.*

(c) *Si F es un espacio localmente convexo y $T: E \to F$ es un operador lineal que aplica acotados en acotados, entonces T es continuo.*

(d) *Si τ' es una topología localmente convexa sobre E que tiene los mismos acotados que τ, entonces $\tau \geq \tau'$.*

Los espacios bornológicos son espacios bastantes generales como muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.2.22 *Todo espacio metrizable es bornológico.*

Demostración: Sea E un espacio metrizable y supongamos que no es bornológico. Entonces por la Proposición 3.2.21 (c), existe un espacio localmente convexo F y un operador lineal $T: E \to F$ que aplica acotados en acotados que no es continuo. Sea $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de entornos de E, con $U_{n+1} \subset U_n$ para todo n. Como T no es continuo en el origen, entonces existe $V \subset F$ un entorno tal que $T^{-1}(V)$ no es un entorno de E. Por lo tanto, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \in U_n$ y $T(x_n) \notin nV$. Entonces, como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ no lo es, se llega a una contradicción. □

Si (E, τ) es un espacio localmente convexo, utilizando el Lema de Zorn, existe una topología localmente convexa sobre E que tiene los mismos acotados que (E, τ) y que es la más fina que cumple esta propiedad. En particular, esta la topología es bornológica, la denominaremos topología bornológica asociada a τ y notaremos τ^{bor}.

Para comparar los conjuntos acotados entre las distintas topologías necesitaremos también el concepto de un conjunto localmente acotado, cuya definición damos a continuación.

Definición 3.2.23 *Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y sea F un espacio normado. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas sobre U con valores en F se dice localmente acotada si para todo $x \in U$ existe $V_x \subset U$ entorno de x tal que $\sup_{f\in\mathcal{F}} ||f||_{V_x}$ es finito.*

Notemos que para que un conjunto $A \subset H(E;F)$ sea localmente acotado sólo necesitamos conocer las topologías de E y F. Este hecho es clave para las siguientes tres proposiciones.

Proposición 3.2.24 *Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y sea F un espacio normado. Si $A \subset \mathcal{H}(U;F)$ es localmente acotado, entonces A es τ_δ-acotado.*

Demostración: Sea $W_n = \{x \in U\colon ||f(x)|| < n,\ \forall f \in A\}$ y consideremos $int(W_n)$ el interior de W_n. Fijo $x \in U$, como A es localmente acotado, existe $V_x \subset U$ entorno de x y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{f\in A} ||f||_{V_x} < n_0$, por lo tanto $V_x \subset int(W_{n_0})$. Asi, $int(W_n)$ es no vacío para todo $n \geq n_0$. Mas aún, $(int(W_n))_{n\geq n_0}$ es un cubrimiento por abiertos creciente de U. Si p es una seminorma τ_δ-continua, entonces existe N y $C > 0$ tal que

$$\sup_{f\in A} p(f) \leq C \sup_{f\in A} ||f||_{W_N} < CN$$

de donde se deduce el resultado. □

Proposición 3.2.25 *Sean E y F espacios de Banach y sea $A \subset \mathcal{H}(E;F)$. Si A es τ_0- acotado, entonces A es localmente acotado.*

Mas aún, A es localmente acotado si y sólo si A es τ-acotado cuando τ es alguna de las topologías $\tau_0, \tau_\infty, \tau_\omega$ ó τ_δ.

Demostración: Sea $A \subset \mathcal{H}(E;F)$ τ_0-acotado y supongamos que no es localmente acotado. Luego existe $x \in E$ tal que para todo entorno V de x se tiene que el conjunto $\{||f||_V\colon f \in A\}$ no es acotado. Si $V_n = B(x, \frac{1}{n})$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in V_n$ y $f_n \in A$ tales que $||f_n(x_n)|| \geq n$. Esto es una contradicción ya que, si $K = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup x\}$, entonces K es compacto y se tendría que

$$\sup_{f\in A} ||f||_K \geq ||f_n(x_n)|| \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, A no es τ_0-acotado. Al ser τ_δ es más fina que τ_0, entonces todo τ_δ-acotado es τ_0-acotado. Como acabamos de ver, si A es τ_0-acotado, entonces A es localmente acotado. Aplicando la Proposición 3.2.24, A es τ_δ-acotado, con lo que se tiene que los conjuntos acotados en τ_0 y τ_δ coinciden. Aplicando la Proposición 3.2.19, obtenemos la segunda afirmación. $\square$

De la definición de topología bornológica asociada se tiene que $\tau_\delta^{bor} \geq \tau_\delta$. Por la Proposición 3.2.25, $\mathcal{H}(E;F)$ tiene los mismos conjuntos acotados para cualquiera de las cuatro topologías vistas. Por la Proposición 3.2.21, cada una de las topologías bornológicas asociadas a cada una de estas cuatro topologías tienen los mismos conjuntos acotados y cada una es la más fina que cumple esto, por lo tanto se tienen las igualdades

$$\tau_0^{bor} = \tau_\infty^{bor} = \tau_\omega^{bor} = \tau_\delta^{bor}.$$

En particular, $A \subset \mathcal{H}(E;F)$ es localmente acotado si y sólo si $A \subset (\mathcal{H}(E;F), \tau_\delta^{bor})$ es acotado.

Como veremos en la siguiente proposición, τ_δ es una topología bornológica y, con este resultado, tendremos la relación que necesitaremos más adelante entre las cuatro topologías.

Proposición 3.2.26 *Sean E y F espacios de Banach. Entonces la topología bornológica asociada a τ_0 en $\mathcal{H}(E;F)$ es τ_δ. Mas aún, se tienen las igualdades*

$$\tau_0^{bor} = \tau_\infty^{bor} = \tau_\omega^{bor} = \tau_\delta^{bor} = \tau_\delta.$$

En particular, $(\mathcal{H}(E;F), \tau_\delta)$ es un espacio bornológico.

Demostración: Para probar el resultado, mostraremos que $\tau_\delta^{bor} \leq \tau_\delta$.

Para cada cubrimiento por abiertos creciente de E, $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consideremos el conjunto $\mathcal{H}_\mathcal{V}(E;F) = \{f \in \mathcal{H}(E;F) \colon ||f||_{V_n} < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ dotado con la topología generada por las seminormas $p_n = ||f||_{V_n}$. $\mathcal{H}_\mathcal{V}(E;F)$ es un espacio localmente convexo con una base de entornos numerable y, por lo tanto, bornológico. Si $A \subset \mathcal{H}_\mathcal{V}(E;F)$ es acotado, luego es localmente acotado. Así la inclusión

$$i_\mathcal{V} \colon \mathcal{H}_\mathcal{V}(E;F) \to (\mathcal{H}(E;F), \tau_\delta^{bor})$$

manda conjuntos acotados en acotados y resulta continua. Entonces dado un τ_δ^{bor} entorno W existe $U_\mathcal{V}$ entorno en $\mathcal{H}_\mathcal{V}(E;F)$ tal que $i_\mathcal{V}(U_\mathcal{V}) \subset W$.

Veamos que si para cada cubrimiento por abiertos creciente de E, $\mathcal{V}$, $U_\mathcal{V}$ es un entorno en $\mathcal{H}_\mathcal{V}(E;F)$, entonces el conjunto $U = \bigcup_\mathcal{V} U_\mathcal{V}$ es un entorno en $(\mathcal{H}(E;F), \tau_\delta)$ donde la unión se toma sobre todos los cubrimientos por abiertos creciente de E. Si esto fuese cierto, entonces la identidad

$$Id_{\mathcal{H}(E;F)} \colon (\mathcal{H}(E;F), \tau_\delta) \to (\mathcal{H}(E;F), \tau_\delta^{bor})$$

resulta continua ya que $Id_{\mathcal{H}(E;F)}(U) = \bigcup_{\mathcal{V}} i_{\mathcal{V}}(U_{\mathcal{V}}) \subset W$ y por lo tanto $\tau_\delta^{bor} \leq \tau_\delta$.

El conjunto $U = \bigcup\limits_{\mathcal{V}} U_{\mathcal{V}}$, donde $U_{\mathcal{V}}$ es un entorno en $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}(E;F)$ es absolutamente convexo ya que es unión de conjuntos absolutamente convexos. Veamos que es absorbente. Si $f \in \mathcal{H}(E;F)$, consideremos los conjuntos $V_n = \{x \in E \colon ||f(x)|| < n\}$. Al ser f continua, V_n es abierto y por lo tanto $\mathcal{V}_0 = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento por abiertos creciente de E. Como $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{V}_0}(E;F)$ y $U_{\mathcal{V}_0}$ es un entorno en $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_0}(E;F)$, existe $\lambda > 0$ tal que $f \in \mu U_{\mathcal{V}_0}$ para todo $|\mu| > \lambda$. Luego se tiene que

$$f \in \mu U_{\mathcal{V}_0} \subset \mu(\bigcup_{\mathcal{V}} U_{\mathcal{V}}) = \mu U$$

para todo $|\mu| > \lambda$.

Consideremos la funcional de Minkowski de U, definida por $p(f) = \inf\{\lambda > 0 \colon f \in \lambda U\}$ que, por la Proposición 1.1.10, es una seminorma y veamos que es τ_δ continua. Supongamos que no. Entonces existe $\mathcal{W} = (W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento por abiertos creciente de E y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(E;F)$ tales que $p(f_n) > n||f_n||_{W_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, se tiene que, como $p(f_n) > 0$, entonces $f_n \neq 0$ y, por el principio de identidad, $||f_n||_{W_n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $g_n = \frac{f_n}{||f_n||_{W_n}}$ se tiene que $p(g_n) > n$ y $||g_n||_{W_n} \leq 1$. Consideremos los conjuntos $V_n = \{x \in E \colon ||g_m(x)|| \leq n, \ \forall m \in \mathbb{N}\}$. Es claro que $W_1 \subset V_1$. En efecto, si $x \in W_1$, luego $x \in W_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $||g_n(x)|| \leq ||g_n||_{W_n} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in V_1$. En particular, V_1 es no vacío. Veamos que $int(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento por abiertos creciente de E. Si $x \in E$ entonces existe n_0 tal que $x \in W_{n_0}$, luego $||g_m(y)|| \leq ||g_m||_{W_m} \leq 1$ para todo $y \in W_{n_0}$, $m \geq n_0$. Por otra parte, al ser $g_1, \ldots, g_{n_0-1}$ continuas, existe $N \in \mathbb{N}$ y un entorno $\widetilde{U_x}$ de x tal que $||g_j(y)|| < N$ para todo $y \in \widetilde{U_x}$, $j = 1, \ldots, n_0$. Por lo tanto, $x \in \widetilde{U_x} \cap W_{n_0} \subset V_N$, obteniendo que $x \in int(V_n)$.

Si $\widetilde{\mathcal{V}} = (int(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ entonces la sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{V}}}(E;F)$ es acotada, ya que $||g_m||_{V_n} \leq n$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, como $U_{\widetilde{\mathcal{V}}} \subset U$ es un entorno en $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{V}}}(E;F)$, existe $\lambda > 0$ tal que $(g_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \lambda U_{\widetilde{\mathcal{V}}} \subset \lambda U$ y resutla $p(g_m) \leq \lambda$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto es una contradicción, ya que $p(g_n) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Observaciones (de la demostración de la Proposición 3.2.26)

1. Utilizamos que el espacio $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}(E;F)$ es un espacio localmente convexo con una base de entornos numerable y por lo tanto bornológico. Esto se debe a que cualquier

espacio localmente convexo (E,τ) que tiene una base de entornos numerable es metrizable. En efecto, si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de τ y p_n son sus respectivas funcionales de Minkowski, la función

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\operatorname{inf}\{p_n(x),1\}$$

esta bien definida y si $d(x,y)=h(x-y)$ resulta una distancia que define la misma topología τ. Más aún, si consideramos los conjuntos $V_n=\{x\in E\colon d(0,x)<2^{-n}\}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de la topología τ y se cumple que $V_{n+1}\subset V_n$. Una demostración puede verse en [18, Cap. 1].

2. La demostración resulta más sencilla si se conoce el concepto de *límite inductivo*, concepto que no utilizamos ya que excede el interés de este trabajo. La primera parte muestra que $(\mathcal{H}(E;F),\tau_\delta)$ es el límite inductivo de los espacios $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}(E;F)$ y se obtiene la proposición sabiendo que el límite inductivo de espacios bornológicos es bornológico . Una demostración de este último resultado puede encontrarse en [18, Cap. 5].

3. Notemos que no usamos la hipótesis de que E sea un espacio de Banach. La afirmación $(\mathcal{H}(E;F),\tau_\delta)$ *es un espacio bornológico* es cierta cuando E es un espacio localmente convexo y F normado.

3.3. Polinomios compactos y funciones holomorfas compactas

Como vimos en la Sección 2, hay una estrecha relación entre la propiedad de aproximación, los operadores lineales compactos y el ϵ-producto. Estas relaciones nos motivan a introducir y estudiar polinomios y funciones holomorfas compactas. Veremos como se relaciona el espacio de funciones holomorfas con el ϵ-producto.

Las funciones compactas (polinomios y funciones holomorfas) entre espacios de Banach, pueden verse como una extensión a la teoría no lineal del concepto de operadores lineales compactos. En particular, con las Proposiciones 3.3.4 y 3.3.11 se generaliza el Teorema de Schauder para operadores lineales compactos. En esta parte, E y F serán espacios de Banach.

Definición 3.3.1 *Sean E y F espacios de Banach. Un polinomio $P\in\mathcal{P}(^nE;F)$ se dice compacto si para cada $x\in E$ existe un entorno V de x tal que $P(V)$ es relativamente compacto. Al conjunto de los polinomios n-homogéneos compactos de E con valores en F lo denotamos $\mathcal{P}_K(^nE;F)$.*

La siguiente proposición es consecuencia directa de la definición.

Proposición 3.3.2 *Sean E y F espacios de Banach y sea $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$. Son equivalentes:*

(a) $P \in \mathcal{P}_K(^nE; F)$.

