UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

EL PROBLEMA INVERSO DE CONDUCTIVIDAD EN EL PLANO

Ernesto A. Fernández

Director: Ricardo Durán

28 de junio de 2012

Índice

El problema

Dado un dominio Ω acotado y simplemente conexo de $\mathbb{R}^n$ y una función medible $\sigma : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ acotada superior e inferiormente, estudiaremos la ecuación de conductividad

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \text{ en } \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Phi \in H^{1/2}(\partial\Omega). \tag{2}$$

Ésta describe el potencial eléctrico en cada punto de un cuerpo conductor (de conductividad isotrópica σ) que ha alcanzado el equilibrio.

Es necesario aclarar qué entendemos por $H^{1/2}(\partial\Omega)$ para un dominio acotado arbitrario. Siempre que Ω es un dominio Lipschitz, sabemos (ver [1]) que existe un único operador acotado, el operador traza,

$$T : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$$

que verifica $Tu = u|_{\partial\Omega}$ si $u \in C(\overline{\Omega})$. Éste tiene una inversa a derecha T^{-1}, también acotada.

En un dominio Ω cualquiera, podemos definir $H^{1/2}(\partial\Omega) = H^1(\Omega)/H^1_0(\Omega)$. Si Φ está en este espacio, la condición de Dirichlet (2) debe interpretarse como $[u] = \Phi$ en $H^1(\Omega)/H^1_0(\Omega)$. Definimos además

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}([u]) &= [\mathrm{Re}(u)], \\ \mathrm{Im}([u]) &= [\mathrm{Im}(u)]. \end{aligned}$$

Esto está bien definido pues si $u \in H^1_0(\Omega)$, su parte real e imaginaria también están en $H^1_0(\Omega)$. Diremos que Φ toma valores reales si su parte imaginaria es 0, es decir, si $\Phi = [v]$ para alguna función $v \in H^1(\Omega)$ que sólo toma valores reales. Veamos ahora que estas definiciones son equivalentes a las habituales si Ω es Lipschitz.

Proposición 0.0.1. *Si Ω es un dominio Lipschitz, el operador $S : H^{1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)/H^1_0(\Omega)$ dado por $S(\varphi) = [T^{-1}(\varphi)]$ es acotado e invertible.*

Demostración. Es claro que es acotado pues

$$||S(\varphi)||_{H^1(\Omega)/H^1_0(\Omega)} \leq ||T^{-1}(\varphi)||_{H^1(\Omega)} \leq ||\varphi||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

La inversa vendrá dada por $S^{-1}([u]) = T(u)$; está bien definida y es biyectiva, pues $H^1_0(\Omega) = \ker(T)$ ([1, Teorema 5.37]) y $T(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$. Para todo v prteneciente a la clase de u vale que

$$||S^{-1}([u])||_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = ||T(v)||_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C||v||_{H^1(\Omega)}.$$

Luego

$$||S^{-1}([u])||_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \inf_{[v]=[u]} ||v||_{H^1(\Omega)} = C||[u]||_{H^1(\Omega)/H^1_0(\Omega)}.$$

Esto prueba que S^{-1} es acotado, falta ver que efectivamente es la inversa de S.

$$S^{-1}S(\varphi) = S^{-1}([T^{-1}(\varphi)]) = T(T^{-1}(\varphi)) = \varphi,$$

pues T^{-1} es la inversa a derecha de T. Como S^{-1} es biyectiva, esto basta. □

Se tiene entonces un isomorfismo lineal entre $H^{1/2}(\partial\Omega)$ y $H^1(\Omega)/H^1_0(\Omega)$, que nos permite identificarlos. Como $T(T^{-1}(T(u))) = T(u)$ y $\ker T = H^1_0(\Omega)$, vale además que $S(T(u)) = [u]$ para u en $H^1(\Omega)$. Es decir, ambas interpretaciones de la condición de Dirichlet coinciden a través de este isomorfismo.

Finalmente, el espacio $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ se define como el dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Podemos volver ahora a la ecuación:

Proposición 0.0.2. *Para cada valor de borde $\Phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, la ecuación de conductividad tiene una única solución u en $H^1(\Omega)$. Además, la aplicación $\Phi \longmapsto u$ es acotada.*

Demostración. Supongamos primero que Φ toma valores reales. Considero una función $v \in H^1(\Omega)$ a valores reales tal que $v|_{\partial\Omega} = \Phi$ y $||v||_{H^1(\Omega)} \leq 2||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Si encuentro ahora $w \in H^1_0(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \sigma\nabla w \cdot \nabla\varphi \, dm = \int_\Omega \sigma\nabla v \cdot \nabla\varphi \, dm \quad \forall\varphi \in H^1_0(\Omega)$$

valdrá también que

$$\int_\Omega \sigma\nabla(v-w) \cdot \nabla\varphi \, dm = 0 \quad \forall\varphi \in H^1_0(\Omega),$$

$$v - w|_{\partial\Omega} = \Phi.$$

Es decir, $v - w$ será la solución buscada. Debo probar entonces que existe w.

Defino $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $L : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$a(u_1, u_2) = \int_\Omega \sigma \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \, dm,$$

$$L(\varphi) = \int_\Omega \sigma \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dm.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} |L(\varphi)| &\leq \left(||\sigma||_{L^\infty(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)}\right) ||\varphi||_{H^1(\Omega)}, \\ |a(u_1, u_2)| &\leq ||\sigma||_{L^\infty(\Omega)} ||u_1||_{H^1(\Omega)} ||u_2||_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

y por la desigualdad de Poincaré ([1, Teorema 6.30])

$$|a(u_1, u_1)| \geq \inf_{x \in \Omega} \sigma(x) \, ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} \geq C ||u||^2_{H^1(\Omega)}. \tag{3}$$

Se cumplen las hipótesis del teorema de Lax-Milgram; la función w buscada es la que cumple $a(w, \varphi) = L(\varphi)$ para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Verifica, además, que

$$||w||_{H^1(\Omega)} \leq \frac{||\sigma||_{L^\infty(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)}}{C},$$

lo que implica que

$$||u||_{H^1(\Omega)} = ||v - w||_{H^1(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{||\sigma||_{L^\infty(\Omega)}}{C}\right) ||v||_{H^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq 2 \left(1 + \frac{||\sigma||_{L^\infty(\Omega)}}{C}\right) ||\Phi||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Para ver la unicidad, supongo que existen dos soluciones a valores reales u_1 y u_2, entonces valdría

$$\int_\Omega \sigma \nabla (u_1 - u_2) \cdot \nabla \varphi \, dm = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

y $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$. Se sigue que $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$, y por (3), $u_1 = u_2$.

Para el caso general en que Φ toma valores complejos, basta observar que u es solución de la ecuación de conductividad si y sólo si $\mathrm{Re}(u)$ y $\mathrm{Im}(u)$ lo son, cambiando la condición de borde Φ por $\mathrm{Re}(\Phi)$ y $\mathrm{Im}(\Phi)$, respectivamente; tanto la existencia como la unicidad se siguen del caso real. □

Calderón se preguntó en los años cincuenta si sería posible, en general, recuperar la conductividad de un cuerpo sólo mediante mediciones eléctricas realizadas en su superficie. En el momento trabajaba en YPF, y su propósito era la prospección petrolera.

Hoy también se emplea esta técnica como herramienta de diagnóstico médico, bajo el nombre de *Tomografía por impedancia eléctrica.*

Su planteo fue que σ debía quedar determinada si se conocía la energía necesaria para sostener cada valor del potencial en el borde ($u|_{\partial\Omega}$). Ésta se calcula como

$$Q_\sigma(u|_{\partial\Omega}) = \int_\Omega \sigma||\nabla u||_2^2\, dm,$$

que está bien definida en $H^{1/2}(\partial\Omega)$ por la proposición 0.0.2. El problema entonces radica en recuperar σ a partir de Q_σ.

Una formulación alternativa, que se seguirá aquí, es mediante el mapa Dirichlet a Neumann

$$\Lambda_\sigma : u|_{\partial\Omega} \longmapsto \sigma\frac{\partial u}{\partial\nu}.$$

El flujo de corriente en dirección normal a la superficie está definido como un elemento de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$:

$$\langle \sigma\frac{\partial u}{\partial\nu}, \psi|_{\partial\Omega}\rangle = \int_\Omega \sigma\nabla u\cdot\nabla\overline{\psi} dm$$

para cada $\psi \in H^1(\Omega)$. El mapa indica el flujo de corriente en el borde que se corresponde a cada potencial en el mismo.

Proposición 0.0.3. *La derivada $\sigma\partial u/\partial\nu$ está bien definida, y es efectivamente un elemento de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.*

Demostración. Por Hölder y la acotación de σ

$$\left|\int_\Omega \sigma\nabla u\cdot\nabla\overline{\psi} dm\right| \leq ||\sigma||_{L^\infty(\Omega)}||u||_{H^1(\Omega)}||\psi||_{H^1(\Omega)}. \tag{4}$$

Si $\psi_1|_{\partial\Omega} = \psi_2|_{\partial\Omega}$, es decir, $\psi_1 - \psi_2 \in H_0^1(\Omega)$, existe una sucesión de funciones $\Psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ que convergen a $\psi_1 - \psi_2$ en $H^1(\Omega)$. De (4) se sigue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sigma\nabla u\cdot\nabla(\overline{\psi_1-\psi_2})dm &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \sigma\nabla u\cdot\nabla\overline{\Psi_n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (\nabla\cdot\sigma\nabla u)\Psi_n = 0.\end{aligned}$$

Esto prueba la buena definición. La linealidad es evidente, y la acotación se sigue de (4) si elijo $\widetilde{\psi}$ tal que $\widetilde{\psi}|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega}$ y $||\widetilde{\psi}||_{H^1(\Omega)} \leq 2||\psi|_{\partial\Omega}||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. □

Proposición 0.0.4. *El mapa Dirichlet a Neumann es lineal y acotado.*

Demostración. La linealidad es inmediata; también se acaba de probar que

$$\left|\left|\sigma\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|\right|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq 2||\sigma||_{L^\infty(\Omega)}||u||_{H^1(\Omega)} \leq 2\,C||\sigma||_{L^\infty(\Omega)}||u|_{\partial\Omega}||_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

La última desigualdad vale por la proposición 0.0.2. □

En términos de esta aplicación, el problema consiste en decidir si se puede reconstruir σ a partir de Λ_σ. Veamos que los dos planteos son efectivamente equivalentes.

Proposición 0.0.5. *Sean $\sigma_1, \sigma_2 : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ medibles, y supongamos que existe $c > 0$ tal que $c^{-1} \leq \sigma_i \leq c$. Vale que*

$$\Lambda_\sigma = \Lambda_{\widetilde{\sigma}} \iff Q_\sigma = Q_{\widetilde{\sigma}}$$

Demostración. Λ_σ induce una forma sesquilineal y simétrica a_σ dada por

$$a_\sigma(u|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega}) = \Lambda_\sigma(u|_{\partial\Omega})(\overline{v}|_{\partial\Omega}).$$

Tenemos que

$$Q_\sigma(u|_{\partial\Omega}) = a_\sigma(u|_{\partial\Omega}, u|_{\partial\Omega}).$$

Es evidente entonces que Λ_σ determina Q_σ. La recíproca se obtiene de

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(a_\sigma(u|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega})) &= \frac{Q_\sigma(u|_{\partial\Omega} + v|_{\partial\Omega}) - Q_\sigma(u|_{\partial\Omega} - v|_{\partial\Omega})}{4}, \\ \mathrm{Im}(a_\sigma(u|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega})) &= -\mathrm{Re}(a_\sigma(i.u|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega})). \end{aligned}$$

□

Varios autores alcanzaron resultados parciales para el problema de Calderón, asumiendo algún grado de regularidad en la conductividad σ. En [9] se puede encontrar una breve reseña de los mismos. Claro que esto es insuficiente para los propósitos prácticos mencionados, pues modelar la presencia de un yacimiento de petróleo o un tumor en la región estudiada requiere un salto en la conductividad. El mejor resultado obtenido para dimensión tres o superior ([16]) es para conductividades en $W^{3/2,\infty}(\Omega)$.

En este trabajo estudiaremos la resolución dada por Kari Astala y Lassi Päivärinta del problema inverso de Calderón en dimensión dos. No será necesaria ninguna hipótesis adicional sobre σ. Siguiendo entonces [9], se dará una demostración del siguiente

Teorema 1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y simplemente conexo, sean $\sigma_1, \sigma_2 : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ funciones medibles. Supongamos que existe $c > 0$ tal que $c^{-1} \leq \sigma_i \leq c$. Si $\Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\sigma_2}$, entonces $\sigma_1 = \sigma_2$.*

Será suficiente trabajar con $\Omega = \mathbb{D}$, el disco unitario. En efecto, supongamos que Ω es un dominio simplemente conexo tal que $\Omega \subseteq \mathbb{D}$, y sean σ y $\tilde{\sigma}$ dos conductividades en Ω con $\Lambda_\sigma = \Lambda_{\tilde{\sigma}}$. Se puede extender a ambas como 1 en $\mathbb{D} \setminus \Omega$; se obtienen así dos nuevas conductividades σ_0 y $\widetilde{\sigma_0}$ en $\mathbb{D}$. Elijo ahora $\Phi \in H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$, y llamo u_0 a la única función en $H^1(\mathbb{D})$ que verifica

$$\nabla \cdot \sigma_0 \nabla u_0 = 0$$

en $\mathbb{D}$ con la condición de Dirichlet $u_0|_{\partial\mathbb{D}} = \Phi$. Llamo también $\tilde{u}$ a la solución de

$$\nabla \cdot \widetilde{\sigma_0} \nabla \tilde{u} = 0$$

en $H^1(\Omega)$ que cumple $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega}$. Es decir, $\tilde{u} - u_0 \in H_0^1(\Omega)$, por lo que puedo asegurar que $(\tilde{u} - u_0)\chi_\Omega$ está en $H^1(\mathbb{D})$. Luego $\widetilde{u_0} = \tilde{u}\chi_\Omega + u_0\chi_{\mathbb{D}\setminus\Omega}$ también pertenece a $H^1(\mathbb{D})$. En $\mathbb{D} \setminus \Omega$ se tiene que $u_0 = \widetilde{u_0}$ y $\sigma_0 = \widetilde{\sigma_0}$; como $\Lambda_\sigma = \Lambda_{\tilde{\sigma}}$, para cualquier $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{D})$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \widetilde{\sigma_0} \nabla \widetilde{u_0} \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dm &= \int_\Omega \widetilde{\sigma_0} \nabla \widetilde{u_0} \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dm + \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega} \widetilde{\sigma_0} \nabla \widetilde{u_0} \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dm \\
&= \Lambda_{\tilde{\sigma}}(\widetilde{u_0}|_{\partial\Omega})(\varphi|_{\partial\Omega}) + \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dm \\
&= \Lambda_{\tilde{\sigma}}(u_0|_{\partial\Omega})(\varphi|_{\partial\Omega}) + \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dm \\
&= \Lambda_{\sigma}(u_0|_{\partial\Omega})(\varphi|_{\partial\Omega}) + \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dm \\
&= \int_\Omega \sigma \nabla u_0 \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dm + \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dm \\
&= \int_{\mathbb{D}} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dm.
\end{aligned}$$

Luego $\nabla \cdot \widetilde{\sigma_0} \nabla \widetilde{u_0} = \nabla \cdot \sigma_0 \nabla u_0 = 0$ en el disco $\mathbb{D}$. A partir de esto, usando que $\widetilde{u_0}|_{\partial\mathbb{D}} = \Phi$, veamos ahora que $\Lambda_{\widetilde{\sigma_0}}\Phi = \Lambda_{\sigma_0}\Phi$; dada $\psi \in H^1(\mathbb{D})$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\widetilde{\sigma_0}}(\Phi)(\psi|_{\partial\mathbb{D}}) &= \int_{\mathbb{D}} \widetilde{\sigma}_0 \nabla \widetilde{u}_0 \cdot \nabla\overline{\psi}\, dm \\
&= \int_{\Omega} \widetilde{\sigma}_0 \nabla \widetilde{u}_0 \cdot \nabla\overline{\psi}\, dm + \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega} \widetilde{\sigma}_0 \nabla \widetilde{u}_0 \cdot \nabla\overline{\psi}\, dm \\
&= \Lambda_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{u}_0|_{\partial\Omega})(\psi|_{\partial\Omega}) + \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla\overline{\psi}\, dm \\
&= \Lambda_{\widetilde{\sigma}}(u_0|_{\partial\Omega})(\psi|_{\partial\Omega}) + \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla\overline{\psi}\, dm \\
&= \Lambda_{\sigma}(u_0|_{\partial\Omega})(\psi|_{\partial\Omega}) + \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla\overline{\psi}\, dm \\
&= \int_{\Omega} \sigma \nabla u_0 \cdot \nabla\overline{\psi}\, dm + \int_{\mathbb{D}\setminus\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla\overline{\psi}\, dm \\
&= \int_{\mathbb{D}} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla\overline{\psi}\, dm \\
&= \Lambda_{\sigma_0}(\Phi)(\psi|_{\partial\mathbb{D}}).
\end{aligned}$$

Como esto vale para cualquier Φ en $H^{1/2}(\partial\Omega)$, se concluye que $\Lambda_{\sigma_0} = \Lambda_{\widetilde{\sigma_0}}$. Si el teorema 1 vale para el disco, tenemos entonces que $\sigma_0 = \widetilde{\sigma_0}$, y en particular $\sigma = \widetilde{\sigma}$. Es decir, el teorema también vale para Ω, como queríamos ver.

Falta analizar que ocurre si Ω es acotado pero no está incluido en $\mathbb{D}$. Supongo nuevamente que σ y $\widetilde{\sigma}$ son conductividades en Ω, y elijo $K \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\Omega/K \subseteq \mathbb{D}$. Defino en Ω/K las conductividades $\sigma_1(x) = \sigma(K\cdot x)$ y $\widetilde{\sigma_1}(x) = \widetilde{\sigma}(K\cdot x)$. Se observa que para cualquier $u, \psi \in H^1(\Omega/K)$ vale

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\sigma_1}(u|_{\partial\Omega})(\psi|_{\partial\Omega}) &= \int_{\Omega/K} \sigma_1(x) \nabla u(x) \cdot \nabla\overline{\psi}(x)\, dm(x) \\
&= \int_{\Omega/K} \sigma\left(K\cdot x\right) \nabla u(x) \cdot \nabla\overline{\psi}(x)\, dm(x) \\
&= \frac{1}{K^2}\int_{\Omega} \sigma(x) \nabla u\left(\frac{x}{K}\right) \cdot \nabla\overline{\psi}\left(\frac{x}{K}\right)\, dm(x) \\
&= \frac{1}{K^2}\Lambda_{\sigma}\left(K\cdot u\left(\frac{*}{K}\right)\Big|_{\partial\Omega}\right)\left(K\cdot \psi\left(\frac{*}{K}\right)\Big|_{\partial\Omega}\right).
\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\Lambda_{\widetilde{\sigma_1}}(u|_{\partial\Omega})(\psi|_{\partial\Omega}) = \frac{1}{K^2}\Lambda_{\widetilde{\sigma}}\left(K\cdot u\left(\frac{*}{K}\right)\Big|_{\partial\Omega}\right)\left(K\cdot \psi\left(\frac{*}{K}\right)\Big|_{\partial\Omega}\right).$$

Como $\Lambda_\sigma = \Lambda_{\widetilde{\sigma}}$, se sigue que $\Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\widetilde{\sigma_1}}$, y si el teorema vale para Ω/K obtengo que $\sigma_1 = \widetilde{\sigma_1}$, y finalmente $\sigma = \widetilde{\sigma}$.

El objetivo de la tesis, demostrar el teorema 1, se alcanzará en el capítulo 5. Se seguirá principalmente, por supuesto, [9]. En la demostración se emplearán resultados de análisis complejo, fundamentalmente la teoría de aplicaciones cuasiconformes. Los resultados necesarios (obtenidos de [14] y [7]) se listarán en el capítulo 2, sin demostración, excepto aquellos cuyo interés se vincule directamente con el tema de la tesis. Se presentará la dilatación compleja, que vincula esta teoría con la ecuación de conductividad a través de la ecuación de Beltrami.

El capítulo 3 estará dedicado a ella. Se probará que toda solución de (1) admite una conjugada armónica que la vuelve solución de Beltrami y se introducirá la transformada de Hilbert asociada a este problema. Se observará su relación con los operadores de Beltrami, $\overline{\partial}^{-1}$ y $\partial\overline{\partial}^{-1}$, cuya teoría se habrá desarrollado en el capítulo 1 siguiendo fundamentalmente [18]. Finalmente se demostrarán resultados análogos al teorema de Liouville y al principio del argumento para funciones pseudoanalíticas de Bers.

En el capítulo 4 se discutirá una familia particular de soluciones de la ecuación de Beltrami, las soluciones complejas de la óptica geométrica, que son una herramienta habitual para atacar este problema inverso. Se probará su existencia y luego se discutirá su dependencia del índice complejo k. En última instancia se logrará, a través de un cambio de coordenadas cuasiconforme, escribirlas en una forma exponencial y determinar su comportamiento para k grande.

En el capítulo 5 se comenzará por probar que el mapa Dirichlet a Neumann caracteriza las soluciones complejas de la óptica geométrica afuera del disco. Se presentará luego la matriz de transporte, que permite obtener el valor de la solución en todo punto a partir del ya conocido en un punto dado. Se reducirá entonces el problema a demostrar que la matriz de transporte queda caracterizada unívocamente por el mapa Dirichlet a Neumann, puesto que recuperar una solución de la ecuación permite recuperar trivialmente la conductividad.

Quiero agradecer a mi director, Ricardo Durán, y a los jurados, Gabriel Acosta y Pablo De Nápoli. También a mis padres, y a mis amigos Mauro y Miguel, que cursaron conmigo todos estos años.

Capítulo 1

Funciones de variable compleja

1.1 Derivadas en notación compleja

Para cualquier función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (donde Ω es un dominio del plano), emplearemos la notación

$$\partial f = \partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f), \tag{1.1}$$

$$\overline{\partial} f = \partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f), \tag{1.2}$$

donde ∂_x y ∂_y son las respectivas derivadas débiles (cuando existen). Es decir, si $f = u + iv$,

$$\partial f = \frac{1}{2}\left(\partial_x u + \partial_y v + i(\partial_x v - \partial_y u)\right),$$
$$\overline{\partial} f = \frac{1}{2}\left(\partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u)\right).$$

Se observa que la condición $\overline{\partial} f = 0$ es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann débiles; se probará luego (teorema 6) que esto alcanza para asegurar que f es holomorfa. Bajo esta condición también $\partial f = f'$.

Como se usará con frecuencia, es conveniente señalar que

$$\overline{\partial f} = \overline{\partial}\, \overline{f}, \tag{1.3}$$

pues $\overline{f} = u - iv$ y

$$\begin{aligned}
\overline{\partial f} &= \overline{\frac{1}{2}\left(\partial_x u + \partial_y v + i(\partial_x v - \partial_y u)\right)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_x u + \partial_y v - i(\partial_x v - \partial_y u)\right), \\
\overline{\partial}\,\overline{f} &= \frac{1}{2}\left(\partial_x u + \partial_y v + i(-\partial_x v + \partial_y u)\right).
\end{aligned}$$

Obviamente también

$$\overline{\overline{\partial} f} = \partial \overline{f}. \tag{1.4}$$

Las derivadas débiles con respecto a z y $\overline{z}$ se pueden definir directamente, es decir, sin recurrir a ∂_x y ∂_y:

Proposición 1.1.1. *Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si existen las derivadas débiles $\partial_x f$ y $\partial_y f$, entonces se verifica*

$$\int_\Omega f\,\partial\varphi\,dm = -\int_\Omega \partial f\,\varphi\,dm, \tag{1.5}$$

$$\int_\Omega f\,\overline{\partial}\varphi\,dm = -\int_\Omega \overline{\partial} f\,\varphi\,dm, \tag{1.6}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Recíprocamente, si $g_1, g_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ verifican

$$\int_\Omega f\,\partial\varphi\,dm = -\int_\Omega g_1\,\varphi\,dm, \tag{1.7}$$

$$\int_\Omega f\,\overline{\partial}\varphi\,dm = -\int_\Omega g_2\,\varphi\,dm, \tag{1.8}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces existen $\partial_x f$ y $\partial_y f$, y se cumple que

$$\begin{aligned}
\partial f &= g_1, \\
\overline{\partial} f &= g_2.
\end{aligned}$$

Demostración. Para probar (1.5) y (1.6) sólo hay que usar la definición de las derivadas débiles con respecto a x y a y:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\,\partial\varphi\,dm &= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega f\,\partial_x\varphi\,dm - i\int_\Omega f\,\partial_y\varphi\,dm\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_\Omega \partial_x f\,\varphi\,dm - i\int_\Omega \partial_y f\,\varphi\,dm\right)\\
&= -\int_\Omega \partial f\,\varphi\,dm,\\
\int_\Omega f\,\overline{\partial}\varphi\,dm &= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega f\,\partial_x\varphi\,dm + i\int_\Omega f\,\partial_y\varphi\,dm\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_\Omega \partial_x f\,\varphi\,dm + i\int_\Omega \partial_y f\,\varphi\,dm\right)\\
&= -\int_\Omega \overline{\partial} f\,\varphi\,dm.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si valen (1.7) y (1.8) se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\,\partial_x\varphi\,dm &= \int_\Omega f\,(\partial\varphi + \overline{\partial}\varphi)\,dm\\
&= \int_\Omega f\,\partial\varphi\,dm + \int_\Omega f\,\overline{\partial}\varphi\,dm\\
&= -\left(\int_\Omega g_1\,\varphi\,dm + \int_\Omega g_2\,\varphi\,dm\right)\\
&= -\int_\Omega (g_1+g_2)\,\varphi\,dm,\\
\int_\Omega f\,\partial_y\varphi\,dm &= \int_\Omega f\,i(\partial\varphi - \overline{\partial}\varphi)\,dm\\
&= i\int_\Omega f\,\partial\varphi\,dm - i\int_\Omega f\,\overline{\partial}\varphi\,dm\\
&= -i\left(\int_\Omega g_1\,\varphi\,dm - \int_\Omega g_2\,\varphi\,dm\right)\\
&= -\int_\Omega i(g_1-g_2)\,\varphi\,dm,
\end{aligned}$$

es decir, $\partial_x f = g_1 + g_2$ y $\partial_y f = i(g_1 - g_2)$. Luego

$$\begin{aligned}
\partial f &= \frac{1}{2}(g_1 + g_2 - i^2(g_1 - g_2)) = \frac{1}{2}(2g_1) = g_1,\\
\overline{\partial f} &= \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + i^2(g_1 - g_2)) = \frac{1}{2}(2g_2) = g_2,
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. $\square$

Por supuesto, la proposición anterior se sostiene si se reemplaza las funciones de prueba φ en $C_c^\infty(\Omega)$ por funciones en $C_c^1(\Omega)$. Además, si se sabe que existen $\partial_x f$ y $\partial_y f$, será suficiente probar (1.7) o (1.8) para obtener que $\partial f = g_1$ o que $\overline{\partial} f = g_2$, respectivamente.

Usando (1.4) se puede ver de inmediato que la existencia de ∂f en este sentido directo implica la existencia de $\overline{\partial}\,\overline{f}$, y que $\overline{\partial}\,\overline{f} = \overline{\partial f}$, pues

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \overline{f}\,\overline{\partial}\varphi\, dm &= \int_\Omega \overline{f}\,\overline{\partial\overline{\varphi}}\, dm \\
&= \overline{\int_\Omega f\,\partial\overline{\varphi}\, dm} \\
&= -\overline{\int_\Omega \partial f\,\overline{\varphi}\, dm} \\
&= -\int_\Omega \overline{\partial f}\,\varphi\, dm.
\end{aligned}$$

Del mismo modo, la existencia de $\overline{\partial} f$ implica la de $\partial\overline{f}$, y $\overline{\overline{\partial} f} = \partial\overline{f}$. Esto se usará para probar, en el último teorema del capítulo, que basta con verificar la existencia de una de las derivadas de acuerdo con la definición directa para que la otra también exista.

Proposición 1.1.2. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ con $\partial f, \overline{\partial} f \in L^2(\mathbb{C})$. Entonces*

$$||\partial f||_{L^2(\mathbb{C})} = ||\overline{\partial} f||_{L^2(\mathbb{C})}. \tag{1.9}$$

Demostración. Considero primero $f \in C^\infty(\mathbb{C})$. Si escribo $f = u + iv$, se tiene que

$$\begin{aligned}
4\int_{\mathbb{C}} |\partial f|^2\, dm &= \int_{\mathbb{C}} |\partial_x u + \partial_y v + i(\partial_x v - \partial_y u)|^2\, dm \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\partial_x u + \partial_y v)^2 + (\partial_x v - \partial_y u)^2\, dm \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\partial_x u^2 + \partial_y u^2 + \partial_x v^2 + \partial_y v^2)\, dm + 2\int_{\mathbb{C}} \partial_x u\,\partial_y v\, dm - 2\int_{\mathbb{C}} \partial_x v\,\partial_y u\, dm \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\partial_x u^2 + \partial_y u^2 + \partial_x v^2 + \partial_y v^2)\, dm - 2\int_{\mathbb{C}} u\,\partial_x\partial_y v\, dm + 2\int_{\mathbb{C}} u\,\partial_y\partial_x v\, dm \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\partial_x u^2 + \partial_y u^2 + \partial_x v^2 + \partial_y v^2)\, dm.
\end{aligned}$$

Pero por otra parte

$$
\begin{aligned}
4\int_{\mathbb{C}} |\overline{\partial} f|^2\, dm &= \int_{\mathbb{C}} |\partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u)|^2\, dm \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\partial_x u - \partial_y v)^2 + (\partial_x v + \partial_y u)^2\, dm \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\partial_x u^2 + \partial_y u^2 + \partial_x v^2 + \partial_y v^2)\, dm - 2\int_{\mathbb{C}} \partial_x u\, \partial_y v\, dm + 2\int_{\mathbb{C}} \partial_x v\, \partial_y u\, dm \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\partial_x u^2 + \partial_y u^2 + \partial_x v^2 + \partial_y v^2)\, dm + 2\int_{\mathbb{C}} u\, \partial_x \partial_y v\, dm - 2\int_{\mathbb{C}} u\, \partial_y \partial_x v\, dm \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\partial_x u^2 + \partial_y u^2 + \partial_x v^2 + \partial_y v^2)\, dm,
\end{aligned}
$$

de donde $||\partial f||_{L^2(\mathbb{C})} = ||\overline{\partial} f||_{L^2(\mathbb{C})}$.

