UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Operadores Hipercíclicos y el Criterio de Hiperciclicidad

Martín Savransky

Director: Pinasco Damian

Co-director: Carando Daniel

Marzo de 2011

Índice general

Introducción

El estudio de la dinámica de operadores lineales definidos en espacios de Banach o de Fréchet es una rama moderna del análisis funcional que ha surgido a partir del trabajo de muchos autores. Probablemente, el inicio de su estudio de manera sistemática es la tesis doctoral de C. Kitai en 1982 [23]. En particular, gran parte de la difusión de este tema de estudio debe ser atribuida a los trabajos de G. Godefroy y J. H. Shapiro [17] y K.-G. Grosse-Erdmann [20].

Para dar una idea sumamente simplificada del tema, podemos decir que el centro de atención es el comportamiento de las sucesivas iteraciones de un operador lineal. En otras palabras, se estudian sistemas dinámicos discretos asociados a operadores lineales. En el contexto finito dimensional este problema se puede resolver a través del estudio de la forma de Jordan asociada a una matriz, y los comportamientos son relativamente simples (de ahí que el caos se asocia naturalmente a sistemas no lineales). Sin embargo, en espacios de dimensión infinita los sistemas lineales pueden ser caóticos, ya que aparecen fenómenos nuevos, como por ejemplo la existencia de órbitas densas en todo el espacio. Este nuevo fenómeno es el centro de estudio de la tesis. Cuando un operador admite órbitas densas se dice hipercíclico. La palabra "hipercíclico" tiene su origen en la noción de "operador cíclico", ligado al *problema del subespacio invariante*. En este caso, los operadores hipercíclicos están ligados al problema de existencia de *subconjuntos invariantes*: ¿dado un operador lineal $T : X \to X$, es posible encontrar un subconjunto cerrado no trivial F tal que $T(F) \subset F$?

Concretamente, las definiciones sobre las que desarrollaremos el trabajo son la siguientes. Sea X un espacio de Fréchet separable de dimensión infinita y $T : X \to X$ un operador lineal y continuo. Dado $x \in X$, la órbita de x por T es el conjunto definido por

$$Orb(x, T) = \{T^n x : n \geq 0\}.$$

El operador T se dice hipercíclico si existe $x \in X$ (vector hipercíclico) tal que $Orb(x, T)$ es denso en X.

Es importante notar que la existencia de operadores con esta propiedad es sólo posible en espacios de dimensión infinita ya que por ejemplo, si $T : X \to X$ es un operador lineal en un espacio de Fréchet y $T' : X' \to X'$ es su operador adjunto, la existencia de algún autovalor para T' garantiza que T no es hipercíclico. En los últimos años el estudio de la hiperciclicidad de operadores ha tenido un desarrollo importante, como referencia puede consultarse la bibliografía [3] y [21]. Se encontraron sorprendentes resultados, entre ellos, podemos citar que si un operador admite un vector con órbita densa, entonces admite infinitos de estos vectores. Más aún, el conjunto de los vectores con órbita densa de un operador hipercíclico es denso, conexo y homeomorfo al espacio ambiente. También se probó que no existen operadores compactos hipercíclicos.

Los primeros ejemplos de operadores hipercíclicos surgieron en el contexto de la teoría de funciones analíticas. Así, en 1929, G. D. Birkhoff [8] probó que para todo $a \in \mathbb{C}$, el operador traslación en el espacio de funciones enteras de variable compleja $(H(\mathbb{C}), \tau)$ con la topología compacto-abierta, $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ definido por $T_a f(z) = f(z+a)$ es hipercíclico, y en 1952, G. R. MacLane [25], mostró que lo mismo ocurre con el operador de diferenciación en $H(\mathbb{C})$. Por supuesto, no exitía aún la noción de hiperciclicidad, y el interés de estos trabajos no se centraba en la dinámica de los operadores sino en propiedades de las funciones analíticas. Estos resultados fueron generalizados por G. Godefroy y J. H. Shapiro en 1991 [17] quienes probaron que todo operador lineal y continuo $T : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ que conmute con las traslaciones y no sea un múltiplo de la identidad es también hipercíclico.

El primer ejemplo de existencia de esta clase de operadores en espacios de Banach fue exhibido por S. Rolewicz en 1969 [27]. En el trabajo se prueba que para $1 \leq p < \infty$, si $B : \ell^p \to \ell^p$ es el operador shift a izquierda, $B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$, entonces $T = \lambda B$ es hipercíclico para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$.