(b) *Si $A \subset E$ es acotado, entonces $P(A)$ es relativamente compacto.*

(c) *Existe $x \in E$ y V_x entorno de x tal que $P(V_x)$ es relativamente compacto.*

Empezaremos viendo alguna caracterización de los polinomios compactos en términos de su traspuesta. El resultado que veremos, que generaliza Teorema de Schauder para operadores lineales compactos, lo utilizaremos más adelante para caracterizar las funciones holomorfas compactas. Antes recordemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.3 *(Ascoli) Sea X un espacio topológico y sea (Y, d) un espacio métrico. Sea $(\mathcal{C}(X; Y), \tau_0)$ el conjunto de funciones continuas dotado de la topología de la convergencia compacto abierta. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X; Y)$ es equicontinuo con respecto a d y el conjunto $\mathcal{F}_a = \{f(a): f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ es relativamente compacto para todo $a \in X$, entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $(\mathcal{C}(X; Y), \tau_0)$.*

Proposición 3.3.4 *Sea E y F espacio de Banach y sea $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$. Consideremos la aplicación lineal $P^*: F' \to \mathcal{P}(^nE)$ definida por $P^*(y')(x) = y' \circ P(x)$ para $y' \in F'$ y $x \in E$. Son equivalentes:*

(a) $P \in P_K(^nE, F)$.

(b) *$P^*: F'_c \to \mathcal{P}(^nE)_c$ es compacta.*

(c) *$P^*: F'_c \to \mathcal{P}(^nE)_\beta$ es continua.*

(d) *$P^*: F'_\beta \to \mathcal{P}(^nE)_\beta$ es compacta.*

Demostración:

(a)⇒(b) Sea $B_E = \{x \in E: ||x|| < 1\}$, la bola unidad de E. Al ser P compacto, $\overline{P(B_E)} \subset F$ es compacto y, por lo tanto, $V = \left(\overline{P(B_E)}\right)^\circ$, el polar de $\overline{P(B_E)}$, es un entorno de F'_c. Veamos que $P^*(V)$ es compacto en $\mathcal{P}(^nE)_c$. Por el Teorema de Ascoli, basta con ver que $P^*(V)$ es equicontinuo y que, para todo $x \in E$, el conjunto $\{P^*(y')(x): y' \in V\} \subset \mathbb{C}$ es acotado. Si $y' \in V$, luego para todo $x \in B_E$ se tiene que

$$|P^*(y')(x)| = |y' \circ P(x)| \leq 1.$$

Como $y' \in V$ es arbitraria, se tiene que $P^*(V) \subset \mathcal{P}(^nE)$ es equicontinuo. De la misma forma, se ve que para cada $x \in E$, el conjunto $\{P^*(y')(x): y' \in V\}$ esta acotado y una cota es $\|x\|^n$.

(b)⇒(c) Por hipótesis, existe $K \subset F$ compacto tal que $P^*(K^\circ)$ es relativamente compacto en $\mathcal{P}(^nE)_c$, luego $P^*(K^\circ)$ es acotado en $\mathcal{P}(^nE)_c$. Por el Corolario 3.2.16, como $\mathcal{P}(^nE)_c$ y $\mathcal{P}(^nE)_\beta$ tienen los mismos conjuntos acotados, existe W un entorno de $\mathcal{P}(^nE)_\beta$ tal que $P^*(K^\circ) \subset W$. Se sigue que $P^*: F'_c \to \mathcal{P}(^nE)_\beta$ es continua.

(c)⇒(d) Como $B_{F'} = B_F^\circ$ la Proposición 1.4.2 asegura que $B_{F'}$ es relativamente compacto en F'_c. Al estar suponiendo que $P^*: F'_c \to \mathcal{P}(^nE)_\beta$ es continua, resulta que $P^*(B_{F'})$ es compacto en $\mathcal{P}(^nE)_\beta$.

(d)⇒(a) Como $P^*: F'_\beta \to \mathcal{P}(^nE)_\beta$ es lineal y compacto entre espacios de Banach, el Teorema de Schauder asegura que $P^{**}: (\mathcal{P}(^nE)_\beta)'_\beta \to (F'_\beta)'_\beta$ es compacto. Si $x \in E$ e $y' \in F'$, se tiene $P^{**}(x)(y') = P^*(y')(x) = \langle y', P(x)\rangle$. Como F' separa puntos, se tiene que $P^{**}|_E = P$ y, por lo tanto se obtiene (a).

□

Así como la definición de polinomio compacto se inspira en la de operador lineal compacto, para funciones holomorfas tenemos:

Definición 3.3.5 *Sea $f \in \mathcal{H}(E;F)$, f se dice compacta si para todo $x \in E$ existe un abierto $U \subset E$, $x \in U$ tal que $\overline{f(U)}$ es compacto. El conjunto de las funciones holomorfas compactas de E con valores en F será notado por $\mathcal{H}_K(E;F)$.*

Notar que como cualquier acotado de $\mathbb{C}^m$ es relativamente compacto, se tiene que $\mathcal{H}(E;\mathbb{C}^m) = \mathcal{H}_K(E;\mathbb{C}^m)$, para todo E espacio localmente convexo, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Sobre un espacio de Banach, la definición de función holomorfa compacta, verifica la misma propiedad que los polinomios compactos. Es decir, si E y F son espacios de Banach y $f \in \mathcal{H}(E;F)$, para que f sea compacta basta con verificar que la imagen de un sólo entorno de cada punto $x \in E$ es relativamente compacto en F. Como primer paso, veamos que alcanza con verificar que una función holomorfa manda un entorno del origen a un conjunto relativamente compacto para que sea compacta. Para esto, necesitaremos un lema cuya demostración puede encontrarse en [18, Cap. 3].

Lema 3.3.6 *Sea E un espacio de Banach, $L \subset E$ un conjunto relativamente compacto. Entonces, la cápsula convexa equilibrada de L, $\mathrm{coe}\{L\}$, es relativamente compacta.*

Proposición 3.3.7 *Sean E y F espacios de Banach, $f \in \mathcal{H}(E;F)$ y sea V entorno de 0 con $f(V)$ relativamente compacto. Entonces f es compacta.*

Demostración: Sean $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset V$ y $n \in \mathbb{N}$, afirmamos que se tiene la inclusión $\{P_nf(0)(x): \|x\| < \delta\} \subset \overline{coe\{f(V)\}}$. En efecto, si $b = P_nf(0)(x)$ para algún

$x \in E$, $\|x\| < \delta$ pero $b \notin \overline{coe\{f(V)\}}$, por el Teorema de Hahn-Banach existe $\phi \in F'$ tal que $|\phi(b)| > 1$ y $|\phi(y)| \leq 1$ para todo $y \in \overline{coef(B_\delta(0))}$. Entonces, la función $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(\lambda) = \phi \circ f(\lambda z)$ resulta entera y por la desigualdad de Cauchy obtenemos que $1 < |\phi(b)| = |g^{(n)}(0)/n!| \leq \sup\{|g(\lambda)| : |\lambda| = 1\} \leq 1$, lo cuál es una contradicción. Luego, $\{P_n f(0)(x) : \|x\| < \delta\} \subset \overline{coe\{f(V)\}}$.

Sea $x \in E$. Como f es entera, es decir su dominio es E, por la Proposición 3.1.7, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n f(0)(y)$, donde la convergencia es uniforme para $y \in B_\varepsilon(x)$. Por el Lema 3.3.6, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{P_n f(0)(y) \colon y \in B_\varepsilon(x)\}$ es relativamente compacto en F y, por lo tanto, para cada $M \in \mathbb{N}$, el conjunto $C_M = \{\sum_{n=0}^{M} P_n f(0)(y) \colon y \in B_\varepsilon(x)\}$ es relativamente compacto en F. Veamos que $f(B_\varepsilon(x))$ es totalmente acotado en F y, al ser F completo, será relativamente compacto.

Dado $\delta > 0$, existe $M \in N$ tal que $\|f(y) - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)(y)\| < \delta/3$ para $y \in B_\varepsilon(x)$. Por la compacidad de C_M, existe un conjunto $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset B_\varepsilon(x)$ tal que para cada $y \in B_\varepsilon(x)$ existe y_i con $\| \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)(y) - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)(y_i)\| < \delta/3$. Por lo tanto,

$$\|f(y_i) - f(y)\| \leq \|f(y_i) - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)(y_i)\| +$$

$$+ \| \sum_{n=0}^{M} P^n f(0)(y_i) - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)(y)\| + \| \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)(y) - f(y)\| \leq \delta.$$

Concluimos que $f(B_\varepsilon(x)) \subset \bigcup_{i=0}^{k} B_\delta(f(y_i))$ y, por lo tanto, $f(B_\varepsilon(x))$ es totalmente acotado como queríamos ver. Al ser $x \in E$ arbitrario, f resulta compacta. $\square$

Corolario 3.3.8 *Sean E y F espacios de Banach y sea $f \in \mathcal{H}(E; F)$. Sea $a \in E$ y V un entorno de 0 tal que $f(a + V) \subset F$ es relativamente compacto. Entonces f es compacta.*

Demostración: Sea $g(x) = f(x + a)$, luego $g(V) = f(V + a)$ es relativamente compacto y, por la Proposición 3.3.7, g es compacta. Se deduce que f es compacta. $\square$

Notemos que en la Proposición 3.3.7 para concluir que f es compacta utilizamos que $P_n f(0)$ es compacto. Hecha esta observación, junto con el corolario anterior obtenemos.

Corolario 3.3.9 *Sean E y F espacios de Banach. Son equivalentes:*

(a) $f \in \mathcal{H}_K(E; F)$

(b) $P_n f(a)$ *es compacto para todo* $a \in E$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

(a)$\Rightarrow$(b) Sea $a \in E$, V entorno del 0 tal que $f(a+V)$ es compacta. Luego $g(x) = f(x-a)$ es compacta y, por la demostración de la Proposición 3.3.7, $P_n g(0)$ es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $P_n g(0) = P_n f(a)$, resulta que $P_n f(a)$ es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b)$\Rightarrow$(a) Si $g(x) = f(x-a)$, entonces $P_n g(0) = P_n f(a)$. Por lo tanto $P_n g(0)$ es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$ y, otra vez usando la Proposción 3.3.7, g es compacta. Luego f es compacta.

$\square$

Observaciones

1. En la Proposición 3.3.2 vimos que la imagen por un polinomio compacto de un conjunto acotado es compacta. En general esto no es cierto para una función holomorfa compacta. En efecto, sea $f\colon c_0 \to \mathbb{C}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^n$. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la base usual de c_0 y, para cada $n \in \mathbb{N}$, (e'_n) son las funcionales tales que $e'_n(e_j) = \delta_{n,j}$, se tiene que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x)^n$ y, de la misma forma que en el Ejemplo 3.1.4 se ve que f es holomorfa. $f(B_{\frac{1}{2}}(0))$ es acotado en $\mathbb{C}$ y por lo tanto es relativamente compacto, pero $f(B_{c_0}(0))$ no es compacto. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$, si $x = \sum_{j=1}^{n+1} e_j(1-\frac{1}{n+1})$, se tiene que $x \in B_{c_0}$ y $f(x) = \sum_{j=1}^{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^j > (n+1)(1-\frac{1}{n+1}) = n$.

2. Si $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$, $a \in E$ y V es un entorno de 0 tal que $f(V)$ es compacto, por lo general no es cierto que $f(a+V)$ sea compacto. Más aún, para cada espacio de Banach de dimensión finita E existe una clase extensa de funciones en $\mathcal{H}(E)$ y, por lo tanto compactas, tales que para $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in E$ tal que $||f||_{B_\varepsilon(x_\varepsilon)} = \infty$. Una demostración de esto puede encontrarse en [2].

En las siguientes proposiciones, trataremos de caracterizar a las funciones holomorfas compactas en términos de su conjunto imagen.

Proposición 3.3.10 *Sean E y F espacios de Banach y sea $f\colon E \to F$. Son equivalentes*

(a) *$f \in \mathcal{H}_K(E;F)$.*

(b) *Existe $L \subset F$ absolutamente convexo y compacto tal que $f\colon E \to F_L$ es holomorfa, donde $F_L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nL$ es normado por la funcional de Minkowski de L.*

(c) *$f\colon E \to F$ es holomorfa y existe $L \subset F$ compacto tal que $f(E) \subset$ Span L.*

Demostración:

(a)⇒(b) Sea $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$. Para $M \in \mathbb{N}$ y $x \in E$, definimos los conjuntos

$$A_M(x) = \{\lambda y : y \in B(x, \frac{1}{M}), \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 2\} \quad \text{y}$$

$$U_M = \bigcup \{B(x, \frac{1}{M}) : ||x|| \leq M, ||f||_{A_M(x)} \leq M\}.$$

Para cada $x \in E$, al ser f continua y $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 2\}$ compacto, existe un abierto V tal que $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 2\} \subset V$ y $f|_V$ es acotada. Luego existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $||f||_{A_M(x)} \leq M$. Con lo cual se tiene que $E = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} U_M$. Afirmamos ahora que $f(U_M)$ es relativamente compacto. En efecto, si $y \in U_M$, con $y \in B(x, 1/M)$, entonces, por la desigualdad de Cauchy, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$||P_n f(0)(y)|| \leq 2^{-n} \sup_{|\xi|=2} ||f(\xi y)|| \leq 2^{-n} ||f||_{A_M(x)} \leq 2^{-n} M.$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$||f(y) - \sum_{n=0}^{k} P_n f(0)(y)|| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} ||P_n f(0)(y)|| \leq 2^{-k} M \leq \varepsilon,$$

luego $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)(y)$ converge uniformemente para $y \in U_M$. Por otra parte, como U_M es acotado, $\{\sum_{n=0}^{k} P_n f(0)(y) : y \in U_M\}$ es compacto. Al igual que en la Proposición 3.3.7, concluimos que $f(U_M)$ es relativamente compacto. Sea

$$K = \{0\} \cup \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\overline{f(U_M)}}{M \sup_{x \in U_M} ||f(x)||} \right\},$$

luego K es compacto y $f(E) \subset \text{Span } K$. Sea $L = \overline{\text{coe}\{K\}}$, la clausura de la cápsula convexa equilibrada de K. Faltaría ver que $f: E \to F_L$ es holomorfa. Sea $x \in E$, por la construcción, existe $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tal que $f(B(x, 2\varepsilon)) \subset ML$ y $f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n f(x)(a)$ converge uniformemente para $||a|| < 2\varepsilon$. De la misma forma que en la Proposición 3.3.7, $P_n f(x)(a) \in \overline{coe(ML)} = ML$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $a \in E, ||a|| < 2\varepsilon$. En particular, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $a \in E, ||a|| < \varepsilon$, se tiene

$$f(x+a) - \sum_{n=0}^{k} P_n f(x)(a) = 2^{-k} \sum_{n=k+1}^{\infty} P_n f(x)(2a) 2^{-n+k}.$$

Como L es absolutamente convexo, compacto y $0 \in L$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} P_n f(x)(2a) 2^{-n+k} \in ML$, por lo tanto

$$f(x+a) - \sum_{n=0}^{\infty} P_n f(x)(a) \in 2^{-k} ML$$

que es equivalente a decir

$$|||f(x+a) - \sum_{n=0}^{\infty} P_n f(x)(a)||| \leq 2^{-k} M$$

para todo $a \in B(0,\varepsilon)$, en donde $|||.|||$ es la norma de F_L. Por lo tanto $f: E \to F_L$ es holomorfa.