Si ahora f verifica las hipótesis de la proposición, puedo considerar una sucesión de funciones $f_n \in C^\infty(\mathbb{C})$ dadas por

$$f_n = f * \rho_{1/n},$$

con $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$. Entonces $\partial f_n \longrightarrow \partial f$ en $L^2(\mathbb{C})$, y también $\overline{\partial} f_n \longrightarrow \overline{\partial} f$. Como $||\partial f_n||_{L^2(\mathbb{C})} = ||\overline{\partial} f_n||_{L^2(\mathbb{C})}$ para todo n, esto concluye la demostración. □

1.2 La transformada de Fourier

Recordemos que para una función f definida en $\mathbb{R}^2$, la transformada de Fourier se define usualmente como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_0(f)(k) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi)\, e^{-2\pi i k\cdot\xi}\, dm(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z_1, z_2)\, e^{-2\pi i(k_1 z_1 + k_2 z_2)}\, dz_1\, dz_2.
\end{aligned}
$$

La definición que se empleará a lo largo de esta tesis, más adecuada para trabajar con las derivadas complejas, será

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(\xi) e_k(\xi)\, dm(\xi), \tag{1.10}$$

donde

$$e_k(z) = e^{i(kz + \overline{k}\overline{z})} \tag{1.11}$$

Muchas propiedades de esta transformada se pueden recuperar de la definición usual, si se observa que

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(\xi)e^{2i(k_1\xi_1-k_2\xi_2)}\,dm(\xi)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(\xi)e^{-2\pi i\left(\frac{k_1}{-\pi}\xi_1+\frac{k_2}{\pi}\xi_2\right)}\,dm(\xi)\\ &= \frac{1}{\pi}\mathcal{F}_0(f)\left(-\frac{k_1}{\pi},\frac{k_2}{\pi}\right).\end{aligned}$$

Proposición 1.2.1. *Si $f\in L^1(\mathbb{C})$, entonces $|\hat{f}(k)|\to 0$ cuando $|k|\to\infty$.*

Demostración. Es inmediato del lema de Riemann-Lebesgue usual ([11, 1.14]), si se observa que

$$\left|\left(\frac{-k_1}{\pi},\frac{k_2}{\pi}\right)\right|\longrightarrow\infty$$

cuando $|k|\to\infty$. □

Proposición 1.2.2. *$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{C})\longrightarrow L^2(\mathbb{C})$ es una isometría.*

Demostración. Para $f\in L^2(\mathbb{C})$, realizando un cambio de variables se tiene que

$$\begin{aligned}||\hat{f}||^2_{L^2(\mathbb{C})} &= \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}}\left|\mathcal{F}_0(f)\left(-\frac{k_1}{\pi},\frac{k_2}{\pi}\right)\right|^2\,dm(k)\\ &= \int_{\mathbb{C}}|\mathcal{F}_0(f)(w_1,w_2)|^2\,dm(w)\\ &= ||\mathcal{F}_0(f)||^2_{L^2(\mathbb{C})}\\ &= ||f||^2_{L^2(\mathbb{C})},\end{aligned}$$

pues es sabido que $\mathcal{F}_0$ es una isometría en $L^2(\mathbb{C})$ ([11, Teorema 1.18]). □

Proposición 1.2.3. *Si $f,g\in L^2(\mathbb{C})$, entonces*

$$\int_{\mathbb{C}} f\,\overline{g}\,dm=\int_{\mathbb{C}}\widehat{f}\,\overline{\widehat{g}}\,dm.$$

Demostración. Es inmediata de la proposición anterior. □

Proposición 1.2.4. *Si $f,g\in L^2(\mathbb{C})$, entonces*

$$(fg)\hat{} = \frac{1}{\pi}\hat{f}*\hat{g}.$$

Demostración. Por las propiedades de la convolución para la transformada usual,

$$\begin{aligned}
(fg)\hat{}(k) &= \frac{1}{\pi}\,\mathcal{F}_0(fg)\left(-\frac{k_1}{\pi},\frac{k_2}{\pi}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\mathcal{F}_0(f)*\mathcal{F}_0(g)\left(-\frac{k_1}{\pi},\frac{k_2}{\pi}\right)\\
&= \pi\int_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{\pi}\mathcal{F}_0(f)(w)\right)\left(\frac{1}{\pi}\mathcal{F}_0(g)\left(-\frac{k_1}{\pi}-w_1,\frac{k_2}{\pi}-w_2\right)\right)dm(w)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{\pi}\mathcal{F}_0(f)\left(-\frac{u_1}{\pi},\frac{u_2}{\pi}\right)\right)\left(\frac{1}{\pi}\mathcal{F}_0(g)\left(-\frac{k_1}{\pi}+\frac{u_1}{\pi},\frac{k_2}{\pi}-\frac{u_2}{\pi}\right)\right)dm(u)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\hat{f}(u)\hat{g}(k-u)\,dm(u)\\
&= \frac{1}{\pi}\hat{f}*\hat{g}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.5. *Sea $f\in C^1_c(\mathbb{C})$, entonces*

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial f}(k) &= -ik\hat{f}(k),\\
\widehat{\overline{\partial} f}(k) &= -i\overline{k}\hat{f}(k).
\end{aligned}$$

Demostración. Como $f\in C^1_c(\mathbb{C})$, podemos usar (1.5) y (1.6):

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial f}(k) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\partial f(\xi)e_k(\xi)\,dm(\xi)\\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}f(\xi)\partial e_k(\xi)\,dm(\xi)\\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}f(\xi)\,i\,k\,e_k(\xi)\,dm(\xi)\\
&= -ik\hat{f}(k),\\
\widehat{\overline{\partial} f}(k) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\overline{\partial} f(\xi)e_k(\xi)\,dm(\xi)\\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}f(\xi)\overline{\partial} e_k(\xi)\,dm(\xi)\\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}f(\xi)\,i\,\overline{k}\,e_k(\xi)\,dm(\xi)\\
&= -i\overline{k}\hat{f}(k).
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.6. *Sea* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ *con* $\partial f, \overline{\partial} f \in L^2(\mathbb{C})$. *Entonces*

$$\widehat{\partial f}(k) = \frac{k}{\overline{k}}\,\widehat{\overline{\partial} f}(k). \tag{1.12}$$

Demostración. Es evidente si $f \in C^1_c(\mathbb{C})$, por la proposición anterior. Si ahora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$, considero una sucesión de funciones $f_n \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ dadas por

$$f_n = f * \rho_{1/n}$$

con $\rho \in C^\infty_c(\mathbb{C})$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$. Entonces $\partial f_n \longrightarrow \partial f$ en $L^2(\mathbb{C})$, y también $\overline{\partial} f_n \longrightarrow \overline{\partial} f$. Entonces la igualdad (1.12) vale para las f_n, y el resultado se concluye de la continuidad de $\mathcal{F}$ en $L^2(\mathbb{C})$. □

Se observa que este resultado, junto con la proposición 1.2.2, da de inmediato una nueva demostración de 1.1.2.

1.3 Los operadores de Beltrami

Estudiaremos ahora los operadores de Beltrami, que pueden definirse formalmente como $P = \overline{\partial}^{-1}$ y $S = \partial\overline{\partial}^{-1}$. Más rigurosamente son la transformada de Cauchy

$$Pg(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w - z} dm(w), \tag{1.13}$$

y la transformada de Beurling

$$Sg(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{(w - z)^2} dm(w). \tag{1.14}$$

Esta última integral debe entenderse como valor principal.

De ahora en más escribiremos

$$L^p(\Omega) = \left\{ g \in L^p(\mathbb{C}) : g|_{\mathbb{C}\setminus\Omega} \equiv 0 \right\}$$

Con esta notación, si $g \in L^1(\Omega)$ con Ω acotado, es claro que Pg está bien definida en el complemento de $\overline{\Omega}$. Para probar la buena definición en todo el plano, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 1.3.1. *Sea* Ω *un dominio acotado y sea* $g \in L^p(\Omega)$. *Entonces la función*

$$h(z) = \int_{\Omega} \frac{g(w)}{|w - z|^\lambda}\, dm(w)$$

es continua en todo el plano, siempre que $\lambda < 2$ *y* $\frac{2}{2-\lambda} < p < \infty$. *Además, si considero otro dominio acotado* $G \supseteq \Omega$, *vale que*

$$|h(z)| \leq C||g||_{L^p(G)}$$

para todo $z \in G$, *con una contante* C *que depende de* p *y de* G.

Demostración. Si fijo $z_0 \in \mathbb{C}$ y considero los $z_1 \in B(z_0, 1)$, para un R suficientemente grande vale

$$\begin{aligned}|h(z_1) - h(z_0)| &\leq \int_{B(0,R)} \frac{|g(w+z_1) - g(w+z_0)|}{|w|^\lambda} \, dm(w) \\ &\leq \left(\int_{B(0,R)} |g(w+z_1) - g(w+z_0)|^p dm(w) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(0,R)} |w|^{-\lambda p'} dm(w) \right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

Como $\lambda p' = \frac{\lambda p}{p-1} < 2$, el segundo factor es finito. El primer factor tiende a cero cuando $z_1 \to z_0$.

Por otra parte, si considero R' tal que $G \subseteq B(0, R')$, tengo que

$$\begin{aligned}|h(z)| &\leq \int_{B(0,2R')} \frac{|g(w+z)|}{|w|^\lambda} \, dm(w) \\ &\leq \left(\int_{B(0,2R')} |w|^{-\lambda p'} \, dm(w) \right)^{\frac{1}{p'}} ||g||_{L^p(\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

Nuevamente el primer factor es finito. □

Teorema 2. *Sea Ω un dominio acotado del plano. Si $g \in L^1(\Omega)$, entonces $Pg(z)$ está definida para casi todo $z \in \mathbb{C}$. Además, $Pg \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$ para cualquier $1 \leq p < 2$.*

Demostración. Sea G un dominio acotado, $\Omega \subseteq G$. Consideremos funciones de la forma

$$\tilde{f}(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{|f(w)|}{|w-z|} \, dm(w),$$

para $f \in L^q(G)$, $q > 2$. Por el lema 1.3.1 se tiene que $|g|\tilde{f}$ es integrable sobre G, y entonces

$$\begin{aligned}C \, ||f||_{L^q(G)} \, ||g||_{L^1(G)} &\geq \int_G |g(z)| \, \tilde{f}(z) \, dm(z) \\ &= \int_G \int_G \frac{|g(z)| \, |f(w)|}{|w-z|} \, dm(w) \, dm(z) \\ &= \int_G \tilde{g}(w) |f(w)| \, dm(w),\end{aligned}$$

con

$$\tilde{g}(w) = \int_G \frac{|g(z)|}{|w-z|} \, dm(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{|g(z)|}{|w-z|} \, dm(z).$$

Como f es cualquier función de $L^q(G)$, se sigue que $\tilde{g} \in L^p(G)$ para cualquier $1 \leq p < 2$. Se concluye que Pg está definida en casi todo punto de G, y que $Pg \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{C})$. □

Observemos por último que si $g \in L^p(\mathbb{C})$ $(p > 2)$ y Pg está definida en un punto z_1, entonces está definida en todo el plano. Esto es así pues

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{g(w)}{w - z_2} \right| \, dm(w) = \\
&= \int_{\mathbb{C}\setminus B(z_2,1)} \left| \frac{g(w)}{w - z_1} \right| \, \left| \frac{w - z_1}{w - z_2} \right| \, dm(w) + \int_{B(z_2,1)} \left| \frac{g(w)}{w - z_2} \right| \, dm(w) \\
&\leq C \int_{\mathbb{C}} \left| \frac{g(w)}{w - z_1} \right| \, dm(w) + ||g||_{L^p(\mathbb{C})} \int_{B(0,1)} |w|^{-p'} \, dm(w) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

La siguiente es una propiedad importante de P, que será necesaria más adelante para discutir su compacidad.

Teorema 3. *Sea Ω un dominio acotado del plano y sea $p > 2$. Si $g \in L^p(\Omega)$ y $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces*

$$
|Pg(z_1)| \leq M_1 ||g||_{L^p(\Omega)} \tag{1.15}
$$

$$
|Pg(z_1) - Pg(z_2)| \leq M_2 ||g||_{L^p(\Omega)} |z_1 - z_2|^\alpha \tag{1.16}
$$

donde $\alpha = 1 - 2/p$. La constante M_1 depende de p y de Ω, mientras que M_2 sólo depende de p.

Demostración. Por la desigualdad de Hölder

$$
\begin{aligned}
|Pg(z)| &\leq \frac{1}{\pi} \left(\int_\Omega |g(w)|^p \, dm(w) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |w - z|^{-p'} \, dm(w) \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi}{\alpha p'} \right)^{\frac{1}{p'}} (2d)^\alpha ||g||_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}
$$

donde d es el diámetro de Ω. Esto prueba (1.15).

Ahora,

$$
Pg(z_1) - Pg(z_2) = -\frac{z_1 - z_2}{\pi} \int_\Omega \frac{g(w)}{(w - z_1)(w - z_2)} \, dm(w)
$$

siempre que $z_1 \neq z_2$. Entonces

$$
|Pg(z_1) - Pg(z_2)| \leq ||g||_{L^p(\Omega)} \frac{|z_1 - z_2|}{\pi} \left(\int_\Omega (|w - z_1| \, |w - z_2|)^{-p'} \, dm(w) \right)^{\frac{1}{p'}}
$$

Debemos acotar

$$\int_\Omega (|w-z_1|\,|w-z_2|)^{-p'}\,dm(w) \leq \underbrace{\int_{|w-z_1|>2|z_1-z_2|} (|w-z_1|\,|w-z_2|)^{-p'}\,dm(w)}_{(i)} + \\ + \underbrace{\int_{|w-z_1|\leq 2|z_1-z_2|} (|w-z_1|\,|w-z_2|)^{-p'}\,dm(w)}_{(ii)}.$$

Si $|w-z_1| > 2|z_1-z_2|$, se tiene que $|w-z_1| \leq 2\,|w-z_2|$; luego

$$\begin{aligned} (i) &\leq 2^{p'} \int_{|w-z_1|>2|z_1-z_2|} (|w-z_1|\,|w-z_1|)^{-p'}\,dm(w) \\ &\leq \pi 2^{1+p'} \int_{|z_1-z_2|}^{\infty} \rho^{1-2p'}\,dm(w) \\ &= \pi 2^{1+p'} \frac{|z_1-z_2|^{2-2p'}}{2p'-2} \\ &= \frac{\pi 2^{1+p'}}{2p'-2}\,|z_1-z_2|^{-2\frac{p'}{p}}. \end{aligned}$$

Además, si hago el cambio de variables $u = (w-z_1)/(z_2-z_1)$,

$$\begin{aligned} (ii) &= \frac{1}{|z_1-z_2|^{2p'-2}} \int_{|u|\leq 2} \frac{dm(u)}{|u|^{p'}|u-1|^{p'}} \\ &= C_{p'}|z_1-z_2|^{-2\frac{p'}{p}}. \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} |Pg(z_1)-Pg(z_2)| &\leq M_2\,||g||_{L^p(\Omega)}\,|z_1-z_2|\,\left(|z_1-z_2|^{-2\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= M_2\,||g||_{L^p(\Omega)}\,|z_1-z_2|^{\alpha}, \end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

Se probó que la constante en la desigualdad (1.16) no depende del dominio. Si la transformada de Cauchy está definida en todo el plano (basta verificarlo en un punto) para una función $g \in L^p(\mathbb{C})$, $p > 2$, entonces

$$\begin{aligned} |Pg(z_1)-Pg(z_2)| &= \lim_{R\to\infty} \left|P(g\,\chi_{B(0,R)})(z_1) - P(g\,\chi_{B(0,R)})(z_2)\right| \\ &\leq \lim_{R\to\infty} M_2||g||_{L^p(B(0,R))}|z_1-z_2|^{\alpha} \\ &= M_2||g||_{L^p(\mathbb{C})}|z_1-z_2|^{\alpha}. \end{aligned}$$

Es decir, (1.16) vale también si el dominio no es acotado.

La buena definición en casi todo punto y la acotación en $L^p(\mathbb{C})$ $(1 < p < \infty)$ de S se obtienen inmediatamente de la teoría de Calderón-Zygmund (ver por ejemplo, [17, Capítulo 2]). Sólo es necesario probar

Proposición 1.3.2. *w^{-2} es un núcleo de Calderón-Zygmund homogéneo de grado -2.*

Demostración. La acotación que debe verificar w^{-2} es trivial:

$$|w^{-2}| \leq \frac{1}{|w|^2}.$$

También lo es la de su gradiente:

$$|\nabla(w^{-2})| = |(-2\,w^{-3}, -2\,i\,w^{-3})| \leq \frac{C}{|w|^3}$$

Finalmente vale

$$\begin{aligned}
\int_{a<|w|<b} w^{-2}\,dm(w) &= \int_{a<|w|<b} \frac{\overline{w}^2}{|w|^4}\,dm(w) = \\
&= \int_{a<|w|<b} \frac{\overline{i\,w}^2}{|i\,w|^4}\,dm(w) = \\
&= -\int_{a<|w|<b} \frac{\overline{w}^2}{|w|^4}\,dm(w) = \\
&= -\int_{a<|w|<b} w^{-2}\,dm(w),
\end{aligned}$$

lo que implica que la integral sobre coronas es cero. □

1.4 Propiedades

Consideraremos ahora la validez de las definiciones formales de P y S, que son la razón por la que estos operadores son relevantes para estudiar las derivadas complejas.

Proposición 1.4.1. *Sea Ω un dominio acotado. Si $g \in L^p(\Omega)$ para algún $p > 1$ entonces*

$$\begin{aligned}
\partial_x(Pg) &= Sg + g, \\
\partial_y(Pg) &= i(Sg - g).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\partial Pg = Sg, \tag{1.17}$$

$$\overline{\partial} Pg = g. \tag{1.18}$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} (-\pi)\, Pg(z)\, \partial_x\varphi(z)\, dm(z) = \int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w-z}\, dm(w)\, \partial_x\varphi(z)\, dm(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w-z}\, \partial_x\varphi(z)\, dm(w)\, dm(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w-z}\, \partial_x\varphi(z)\, dm(z)\, dm(w) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|w-z|>\epsilon} \frac{\partial_x\varphi(z)}{w-z}\, dm(z)\, g(w)\, dm(w) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \lim_{\epsilon\to 0} \left[- \int_{|w-z|>\epsilon} \frac{\varphi(z)}{(w-z)^2}\, dm(z) + \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{\varphi(z)}{w-z} \frac{w_1 - z_1}{\epsilon}\, dS(z) \right] g(w)\, dm(w) \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{C}} \lim_{\epsilon\to 0} \left[- \int_{|w-z|>\epsilon} \frac{\varphi(z)\, g(w)}{(w-z)^2}\, dm(z) \right] dm(w)}_{(i)} + \\
&+ \int_{\mathbb{C}} \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0} \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{\varphi(z)-\varphi(w)}{w-z} \frac{w_1 - z_1}{\epsilon}\, dS(z)}_{(ii)}\, g(w)\, dm(w) + \\
&+ \int_{\mathbb{C}} \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0} \int_{|w-z|=\epsilon} \epsilon^{-1} \frac{w_1 - z_1}{w-z}\, dS(z)}_{(iii)}\, \varphi(w) g(w)\, dm(w).
\end{aligned}
$$

El límite puntual en (i) vale también en $L^1(\mathbb{C})$, pues S es un operador de Calderón-Zygmund (el valor principal converge en $L^{p'}(\mathbb{C})$) y $g \in L^p(\mathbb{C})$. Luego

$$
\begin{aligned}
(i) &= -\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{C}} \int_{|w-z|>\epsilon} \frac{\varphi(z)\, g(w)}{(w-z)^2}\, dm(z)\ dm(w) \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{C}} \int_{|w-z|>\epsilon} \frac{\varphi(z)\, g(w)}{(w-z)^2}\, dm(w)\, dm(z) \\
&= -\int_{\mathbb{C}} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|w-z|>\epsilon} \frac{g(w)}{(w-z)^2}\, dm(w)\, \varphi(z)\, dm(z) \qquad (1.19) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \pi\, Sg(z)\, \varphi(z)\, dm(z).
\end{aligned}
$$

El límite en (1.19) también vale en $L^1(\mathbb{C})$, pues el valor principal converge en $L^p(\mathbb{C})$ y φ es acotada y de soporte compacto.

El término (ii) se anula pues

$$
\begin{aligned}
|(ii)| &\leq \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|w-z|=\epsilon} \left| \frac{\varphi(z)-\varphi(w)}{w-z} \right| \frac{|w_1 - z_1|}{\epsilon} \, dS(z) \\
&\leq C \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \; ||\nabla\varphi||_{L^\infty} \qquad (1.20) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por último, si $\sigma(t) = w + \epsilon\, e^{it}$,

$$
\begin{aligned}
(iii) &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon \, \cos(t)\, |\sigma'(t)|}{\epsilon^2\, (\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t))} \, dt = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \, \cos(t)}{\epsilon^2\, (\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t))} \, dt = \qquad (1.21) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(t) - i\cos(t)\,\mathrm{sen}(t)}{\cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t)} \, dt = \\
&= \pi,
\end{aligned}
$$

pues

$$
\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \pi,
$$
$$
\int_0^{2\pi} \cos(t)\,\mathrm{sen}(t)\, dt = 0.
$$

Se concluye que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} Pg(z)\, \partial_x\varphi(z)\, dm(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \pi \; [Sg(z) + g(z)] \; \varphi(z)\, dm(z) \\
&= -\int_{\mathbb{C}} [Sg(z) + g(z)]\, \varphi(z)\, dm(z),
\end{aligned}
$$

es decir, que $\partial_x(Pg) = Sg + g$.

Si observamos ahora que

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}(g)(z) :&= Pg(iz) \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w - iz} \, dm(w) \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (-i) \frac{g(w)}{-iw - z} \, dm(w) \\
&= \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(iu)}{u - z} \, dm(u) \\
&= -iP\tilde{g}(z),
\end{aligned}
$$

con $\tilde{g}(z) = g(iz)$, y que

$$\begin{aligned} S(\tilde{g})(-iz) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\tilde{g}(w)}{(w+iz)^2}\, dm(w) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\tilde{g}(w)}{(iw-z)^2}\, dm(w) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\tilde{g}(-iu)}{(u-z)^2}\, dm(w) \\ &= -S(g)(z), \end{aligned}$$

se sigue

$$\begin{aligned} \partial_y(Pg)(z) &= \partial_x(\tilde{P}g)(-iz) \\ &= -i\partial_x(P\tilde{g})(-iz) \\ &= -i[S\tilde{g}(-iz) + \tilde{g}(-iz)] \\ &= i[S(g)(z) - g(z)], \end{aligned}$$

como se quería demostrar. $\square$

Observemos que, de acuerdo con este resultado, $\overline{\partial}Pg = 0$ en casi todo punto de Ω^c.

Proposición 1.4.2. *Si $g \in C_c^1(\mathbb{C})$, entonces*

$$\begin{aligned} P(\partial_x g) &= Sg + g, \\ P(\partial_y g) &= i(Sg - g). \end{aligned}$$

Es decir,

$$P(\partial g) = Sg, \tag{1.22}$$
$$P(\overline{\partial} g) = g. \tag{1.23}$$

Demostración. Integrando por partes y empleando (1.20) y (1.21) se obtiene

$$\begin{aligned} -\pi P(\partial_x g)(z) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial_x g(w)}{w-z}\, dm(w) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|w-z|>\epsilon} \frac{\partial_x g(w)}{w-z}\, dm(w) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\int_{|w-z|>\epsilon} -\frac{g(w)}{(w-z)^2}\, dm(w) - \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{g(w)}{w-z}\frac{w_1-z_1}{\epsilon}\, dS(w)\right] \\ &= -\pi Sg(z) - \pi g(z). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
-\pi P(\partial_y g)(z) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial_y g(w)}{w-z}\, dm(w) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|w-z|>\epsilon} \frac{\partial_y g(w)}{w-z}\, dm(w) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \left[-\int_{|w-z|>\epsilon} -i \frac{g(w)}{(w-z)^2}\, dm(w) - \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{g(w)}{w-z} \frac{w_2-z_2}{\epsilon}\, dS(w) \right].
\end{aligned}
$$

Ahora escribimos

$$
\begin{aligned}
&\int_{|w-z|=\epsilon} \frac{g(w)}{w-z} \frac{w_2-z_2}{\epsilon}\, dS(w) = \\
&= \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{g(w)-g(z)}{w-z} \frac{w_2-z_2}{\epsilon}\, dS(w) + \int_{|w-z|=\epsilon} \frac{g(z)}{w-z} \frac{w_2-z_2}{\epsilon}\, dS(w).
\end{aligned}
$$

Como vale

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} \int_{|w-z|=\epsilon} \left| \frac{g(w)-g(z)}{w-z} \right| \frac{|w_2-z_2|}{\epsilon}\, dS(z) &\leq C \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon\, \|\nabla g\|_{L^\infty} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

y (si $\sigma(t) = z + \epsilon\, e^{it}$)

$$
\begin{aligned}
\int_{|w-z|=\epsilon} \frac{1}{w-z} \frac{w_2-z_2}{\epsilon}\, dS(w) &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon \operatorname{sen}(t)\, |\sigma'(t)|}{\epsilon^2 (\cos(t) + i \operatorname{sen}(t))}\, dt \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \operatorname{sen}(t)}{\epsilon^2 (\cos(t) + i \operatorname{sen}(t))}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(t)\cos(t) - i \operatorname{sen}^2(t)}{\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)}\, dt \\
&= -i\,\pi,
\end{aligned}
$$

se concluye que $-\pi P(\partial_y g)(z) = -i\pi Sg(z) + i\pi g(z)$. □

Haciendo uso de la Proposición 1.4.2 se puede demostrar que (1.18) vale para funciones más generales:

Proposición 1.4.3. *Sea Ω un dominio acotado y sea $g \in L^1(\Omega)$. Entonces*

$$
\overline{\partial} P g = g
$$

en el sentido dado por (1.6).

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, sabemos por la proposición anterior que

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= P(\overline{\partial}\varphi)(z)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}\varphi(w)}{w-z}\, dm(w).\end{aligned}$$

para casi todo z. Luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} Pg(z)\, \overline{\partial}\varphi(z)\, dm(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w-z}\, \overline{\partial}\varphi(z)\, dm(w)\, dm(z)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w-z}\, \overline{\partial}\varphi(z)\, dm(z)\, dm(w)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} g(w)\int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}\varphi(z)}{w-z}\, dm(z)\, dm(w)\\ &= -\int_{\mathbb{C}} g(w)\, P(\overline{\partial}\varphi)(w)\, dm(w)\\ &= -\int_{\mathbb{C}} g(w)\, \varphi(w)\, dm(w),\end{aligned}$$

es decir, $\overline{\partial}Pg = g$. □

La proposición 1.4.2 también implica:

Proposición 1.4.4. *Si $g \in C_c^1(\mathbb{C})$, entonces*

$$S(\overline{\partial}g) = \partial g. \tag{1.24}$$

Demostración. Derivando (1.23) respecto a z se obtiene

$$\partial P(\overline{\partial}g) = \partial g.$$

Pero $\overline{\partial}g$ verifica las hipótesis de (1.4.1); el resultado se sigue entonces de (1.17). □

Este resultado puede extenderse por la continuidad de S en $L^p(\mathbb{C})$:

Proposición 1.4.5. *Sea $g \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ con $1 < p < \infty$, entonces*

$$S(\overline{\partial}g) = \partial g.$$

Demostración. Considero una sucesión de funciones $g_n \in C_c^1(\mathbb{C})$ que converjan a g en $W^{1,p}(\mathbb{C})$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\partial g_n &\longrightarrow \partial g,\\ \overline{\partial}g_n &\longrightarrow \overline{\partial}g,\end{aligned}$$

en $L^p(\mathbb{C})$. La proposición anterior nos permite asegurar

$$\partial g_n = S(\overline{\partial} g_n) \longrightarrow S(\overline{\partial} g),$$

de modo que $S(\overline{\partial} g) = \partial g$. □

Volviendo a P, veamos ahora su propiedad básica de acotación:

Lema 1.4.6. *Sea Ω un dominio acotado del plano, sea $2 < p < \infty$. Si $g \in L^p(\Omega)$ entonces $Pg \in L^p(\mathbb{C})$ y además*

$$||Pg||_{L^p(\mathbb{C})} \leq C||g||_{L^p(\Omega)}.$$

Es decir, $P : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\mathbb{C})$ es acotada.