Para ciertas clases de operadores, se han estudiado en detalle las condiciones para que se presente la propiedad de hiperciclicidad. Por ejemplo, supongamos que $G \subset \mathbb{C}$ es un abierto simplemente conexo del plano complejo y llamemos $H(G, \tau)$ al espacio de funciones holomorfas en G, dotado con la topología de convergencia uniforme sobre compactos. Dada una función holomorfa $\phi : G \to G$, se considera el operador de composición $C_\phi : H(G, \tau) \to H(G, \tau)$, definido por $C_\phi f(z) = f \circ \phi(z)$. En [12], P. S. Bourdon y J. H. Shapiro determinan si el operador de composición es hipercíclico estudiando la dinámica de la función ϕ que lo induce. En [31], se estudian operadores de composición definidos en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$.

En 1982, C. Kitai [23] introdujo en su tesis doctoral un criterio de sencilla aplicación que brinda condiciones suficientes para que un operador sea hipercíclico; este resultado fue redescubierto por R. M. Gethner y J. H. Shapiro en 1987 [16]. Las hipótesis supuestas sobre el operador $T : X \to X$ permiten no solo probar su hiperciclicidad, sino también la del operador $T \oplus T : X \oplus X \to X \oplus X$. Cuando el operador $T \oplus T : X \oplus X \to X \oplus X$ resulta hipercíclico, se dice que T es mixing débil. En 1999, J. Bès y A. Peris [6] introducen un criterio similar al anterior, conocido como el “criterio de hiperciclicidad” y prueban que la hiperciclicidad de $T \oplus T$ implica que el operador T satisface las hipótesis del criterio. Este resultado puede traducirse en el siguiente modo: la afirmación “T es hipercíclico $\Leftrightarrow$ $T \oplus T$ es hipercíclico” es equivalente a decir que las condiciones del criterio de hiperciclicidad son *necesarias* para la hiperciclicidad de un operador T. Este problema fue planteado originalmente por D. Herrero [22] y dio lugar a numerosos trabajos (ver por ejemplo [18], [19] y [29]). Entre los que se encuentran versiones equivalentes de que un operador sea mixing débil. El problema planteado por D. Herrero es reconocido como uno de los problemas más interesantes de la teoría, y permaneció sin solución durante 15 años. Finalmente, M. De La Rosa y C. Read en 2006 probaron la existencia de operadores hipercíclicos en espacios de Banach que no satisfacen el criterio de hiperciclicidad [14]. Más aún, en 2007, F. Bayart y É. Matheron [4] muestran diversos ejemplos en espacios de Banach clásicos, como por ejemplo en $c_0(\mathbb{N})$ o $\ell^p(\mathbb{N})$.

Una vez resuelto este problema, queda abierta la caracterización de aquellos espacios que admiten operadores hipercíclicos, y también de aquellos espacios en los que todo operador hipercíclico es mixing débil. Por ejemplo, existen espacios de Fréchet que no admiten operadores hipercíclicos y también existen espacios que no son localmente convexos, que admiten operadores hipercíclicos. Además, en el espacio $\omega := \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ todo operador hipercíclico es mixing débil.

Estructuramos el trabajo de la siguiente forma.

En el primer capítulo presentamos algunas de las propiedades más importantes de los operadores hipercíclicos. Analizamos el conjunto de vectores hipercíclicos de un operador. Damos el Criterio de Hiperciclicidad, y mostramos los primeros dos ejemplos.

Dedicamos el segundo capítulo a los ejemplos más importantes que se conocen. Estudiamos dentro de distintas familias de operadores condiciones para que estos resulten hipercíclicos. Se analizan operadores de multiplicación, de composición, de traslación, de derivación y operadores shift.

En el tercer capítulo estudiaremos operaciones que mantienen la hiperciclicidad de un operador. Veremos que esta propiedad se mantiene por potencias y rotaciones. Además, trabajamos en profundidad el criterio de hiperciclicidad presentado en el primer capítulo. Veremos que si un operador satisface el criterio de hiperciclicidad, entonces es mixing débil y hereditariamente hipercíclico.

Construimos en el cuarto capítulo un operador hipercíclico que no satisface el criterio de hiperciclicidad. Mostrando así, que la hiperciclicidad es una propiedad que no se mantiene por sumas directas.

En el último capítulo, veremos otros resultados de interés que se relacionan con los temas desarrollados. Estudiamos condiciones que aseguran que un operador hipercíclico satisfaga el criterio de hiperciclicidad. También damos los lineamientos generales sobre los sistemas dinámicos caóticos y por último enunciamos una solución al problema del "subconjunto" invariante.