La implicación (b) $\Rightarrow$ (c) es clara por la definición de F_L. Para probar (c)$\Rightarrow$(a), como Span $\{\text{coe}(L)\}$ = Span L, podemos asumir que $f(E) \subset$ Span L para algún conjunto L absolutamente convexo y compacto. Luego $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(nL)$ y, por el Teorema de Baire, existe un abierto $V \subset E$ tal que $f(V) \subset nL$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la Proposición 3.3.7 se obtiene que f es compacta. $\square$

Observaciones

1. En el caso de ser E separable, para ver que existe un compacto $L \subset F$ tal que $f(E) \subset$ Span L, es suficiente que $f: E \to F$ sea sólo continua, compacta, es decir, podemos prescindir de la hipótesis de holomorfía. En efecto, para cada $x \in E$, sea V_x abierto, $x \in V_x$ tal que $\overline{f(V_x)}$ es compacto en F. Luego se tiene que $E = \bigcup_{x\in E} V_x$ y como E es separable, existe $\mathcal{V} = \{V_{x_n}\}_{n\in N}$ subcubrimiento numerable de E. Tomando $r_n = n\|f\|_{V_{x_n}}\}$, entonces $L = 0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n}\overline{f(V_{x_n})}$ es compacto. Por lo tanto, si $x \in E$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \in f(V_{x_n})$, luego $f(x) = r_n \frac{1}{r_n} f(x)$ y $\frac{1}{r_n} f(x) \in L$. Así se obtiene que $f(x) \in$ Span $\{L\}$ para todo $x \in E$.

2. Por lo general, no existe una buena descripción del compacto L de la Proposición 3.3.10. Para ver esto, consideremos la función $f: \mathbb{C} \to \ell_2$ dada por $f(z) = (z, \frac{z^2}{2!}, \frac{z^3}{3!}, \ldots)$. Afirmamos que f es holomorfa. En efecto, si $x' \in \ell_2'$, por el Teorema de Representación de Riesz, existe $x = (x_n)_{n\in\mathbb{B}} \in \ell_2$ tal que $x'(y) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in \ell_2$. Luego, la aplicación $x' \circ f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ queda definida por $x' \circ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{z^n}{n!}$ y resulta ser holomorfa. Luego, f es débil holomorfa y, por el Teorema 3.1.11, f resulta holomorfa. Si Δ es la bola unitaria en $\mathbb{C}$, $f(\Delta)$ es relativamente compacto, luego f es compacta. Pero si $z \notin \overline{\Delta}$, entonces $f(z) \notin$ Span $\{f(\overline{\Delta})\}$, ya que $\{f(z) \in \ell_2 : z \in \mathbb{C}, z \neq 0\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto para ningún compacto $L \subset \ell_2$ de la forma $L = \{f(z) \colon |z| \leq R\}$ es cierto que $f(\mathbb{C}) \subset$ Span L ya que, si $|\lambda| > R$, $f(\lambda)$ es linealmente independiente en L.

Veamos ahora una caracterización de las funciones holomorfas compactas en términos de su traspuesta. Recordamos que si $f \in \mathcal{H}(E;F)$, la aplicación lineal $f^*: \mathcal{H}(F) \to \mathcal{H}(E)$ definida por $f^*(g) = g \circ f$ es la traspuesta de f. La restricción de f^* a F' define un operador lineal inyectivo en $\mathcal{H}(E)$, que también lo denotaremos f^*. La siguiente proposición es el análogo holomorfo al Teorema de Schauder para operadores lineales compactos.

Proposición 3.3.11 *Sean E, F espacios de Banach y sea $f \in \mathcal{H}(E;F)$. Son equivalentes:*

(a) $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$.

(b) $f^*\colon (\mathcal{H}(F), \tau_0) \to (\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ *es continua.*

(c) $f^*\colon F'_c \to (\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ *es continua.*

(d) $f^*\colon F'_c \to (\mathcal{H}(E), \tau_0)$ *es compacta.*

(e) $f^*\colon F'_\beta \to (\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ *es compacta.*

(f) *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in E$, la aplicación $P_n f(x)^*\colon F'_\beta \to \mathcal{P}(^nE)_\beta$ es compacta.*

Demostración:

(a)⇒(b) Sea p una seminorma τ_ω continua en $\mathcal{H}(E)$ portada por $K \subset E$ compacto. Por la Proposición 3.3.10, podemos suponer que existe V entorno de E tal que $K \subset V$ y $L = \overline{f(V)} \subset F$ es compacto. Como p es portada por K, existe $C(V) > 0$ tal que

$$p(f^*(h)) = p(h \circ f) \leq C(V) \sup_{x \in V} ||h \circ f(x)|| = C(V) \sup_{y \in L} ||h(y)||$$

para todo $h \in \mathcal{H}(F)$. Luego f^* es continua.

(b)⇒(c) Esta implicación es clara ya que se restringe el operador de (b) a F' considerada con la topología τ_0, que resulta ser F'_c.

(c)⇒(e) Consideremos $B' = \{y' \in F'\colon ||y'|| \leq 1\} = B_F^\circ$. Como B' es equicontinuo, por el Teorema de Ascoli, es relativamente compacto en F'_c. Luego, por (c), $f^*(B')$ es compacto en $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$, obteniendo asi el resultado.

$(e) \Rightarrow (f)$ Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in E$, del Corolario 3.2.14, obtenemos que la aplicación $D_x^n\colon (\mathcal{H}(E), \tau_\omega) \to \mathcal{P}(^nE)_\beta$ dada por $D_x^n(g) = P_n g(x)$ es continua. Por lo tanto $P_n f(x)^* = D_x^n \circ f^*$ es compacta.

$(f) \Rightarrow (a)$ Por la Proposición 3.3.4 $P_n f(a)$ es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $a \in E$. Luego, por la Proposición 3.3.9, resulta que f es compacta.

$(a) \Rightarrow (d)$ Por la Proposición 3.3.10, si $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$, existe $L \subset F$ absolutamente convexo y compacto tal que $f(E) \subset \text{Span } L$. Más aún, de la demostración se tiene que para cada $x_0 \in E$ existe un entorno U de x_0 tal que $F(U) \subset nL$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Tomando el entorno de F'_c dado por L°, para todo $x \in U$ se tiene que $|f^*(y')(x)| = |y' \circ f(x)| \leq n$ para todo $y' \in L^\circ$. Por lo tanto, el conjunto $\{f^*(y') \colon y' \in L^\circ\}$ acotado sobre U y por tanto es localmente acotado. Por el Teorema de Ascoli, $\{f^*(y') \colon y' \in L^\circ\} \subset (\mathcal{H}(E), \tau_0)$ es relativamente compacto.

$(d) \Rightarrow (a)$ Por el Corolario 3.2.14, para todo $a \in E$ y $n \in \mathbb{N}$, la aplicación definida por $D_a^n \colon (\mathcal{H}(E;F), \tau_0) \to \mathcal{P}(^nE)_c$ es continua. Luego $D_a^n \circ f^* \colon F'_c \to \mathcal{P}(^nE)_c$ es compacta. Como $D_a^n \circ f^* = (P_n f(a))^*$, por la Proposición 3.3.4 $(P_n f(a))$ es compacto para todo $a \in E$ y $n \in \mathbb{N}$. El resultado se obtiene aplicando la Proposición 3.3.9

□

3.4. El ϵ-producto y el espacio de funciones holomorfas

En lo que sigue, estudiaremos bajo que hipótesis se cumple la igualdad topológica

$$F\epsilon(\mathcal{H}(U), \tau_0) = (\mathcal{H}(U;F), \tau_0), \tag{4}$$

donde U es un abierto de un espacio localmente convexo E y F es un espacio localmente convexo. Veremos también que, cuando E y F son espacios de Banach, se cumple

$$F\epsilon(\mathcal{H}(E), \tau_\omega) = (\mathcal{H}_K(E;F), \tau_\omega). \tag{5}$$

Estas igualdades las utilizaremos en la sección 4 para estudiar la propiedad de aproximación en $\mathcal{H}(E)$.

Empecemos por ver (4). Una de las hipótesis que necesitaremos es que el espacio localmente convexo F sea cuasicompleto.

Definición 3.4.1 *Un espacio localmente convexo E se dice cuasicompleto si todo subconjunto acotado y cerrado es completo.*

Es claro que todo espacio localmente convexo completo es cuasicompleto. La recíproca no es cierta ya que, si E es un espacio de Banach reflexivo, luego $(E, \sigma(E,E'))$ es cuasicompleto y no completo pues, si $(x_\alpha)_{x\in A}$ es una red $\sigma(E,E')$-acotada y $\sigma(E,E')$ de Cauchy, al ser $\sigma(E,E')$-acotada, luego es acotada en norma y, por lo tanto $x_\alpha \subset nB_E$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como E es reflexivo nB_E es $\sigma(E,E')$-compacta y, por lo tanto, existe subred $\sigma(E,E')$-convergente. Como x_α es $\sigma(E,E')$- de Cauchy y tiene una subred $\sigma(E,E')$-convergente, luego $(x_\alpha)_{x\in A}$ es $\sigma(E,E')$-convergente. Con esto vemos que $(E, \sigma(E,E'))$ es cuasicompleto. Es conocido que si E es un espacio de Banach entonces $(E, \sigma(E, E'))$ es completo si y sólo si la dimensión de E es finita.

Como observamos anteriormente, si E es un espacio localmente convexo y $K \subset E$ es precompacto, por lo general $\overline{\text{coe}\{K\}}$ no es compacto. Una hipótesis para que $\overline{\text{coe}\{K\}}$ sea compacto es que el espacio sea cuasicompleto.

Lema 3.4.2 *Sea E un espacio localmente convexo cuasicompleto y sea $K \subset E$ precompacto. Entonces $\overline{\text{coe}(K)}$ es absolutamente convexo y compacto.*

Demostración: Es claro que $\overline{\text{coe}(K)}$ es absolutamente convexo. Como K es precompacto, luego $\overline{\text{coe}(K)}$ es precompacto y acotado [18, Cap. 3]. Al ser E cuasicompleto, $\overline{\text{coe}(K)}$ es precompacto y completo, luego es compacto. $\square$

La siguiente proposición nos da un primer acercamiento a la igualdad buscada.

Proposición 3.4.3 *Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y sea F un espacio localmente convexo cuasicompleto. La aplicación $\theta\colon (\mathcal{H}(U; F), \tau_0) \to \mathcal{L}(F'_c; (\mathcal{H}(U), \tau_0))$ dada por $\theta(f) = f^*$ donde $f^*(y') = y' \circ f$ esta bien definida.*

Mas aún, $\theta\colon (\mathcal{H}(U; F), \tau_0) \to (\mathcal{H}(U), \tau_0)\epsilon F$ resulta una inmersión.

Demostración:

Es claro que θ es lineal. Por la Proposición 3.1.5, $\theta(f) = f^* \in L(F'; \mathcal{H}(U))$. Veamos que f^* es continua, es decir, $\theta(f) \in \mathcal{L}(F'_c; (\mathcal{H}(U), \tau_0))$.

Sea $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $K \subset E$ compacto y sea $W = \{g \in \mathcal{H}(U)\colon \|g\|_K \leq 1\}$ un entorno de $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$. Como f es continua, $f(K) \subset F$ es compacto. Si $L = \overline{coe(f(K))}$, por el Lema 3.4.2, al ser F cuasicompleto, L resulta absolutamente convexo y compacto y, por lo tanto, L° es un entorno de F'_c. Ahora, para cualquier $x \in K$, $y' \in L^\circ$, se cumple que $|f^*(y')(x)| = |\langle f(x), y' \rangle| \leq 1$. Así $f^*(y') \in W$, concluyendo que $f^*(L^\circ) \subset W$ y, por tanto, θ está bien definida. Para ver que θ es inyectiva tomemos $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(U; F)$ tal que $\theta(f_1) = \theta(f_2)$, entonces $y' \circ f_1(x) = y' \circ f_2(x)$ para todo $y' \in F'$ y para todo $x \in U$. Como F' separa puntos, luego $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in U$, es decir $f_1 = f_2$.