Demostración. Sea $R > 0$ tal que $\Omega \subseteq B(0, R)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi||Pg||_{L^p(\mathbb{C})} &= \left(\int_{\mathbb{C}} \left| \int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w-z}\, dm(w) \right|^p dm(z)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \underbrace{\left(\int_{|z|>2R} \left| \int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w-z}\, dm(w) \right|^p dm(z)\right)^{\frac{1}{p}}}_{(i)} + \underbrace{\left(\int_{|z|<2R} \left| \int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w-z}\, dm(w) \right|^p dm(z)\right)^{\frac{1}{p}}}_{(ii)}.
\end{aligned}$$

Si el $|z| > 2R$ entonces $|w - z| \geq |z| - |w| \geq |z| - R \geq |z|/2$ para todo $w \in B(0, R)$. Usando la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned}
(i) &\leq \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{|z|>2R} \frac{|g(w)|^p}{|w-z|^p}\, dm(z)\right)^{\frac{1}{p}} dm(w) \\
&\leq \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{|z|>2R} \frac{2^p|g(w)|^p}{|z|^p}\, dm(z)\right)^{\frac{1}{p}} dm(w) \\
&= 2||g||_{L^1(\Omega)} \left(\int_{|z|>2R} |z|^{-p}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

El último factor es finito pues $p > 2$; como Ω es acotado también vale que $||g||_{L^1(\Omega)} \leq C_1||g||_{L^p(\Omega)}$. Obtuvimos entonces que $(i) \leq C_2||g||_{L^p(\Omega)}$. Falta acotar (ii), para lo que usamos la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}
(ii) &\leq \left(\int_{|z|<2R} \left(||g||_{L^p(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |w-z|^{-p'}\, dm(w)\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^p dm(z)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq ||g||_{L^p(\Omega)} \left(\int_{B(0,3R)} |w|^{-p'}\, dm(w)\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{|z|<2R} dm(z)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_3||g||_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

pues $p' < 2$. □

Empleando ahora la proposición 1.4.1 podemos refinar este resultado:

Teorema 4. *Sea Ω un dominio acotado del plano, sea $2 < p < \infty$. Si $g \in L^p(\Omega)$ entonces $Pg \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ y además*

$$||Pg||_{W^{1,p}(\mathbb{C})} \leq C||g||_{L^p(\Omega)}.$$

Es decir, $P : L^p(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{C})$ es acotada.

Demostración. Es inmediata pues

$$\begin{aligned} &||\partial(Pg)||_{L^p(\mathbb{C})} = ||Sg||_{L^p(\mathbb{C})} \leq C_1||g||_{L^p(\mathbb{C})}, \\ &||\overline{\partial}(Pg)||_{L^p(\mathbb{C})} = ||g||_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

De ahora en más notamos

$$W^{1,p}(\mathbb{C}, \Omega) = \{g \in W^{1,p}(\mathbb{C}) : \overline{\partial}g|_{\mathbb{C}\setminus\Omega} \equiv 0\}.$$

Éste es un subespacio cerrado de $W^{1,p}(\mathbb{C})$. Podemos usar la continuidad recién demostrada para mejorar los resultados obtenidos en la sección anterior.

Corolario 1.4.7. *Si $g \in W^{1,p}(\mathbb{C}, \Omega)$ (con $2 < p < \infty$) para algún dominio Ω acotado, entonces*

$$P(\overline{\partial}g) = g.$$

De hecho, la hipótesis $\partial g \in L^p(\mathbb{C})$ resultará innecesaria.

Demostración. Considero una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $C_c^1(\mathbb{C})$ que converjan a g en $L^p(\mathbb{C})$. Se pueden tomar de la forma

$$g_n = (g\,\chi_{B(0,n)}) * \rho_{1/n}$$

con $sop(\rho) = B(0,1)$ y $\int \rho = 1$. Para n suficientemente grande tenemos entonces que $\overline{\partial}g_n = \overline{\partial}g * \rho_{1/n}$, que se anula en los puntos de $(\Omega + B(0,1))^c$. Luego $\overline{\partial}g_n$ converge a $\overline{\partial}g$ en $L^p(\Omega + B(0,1))$; el teorema 4 nos indica que

$$g_n = P(\overline{\partial}g_n) \longrightarrow P(\overline{\partial}g) \quad \text{en } L^p(\mathbb{C}).$$

Se concluye que $P(\overline{\partial}g) = g$. □

Teorema 5. *Si Ω es un dominio acotado del plano y $2 < p < \infty$, entonces $P : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\mathbb{C})$ es compacto.*

Demostración. Sea $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L^p(\Omega)$ que convergen débilmente a $g \in L^p(\Omega)$, queremos ver que existe una subsucesión $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que Pg_{n_k} converge fuertemente a Pg. Por la reflexividad de $L^p(\Omega)$, esto bastará para probar la compacidad.

Como las $||g_n||_{L^p(\Omega)}$ deben estar acotadas, se deduce del teorema 3 que las funciones Pg_n son uniformemente acotadas y uniformemente equicontinuas. Por el teorema de Arzelà-Ascoli, se sigue que $(Pg_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debe tener, sobre cada compacto K, una subsucesión Pg_{n_k} que converja uniformemente. Como

$$||Pg_{n_k} - h||_{L^p(K)} \leq ||Pg_{n_k} - h||_{L^\infty(K)}\, m(K)^{1/p},$$

se sigue que dicha subsucesión converge en $L^p(K)$.

Del mismo modo que en la demostración del lema 1.4.6, se puede ver que para cualquier $R > 0$ con $\Omega \subseteq B(0, R/2)$ vale que

$$\int_{B(0,R)^c} |Pg_n(z)|^p dm(z) \leq \left[2||g_n||_{L^1(\Omega)} \left(\int_{|z|>2R} |z|^{-p} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \leq$$
$$\leq 2^p\, m(\Omega)^{p/p'}\, \frac{R^{2-p}}{p-2}\, ||g_n||^p_{L^p(\Omega)},$$

que converge a 0 cuando $R \to \infty$ uniformemente en n, pues las normas en L^p de las funciones g_n están acotadas.

Fijo $\epsilon > 0$, elijo ahora un R tal que

$$\left(\int_{B(0,R)^c} |Pg_n(z)|^p dm(z) \right)^{1/p} < \epsilon/4,$$

para cualquier n, y considero la subsucesión convergente $(Pg_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ obtenida para el compacto $B[0, R]$. Puedo usar que es de Cauchy en $L^p(B[0, R])$ para elegir $k_0 \in \mathbb{N}$ con

$$||Pg_{n_k} - Pg_{n_l}||_{L^p(B[0,R])} < \epsilon/2$$

para todos $k, l \geq k_0$. Se sigue que

$$||Pg_{n_k} - Pg_{n_l}||_{L^p(\mathbb{C})} \leq ||Pg_{n_k}||_{L^p(B(0,R)^c)} + ||Pg_{n_l}||_{L^p(B(0,R)^c)} + ||Pg_{n_k} - Pg_{n_l}||_{L^p(B[0,R])} <$$
$$< \epsilon,$$

y, como ϵ era cualquiera, $(Pg_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^p(\mathbb{C})$. Se concluye que converge en $L^p(\mathbb{C})$, y su límite debe ser Pg pues $Pg_n \to Pg$ en sentido débil, y la convergencia fuerte también implica convergencia débil. □

Pasemos ahora a las propiedades de la transformada de Beurling:

Proposición 1.4.8. *$S : L^2(\mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{C})$ es una isometría.*

Demostración. Sea $g \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, entonces $g = \overline{\partial} Pg$, y $Pg \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ para $2 < p < \infty$. Por (1.9) sabemos que

$$\begin{aligned} ||Sg||_{L^2(\mathbb{C})} &= ||S(\overline{\partial} Pg)||_{L^2(\mathbb{C})} \\ &= ||\partial Pg||_{L^2(\mathbb{C})} \\ &= ||\overline{\partial} Pg||_{L^2(\mathbb{C})} \\ &= ||g||_{L^2(\mathbb{C})}. \end{aligned}$$

Para justificar el uso de la Proposición 1.1.2 falta ver que ∂Pg y $\overline{\partial} Pg$ están en $L^2(\mathbb{C})$. Como S es acotada en $L^2(\mathbb{C})$, entonces $\partial Pg = Sg \in L^2(\mathbb{C})$. Además $\overline{\partial} Pg = g \in C_c^\infty(\mathbb{C}) \subseteq L^2(\mathbb{C})$. □

Esta proposición nos dice, en particular, que la norma del operador S en $L^2(\mathbb{C})$ es $||S||_{L^2 \to L^2} = 1$. Por el teorema de convexidad de Riesz-Thorin ([2, 5.D]) la función $1/p \mapsto \log ||S||_{L^p \to L^p}$ debe ser convexa, luego es continua y

$$\lim_{p \to 2} ||S||_{L^p \to L^p} = ||S||_{L^2 \to L^2} = 1. \tag{1.25}$$

La norma en L^p es desconocida, y es objeto de una conjetura famosa que se debe a T. Iwaniec ([13]):

Conjetura 1.4.9. $||S||_{L^p \to L^p} = \min\left\{p - 1, \frac{1}{p-1}\right\}$.

Cerraremos esta sección probando que la transformada de Beurling es un operador multiplicador de Fourier con símbolo $\xi/\overline{\xi}$, lo que también implica que es una isometría.

Proposición 1.4.10. *Sea $g \in C_c^1(\mathbb{C})$, entonces*

$$\widehat{Sg}(\xi) = \frac{\xi}{\overline{\xi}}\, \hat{g}(\xi).$$

Demostración. Es semejante a la proposición anterior, sólo que ahora hago uso de (1.12):

$$\widehat{Sg}(k) = \widehat{S(\overline{\partial} Pg)}(k) = \widehat{\partial Pg}(k) = \frac{k}{\overline{k}}\, \widehat{\overline{\partial} Pg}(k) = \frac{k}{\overline{k}}\, \hat{g}(k).$$

□

1.5 Variantes de los operadores de Beltrami

Además de los ya definidos, necesitaremos estudiar los siguientes dos operadores:

$$\overline{P}g(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{\overline{w}-\overline{z}}dm(w), \tag{1.26}$$

$$\overline{S}g(z) = \overline{S(g)(z)}. \tag{1.27}$$

Sobre $\overline{S}$ hay que observar que sólo es $\mathbb{R}$-lineal. Nos interesará fundamentalmente el primero. Sus propiedades son análogas a las de los otros dos, y se pueden deducir de éstas de manera inmediata usando que

$$\overline{P}g(z) = \overline{P(\overline{g})(z)}. \tag{1.28}$$

El estudio de la buena definición es entonces igual al de P, y se tienen los siguientes resultados:

Proposición 1.5.1. *Sea Ω un dominio acotado del plano, sea $2 < p < \infty$. Si $g \in L^p(\Omega)$ entonces $\overline{P}g \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ y además*

$$||\overline{P}g||_{W^{1,p}(\mathbb{C})} \leq C||g||_{L^p(\Omega)}.$$

Es decir, $\overline{P} : L^p(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{C})$ es acotada.

Demostración. Aplicando el teorema 4,

$$\begin{aligned} ||\overline{P}(g)||_{W^{1,p}(\mathbb{C})} &= ||\overline{P(\overline{g})}||_{W^{1,p}(\mathbb{C})} \\ &\leq C||g||_{L^p(\mathbb{C})}. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.5.2. *Sea Ω un dominio acotado y sea $g \in L^1(\Omega)$. Entonces*

$$\partial\overline{P}g = g$$

en el sentido dado por (1.6).

Demostración. Aplicando la proposición 1.4.3 y (1.4),

$$\begin{aligned} \partial\overline{P}g &= \partial\overline{P(\overline{g})} \\ &= \overline{\overline{\partial}P(\overline{g})} \\ &= g. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.5.3. *Si $g \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ (con $2 < p < \infty$) y ∂g tiene soporte en un dominio Ω acotado, entonces*

$$\overline{P}(\partial g) = g.$$

Demostración. Usamos el corolario 1.4.7 y nuevamente (1.3):

$$\begin{aligned}\overline{P}(\partial g) &= \overline{P(\overline{\partial g})}\\ &= \overline{P(\overline{\partial}\,\overline{g})}\\ &= g.\end{aligned}$$

□

Proposición 1.5.4. *Sea Ω un dominio acotado. Si $g \in L^p(\Omega)$ para algún $p > 1$ entonces*

$$\overline{\partial}\,\overline{P}g = \overline{S}(\overline{g}).$$

Demostración. Aplicamos la proposición 1.4.1:

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\,\overline{P}g &= \overline{\partial}\,\overline{P(\overline{g})}\\ &= \overline{\partial P(\overline{g})}\\ &= \overline{S(\overline{g})}\\ &= \overline{S}(\overline{g}).\end{aligned}$$

□

Proposición 1.5.5. *Si Ω es un dominio acotado del plano y $p > 2$, entonces $\overline{P} : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\mathbb{C})$ es compacto.*

Demostración. Supongamos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^p(\Omega)$ que converge débilmente a $g \in L^p(\Omega)$, entonces $\overline{g_n}$ debe converger débilmente a $\overline{g}$. Por el teorema 5, $(P\overline{g_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(P\overline{g_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $P\overline{g}$. Apliquemos (1.28) para ver que $\overline{P}g_{n_k} \longrightarrow \overline{P}g$:

$$\begin{aligned}||\overline{P}g_{n_k} - \overline{P}g||_{L^p(\mathbb{C})} &= ||\overline{P\overline{g_{n_k}}} - \overline{P\overline{g}}||_{L^p(\mathbb{C})}\\ &= ||P\overline{g_{n_k}} - P\overline{g}||_{L^p(\mathbb{C})},\end{aligned}$$

que tiende a cero por lo dicho anteriormente. □

1.6 Conclusiones

Probaremos ante todo el teorema fundamental prometido en la sección 1.1.

Teorema 6. *Sea $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\overline{\partial} g = 0$. Entonces g es holomorfa en Ω.*

Demostración. Basta probar que g es holomorfa en un disco alrededor de cualquier punto $z_0 \in \Omega$; podemos suponer $z_0 = 0$ sin pérdida de generalidad. Consideramos entonces un disco $B(0,R) \subseteq \Omega$ tal que $g \in L^1(B(0,R))$, y estudiamos la función de Green biarmónica

$$Z(z,\zeta) = 2|z-\zeta|^2 \log \frac{|R^2 - z\overline{\zeta}|}{R|z-\zeta|} - (R^2 - |z|^2)\left(1 - \frac{|\zeta|^2}{R^2}\right),$$

definida para $z, \zeta \in B[0,R]$. Esta función pertenece a $C^1(\overline{\Omega})$ y además verifica, para cualquier z en el borde del disco,

$$Z(z,\zeta) = Z_x(z,\zeta) = Z_y(z,\zeta) = 0,$$

siempre que $|\zeta| < R$.

Se sigue entonces que la función dada por

$$\varphi_\zeta(z) = \begin{cases} Z(z,\zeta) & \text{si } |z| \le R \\ 0 & \text{si } |z| > R \end{cases}$$

pertenece a $C^1_c(\Omega)$. Como $\overline{\partial} g = 0$ en Ω,

$$\begin{aligned} \int_\Omega g\, \partial_{\overline{z}} \varphi_\zeta \, dm &= \int_{B(0,R)} g(z)\, \partial_{\overline{z}} Z(z,\zeta)\, dm(z) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para un punto ζ arbitrario en $B(0,R)$. Aplicamos ahora $\partial_\zeta \partial_{\overline{\zeta}}$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\zeta \partial_{\overline{\zeta}} \int_{B(0,R)} g(z)\, \partial_{\overline{z}} Z(z,\zeta)\, dm(z) \\ &= \int_{B(0,R)} g(z)\, \frac{\partial^3 Z(z,\zeta)}{\partial_\zeta \partial_{\overline{\zeta}} \partial_{\overline{z}}}\, dm(z), \end{aligned} \tag{1.29}$$

donde el cambio del orden de la derivada y la integral se justifica fácilmente para las derivadas débiles. Además se obtiene que

$$\frac{\partial^3 Z(z,\zeta)}{\partial_\zeta \partial_{\overline{\zeta}} \partial_{\overline{z}}} = \frac{1}{\overline{\zeta} - \overline{z}} + \frac{R^2 z - 2R^2\zeta + \overline{z}\zeta^2}{(R^2 - \overline{z}\zeta)^2} + \frac{z\overline{\zeta}}{R^2 - z\overline{\zeta}}.$$

Se sigue entonces de (1.29) que

$$\begin{aligned}\overline{P}(g\,\chi_{B(0,R)})(\zeta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{B(0,R)} \frac{g(z)}{\overline{z}-\overline{\zeta}}\,dm(z)\\ &= \Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_2(\zeta)},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Phi_1(\zeta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{B(0,R)} g(z)\frac{R^2 z - 2R^2\zeta + \overline{z}\zeta^2}{(R^2-\overline{z}\zeta)^2}\,dm(z),\\ \Phi_2(\zeta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{B(0,R)} \overline{g(z)}\frac{\overline{z}\zeta}{R^2-\overline{z}\zeta}\,dm(z).\end{aligned}$$

Como Φ_1 y Φ_2 son holomorfas, se concluye por la proposición 1.5.2 que en casi todo punto de $B(0,R)$,

$$g = \partial\overline{P}(g\,\chi_{B(0,R)}) = \Phi_1',$$

que también lo es. □

Observemos que en esta demostración sólo se usó que $\overline{\partial}g = 0$ cumple (1.6), es decir, la definición directa de $\overline{\partial}$. La existencia de ∂g no es necesaria como hipótesis, y surge de la demostración.

Gracias a este teorema se podrá, de ahora en más, hacer uso de la teoría de funciones holomorfas. Por ejemplo, la siguiente proposición será de mucha utilidad en esta tesis:

Proposición 1.6.1. *Sea Ω un dominio acotado del plano, y sea $g \in L^p(\Omega)$ $(p > 2)$. Entonces*

$$Pg(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$$

cuando $|z| \to \infty$.

Demostración. Sea $R > 0$ tal que $\Omega \subseteq B(0,R)$. Como $\overline{\partial}Pg = g = 0$ afuera de $B(0,R)$, entonces Pg es holomorfa en esa región. Se sigue que para |z|>R puedo escribir la función como una serie de Laurent, es decir

$$Pg(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Sus coeficientes verificarán

$$R \geq \limsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n},$$

lo que permite asegurar que $|a_{-n}| < (R+C)^n$ para todo $n \leq 1$. Para $|z| > 2(R+C)$ vale

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=-\infty}^{-2} a_n z^n\right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R+C}{|z|}\right)^n \\
&\leq \frac{1}{1-(R+C)/|z|} - 1 - \frac{R+C}{|z|} \\
&= \frac{1}{(|z|/(R+C))^2 - |z|/(R+C)} \\
&= \left(\frac{R+C}{|z|}\right)\left(\frac{1}{|z|/(R+C)-1}\right) \\
&\leq (R+C)\frac{1}{|z|}.
\end{aligned}$$

Claramente

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n\right| \leq C' \frac{1}{|z|}.$$

Por otra parte, la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

define una función entera. Pg es acotada por (1.15), luego

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right|\right|_{L^\infty(B(0,R)^c)} &\leq \left|\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\right|\right|_{L^\infty(B(0,R)^c)} + \left|\left|\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n\right|\right|_{L^\infty(B(0,R)^c)} \\
&\leq M_1 ||g||_{L^p(\mathbb{C})} + \frac{C'}{R},
\end{aligned}$$

y se sigue que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es acotada. Por el teorema de Liouville, esta suma es constante ($a_n = 0\, \forall n \geq 1$). Debe ser 0 pues si no

$$|Pg(z)| \geq |a_0| - C'/|z|$$

para $|z|$ suficientemente grande, lo que es imposible pues $Pg \in L^p(\mathbb{C})$. $\square$

Recordemos que la definición directa de las derivadas complejas (dada por la proposición 1.1.1) no es equivalente a la original si se desea considerar una de las derivadas por separado. Podría ocurrir, en general, que la otra derivada no existiera, y en ese caso la definicion (1.1-1.2) no tendría sentido. Pero veremos ahora, usando la teoría desarrollada en este capítulo, que esto no puede ocurrir si la derivada está en $L^p(\Omega)$ para algún $1 < p < \infty$.

Teorema 7. *Sea Ω un dominio acotado y sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si $\overline{\partial} f$ existe en el sentido de (1.6), y $\overline{\partial} f \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$, entonces ∂f existe en el sentido de (1.5) y pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$.*

Del mismo modo, si ∂f existe en el sentido de (1.5), y $\partial f \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$, entonces $\overline{\partial} f$ existe en el sentido de (1.6) y pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$.

Demostración. Probemos lo primero. Como $\overline{\partial} f \in L^p(\Omega)$, la proposición 1.4.1 nos dice que $P(\overline{\partial} f)$ tiene derivadas en el sentido de (1.1-1.2) que cumplen

$$\overline{\partial} P(\overline{\partial} f) = \overline{\partial} f,$$
$$\partial P(\overline{\partial} f) = S(\overline{\partial} f).$$

Luego vale, en el sentido dado por (1.6), que

$$\overline{\partial}(f - P(\overline{\partial} f)) = 0$$

en Ω, es decir que

$$f = \Phi + P(\overline{\partial} f),$$

con Φ holomorfa. Se concluye que ∂f existe, y es

$$\partial f = \Phi' + S(\overline{\partial} f),$$

que pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$ porque Φ' es continua.

Para probar la segunda parte, usando (1.3), $\partial f = \overline{\overline{\partial}\, \overline{f}}$. Se sigue que $\overline{\partial}\, \overline{f}$ está en $L^p(\Omega)$, por lo que $\partial \overline{f}$ existe y está en $L^p_{loc}(\Omega)$. Como $\overline{\partial} f = \overline{\partial \overline{f}}$, se obtiene que también existe y $\overline{\partial} f \in L^p_{loc}(\Omega)$. □

Capítulo 2

Aplicaciones cuasiconformes

2.1 Definición y propiedades

Notaremos por ∂_α a la derivada compleja en la dirección de α, es decir

$$\partial_\alpha f(z) = \lim_{r \to 0} \frac{f(z + re^{i\alpha} - f(z))}{re^{i\alpha}} = \partial f(z) + e^{-2i\alpha}\overline{\partial} f(z).$$

Definición 2.1.1. *Una aplicación K-cuasiconforme es un homeomorfismo f definido en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ que preserva el sentido, es absolutamente continuo sobre líneas y verifica*

$$\max_{0 \leq \alpha < 2\pi} |\partial_\alpha f| \leq K \min_{0 \leq \alpha < 2\pi} |\partial_\alpha f| \tag{2.1}$$

en casi todo punto. Se dice que una aplicación es cuasiconforme si es K-cuasiconforme para algún K.

En términos de ∂f y $\overline{\partial} f$ la condición (2.1) se puede escribir como

$$|\partial f| + |\overline{\partial} f| \leq K(|\partial f| - |\overline{\partial} f|),$$

es decir

$$|\overline{\partial} f| \leq \frac{K-1}{K+1} |\partial f|.$$

Observemos ahora que el Jacobiano de una función compleja será

$$J_f(z) = |\partial f(z)|^2 - |\overline{\partial} f(z)|^2,$$

por lo que para una aplicación cuasiconforme

$$\frac{4K}{(K+1)^2} |\partial f(z)|^2 \leq J_f(z) \leq |\partial f(z)|^2.$$

Del mismo modo

$$||Df(z)||^2 = |\partial f(z)|^2 + |\overline{\partial} f(z)|^2$$

verifica

$$|\partial f|^2 \leq ||Df(z)||^2 \leq \frac{2K^2+2}{(K+1)^2}\,|\partial f|^2.$$

Se tiene entonces que $|\partial f(z)|^2$, $J_f(z)$ y $||Df(z)||^2$ son comparables con constantes que sólo dependen de K.

Proposición 2.1.1. *El Jacobiano de una aplicación cuasiconforme es positivo en casi todo punto.*

Demostración. Ver [14, IV.1.5]. □

Es inmediato a partir de esto que $\partial f \neq 0$ en casi todo punto, así que podemos definir la dilatación compleja

$$\chi_f(z) = \frac{\overline{\partial} f(z)}{\partial f(z)}.$$

Verifica obviamente

$$|\chi_f| \leq \frac{K-1}{K+1} < 1 \tag{2.2}$$

y

$$\overline{\partial} f = \chi_f \, \partial f. \tag{2.3}$$

Ésta es la ecuación diferencial de Beltrami. Todas las soluciones homeomorfas y absolutamente continuas sobre líneas de (2.3) son, a su vez, aplicaciones K-cuasiconformes, siempre que se cumpla (2.2).

Teorema 8. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un dominio arbitrario y χ es una función medible en Ω tal que*

$$\sup_{z\in\Omega} |\chi(z)| < 1,$$

entonces existe una aplicación cuasiconforme f definida en Ω cuya dilatación compleja es igual en casi todo punto a χ.

Demostración. Ver [14, V.1.3]. □

Claro que no todas las soluciones de (2.3) son cuasiconformes:

Definición 2.1.2. *Diremos que una aplicación f definida en una dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es K-cuasiregular si $f \in H^1_{loc}(\Omega)$ y*

$$\overline{\partial} f = \chi \, \partial f$$

para alguna función medible χ con $|\chi(z)| \leq (K-1)/(K+1)$ en casi todo punto. Se dice que una aplicación es cuasiregular si es K-cuasiregular para algún K.

Teorema 9. *Si f es una aplicación K-cuasiregular de un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $g : \Omega \longrightarrow \Omega'$ es una aplicación K-cuasiconforme, entonces f puede escribirse como*

$$f = h \circ g,$$

donde h es una función holomorfa en Ω'.

Demostración. Ver [14, Teorema VI.2.2] y [14, IV.5.2]. □

En particular, las aplicaciones cuasiregulares son soluciones continuas de (2.3).

Teorema 10. *Si f es una aplicación K-cuasiconforme definida en todo el plano complejo, entonces existe un homeomorfismo creciente $\gamma_K : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ tal que*

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|f(z) - f(x)|} \leq \gamma_K \left(\frac{|y - x|}{|z - x|} \right)$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{C}$ distintos. La función γ_K sólo depende de K.

Demostración. Se puede ver en [6, Teorema 3.5.3]. □

2.2 Distorsión del área

Teorema 11. *Sea f una aplicación K-cuasiconforme con $fB(0,1) = B(0,1)$ y $f(0) = 0$. Entonces existe una constante C_K tal que*

$$|f(E)| \leq C_K |E|^{1/K}$$

para todo $E \subseteq B(0,1)$ medible.

La demostración original se puede encontrar en [5]; una más sencilla se sigue de [12]. Será útil tener una expresión invariante de este teorema:

Corolario 2.2.1. *Existe una constante C_K tal que para cualquier aplicación K-cuasiconforme f de $\mathbb{C}$, cualquier disco $B \subseteq \mathbb{C}$ y cualquier medible $E \subseteq B$ vale*

$$|f(E)| \leq C_K |f(B)| \left(\frac{|E|}{|B|} \right)^{1/K}.$$

Demostración. Si una aplicación es K-cuasiconforme, también lo es su composición con dilataciones y traslaciones. Basta entonces probar la desigualdad para $B = B(0, 1/2)$, y para $f(0) = 0$.

Ahora, f es cuasi-simétrica (teorema 10), es decir,

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|f(z) - f(x)|} \leq \gamma_K \left(\frac{|y - x|}{|z - x|} \right)$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{C}$ distintos, donde γ_K es un homeomorfismo creciente de $[0, \infty)$ en sí mismo (que sólo depende de K). Necesitaremos dos propiedades que se deducen de esto.

Primero, como $fB(0, 1)$ es abierta (f es un homeomorfismo), puedo considerar el supremo R entre todos los ρ tales que $B(0, \rho) \subseteq fB(0, 1)$; se cumple que $B(0, R) \subseteq \overline{fB(0, 1)}$, y además sus fronteras deben intersecarse. La cuasi-simetría indica entonces que

$$|f(y)| \leq \gamma_K \left(\frac{|y|}{|z|} \right) |f(z)|,$$

si $f(y), f(z)$ están en los bordes de $fB(0, 1)$ y $B(0, R)$, respectivamente (es lo mismo elegir y, z en los bordes de $B(0, 1)$ y $f^{-1}B(0, R)$). Puedo elegir $|f(y)| \geq \frac{1}{2} \operatorname{diam}(fB(0, 1))$ y $f(z) \in \partial(fB(0, 1))$, lo que nos da

$$\operatorname{diam}(fB(0, 1)) \leq 2 \, \gamma_K \, (1) \, R.$$

Como $B(0, R) \subseteq \overline{fB(0, 1)}$, se sigue que

$$(\operatorname{diam} fB(0, 1))^2 \leq \widetilde{C_1}(K) |fB(0, 1)|.$$

Nuevamente compongo con dilataciones para ver que

$$(\operatorname{diam} fB(0, 1/2))^2 \leq \widetilde{C_1}(K) |fB(0, 1/2)|,$$

y, como por otro argumento similar de cuasi-simetría vale

$$\operatorname{diam} fB(0, 1/2) \geq \frac{1}{\gamma_K(2)} \operatorname{diam} fB(0, 1),$$

se concluye que

$$(\operatorname{diam} fB(0, 1))^2 \leq C_1(K) |fB(0, 1/2)|. \tag{2.4}$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, considero dos puntos $y, z \in \mathbb{C}$ con $|y| = 1/2$ y $|z| < 1$ tales que

$$|f(y) - f(z)| \leq \operatorname{dist}\left(\overline{fB(0, 1/2)}, \mathbb{C} \setminus fB(0, 1)\right) + \epsilon = \operatorname{dist}(fB(0, 1/2), \mathbb{C} \setminus fB(0, 1)) + \epsilon.$$

Por la cuasi-simetría,

$$\frac{|f(0)-f(z)|}{|f(y)-f(z)|} \leq \gamma_K \left(\frac{|0-z|}{|y-z|} \right) \leq \gamma_K (2) \,. \tag{2.5}$$

Pude a su vez elegir z de modo tal que exista z' con $|z'| \leq |z|$ tal que $|f(z')-f(0)| \geq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(fB(0,1)) - \epsilon$, con lo cual

$$\frac{|f(z')-f(0)|}{|f(z)-f(0)|} \leq \gamma_K \left(\frac{|z'-0|}{|z-0|} \right) \leq \gamma_K (1) \,.$$

Es decir,

$$\operatorname{diam}(fB(0,1)) - 2\epsilon \leq 2\gamma_K(1)|f(z)-f(0)|.$$

Si junto esto con (2.5) obtengo

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(fB(0,1)) &\leq 2\gamma_K(1)\gamma_K(2)|f(y)-f(z)| + 2\epsilon \leq \\ &\leq C_2(K)\left[\operatorname{dist}\left(fB(0,1/2), \mathbb{C}\setminus fB(0,1)\right) + \epsilon\right] + 2\epsilon \end{aligned}$$

Como ϵ es cualquiera,

$$\operatorname{diam}(fB(0,1)) \leq C_2(K) \operatorname{dist}\left(fB(0,1/2), \mathbb{C}\setminus fB(0,1)\right). \tag{2.6}$$

Usaremos (2.4) y (2.6) para probar el corolario. Consideramos una aplicación conforme $\Phi : f(B(0,1)) \to B(0,1)$ que verifique $\Phi(0) = 0$. Aplicando (2.6) a $\Phi \circ f$, se obtiene que

$$\operatorname{dist}\left(\Phi fB(0,1/2), \mathbb{C}\setminus B(0,1)\right) \geq \frac{2}{C_2(K)},$$

luego $\Phi fB(0,1/2) \subseteq B(0,r_K)$ para $r_K = 1 - \frac{2}{C_2(K)} < 1$. Si ahora $z_0 \in B(0,r_K)$, considero la función $\lambda : B(0,1) \to fB(z_0, 1-r_K)$ dada por

$$\lambda(x) = \Phi^{-1}(z_0 + (1-r_K)x),$$

y aplico el teorema del cuarto de Koebe (ver por ejemplo [3, Corolario 5.3]) para obtener

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(fB(0,1)) &\geq \operatorname{diam}(fB(z_0, 1-r_K)) \\ &\geq \operatorname{diam}(\lambda B(0,1)) \\ &\geq \frac{|\lambda'(0)|}{2} \\ &= \frac{1-r_K}{2}\frac{1}{|\Phi'(\Phi^{-1}(z_0))|}. \end{aligned}$$

Es decir, que para cualquier $z \in B(0,1/2)$ vale

$$\begin{aligned}|\Phi'(z)| &\geq \frac{1-r_K}{2}\frac{1}{\operatorname{diam} f B(0,1)} \\ &= \frac{C_3(K)}{\operatorname{diam} f B(0,1)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Junto ahora esto con (2.4) y el teorema 11 para concluir que, si $E \subseteq B$,

$$\begin{aligned}\frac{|f(E)|}{|f(B)|} &\leq C_1(K)\frac{|f(E)|}{(\operatorname{diam} f B(0,1))^2} \\ &\leq C_4(K)\int_{f(E)} |\Phi'(z)|^2\, dm(z) \\ &= C_4(K)\int_{f(E)} J_\Phi(z)\, dm(z) \\ &= C_4(K)\, |\Phi \circ f(E)| \\ &\leq C(K)\, |E|^{1/K},\end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

2.3 El Jacobiano como peso A_p

Usaremos ahora la teoría obtenida en las secciones anteriores para probar el teorema 12, que expresa el Jacobiano de una aplicación cuasiconforme como un peso A_p. La utilidad de este resultado radica en un teorema de Coifman y Fefferman ([10]), que asegura que los operadores de Calderón-Zygmund (como la transformada de Beurling) son acotados en los espacios L^p_w para w cualquier peso A_p. Usaremos esto en el próximo capítulo cuando se quiera hallar el rango de invertibilidad de los operadores de Beltrami.