Capítulo 1

Operadores Hipercíclicos

1.1. Sistemas Dinámicos Lineales

En esta tesis desarrollamos el análisis de sistemas dinámicos lineales. Trabajaremos sobre espacios vectoriales X junto con una topología τ. El objeto de estudio serán operadores lineales y continuos sobre el espacio (X, τ). Notamos

$$\mathcal{L}(X) := \{T : X \longrightarrow X, \quad T \text{ lineal y continuo}\}.$$

Definimos entonces, los sistemas dinámicos lineales.

Definición 1.1.1. Un *sistema dinámico lineal* es un par (X, T) donde X es un espacio vectorial topológico real o complejo y $T \in \mathcal{L}(X)$.

Muchas veces trabajaremos en contextos menos generales, como ser espacios de *Banach* o de *Fréchet*.

Definición 1.1.2. Decimos que el espacio métrico (X, d) es un *F-espacio*, si es un espacio vectorial real o complejo con una métrica d, que lo hace completo. Si además X es un F-espacio localmente convexo, decimos que X es un *espacio de Fréchet*.

Para entender la dinámica del sistema, estudiaremos las órbitas que define el operador T.

Definición 1.1.3. Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Para $x \in X$, definimos la *órbita del elemento x por T* como el conjunto

$$Orb(x, T) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Puntualmente, nos interesa determinar la existencia de operadores lineales y continuos sobre el espacio X que admiten órbitas densas.

Definición 1.1.4. Sea (X, T) un sistema dinámico lineal. Decimos que T es *hipercíclico* si existe $x \in X$ tal que $Orb(x, T)$ es denso en X. En ese caso, decimos que x es un vector hipercíclico de T y notamos $HC(T)$ al conjunto de los vectores hipercíclicos de T.

Observación 1.1.5. Es claro que esta condición nos restringe a trabajar sobre espacios separables.

Similarmente, definimos operadores cíclicos.

Definición 1.1.6. Se dice que T es *cíclico* si existe $x \in X$ tal que

$$\langle Orb(x,T)\rangle_{gen} = \mathbb{K}[T]x = \{P(T)x : P \in \mathbb{K}[t]\}$$

es denso en X.

Trabajando en el contexto de los *F-espacios* podemos hacer uso del siguiente resultado.

Teorema 1.1.7 (Teorema de la categoría de Baire). *Si X es un espacio métrico completo, entonces toda intersección numerable de abiertos densos es densa en X.*

Este teorema es muy importante para el desarrollo de la teoría, al igual que muchos teoremas de Análisis Funcional, como ser el teorema de la aplicación abierta y el principio de acotación uniforme.

1.2. Restricciones que trae la definición

Así como la separabilidad de X, otras restricciones sobre el sistema (X,T) deben considerarse. Empezamos con el primer resultado de S. Rolewicz que afirma que este es un fenómeno puramente infinito-dimensional [27].

Teorema 1.2.1. *No existen operadores hipericíclicos en espacios de dimensión finita.*

Demostración. Sea $X = \mathbb{K}^N$ y supongamos que existe un operador hipercíclico, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^N)$. Sea $x \in HC(T)$. Afirmamos que $\{x, T(x), T^2(x), \dots, T^{N-1}(x)\}$ es linealmente independiente. Si no lo es, entonces existen $a_i \in \mathbb{K}, 0 \le i \le N-1$ no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i T^i(x) = 0.$$

Sea $i_0 = max\{i; a_i \neq 0\}$, tenemos que

$$a_{i_0} T^{i_0+1}(x) = -\sum_{i=0}^{i_0-1} a_i T^{i+1}(x) \in \langle x, T(x), T^2(x), \dots, T^{i_0}(x)\rangle_{gen}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} T^N(x) = T^{N-i_0-1}\left(T^{i_0+1}(x)\right) &\in \langle T^{N-i_0-1}(x), \dots, T^{N-1}(x)\rangle_{gen} \\ &\subset \langle x, T(x), T^2(x), \dots, T^{N-1}(x)\rangle_{gen}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\langle Orb(x,T)\rangle_{gen} = \langle x, T(x), T^2(x), \ldots, T^{N-1}(x)\rangle_{gen},$$

y por lo tanto

$$dim(\langle Orb(x,T)\rangle_{gen}) = dim(\langle x, T(x), T^2(x), \ldots, T^{N-1}(x)\rangle_{gen}) = N,$$