Veamos ahora que θ es inmersión. Sea $K \subset U$ compacto y β seminorma continua de F y consideremos $V = \{f \in \mathcal{H}(U; F)\colon \sup_{x \in K} \beta(f(x)) \leq 1\}$ un entonrno de $(\mathcal{H}(U; F), \tau_0)$. Si $f \in W$, aplicando la Proposición 1.2.16, se tiene que $\sup_{x \in K} \beta(f(x)) \leq 1$ si y sólo si $\sup_{x \in K} |\langle f(x), y' \rangle| = \sup_{x \in K} |\theta(f)(y')(x)| \leq 1$ para todo $|y'| \leq \beta$. Tomando α la seminorma en $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ dada por $\alpha(g) = \sup_{x \in K} |g(x)|$, resulta que $|\langle \theta(f)(y'), \varphi \rangle| \leq 1$ para todo $|y'| \leq \beta$ y para todo $\varphi \in (\mathcal{H}(U), \tau_0)'$ con $|\varphi| \leq \alpha$. Luego $\beta\epsilon\alpha(\theta(f)) \leq 1$. Concluimos que $\theta(V) = \{T \in (\mathcal{H}(U), \tau_0)\epsilon F\colon \beta\epsilon\alpha(T) \leq 1\} \cap \theta(\mathcal{H}(U; F))$, es decir, θ es inmersión. $\square$

En la proposición anterior, vimos que si F es cuasicompleto, entonces se tiene que $(\mathcal{H}(U;F),\tau_0) \subset (\mathcal{H}(U),\tau_0)\epsilon F$, donde la inclusión es una inmersión. En lo que sigue analizaremos que hipótesis son necesarias para obtener la otra inclusión.

Definición 3.4.4 *Un espacio topológico X es un κ-espacio cada vez que $A \cap K$ es abierto en K para cada $K \subset X$ compacto, entonces A es abierto con $A \subset X$.*

En particular, todo espacio metrizable en un κ-espacio.

Lema 3.4.5 *Sea X un κ-espacio y sea Y un espacio topológico. Una función $h\colon X \to Y$ es continua si y sólo si $h|_K\colon K \to Y$ es continua para cada conjunto $K \subset X$ compacto.*

Demostración:

Es claro que $h|_K$, la restricción de h a un subconjunto de X, es continua si $h\colon X \to Y$ lo es. Recíprocamente, si $V \subset Y$ es abierto, $h^{-1}(V) \cap K = h|_K^{-1}(V)$ es abierto para todo $K \subset X$ compacto. Como X es κ-espacio $h^{-1}(V)$ es abierto en X y h resulta continua. $\square$

El espacio dual de $\mathcal{H}(U)$ contiene naturalmente a los morfismos que resultan de evaluar en elementos de U. Es decir, fijo $x \in U$, la aplicación $f \longmapsto f(x)$ es una función lineal sobre $\mathcal{H}(U)$. La aplicación $\delta\colon U \to (\mathcal{H}(U))'$ definida por $\delta(x)(g) = g(x)$ será de mucha utilidad. En lo que sigue, estudiaremos su continuidad. Antes necesitaremos del siguiente lema cuya demostración puede encontrarse en [14, Cap. 2].

Lema 3.4.6 *Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y κ-espacio. Entonces $(\mathcal{H}(U;F),\tau_0)$ es completo.*

Proposición 3.4.7 *Sean E espacio localmente convexo, $U \subset E$ abierto y κ-espacio. Entonces $\delta \in \mathcal{H}(U;(\mathcal{H}(U),\tau_0)'_c)$.*

Demostración: Si $x, y \in U$ y $g \in \mathcal{H}(U)$, entonces

$$\delta(x+\lambda y)(g) = g(x+\lambda y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n g(x)(\lambda y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_n g(x)(y),$$

donde la convergencia es uniforme para λ en $\Delta(0,\varepsilon) \subset \mathbb{C}$ para algún $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, la aplicación $\lambda \longmapsto \delta(x+\lambda y)(g)$ es una función holomorfa en $\Delta(0,\varepsilon)$, es decir, δ es G-holomorfa (ver la Definición 3.1.8). Si vemos que δ es continua, por el Teorema 3.1.11 se tiene el resultado. Tomemos por $K \subset U$ compacto arbitrario y veamos que $\delta|_K$ es continua. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset K$ una red tal que x_α tiende a $x \in K$. Como U es κ-espacio por el Lema 3.4.6, $(\mathcal{H}(U),\tau_0)$ es completo. Luego, por el Ejemplo 1.2.10 (3) una base de entornos de $((\mathcal{H}(U),\tau_0))'$ viene dado por los conjuntos M° con $M \subset (\mathcal{H}(U),\tau_0)$ compacto. Tomamos entonces el entorno de $((\mathcal{H}(U),\tau_0))'$ dado por M° y, para $K \subset U$ compacto, sea $V = \{g \in \mathcal{H}(U) \colon \|g\|_K \leq 1\}$ un entorno de $(\mathcal{H}(U),\tau_0)$. Al ser M compacto, existen $g_1 \dots g_n \in \mathcal{H}(U)$ tal que $M \subset \bigcup_{j=1}^n g_j + \frac{1}{4}V$. Como g_j es continua para $j = 1,\dots,n$ y $x_\alpha \to x$, existe $\alpha_0 \in A$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$ entonces $|g(x_\alpha) - g(x)| \leq 1/2$ para todo $j = 1,\dots,n$. Obtenemos así que, si $g \in M$ entonces $g = g_j + h$ para algún $j = 1,\dots,n$ con $h \in \frac{1}{4}V$ y

$$\begin{aligned}|(\delta(x_\alpha) - \delta(x))g| = &\ |g_j(x_\alpha) - g_j(x) + h(x_\alpha) - h(x)| \\ \leq &\ |g_j(x_\alpha) - g_j(x)| + |h(x_\alpha)| + |g(x)| \\ \leq &\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = 1,\end{aligned}$$

para $\alpha > \alpha_0$. Concluimos que si $\alpha > \alpha_0$, entonces $\delta(x_\alpha) - \delta(x) \in M^\circ$, por lo tanto $\delta(x_\alpha) \to \delta(x)$ en $((\mathcal{H}(U),\tau_0))'$. Luego $\delta|_K$ es continua y, como $K \subset U$ es arbitrario, aplicando el Lema 3.4.5, δ es continua. Luego, por el Teorema 3.1.11, $\delta \colon U \to (\mathcal{H}(U))'$ es holomorfa. $\square$

En particular, la imagen de δ es densa, como veremos a continuación.

Proposición 3.4.8 *Sea E espacio localmente convexo y sea $U \subset E$ abierto. Entonces* $\overline{\operatorname{Span}\{\delta(U)\}} = (\mathcal{H}(U),\tau_0)'_c$, *donde* $\delta(U) = \{\delta(x) \colon x \in U\}$.

Demostración: Supongamos que existe $\psi \in (\mathcal{H}(U),\tau_0)'_c$ tal que $\psi \notin \overline{\operatorname{Span}\{\delta(U)\}}$. Como $\overline{\operatorname{Span}\{\delta(U)\}}$ es absolutamente convexo, por el Teorema de Hahn-Banach existe $\varphi \in ((\mathcal{H}(U),\tau_0)'_c)'$ tal que $\varphi(\psi) > 1$ y $\sup_{x\in U} \varphi(\delta(x)) \leq 1$. Como, de la Proposición 1.2.13, obtenemos que $((\mathcal{H}(U),\tau_0)'_c)' = \mathcal{H}(U)$, entonces existe $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que $\varphi(\psi) = \psi(f)$ y si $x \in U$ entonces $\varphi(\delta(x)) = \delta(x)(f) = f(x)$. Por otra parte, $\psi \in (\mathcal{H}(U),\tau_0)'$, luego existe $K \subset U$ compacto tal que $\psi(f) \leq \sup_{x\in K} |f(x)|$ y por lo tanto se obtiene que

$$1 < |\varphi(\psi)| = |\psi(f)| \leq \sup_{x\in K} |f(x)| \leq \sup_{x\in U} |f(x)| = \sup_{x\in U} |\varphi(\delta(x))| \leq 1,$$

llegando a una contradicción. $\square$

Proposición 3.4.9 *Sean E y F espacios localmente convexos y sea $U \subset E$ abierto y κ-espacio. Si $\delta \colon U \to (\mathcal{H}(U))'$ es la evaluación, entonces $\delta^* \colon \mathcal{L}((\mathcal{H}(U);\tau_0)'_c, F) \to \mathcal{H}(U;F)$, la aplicación dada por $\delta^*(T) = T \circ \delta$, está bien definida, es lineal e inyectiva. Más aún, $\delta^* \colon F\epsilon(\mathcal{H}(U),\tau_0) \to (\mathcal{H}(U;F),\tau_0)$ es una inmersión.*

Demostración: La buena definición de δ^* se deduce del Lema 3.4.7 y de la Proposición 3.1.5. Es claro que δ^* es lineal. Para ver la inyectividad de δ^*, tomemos $S, T \in \mathcal{L}((\mathcal{H}(U),\tau_0)'_c, F)$ tal que $\delta^*(T) = \delta^*(S)$. Luego $T \circ \delta(x) = S \circ \delta(x)$ para todo $x \in U$, de la Proposición 3.4.8 se deduce que el conjunto $\{\delta(x) \colon x \in U\} \subset (\mathcal{H}(U), \tau_0)'_c$ separa puntos, luego obtenemos que $T = S$. Para ver la continuidad, basta con ver que dado un entorno $V \subset (\mathcal{H}(U;F), \tau_0)$, existe W entorno de $F\epsilon(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ tal que $\delta^*(W) \subset V$. Sea β una seminorma continua de F, $K \subset U$ compacto y consideremos el conjunto $V = \{f \in \mathcal{H}(U;F) \colon \sup_{x\in K} \beta(f(x))\}$. Sea α la seminorma en $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ definida por $\alpha(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|$ y tomemos $W = \{T \in F\epsilon(\mathcal{H}(U), \tau_0) \colon \beta\epsilon\alpha(T) \leq 1\}$ entorno de $F\epsilon(\mathcal{H}(U), \tau_0)$.

Notemos que $|\delta(x)| \leq \alpha$, para todo $x \in K$. Por la Proposición 1.2.16, si $T \in W$, se tiene que

$$\sup_{x\in K} \beta(\delta^*(T)(x)) = \sup \Big\{ |\langle T \circ \delta(x), y' \rangle| \colon |y'| \leq \beta, x \in K \Big\} \leq \beta\epsilon\alpha(T) \leq 1,$$

con lo que obtenemos la continuidad de δ^*.

Restaría ver que es una inmersión. Sea β una seminorma continua de F y α una seminorma continua de $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ definida por $\alpha(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|$ con $K \subset U$ compacto. Si $W \subset F\epsilon(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ es el entorno definido por $W = \{T \in F\epsilon(\mathcal{H}(U), \tau_0) \colon \beta\epsilon\alpha(T) \leq 1\}$, sea V el entorno en $(\mathcal{H}(U;F), \tau_0)$ dado por $V = \{f \in \mathcal{H}(U;F) \colon \sup_{x\in K} \beta(f(x)) \leq 1\}$. Usando los mismos argumentos que en la Proposición 3.4.3, se tiene que $\delta^*(W) = V \cap \delta^*(F\epsilon(\mathcal{H}(U), \tau_0))$ con lo cual δ^* es inmersión como queríamos ver. $\square$

Ahora podemos enunciar la descomposición de $(\mathcal{H}(U;F), \tau_0)$ como el ϵ-producto de los espacios F y $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$: $F\epsilon(\mathcal{H}(U), \tau_0)$.

Corolario 3.4.10 *Sean E, F espacios localmente convexos y sea $U \subset E$ abierto. Si E es metrizable y F completo, entonces $F\epsilon(\mathcal{H}(U), \tau_0) \cong (\mathcal{H}(U;F), \tau_0)$.*

Demostración: Es una aplicación directa de las Proposiciones 3.4.3 y 3.4.9. $\square$

Un resultado análogo se obtiene para $\mathcal{P}(^nE, F)$.

Corolario 3.4.11 *Sean E, F espacios localmente convexos. Si E es metrizable y F completo, entonces $F\epsilon\mathcal{P}(^nE)_c \cong \mathcal{P}(^nE;F)_c$.*

En general, las fórmulas obtenidas anteriormente no son ciertas si consideramos a $\mathcal{H}(U)$ con alguna topología más fina que τ_0. Sin embargo, al considerar $\mathcal{H}_K(U)$ con la topolgía τ_ω se pueden obtener resultados análogos a los visto en esta parte. Las proposiciones que siguen las veremos cuando E es un espacio de Banach. Empecemos estudiando al espacio $\mathcal{P}(^nE;F)$.

Proposición 3.4.12 *Sean E y F espacios de Banach y $\theta \colon \mathcal{P}_K(^nE;F)_\beta \to \mathcal{L}(F'_c, \mathcal{P}(^nE)_\beta)$ la aplicación traspuesta, $\theta(P) = P^*$. Entonces θ es un isomorfismo algebraico. Más aún, θ establece un isomorfismo topológico entre $\mathcal{P}(^nE)_\beta\epsilon F$ y $\mathcal{P}_K(^nE;F)_\beta$.*

Demostración:

Por la Proposición 3.3.4, $\theta: \mathcal{P}_K(^nE;F)_\beta \to \mathcal{L}(F'_c, \mathcal{P}(^nE)_\beta)$ está bien definida. Es claro que es lineal y es inyectiva ya que si $P^* = Q^*$, luego $\langle P(x), y'\rangle = \langle Q(x), y'\rangle$ para todo $x \in E$, $y' \in F'$. Como F' separa puntos, se tiene que $P = Q$. Veamos ahora que es sobreyectiva. Si $T \in \mathcal{L}(F'_c, \mathcal{P}(^nE)_\beta)$, luego $T \in \mathcal{L}(F'_c, \mathcal{P}(^nE)_c)$. Por el Colorario 3.4.11, existe $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ tal que $P^* = T$ y como $T \in \mathcal{L}(F'_c, \mathcal{P}(^nE)_\beta)$, por la Proposición 3.3.4, se tiene que tal P es compacto. Como $\mathcal{P}(^nE)_\beta$ y F son espacios normados, luego, por la observación 6 al pie de la Definición 1.4.4, $\mathcal{P}(^nE)_\beta \epsilon F$ es normado y, por el Teorema de Hahn-Banach, se tiene

$$\begin{aligned}
||P^*||_{\mathcal{P}(^nE)_\beta\epsilon F} &= \sup\{|\langle P^*(y'), x'\rangle|: y' \in F', ||y'|| \leq 1, x' \in E', ||x'|| \leq 1\} \\
&= \sup\left\{||P^*(y')||_{\mathcal{P}(^nE)}: y' \in F', ||y'|| \leq 1\right\} \\
&= \sup\{|\langle P(x), y'\rangle|: y' \in F', ||y'|| \leq 1, x \in E\ ||x|| \leq 1\} \\
&= \sup\{||P(x)||: x \in E, ||x|| \leq 1\} \\
&= ||P||_{\mathcal{P}(^nE;F)},
\end{aligned}$$

con lo que se ve que θ es isomorfismo topológico. Más aún, es una isometría. □

Para funciones holomorfas se obtiene un resultado análogo.