Corolario 2.3.1. *Existe una constante $C(K)$ tal que si $B \subseteq \mathbb{C}$ es un disco y f es una aplicación K-cuasiconforme de $\mathbb{C}$ entonces*

$$\frac{1}{|B|}\int_B (|\partial f| + |\overline{\partial} f|)^p\, dm \leq \frac{p\, C(K)}{(1+1/\kappa)-p}\left(\frac{|f(B)|}{|B|}\right)^{\frac{p}{2}}$$

para todo $p \in [1, 1+1/\kappa)$, donde $\kappa = \frac{K-1}{K+1}$. La estimación también vale si B es un cuasi-disco, es decir, la imagen de un disco por una aplicación K-cuasiconforme del plano.

Demostración. Primero consideramos el caso en que B es un disco. Componiendo a f con dilataciones, podemos suponer que $|B| = |f(B)| = 1$. Aplicamos ahora el corolario 2.2.1 a los conjuntos $E_t = \{z \in B : |\partial f(z)|^2 + |\overline{\partial} f(z)|^2 \geq t\}$ con $t > 0$, para obtener

$$\begin{aligned} |E_t| &\leq t^{-1} \int_{E_t} (|\partial f|^2 + |\overline{\partial} f|^2)\, dm \\ &\leq C'(K)\, t^{-1} \int_{E_t} (|\partial f|^2 - |\overline{\partial} f|^2)\, dm \\ &= C'(K)\, t^{-1} |f(E_t)| \\ &\leq C''(K) |E_t|^{1/K}, \end{aligned}$$

donde se usó que $J(f)$ y $||Df||^2$ son comparables, con cotas que sólo dependen de K. Despejando $|E_t|$ se sigue que

$$\begin{aligned} |E_t|^{1-1/K} &\leq t^{-1} C''(K), \\ |E_t| &\leq C''(K) t^{K/(1-K)}, \end{aligned}$$

lo que vale trivialmente si $|E_t| = 0$. De ahí que

$$\begin{aligned} \int_B (|\partial f| + |\overline{\partial} f|)^p\, dm &\leq 2^{p/2} \int_B (|\partial f|^2 + |\overline{\partial} f|^2)^{p/2}\, dm \\ &= 2^{p/2} \int_0^\infty \frac{p}{2}\, t^{p/2-1} |E_t|\, dt \\ &\leq 2^{p/2} C''(K) \frac{p}{2} \int_1^\infty t^{p/2-1}\, t^{K/(1-K)}\, dt \;+\; 2^{p/2} \frac{p}{2} \int_0^1 t^{p/2-1}\, dt \\ &= \frac{2^{p/2} C''(K) p}{(1 + 1/\kappa) - p} + \frac{2^{p/2}}{(1 + 1/\kappa) - p} \\ &\leq \frac{p\, C(K)}{(1 + 1/\kappa) - p}, \end{aligned}$$

pues

$$\frac{K}{K-1} - \frac{p}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\kappa} - p \right).$$

Eso completa la demostración para el caso del disco. Si ahora B es un cuasidisco, el resultado es inmediato pues por cuasi-simetría existe un disco $B_1 \supseteq B$ tal que $|B_1| \leq C_2(K)|B|$ y $|f(B_1)| \leq C_3(K)|f(B)|$. (Si no uso esto después lo borro) $\square$

Teorema 12. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación $K-$cuasiconforme, y sea $p \in [2, 1 + 1/\kappa)$ con $\kappa = (K-1)/(K+1)$. Si escribimos*

$$w = |J_f|^{1-p/2},$$

se tiene que $w \in A_2$, con $|w|_{A_2} \leq p\, C(K)/(1 + 1/\kappa - p)$.

Demostración. Sea B una bola y sea $g = f^{-1}$. Se tiene entonces que

$$|J_f| = |\det Df| = |\det(Dg \circ g^{-1})^{-1}| = |J_g \circ g^{-1}|^{-1},$$

luego $w = |J_g \circ g^{-1}|^{p/2-1}$. Usando el corolario 2.3.1 para el cuasi-disco $f(B)$, y que $|J_g| = |\partial g|^2 - |\overline{\partial} g|^2 \leq (|\partial g| + |\overline{\partial} g|)^2$ se prueba que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B w\, dm &= \frac{1}{|B|}\int_B |J_g \circ g^{-1}|^{p/2-1}\, dm \\
&= \frac{1}{|B|}\int_{f(B)} |J_g|^{p/2-1}|J_g|\, dm \\
&= \frac{1}{|B|}\int_{f(B)} |J_g|^{p/2}\, dm \\
&\leq \frac{|f(B)|}{|B|}\frac{1}{|f(B)|}\int_{f(B)} (|\partial g| + |\overline{\partial} g|)^p\, dm \\
&\leq \frac{p\, C(K)}{(1+1/\kappa)-p}\frac{|f(B)|}{|B|}\left(\frac{|g\circ f(B)|}{|f(B)|}\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \frac{p\, C(K)}{(1+1/\kappa)-p}\left(\frac{|f(B)|}{|B|}\right)^{1-\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Además, si $p-2 \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B w^{-1}\, dm &= \frac{1}{|B|}\int_B |J_f|^{p/2-1}\, dm \\
&\leq \frac{p\, C(K)}{(1+1/\kappa)-(p-2)}\left(\frac{|f(B)|}{|B|}\right)^{\frac{p}{2}-1},
\end{aligned}$$

e igualmente, si $p-2 < 1$, se obtiene de la desigualdad de Hölder que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B w^{-1}\, dm &= \frac{1}{|B|}\int_B |J_f|^{p/2-1}\, dm \\
&\leq \frac{1}{|B|}\left(\int_B \left(|J_f|^{p/2-1}\right)^{\frac{1}{p/2-1}}\, dm\right)^{p/2-1}\left(\int_B 1^{\frac{2}{4-p}}\right)^{2-p/2} \\
&= \left(\frac{|f(B)|}{|B|}\right)^{\frac{p}{2}-1} \\
&\leq \frac{p\, C'(K)}{(1+1/\kappa)-(p-2)}\left(\frac{|f(B)|}{|B|}\right)^{\frac{p}{2}-1},
\end{aligned}$$

para alguna constante $C'(K) > C(K)$.

Se concluye entonces que

$$\begin{aligned}
|w|_{A_2} &= \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w\, dm \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-1}\, dm \right) \\
&\leq \frac{p\, C'(K)}{(1+1/\kappa) - p} \, \frac{p\, C'(K)}{(1+1/\kappa) - (p-2)} \\
&\leq \frac{p\, C'(K)}{(1+1/\kappa) - p} \, \frac{p\, C'(K)}{2} \\
&\leq \frac{p\,(1+1/\kappa)\, C'(K)^2}{(1+1/\kappa) - p} \\
&\leq \frac{pC''(K)}{(1+1/\kappa) - p},
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. $\square$

Capítulo 3

La ecuación de Beltrami

3.1 La conjugada armónica y la transformada de Hilbert

La ecuación de Beltrami se vincula con la ecuación de conductividad a través del siguiente lema:

Lema 3.1.1. *Supongamos que $u \in H^1(\mathbb{D})$ es una solución a valores reales de la ecuación de conductividad (1). Entonces existe una función $v \in H^1(\mathbb{D})$, única salvo una constante, tal que $f = u + iv$ satisface la ecuación de Beltrami $\mathbb{R}$-lineal*

$$\overline{\partial} f = \mu \overline{\partial f}, \tag{3.1}$$

donde $\mu = (1-\sigma)/(1+\sigma)$. Recíprocamente, si $f \in H^1(\mathbb{D})$ es solución de (3.1) para algún μ a valores reales, entonces $u = Re\, f$ y $v = Im\, f$ satisfacen

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \;\; y \;\; \nabla \cdot \frac{1}{\sigma} \nabla v = 0, \tag{3.2}$$

donde $\sigma = (1-\mu)/(1+\mu)$.

Observemos que si $\sigma \equiv 1$ en $\mathbb{D}$, es decir, si (1) es la ecuación de Laplace, entonces (3.1) pasa a ser $\overline{\partial} f = 0$. Esto es equivalente a pedir que f sea holomorfa. Se ve entonces que el lema 3.1.1 generaliza un resultado conocido, que toda función armónica en $\mathbb{C}$ admite una conjugada que la hace holomorfa. La demostración es similar:

Demostración. Sean $w^1, w^2 \in L^2(\mathbb{D})$ tales que $\partial_y w^1 = \partial_x w^2$ (en sentido distribucional). Considero sucesiones de funciones en $C^\infty(\mathbb{D})$ que converjan a éstas en $L^2(\mathbb{D})$, en concreto

$$w_n^1 = w^1 * \rho_{1/n} \longrightarrow w^1,$$

$$w_n^2 = w^2 * \rho_{1/n} \longrightarrow w^2.$$

Éstas verifican entonces

$$\partial_y w_n^1 = (\partial_y w^1) * \rho_{1/n},$$
$$\partial_x w_n^2 = (\partial_x w^2) * \rho_{1/n},$$

por lo que también cumplen $\partial_y w_n^1 = \partial_x w_n^2$, ahora en sentido clásico en $\mathbb{D}$, pues son funciones de $C^\infty(\mathbb{D})$. Se sigue de esto que para cada n existe $v_n \in C^\infty(\mathbb{D})$ tal que $\nabla v_n = (w_n^1, w_n^2)$; como los v_n son integrables, se pueden tomar de integral 0. Es claro que $(\nabla v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{D})$, por la desigualdad de Poincaré se sigue que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es. Existe entonces $v \in H^1(\mathbb{D})$ tal que $v_n \longrightarrow v$ en $H^1(\mathbb{D})$, y se sigue que $\nabla v = (w^1, w^2)$.

Consideramos ahora el campo

$$w = (-\sigma\partial_y u, \sigma\partial_x u),$$

que cumple, por la ecuación (1), que $\partial_y w_1 = \partial_x w_2$. Por lo anterior existe una función $v \in H^1(\mathbb{D})$ tal que

$$\partial_x v = -\sigma\partial_y u, \tag{3.3}$$
$$\partial_y v = \sigma\partial_x u. \tag{3.4}$$

Tomando $f = u + iv$ se tiene que

$$\overline{\partial} f = \frac{1}{2}(\partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u)) \tag{3.5}$$
$$= \frac{1}{2}(1-\sigma)(\partial_x u + i\partial_y u),$$
$$\overline{\partial f} = \frac{1}{2}\overline{\partial_x u + \partial_y v + i(\partial_x v - \partial_y u)} \tag{3.6}$$
$$= \frac{1}{2}(1+\sigma)(\partial_x u + i\partial_y u),$$

es decir, f es solución de (3.1). Sea ahora $\widetilde{v} \in H^1(\mathbb{D})$ tal que $u + i\widetilde{v}$ también es solución de la ecuación de Beltrami con $\mu = (1-\sigma)/(1+\sigma)$. Se tiene entonces que $(u+iv) - (u+i\widetilde{v}) = i(v-\widetilde{v})$ debe serlo. Esto quiere decir, por (3.5) y (3.6), que

$$(1+\mu)\partial_y(v-\widetilde{v}) = 0,$$
$$(1+\mu)\partial_x(v-\widetilde{v}) = 0,$$

de donde se sigue (pues $\mu > -1$) que v y $\widetilde{v}$ difieren en una constante.

Para ver la recíproca, supongamos que $f = u + iv \in H^1(\mathbb{D})$ es solución de (3.1), entonces por (3.5) y (3.6) tenemos que

$$\partial_x u - \partial_y v = \mu(\partial_x u + \partial_y v),$$
$$\partial_x v + \partial_y u = \mu(\partial_y u - \partial_x v).$$

Se sigue que

$$\frac{1-\mu}{1+\mu}\partial_x u = \partial_y v \qquad \frac{1-\mu}{1+\mu}\partial_y u = -\partial_x v,$$

$$\frac{1+\mu}{1-\mu}\partial_y v = \partial_x u \qquad \frac{1+\mu}{1-\mu}\partial_x v = -\partial_y u.$$

Como $\sigma = (1-\mu)(1+\mu)$ y $1/\sigma = (1+\mu)/(1-\mu)$, se obtiene que u y v verifican (3.2) por la identidad de las derivadas distribucionales cruzadas. □

De aquí en más siempre se entenderá que $\mu = (1-\sigma)/(1+\sigma)$, es decir, $\sigma = (1-\mu)/(1+\mu)$. También supondremos que σ se extiende como 1 en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, es decir, μ se extenderá como 0. Por la acotación inferior y superior de σ se tiene que existe una constante $0 \le \kappa < 1$ tal que $|\mu(z)| \le \kappa$ en casi todo $z \in \mathbb{C}$.

Si $u \in H^1(\mathbb{D})$ es una solución de (1), definiremos su σ-conjugada armónica como la única función $v \in H^1(\mathbb{D})$ con

$$\int_{\partial\mathbb{D}} v\, ds = 0$$

tal que $u + iv$ verifica (3.1). Esta unicidad nos permite también definir (por ahora para funciones a valores reales) la transformada de Hilbert correspondiente a la ecuación, $\mathcal{H}_\mu : H^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \to H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$, dada por

$$\mathcal{H}_\mu(u|_{\partial\mathbb{D}}) = v|_{\partial\mathbb{D}}$$

para toda solución u de (1). Por conveniencia escribiremos a veces $\mathcal{H}_\mu u = v$.

Proposición 3.1.2. *Si $L : H^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \to H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$ es el operador promedio*

$$L(u|_{\partial\mathbb{D}}) = L(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} u\, ds,$$

se tiene que

$$\mathcal{H}_\mu \circ \mathcal{H}_{-\mu} u = \mathcal{H}_{-\mu} \circ \mathcal{H}_\mu u = -u + L(u). \tag{3.7}$$

En particular, $\mathcal{H}_{-\mu} = L - (\mathcal{H}_\mu + L)^{-1}$.

Demostración. Dada $u \in H^1(\mathbb{D})$ solución de (1), llamo v a su σ-conjugada armónica y $f = u + iv$. La función $g = -if$ satisface

$$\overline{\partial} g = (-i)\overline{\partial} f = (-i)\mu\overline{\partial f} = -\mu\,\overline{(-i)\partial f} = -\mu\overline{\partial g}.$$

Como su parte real es v y su parte imaginaria es $-u$, se sigue que

$$\mathcal{H}_{-\mu} v = -u + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} u\, ds = -u + L(u). \tag{3.8}$$

Pero $v = \mathcal{H}_\mu u$, de modo que

$$\mathcal{H}_{-\mu} \circ \mathcal{H}_\mu u = -u + L(u),$$

como se quería demostrar. El resultado para $\mathcal{H}_\mu \circ \mathcal{H}_{-\mu}$ se obtiene de esto reemplazando μ por $-\mu$.

Por último,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}_\mu + L)(L - \mathcal{H}_{-\mu}) &= \mathcal{H}_\mu L + L^2 - \mathcal{H}_\mu \mathcal{H}_{-\mu} - L\mathcal{H}_{-\mu} \\
&= 0 + L - (-I + L) - 0 \\
&= I, \\
(L - \mathcal{H}_{-\mu})(\mathcal{H}_\mu + L) &= L\mathcal{H}_\mu + L^2 - \mathcal{H}_{-\mu}\mathcal{H}_\mu - \mathcal{H}_{-\mu} L \\
&= 0 + L - (-I + L) - 0 \\
&= I.
\end{aligned}$$

Es decir, $(\mathcal{H}_\mu + L)^{-1} = L - \mathcal{H}_{-\mu}$, lo que implica que $\mathcal{H}_{-\mu} = L - (\mathcal{H}_\mu + L)^{-1}$. $\square$

La definición de la transformada de Hilbert se puede extender para funciones a valores complejos tomando

$$\mathcal{H}_\mu(u + i\tilde{u}) = \mathcal{H}_\mu(u) + i\mathcal{H}_{-\mu}(\tilde{u}). \tag{3.9}$$

Es inmediato que esta definición es $\mathbb{R}$-lineal, y no hay mayor diferencia para probar que verifica la proposición 3.1.2. Definimos también un operador $Q_\mu : H^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \to H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$ como

$$Q_\mu = \frac{1}{2}(I - i\mathcal{H}_\mu).$$

Proposición 3.1.3. *La aplicación $g \mapsto Q_\mu(g) - \frac{1}{2}L(g)$ es una proyección en $H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$.*

Demostración. Observemos primero que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\mu(ig) &= \mathcal{H}_\mu(i(u + iv)) \\
&= -\mathcal{H}_\mu(v) + i\mathcal{H}_{-\mu}(u) \\
&= i(i\mathcal{H}_\mu(v) + H_{-\mu}(u)) \\
&= i\,\mathcal{H}_{-\mu}(u + iv) \\
&= i\,\mathcal{H}_{-\mu}(g)
\end{aligned}$$

para cualquier función $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Luego $\mathcal{H}_\mu i\mathcal{H}_\mu = i\mathcal{H}_{-\mu}\mathcal{H}_\mu$, y usando (3.7) se obtiene

$$\begin{aligned}
Q_\mu^2 &= \frac{1}{4}(I - i\mathcal{H}_\mu)(I - i\mathcal{H}_\mu) \\
&= \frac{1}{4}(I - 2i\mathcal{H}_\mu - \mathcal{H}_{-\mu}\mathcal{H}_\mu) \\
&= \frac{1}{2}(I - i\mathcal{H}_\mu) - \frac{1}{4}(I + \mathcal{H}_{-\mu}\mathcal{H}_\mu) \\
&= Q_\mu - \frac{1}{4}L.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\left(Q_\mu - \frac{1}{2}L\right)\left(Q_\mu - \frac{1}{2}L\right) &= Q_\mu^2 + \frac{1}{4}L^2 - \frac{1}{2}(LQ_\mu + Q_\mu L) = \\
&= Q_\mu - \frac{1}{2}L,
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

Lema 3.1.4. *Sea $g \in H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$. Son equivalentes:*

a) La ecuación (3.1) tiene una solución $f \in H^1(\mathbb{D})$ tal que $g = f|_{\partial\mathbb{D}}$.

b) $Q_\mu(g)$ es constante.

Demostración. Supongamos primero que vale a). Si $g = u + iv$, por la definición de la transformada de Hilbert y por (3.8) vale

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\mu(u + iv) &= \mathcal{H}_\mu(u) + i\mathcal{H}_{-\mu}(v) \\
&= v - L(v) + i(-u + L(u)) \\
&= (-i)(u + iv - L(u + iv)) \\
&= (-i)(g - L(g)).
\end{aligned}$$

Pero entonces

$$\begin{aligned}
Q_\mu(g) &= \frac{1}{2}(g - i\mathcal{H}_\mu(g)) \\
&= \frac{1}{2}L(g),
\end{aligned}$$

que es constante, como se quería demostrar.

Supongamos ahora que vale b). Es claro por la definición de $\mathcal{H}_\mu$ que si $u \in H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$ toma valores reales, $u + i\mathcal{H}_\mu(u)$ debe ser la traza de una solución de la ecuación (3.1).

Por otro lado, como $\mathcal{H}_\mu(\mathcal{H}_{-\mu}(v)) = -v + L(v)$, la función $\mathcal{H}_{-\mu}(v) + i(-v)$ también debe serlo. Como

$$\begin{aligned} g + i\mathcal{H}_\mu(g) &= u + iv + i(\mathcal{H}_\mu(u) + i\mathcal{H}_{-\mu}(v)) = \\ &= [u + i\mathcal{H}_\mu(u)] - [\mathcal{H}_{-\mu}(v) + i(-v)], \end{aligned}$$

se sigue que $g + i\mathcal{H}_\mu(g)$ debe ser traza de una solución de (3.1) para toda $g \in H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$, aunque g tome valores complejos. Como $Q_\mu(g)$ es constante, lo mismo puede decirse de $g + i\mathcal{H}_\mu(g) + 2Q_\mu(g) = 2g$, y luego también de g. Esto concluye la demostración. □

Cerramos esta sección demostrando que el mapa Dirichlet a Neumann determina la transformada de Hilbert, como un primer resultado en el camino para recuperar la conductividad:

Proposición 3.1.5. *El mapa Dirichlet a Neumann Λ_σ determina unívocamente los operadores $\mathcal{H}_\mu$, $\mathcal{H}_{-\mu}$ y $\Lambda_{\sigma^{-1}}$.*

Demostración. Se probó en la proposición 3.1.2 que $\mathcal{H}_\mu$ determina $\mathcal{H}_{-\mu}$ para funciones a valores reales. Por la definición (3.9), conocer $\mathcal{H}_\mu(u)$ para u a valores reales también determina tanto $\mathcal{H}_\mu$ como $\mathcal{H}_{-\mu}$ en todas las funciones a valores complejos.

Si se elige la orientación positiva de $\partial\mathbb{D}$, y notamos por ∂_T a la derivada tangencial (en sentido distribucional) sobre $\partial\mathbb{D}$ de acuerdo a esa orientación, vamos a probar que para $u \in H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$ a valores reales se tiene

$$\partial_T \mathcal{H}_\mu(u) = \Lambda_\sigma(u). \tag{3.10}$$

Como $-\mu = (1 - \sigma^{-1})/(1 + \sigma^{-1})$, esto implica también que $\partial_T \mathcal{H}_{-\mu}(u) = \Lambda_{\sigma^{-1}}(u)$, lo que determina $\Lambda_{\sigma^{-1}}$ pues es $\mathbb{C}$-lineal. También es inmediato a partir de (3.10) que Λ_σ determina $\mathcal{H}_\mu$, pues si dos funciones de $H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$ tienen la misma derivada tangencial distribucional, difieren en una constante (y $\mathcal{H}_\mu$ tiene integral 0).

Probemos entonces (3.10). Por la definición de Λ_σ, para $\varphi \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ se tiene (llamando nuevamente v a la σ-conjugada armónica de u) que

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_\sigma(u), \varphi|_{\partial\mathbb{D}} \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \sigma \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dm \\
&= \int_{\mathbb{D}} (\partial_x \varphi \, \sigma \partial_x u + \partial_y \varphi \, \sigma \partial_y u) \, dm \\
&= \int_{\mathbb{D}} (\partial_x \varphi \, \partial_y v - \partial_y \varphi \, \partial_x v) \, dm \\
&= \int_{\mathbb{D}} (-\partial_y \partial_x \varphi \, v + \partial_x \partial_y \varphi \, v) \, dm + \\
&+ \int_{\partial\mathbb{D}} (\partial_x \varphi \, \mathcal{H}_\mu(u) \nu_2 - \partial_y \varphi \, \mathcal{H}_\mu(u) \nu_1) \, ds \\
&= \int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{H}_\mu(u) \, \nabla \varphi \cdot (\nu_2, -\nu_1) \, ds \\
&= - \int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{H}_\mu(u) \, \partial_T \varphi \, ds,
\end{aligned}$$

donde ν es la normal exterior, y en consecuencia $(\nu_2, -\nu_1)$ es la tangente en sentido horario. Se usó integración por partes, y las fórmulas (3.3-3.4). Esto concluye la demostración, porque toda función de $C^\infty(\partial\mathbb{D})$ se puede a extender a una de $C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$. $\square$

3.2 Rango de invertibilidad de S

Como es esperable, los operadores de Beltrami pueden emplearse para describir las soluciones de la ecuación (3.1). Tenemos por ejemplo:

Proposición 3.2.1. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y sea $2 < p < \infty$. Son equivalentes:*

a) $f - \lambda z \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ y f es solución de (3.1). Además

$$f(z) = \lambda z + O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{3.11}$$

b) Existe $g \in L^p(\mathbb{C})$, tal que

$$g = \mu \overline{Sg} + \overline{\lambda} \mu$$

y

$$f(z) = \lambda z + Pg(z).$$

Demostración. Si vale b), es inmediato que $g \in L^p(\mathbb{D})$, entonces $f - \lambda z \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ y por la proposición 1.4.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{\partial} f &= \overline{\partial} P g \\ &= g, \\ \partial f &= \lambda + \partial P g \\ &= \lambda + S g. \end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \overline{\partial} f - \mu \overline{\partial f} &= g - \mu \overline{\lambda} - \mu \overline{S g} \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir, que f es solución de la ecuación de Beltrami. El comportamiento asintótico es inmediato por la proposición 1.6.1.

Si ahora vale a), defino $g = \overline{\partial} f = \overline{\partial}(f - \lambda z)$. Como $f - \lambda z \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ y además $\overline{\partial}(f - \lambda z) = \mu \overline{\partial f}$ tiene soporte en $\mathbb{D}$, se puede aplicar el corolario 1.4.7:

$$\begin{aligned} \lambda z + P g(z) &= \lambda z + P(\overline{\partial}(f - \lambda z))(z) \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Ahora por la proposición 1.4.5, se sigue que

$$S g = S(\overline{\partial}(f - \lambda z)) = \partial(f - \lambda z) = \partial f - \lambda.$$

Pero por (3.1), $\mu \overline{\partial f} = \overline{\partial} f$, y se tiene

$$\mu \overline{S g} = \mu \overline{\partial f} - \mu \overline{\lambda} = \overline{\partial} f - \mu \overline{\lambda}.$$

Es decir, $g = \mu \overline{S g} + \mu \overline{\lambda}$, como se quería demostrar. □

Para decidir a qué espacios L^p pertenecen las derivadas de una solución, necesitamos entonces estudiar la invertibilidad del operador $I - \mu \overline{S}$. El resto de la sección será destinado a probar el siguiente resultado de Astala, Iwaniec y Saksman [7]:

Teorema 13. *Sean μ_1 y μ_2 funciones medibles a valores complejos tales que*

$$|\mu_1(z)| + |\mu_2(z)| \leq \kappa$$

para casi todo $z \in \mathbb{C}$, donde κ es una constante $0 \leq \kappa < 1$. Si $1 + \kappa < p < 1 + 1/\kappa$, entonces el operador de Beltrami

$$B = I - \mu_1 S - \mu_2 \overline{S}$$

es acotado e invertible en $L^p(\mathbb{C})$. Además, las normas de B y B^{-1} sólo dependen de κ y de p.

Observemos que si se pudiera probar la conjetura 1.4.9, este resultado sería trivial, pues se tendría que

$$\begin{aligned}||\mu_1 S+\mu_2\overline{S}||_{L^p\to L^p} &\leq (||\mu_1||_{L^\infty}+||\mu_2||_{L^\infty})||S||_{L^p\to L^p}\leq\\ &\leq \kappa\max\left\{p-1,\frac{1}{p-1}\right\}<\\ &<1.\end{aligned}$$

La demostración que presentaremos será algo más extensa y requerirá un lema previo:

Lema 3.2.2. *Sea μ una función medible a valores complejos tal que $|\mu(z)|\leq\kappa$ para casi todo $z\in\mathbb{C}$, donde $0\leq\kappa<1$. Si $1+\kappa<p<1+1/\kappa$, entonces el operador $I-\mu S$ está acotado inferiomente en $L^p(\mathbb{C})$, es decir,*

$$||(I-\mu S)g||_{L^p(\mathbb{C})}\geq C_0||g||_{L^p(\mathbb{C})}$$

para toda $g\in L^p(\mathbb{C})$. La contante depende de κ y de p, pero no de μ.