lo que implica que $Orb(x,T)$ no es denso en $\mathbb{K}^N$. Luego, los vectores son $l.i.$ Sea $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$; como T es hipercíclico existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $T^{n_k}(x) \longrightarrow \alpha x$. Al ser T un operador continuo y $\{x, T(x), T^2(x), \ldots, T^{N-1}(x)\}$ una base de $\mathbb{K}^N$, tenemos que

$$T^{n_k}(T^i(x)) = T^i(T^{n_k}(x)) \longrightarrow \alpha T^i(x)\,\forall i < N;$$

$$\Rightarrow\ T^{n_k}(z) \longrightarrow \alpha z\,\forall z \in \mathbb{K}^N;$$

$$\Rightarrow\ T^{n_k} \longrightarrow \alpha I;$$

$$\Rightarrow det(T^{n_k}) \longrightarrow \alpha^N.$$

Si $a := |det(T)|$, obtenemos que $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, lo que es una contradicción. Por lo que se deduce que no es posible hallar $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ hipercíclico. $\square$

Cuando estudiamos operadores hipercíclicos en espacios de Banach, debemos considerar restricciones sobre la norma del operador. Por ejemplo, si $\|T\| \leq 1$, la órbita de cualquier elemento x_o es un conjunto acotado,

$$Orb(x_o,T) \subseteq B(0, \|x_o\|).$$

Esto dice que un operador hipercíclico no puede ser contractivo. Tampoco puede ser expansivo, por que todas las órbitas se mantendrían alejadas del 0. Resumiendo, tenemos la siguiente observación.

Observación 1.2.2. Sea X un espacio de Banach, y $T \in \mathcal{L}(X)$,

- Si $\|T\| \leq 1 \Rightarrow T$ no es hipercíclico,
- Si $\|Tx\| \geq \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow T$ no es hipercíclico.

Continuamos analizando más propiedades que surgen de la definición. En este caso, una propiedad sobre el espectro de T^*. Notamos $\sigma_p(R)$ al espectro puntual del operador R, i.e., el conjunto de todos los autovalores de R.

Proposición 1.2.3. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico. Entonces $\sigma_p(T^*) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $\sigma_p(T^*)$ no es vacío. Sea $\alpha \in \sigma_p(T^*)$ y $x^* \in X^*$ un autovector de T^* asociado a α. Sea $x \in HC(T)$. Como toda funcional no nula es sobreyectiva, $x^*(Orb(x,T))$ es denso en $\mathbb{K}$. Pero,

$$x^*(Tx) = T^*(x^*)(x) = \alpha x^*(x),$$

y entonces,

$$x^*(T^n x) = (T^*)^n(x^*)(x) = \alpha^n x^*(x).$$

Así, obtenemos que $\{\alpha^n x^*(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $\mathbb{K}$. Lo que es una contradicción, y resulta $\sigma_p(T^*) = \emptyset$. $\square$

Observación 1.2.4. Si X es un espacio de Banach, la propiedad $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ implica que $T - \alpha$ tiene rango denso para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, pues

$$R(T-\alpha)^\perp = Ker(T-\alpha)^* = Ker(T^* - \overline{\alpha}) = \{0\}.$$

Esta propiedad es cierta para operadores hipercíclicos, aunque no estemos en espacios de Banach. Veremos más adelante que $P(T)$ tiene rango denso para cualquier $P \in \mathbb{K}[t]$ no nulo.

Siguiendo con las restricciones que impone la definición, pasamos ahora al último de los resultados que presentaremos en esta sección. Veremos que no existen operadores compactos hipercíclicos. Lo probamos primero para espacios complejos, y luego para reales. Recordamos la definición del radio espectral de un operador.

Definición 1.2.5. Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Definimos el radio espectral de T como

$$\rho(T) := sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

La fórmula de Gelfand para el radio espectral es

$$\rho(T) = \overline{lim}\|(T)^n\|^{1/n}.$$

Proposición 1.2.6. *Sea X un espacio de Banach complejo y T un operador compacto. Entonces T no es hipercíclico.*

Demostración. Recordemos que como T es compacto, T^* también lo es y al ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, tenemos que $\sigma(T^*) = \{0\} \cup \sigma_p(T^*)$. Si $\sigma(T^*) \neq \{0\}$, T no es hipercíclico por la Proposición 1.2.3. Si $\sigma(T^*) = \{0\}$, se tiene también $\rho(T^*) = 0$. Luego, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\|(T^*)^n\|^{1/n} \leqslant 1$ para todo $n \geqslant n_o$. Esto implica que

$$\|T^n\| = \|(T^n)^*\| = \|(T^*)^n\| \leqslant 1, \quad \forall n \geqslant n_o$$

y así,

$$Orb(x,T) = \{x, Tx, T^2x, \ldots, T^{n_o-1}x\} \cup \{T^n x \ : n \geqslant n_o\}$$

$$\subseteq \{x, Tx, T^2x, \ldots, T^{n_o-1}x\} \cup \overline{B(0, \|x\|)}.$$

Con lo que la órbita de x por T es un conjunto acotado. Luego T no es hipercíclico. $\square$

Probemos ahora el mismo resultado en el caso real. Para eso, complejificaremos el espacio y usaremos que ya hemos probado el caso complejo.