Teorema 3.4.13 *Sean E y F espacios de Banach. Entonces $(H_K(E;F), \tau_\omega)$ es topológicamente isomorfo a $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)\epsilon F$.*

Demostración: Al igual que en la proposición anterior, el isomorfismo viene dado por la aplicación $f \longmapsto f^*$. Por la Proposición 3.3.11 está bien definida, es inyectiva y como τ_0 es más gruesa que τ_ω se tiene que si $T \in (\mathcal{H}(E), \tau_\omega)\epsilon F$ entonces $T \in (\mathcal{H}(E), \tau_0)\epsilon F$. Por la Proposición 3.4.10, $T = f^*$ para alguna $f \in \mathcal{H}(E;F)$. Aplicando la Proposición 3.3.11, se tiene que $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$, con lo que se ve la sobreyectividad.

Resta ver que el isomorfismo es topológico. Tomemos $a, x \in E$ y $f \in \mathcal{H}(E;F)$. Por el Teorema de Hahn-Banach $||P_nf(a)(x)|| = \sup\{|\langle P_nf(a)(x), y'\rangle|: y' \in F', ||y'|| \leq 1\}$ y, por la Proposición 3.1.5, $y' \circ f \in \mathcal{H}(E)$. Más aún, se tiene que $P_n(y' \circ f)(a) = y' \circ P_nf(a)$. Por lo tanto, si $K \subset E$ compacto y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, se tiene la igualdad

$$\begin{aligned}
&\sup\{||P_nf(0)(x_1 + a_nx_2)||: x_1 \in K, x_2 \in B_E\} = \\
&= \sup\{|P_n(y' \circ f)(0)(x_1 + a_nx_2)|: x_1 \in K, x_2 \in B_E,\ y' \in B_{F'}\} = \\
&= \sup\{|P_n(f^*y')(0)(x_1 + a_nx_2)|:\ x_1 \in K, x_2 \in B_E,\ y' \in B_{F'}\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Por el Teorema 3.2.17, la topología en $(\mathcal{H}(E;F), \tau_\omega)$ está dada por las seminormas de la forma

$$p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in K + a_nB_E} ||P_nf(0)(x)||,$$

por observación 3 hecha al pie de la Definición 1.4.4, las seminormas

$$p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|P_n(y' \circ f)(0)(x)|: x \in K + a_nB_E, ||y'|| \leq 1\}$$

determinan la topología de $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)\epsilon F$, por la igualdad 6 se obtiene el resultado. $\square$

4. Propiedad de aproximación holomorfa

El propósito de est Sección es estudiar la propiedad de aproximación en conexión con la clase de funciones holomorfas (compactas). Una manera de abordar este objetivo es vincular el espacio $\mathcal{H}(E)$ con las topologías vistas en el capítulo anterior y determinar bajo qué condiciones, el espacio tiene la propiedad deseada. Seguiremos la línea de trabajo desarrollada por R. Aron y M. Schottenloher en [4], artículo que origina este tema de estudio.

Veremos que es equivalente que $\mathcal{H}(E)$, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, tenga propiedad de aproximación a que el propio espacio E la tenga. Asimismo, mostraremos que el operador identidad se puede aproximar por operadores lineales de rango finito si y sólo si se puede aproximar por funciones holomorfas de rango finito. Esta relación propone estudiar los resultados *análogos holomorfos* a los vistos en el Capítulo 2. La noción de función holomorfa compacta, vista en el Capítulo 3, fue introducida para estudiar la propiedad de aproximación sobre $\mathcal{H}(E)$ si se consideran las topologías τ_∞, τ_ω y τ_δ.

Para E y F dos espacios localmente convexos, consideramos $f \in \mathcal{H}(E;F)$ de rango finito. Tomamos $\{y_1, \ldots, y_n\}$, una base de $f(E)$ y su base dual $\{y_1', \ldots, y_n'\}$. Al ser f de rango finito, existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funciones, $\varphi_j\colon E \to \mathbb{C}$, tales que $f(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) y_j$. Luego $y_j' \circ f = \varphi_j$ y, por la Proposición 3.1.5, $\varphi_j \in \mathcal{H}(E)$ para $j = 1, \ldots, n$. Es decir, si f es de rango finito, luego existen $y_1, \ldots, y_n \in F$ y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(E)$ tales que $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) y_j$. Por esta propiedad, notamos a las funciones holomorfas de E en F de rango finito como $\mathcal{H}(E) \otimes F$. De la misma forma, el conjunto de polinomios n-homogéneos de E en F de rango finito será notado por $\mathcal{P}(^nE) \otimes F$.

Definición: *Sea E un espacio de Banach. Decimos que E tiene la propiedad de aproximación holomorfa si la identidad puede ser aproximada por funciones holomorfas de rango finito sobre los conjuntos compactos de E. Es decir, dado $\varepsilon > 0$ y $K \subset E$ compacto, existe $f \in H(E) \otimes E$ tal que* $\sup_{x \in K} ||f(x) - x|| < \varepsilon$.

4.1. La propiedad de aproximación en $(\mathcal{H}(E), \tau_0)$

Consideremos E un espacio de Banach, $U \subset E$ un abierto y F un espacio localmente convexo. Si $f \in \mathcal{H}(U;F)$ luego f es continua y para $K \subset U$ compacto, la restricción de f a K, $f|_K$, es uniformemente continua. Es decir, dados $\varepsilon > 0$ y β una seminorma continua de F, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in K$ tales que $\|x - y\| < \delta$ se tiene $\beta(f(x) - f(y)) < \varepsilon$. El siguiente resultado muestra que esta acotación permanece válida si movemos y adecuadamente en un entorno de K.

Lema 4.1.1 *Sean E un espacio de Banach, $U \subset E$ abierto y $K \subset U$ compacto y sea F un espacio localmente convexo. Entonces dado $\varepsilon > 0$, β seminorma continua de F y $f \in \mathcal{H}(U; F)$, existe $\delta > 0$, $\delta \leq \operatorname{dist}(K, \mathcal{C}U)$, donde $\mathcal{C}U$ denota el complemento de U, tal que $\beta(f(x) - f(y)) < \varepsilon$ para todo $x \in K$, $||x - y|| < \delta$.*

Demostración: Sean $K \subset U$ compacto y $f \in \mathcal{H}(U; F)$. Para cada $x \in K$, existe $\delta_x > 0$, $\delta_x \leq \operatorname{dist}(K, \mathcal{C}U)$ tal que $\beta(f(x) - f(y)) < \varepsilon/2$ para todo $y \in B_{\delta_x}(x)$. Al ser K compacto, existen $x_1, \dots x_n \in K$ tales que $K \subset \cup_{i=1}^n B_{\delta_{x_i}}(x_i)$. Tomemos la función $\gamma: K \to \mathbb{R}$ definida por $\gamma(x) = \sup\{\delta_{x_i} - ||x - x_i||: i = 1, \dots, n\}$. Sea $\delta = \text{ínf}_{x \in K}\{\gamma(x)\}$. Para todo $x \in K$ e $y \in B_\delta(x)$ se cumple que

$$||x_i - y|| \leq ||x_i - x|| + ||x - y|| \leq ||x_i - x|| + \gamma(x) \leq ||x_i - x|| + \delta_{x_i} - ||x_i - x|| = \delta_{x_i}$$

para algún $i = 1, \dots, n$. Entonces $B_\delta(x) \subset B_{\delta_{x_i}}(x_i)$ y, por lo tanto,

$$\beta(f(x) - f(y)) \leq \beta(f(x) - f(x_i)) + \beta(f(x_i) - f(y)) \leq \varepsilon.$$

□

Veamos bajo qué condiciones el espacio $(H(E), \tau_0)$ tiene la propiedad de aproximación, para E un espacio de Banach. Los resultados de [4] se dan para $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ cuando U es un abierto finitamente Runge. Introducimos aquí la correspondiente definición.

Definición 4.1.2 *Sea E espacio de Banach y $U \subset E$ abierto. Se dice que U es Runge en E si $\mathcal{P}(E)$ es denso en $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$. Se dice que U es finitamente Runge en E si para cada subespacio $E_0 \subset E$ de dimensión finita, $U \cap E_0$ es Runge en E_0.*

Por ejemplo, un conjunto abierto y balanceado $U \subset E$ es Runge y finitamente Runge.

Cuando U_0 es un abierto de E_0, espacio de Banach de dimensión finita y F es un espacio localmente convexo completo, los espacios $\mathcal{H}(U_0) \otimes F$ y $\mathcal{H}(U_0; F)$ están estrechamente relacionados. De hecho se tiene que $\mathcal{H}(U_0) \otimes F$ es denso en $(H(U_0, F), \tau_0)$. Una demostración de este resultado no es inmediata y requiere de la definición de espacio localmente convexo nuclear. Además apela a topologías definidas sobre el producto tensorial de espacios localmente convexos, con lo cual omitimos la prueba. Este resultado se debe a Grothendieck, ver [10].

Teorema 4.1.3 *Sea E un espacio de Banach y sea $U \subset E$ un abierto no vacío finitamente Runge. Entonces son equivalentes:*

(a) *E tiene la propiedad de aproximación.*

(b) *E tiene la propiedad de aproximación holomorfa.*

(c) *$\mathcal{H}(U) \otimes F$ es denso en $(\mathcal{H}(U;F), \tau_0)$, para todo F espacio localmente convexo.*

(d) *$\mathcal{H}(V) \otimes E$ es denso en $(\mathcal{H}(V,E), \tau_0)$, para todo $V \subset F$ abierto no vacío y para todo F espacio localmente convexo.*

(e) *$(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración:

(b)$\Rightarrow$(c) Sean $f \in \mathcal{H}(U;F)$, $K \subset U$ compacto, β una seminorma continua de F y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $g \in \mathcal{H}(E) \otimes E$ tal que $||g(x) - x||_K \leq \delta$, donde $\delta > 0$ se obtiene por el Lema 4.1.1. Luego, $x \in K$, implica $g(x) \in K$ y se tiene que

$$\beta(f(x) - f \circ g(x)) < \varepsilon. \tag{7}$$

Llamemos $E_0 = \text{Span}\,\{g(E)\}$ y $U_0 = U \cap E_0$. Al ser E_0 de dimensión finita, por [10], $\mathcal{H}(U_0)$ es nuclear y $\mathcal{H}(U_0, \widehat{F}) = \overline{\mathcal{H}(U_0) \otimes \widehat{F}}$, donde $\widehat{F}$ es el completado de F y la clausura se toma según la topología τ_0. Luego, existe $f_1 \in \mathcal{H}(U_0, \widehat{F})$ tal que $\beta(f|_{U_0}(y) - f_1(y)) < \varepsilon$ para $y \in g(K)$. Por lo tanto, si $x \in K$ se tiene que

$$\beta(f \circ g(x) - f_1 \circ g(x)) < \varepsilon \tag{8}$$

Como $f_1 \in \mathcal{H}(U_0, \widehat{F})$, existen $\varphi_j \in \mathcal{H}(U_0)$ y $z_j \in \widehat{F}$ con $j = 1, \ldots, m$ tales que $f_1 = \sum_{j=1}^m \varphi_j \otimes z_j$. Al ser $\widehat{F}$ el completado de F, existen $\widetilde{z_j} \in F$ tales que, si llamamos $C_j = \sup_{x\in K}\{\varphi_j \circ g(x)\}$, tenemos $C_j\beta(\widetilde{z_j} - z_j) < \varepsilon/2m$ para todo $j = 1, \ldots m$. Por hipótesis, U_0 es Runge en E_0, entonces para cada φ_j, existe $\widetilde{\varphi_j} \in \mathcal{H}(E_0)$ tal que, si $D_j = \sup_{x\in K} |\varphi \circ g(x) - \widetilde{\varphi} \circ g(x)|$, se tiene $D_j\beta(\widetilde{z_j}) < \varepsilon/2m$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Si $f_2 = \sum_{j=1}^m \widetilde{\varphi_j} \otimes \widetilde{z_j}$ se tiene que $f_2 \in \mathcal{H}(E_0) \otimes F$ y, para $x \in K$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\beta(f_1 \circ g(x) - f_2 \circ g(x)) &= \beta(\sum_{j=1}^m \varphi_j \circ g(x) z_j - \sum_{j=1}^m \widetilde{\varphi_j} \circ g(x)\widetilde{z_j}) \\
\leq \beta(\sum_{j=1}^m \varphi_j \circ g(x) z_j - \sum_{j=1}^m \varphi_j \circ g(x)\widetilde{z_j}) &+ \beta(\sum_{j=1}^m \varphi_j \circ g(x)\widetilde{z_j} - \sum_{j=1}^m \widetilde{\varphi_j} \circ g(x)\widetilde{z_j}) \\
&\leq \sum_{j=1}^m C_j\beta(z_j - \widetilde{z_j}) + \sum_{j=1}^m D_j\beta(\widetilde{z_j}) \leq \varepsilon.
\end{aligned} \tag{9}$$

Tomando $h = f_2 \circ g|_U$, tenemos $h \in \mathcal{H}(U) \otimes F$ y para todo $x \in K$, por las desigualdades (7), (8) y (9), se tiene que

$$\beta(f(x) - h(x)) \leq \beta(f(x) - f \circ g(x)) + \beta(f \circ g(x) - f_1 \circ g(x)) + \beta(f_1 \circ g(x) - f_2 \circ g(x)) \leq 3\varepsilon.$$

(c)⇒(e) Como U es metrizable, aplicando la Proposición 3.4.9 obtenemos que, para todo espacio localmente convexo F, $(\mathcal{H}(U),\tau_0)\epsilon F \subset (\mathcal{H}(U;F),\tau_0)$. Por hipótesis, como $\mathcal{H}(U)\otimes F$ es denso en $(\mathcal{H}(U;F),\tau_0)$, se tiene que $\mathcal{H}(U)\otimes F$ es denso en $(\mathcal{H}(U))\epsilon F$ que, por la Proposición 2.2.2, es equivalente a que $(\mathcal{H}(U),\tau_0)$ tenga la propiedad de aproximación.