Demostración. Basta demostrar el resultado para las funciones $g\in C_c^\infty(\mathbb{C})$ con $\int_{\mathbb{C}} g=0$, que son densas en $L^p(\mathbb{C})$ para todo $1<p<\infty$. Esto es así pues se pueden obtener funciones en $C_c^\infty(\mathbb{C})$ con integral 1 y norma p arbitrariamente chica. Si escribimos de ahora en más $h=g-\mu Sg$ y $w=Pg$, por la proposición 1.4.1 tenemos $\overline{\partial}w=g$ y $\partial w=Sg$, y w satisface la ecuación de Beltrami no homogénea

$$\overline{\partial}w=\mu\partial w+h.$$

Hay que probar, entonces, que $||\overline{\partial}w||_{L^p(\mathbb{C})}\leq C||h||_{L^p(\mathbb{C})}$.

Si tomamos $K=\frac{1+\kappa}{1-\kappa}$, existe una aplicación K-cuasiconforme $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ que satisface (teorema 8)

$$\overline{\partial}f=\mu\partial f. \tag{3.12}$$

Además, $2K/(K+1)<p<2K/(K-1)$. Haciendo el cambio de variables

$$u=w\circ f^{-1},$$

se calcula que

$$\begin{aligned}\overline{\partial}w&=(\partial u\circ f)\overline{\partial}f+(\overline{\partial}u\circ f)\overline{\partial f} \qquad (3.13)\\ &=\mu(\partial u\circ f)\partial f+(\overline{\partial}u\circ f)\overline{\partial f}\\ \mu\partial w+h&=\mu((\partial u\circ f)\partial f+(\overline{\partial}u\circ f)\overline{\overline{\partial}f})+h,\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} h &= \overline{\partial} w - \mu \partial w \\ &= (\overline{\partial} u \circ f)\overline{\partial f} - \mu (\overline{\partial} u \circ f)\overline{\overline{\partial} f} \\ &= (1-|\mu|^2)((\overline{\partial} u \circ f)\overline{\partial f}), \end{aligned}$$

es decir

$$(\overline{\partial} u \circ f)\overline{\partial f} = \frac{h}{1-|\mu|^2}.$$

Se sigue de inmediato que

$$\int_{\mathbb{C}} |(\overline{\partial} u \circ f)\overline{\partial f}|^p \, dm \leq (1-\kappa^2)^{-p} \int_{\mathbb{C}} |h|^p \, dm. \tag{3.14}$$

Por otra parte, como $J_f = |\partial f|^2 - |\overline{\partial} f|^2$ y $|u(z)| \leq \kappa$, se sigue de (3.12) que

$$\begin{aligned} |\overline{\partial} f| &\leq |\partial f| \\ |\partial f|^2 &\leq (1-\kappa^2)^{-1} J_f. \end{aligned}$$

Si llamamos $\alpha = |\partial f \circ f^{-1}|^{p-2}$, un cambio de variables muestra que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} |(\partial u \circ f)\overline{\partial} f|^p \, dm &\leq \int_{\mathbb{C}} |(\partial u \circ f)\partial f|^p \, dm \\ &= \int_{\mathbb{C}} |\partial u|^p |\partial f \circ f^{-1}|^p J_{f^{-1}} \, dm \\ &\leq (1-\kappa^2)^{-1} \int_{\mathbb{C}} |\partial u|^p \, \alpha \, J_f \circ f^{-1} \, J_{f^{-1}} \, dm \\ &= (1-\kappa^2)^{-1} \int_{\mathbb{C}} |\partial u|^p \, \alpha \, dm. \end{aligned}$$

Como

$$(J_{f^{-1}})^{-1} = J_f \circ f^{-1} \leq |\partial f \circ f^{-1}|^2 \leq (1-\kappa^2)^{-1} J_f \circ f^{-1} = (1-\kappa^2)^{-1}(J_{f^{-1}})^{-1},$$

se tiene que $(J_{f^{-1}})^{1-p/2}$ es comparable con $\alpha = |\partial f \circ f^{-1}|^{p-2}$, y por el teorema 12 $\alpha \in A_2 \subseteq A_p$ para $2 \leq p < 1 + 1/\kappa$ (esto es inmediato de la definición de los pesos). Para $1 + \kappa < p < 2$, se puede usar que $\alpha \in A_p$ si y sólo si $\alpha^{-1/(p-1)} \in A_{p'}$, con p' el conjugado de p. Así, como $(J_{f^{-1}})^{(1-p/2)(-1/(p-1))} = (J_{f^{-1}})^{1-p'/2}$ es comparable con $\alpha^{-1/(p-1)}$ y $2 \leq p' < 1 + \kappa$, puedo usar nuevamente el teorema 12 para obtener que $\alpha^{-1/(p-1)} \in A_2 \subseteq A_{p'}$, concluyendo entonces que $\alpha \in A_p$ para todo $1 + \kappa < p < 1 + 1/\kappa$.

Podemos aplicar ahora el teorema de Coifman y Fefferman como se anticipó en el capítulo 2, obteniendo que la transformada de Beurling es acotada en el espacio $L^p(\alpha)$. En particular,

$$\int_{\mathbb{C}} |\partial u|^p \alpha \, dm \leq \lambda_\alpha^p \int_{\mathbb{C}} |\overline{\partial} u|^p \alpha \, dm,$$

pues $S(\overline{\partial} u) = \partial u$. La constante λ_α se puede tomar de manera que sea mayor que 1 y sólo dependa de la norma A_p de α. Luego

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |\partial u|^p \alpha \, dm &\leq \lambda_\alpha^p \int_{\mathbb{C}} |\overline{\partial} u|^p \alpha \, dm \\
&= \lambda_\alpha^p \int_{\mathbb{C}} |\overline{\partial} u|^p |\partial f \circ f^{-1}|^{p-2} \, dm \\
&= \lambda_\alpha^p \int_{\mathbb{C}} |\overline{\partial} u \circ f|^p |\partial f|^{p-2} J_f \, dm \\
&\leq \lambda_\alpha^p \int_{\mathbb{C}} |(\overline{\partial} u \circ f) \partial f|^p \, dm \\
&\leq \frac{\lambda_\alpha^p}{(1-\kappa^2)^p} \int_{\mathbb{C}} |h|^p \, dm.
\end{aligned}$$

Volviendo a (3.13),

$$\begin{aligned}
||\overline{\partial} w||_{L^p(\mathbb{C})} &\leq ||(\overline{\partial} u \circ f)\overline{\partial f}||_{L^p(\mathbb{C})} + ||(\partial u \circ f)\overline{\partial} f||_{L^p(\mathbb{C})} \\
&\leq (1-\kappa^2)^{-1} \left(\int_{\mathbb{C}} |h|^p \, dm \right)^{1/p} + \frac{\lambda_\alpha}{(1-\kappa^2)^{1+1/p}} \left(\int_{\mathbb{C}} |h|^p \, dm \right)^{1/p} \\
&\leq C_{K,p} ||h||_{L^p(\mathbb{C})}.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Demostración del teorema. Es claro que el operador B es Lipschitz; veamos que de hecho es bi-Lipschitz. Como

$$|(\mu_1 S g_1 + \mu_2 \overline{S} g_1) - (\mu_1 S g_2 + \mu_2 \overline{S} g_2)| \leq \kappa |S g_1 - S g_2|,$$

podemos escribir $(\mu_1 S g_1 + \mu_2 \overline{S} g_1) - (\mu_1 S g_2 + \mu_2 \overline{S} g_2) = \mu_{g_1,g_2}(S g_1 - S g_2)$ con $|\mu_{g_1,g_2}| \leq \kappa$. Luego $g_1 - g_2$ verifica

$$h = (g_1 - g_2) - \mu_{g_1,g_2} S(g_1 - g_2)$$

con $h = Bg_1 - Bg_2$. Por el lema, $||g_1 - g_2||_{L^p(\mathbb{C})} \leq C_{\kappa,p} ||h||_{L^p(\mathbb{C})}$.

Siendo entonces B bi-Lipschitz, para ver que es invertible sólo hay que comprobar que su imagen es densa en $L^p(\mathbb{C})$. Consideremos $f \in L^2(\mathbb{C}) \cap L^p(\mathbb{C})$, y definamos el operador $\widetilde{B}g = f + \mu_1 Sg + \overline{\mu}_2 Sg$. Como S es una isometría en $L^2(\mathbb{C})$ (proposición 1.4.8), $\widetilde{B}$ es una contracción estricta:

$$\begin{aligned}||\widetilde{B}g_1 - \widetilde{B}g_2||_{L^2(\mathbb{C})} &= ||\mu_1 S(g_1 - g_2) + \overline{\mu}_2 S(g_1 - g_2)||_{L^2(\mathbb{C})} \\ &\leq \kappa||S(g_1 - g_2)||_{L^2(\mathbb{C})} \\ &= \kappa||g_1 - g_2||_{L^2(\mathbb{C})}.\end{aligned}$$

El teorema del punto fijo de Banach indica entonces que existe $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{C})$ con $\widetilde{B}\tilde{f} = \tilde{f}$, es decir $B\tilde{f} = f$. La función $\tilde{f}$ también pertenece a $L^p(\mathbb{C})$, pues $||\tilde{f}||_{L^p(\mathbb{C})} \leq C_{\kappa,p}||B\tilde{f}||_{L^p(\mathbb{C})}$. Se concluye que $L^2(\mathbb{C}) \cap L^p(\mathbb{C}) \subseteq B(L^p(\mathbb{C}))$, y su densidad implica que B es invertible. □

3.3 Funciones pseudo-analíticas

Ahora demostraremos una generalización del teorema de Liouville para funciones pseudo-analíticas. De éste se sigue, por ejemplo, que no es posible que existan dos soluciones distintas de la ecuación de Beltrami con el mismo comportamiento asintótico (3.11). La parte *b*) es una generalización del principio del argumento para estas funciones.

Proposición 3.3.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ acotado, sean $F \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ y $\gamma \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$ para algún $p > 2$, y supongamos que existe alguna constante $0 \leq \kappa < 1$ tal que*

$$|\overline{\partial}F(z)| \leq \kappa\chi_\Omega(z)|\partial F(z)| + \gamma(z)|F(z)|. \tag{3.15}$$

Entonces se verifica:

a) Si $F(z) \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ y γ tiene soporte compacto, entonces $F(z) \equiv 0$.

b) Si para $|z|$ suficientemente grande $F(z) = \lambda z + \epsilon(z)z$, con $\lambda \neq 0$ y $\epsilon(z) \to 0$ cuando $|z| \to \infty$, entonces F se anula en exactamente un punto $z_0 \in \mathbb{C}$.

Demostración. Demostremos primero *b*). Si considero $R > 0$ tal que $|\epsilon(z)| < |\lambda|/2$ para $|z| > R$, es claro que $F|_{\{|z|=R\}}$ no se anula y es homotópica a la identidad relativa a $\mathbb{C} \setminus 0$. Luego la curva $\{|z| = R\}$ (orientada en sentido positivo) debe tener el mismo índice con respecto a 0 que su imagen por F, o sea 1. Como $F(B(0,R))$ es simplemente conexo (F es continua por estar en $W^{1,p}_{\text{loc}}$), debe ser $0 \in F(B(0,R))$. Esto demuestra que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $F(z_0) = 0$ (de hecho, el mismo argumento demuestra que F es sobreyectiva). Falta ver que es único.

Para esto escribimos (3.15) como

$$\overline{\partial}F = \nu(z)\partial F + A(z)F,$$

con $|\nu(z)| \leq \kappa$ y $|A(z)| \leq \gamma(z)$ para casi todo $z \in \mathbb{C}$. Como $A \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{C})$, si $B = B(0, R)$ entonces $A\chi_B \in L^r(\mathbb{C})$ para cualquier $1 \leq r \leq p$. Por el teorema 13, se sigue que $(I - \nu S)^{-1}(A\chi_B) \in L^r(\mathbb{C})$ para todo $1 + \kappa < r < p' = \min\{p, 1 + 1/\kappa\}$. Como ν y $A\chi_B$ tienen soporte compacto, $(I - \nu S)^{-1}(A\chi_B)$ debe tenerlo. Podemos asegurar (por el teorema 4) que la función $\eta = P((I - \nu S)^{-1}(A\chi_B))$ pertenece a $W^{1,r}(\mathbb{C})$ para todo $2 < r < p'$, y también (por la proposición 1.6.1) que $\eta(z) = O(1/z)$ cuando $|z| \to \infty$.

Esta función verifica, por la proposición 1.4.1,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\eta - \nu\partial\eta &= (I - \nu S)^{-1}(A\chi_B) - \nu S((I - \nu S)^{-1}(A\chi_B)) \\
&= (I - \nu S)((I - \nu S)^{-1}(A\chi_B)) \\
&= A\chi_B.
\end{aligned}$$

Por otra parte, $g = e^{-\eta}F$ cumple

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}g - \nu\partial g &= e^{-\eta}\overline{\partial}F - \overline{\partial}\eta e^{-\eta}F - \nu(e^{-\eta}\partial F - \partial\eta e^{-\eta}F) \\
&= (\overline{\partial}F - \nu\partial F)e^{-\eta} - (\overline{\partial}\eta - \nu\partial\eta)e^{-\eta}F \\
&= 0
\end{aligned}$$

dentro del disco B. g también pertenece a $W^{1,r}_{\text{loc}}(\mathbb{C})$, luego la ecuación anterior indica que es cuasiregular en B. Se sigue de esto (teorema 9) que existen una aplicación cuasiconforme $\psi : B \to B$ y una función holomorfa $h : B \to \mathbb{C}$ tales que $g = h \circ \psi$; ambas son continuas hasta el borde.

Como η es continua, $e^{-\eta}$ es homotópica a la función idénticamente 1, relativa a $\mathbb{C} \setminus 0$. Luego $g|_{\{|z|=R\}}$ es homotópica a la identidad relativa a $\mathbb{C} \setminus 0$. También ψ^{-1} es homotópica a la identidad relativa a $\{|z| = R\}$, luego $h|_{\{|z|=R\}}$ debe serlo, relativa a $\mathbb{C} \setminus 0$. Por esto y el principio del argumento, el número de ceros de h en $B(0, R)$ es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)} \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{h(\partial B(0,R))} \frac{1}{z}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)} \frac{1}{z}\,dz \\
&= 1,
\end{aligned}$$

donde se consideró la orientación positiva de $\partial B(0, R)$. Pero como $h(\psi(z)) = e^{-\eta(z)}F(z)$, F no puede anularse en más de un punto de $B(0, R)$. R se puede tomar arbitrariamente grande, lo que concluye la demostración.

Para ver a), consideramos ahora un R que cumpla $\text{sop}(\gamma) \subseteq B(0, R)$. Entonces A también tendrá soporte en B, y será

$$\overline{\partial}\eta - \nu\partial\eta = A$$

en todo $\mathbb{C}$. Luego también

$$\overline{\partial}g - \nu\partial g = 0$$

en todo $\mathbb{C}$, es decir que g es cuasiregular en $\mathbb{C}$. Pero η y F son acotados (F es continua), luego g lo es, y podemos aplicar el teorema de Liouville a la función h entera tal que $g = h \circ \psi$, donde ψ es una aplicación cuasiconforme en $\mathbb{C}$. Esto prueba que g es constante, y

$$F = C_1 e^{\eta}. \tag{3.16}$$

Como $\eta = O(1/z)$, F debe converger a C_1 en el infinito, y por hipótesis debe ser $F \equiv 0$. $\square$

Será útil mencionar un resultado parcial de la demostración anterior de manera independiente:

Corolario 3.3.2. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ acotado, sea $F \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{C})$, $p > 2$. Sean también $0 \leq \kappa < 1$ y $\gamma \in L^p(\mathbb{C})$ de soporte compacto. Si*

$$|\overline{\partial}F(z)| \leq \kappa\, \chi_\Omega(z)|\partial F(z)| + \gamma(z)|F(z)|$$

para casi todo $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$F(z) = C_1 e^{\eta(z)},$$

donde C_1 es una constante y $\eta \in C_0(\mathbb{C})$ (la clausura de $C_c^\infty(\mathbb{C})$ en $L^\infty(\mathbb{C})$).

Demostración. Esto no es más que (3.16), si se aclara que $\eta \in C_0(\mathbb{C})$ por ser continua (está en $W^{1,r}(\mathbb{C})$ para algún $2 < r < p'$) y verificar $\eta(z) = O(1/z)$. $\square$

Capítulo 4

Soluciones complejas de la óptica geométrica

4.1 Existencia

En esta sección probaremos la existencia de soluciones de (3.1) de la forma

$$f_\mu(z,k) = e^{ikz} M_\mu(z,k), \tag{4.1}$$

con

$$M_\mu(z,k) = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \tag{4.2}$$

para k fijo, cuando $|z| \to \infty$.

Proposición 4.1.1. *Supongamos que $2 < p < 1+1/\kappa$, que $\alpha \in L^\infty(\mathbb{C})$ tiene soporte en $\mathbb{D}$ y que $|\nu| \leq \kappa\chi_{\mathbb{D}}$ en casi todo punto. Definimos el operador $K : L^p(\mathbb{C}) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{C})$ como*

$$Kg = P(I - \nu\overline{S})^{-1}(\alpha\overline{g}).$$

Entonces $I - K : L^p(\mathbb{C}) \longrightarrow L^p(\mathbb{C})$ es invertible.

Observemos que $I - \nu\overline{S}$ es invertible por el teorema 13. Además, como α y ν tienen soporte en $\mathbb{D}$, $(I - \nu\overline{S})^{-1}(\alpha\overline{g})$ también debe tenerlo. La buena definición y acotación de K se siguen entonces del teorema 4; además es compacto por el teorema 5.

Demostración. Por la alternativa de Fredholm, sólo hay que probar que $I - K$ es inyectiva. Supongamos entonces que existe $g \in L^p(\mathbb{C})$ al que $(I-K)(g) = 0$, es decir,

$$g = P\left((I - \nu\overline{S})^{-1}(\alpha\overline{g})\right).$$

De la proposición 1.4.1 se sigue que

$$\overline{\partial} g = (I - \nu\overline{S})^{-1}(\alpha\overline{g}),$$

luego

$$\overline{\partial} g - \nu\overline{\partial g} = \alpha\overline{g}.$$

Como $g \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ y $g(z) = O(1/z) \to 0$, se verifican las hipótesis de la proposición 3.3.1 (a), y debe ser $g = 0$. $\square$

Con esto podemos proceder a demostrar el resultado anticipado.

Teorema 14. *Para cada $k \in \mathbb{C}$ y para cada $2 < p < 1 + 1/\kappa$, la ecuación 3.1 admite una única solución $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ de la forma (4.1) tal que valga la fórmula asintótica (4.2).*

Es claro que para $k = 0$, esta solución será idénticamente 1; es decir, $f_\mu(z, 0) \equiv 1$.

Demostración. Primero haremos algunas cuentas formales. Si se escribe

$$f_\mu(z, k) = e^{ikz}(1 + \eta(z)),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{\partial} f_\mu(z) - \mu(z)\overline{\partial f_\mu(z)} &= e^{ikz}\overline{\partial}\eta(z) - \mu(z)\overline{(ike^{ikz}(1 + \eta(z)) + e^{ikz}\partial\eta(z))} \\ &= e^{ikz}\,\overline{\partial}\eta(z) + i\overline{k}\mu(z)e^{-i\overline{k}\overline{z}} + i\overline{k}\mu(z)e^{-i\overline{k}\overline{z}}\,\overline{\eta(z)} - \mu(z)e^{-i\overline{k}\overline{z}}\,\overline{\partial\eta}.\end{aligned}$$

Dividiendo por e^{ikz} (que no se anula), la ecuación de Beltrami se puede escribir como

$$\overline{\partial}\eta(z) + i\overline{k}\mu(z)e^{-i(kz+\overline{k}\overline{z})} + i\overline{k}\mu(z)e^{-i(kz+\overline{k}\overline{z})}\,\overline{\eta(z)} - \mu(z)e^{-i(kz+\overline{k}\overline{z})}\,\overline{\partial\eta} = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\eta - e_{-k}\mu\overline{\partial\eta} &= \alpha\overline{\eta} + \alpha, \qquad (4.3)\\ (I - e_{-k}\mu\overline{S})(\overline{\partial}\eta) &= \alpha\overline{\eta} + \alpha,\end{aligned}$$

donde $\alpha(z) = -i\overline{k}e_{-k}(z)\mu(z)$. Recordemos que e_{-k} se definió en (1.11). Ahora, si consideramos K como en la proposición anterior (con $\nu = e_{-k}\mu$), se tiene que

$$\eta = P(I - \nu\overline{S})^{-1}(\alpha\overline{\eta} + \alpha\chi_{\mathbb{D}}) = K(\eta + \chi_{\mathbb{D}}), \qquad (4.4)$$

$$\eta = (I - K)^{-1}(K(\chi_{\mathbb{D}})). \qquad (4.5)$$

Como $K(\chi_{\mathbb{D}}) \in L^p(\mathbb{C})$ e $I - K$ es invertible, se puede definir $\eta \in L^p(\mathbb{C})$ a partir de esta última expresión. Como $\eta = K(\eta + \chi_{\mathbb{D}})$, es además $\eta \in W^{1,p}(\mathbb{C})$; esto justifica el uso de las proposiciones 1.4.1 y 1.4.5 al desandar rigurosamente las cuentas anteriores. Se obtiene que f_μ es efectivamente solución de (3.1). Además, por (4.4) y la proposición 1.6.1, vale

$$\eta(z) = O\left(\frac{1}{z}\right),$$

que era el comportamiento asintótico deseado.

Veamos la unicidad. La ecuación (4.3) puede reescribirse en términos de $M_\mu = f_\mu e^{-ikz} = \eta + 1$ como

$$\overline{\partial} M_\mu - \mu e_{-k} \overline{\partial M_\mu} = \alpha \overline{M_\mu}. \tag{4.6}$$

Si existieran dos soluciones en $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$, f^1_μ y f^2_μ, entonces $M^1_\mu - M^2_\mu \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ debería ser una solución de (4.6) que tendiera a 0 en el infinito. Por la proposición (3.3.1.(a)), debe ser $M^1_\mu = M^2_\mu$. □

Proposición 4.1.2. *Para todo $k, z \in \mathbb{C}$,*

$$Re\left(\frac{M_\mu(z,k)}{M_{-\mu}(z,k)}\right) > 0.$$

Demostración. Como se indicó en (4.6), la ecuación de Beltrami implica para M_μ que

$$\overline{\partial} M_\mu - \mu e_{-k} \overline{\partial M_\mu} = -i\overline{k}\mu e_{-k} \overline{M_\mu}.$$

Naturalmente, para $M_{-\mu}$ vale

$$\overline{\partial} M_{-\mu} + \mu e_{-k} \overline{\partial M_{-\mu}} = i\overline{k}\mu e_{-k} \overline{M_{-\mu}}.$$

Como μ tiene soporte compacto, se sigue del corolario 3.3.2 y de $M_{\pm\mu} - 1 = O(1/z)$ que para cada $k \in \mathbb{C}$ existen $\eta_+(\cdot,k), \eta_-(\cdot,k) \in C_0(\mathbb{C})$ tales que

$$M_{\pm\mu}(z,k) = e^{\eta_\pm(z,k)}. \tag{4.7}$$

Esto no se anula, así que el cociente $M_\mu/M_{-\mu}$ está bien definido. Como $\eta_\pm(\cdot,k) \in C_0(\mathbb{C})$, $\lim_{z\to\infty} M_{\pm\mu}(z,k) = 1$, y la parte real de dicho cociente debe ser positiva en algún punto.

Supongamos que no lo fuera siempre; por la continuidad de $M_{\pm\mu}$, debe haber un $z_0 \in \mathbb{C}$ donde se anule, es decir,

$$M_\mu(z_0,k) = itM_{-\mu}(z_0,k)$$

para algún $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considero entonces la función $g_k(z) = M_\mu(z,k) - itM_{-\mu}(z,k)$, que verifica

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} g_k &= \overline{\partial} M_\mu - it\overline{\partial} M_{-\mu} \\
&= \mu e_{-k}\overline{\partial M_\mu} - i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{M_\mu} - it(-\mu e_{-k}\overline{\partial M_{-\mu}} + i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{M_{-\mu}}) \\
&= -i\overline{k}\mu e_{-k}(\overline{M_\mu} + it\overline{M_{-\mu}}) + \mu e_{-k}(\overline{\partial M_\mu} + it\overline{\partial M_{-\mu}}) \\
&= -i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{g_k} + \mu e_{-k}\overline{\partial g_k}.
\end{aligned}$$

Nuevamente estoy en las hipótesis del corolario 3.3.2, de donde

$$g_k(z) = Ce^{\eta(z)}.$$

Como $g_k(z_0) = 0$, debe ser $C = 0$ y $g_k \equiv 0$. Pero $g_k(z) \to 1 - it$ cuando $z \to \infty$, por el comportamiento asintótico de $M_{\pm\mu}$. Esta contradicción indica que $\mathrm{Re}(M_\mu/M_{-\mu}) > 0$ para todo z, y para todo k. □

4.2 Ecuaciones para $\partial_{\overline{k}}$

Estudiaremos ahora las derivadas con respecto a $\overline{k}$ de las soluciones complejas de la óptica geométrica. Para empezar, como

$$\mu\overline{\partial(e_k M_\mu)} = -i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{M_\mu} + \mu e_{-k}\overline{\partial M_\mu},$$

la ecuación (4.6) se puede reescribir como

$$\overline{\partial} M_\mu = \mu\overline{\partial(e_k M_\mu)}. \tag{4.8}$$

Encontrar una solución compleja de la óptica geométrica será equivalente a encontrar M_μ que verifique esto y $M_\mu - 1 \in W^{1,p}(\mathbb{C})$.

Introducimos ahora el operador $\mathbb{R}$-lineal $L_\mu : W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}) \to W^{1,p}(\mathbb{C})$, dado por

$$L_\mu g = P(\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{g})).$$

Es claro que está bien definido y es acotado por el teorema 4.

Proposición 4.2.1. *Si $p > 2$, para $g \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ son equivalentes:*

a) $(I - L_\mu)g = 1$.

b) $\overline{\partial} g = \mu\overline{\partial(e_k g)}$ *y* $g - 1 \in W^{1,p}(\mathbb{C})$.

Demostración. Supongo primero que vale (b), entonces

$$L_\mu g = P(\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{g})) = P(\mu\overline{\partial}(\overline{e_k g})) = P(\mu\overline{\partial(e_k g)}) = P(\overline{\partial} g) = P(\overline{\partial}(g-1)) = g - 1,$$

pues $g - 1 \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ y $\overline{\partial}(g-1) = \overline{\partial} g = \mu\overline{\partial(e_k g)}$ tiene soporte en $\overline{\mathbb{D}}$ (corolario 1.4.7). Se probó que $(I - L_\mu)g = 1$.

Ahora asumo que vale (a). Es claro que $g - 1 = L_\mu g \in W^{1,p}(\mathbb{C})$. Por la proposición 1.4.1,

$$\overline{\partial} g = \overline{\partial} L_\mu g = \overline{\partial} P(\mu\overline{\partial(e_k g)}) = \mu\overline{\partial(e_k g)},$$

como se quería demostrar. □

Nuestra principal herramienta en esta sección será

Teorema 15. *Sea $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ que se anula afuera de un dominio Ω acotado y verifica $||\mu||_\infty \leq \kappa < 1$. Para $k \in \mathbb{C}$ fijo, se tiene que si $2 < p < 1 + 1/\kappa$ entonces el operador*

$$I - L_\mu : W^{1,p}(\mathbb{C}, \Omega) \oplus \mathbb{C} \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{C}, \Omega) \oplus \mathbb{C}$$

es acotado e invertible.

Demostración. Es claro que la aplicación

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\mathbb{C}, \Omega) \oplus \mathbb{C} &\longrightarrow L^p(\Omega) \\ g &\longmapsto \mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{g}) \end{aligned}$$

es acotada, al igual que $P : L^p(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{C}, \Omega)$ (teorema 4 y proposición 1.4.1) y la inclusión

$$W^{1,p}(\mathbb{C}, \Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{C}, \Omega) \oplus \mathbb{C}.$$

Así, L_μ es acotada, y también $I - L_\mu$. Como $W^{1,p}(\mathbb{C}, \Omega) \oplus \mathbb{C}$ es de Banach, sólo queda probar que $I - L_\mu$ es biyectiva.