Proposición 1.2.7. *Sea X un espacio de Banach real y T un operador compacto. Entonces T no es hipercíclico.*

Demostración. Supongamos que T es hipercíclico. Hacemos la siguiente construcción para complejificar el espacio y el operador. Consideramos $Y = X \oplus iX$ con la norma definida por

$$\|x \oplus ix'\| = \|x\| + \|x'\|.$$

Es fácil ver que Y es un espacio de Banach complejo. Definimos $S : Y \longrightarrow Y$ como $S(x \oplus ix') = T(x) \oplus iT(x')$. Veamos que S es un operador acotado y $\|S\| = \|T\|$. Notemos que

$$\begin{aligned} \|S(x \oplus ix')\| &= \|T(x) \oplus iT(x')\| \\ &= \|Tx\| + \|Tx'\| \\ &\leq \|T\|(\|x\| + \|x'\|) \\ &= \|T\|\|x \oplus ix'\|, \end{aligned}$$

entonces $\|S\| \leq \|T\|$. Tomando una sucesión $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$ tales que $\|Tx_n\| \longrightarrow \|T\|$, tenemos que $S(x_n \oplus i0) = Tx_n \oplus i0$, y luego $\|S\| = \|T\|$.

Veamos ahora que S es compacto. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ una sucesión acotada. Podemos escribir $y_n = x_n \oplus ix'_n$, con (x_n), $(x'_n) \subset X$ dos sucesiones acotadas. Por compacidad de T, existe $x \in X$ y $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ una subsucesión tal que $Tx_{n_j} \longrightarrow Tx$. Como $(x'_{n_j}) \subset X$ es acotada, existe $x' \in X$ y $(x'_{n_{j_k}})$ una subsucesión tal que $Tx'_{n_{j_k}} \longrightarrow Tx'$. Por lo tanto $S(y_{n_{j_k}}) \longrightarrow Tx \oplus iTx'$. Luego S es compacto.

Veamos que $S^* : Y^* \longrightarrow Y^*$ no tiene autovalores. Sea $y^* \in Y^*$, $y^* \neq 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $S^*(y^*) = \lambda y^*$. Sea $x_o \in HC(T)$. Entonces

$$\begin{aligned} \{|y^*(T^n x_o \oplus i0)| : n \in \mathbb{N}\} &= \{|y^*(S^n(x_o \oplus i0))| : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{|(S^*)^n(y^*)(x_o \oplus i0)| : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{|\lambda^n y^*(x_o \oplus i0)| : n \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción, pues el primer conjunto es denso en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y el último no. Tenemos entonces que $\sigma(S^*) = \{0\}$. Como antes, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\|S^n\| < 1$ para todo $n \geq n_o$. Pero $\|T^n\| = \|S^n\| < 1$ para todo $n \geq n_o$, y argumentando como en la demostración del caso complejo, podemos ver que T no es hipercíclico, en contradicción a lo que habíamos supuesto. □

1.3. Propiedades de los operadores hipercíclicos

Presentamos en esta sección propiedades de los operadores hipercíclicos. Comenzamos con los resultados que nos permitirán demostrar cuando un operador lineal es hipercíclico. En general, no es un trabajo sencillo mostrar que una función cualquiera admite órbitas densas, pero en el contexto lineal existe un criterio de fácil aplicación que da condiciones suficientes para que un operador sea hipercíclico. El primer resultado se debe a G. D. Birkhoff [9], es una aplicación del Teorema de la categoría de Baire y relaciona sistemas dinámicos lineales con sistemas dinámicos topológicos.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio topológico y $T : X \longrightarrow X$ continuo. Decimos que T es *topológicamente transitivo*, si para todo par de abiertos no vacíos U y V, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Teorema 1.3.2 (**Teorema de Birkhoff**). *Sean X un F-espacio separable y un operador $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces, T es hipercíclico si y solo si T es topológicamente transitivo. En ese caso, $HC(T)$ es un conjunto G_δ-denso.*

Demostración. Supongamos que T es hipercíclico. Observemos que si $x \in HC(T)$, entonces $Orb(x,T) \subset HC(T)$, pues

$$Orb(T^k(x),T) = Orb(x,T) - \{x, Tx, \ldots, T^{k-1}(x)\},$$

y como X no tiene puntos aislados, al quitar finitos puntos el conjunto se mantiene denso. Así, $HC(T)$ es denso. Si U y V, son abiertos no vacíos podemos tomar $x' \in U \cap HC(T)$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x') \in V$, con lo que $T^n(U) \cap V$ es no vacío.