(e)⇒(a) Por la Proposición 3.2.13, $\mathcal{P}(^1E)_c = E'_c$ es subespacio complementado de $(H(U),\tau_0)$. Luego, por la Proposición 2.1.9, E'_c tiene la propiedad de aproximación y, por el Corolario 2.2.4, E tiene la propiedad de aproximación.

(e)⇒(d) Sea F un espacio localmente convexo y $V \subset F$ un abierto no vacío. Como E es completo, por la Proposición 3.4.3 se tiene que $(\mathcal{H}(V;E),\tau_0) \subset (\mathcal{H}(V)\tau_0)\epsilon E$. Como E tiene la propiedad de aproximación, por la Proposición 2.2.2, $(\mathcal{H}(V),\tau_0)\otimes E$ es denso en $(\mathcal{H}(V),\tau_0)\epsilon E$. Luego $\mathcal{H}(V)\otimes E$ es denso en $(\mathcal{H}(V;E),\tau_0)$.

(d)⇒(b) Tomemos $V = F = E$, como $Id_E \in \mathcal{H}(E;E)$, dado $\varepsilon > 0$ y $K \subset E$ compacto, existe $f \in H(E)\otimes E$ tal que $\sup_{x\in K} ||f(x) - Id_E(x)|| < \varepsilon$, con lo que se tiene el resultado.

□

Observación La equivalencia entre (a) y (b) muestra que es lo mismo aproximar la identidad sobre un conjunto compacto por operadores lineales de rango finito que aproximarla por funciones holomorfas de rango finito. En particular, las equivalencias entre (b), (c) y (d) dan un resultado análogo (holomorfo) a la Proposición 2.1.2.

En la Proposición 3.2.13 obtuvimos que $\mathcal{P}(^nE)_c$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{H}(E),\tau_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la Proposición 2.1.9 obtenemos que si $(\mathcal{H}(E),\tau_0)$ tiene la propiedad de aproximación, entonces $\mathcal{P}(^nE)_c$ la tiene para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular cuando $n = 1$ tenemos que $\mathcal{P}(^1E)_c = E'_c$ tiene la propiedad de aproximación. De la Proposición 2.2.4, junto al Teorema 4.1.3, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.1.4 *Sea E espacio de Banach, entonces son equivalentes*:

1. *E tiene la propiedad de aproximación.*

2. *$(\mathcal{H}(E),\tau_0)$ tiene la propiedad de aproximación.*

3. *$\mathcal{P}(^nE)_c$ tiene la propiedad de aproximación para todo $n \in \mathbb{N}$*

4.2. La propiedad de aproximación en $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$

Al igual que en el caso lineal, que un espacio de Banach E tenga la propiedad de aproximación holomorfa (que, por el Teorema 4.1.3, es equivalente a que tenga la propiedad de aproximación) esta íntimamente ligado a la relación que hay entre funciones holomorfas de rango finito y funciones holomorfas compactas. Empecemos viendo esto en $\mathcal{P}(^nE)$.

Proposición 4.2.1 *Sea E un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{P}(^nE)_\beta$ tiene la propiedad de aproximación si y sólo si $\mathcal{P}(^nE) \otimes F$ es denso en $\mathcal{P}_K(^nE; F)_\beta$ para todo espacio de Banach F.*

Demostración: De la Proposición 3.4.12 se tiene que $\mathcal{P}(^nE)_\beta \epsilon F = \mathcal{P}_K(^nE; F)_\beta$. Aplicando la Proposición 2.2.2 se obtiene el resultado. □

En la Proposición 2.1.7 vimos la equivalencia: E tiene la propiedad de aproximación si y sólo si los operadores lineales compactos con rango en E son aproximables por operadores de rango finito. La siguiente proposición muestra el análogo (holomorfo) a este resultado.

Proposición 4.2.2 *Sea E un espacio de Banach. Entonces, E tiene la propiedad de aproximación si y sólo si $\mathcal{H}(F) \otimes E$ es denso en $(\mathcal{H}_K(F, E), \tau_\omega)$ para todo espacio de Banach F.*

Demostración: Si E tiene la propiedad de aproximación, en particular, por la Proposición 2.2.2, $E \otimes (\mathcal{H}(F), \tau_\omega)$ es denso en $E\epsilon(\mathcal{H}(F), \tau_\omega)$ y, aplicando el Teorema 3.4.13 se tiene que $\mathcal{H}(F) \otimes E$ es denso en $(\mathcal{H}_K(F; E), \tau_\omega)$. Recíprocamente, sea F un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{K}(F; E)$. Tomemos la seminorma p en $\mathcal{H}_K(E; F)$ definida por $p(f) = ||P_1 f(0)||$ y veamos que es K-portada. Si $K \subset E$ es un compacto tal que $0 \in K$ y V es un abierto que contiene a K, en particular $0 \in V$ y, por lo tanto, existe $d > 0$ tal que $dB_E \subset V$. Luego, para toda $f \in \mathcal{H}_K(E; F)$ se tiene que $p(f) = ||P_1 f(0)|| = \frac{1}{d}||P_1 f(0)||_{dB_E} \leq \frac{1}{d}||P_1 f(0)||_V$. Con esto tenemos que p es $\mathcal{K}$-portada y, por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(F)$ y $x_1, \ldots, x_n \in E$ tales que

$$p(T - \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i) = \sup_{||x|| \leq 1} \{||T(x) - \sum_{i=1}^{n} P_1 f_i(0)(x) x_i||\}.$$

Como $\sum_{i=1}^{n} P_1 f_i(0) \otimes x_i \in F' \otimes E$, entonces $F' \otimes E$ es denso en $\mathcal{K}(F, E)$. Luego, por la Proposición 2.1.7, E tiene la propiedad de aproximación. □

En la Proposición 2.1.8 vimos que para intercambiar los roles de E y F en la Proposición 2.1.7 se necesita una hipótesis más fuerte. Sucede lo mismo si queremos intercambiar los roles de E y F en la Proposición 4.2.2, como se ve en el siguiente resultado.

Proposición 4.2.3 *Sea E un espacio de Banach. Entonces, $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ tiene la propiedad de aproximación si y sólo si $\mathcal{H}(E) \otimes F$ es denso en $(\mathcal{H}_K(E; F), \tau_\omega)$ para todo espacio de Banach F.*

Demostración: Por la Proposición 3.4.13, para todo espacio de Banach F, los espacios $(H_K(E; F), \tau_\omega)$ y $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)\epsilon F$ son topológicamente isomorfos. Luego, aplicando la Proposición 2.2.2, se tiene que $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ tiene la propiedad de aproximación si y sólo si $\mathcal{H}(E) \otimes F$ es denso en $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)\epsilon F = (\mathcal{H}_K(E; F), \tau_\omega)$, para todo espacio de Banach F.
□

Si E es un espacio de Banach, de las Proposiciones 3.2.13 y 3.2.12 se obtiene que $\mathcal{P}(^nE)_\beta$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{H}(E), \tau)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde τ es cualquiera de las topologías τ_∞, τ_ω, o τ_δ. Aplicando la Proposición 2.1.9, si $(\mathcal{H}(E), \tau)$ tiene la propiedad de aproximación, entonces $\mathcal{P}(^nE)_\beta$ tiene la propiedad de aproximación para todo $n \in \mathbb{N}$. La recíproca es también cierta como se verá en el Teorema 4.2.5. Además, este teorema mostrará que es equivalente que $\mathcal{H}(E)$ tenga la propiedad de aproximación con una de estas topologías a que la tenga con cualquiera de las otras dos. Antes necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.2.4 *Sea E un espacio de Banach, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(E)$ un conjunto y sea τ alguna de las topologías τ_∞, τ_ω o τ_δ. Entonces dado $\varepsilon > 0$ y p una seminorma τ-continua, si $\mathcal{F}$ es τ-compacto, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)) < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(E)$ τ compacto y p una seminorma τ continua. Por las características propias de cada una de las topologías τ_∞, τ_ω y τ_δ, haremos una demostración en cada caso.

Para τ_∞: De la Definición 3.2.6, basta con mostrar el resultado para las seminormas p definidas por $p(f) = \sup\{||P_j f(x)(a)||: x \in K, a \in E, ||a|| \leq 1\}$ donde $K \subset E$ es compacto y $j \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{F} \subset (\mathcal{H}(E), \tau_\infty)$ compacto y $\varepsilon > 0$. Afirmamos que existe $r > 0$, $C > 0$ tal que, si $a \in E$, $||a|| \leq 1$, $\sup\{|f(2x + 2ra)|: f \in \mathcal{K}, x \in K\} \leq C$. En efecto, al ser $\mathcal{F}$ compacto, por la Proposición 3.2.25, $\mathcal{F}$ es localmente acotado, entonces, para cada $x \in \frac{1}{2}K$, existen $\delta_x > 0$ y $C_x > 0$ tal que $\sup_{f \in \mathcal{F}} ||f||_{B_{\delta_x}(x)} \leq C_x$. Al ser $\frac{1}{2}K$ compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in \frac{1}{2}K$ tal que $\frac{1}{2}K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{\frac{\delta_{x_j}}{2}}(x_j)$. Luego, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\}$, si $x \in \frac{1}{2}K$, $B_{\frac{\delta}{2}}(x) \subset B_{\delta_{x_j}}(x_j)$ para algún $j = 1, \ldots, n$ y, si $C = \text{máx}\{C_{x_1}, \ldots, C_{x_n}\}$, se tiene que $\sup\{||f||_{B_{\frac{\delta}{2}}(x)}: f \in \mathcal{F}\} \leq C$. La afirmación se obtiene tomando $r = \delta/4$. Si $x \in K$ y $||a|| \leq 1$, para todo $M \in \mathbb{N}$, aplicando la desigualdad de Cauchy se tiene para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} ||P_j\left(\sum_{n=M+1}^{\infty} P_n f(0)\right)(x)(a)|| &= r^{-j}||P_j\left(\sum_{n=M+1}^{\infty} P_n f(0)\right)(x)(ra)|| \\ &\leq r^{-j}||\sum_{n=M+1}^{\infty} P_n f(0)(x+ra)|| \\ &\leq r^{-j}||\sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n} P_n f(0)(2x+2ra)|| \\ &\leq r^{-j}\sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n}||f(2x+2ra)|| \\ &\leq r^{-j}\sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n} C. \end{aligned}$$

Luego, tomando supremo sobre K y sobre B_E, para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)) \leq r^{-j} \sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n} C.$$

Tomando un M adecuado se obtiene el resultado.

Para τ_ω: Podemos suponer que p es una seminorma portada por el conjunto K, donde $K \subset E$ es compacto. Como $\mathcal{F}$ es compacto para la topología τ_ω, es equicontinuo. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\sup\{||f(x)||: x \in K_{2\delta},\ f \in \mathcal{F}\} = C < \infty$, donde $K_r = \{x \in E: \mathrm{dist}(x, K) < r\}$. Tomando $r > 1$ tal que $rK_\delta \subset K_{2\delta}$, para toda $f \in \mathcal{F}$ y $M \in \mathbb{N}$, por la desigualdad de Cauchy se tiene

$$\begin{aligned} p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)) &\leq c(K_\delta)||\sum_{n=M+1}^{\infty} P_n f(0)||_{K_\delta} \\ &\leq C(K_\delta)\sum_{n=M+1}^{\infty} r^{-n}||P_n f(0)||_{rK_\delta} \\ &\leq C(K_\delta)\sum_{n=M+1}^{\infty} r^{-n}||f||_{rK_\delta} \\ &\leq C(K_\delta) C \sum_{n=M+1}^{\infty} r^{-n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando un M adecuado, se obtiene que $p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)) \leq \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Para τ_δ: Al ser $\mathcal{F}$ compacto, por la Proposición 3.2.25, $\mathcal{F}$ es localmente acotado y por lo tanto, si $W_n = \{x \in E: |f(x)| < n,\ \forall f \in \mathcal{F}\}$, para $r > 1$, $(int(r^{-1}W_n))_{n>n_0}$ es un cubrimiento por abiertos creciente de E para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Luego, para para toda

$f \in \mathcal{F}$ y $M \in \mathbb{N}$, usando la desigualdad de Cauchy, se obtiene

$$\begin{aligned} p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)) &\le C(r^{-1}W_{n_1}) || \sum_{n=M+1}^{\infty} P_n f(0) ||_{r^{-1}W_{n_1}} \\ &\le C(r^{-1}W_{n_1}) \sum_{n=M+1}^{\infty} r^{-n} ||P_n f(0)||_{W_{n_1}} \\ &\le C(r^{-1}W_{n_1}) \sum_{n=M+1}^{\infty} r^{-n} ||f||_{W_{n_1}} \\ &\le C(r^{-1}W_{n_1}) n_1 \sum_{n=M+1}^{\infty} r^{-n} \end{aligned}$$

para algún $n_1 \in \mathbb{N}$ y $C(r^{-1}W_{n_1}) > 0$. Por lo tanto, tomando un M adecuado, se obtiene que $p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)) \le \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

□

Teorema 4.2.5 *Sea E espacio de Banach. Son equivalentes*

(a) $\mathcal{P}(^n E)_\beta$ *tiene la propiedad de aproximación para todo* $n \in \mathbb{N}$

(b) $(\mathcal{H}(E), \tau)$ *tiene la propiedad de aproximación para* $\tau = \tau_\infty, \tau_\omega$ o τ_δ

(c) $\mathcal{H}(E) \otimes F$ *es denso en* $(\mathcal{H}_K(E; F), \tau)$ *para todo espacio de Banach* F *y para* $\tau = \tau_\infty, \tau_\omega \text{o} \tau_\delta$.