Supongamos que

$$(I - L_\mu)(g + C_0) = h + C_1 \tag{4.9}$$

para $g, h \in W^{1,p}(\mathbb{C}, \Omega)$ y C_0, C_1 constantes. Entonces

$$g - h - L_\mu(g + C_0) = C_1 - C_0.$$

Pero $L_\mu(g + C_0) \in W^{1,p}(\mathbb{C})$, al igual que g y h, y debe ser $C_1 = C_0$. Derivando con respecto a $\overline{z}$ obtengo

$$\begin{aligned} \overline{\partial}h &= \overline{\partial}g - \overline{\partial}L_\mu(g + C_0) \\ &= \overline{\partial}g - \mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{g}) - \mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{C_0}) \\ &= \overline{\partial}g + i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{g} - \mu e_{-k}\overline{\partial g} + i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{C_0} \\ &= \overline{\partial}g + i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{g} - \mu e_{-k}\overline{S}(\overline{\partial}g) + i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{C_0} \\ &= (I - \mu e_{-k}\overline{S})(\overline{\partial}g) + i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{g} + i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{C_0}. \end{aligned}$$

Si llamo $\alpha = -i\overline{k}\mu e_{-k}$ y $\nu = \mu e_{-k}$, puedo usar el teorema 13 para obtener

$$(I - \nu\overline{S})^{-1}(\overline{\partial}h) = \overline{\partial}g - (I - \nu\overline{S})^{-1}(\alpha\overline{g} + \alpha\overline{C_0}),$$

y, en la notación de la proposición 4.1.1,

$$P[(I-\nu\overline{S})^{-1}\overline{\partial}h]+K(C_0\chi_\Omega)=P(\overline{\partial}g)-Kg,$$
$$P[(I-\nu\overline{S})^{-1}\overline{\partial}h]+K(C_0\chi_\Omega)=(I-K)g,$$

pues $g,h\in W^{1,p}(\mathbb{C},\Omega)$. El término de la izquierda está en $L^p(\mathbb{C})$ para cada $h\in W^{1,p}(\mathbb{C},\Omega)$ y para cada $C_0\in\mathbb{C}$, luego por la proposición 4.1.1 existe una única $g\in W^{1,p}(\mathbb{C})$ que verifica la ecuación. La inyectividad de $I-L_\mu$ es inmediata de esto. Para ver la sobreyectividad hay que probar que esta g efectivamente cumple (4.9), lo que es inmediato observando las cuentas anteriores; y que $\overline{\partial}g\in L^p(\Omega)$, lo que se sigue de

$$\begin{aligned}\overline{\partial}g-(I-\nu\overline{S})^{-1}(\alpha\overline{g})&=\overline{\partial}(I-K)g\\&=\overline{\partial}P[(I-\nu\overline{S})^{-1}\overline{\partial}h]-\overline{\partial}K(C_0\chi_\Omega)\\&=(I-\nu\overline{S})^{-1}\overline{\partial}h-(I-\nu\overline{S})^{-1}(\alpha\overline{C_0}),\end{aligned}$$

pues todos los demás términos se anulan afuera de Ω. □

Se trabajará más frecuentemente con el operador L_μ^2, que verifica la fórmula conveniente

$$\begin{aligned}L_\mu^2g&=L_\mu(P(\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{g})))\\&=P(\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{P(\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{g}))}))\\&=P(\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{P}(\overline{\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{g})})))\\&=P(\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{P}(\overline{\mu}\partial(\overline{e_{-k}\overline{g}}))))\\&=P(\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{P}(\mu\partial(e_kg))))\\&=P(\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{P}(i\,k\,\mu\,e_k\,g+\mu e_k\partial g)))\\&=P(\mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{P}(i\,k\,\mu\,e_k\,g+\mu e_k\partial g)))\\&=P(\mu\overline{\partial}(\partial+ik)^{-1}(\mu(\partial+ik)g)),\end{aligned}\tag{4.10}$$

donde

$$(\partial+ik)^{-1}g=e_{-k}\overline{P}(e_kg)$$

para cada $g\in L^p(\Omega)$. Observar que en efecto

$$\begin{aligned}(\partial+ik)(\partial+ik)^{-1}g&=\partial(e_{-k}\overline{P}(e_kg))+ike_{-k}\overline{P}(e_kg)\\&=-ike_{-k}\overline{P}(e_kg)+ike_{-k}\overline{P}(e_kg)+e_{-k}\partial\overline{P}(e_kg)\\&=e_{-k}e_kg\\&=g.\end{aligned}$$

Se empleó la proposición 1.5.2. Sobre L_μ^2 tenemos el siguiente resultado importante:

Corolario 4.2.2. *El operador $I - L_\mu^2$ es invertible en $W^{1,p}(\mathbb{C},\Omega) \oplus \mathbb{C}$.*

Demostración. Como $L_\mu = -L_{-\mu}$, se tiene $(I - L_\mu^2) = (I - L_\mu)(I + L_\mu) = (I - L_\mu)(I - L_{-\mu})$, y por el teorema debe ser invertible. $\square$

Volvamos de ahora en más a $\Omega = \mathbb{D}$ y procedamos entonces a estudiar las derivadas con respecto a $\overline{k}$. Se obtiene (de manera similar a [15, Lema 2.2])

Lema 4.2.3. *Sea $p > 2$, entonces la aplicación $k \mapsto \mu\overline{\partial}(\partial + ik)^{-1}$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{C}$. Además, si noto a las derivadas por D_k y $D_{\overline{k}}$, entonces*

$$D_{\overline{k}}(k)g(z) = -\mu\frac{\overline{k}}{\pi}\int_{\mathbb{C}} e_k(w-z)g(w)\,dm(w) = -\mu\overline{k}\hat{g}(k)e_{-k}(z),$$
$$D_k(k)g(z) = -\mu\left(\frac{\overline{k}}{\pi}\int_{\mathbb{C}} e_k(w-z)\frac{w-z}{\overline{w}-\overline{z}}\,g(w)\,dm(w) + \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{C}} e_k(w-z)\frac{w-z}{(\overline{w}-\overline{z})^2}\,g(w)\,dm(w)\right).$$

Demostración. Empecemos por definir los operadores:

$$\begin{aligned} T_k^a : L^p(\mathbb{D}) &\longrightarrow L^p(\mathbb{D}) \\ g &\longmapsto e_k g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_k^b : W^{1,p}(\mathbb{C}) &\longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{D}) \\ g &\longmapsto (e_{-k}g)|_{\mathbb{D}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^c : W^{1,p}(\mathbb{D}) &\longrightarrow L^p(\mathbb{D}) \\ g &\longmapsto \mu\overline{\partial}g. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que $\mu\overline{\partial}(\partial + ik)^{-1} = T^c\, T_k^b\, \overline{P}\, T_k^a$. Vamos a probar que cada una de estas familias de operadores es diferenciable como función de k.

Empecemos por T_k^a; queremos probar que $\partial_k T_k^a(g)(z) = iz\, e_k g$ y que $\partial_{\overline{k}} T_k^a(g)(z) = i\overline{z}\, e_k g$, es decir que

$$\left|\left|\frac{e_{k+h}g - e_k g - iz\, e_k g h - i\overline{z}\, e_k g\overline{h}}{h}\right|\right|_{L^p(\mathbb{D})\to L^p(\mathbb{D})} \longrightarrow 0$$

como operador en g. Escrito de otra manera,

$$\left|\left|\frac{e_{k+h}g - e_k g - iz\, e_k g h - i\overline{z}\, e_k g\overline{h}}{h}\right|\right|_{L^p(\mathbb{D})} \leq C_h ||g||_{L^p(\mathbb{D})}$$

con $C_h \to 0$ cuando $h \to 0$. Ahora, como

$$\partial_k(e_k) = ize_k,$$
$$\partial_{\overline{k}}(e_k) = i\overline{z}e_k,$$

se tiene que

$$\frac{e_{(k+h)} - e_k - (ize_k h + i\overline{z}e_k\overline{h})}{h}$$

converge a 0 uniformemente en $z \in \mathbb{D}$. Puedo tomar entonces

$$C_h = \left|\left|\frac{e_{(k+h)} - e_k - (ize_k h + i\overline{z}e_k\overline{h})}{h}\right|\right|_{L^\infty(\mathbb{D})}.$$

Pasemos a T_k^b. En este caso deberá valer $\partial_k T_k^b(g)(z) = -iz\, e_{-k}g$ y $\partial_{\overline{k}} T_k^b(g)(z) = -i\overline{z}\, e_{-k}g$. Es claro al igual que antes que

$$\left|\left|\frac{e_{-(k+h)}g - e_{-k}g + iz\, e_{-k}gh + i\overline{z}\, e_{-k}g\overline{h}}{h}\right|\right|_{L^p(\mathbb{D})} \leq C_h||g||_{L^p(\mathbb{D})} \leq C_h||g||_{W^{1,p}(\mathbb{C})},$$

pero como estos operadores llegan a $W^{1,p}(\mathbb{D})$ debemos también probar la acotación para las derivadas ∂_z y $\partial_{\overline{z}}$. Es decir, para

$$\left|\left|\frac{e_{-k}\left[-i(k+h)e_{-h} - (-ik) + ih + iz(-ik)h + i\overline{z}(-ik)\overline{h}\right]g + e_{-k}\left[e_{-h} - 1 + iz\,h + i\overline{z}\,\overline{h}\right]\partial_z g}{h}\right|\right|_{L^p(\mathbb{D})},$$

$$\left|\left|\frac{e_{-k}\left[-i\overline{(k+h)}e_{-h} - (-i\overline{k}) + iz(-i\overline{k})h + i\overline{h} + i\overline{z}(-i\overline{k})\overline{h}\right]g + e_{-k}\left[e_{-h} - 1 + iz\,h + i\overline{z}\,\overline{h}\right]\partial_{\overline{z}} g}{h}\right|\right|_{L^p(\mathbb{D})}.$$

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_k(-ike_{-k}) &= -ie_{-k} - kze_{-k},\\
\partial_{\overline{k}}(-ike_{-k}) &= -k\overline{z}e_{-k},\\
\partial_k(-i\overline{k}e_{-k}) &= -\overline{k}ze_{-k},\\
\partial_{\overline{k}}(-i\overline{k}e_{-k}) &= -ie_{-k} - \overline{k}\overline{z}e_{-k},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que las expresiones

$$\frac{e_{-k}\left[-i(k+h)e_{-h} - (-ik) - (-ih - zkh - \overline{z}k\overline{h})\right]}{h}$$

y

$$\frac{e_{-k}\left[-i\overline{(k+h)}e_{-h} - (-i\overline{k}) - (-z\overline{k}h - i\overline{h} - \overline{z}\overline{k}\overline{h})\right]}{h}$$

tienden a 0 cuando $h \to 0$, uniformemente en $z \in \mathbb{D}$. Puedo entonces realizar la acotación

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\frac{e_{-(k+h)}g - e_{-k}g + iz\, e_{-k}gh + i\overline{z}\, e_{-k}g\overline{h}}{h}\right|\right|_{W^{1,p}(\mathbb{D})} \\
&\leq C_h \left(||g||_{L^p(\mathbb{D})} + ||\partial_z g||_{L^p(\mathbb{D})} + ||\partial_{\overline{z}} g||_{L^p(\mathbb{D})}\right) + C_h'||g||_{L^p(\mathbb{D})} \\
&\leq C_h''||g||_{W^{1,p}(\mathbb{D})},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
C_h' = &\left|\left|\frac{e_{-k}\left[-i(k+h)e_{-h} - (-ik) - (-ih - zkh - \overline{z}k\overline{h})\right]}{h}\right|\right|_{L^\infty(\mathbb{D})} + \\
+ &\left|\left|\frac{e_{-k}\left[-i\overline{(k+h)}e_{-h} - (-i\overline{k}) - (-z\overline{k}h - i\overline{h} - \overline{z}\overline{k}\overline{h})\right]}{h}\right|\right|_{L^\infty(\mathbb{D})}.
\end{aligned}$$

Así $C_h'' \to 0$ cuando $h \to 0$.

Finalmente, como T^c y $\overline{P}$ no dependen de k sus derivadas son trivialmente 0. Se observa que todas las derivadas obtenidas son continuas como funciones de k, de donde la familia de operadores a estudiar es continuamente diferenciable. Calculemos ahora sus derivadas:

$$\begin{aligned}
\partial_k(T^c\, T_k^b\, \overline{P}\, T_k^a)(g) &= (T^c\ \partial_k T_k^b\ \overline{P}\, T_k^a + T^c\, T_k^b\, \overline{P}\ \partial_k T_k^a)(g) \\
&= \mu\overline{\partial}(-ize_{-k}\overline{P}(e_k g)) + \mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{P}(iwe_k g)) \\
&= -\mu z\overline{k}\, e_{-k}\overline{P}(e_k g) - i\mu z e_{-k}\overline{S}(\overline{e_k g}) + \mu\overline{k}e_{-k}\overline{P}(we_k g) + i\mu e_{-k}\overline{S}(\overline{we_k g}) \\
&= \mu\overline{k}e_{-k}\overline{P}((w-z)e_k g) + i\mu e_{-k}\overline{S}(\overline{(w-z)e_k g}), \\
\partial_{\overline{k}}(T^c\, T_k^b\, \overline{P}\, T_k^a)(g) &= (T^c\ \partial_{\overline{k}} T_k^b\ \overline{P}\, T_k^a + T^c\, T_k^b\, \overline{P}\ \partial_{\overline{k}} T_k^a)(g) \\
&= \mu\overline{\partial}(-i\overline{z}e_{-k}\overline{P}(e_k g)) + \mu\overline{\partial}(e_{-k}\overline{P}(i\overline{w}e_k g)) \\
&= -i\mu e_{-k}\overline{P}(e_k g) - \mu\overline{z}\overline{k}\, e_{-k}\overline{P}(e_k g) - i\mu\overline{z}e_{-k}\overline{S}(\overline{e_k g}) + \mu\overline{k}e_{-k}\overline{P}(\overline{w}e_k g) + \\
&+ i\mu e_{-k}\overline{S}(w\overline{e_k g}) \\
&= -i\mu e_{-k}\overline{P}(e_k g) + \mu\overline{k}e_{-k}\overline{P}(\overline{(w-z)}e_k g) + i\mu e_{-k}\overline{S}((w-z)\overline{e_k g}) \\
&= \mu\overline{k}e_{-k}\overline{P}(\overline{(w-z)}e_k g).
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Por este lema y (4.10), se observa que $k \mapsto L_\mu^2$ es un operador C^1, cuyo conjunto de llegada son a su vez los operadores de $W^{1,p}(\mathbb{C},\Omega) \oplus \mathbb{C} \to W^{1,p}(\mathbb{C},\Omega) \oplus \mathbb{C}$. Si definimos la amplitud de dispersión correspondiente a g como

$$\begin{aligned} t_\mu(g;k) :&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \mu\partial(e_k g)\,dm \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \mu(ike_k g + e_k\partial g)\,dm \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \mu e_k(\partial + ik)g\,dm \\ &= (\mu(\partial+ik)g)\hat{}(k), \end{aligned}$$

se obtiene concretamente que

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{k}} L_\mu^2(g) &= P(\partial_{\overline{k}}(\mu\overline{\partial}(\partial+ik)^{-1})(\mu(\partial+ik)g)) \\ &= P(-\mu\overline{k}(\mu(\partial+ik)g)\hat{}(k)e_{-k}) \\ &= -it_\mu(g;k)P(\mu\overline{\partial}e_{-k}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

para cada $g \in W^{1,p}(\mathbb{C},\Omega) \oplus \mathbb{C}$.

Volviendo a M_μ, la proposición 4.2.1 indica que

$$\begin{aligned} (I+L_\mu)(I-L_\mu)(M_\mu) &= (I+L_\mu)(1) \\ (I-L_\mu^2)(M_\mu) &= 1 + P(\mu\overline{\partial}e_{-k}) \\ M_\mu &= (I-L_\mu^2)^{-1}(1+P(\mu\overline{\partial}e_{-k})). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Dado que L_μ^2 y e_{-k} son C^1 como funciones de k, se sigue que $k \mapsto M_\mu(\cdot,k) \in W^{1,p}(\mathbb{C},\Omega) \oplus \mathbb{C}$ también lo es. Como $p > 2$ sabemos que la inclusión $W^{1,p}(\mathbb{C}) \to C_0(\mathbb{C})$ es acotada, luego se tiene en particular que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ fijo la función $M_\mu(z,\cdot)$ es continuamente diferenciable.

Por (4.8), $M_\mu(\cdot,k)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ para cada k. Además, $M_\mu(\cdot,k) - 1 \in W^{1,p}(\mathbb{C})$, luego es acotada, y un razonamiento similar al que se empleó en la proposición 1.6.1 nos permite obtener para cada $k \in \mathbb{C}$ el desarrollo

$$M_\mu(z,k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(k) z^{-n}, \tag{4.13}$$

si $|z| > 1$, con $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotados.

Proposición 4.2.4. *Para cada $k \in \mathbb{C}$, $b_1(k) = \overline{t_\mu(M_\mu;k)}$.*

Demostración. Consideramos para k fijo la función $f(z) = (M_\mu(z,k) - 1)z - b_1(k)$, que verifica para $|z| > 1$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} z^{-n}.$$

Por la acotación de los coeficientes, $|f(z)| = O(1/|z|)$ cuando $|z| \to \infty$, y como $(M_\mu - 1) \in L^p(\mathbb{C})$ se sigue de inmediato de la definición que $f \in L^p(\mathbb{C})$. Además, por (4.8),

$$\overline{\partial} f = \overline{\partial} M_\mu z = \mu \overline{\partial(e_k M_\mu)} z \in L^p(\mathbb{D}).$$

Estamos en las hipótesis del corolario 1.4.7, por lo que $P(\overline{\partial} f) = f$. Es decir,

$$\begin{aligned}(M_\mu(z,k) - 1)z - b_1(k) &= P(\overline{\partial} M_\mu(z,k) z) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\mu(w)\overline{\partial(e_k M_\mu(\cdot,k))(w)} w}{w - z} \, dm(w).\end{aligned}$$

Evaluando en $z = 0$,

$$\begin{aligned}-b_1(k) &= (M_\mu(0,k) - 1)0 - b_1(k) \\ &= P(\overline{\partial} M_\mu(z,k) z)(0) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\mu(w)\overline{\partial(e_k M_\mu(\cdot,k))(w)} w}{w} \, dm(w) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \mu \overline{\partial(e_k M_\mu)} \, dm \\ &= -\overline{t_\mu(M_\mu; k)},\end{aligned}$$

pues μ es real. □

Si definimos las funciones

$$\begin{aligned}F_+ &= \frac{1}{2}(M_\mu + M_{-\mu}), \\ F_- &= \frac{i e_{-k}}{2}(\overline{M_\mu} - \overline{M_{-\mu}}),\end{aligned}$$

entonces (4.12) implica (como $L_{-\mu}^2 = L_\mu^2$)

$$(I - L_\mu^2)(F_+) = 1.$$

Derivando respecto a $\overline{k}$ y usando (4.11),

$$i\tau_\mu(k) P(\mu \overline{\partial} e_{-k}) + (I - L_\mu^2)(\partial_{\overline{k}} F_+) = 0, \tag{4.14}$$

donde el coeficiente de dispersión $\tau_\mu(k)$ está dado por

$$\tau_\mu(k) = t_\mu(F_+; k) = t_\mu(M_\mu; k) - t_{-\mu}(M_{-\mu}; k).$$

Teorema 16. *Para cada $z \in \mathbb{C}$, las funciones $k \mapsto F_\pm(z,k)$ son continuamente diferenciables, y verifican*

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{k}} F_+(z,k) &= \tau_\mu(k) e_{-k}(z) \overline{F_-(z,k)}, \\ \partial_{\overline{k}} F_-(z,k) &= \tau_\mu(k) e_{-k}(z) \overline{F_+(z,k)}. \end{aligned}$$

Demostración. La diferenciabilidad es inmediata pues vale para $M_{\pm\mu}$. Si ahora restamos a (4.12) aplicada a M_μ la misma ecuación aplicada a $M_{-\mu}$, se obtiene

$$\begin{aligned} (I - L_\mu^2)(M_\mu) - (I - L_{-\mu}^2)(M_{-\mu}) &= 1 + P(\mu \overline{\partial} e_{-k}) - (1 + P(-\mu \overline{\partial} e_{-k})) \\ (I - L_\mu^2)(M_\mu - M_{-\mu}) &= 2P(\mu \overline{\partial} e_{-k}) \\ (I - L_\mu^2)\left(\frac{2i}{e_k} \overline{F_-}\right) &= 2P(\mu \overline{\partial} e_{-k}) \\ (I - L_\mu^2)\left(e_{-k} \overline{F_-}\right) &= -iP(\mu \overline{\partial} e_{-k}). \end{aligned}$$

Se usó que $L_\mu^2 = L_{-\mu}^2$ y que son $\mathbb{C}$-lineales. Multiplicando ambos términos por $\tau_\mu(k)$ se sigue de (4.14) que

$$(I - L_\mu^2)\left(\tau_\mu(k) e_{-k} \overline{F_-}\right) = (I - L_\mu^2)(\partial_{\overline{k}} F_+).$$

La primera parte del teorema se sigue entonces del corolario 4.2.2.

Por la proposición 4.2.1

$$\begin{aligned} F_+ &= \frac{1}{2}(M_\mu + M_{-\mu}) = 1 + \frac{1}{2} L_\mu(M_\mu) + \frac{1}{2} L_{-\mu}(M_{-\mu}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} L_\mu(M_\mu - M_{-\mu}) = 1 + L_\mu(i e_{-k} \overline{F_-}) \\ &= 1 - iP(\mu \overline{\partial} F_-), \\ F_- &= \frac{i e_{-k}}{2}(\overline{M_\mu} - \overline{M_{-\mu}}) = \frac{i e_{-k}}{2}(\overline{L_\mu(M_\mu)} - \overline{L_{-\mu}(M_{-\mu})}) \\ &= i e_{-k} \overline{L_\mu\left(\frac{1}{2}(M_\mu + M_{-\mu})\right)} = i e_{-k} \overline{L_\mu(F_+)} \\ &= i e_{-k} \overline{P(\mu \overline{\partial}(e_{-k} \overline{F_+}))} = i e_{-k} \overline{P}(\mu \partial(e_k F_+)). \end{aligned}$$

Derivando la segunda ecuación con respecto a $\overline{k}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{k}} F_- &= \overline{z} e_{-k} \overline{P}(\mu \partial(e_k F_+)) + i e_{-k} \overline{P}(\mu \partial(i \overline{z} e_k F_+)) + i e_{-k} \overline{P}(\mu \partial(e_k \partial_{\overline{k}} F_+)) \\ &= -\overline{z} e_{-k}(z) \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(w) \partial(e_k F_+)(w)}{\overline{w} - \overline{z}} \, dm(w) + e_{-k}(z) \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(w) \overline{w} \partial(e_k F_+)(w)}{\overline{w} - \overline{z}} + \\ &+ i e_{-k} \overline{P}(\mu \partial(e_k \partial_{\overline{k}} F_+)) = e_{-k}(z) \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \mu \partial(e_k F_+) \, dm + i e_{-k} \overline{P}(\mu \partial(e_k \partial_{\overline{k}} F_+)) \\ &= e_{-k} \tau_\mu(k)(1 + i \overline{P}(\mu \partial \overline{F_-})) = e_{-k} \tau_\mu(k) \overline{F_+}, \end{aligned}$$

por la primera parte del teorema. □

Volviendo a las soluciones complejas de la óptica geométrica, podemos considerar

$$h_+ := \frac{1}{2}(f_\mu + f_{-\mu}) = e^{ikz}F_+, \tag{4.15}$$

$$h_- := \frac{i}{2}(\overline{f_\mu} - \overline{f_{-\mu}}) = e^{ikz}F_-. \tag{4.16}$$

En estos términos, el teorema anterior dice que

$$\partial_{\overline{k}} h_+ = \tau_\mu \overline{h_-}, \tag{4.17}$$

$$\partial_{\overline{k}} h_- = \tau_\mu \overline{h_+}. \tag{4.18}$$

Lo notorio de estas ecuaciones es que el coeficiente τ_μ no depende de z.

4.3 Crecimiento subexponencial

Como muestran las ecuaciones (4.1) y (4.7), las soluciones complejas de la óptica geométrica se pueden escribir en forma exponencial. En esta sección analizaremos este resultado en detalle. Necesitaremos estudiar la ecuación de Beltrami con coeficientes complejos $\lambda\mu$, donde $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ y $\mu = (1-\sigma)/(1+\sigma)$. El teorema 14 sigue siendo válido con exactamente la misma demostración. Es decir, podemos asegurar que existe una única $f_{\lambda\mu} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ tal que

$$f_{\lambda\mu}(z,k) = e^{ikz}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

y

$$\overline{\partial} f_{\lambda\mu} = \lambda\mu \overline{\partial f_{\lambda\mu}}.$$

Lema 4.3.1. *La función $f_{\lambda\mu}$ se puede escribir en la forma*

$$f_{\lambda\mu}(z,k) = e^{ik\varphi_\lambda(z,k)},$$

donde para cada $k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, la función $\varphi_\lambda(\cdot,k) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación cuasiconforme que satisface

$$\varphi_\lambda(z,k) = z + O\left(\frac{1}{z}\right) \tag{4.19}$$

y

$$\overline{\partial}\varphi_\lambda(z,k) = -\frac{\overline{k}}{k}\lambda\mu(z)(e_{-k}\circ\varphi_\lambda)(z,k)\overline{\partial\varphi_\lambda(z,k)} \tag{4.20}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. El parámetro k está fijo, por lo que podemos ignorarlo en la notación. Llamamos

$$\mu_1(z) = \lambda\mu(z)\frac{\overline{\partial f_{\lambda\mu}(z)}}{\partial f_{\lambda\mu}(z)},$$

entonces

$$\overline{\partial} f_{\lambda\mu} = \mu_1 \partial f_{\lambda\mu}. \tag{4.21}$$

Por otro lado, es fácil demostrar que existe un único homeomorfismo cuasiconforme $\varphi_\lambda \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ tal que

$$\overline{\partial}\varphi_\lambda = \mu_1 \partial\varphi_\lambda$$

y

$$\varphi_\lambda(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Por el teorema 9, cualquier solución de (4.21) se puede obtener de φ_λ como

$$f_{\lambda\mu}(z) = h \circ \varphi_\lambda(z),$$

donde h es una función entera. Pero

$$\frac{h \circ \varphi_\lambda(z)}{e^{ik\varphi_\lambda(z)}} = \frac{f_{\lambda\mu}(z)}{e^{ik\varphi_\lambda(z)}} = \frac{e^{ikz}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)}{e^{ik\left(z+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)}}$$

tiene límite 1 cuando $z \to \infty$. Como φ_λ es un homeomorfismo, $h(z)e^{-ikz}$ debe ser también acotada y, por lo tanto, constante. Es decir,

$$f_{\lambda\mu}(z) = e^{ik\varphi_\lambda(z)}.$$

Además,

$$\overline{\partial} f_{\lambda\mu} = ike^{ik\varphi_\lambda}\overline{\partial}\varphi_\lambda,$$
$$\lambda\mu\overline{\partial f_{\lambda\mu}} = -i\lambda\mu\overline{k}e^{-i\overline{k}\overline{\varphi_\lambda}}\,\overline{\partial\varphi_\lambda}.$$

Como $\overline{\partial} f_{\lambda\mu} = \lambda\mu\overline{\partial f_{\lambda\mu}}$, se concluye que

$$\overline{\partial}\varphi_\lambda = -\lambda\mu\frac{\overline{k}}{k}e^{-i(\overline{k}\overline{\varphi_\lambda}+k\varphi_\lambda)}\,\overline{\partial\varphi_\lambda}.$$

□

Lo que dice este lema es que tras un cambio de coordenadas cuasiconforme las soluciones complejas de la óptica geométrica no son más que funciones exponenciales. El objetivo fundamental de lo que queda de este capítulo será demostrar

Teorema 17. *Sea $\varphi_\lambda \in H^1_{loc}(\mathbb{C})$ solución de (4.19-4.20). Entonces cuando $k \to \infty$,*

$$\varphi_\lambda(z,k) \to z$$

uniformemente en $z \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \partial\mathbb{D}$.

Separaremos la demostración en varios lemas.

Lema 4.3.2. *Sea $\epsilon > 0$. Si $S_j : L^2(\mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{C})$ son operadores mulltiplicadores de Fourier, cada uno con un símbolo unimodular, y*

$$f_n = \lambda\mu S_n \lambda\mu S_{n-1}\lambda\mu ... \lambda\mu S_1 \lambda\mu,$$

entonces existe un número $R_n = R_n(\mu, \epsilon)$ tal que

$$|\widehat{f_n}(\xi)| < \epsilon \quad para \quad |\xi| > R_n.$$

Demostración. Podemos suponer que $\lambda = 1$. Sabemos que

$$\widehat{S_j g}(\xi) = m_j(\xi)\widehat{g}(\xi),$$

con $|m_j| \equiv 1$. Como la transformada de Fourier es una isometría en $L^2(\mathbb{C})$, se sigue que cada S_j también lo es. Luego

$$\begin{aligned}
||f_n||_{L^2(\mathbb{C})} &\leq ||\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})}||S_n\mu S_{n-1}\mu ... \mu S_1\mu||_{L^2(\mathbb{C})} \\
&= ||\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})}||\mu S_{n-1}\mu ... \mu S_1\mu||_{L^2(\mathbb{C})} \\
&\leq ... \\
&\leq ||\mu||^n_{L^\infty(\mathbb{C})}||S_1\mu||_{L^2(\mathbb{C})} \\
&= ||\mu||^n_{L^\infty(\mathbb{C})}||\mu||_{L^2(\mathbb{C})} \\
&\leq \kappa^{n+1}|\mathbb{D}|^{1/2} \\
&= \sqrt{\pi}\,\kappa^{n+1}.
\end{aligned}$$

Comenzamos por elegir ρ_n tal que

$$\int_{|\xi|>\rho_n} |\widehat{\mu}|^2\, dm < \epsilon^2.$$

A continuación elegimos inductivamente $\rho_{n-1}, \rho_{n-2}, ..., \rho_1$ tales que para $1 \leq l \leq n-1$

$$\int_{|\xi|>\rho_l} |\widehat{\mu}|^2\, dm \leq \frac{\epsilon^2}{\pi}\left(\prod_{j=l+1}^{n} \pi\rho_j\right)^{-2}.$$

Todo esto es posible pues $\widehat{\mu} \in L^2(\mathbb{C})$. Finalmente, como $\mu \in L^1(\mathbb{C})$, la proposición 1.2.1 nos permite elegir ρ_0 tal que

$$|\widehat{\mu}(\xi)| < \epsilon\, \pi^{-n} \left(\prod_{j=1}^{n} \rho_j \right)^{-1}$$

siempre que $|\xi| > \rho_0$.