Recíprocamente, supongamos que T es topológicamente transitivo y sea $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base numerable de abiertos de X. Tenemos que,

$$\begin{aligned} x \in HC(T) &\iff Orb(x,T) \cap V_j \neq \emptyset, \forall j \in \mathbb{N} \\ &\iff \forall j \in \mathbb{N}, \exists n \geq 0 : T^n(x) \in V_j; \end{aligned}$$

es decir,

$$HC(T) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j)$$

es un G_δ. Sea $W_j := \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j)$. Entonces, W_j es abierto y

$$\begin{aligned} \overline{W_j} = X &\iff \forall U \subset X \text{ abierto no vacío}, \exists n \in \mathbb{N} : U \cap T^{-n}(V_j) \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \subset X \text{ abierto no vacío}, \exists n \in \mathbb{N} : T^n(U) \cap V_j \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Como T es topológicamente transitivo, se cumple la última condición y por lo tanto, W_j es denso $\forall j \in \mathbb{N}$. Luego, $HC(T)$ es intersección numerable de abiertos densos y por el Teorema 1.1.7, $HC(T) \neq \emptyset$ y T resulta hipercíclico. $\square$

Es inmediato de la definición de transitividad que si T es inversible, entonces es topológicamente transitivo si y sólo si lo es T^{-1}. En consecuencia, tenemos:

Corolario 1.3.3. *Sea X un F-espacio separable y $T \in \mathcal{L}(X)$, T inversible. Entonces*

$$T \text{ hipercíclico } \Longleftrightarrow T^{-1} \text{ hipercíclico.}$$

El primer ejemplo de un operador hipercíclico en un espacio de Banach, fue dado por S. Rolewicz [27]. Mostró que el shift $\lambda B : \ell_p \longrightarrow \ell_p$, $\lambda B(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_2, \lambda x_3, \ldots)$ es hipercíclico para todo $|\lambda| > 1$. Veremos la demostración en la Subsección 1.4.2. El argumento usado para demostrar este hecho, daba indicios de poder ser generalizado a un criterio para testear la hiperciclicidad de cualquier operador. Este criterio fue presentado en primera instancia por C. Kitai [23], en su tesis de doctorado; y luego redescubierto por R. Gethner y J. H. Shapiro [16]. Enunciamos ahora una versión del criterio de hiperciclicidad, que aparece en la tesis doctoral de J. Bés [5].

Definición 1.3.4 (**Criterio de Hiperciclicidad - Bés**)**.** Sea X un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$. Decimos que T satisface el criterio de hiperciclicidad si existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$; subconjuntos densos D_1, $D_2 \subset X$ y aplicaciones $S_{n_k} : D_2 \longrightarrow X$, que cumplen:

1. $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0$, $\forall x \in D_1$
2. $S_{n_k}(y) \longrightarrow 0$, $\forall y \in D_2$
3. $T^{n_k} S_{n_k}(y) \longrightarrow y$, $\forall y \in D_2$

Observamos que, en la definición, no se supone que los conjuntos densos D_1 o D_2 sean subespacios, ni que las aplicaciones S_{n_k} sean lineales o continuas.

Podemos entonces, dar un enunciado equivalente del Criterio de Hiperciclicidad.

Definición 1.3.5 (**Criterio de Hiperciclicidad I**)**.** Sea X un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$. Decimos que T satisface el criterio de hiperciclicidad I, si existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ y subconjuntos densos D_1, $D_2 \subset X$, que cumplen:

1. $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0$, $\forall x \in D_1$
2. Para cada $y \in D_2$, existe $(v_k) \subset X$ tal que $v_k \longrightarrow 0$ y $T^{n_k} v_k \longrightarrow y$

Damos a continuación la versión original del criterio de C. Kitai.