Demostración:

(b)$\Rightarrow$ (a) Se debe a que $\mathcal{P}(^n E)_\beta$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{H}(E), \tau)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\tau = \tau_\infty, \tau_\omega,$ o τ_δ.

(a)$\Rightarrow$ (b) Sea $\mathcal{F} \subset (\mathcal{H}(E), \tau)$ compacto, $\varepsilon > 0$ y p una seminorma τ-continua para $\tau = \tau_\infty, \tau_\omega$ o τ_δ y sea $\varepsilon > 0$. Por el lema anterior, existe $M > 0$ tal que $p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)) < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Por las Proposiciones 3.2.12 y 3.2.13, el operador definido por $D_0^n \colon (H(E), \tau) \to \mathcal{P}(^n E)_\beta$ es continuo, con lo que tenemos que la imagen por D_0^n de $\mathcal{F}$, $D_0^n(\mathcal{F}) = \{P_n f(0) \colon f \in \mathcal{K}\} \subset P(^n E)_\beta$, es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\mathcal{P}(^n E)_\beta$ tiene la propiedad de aproximación para todo $n \in \mathbb{N}$, para cada $n = 0, 1, \ldots, M$, existe un operador lineal de rango finito $T_n \colon \mathcal{P}(^n E)_\beta \to \mathcal{P}(^n E)_\beta$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $p(T_n(P_n f(0)) - P_n f(0)) < \varepsilon/(M+1)$. El operador $T \colon \mathcal{H}(E) \to \mathcal{H}(E)$ definido por $T(f) = \sum_{n=0}^{M} T_n(P_n f(0))$ es de rango finito, τ continuo y, para toda $f \in \mathcal{K}$ se tiene que

$$\begin{aligned} p(T(f) - f) \le &\ p(T(f) - \textstyle\sum_{n=0}^{M} P_n f(0)) + p(\sum_{n=0}^{M} P_n f(0) - f) \\ \le &\ \textstyle\sum_{n=0}^{M} p(T_n(P_n f(0)) - P_n f(0)) + p(\sum_{n=0}^{M} P_n f(0) - f) \\ \le &\ 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Al ser p y $\mathcal{F}$ arbitrarios, se tiene el resultado.

(a) $\Rightarrow$ (c) Sea p seminorma τ continua en $\mathcal{H}(E;F)$, $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$ y $\varepsilon > 0$. Por el lema anterior, $p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)) < \varepsilon$ para algún $M \in \mathbb{N}$. Al ser f compacta, por el Corolario 3.3.9, $P_n f(0) \in \mathcal{P}_K(^n E;F)$ y, por la Proposición 4.2.1, para cada $n = 0, 1, \ldots, M$ existe $Q_n \in \mathcal{P}(^n E) \otimes F$ tal que $P(Q_n - P_n f(0)) < \frac{\varepsilon}{M+1}$. Por lo tanto, $\sum_{n=0}^{M} Q_n \in \mathcal{H}(E) \otimes F$ y se tiene que

$$p(f - \sum_{n=0}^{M} Q_n) < p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n f(0)) + p(\sum_{n=0}^{M} P_n f(0) - \sum_{n=0}^{M} Q_n f(0)) < 2\varepsilon.$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $P \in \mathcal{P}_K(^n E;F)$ para algún espacio de Banach F. Sea $\varepsilon > 0$ y sea p la seminorma en $\mathcal{H}(E;F)$ definida por $p(f) = ||P_n f(0)||$. Esta seminorma es τ-continua para $\tau = \tau_\infty, \tau_\omega$ o τ_δ. Por hipótesis, como $\mathcal{P}_K(^n E;F) \subset \mathcal{H}_K(E;F)$, existe $f \in \mathcal{H}(E) \otimes F$ tal que $p(P - f) = ||P - P_n f(0)|| \leq \varepsilon$ y $P_n f(0) \in \mathcal{P}(^n E) \otimes F$. Luego, $P(^n E) \otimes F$ es denso en $P_K(^n E;F)_\beta$ que, por la Proposición 3.4.12 es topológicamente isomorfo a $\mathcal{P}(^n E)_\beta \epsilon F$. Aplicando la Proposición 2.2.2 se obtiene el resultado.

$\square$

El siguiente corolario muestra como se relacionan τ_0 y τ_ω con respecto a la propiedad de aproximación.

Corolario 4.2.6 *Sea E espacio de Banach. Si $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ tiene la propiedad de aproximación, entonces $(\mathcal{H}(E), \tau_0)$ tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración: Supongamos que $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ tiene la propiedad de aproximación, entonces por la proposición anterior $E' = \mathcal{P}(^1 E)_\beta$ tiene la propiedad de aproximación. Esto implica que E tiene la propiedad de aproximación que, por el Teorema 4.1.3 es equivalente a que $(\mathcal{H}(E), \tau_0)$ tenga la propiedad de aproximación. $\square$

Observación Cabe señalar, sin embargo que $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ y $(\mathcal{H}(E), \tau_0)$ no siempre comparten la propiedad de aproximación. Como mencionamos anteriormente, en [13, Teorema 1.e.7] se muestra la existencia de un espacio de Banach E con la propiedad de aproximación tal que E' no la tiene. Para este espacio $(\mathcal{H}(E), \tau_0)$ tiene la propiedad de aproximación, pero $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ no.

4.3. La propiedad de aproximación en $(\mathcal{H}(\ell_1), \tau_\omega)$ y en $(\mathcal{H}(\ell_2), \tau_\omega)$

En el Teorema 4.2.5 vimos que si E es un espacio de Banach, $\mathcal{H}(E)$ tiene la propiedad de aproximación para alguna de las topologías τ_∞, τ_ω o τ_δ si y sólo si $\mathcal{P}(^n E)_\beta$ tiene la propiedad de aproximación para todo $n \in \mathbb{N}$. Usaremos este resultado para mostrar que

$(\mathcal{H}(\ell_1), \tau_\omega)$ tiene la propiedad de aproximación (y por lo tanto $(\mathcal{H}(\ell_1), \tau_\infty)$ y $(\mathcal{H}(\ell_1), \tau_\delta)$ también). Por el contrario, mostraremos que $(\mathcal{H}(\ell_2), \tau_\omega)$ no tiene dicha propiedad.

Empecemos viendo que, para cualquier espacio de Banach E, $\mathcal{P}(^nE)$ es topologicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{L}(^nE)$.

Proposición 4.3.1 *Sea E un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{P}(^nE)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{L}(^nE)$.*

Demostración: En la Proposición 3.2.4 vimos que $\mathcal{P}(^nE)$ es isomorfo a $\mathcal{L}^s(^nE)$. Para ver que $\mathcal{L}^s(^nE)$ es un subespacio complementado de $\mathcal{L}(^nE)$, consideremos el operador de simetrización $s : \mathcal{L}(^nE) \to \mathcal{L}^s(^nE)$ definido por

$$s(\Phi)(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

donde $\mathcal{S}_n$ es el conjunto de las permutaciones de n elementos. Es claro que s es un proyector continuo y que $s(\Phi) = \Phi$ para Φ simétrica, con lo que se tiene el resultado. $\square$

La siguiente proposición nos muestra que $\mathcal{L}(^n\ell_1)$ con la topología de la norma es isométricamente isomorfo a ℓ_∞. Usando este resultado, sumado a la Proposición 4.3.1 obtendremos que $(\mathcal{H}(\ell_1), \tau_\omega)$ tiene la propiedad de aproximación.

Proposición 4.3.2 *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(^n\ell_1)$ es isométricamente isomorfo a ℓ_∞. Por lo tanto, $\mathcal{L}(^n\ell_1)$ tiene la propiedad de aproximación. En particular $\mathcal{P}(^n\ell_1)$ tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración: Sea $\Phi \in \mathcal{L}(^n\ell_1)$. Si $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \ell_1$, $x^m = \sum_{k=1}^\infty x_k^m e_k$, en donde $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de ℓ_1. Se tiene

$$\Phi(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{j_1 \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{j_n \in \mathbb{N}} \Phi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) x_{j_1}^1 \ldots x_{j_n}^n. \tag{10}$$

Llamemos $\alpha_{\mathbf{j}} = \Phi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$ donde $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$. Luego

$$|\alpha_{\mathbf{j}}| = |\Phi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})| \leq ||\Phi||$$

y, por lo tanto, $(\alpha_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n} \in \ell_\infty(\mathbb{N}^n)$. Mas aún, de (10) se tiene que

$$\begin{aligned} |\Phi(x^1, \ldots, x^n)| \leq & \sup_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n} \{|\alpha_{\mathbf{j}}|\} \sum_{j_1 \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{j_n \in \mathbb{N}} |x_{j_1}^1 \ldots x_{j_n}^n| = \\ = & \sup_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n} |\alpha_{\mathbf{j}}| ||x^1|| \ldots ||x^n||. \end{aligned}$$

Así, $||\Phi|| \leq \sup_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n} |\alpha_{\mathbf{j}}|$, obteniendo que $||\Phi|| = \sup_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n} |\alpha_{\mathbf{j}}|$.

Recíprocamente, cada $(\alpha_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n} \in \ell_\infty(\mathbb{N}^n)$ define una función n-lineal $\Phi \in \mathcal{L}(^n\ell_1)$ como en (10). Luego $\mathcal{L}(^n\ell_1)$ es isométricamente isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N}^n)$, y como $\ell_\infty(\mathbb{N}^n)$ es isométricamente isomorfo a ℓ_∞, se tiene el primer resultado.

Como, por la Proposición 4.3.1, $\mathcal{P}(^n\ell_1)$ es un subespacio complementado de $\mathcal{L}(^n\ell_1)$, $\mathcal{P}(^n\ell_1)$ tiene la propiedad de aproximación para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 4.3.3 *El espacio $(\mathcal{H}(\ell_1), \tau_\omega)$ tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración: De la proposición anterior, $\mathcal{P}(^n\ell_1)$ tiene la propiedad de aproximación para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Teorema 4.2.5 se tiene el resultado. $\square$

En el teorema anterior, el rol que juega el espacio ℓ_1 es crucial. Veremos que hay espacios para los que $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ no tiene propiedad de aproximación. R. Aron y M. Schottenloher construyen en [4] un espacio de Banach E tal que $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ no tiene la propiedad de aproximación. Gracias a los trabajos de J. C. Diaz y S. Dineen de 1998 y el de A. Szankowski en 1981 podremos mostrar que la misma situación se tiene para $E = \ell_2$.

Teorema 4.3.4 *El espacio $(\mathcal{H}(\ell_2), \tau_\omega)$ no tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración: Por el Teorema 4.2.5, basta ver que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{P}(^n\ell_2)$ no tiene la propiedad de aproximación. Más aún, para $n = 2$, se tiene que $\mathcal{P}(^2\ell_2)$ no tiene la propiedad de aproximación. En efecto, de [7, Proposición 1] se tiene el isomorfismo

$$\mathcal{L}(^2\ell_2) \cong \mathcal{L}^s(^2\ell_2)$$

ya que ℓ_2 es estable, es decir $\ell_2 \cong \ell_2 \times \ell_2$. Luego, como la Proposición 4.3.1 asegura que $\mathcal{P}(^2\ell_2) \cong \mathcal{L}^s(^2\ell_2)$, tenemos que si $\mathcal{P}(^2\ell_2)$ tiene la propiedad de aproximación entonces $\mathcal{L}(^2\ell_2)$ tiene la propiedad de aproximación. Esto contradice el resultado de A. Szankowski en [19] que asegura que $\mathcal{L}(H, H)$ no tiene la propiedad de aproximación para cualquier H espacio de Hilbert. Como $\mathcal{L}(H, H) \cong \mathcal{L}(^2H)$, para H Hilbert, se sigue el resultado. $\square$

Más aún, el hecho que $\mathcal{P}(^2\ell_2)$ carece de la propiedad de aproximación, nos permite, mediante la siguiente proposición, mostrar que $\mathcal{P}(^n\ell_2)$ no tiene la propiedad de aproximación para $n \geq 2$.