Definimos entonces $R_n = \sum_{j=0}^{n} \rho_j$. Si $|\xi| > R_n$, vale (por la proposición 1.2.4)

$$\begin{aligned}
|\widehat{f_n}(\xi)| = |(\mu S_n f_{n-1})\widehat{\ }(\xi)| = \frac{1}{\pi} |\widehat{\mu} * \widehat{S_n f_{n-1}}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{C}} |\widehat{\mu}(\xi - \eta)|\, |\widehat{f_{n-1}}(\eta)|\, dm(\eta) \\
= \int_{|\xi-\eta| \leq \rho_n} |\widehat{\mu}(\xi - \eta)|\, |\widehat{f_{n-1}}(\eta)|\, dm(\eta) &+ \int_{|\xi-\eta| \geq \rho_n} |\widehat{\mu}(\xi - \eta)|\, |\widehat{f_{n-1}}(\eta)|\, dm(\eta).
\end{aligned}$$

Pero si $|\xi - \eta| \leq \rho_n$ entonces $|\eta| \geq |\xi| - \rho_n > \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j$. Si notamos

$$\Delta_n = \sup \left\{ |\widehat{f_n}(\xi)| : |\xi| > \sum_{j=0}^{n} \rho_j \right\},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta_n &\leq \int_{|\xi-\eta| \leq \rho_n} |\widehat{\mu}(\xi - \eta)|\, |\widehat{f_{n-1}}(\eta)|\, dm(\eta) + \int_{|\xi-\eta| \geq \rho_n} |\widehat{\mu}(\xi - \eta)|\, |\widehat{f_{n-1}}(\eta)|\, dm(\eta) \\
&\leq \int_{|\xi-\eta| \leq \rho_n} |\widehat{\mu}(\xi - \eta)|\, \Delta_{n-1}\, dm(\eta) + \left(\int_{|\eta| \geq \rho_n} |\widehat{\mu}(\eta)|^2\, dm(\eta) \right)^{1/2} ||\widehat{f_{n-1}}||_{L^2(\mathbb{C})} \\
&\leq ||\mu||_{L^2(\mathbb{C})} \Delta_{n-1} \sqrt{\pi \rho_n^2} + \left(\int_{|\eta| \geq \rho_n} |\widehat{\mu}(\eta)|^2\, dm(\eta) \right)^{1/2} ||f_{n-1}||_{L^2(\mathbb{C})} \\
&\leq \pi \rho_n \kappa \Delta_{n-1} + \kappa^n \left(\pi \int_{|\eta| \geq \rho_n} |\widehat{\mu}(\eta)|^2\, dm(\eta) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ (si consideramos $f_0 := \mu$). Iterando esta desigualdad, se concluye que

$$\Delta_n \leq (\kappa\pi)^n \left(\prod_{j=1}^{n} \rho_j \right) \Delta_0 + \kappa^n \sum_{l=1}^{n} \left(\prod_{j=l+1}^{n} \pi \rho_j \right) \left(\pi \int_{|\eta| \geq \rho_l} |\widehat{\mu}(\eta)|^2\, dm(\eta) \right)^{1/2},$$

donde el productorio sobre un conjunto vacío se consira 1. Por como se eligieron los ρ_j,

$$\Delta_n \leq (n+1) \kappa^n \epsilon.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Antes de demostrar el teorema 17, será necesario probar un resultado similar para una ecuación lineal:

Proposición 4.3.3. *Sea $\psi \in H^1_{loc}(\mathbb{C})$ tal que*

$$\overline{\partial}\psi = \lambda \frac{\overline{k}}{k} \mu e_{-k} \partial \psi, \tag{4.22}$$

$$\psi(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{4.23}$$

Entonces $\psi(z,k) \to z$ cuando $k \to \infty$, uniformemente en $z \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \partial\mathbb{D}$.

La solución de (4.22-4.23) pertenece a $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ para algún $p > 2$, luego es única por la proposición 3.3.1.a. Observemos ahora que por (1.25) podemos considerar $\delta_\kappa > 0$ tal que $\kappa||S||_{L^p \to L^p} < 1$ para todo $2 - \delta_\kappa \le p \le 2 + \delta_\kappa$. Con esta notación se tiene

Lema 4.3.4. *Sea $\psi \in H^1_{loc}(\mathbb{C})$ la única solución de (4.22-4.23) y sea $\epsilon > 0$. Se puede descomponer $\overline{\partial}\psi$ como $\overline{\partial}\psi = g + h$ donde*

(i) $||h(\cdot,k)||_{L^p(\mathbb{C})} < \epsilon$ *para todo* $k \in \mathbb{C}$ *y para todo* $2 - \delta_\kappa \le p \le 2 + \delta_\kappa$,

(ii) $||g(\cdot,k)||_{L^p(\mathbb{C})} \le C_0 = C_0(\kappa)$ *para todo* $k \in \mathbb{C}$,

(iii) $\widehat{g}(\cdot,k) \to 0$ *cuando* $k \to \infty$*, uniformemente sobre todo compacto y uniformemente en* $\lambda \in \partial\mathbb{D}$.

La transformada de Fourier en (iii) es sólo con respecto a la primera variable.

Demostración. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda \frac{\overline{k}}{k} \mu e_{-k} S\right)^n \left(\lambda \frac{\overline{k}}{k} \mu e_{-k}\right)$$

define una función en $L^p(\mathbb{D})$, pues

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\left| \left(\lambda \frac{\overline{k}}{k} \mu e_{-k} S\right)^n \left(\lambda \frac{\overline{k}}{k} \mu e_{-k}\right) \right|\right|_{L^p(\mathbb{C})} \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\kappa ||S||_{L^p \to L^p}\right)^n \kappa\, \pi^{1/p}$$

que converge dado que $\kappa||S||_{L^p \to L^p} < 1$. La solución de (4.22-4.23) estará dada por

$$\psi = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda \frac{\overline{k}}{k} \mu e_{-k} S\right)^n \left(\lambda \frac{\overline{k}}{k} \mu e_{-k}\right)\right) + z,$$

que claramente está en $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$. El comportamiento asintótico se sigue de la proposición 1.6.1. Como $\psi - z \in W^{1,p}(\mathbb{C})$,

$$S(\overline{\partial}\psi) = S(\overline{\partial}(\psi - z)) = \partial(\psi - z) = \partial\psi - 1.$$

Cumple entonces (4.22), porque

$$\begin{aligned}
\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}\partial\psi &= \lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}S(\overline{\partial}\psi) + \lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k} \\
&= \left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}S\right)\overline{\partial}\left(P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}S\right)^n\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}\right)\right) + z\right) + \lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k} \\
&= \left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}S\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}S\right)^n\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}\right)\right) + \lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}S\right)^{n+1}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}\right) + \lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}S\right)^{n}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}\right) \\
&= \overline{\partial}\psi.
\end{aligned}$$

Tomaremos la función h como

$$h = \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}S\right)^n\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}\right),$$

que verifica

$$\begin{aligned}
||h||_{L^p(\mathbb{C})} &\leq \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\kappa||S||_{L^p\to L^p}\right)^n\ \kappa\,\pi^{1/p} \\
&= \kappa\,\pi^{1/p}\frac{(\kappa||S||_{L^p\to L^p})^{n_0}}{1-\kappa||S||_{L^p\to L^p}}.
\end{aligned}$$

Basta elegir n_0 suficientemente grande para que valga (i), uniformemente en k. Es claro que la parte restante,

$$g = \sum_{n=0}^{n_0-1}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}S\right)^n\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\mu e_{-k}\right),$$

cumple (ii), con

$$C_0 = \sum_{n=0}^{n_0-1}\left(\sup_{2-\delta_\kappa\leq p\leq 2+\delta_\kappa}\kappa||S||_{L^p\to L^p}\right)^n\ \kappa\,\pi^{1/p}.$$

Falta probar (iii). Para esto observemos que si se define el operador S_k como

$$S_k\phi = e_k S(e_{-k}\phi),$$

entonces, por la proposición 1.4.10,

$$\begin{aligned}(S_k\phi)\widehat{\ }(\xi) &= (e_k S(e_{-k}\phi))\widehat{\ }(\xi) = (S(e_{-k}\phi))\widehat{\ }(\xi+k)\\ &= m(\xi+k)(e_{-k}\phi)\widehat{\ }(\xi+k) = m(\xi+k)\widehat{\phi}(\xi)\end{aligned}$$

para toda $\phi \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{C})$, donde $m(\xi) = \xi/\overline{\xi}$. Es decir, que S_k es un operador multiplicador de Fourier con símbolo $m(\cdot + k)$. Por la definición,

$$\begin{aligned}(\mu e_{-k}S)^n \mu e_{-k} &= (\mu e_{-k}S)^{n-1}\mu e_{-2k}S_k\mu\\ &= (\mu e_{-k}S)^{n-2}\mu e_{-3k}S_{2k}\mu S_k\mu\\ &= \ldots\\ &= e_{-(n+1)k}\mu S_{nk}\mu S_{(n-1)k}\ldots\mu S_k\mu,\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}g &= \sum_{n=1}^{n_0}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\right)^n (\mu e_{-k}S)^{n-1}(\mu e_{-k})\\ &= \sum_{n=1}^{n_0}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\right)^n e_{-nk}\mu S_{(n-1)k}\mu\ldots\mu S_k\mu\\ &= \sum_{n=1}^{n_0} e_{-nk}G_n\end{aligned}$$

con $G_n = \left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\right)\mu S_{(n-1)k}\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\right)\mu\ldots\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\right)\mu S_k\left(\lambda\frac{\overline{k}}{k}\right)\mu$. Por el lema 4.3.2, $|\widehat{G_n}(\xi)| < \widetilde{\epsilon}$ para todo n si $|\xi| > R = \max_{j\le n_0} R_j$. R no depende de λ. Se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi,k) &= \sum_{n=1}^{n_0}(e_{-nk}G_n)\widehat{\ }(\xi)\\ &= \sum_{n=1}^{n_0}\widehat{G_n}(\xi-nk).\end{aligned}$$

Para cualquier compacto K_0 podemos elegir $|k|$ suficientemente grande tal que valga $K_0 - jk \subseteq \mathbb{C}\setminus B(0,R)$ para cada $1\le j\le n_0$. Bajo estas condiciones,

$$\sup_{\xi\in K_0}|\widehat{g}(\xi,k)| \le n_0\widetilde{\epsilon},$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Demostración de la proposición. Probaremos primero que cuando $k \to \infty$, $\overline{\partial}\psi \to 0$ débilmente en $L^p(\mathbb{C})$, para todo $2-\delta_\kappa \leq p \leq 2+\delta_\kappa$. Fijamos para esto $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ (a valores reales) y elegimos $\epsilon > 0$. Usando la descomposición del lema 4.3.4 y la proposición 1.2.3 ($g(\cdot,k)$ y f son funciones de $L^2(\mathbb{C})$),

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{C}} \overline{\partial}\psi(\xi,k) f(\xi)\, dm(\xi)\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{C}} h(\xi,k) f(\xi)\, dm(\xi)\right| + \left|\int_{\mathbb{C}} g(\xi,k) f(\xi)\, dm(\xi)\right| \\ &\leq ||h(\cdot,k)||_{L^p(\mathbb{C})} ||f||_{L^{p'}(\mathbb{C})} + \left|\int_{\mathbb{C}} \widehat{g}(\xi,k)\overline{\widehat{f}(\xi)}\, dm(\xi)\right| \\ &\leq \epsilon\, ||f||_{L^{p'}(\mathbb{C})} + \left|\int_{\mathbb{C}} \widehat{g}(\xi,k)\overline{\widehat{f}(\xi)}\, dm(\xi)\right|.\end{aligned}$$

Comenzamos por elegir un R tal que

$$\int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} |\widehat{f}(\xi)|^2\, dm(\xi) \leq \epsilon^2,$$

lo que puede hacerse dado que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{C})$. A continuación se elige un $|k|$ suficientemente grande para que $|\widehat{g}(\xi,k)| \leq \epsilon/(\sqrt{\pi}R)$ para todo $\xi \in B(0,R)$. Bajo esas condiciones,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{C}} \overline{\widehat{f}(\xi)}\widehat{g}(\xi,k)\, dm(\xi)\right| \\ &\leq \left|\int_{B(0,R)} \overline{\widehat{f}(\xi)}\widehat{g}(\xi,k)\, dm(\xi)\right| + \left|\int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} \overline{\widehat{f}(\xi)}\widehat{g}(\xi,k)\, dm(\xi)\right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}R}\int_{B(0,R)} |\widehat{f}(\xi)|\, dm(\xi) + \left(\int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} |\widehat{f}(\xi)|^2\, dm(\xi)\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} |\widehat{g}(\xi,k)|^2\, dm(\xi)\right)^{1/2} \\ &\leq \epsilon\, ||\widehat{f}||_{L^2(\mathbb{C})} + \epsilon\, C_0 \\ &\leq \epsilon\, C(f).\end{aligned}$$

Aunque se pidió que f perteneciera a $C_c^\infty(\mathbb{C})$ en vez de a $L^{p'}(\mathbb{C})$, esto alcanza para asegurar la convergencia débil pues $||\overline{\partial}\psi(\cdot,k)||_{L^p(\mathbb{C})}$ está acotada independientemente de k. Ninguna de las cotas obtenidas depende de λ, de modo que para cada $f \in L^{p'}(\mathbb{C})$,

$$\sup_{\lambda\in\partial\mathbb{D}} \left|\int_{\mathbb{C}} \overline{\partial}\psi(\xi,k) f(\xi)\, dm(\xi)\right| \to 0 \text{ cuando } |k| \to \infty.$$

Para probar la convergencia uniforme recordemos que

$$\begin{aligned}\psi(z,k) &= P(\overline{\partial}\psi)(z,k) + z \\ &= z - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\partial}\psi(w,k)}{w-z}\, dm(w),\end{aligned} \tag{4.24}$$

porque el soporte de $\overline{\partial}\psi$ está en el disco. Además, $\chi_{\mathbb{D}}(w)/(w-z) \in L^q(\mathbb{C})$ para cada $q < 2$ y cada $z \in \mathbb{C}$, de modo que la convergencia débil de $\overline{\partial}\psi$ en $L^{q'}(\mathbb{C})$ (para q suficientemente cercano a 2) nos da

$$\psi(z,k) \to z \text{ cuando } k \to \infty, \tag{4.25}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$ fijo, pero uniformemente en $\lambda \in \partial\mathbb{D}$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} |\psi(z,k) - z| &\leq \frac{1}{\pi}||\chi_{\mathbb{D}}(\cdot)/(\cdot - z)||_{L^q(\mathbb{C})}||\overline{\partial}\psi(\cdot,k)||_{L^{q'}(\mathbb{C})} \\ &\leq \frac{C(\kappa)}{\pi}||\chi_{\mathbb{D}}(\cdot)/(\cdot - z)||_{L^q(\mathbb{C})} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

para $|z|$ suficientemente grande, uniformemente en k y λ. Por (4.24) y el teorema 3, se tiene que

$$\begin{aligned} |\psi(z_1,k) - \psi(z_2,k)| &\leq |z_1 - z_2| + ||\overline{\partial}\psi(\cdot,k)||_{L^{q'}(\mathbb{C})}|z_1 - z_2|^{\alpha} \\ &\leq |z_1 - z_2| + C(\kappa)|z_1 - z_2|^{1-2/q'}. \end{aligned}$$

Es decir que la familia $\{\psi(\cdot,k) : k \in \mathbb{C}, \lambda \in \partial\mathbb{D}\}$ es uniformemente equicontinua.

Dado $\epsilon > 0$, empezamos entonces por elegir $R > 0$ tal que $|\psi(z,k) - z| < \epsilon$ para todo k y todo λ, si $|z| > R$. Fijamos luego un $0 < \delta < \epsilon$ para que $|\psi(z_1,k) - \psi(z_2,k)| < \epsilon$ siempre que $|z_1 - z_2| < \delta$, sin importar cuáles sean k y λ. Esto puede hacerse por la equicontinuidad. Ahora, la compacidad de $B[0,R]$ me permite elegir $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq B[0,R]$ tales que cada punto de dicho disco se halle a distancia menor que δ de algún y_i. Finalmente, por (4.25) puedo tomar $K > 0$ tal que si $|k| > K$ entonces $|\psi(y_i,k) - y_i| < \epsilon$ para todo $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ y para todo $1 \leq i \leq n$. Vale entonces, si se toma un y_i apropiado, que siempre que $|k| > K$ y $|z| \leq R$,

$$\begin{aligned} |\psi(z,k) - z| &\leq |\psi(z,k) - \psi(y_i,k)| + |\psi(y_i,k) - y_i| + |y_i - z| \\ &< 3\epsilon, \end{aligned}$$

al igual que para $|z| > R$. Nuevamente estas acotaciones no dependen de λ. Esto prueba la convergencia uniforme. □

Usaremos de ahora en más la notación

$$\Sigma_\kappa = \left\{ g \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}) : \overline{\partial}g = \nu\partial g, |\nu| \leq \kappa\chi_{4\mathbb{D}} \text{ y } g(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right) \text{ cuando } z \to \infty \right\}$$

Estas funciones también pertenecen a $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$, luego se sigue de la proposición 3.3.1.b que son biyectivas, y deben ser cuasiconformes.

Observemos que todos los resultados de esta sección sostienen su validez si se pide tan solo que el soporte de μ esté contenido en $n\mathbb{D}$, y no en $\mathbb{D}$. Esto será necesario en las últimas dos partes de la demostración:

Lema 4.3.5. *(a) Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es acotado, la familia $\chi_\Omega \Sigma_\kappa$ es compacta en la topología de la convergencia uniforme.*

(b) Supongamos que $f, g \in \Sigma_\kappa$, $1+\kappa < p < 1+1/\kappa$ y que $\epsilon > 0$ es suficientemente chico para que $(1+\epsilon)p < 1+1/\kappa$. Entonces

$$\int_{\mathbb{C}} |\overline{\partial} f - \overline{\partial} g|^p \, dm \leq C(p,\epsilon) \left(\int_{\mathbb{C}} |\nu_f - \nu_g|^{p\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \, dm \right)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}},$$

donde

$$\nu_f = \frac{\overline{\partial} f}{\partial f},$$
$$\nu_g = \frac{\overline{\partial} g}{\partial g}.$$

Las funciones ν_f y ν_g están bien definidas porque el gradiente de una aplicación cuasiconforme sólo se puede anular en un conjunto de medida cero (proposición 2.1.1).

Demostración. Consideramos otro dominio acotado U que contenga a la clausura de Ω; queremos hacer uso de [14, Teorema II.5.1]. La métrica esférica no trae inconvenientes porque $g(U)$ es un conjunto acotado independientemente de ν:

$$g = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\nu S)^n(\nu) \right) + z,$$
$$|g(z)| \leq M_1 \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (\nu S)^n(\nu) \right\|_{L^p(4\mathbb{D})} + |z|$$
$$\leq M_1 \kappa (16\pi)^{1/p} \frac{1}{1-\kappa ||S||_{L^p \to L^p}} + \sup_{z \in U} |z|,$$

para cualquier $z \in U$, si fijo un $2 < p \leq 2+\delta_\kappa$. Se usó el teorema 3. Luego el espacio de las funciones de Σ_κ restringidas a U es normal, y se sigue que $\chi_\Omega \Sigma_\kappa$ es compacto en la topología de la convergencia uniforme. Esto prueba a).

Las funciones g de Σ_κ verifican $g \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ para algún $p > 2$. Entonces $\overline{\partial} g \in L^p(4\mathbb{D})$, y por el teorema 4 $P(\overline{\partial} g) \in W^{1,p}(\mathbb{C})$. Se sigue de la proposición 1.4.1 que

$$\overline{\partial}(P(\overline{\partial} g)) = \overline{\partial} g,$$

y por el teorema 6 existe una función h entera tal que

$$P(\overline{\partial} g) = g + h.$$

La proposición 1.6.1 indica que $P(\overline{\partial} g) = O(1/z)$, y por la definición de Σ_κ

$$h + z = P(\overline{\partial} g) - g + z = O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Como $h + z$ es holomorfa, se sigue por el teorema de Liouville que $h \equiv -z$, de donde

$$S(\overline{\partial} g) = \partial(P(\overline{\partial} g)) = \partial(g - z) = \partial g - 1.$$

Para probar b), consideramos ahora dos funciones $f, g \in \Sigma_\kappa$, y tenemos

$$\begin{aligned}(I - \nu_f S)(\overline{\partial} f - \overline{\partial} g) &= \overline{\partial} f - \nu_f(\partial f - 1) - \overline{\partial} g + \nu_f S(\overline{\partial} g) \\ &= \nu_f - \nu_g \partial g + \nu_f S(\overline{\partial} g) \\ &= \nu_f - \nu_g + (\nu_f - \nu_g) S(\overline{\partial} g) \\ &= (\nu_f - \nu_g)\partial g,\end{aligned}$$

o sea

$$\overline{\partial} f - \overline{\partial} g = (I - \nu_f S)^{-1}((\nu_f - \nu_g)\partial g).$$

Recordemos que la invertibilidad de $I - \nu_f S$ en $L^p(\mathbb{C})$ está asegurada por el teorema 13, del que también se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{C}} |\overline{\partial} f - \overline{\partial} g|^p \, dm\right)^{1/p} &\leq C_p \left(\int_{4\mathbb{D}} |(\nu_f - \nu_g)\partial g|^p \, dm\right)^{1/p} \\ &\leq C_p \left(\int_{\mathbb{C}} |\nu_f - \nu_g|^{p\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \, dm\right)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)p}} ||\partial g||_{L^{p(1+\epsilon)}(4\mathbb{D})}.\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}(I - \nu_g S)(\overline{\partial} g) &= \overline{\partial} g - \nu_g(\partial g - 1) = \nu_g \\ \overline{\partial} g &= (I - \nu_g S)^{-1}\nu_g,\end{aligned}$$

por lo que (nuevamente usando el teorema 13)

$$\begin{aligned}||\partial g||_{L^{p(1+\epsilon)}(4\mathbb{D})} &= ||1 + S(\overline{\partial} g)||_{L^{p(1+\epsilon)}(4\mathbb{D})} \\ &\leq |4\mathbb{D}|^{\frac{1}{p(1+\epsilon)}} + C_p ||\overline{\partial} g||_{L^{p(1+\epsilon)}(\mathbb{C})} \\ &\leq C(p,\epsilon) + C(p,\epsilon)||\nu_g||_{L^{p(1+\epsilon)}(\mathbb{C})} \\ &\leq C(p,\epsilon)(1 + ||\kappa\chi_{4\mathbb{D}}||_{L^{p(1+\epsilon)}(\mathbb{C})}) \\ &\leq C(p,\epsilon). \qquad (4.26)\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Demostración del teorema. Si φ_λ satisface (4.19-4.20) entonces es una aplicación cuasiconforme, y podemos considerar su inversa $\psi_\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, también cuasiconforme. Se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\partial} z = \overline{\partial}(\psi_\lambda \circ \varphi_\lambda) &= \overline{\partial}\psi_\lambda \circ \varphi_\lambda \, \overline{\partial}\overline{\varphi}_\lambda + \partial\psi_\lambda \circ \varphi_\lambda \, \overline{\partial}\varphi_\lambda \\ &= \overline{\partial}\psi_\lambda \circ \varphi_\lambda \, \overline{\partial\varphi_\lambda} + \partial\psi_\lambda \circ \varphi_\lambda \left(-\frac{\overline{k}}{k}\lambda\mu(e_{-k} \circ \varphi_\lambda)\overline{\partial\varphi_\lambda} \right), \end{aligned}$$

y como $\partial\varphi_\lambda \neq 0$ en casi todo punto,

$$\overline{\partial}\psi_\lambda \circ \varphi_\lambda = \partial\psi_\lambda \circ \varphi_\lambda \left(\frac{\overline{k}}{k}\lambda\mu(e_{-k} \circ \varphi_\lambda) \right).$$

Componiendo con ψ_λ a derecha,

$$\overline{\partial}\psi_\lambda = \frac{\overline{k}}{k}\lambda(\mu \circ \psi_\lambda)e_{-k}\partial\psi_\lambda.$$

Además, es evidente que

$$\psi_\lambda(z,k) = z + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

cuando $|z| \to \infty$. Probar el teorema será equivalente a ver que $\psi_\lambda(z,k) \to z$ uniformemente en z y λ cuando $k \to \infty$.

El soporte de $\mu \circ \psi_\lambda$ no necesariamente está contenido en $\overline{\mathbb{D}}$. Sí vale que está contenido en $\overline{4\mathbb{D}}$; para demostrarlo usaremos el teorema del cuarto de Koebe (ver por ejemplo [3, Corolario 5.3]). Si definimos $\varphi_\lambda(\infty) = \infty$, la función $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = (\varphi_\lambda(1/z))^{-1}$ es claramente holomorfa, y luego

$$g(\mathbb{D}) \supseteq \frac{1}{4}\mathbb{D}.$$

Pero $g(\mathbb{D}) = \varphi_\lambda\left(\mathbb{D}^{-1}\right)^{-1}$, por lo que

$$\varphi_\lambda(\mathbb{D}^{-1}) \supseteq 4(\mathbb{D}^{-1}).$$

Como φ_λ es un homeomorfismo,

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(\mathbb{D}) &\subseteq 4\mathbb{D}, \\ \psi_\lambda(4\mathbb{D}) &\supseteq \mathbb{D}, \end{aligned}$$

de donde es inmediato que $\mathrm{sop}(\mu \circ \psi_\lambda) \subseteq \overline{4\mathbb{D}}$.

Esto nos asegura que las funciones ψ_λ están en Σ_κ, y podemos applicar el lema 4.3.5.a. Lo que necesitamos probar es que para cada sucesión $k_n \to \infty$, y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe una subsucesión $(k_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\psi_{\lambda_{n_j}}(\cdot, k_{n_j}) \to z$ uniformemente en z. Por el lema, nos alcanza con mostrar que siempre que $k_n \to \infty$, $\lambda_n \to \lambda$ y $\psi_{\lambda_n}(z, k_n) \to \psi_\infty(z) \in \Sigma_\kappa$ uniformemente en $z \in 4\mathbb{D}$, entonces $\psi_{\lambda_n}(\cdot, k_n) \to z$ uniformemente.

Consideramos ahora la única solución $\Phi_\lambda(\cdot, k) \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ de

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\Phi &= -\frac{\overline{k}}{k}\lambda(\mu\circ\psi_\infty)e_{-k}\partial\Phi,\\ \Phi(z) &= z + O\left(\frac{1}{z}\right) \text{ cuando } z\to\infty.\end{aligned}$$

El soporte de $\mu\circ\psi_\infty$ queda contenido en $4\mathbb{D}$ por la convergencia uniforme. La proposición 4.3.3 nos dice que

$$\Phi_\lambda(z,k) \to z \text{ cuando } k \to \infty \tag{4.27}$$

uniformemente en z y λ.

Ahora usamos el lema 4.3.5.b con $2 < p < 1 + 1/\kappa$ y el corolario 1.4.7 (ψ_{λ_n} y Φ_λ están en $W^{1,p}_{\text{loc}}$ por ser cuasiconformes):

$$\begin{aligned}
&|\psi_{\lambda_n}(z,k_n) - \Phi_\lambda(z,k_n)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{4\mathbb{D}} \frac{1}{w-z}\overline{\partial}(\psi_{\lambda_n}(w,k_n) - \Phi_\lambda(w,k_n))\, dm(w)\right|\\
&\le C_1||\overline{\partial}(\psi_{\lambda_n}(\cdot,k_n) - \Phi_\lambda(\cdot,k_n))||_{L^p(4\mathbb{D})}\\
&\le C_1\left(\int_{\mathbb{C}} |e_{-k_n}\overline{k_n}/k_n|^{p\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \, |\lambda_n\mu\circ\psi_{\lambda_n}(w,k_n) - \lambda\mu\circ\psi_\infty(w,k_n)|^{p\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\, dm(w)\right)^{\frac{\epsilon}{p(1+\epsilon)}}\\
&\le C_1\left(\int_{4\mathbb{D}} |\lambda_n\mu\circ\psi_{\lambda_n}(w,k_n) - \lambda_n\mu\circ\psi_\infty(w,k_n)|^{p\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\, dm(w)\right)^{\frac{\epsilon}{p(1+\epsilon)}} +\\
&+ C_1\left(\int_{4\mathbb{D}} |\lambda_n\mu\circ\psi_\infty(w,k_n) - \lambda\mu\circ\psi_\infty(w,k_n)|^{p\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\, dm(w)\right)^{\frac{\epsilon}{p(1+\epsilon)}}\\
&\le C_1\left(\int_{4\mathbb{D}} |\mu(\psi_{\lambda_n}(w,k_n)) - \mu(\psi_\infty(w,k_n))|^{p\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\, dm(w)\right)^{\frac{\epsilon}{p(1+\epsilon)}} + C_1|\lambda_n - \lambda|\,|4\mathbb{D}|^{\frac{\epsilon}{p(1+\epsilon)}}.
\end{aligned}\tag{4.28}$$

Ahora, para todo $2 < p < 1+1/\kappa$, se puede ver por la misma cuenta con que se obtuvo (4.26), que si $g = \psi^{-1}$ con $\psi \in \Sigma_\kappa$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} J_g(z)^{p/2}\, dm(z) &= \int_{\mathbb{D}} \left(|\partial g(z)|^2 - |\overline{\partial} g(z)|^2\right)^{p/2}\, dm(z)\\ &\le \int_{\mathbb{D}} |\partial g|^p\, dm\\ &\le C(\kappa).\end{aligned}$$

Para cada $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ vale entonces que

$$\begin{aligned}\int_{4\mathbb{D}} |\mu \circ \psi - \eta \circ \psi|^{\frac{p(1+\epsilon)}{\epsilon}}\, dm &\leq \int_{\mathbb{D}} |\mu - \eta|^{\frac{p(1+\epsilon)}{\epsilon}} J_g\, dm \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{D}} |\mu - \eta|^{\frac{p^2(1+\epsilon)}{\epsilon(p-2)}}\, dm \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_{\mathbb{D}} J_g^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Esto se puede hacer arbitrariamente chico si se elige η apropiado, y éste η también puede tomarse con soporte en $\overline{\mathbb{D}}$. Es claro entonces que $\eta(\psi_{\lambda_n}(z, k_n))$ converge uniformemente a $\eta(\psi_\infty(z))$. A partir de (4.27), (4.28) y (4.29), se sigue que $\psi_{\lambda_n}(z, k_n) \to z$ uniformemente en $z \in \mathbb{C}$, como se quería demostrar. $\square$

Capítulo 5

Reconstrucción de la conductividad

5.1 De Λ_σ a τ_μ

Probaremos ahora que el mapa Dirichlet a Neumann determina unívocamente $f_\mu(z)$ y $f_{-\mu}(z)$ para z afuera del disco unitario. Esto implica en particular que Λ_σ determina $\tau_\mu(k)$ para todo $k \in \mathbb{C}$.

Proposición 5.1.1. *Si σ y $\widetilde{\sigma}$ satisfacen las hipótesis del teorema 1 con $\Lambda_\sigma = \Lambda_{\widetilde{\sigma}}$, y si μ y $\widetilde{\mu}$ son los coeficientes correspondientes en la ecuación de Beltrami, entonces*

$$f_\mu(z) = f_{\widetilde{\mu}}(z) \ \text{ y } \ f_{-\mu}(z) = f_{-\widetilde{\mu}}(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Demostración. Por la proposición 3.1.5, sabemos que Λ_σ determina Λ_{σ^1}, y será suficiente probar la primera de las dos igualdades. La misma proposición nos asegura que $\mathcal{H}_\mu = \mathcal{H}_{\widetilde{\mu}}$.

Por su definición, es inmediato que $Q_\mu = Q_{\widetilde{\mu}}$. Si defino $f = f_\mu|_{\partial\mathbb{D}}$ y $\tilde{f} = f_{\widetilde{\mu}}|_{\partial\mathbb{D}}$, como $f_\mu, f_{\widetilde{\mu}} \in H^1(\mathbb{D})$, entonces por el lema 3.1.4, $Q_\mu(f - \tilde{f})$ debe ser constante.

Por el mismo lema, existe una función $G \in H^1(\mathbb{D})$ que verifica

$$\overline{\partial} G = \mu \overline{\partial G}$$

en $\mathbb{D}$ y

$$G|_{\partial\mathbb{D}} = f - \tilde{f}.$$

Podemos extender G a todo el plano como

$$G(z) = f_\mu(z) - f_{\widetilde{\mu}}(z) \quad \text{si } |z| \geq 1.$$

Esta G verificará

$$\overline{\partial}G(z) - \mu(z)\overline{\partial G}(z) = 0$$

para casi todo $z \in \mathbb{C}$, pues G es continua sobre $\partial\mathbb{D}$. Como $G \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ y es cuasiregular, vale $G \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ para todo $p < 1 + 1/\kappa$.

Finalmente, si definimos $G_0 \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ por

$$G_0(z) = e^{-ikz}G(z),$$

sabemos de (4.1-4.2) que $G_0(z) = O(1/z)$. Además

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}G_0 - e_{-k}\mu\overline{\partial G_0} &= e^{-ikz}\overline{\partial}G - e_{-k}\mu\overline{(-ike^{-ikz}G + e^{-ikz}\partial G)} \\
&= e^{-ikz}\overline{\partial}G - i\overline{k}e_{-k}\mu e^{i\overline{k}\overline{z}}\overline{G} - e_{-k}\mu e^{i\overline{k}\overline{z}}\overline{\partial G} \\
&= e^{-ikz}\overline{\partial}G - i\overline{k}\mu e_{-k}\overline{e^{-ikz}G} - \mu e^{-ikz}\overline{\partial G} \\
&= -i\overline{k}e_{-k}\mu\overline{G}_0.
\end{aligned}$$

Entonces G_0 verifica las hipótesis de la proposición 3.3.1.a, por lo que es idénticamente cero. Eso prueba que $G \equiv 0$, y $f_\mu = f_{\widetilde{\mu}}$ en el complemento del disco. □

Corolario 5.1.2. *El operador Λ_σ determina unívocamente $t_\mu(M_\mu;\cdot), t_{-\mu}(M_{-\mu};\cdot)$ y τ_μ.*

Demostración. Para t_μ y $t_{-\mu}$ el resultado se sigue de la proposición 4.2.4. Que τ_μ queda determinado resulta entonces evidente de su definición. □

Como $M_\mu(\cdot, 0) \equiv 1$, sabemos que τ_μ se anula en el origen. Veremos cómo se comporta globalmente:

Proposición 5.1.3. *Las soluciones complejas de la óptica geométrica*

$$f_{\pm\mu}(z,k) = e^{ikz}M_{\pm\mu}(z,k)$$

satisfacen, para todos $k, z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$,

$$\left|\frac{M_\mu(z,k) - M_{-\mu}(z,k)}{M_\mu(z,k) + M_{-\mu}(z,k)}\right| \leq \frac{1}{|z|}.$$

Además, el coeficiente de dispersión verifica

$$|\tau_\mu(k)| \leq 1$$

para todo $k \in \mathbb{C}$.

Demostración. Por la proposición 4.1.2, tenemos que

$$\left|\frac{M_\mu(z,k)}{M_{-\mu}(z,k)} - 1\right| < \left|\frac{M_\mu(z,k)}{M_{-\mu}(z,k)} - (-1)\right|$$
$$|M_\mu(z,k) - M_{-\mu}(z,k)| < |M_\mu(z,k) + M_{-\mu}(z,k)|. \tag{5.1}$$

Esto prueba que el cociente

$$m_k(z) := \frac{M_\mu(z,k) - M_{-\mu}(z,k)}{M_\mu(z,k) + M_{-\mu}(z,k)}$$

está bien definido y que su módulo es siempre menor que 1. Además, m_k es holomorfa para $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, porque lo son $M_{\pm\mu}(\cdot, k)$ (ecuación (4.6)). Por (4.2) vale también que $\lim_{z\to\infty} m_k(z) = 0$, por lo que si se define $m_k(\infty) = 0$ la función será holomorfa también en ese punto.

Consideramos ahora la función $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ dada por

$$f(z) = m_k\left(\frac{1}{z}\right).$$

Claramente es holomorfa y cumple $f(0) = 0$. El lema de Schwarz ([4, Teorema 4.13]) nos asegura que $|f(z)| \leq |z|$ en todo el disco, luego $|m_k(z)| \leq 1/|z|$ en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, como se buscaba demostrar.

Además, sabemos por la proposición 4.2.4 y la fórmula (4.13) que

$$\begin{aligned}(M_\mu(z,k) - M_{-\mu}(z,k))z &= (b_1^\mu(k) - b_1^{-\mu}(k)) + O(1/z) \\ &= \overline{t_\mu(M_\mu;k) - t_{-\mu}(M_{-\mu};k)} + O(1/z) \\ &= 2\overline{\tau_\mu(k)} + O(1/z),\end{aligned}$$

y es inmediato de (4.2) que

$$M_\mu(z,k) + M_{-\mu}(z,k) = 2 + O(1/z).$$

Se sigue que

$$\lim_{z\to\infty} z\, m_k(z) = \overline{\tau_\mu(k)},$$

y por lo ya probado, $|\tau_\mu(k)| \leq 1$. □

5.2 La matriz de transporte

Las soluciones complejas de la óptica geométrica f_μ cumplen, para $k \neq 0$, que su derivada ∂f_μ sólo puede anularse en un conjunto de medida cero (por la proposición

2.1.1 y el teorema 9). Así, recuperar μ se limita a

$$\mu = \frac{\overline{\partial} f_\mu}{\overline{\partial f_\mu}}, \tag{5.2}$$

y σ se obtiene como

$$\sigma = \frac{1-\mu}{1+\mu}. \tag{5.3}$$

Para completar la demostración del teorema 1 necesitamos ver que las soluciones f_μ quedan determinadas por el mapa Dirichlet a Neumann, lo que ya se probó para $|z| > 1$ en el teorema 5.1.1.

De ahora en más volveremos a trabajar con la ecuación de conductividad. Definimos

$$\begin{aligned} u_1 &= h_+ - ih_- = \operatorname{Re}(f_\mu) + i\operatorname{Im}(f_{-\mu}), \\ u_2 &= i(h_+ + ih_-) = -\operatorname{Im}(f_\mu) + i\operatorname{Re}(f_{-\mu}), \end{aligned}$$

donde h_+ y h_- están dadas por (4.15) y (4.16). Dado que μ es el coeficiente de Beltrami correspondiente a la conductividad σ y $-\mu$ es el correspondiente a $1/\sigma$, el lema 3.1.1 asegura que u_1 y u_2 son soluciones de las ecuaciones de conductividad

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla u_1 &= 0, \\ \nabla \cdot \frac{1}{\sigma} \nabla u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, por el teroema 16 es inmediato que u_1 y u_2 son funciones C^1 de k (para z fijo). Usando (4.17-4.18), se obtiene que

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{k}} u_1 &= \partial_{\overline{k}}(h_+ - ih_-) = \tau_\mu(\overline{h_-} - i\overline{h_+}) = -i\tau_\mu \overline{u_1}, \\ \partial_{\overline{k}} u_2 &= \partial_{\overline{k}}(ih_+ - h_-) = \tau_\mu(i\overline{h_-} - \overline{h_+}) = -i\tau_\mu \overline{u_2}, \end{aligned}$$

y como $f_\mu(z,0) \equiv 1$ para cualquier μ ($|\mu| \leq \kappa < 1$), también

$$\begin{aligned} u_1(z,0) &\equiv 1, \\ u_2(z,0) &\equiv i. \end{aligned}$$

Es claro de acuerdo con la proposición 5.1.1 que el mapa Dirichlet a Neumann determina los valores de u_1 y u_2 afuera del disco; u_1 y u_2 también determinan f_μ y $f_{-\mu}$ en esa región. Para demostrar el teorema que es el objetivo de esta tesis, falta entonces ver que el valor de las u_j afuera del disco determina el que toman adentro.

Del mismo modo que en (5.1), $h_+(z,k) \neq 0$ para todo $z, k \in \mathbb{C}$, y

$$\left|\frac{h_-(z,k)}{h_+(z,k)}\right| = \left|\frac{F_-(z,k)}{F_+(z,k)}\right| = \left|\frac{M_\mu(z,k) - M_{-\mu}(z,k)}{M_\mu(z,k) + M_{-\mu}(z,k)}\right| < 1.$$

Luego $u_2 = i(h_+ + ih_-) = ih_+(1 + ih_-/h_+)$ tampoco puede anularse en ningún (z, k). Como

$$\frac{u_1}{u_2} = -i\frac{h_+ - ih_-}{h_+ + ih_-} = -i\frac{1 - ih_-/h_+}{1 + ih_-/h_+} = -i\frac{1 - |h_-/h_+|^2 - 2i\mathrm{Re}(h_-/h_+)}{|1 + ih_-/h_+|^2},$$

y $|h_-/h_+| < 1$, se sigue que $u_1/u_2 \notin \mathbb{R}$. Es decir, que para cada $z, k \in \mathbb{C}$, $\{u_1(z, k), u_2(z, k)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En particular, si fijo un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| > 1$, se puede escribir

$$\begin{aligned} u_1(z, k) &= a_1(z, z_0; k)u_1(z_0, k) + a_2(z, z_0; k)u_2(z_0, k), \\ u_2(z, k) &= b_1(z, z_0; k)u_1(z_0, k) + b_2(z, z_0; k)u_2(z_0, k), \end{aligned}$$

con a_j y b_j funciones a valores reales. Definimos la matriz de transporte para la conductividad σ, como

$$T^{\sigma}_{z,z_0}(k) = \begin{pmatrix} a_1(z, z_0; k) & a_2(z, z_0; k) \\ b_1(z, z_0; k) & b_2(z, z_0; k) \end{pmatrix}.$$

Es invertible pues $\{u_1(z, k), u_2(z, k)\}$ es base para todo z, k. Para demostrar el teorema principal 1 bastará entonces probar

Teorema 18. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y simplemente conexo, sean $\sigma_1, \sigma_2 : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ funciones medibles. Supongamos que existe $c > 0$ tal que $c^{-1} \leq \sigma_i \leq c$. Si $\Lambda_\sigma = \Lambda_{\widetilde{\sigma}}$, entonces para todo $z_0, z, k \in \mathbb{C}$, $|z_0| > 1$, se tiene que*

$$T^{\sigma}_{z,z_0}(k) = T^{\widetilde{\sigma}}_{z,z_0}(k).$$

El resto de esta sección estará destinada a este resultado. Empecemos por observar que, como

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(u_1(z_0, k)) & \mathrm{Re}(u_2(z_0, k)) \\ \mathrm{Im}(u_1(z_0, k)) & \mathrm{Im}(u_2(z_0, k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(z, z_0; k) \\ a_2(z, z_0; k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(u_1(z, k)) \\ \mathrm{Im}(u_1(z, k)) \end{pmatrix}$$

y esta matriz es invertible, a_1 y a_2 serán C^1 como funciones de k, al igual que u_1 y u_2. Si definimos $\alpha = a_1 + ia_2$, se tiene que

$$\begin{aligned} -i\tau_\mu(k)\overline{u_1(z, k)} &= \partial_{\overline{k}} u_1(z, k) \\ &= \partial_{\overline{k}} a_1(z, z_0; k)u_1(z_0, k) + a_1(z, z_0; k)\partial_{\overline{k}} u_1(z_0, k) + \\ &+ \partial_{\overline{k}} a_2(z, z_0; k)u_2(z_0, k) + a_2(z, z_0; k)\partial_{\overline{k}} u_2(z_0, k) \\ &= \partial_{\overline{k}} a_1(z, z_0; k)u_1(z_0, k) - i\tau_\mu(k)a_1(z, z_0; k)\overline{u_1(z_0, k)} + \\ &+ \partial_{\overline{k}} a_2(z, z_0; k)u_2(z_0, k) - i\tau_\mu(k)a_2(z, z_0; k)\overline{u_2(z_0, k)} \\ &= -i\tau_\mu(k)\overline{u_1(z, k)} + \partial_{\overline{k}} \alpha(z, z_0; k)h_+(z_0, k) - i\partial_{\overline{k}} \overline{\alpha}(z, z_0; k)h_-(z_0, k), \end{aligned}$$

luego

$$\partial_{\overline{k}}\alpha(z,z_0;k) = i\frac{h_-(z_0,k)}{h_+(z_0,k)}\overline{\partial_k\alpha(z,z_0;k)} = \nu_{z_0}(k)\overline{\partial_k\alpha(z,z_0;k)}. \tag{5.4}$$

Es decir, α es una aplicación cuasiregular como función de k. Por otra parte, si escribimos explícitamente la dependencia de μ,

$$\begin{aligned} u_2^\mu &= i(h_+^\mu + ih_-^\mu) = i(h_+^{-\mu} - ih_-^{-\mu}) = iu_1^{-\mu}, \\ u_1^\mu &= h_+^\mu - ih_-^\mu = h_+^{-\mu} + ih_-^{-\mu} = -iu_2^{-\mu}. \end{aligned}$$

Definiendo ahora $\beta = b_1 + ib_2$, es inmediato que

$$\beta_\mu = i\alpha_{-\mu}, \tag{5.5}$$

y se sigue a su vez que β es también una aplicación cuasiregular con

$$\partial_{\overline{k}}\beta(z,z_0;k) = \nu_{z_0}(k)\overline{\partial_k\beta(z,z_0;k)}.$$

Veamos ahora cuál es el comportamiento asintótico de α y β.

Proposición 5.2.1. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo, con $|z_0| > 1$. Entonces:*

(a) Para cada $k \neq 0$, existe una función $v \in L^\infty(\mathbb{C})$ continua tal que

$$\alpha(z,z_0;k) = e^{ikz+v(z)}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. La función v también depende continuamente de k.

(b) Para cada $z \in \mathbb{C}$ fijo, vale si $k \neq 0$ que

$$\alpha(z,z_0;k) = e^{ik(z-z_0)+k\epsilon(k)},$$

donde $\epsilon(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$. La función ϵ depende continuamente de k y z.

Es claro que el comportamiento asintótico de β será el mismo, salvo por el factor i.

Demostración. Para demostrar (a), como $h_+ = (f_\mu + f_{-\mu})/2$ no se anula, podemos escribir

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(f_\mu + f_{-\mu} + \overline{f_\mu} - \overline{f_{-\mu}}) \\ &= f_\mu \frac{1 + \frac{\overline{f_\mu} - \overline{f_{-\mu}}}{f_\mu + f_{-\mu}}}{1 + \frac{f_\mu - f_{-\mu}}{f_\mu + f_{-\mu}}}. \end{aligned}$$

Por (5.1), se sabe que

$$\frac{|f_\mu(z,k) - f_{-\mu}(z,k)|}{|f_\mu(z,k) + f_{-\mu}(z,k)|} < 1$$

para todo $z, k \in \mathbb{C}$. Luego tanto el numerador como el denominador en la expresión anterior tienen un logaritmo continuo. Como además, por la proposición 5.1.3, deben ser de la forma $1 + O(1/z)$, dicho logaritmo será a su vez $O(1/z)$. Por el lema 4.3.1, como $k \neq 0$, vale que $f_\mu(z) = e^{ik\varphi(z)}$ con $\varphi(z) = z + O(1/z)$. Tenemos entonces que

$$u_1(z,k) = e^{ikz + O_k\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

El exponente se puede tomar continuo, como función de z y de k.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} u_1(z,k) &= a_1(z,z_0;k)u_1(z_0,k) + a_2(z,z_0;k)u_2(z_0,k) \\ &= \alpha(z,z_0;k)h_+(z_0,k) - i\overline{\alpha(z,z_0;k)}h_-(z_0,k), \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{u_1(z,k)}{h_+(z_0,k)} = \alpha(z,z_0;k) - i\overline{\alpha(z,z_0;k)}\frac{h_-(z_0,k)}{h_+(z_0,k)},$$

lo que se resuelve para α como

$$\begin{aligned} \alpha(z,z_0;k) &= \left(1 + \left|\frac{h_-(z_0,k)}{h_+(z_0,k)}\right|^2\right)\left(1 + i\frac{h_-(z_0,k)\overline{u_1(z,k)}}{\overline{h_+(z_0,k)}u_1(z,k)}\right)\frac{u_1(z,k)}{h_+(z_0,k)} \\ &= C_{z_0,k}\left(1 + i\frac{h_-(z_0,k)\overline{u_1(z,k)}}{\overline{h_+(z_0,k)}u_1(z,k)}\right)u_1(z). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Como la proposición 5.1.3 nos dice que $|h_-(z_0,k)/h_+(z_0,k)| \leq 1/|z_0| < 1$, el segundo término de este producto admite un logaritmo continuo y acotado para todo z. Esto completa la prueba de (a).

Para probar (b), observemos ante todo que

$$u_1 = f_\mu \frac{1 - i\frac{h_-}{h_+}}{1 + i\frac{h_-}{h_+}}.$$

Necesitaremos el siguiente

Lema 5.2.2. *Para cada $z \in \mathbb{C}$ fijo,*

$$\left|\frac{h_-(z,k)}{h_+(z,k)}\right| \leq 1 - e^{-|k|\epsilon(k)},$$

donde $\epsilon(k) \in \mathbb{R}_{>0}$ verifica $\epsilon(k) \to 0$ cuando $|k| \to \infty$.

Demostración. Como $|h_-/h_+|$ es siempre menor que uno, resulta claro geométricamente que basta con mostrar que

$$\inf_{0\leq t<2\pi}\left|\frac{f_\mu(z,k)-f_{-\mu}(z,k)}{f_\mu(z,k)+f_{-\mu}(z,k)}+e^{it}\right|\geq e^{-|k|\epsilon(k)}$$

para todo z y para todo k. Definimos

$$\Phi_t=e^{-it/2}\left(f_\mu\cos\frac{t}{2}+if_{-\mu}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right).$$

Para cada k fijo se tiene que

$$\Phi_t(z,k)=e^{ikz}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

y además

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\Phi_t&=e^{-it/2}\left(\mu\overline{\partial f_\mu}\cos\frac{t}{2}-i\mu\overline{\partial f_{-\mu}}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)\\&=\mu\,\overline{e^{it/2}\left(\partial f_\mu\cos\frac{t}{2}+i\partial f_{-\mu}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)}\\&=\mu e^{-it}\overline{\partial\Phi_t}.\end{aligned}$$

Es decir, $\Phi_t=f_{\lambda\mu}$ para $\lambda=e^{-it}$. Pero

$$\begin{aligned}\frac{f_\mu-f_{-\mu}}{f_\mu+f_{-\mu}}+e^{it}&=\frac{(1+e^{it})f_\mu+(e^{it}-1)f_{-\mu}}{f_\mu+f_{-\mu}}\\&=2e^{it/2}\frac{\cos\frac{t}{2}f_\mu+i\operatorname{sen}\frac{t}{2}f_{-\mu}}{f_\mu+f_{-\mu}}\\&=\frac{2e^{it}\Phi_t}{f_\mu+f_{-\mu}}\\&=\frac{f_{\lambda\mu}}{f_\mu}\,\frac{2e^{it}M_\mu}{M_\mu+M_{-\mu}}.\end{aligned}$$

Por el teorema 17, $M_{\pm\mu}(z,k)=e^{ik(\varphi_1(z,k)-z)}$ verifica que

$$e^{-|k|\epsilon_1(k)}\leq|M_{\pm\mu}(z,k)|\leq e^{|k|\epsilon_1(k)},$$

y del mismo modo

$$e^{-|k|\epsilon_2(k)}\leq\inf_{\lambda\in\partial\mathbb{D}}\left|\frac{f_{\lambda\mu}(z,k)}{f_\mu(z,k)}\right|,$$

con $\epsilon_1(k), \epsilon_2(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$. En conclusión,

$$\left|\frac{f_\mu - f_{-\mu}}{f_\mu + f_{-\mu}} + e^{it}\right| \geq e^{-|k|\epsilon_2(k)}\frac{e^{-|k|\epsilon_1(k)}}{e^{|k|\epsilon_1(k)}},$$

para todo t, como se quería demostrar. $\square$

Tenemos entonces que

$$e^{-|k|\epsilon(k)} \leq \left|1 + i\frac{\overline{h_-(z,k)}}{h_+(z,k)}\right| \leq 2,$$
$$e^{-|k|\epsilon(k)} \leq \left|1 - i\frac{h_-(z,k)}{h_+(z,k)}\right| \leq 2.$$

Es decir que $u_1(z,k) = f_\mu(z,k)e^{k\epsilon_3(k)} = e^{ikz+ik(\varphi_1(z,k)-z)+k\epsilon_3(k)} = e^{ikz+k\widetilde{\epsilon_3}(k)}$, donde $\epsilon_3(k), \widetilde{\epsilon_3}(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Como además

$$h_+ = \frac{f_\mu}{1 + i\overline{h_-}/h_+},$$

un razonamiento similar muestra que el resultado se sigue de la fórmula (5.6). $\square$

Demostración del teorema. Fijamos $|z_0| > 1$ y escribimos como de costumbre $\mu = (1-\sigma)/(1+\sigma)$, $\widetilde{\mu} = (1-\widetilde{\sigma})/(1+\widetilde{\sigma})$. Se busca demostrar que $\alpha_\mu(z, z_0; k) = \alpha_{\widetilde{\mu}}(z, z_0; k)$ para todo $z, k \in \mathbb{C}$. Definimos para esto, en $k \neq 0$,

$$\delta_\mu(z, z_0; k) = ik(z - z_0) + k\epsilon_1(k),$$
$$\delta_{\widetilde{\mu}}(z, z_0; k) = ik(z - z_0) + k\epsilon_2(k),$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son los dados por la proposición 5.2.1.b para α_μ y $\alpha_{\widetilde{\mu}}$, respectivamente. Sabemos entonces que son continuas (como funciones de z y k) y que son logaritmos de α_μ y $\alpha_{\widetilde{\mu}}$. Como $\alpha_\mu(z_0, z_0; k) = 1$, se puede suponer que $\delta_\mu(z_0, z_0; k) = k\epsilon_1(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sin pérdida de generalidad.

De ahora en más considero un $k \neq 0$ fijo (para $k = 0$ es obvio que $\alpha_\mu = \alpha_{\widetilde{\mu}}$), es decir que estudio la función $z \mapsto \delta_\mu(z, z_0; k)$. Por la proposición 5.2.1.a,

$$\delta_\mu(z, z_0; k) = ikz + \widetilde{v_k}(z) + 2\widetilde{\lambda}(z)\pi i = ikz\left(1 + \frac{v_k(z)}{ikz}\right).$$

Como $\widetilde{v_k}$ puede también tomarse continua, $\widetilde{\lambda} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$ debe ser constante, y por consiguiente $v_k = \widetilde{v_k} + 2\widetilde{\lambda}\pi i \in L^\infty(\mathbb{C})$. Es claro por esta escritura que, si elijo un $w \in \mathbb{C}$ cualquiera, para un R suficientemente grande la imagen por δ_μ de la curva $\partial B(0, R)$

dará una vuelta alrededor de w. Como $\partial B(0,R)$ es homotópica a un punto en $\mathbb{C}$, debe haber un punto z con módulo menor que R tal que $\delta_\mu(z,z_0;k)=w$.

Hemos probado entonces que $z \mapsto \delta_\mu(z,z_0;k)$ es continua, sobreyectiva y se anula en z_0. Lo mismo vale, por supuesto, para $\delta_{\widetilde{\mu}}$. Para probar el teorema necesitamos ver que $\delta_\mu(z,z_0;k)=\delta_{\widetilde{\mu}}(z,z_0;k)$, lo que por la suryectividad se podrá lograr si se demuestra que

$$\delta_{\widetilde{\mu}}(z_1,z_0;k) \neq \delta_\mu(z_2,z_0;k) \quad \text{para todo } z_1 \neq z_2 \text{ (si } k \neq 0).$$

Fijamos entonces $z_1 \neq z_2$. En la fórmula (5.4), el coeficiente $\nu_{z_0}(k)$ será el mismo para δ_μ y $\delta_{\widetilde{\mu}}$, pues h_- y h_+ coinciden en $|z_0|>1$ (proposición 5.1.1). Se sigue entonces que

$$\partial_{\overline{k}}\delta_\mu = \frac{\partial_{\overline{k}}\alpha_\mu}{\alpha_\mu} = \frac{\nu_{z_0}(k)\overline{\partial_k\alpha_\mu}}{\alpha_\mu} = \nu_{z_0}(k)\frac{\overline{\alpha_\mu}}{\alpha_\mu}\overline{\partial_k\delta_\mu} = \nu_{z_0}(k)e^{\overline{\delta}_\mu-\delta_\mu}\overline{\partial_k\delta_\mu},$$

y del mismo modo

$$\partial_{\overline{k}}\delta_{\widetilde{\mu}} = \nu_{z_0}(k)e^{\overline{\delta}_{\widetilde{\mu}}-\delta_{\widetilde{\mu}}}\overline{\partial_k\delta_{\widetilde{\mu}}}.$$

La diferencia

$$g(k)=\delta_\mu(z_2,z_0;k)-\delta_{\widetilde{\mu}}(z_1,z_0;k)$$

(extendida a $k=0$ como 0) verifica

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{k}}g - \nu_{z_0}e^{\overline{\delta_\mu}-\delta_\mu}\overline{\partial_k g} &= \nu_{z_0}\overline{\partial_k\delta_{\widetilde{\mu}}}\left(e^{\overline{\delta_\mu}-\delta_\mu} - e^{\overline{\delta_{\widetilde{\mu}}}-\delta_{\widetilde{\mu}}}\right), \\ \partial_{\overline{k}}g - \eta\partial_k g &= \gamma g, \end{aligned}$$

donde $|\eta| \leq |\nu_{z_0}| < 1$ y

$$|\gamma| = |\nu_{z_0}\partial_k\delta_{\widetilde{\mu}}|\left|\frac{e^{\overline{\delta_\mu}-\delta_\mu} - e^{\overline{\delta_{\widetilde{\mu}}}-\delta_{\widetilde{\mu}}}}{\delta_\mu-\delta_{\widetilde{\mu}}}\right| \leq 2|\partial_k\delta_{\widetilde{\mu}}|.$$

Por la defininción de los δ, tenemos que $g(k)=i(z_2-z_1)k+k\epsilon(k)$. Como $\alpha_\mu,\alpha_{\widetilde{\mu}}$ son funciones C^1 de k, vale que $g \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ y que $\gamma \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ (siempre como funciones de k). Esto nos coloca en las hipótesis de la proposición 3.3.1.b, por lo que g sólo puede anularse en un punto, que es $k=0$.

Esto completa la demostración en lo que concierne a α. Falta ver que β también queda determinado por el mapa Dirichlet a Neumann. Pero sabemos (proposición 3.1.5) que Λ_σ determina $\Lambda_{\sigma^{-1}}$, y usando lo ya demostrado se tiene que $\alpha_{-\mu}=\alpha_{-\widetilde{\mu}}$. Sólo queda recordar (5.5). $\square$

La demostración del teorema 1 se obtiene de acuerdo con los comentarios anteriores. Si $\Lambda_\sigma = \Lambda_{\widetilde{\sigma}}$ entonces por la proposición 5.1.1 debe valer que $u_j^\sigma(z) = u_j^{\widetilde{\sigma}}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > 1$. Como además las matrices de transporte son iguales (por el teorema 18), debe ser $u_j^\sigma \equiv u_j^{\widetilde{\sigma}}$ (para $j = 1, 2$), luego $f_\mu = f_{\widetilde{\mu}}$. Se sigue que $\sigma = \widetilde{\sigma}$ por (5.2) y (5.3).

Esta misma demostración puede emplearse para reconstruir la conductividad. La única dificultad se halla en obtener $f_\mu|_{\partial\mathbb{D}}$ a partir de Λ_σ. Se puede consultar [8] para una forma de resolver este problema.

Bibliografía

[1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier, *Sobolev spaces*, second ed., Elsevier, 2005.

[2] L.V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1966.

[3] ———, *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[4] ———, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill, 1979.

[5] K. Astala, *Area distortion of quasiconformal mappings*, Acta Math. (1994), no. 173, 37–60.

[6] K. Astala, T. Iwaniec, and G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.

[7] K. Astala, T. Iwaniec, and E. Saksman, *Beltrami operators in the plane*, Duke Math (2001), no. 107, 27–56.

[8] K. Astala and L. Päivärinta, *A boundary integral equation for Calderón's inverse conductivity problem*, Collectanea Mathematica (2006), no. 57, 127–139.

[9] ———, *Calderón's inverse conductivity problem in the plane*, Ann. of Math. (2006), no. 163, 265–299.

[10] R.R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm estimates for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. (1974), no. 51, 241–250.

[11] J.A. Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

[12] A.E. Eremenko and D.H. Hamilton, *On the area distortion by quasiconformal mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no. 9, 2793–2797.

[13] T. Iwaniec, *Extremal inequalities in Sobolev spaces and quasiconformal mappings*, Z. Anal. Anwendungen 1 (1982), 1–16.

[14] O. Lehto and K.I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, second ed., Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[15] A. Nachman, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Ann. of Math. (1995), no. 142, 71–96.

[16] L. Päivärinta, A. Panchenko, and G. Uhlmann, *Complex geometrical optics solutions for Lipschitz conductivities*, Rev. Mat. Iberoamericana (2003), no. 19, 57–72.

[17] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[18] I.N. Vekua, *Generalized analytic functions*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.