Proposición 4.3.5 *Sea E un espacio de Banach y sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Entonces $\mathcal{P}(^mE)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^nE)$.*

Demostración:

Es suficiente ver el caso $n = m+1$. Sean $y \in E$ e $y' \in E'$ tales que $y'(y) = 1 = \|y'\|$. Sea $\rho\colon \mathcal{P}(^mE) \to \mathcal{P}(^{m+1}E)$ la aplicación definida por $\rho(Q)(x) = y(x)Q(x)$ para $Q \in \mathcal{P}(^mE)$

y $x \in E$. Se tiene que ρ es lineal, inyectivo y que $\|\rho(Q)\| \leq \|y\|\|Q\| = \|Q\|$. Entonces $\|\rho\| \leq 1$. Como $\rho(y^m) = y^{m+1}$ y $\|y^{m+1}\| = 1$, luego $\|\rho\| = 1$. Sea $\pi\colon \mathcal{P}(^{m+1}E) \to \mathcal{P}(^{m+1}E)$ definido por $\pi(P)(x) = P(x) - P(x - y'(x)y)$ para $P \in \mathcal{P}(^{m+1}E)$ y $x \in E$. Se tiene que π es lineal. Llamemos $\alpha\colon E \to E$ al operador $\alpha(x) = x - y'(x)y$. α es lineal y como $\|\alpha\| \leq 1 + \|y'\|\|y\| = 1 + \|y\|$, luego $\|\pi(P)\| = \|P - P \circ \alpha\| \leq \|P\| + \|P\|\|\alpha\|^m$, con lo que se tiene que π es continuo. Además $\alpha^2 = \alpha$. En efecto, como $y'(y) = 1$, se tiene que $y'(\alpha(x)) = y'(x) - y'(x) = 0$, luego $\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = \alpha(x) - y'(\alpha(x))y = \alpha(x)$. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \pi^2(P) = &\ \pi(P - P \circ \alpha) \\ = &\ P - P \circ \alpha - (P \circ \alpha - P \circ \alpha^2) \\ = &\ P - P \circ \alpha \\ = &\ \pi(P). \end{aligned}$$

Así, π es un proyector. Veamos que la imagen de π es igual a la imagen de ρ. Si $Q \in \mathcal{P}(^mE)$, luego $\pi(y'Q) = y'Q - (y' \circ \alpha)\ \ (Q \circ \alpha) = y'Q$. Por lo tanto, tenemos que la imágen de ρ está incluida en la imagen de π. Recíprocamente, si $P \in \mathcal{P}(^{m+1}E)$ y $P = \widehat{\Phi}$, obtenemos que

$$P(x) - P \circ \alpha(x) = y'(x) \left(\sum_{j=1}^{m+1} \frac{(m+1)!}{j!(m+1-j)!} (-1)^{j+1} y'(x)^{j-1} \Phi(y^j, x^{m+1-j}) \right).$$

Tomando $Q = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(m+1)!}{j!(m+1-j)!}(-1)^{j+1}y'(x)^{j-1}\Phi(y^j, x^{m+1-j})$ resulta que $Q \in \mathcal{P}(^mE)$ y $\rho(Q) = \pi(P)$. Al ser P arbitrario se tiene que la imágenes de ρ y π coinciden.

Como $\mathcal{P}(^mE)$ es topológicamente isomorfo a $\rho(\mathcal{P}(^mE))$ y $\rho(\mathcal{P}(^mE)) = \pi(\mathcal{P}(^{m+1}E))$, al ser π un proyector se tiene el resultado. $\square$

Teorema 4.3.6 *$(\mathcal{H}(\ell_2), \tau_\omega)$ y $\mathcal{P}(^n\ell_2)$ para $n \geq 2$ no tienen la propiedad de aproximación.*

4.4. La propiedad de aproximación en $\mathcal{H}^\infty(U)$

Las funciones holomorfas definidas sobre un abierto U, en general, no mandan acotados del dominio en acotados de la imagen. Aunque esto sí sucede para funciones enteras (en particular continuas) sobre $\mathbb{C}^n$, la propiedad de mandar acotados en acotados no es cierta en general, aún, para funciones enteras sobre un espacio de Banach infinito dimensional. Es por esto que el subespacio de funciones holomorfas que son acotadas sobre los acotados del dominio cobra especial interés. Para finalizar, presentaremos brevemente cuando este espacio tiene la propiedad de aproximación. Esto fué estudiado por J.Mujica en [15], quién utiliza un método de linearización del espacio de las funciones holomorfas acotadas sobre un espacio de Banach, cuyas ideas contaremos.

Definición 4.4.1 *Sean E y F espacios de Banach y sea $U \subset E$ un abierto. $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ es el subespacio vectorial de $\mathcal{H}(U;F)$ formado por las $f \in \mathcal{H}(U;F)$ que son acotadas sobre U. Cuando $F = \mathbb{C}$, notamos $\mathcal{H}^\infty(U)$ en lugar de $\mathcal{H}^\infty(U;\mathbb{C})$.*

Los espacios $\mathcal{H}(U)$ y $\mathcal{H}^\infty(U)$ en general difieren. Esto es puede existir $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que $\|f\|_U = \infty$. Veamos esto en el siguiente ejemplo, $U = B_r(a)$, la bola de centro a y radio r en un espacio de Banach E. Si $x' \in E'$ es tal que $||x'|| = 1$, $a \in E$ y $r > 0$, luego $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} x'(x-a)^n \in \mathcal{H}(B_r(a))$. Si $\varepsilon > 0$, $x \in E$ tal que $||x|| = 1$ y $x'(x) = 1 - \varepsilon$ y $\widetilde{r} \in \mathbb{R}$ con $\widetilde{r} = r - \varepsilon$, se tiene que $\widetilde{r}x + a \in B_r(a)$ y $f(\widetilde{r}x + a) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(r-\varepsilon)(1-\varepsilon)}{r}\right)^n = \frac{r}{r-(r-\varepsilon)(1-\varepsilon)}$. Al ser ε arbitrario se tiene que $f \notin \mathcal{H}^\infty(B_r(a))$.

El espacio $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ tiene propiedades *especiales*, entre las que se destaca que este espacio se lo puede dotar de una norma que lo hace un espacio de Banach.

Proposición 4.4.2 *Sean E y F espacios de Banach y sea $U \subset E$ un abierto. Sobre $\mathcal{H}^\infty(U;F)$, la función $\|f\| = \|f\|_U$ es una norma y la topología generada por $\|.\|$ es completa. Es decir $(\mathcal{H}^\infty(U;F), \|.\|)$ es un espacio de Banach.*

Otra de las propiedades espciales de $H^\infty(U)$ es que es un espacio dual de Banach, lo que veremos a continuación.

Si notamos con $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$ a la bola unidad de $\mathcal{H}^\infty(U;F)$, $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$ es localmente acotado y, por la Proposición 3.2.25, $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$ es τ_0-acotado. Resulta que el clásico Teorema de Montel para funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ también vale para funciones holomorfas en un espacio de Banach. El teorema se enuncia a continuación. Una demostración puede encontrarse en [14].

Proposición 4.4.3 *Sea $U \subset E$ abierto. Entonces cada conjunto acotado de $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ es relativamente compacto. En particular $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$ es τ_0-relativamente compacto.*

Si E es un espacio de Banach, el Teorema de Alaoglu afirma que $B_{E'}$ es $\sigma(E', E)$-relativamente compacta. También sabemos que para que E sea reflexivo (y, por lo tanto E es el dual de E'), es necesario y suficiente que B_E sea $\sigma(E, E')$-relativamente compacta. De esto se observa que si E es el dual de algún espacio de Banach, entonces B_E es relativamente compacto para alguna topología localmente convexa. La recíproca también es cierta y fué demostrada en 1971 por Ng.

Teorema 4.4.4 *Sea E un espacio de Banach. Si existe una topología localmente convexa τ en E tal que B_E es τ-compacta, entonces E es isométricamente isomorfo al espacio dual de un espacio de Banach. Mas aún, si F es el espacio*

$$F = \{\varphi \in E' \colon \varphi|_{B_E} \text{ es } \tau - \text{continua}\},$$

dotado con la norma $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{B_E}$, entonces la evaluación $J\colon E \to F'$ es un isomorfismo isométrico.

Usando los dos últimos resultados obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.4.5 *$\mathcal{H}^\infty(U)$ es isométricamente isomorfo al dual de un espacio de Banach. Mas aún, si $G^\infty(U) = \{\varphi \in \mathcal{H}^\infty(U)'\colon \varphi|_{B_{H^\infty(U)}} \text{es } \tau_0 - \text{continua}\}$ dotado por la norma $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{B_{H^\infty(U)}}$, entonces la evaluación $J\colon H^\infty(U) \to G^\infty(U)'$ es un isomorfismo isométrico.*

La Proposición 4.4.5 es vista como un teorema de linealización. A las funciones en $\mathcal{H}^\infty(U)$ se las puede ver como funciones lineales sobre $G^\infty(U)$. Esta linealización es útil para poder decidir si $\mathcal{H}^\infty(U)$ tiene la propiedad de aproximación o no ya que J. Mujica en [15] prueba los 3 siguientes teoremas:

Teorema 4.4.6 *Sea E un espacio de Banach y sea $U \subset E$ un conjunto abierto. Si $\delta_U\colon x \in U \to \delta_x \in G^\infty(U)$, en donde $\delta_x(f) = f(x)$ para toda $x \in U$ y $f \in \mathcal{H}^\infty(U)$. Entonces:*

(a) $\delta_U \in \mathcal{H}^\infty(U, G^\infty(U))$.

(b) *Para cada espacio de Banach F y cada $f \in \mathcal{H}^\infty(U; F)$, existe un único $T_f \in \mathcal{L}(G^\infty(U), F)$ tal que $T_f \circ \delta_U = f$.*

(c) *La aplicación $f \in \mathcal{H}^\infty(U; F) \to T_f \in \mathcal{L}(G^\infty(U), F)$ es un isomorfismo isométrico.*

(d) *f es de rango finito si y sólo si T_f es de rango finito.*

(e) *f compacta si y sólo si T_f es compacto.*

Usando el teorema anterior junto al Teorema 2.1.7 se obtiene:

Teorema 4.4.7 *Si $U \subset E$ es abierto, entonces $\mathcal{H}^\infty(U)$ tiene la propiedad de aproximación si y sólo si para cualquier espacio de Banach F, dados $f \in \mathcal{H}^\infty(U; F)$ compacta y $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{H}^\infty(U; F)$ de rango finito tal que $||g - f|| < \varepsilon$.*

Teorema 4.4.8 *Si $U \subset E$ es abierto y balanceado, entonces $G^\infty(U)$ tiene la propiedad de aproximación si y sólo si E tiene la propiedad de aproximación.*

El Teorema anterior nos da una condición necesaria para saber si $\mathcal{H}^\infty(U)$ tiene la propiedad de aproximación. Si E no tiene la propiedad de aproximación y si $U \subset E$ es abierto, balanceado y abierto, entonces $G^\infty(U)$ no la tiene, lo cual implica que $G^\infty(U)'$ no tiene la propiedad de aproximación y, por la Proposición 4.4.5, $\mathcal{H}^\infty(U)$ no tiene la propiedad de aproximación. La condición suficiente para resolver el problema de que $\mathcal{H}^\infty(U)$ tenga la propiedad de aproximación, según sabemos, no esta resuelto todavía. Es más, sigue abierto el problema para $\mathcal{H}^\infty(\Delta)$, en donde Δ es el disco abierto de $\mathbb{C}$. Es decir, no se sabe si $\mathcal{H}^\infty(\Delta)$ tiene la propiedad de aproximación o no. Por el Teorema 4.4.7 esta pregunta es equivalente a:

Dado un espacio de Banach F, $f \in \mathcal{H}^\infty(\Delta, F)$ compacta y $\varepsilon > 0$, ¿existe $g \in \mathcal{H}^\infty(\Delta, F)$ de rango finito tal que $||g - f|| < \varepsilon$?

Con este ejemplo quisimos mostrar que el problema de aproximación para subespacios de $\mathcal{H}(U)$ tiene vigencia hoy en día. Que un espacio tenga la propiedad de aproximación facilita el estudio de otras propiedades relacionadas con el espacio, ver por ejemplo [9], [13, Sección 2.d], [14, Capítulo 6] entre otros. Además, como no todos los espacios tienen propiedad de aproximación, varios autores definieron y estudiaron varias propiedades relacionadas a la propiedad de aproximación. Por ejemplo, R. Aron, M. Maestre y P. Rueda recientemente estudiaron las funciones holomorfas p-compactas, que se relacionan con la p-propiedad de aproximación [3].

Referencias

[1] Ansemil, J. M.; Ponte, S. *Some applications of projective tensor products to holomorphy*. Perspectives in mathematical analysis. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (4) 94 (2000), 467-472.

[2] Aron, R.; *Entire functions of unbounded type on a Banach space*, Boll. Un. Mat. Ital. 9 (1974), 28-31.

[3] Aron, R.; Maestre, M.; Rueda, P. *p-Compact holomoprhic mappings*, preprint.

[4] Aron, R.; Schottenloher, M. *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the aproximation property*, Journal of Functional Analysis, 21 (1976), 7-30.

[5] Bierstedt, K.; Meise, R. *Bemerkungen über die Approximations-eigenschaft lokalkonvexer Funktionenräume*, Math. Ann., 209 (1974), 99–107.

[6] Casazza, P. G. Approximation properties, in: Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Volume 1, edited by W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, Elsevier, (2001), 271-316.

[7] Díaz, J. C.; Dineen S. *Polynomials on stable spaces*. Ark. Mat. (1) 36 (1998), 87–96.

[8] Dineen S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, S.M.M., Springer, 1999.

[9] Dineen, S.; Mujica, J. *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite-dimensional spaces. I.* J. Approx. Theory (2) 126 (2004), 141-156.

[10] Grothendieck, A. *Sur certains espaces de fonctions holomorphes. II.* J. Reine Angew. Math. 192 (1953), 77-95.

[11] Grothendieck, A. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955), 140-pp.

[12] Kelley, J. General topology. Reprint of the 1955 edition. Graduate Texts in Mathematics, No. 27. Springer-Verlag, 1975.

[13] Linderstrauss, J.; Tzafriri,L. Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag, 1977.

[14] Mujica, J. Complex analysis in Banach spaces, North Holland Mathematics Studies, 120. North-Holland, 1986.

[15] Mujica, J. *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces.* American mathematical society, Vol 324 (1991), 867–887.

[16] Munkres, J.R. Topology: a first course. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[17] Nachbin, L. Limities et pertubation des applications holomorphes, in "Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables Complexes et Analyse Complexe" Agora mathematica 1, Gauthiers-Villars, Paris, 1974, 141-158.

[18] Robertson, A.P.; Robertson, W. Topological vector spaces, Cambridge University Press, 1973.

[19] Szankowski, A. $B(\mathcal{H})$ *does not have the approximation property.* Acta Math. (1-2) 147 (1981), 89–108.