Definición 1.3.6 (**Criterio de Hiperciclicidad II - Kitai**)**.** Sea X un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$. Decimos que T satisface el criterio de hiperciclicidad II, si existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$; subconjuntos densos D_1, $D_2 \subset X$ y una aplicación $S : D_2 \longrightarrow D_2$, que cumplen:

1. $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0$, $\forall x \in D_1$

2. $S^{n_k}(y) \longrightarrow 0$, $\forall y \in D_2$
3. $T \circ S = I_{D_2}$

Es fácil ver que si T satisface el criterio de hiperciclicidad II - Kitai, entonces satisface la versión del criterio de hiperciclicidad - Bés. Simplemente tomamos la misma sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$, los mismos conjuntos densos D_1, $D_2 \subset X$ y tomamos las aplicaciones $S_{n_k} : D_2 \longrightarrow X$, como las sucesivas composiciones de la aplicación que da el criterio de hiperciclicidad II - Kitai, es decir, $S_{n_k} = S \circ \cdots \circ S = S^{n_k}$. A. Peris [26] mostró que todos los criterios enunciados anteriormente son equivalentes. Decimos que T satisface el criterio de hiperciclicidad, si T satisface alguno de los criterios enunciados anteriormente. Cuando sea necesario, aclararemos qué versión estamos considerando o con respecto a qué sucesión se satisface el criterio.

Teorema 1.3.7. *Sea X un F-espacio separable y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Si T satisface el criterio de hiperciclicidad 1.3.4, entonces T es hipercíclico.*

Demostración. Veremos que T es topológicamente transitivo. Sean U, V dos abiertos no vacíos de X. Como D_1 y D_2 son conjuntos densos de X, podemos tomar $x \in U \cap D_1$ e $y \in V \cap D_2$. Tenemos entonces que

$$x + S_{n_k}(y) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \in U,$$

y por lo tanto,

$$T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) = T^{n_k}(x) + T^{n_k}S_{n_k}(y) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \in V$$

Luego, tomando k suficientemente grande, tenemos que $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$. □

En realidad, de esta misma prueba se puede deducir un resultado más fuerte que observamos a continuación. Antes, necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.3.8. Sea $\{T_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones continuas $T_i : X \longrightarrow Y$, entre dos espacios topológicos X e Y. Decimos que la familia es *universal*, si existe $x \in X$ tal que $\{T_i(x)\}_{i\in I}$ es denso en Y. Notemos que un operador T es hipercíclico si y sólo si la familia $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es universal.

Observación 1.3.9. En este contexto, tenemos demostrado lo siguiente: si $T \in \mathcal{L}(X)$ satisface el criterio de hiperciclicidad con respecto a la sucesión $(n_k)_{k\geq 0}$, entonces para cualquier subsucesión $(n_{k_j})_{j\geq 0}$ de $(n_k)_{k\geq 0}$ se tiene que la familia $\{T^{n_{k_j}}\}_{j\geq 0}$ es universal. Además,

$$(T^{n_{k_j}}) \text{ es universal } \iff \forall\, U, V \text{ abiertos no vacios, } \exists\, j \in \mathbb{N};\ T^{n_{k_j}}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

y en ese caso, se cumple para infinitos $j \in \mathbb{N}$.

El criterio de hiperciclicidad proveerá la principal herramienta para demostrar la hiperciclicidad de la mayoría de los ejemplos que estudiaremos.

Existe una conexión entre el espectro del operador con su hiperciclicidad, como muestra el siguiente teorema que se debe a G. Godefroy y J. H. Shapiro que afirma que si un operador tiene suficiente cantidad de autovectores, entonces este es hipercíclico [17].

Teorema 1.3.10 (Godefroy-Shapiro). *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ donde X es un F-espacio separable. Supongamos que tanto $\bigcup_{|\lambda|>1} Ker(T-\lambda)$ como $\bigcup_{|\lambda|<1} Ker(T-\lambda)$, generan subespacios densos. Entonces, T es hipercíclico.*

Demostración. Aplicamos el criterio de hiperciclicidad con respecto a la sucesión $(n_k)_{k\geq 0}$, $n_k = k$ para todo $k \geq 0$, los conjuntos densos

$$D_1 = \left\langle \bigcup_{|\lambda|<1} Ker(T-\lambda) \right\rangle_{gen} \quad \text{y} \quad D_2 = \left\langle \bigcup_{|\lambda|>1} Ker(T-\lambda) \right\rangle_{gen}$$

y los operadores $S_k : D_2 \longrightarrow X$ definidos de la siguiente manera: $S_k(y) := \lambda^{-k} y$ si $T(y) = \lambda y$ con $|\lambda| > 1$, y extendemos a D_2 usando que los subespacios $Ker(T-\lambda)$, $|\lambda| > 1$ son linealmente independientes. Veamos que se cumplen las condiciones del Criterio 1.3.4:

1. Dado $x \in D_1$, podemos escribir $x = x_1 + \ldots + x_q$ con únicos $x_i \in Ker(T-\lambda_i)$, $|\lambda_i| < 1$. Tenemos que,
$$T^k(x) = \sum_{i=1}^{q} T^k(x_i) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k x_i \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. Similarmente, dado $y \in D_2$, podemos escribir $y = y_1 + \ldots + y_p$ con únicos $y_i \in Ker(T-\lambda_i)$, $|\lambda_i| > 1$. Tenemos que,
$$S_k(y) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{{\lambda_i}^k} y_i \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. Dado dado $y \in D_2$, nuevamente podemos escribir $y = y_1 + \ldots + y_p$ con únicos $y_i \in Ker(T-\lambda_i)$, $|\lambda_i| > 1$. Tenemos que,
$$T^k S_k(y) = T^k \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{-k} y_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{-k} T^k(y_i) = y.$$

Así, mostramos que T satisface el criterio de hiperciclicidad, y por lo tanto, es hipercíclico. □

A continuación presentamos el criterio de comparación para operadores hipercíclicos.

Proposición 1.3.11 (Criterio de Comparación). *Sean X y X_0 espacios vectoriales topológicos y $T : X \longrightarrow X$, $R : X_0 \longrightarrow X_0$ funciones continuas. Supongamos que existe $J : X \longrightarrow X_0$ continua de rango denso tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] & X \arrow[d, "J"] \\ X_0 \arrow[r, "R"'] & X_0 \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces

(a) *$Orb(J(x), R) = J(Orb(x, T))$. Luego, si T es hipercíclico entonces también lo es R.*

(b) *Si J es lineal y T satisface el criterio de hiperciclicidad, entonces R también lo satisface.*

Demostración. Observemos primero que J manda conjuntos densos en conjuntos densos, si $D \subset X$ es denso, entonces $\overline{J(D)} = \overline{\overline{J(D)}} \supset \overline{J(\overline{D})} = \overline{J(X)} = X_0$.

(a) Notemos que para todo $x \in X$

$$Orb(J(x), R) = \left\{R^n(J(x)) : n \in \mathbb{N}_0\right\} = \left\{J(T^n(x)) : n \in \mathbb{N}_0\right\} = J(Orb(x, T)).$$

Si T es hipercíclico, existe $x \in X$ tal que $Orb(x, T)$ es denso en X. Luego, $J(x) \in HC(R)$, pues J manda conjuntos densos en conjuntos densos. Así, R es hipercíclico y $HC(R) \supset J(HC(T))$.

(b) Si T satisface el criterio de hiperciclicidad I de la Definición 1.3.5 con respecto a $(n_k) \subset \mathbb{N}$, y a los conjuntos densos D_1, $D_2 \subset X$ densos, veamos que R satisface el criterio de hiperciclicidad I con respecto a la misma sucesión $(n_k) \subset \mathbb{N}$ y los conjuntos densos $J(D_1)$, $J(D_2) \subset X_0$.

1. Dado $x_0 \in J(D_1)$, existe $x \in D_1$ tal que $x_0 = J(x)$. Entonces

$$R^{n_k}(x_0) = R^{n_k}(J(x)) = J(T^{n_k}(x)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

.

2. Dado $y_0 \in J(D_2)$, existen $y \in D_2$ y $(v_k) \subset X$ tal que $y_0 = J(y)$, $v_k \longrightarrow 0$ y $T^{n_k}(v_k) \longrightarrow y$. Luego,

$$J(v_k) \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad R^{n_k}(J(v_k)) = J(T^{n_k}(v_k)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} J(y) = y_0.$$

□

Del criterio de comparación podemos destacar el siguiente resultado.

Observación 1.3.12. Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico y $J : X \to X$ continua de rango denso tales que $TJ = JT$. Entonces $HC(T)$ es J-invariante.

En lo que resta de esta sección estudiaremos el conjunto $HC(T)$. Observemos que para un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ cualquiera, el conjunto $HC(T)$ es denso o vacío. Cuando el operador es hipercíclico, $HC(T)$ es un G_δ-denso. Esto implica que el conjunto de vectores hipercíclicos es grande en un sentido algebraico.

Proposición 1.3.13. *Sea X un F-espacio y $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico. Entonces, todo vector $x \in X$ es suma de dos vectores hipercíclicos.*

Demostración. Sea $x \in X$. Consideramos los conjuntos

$$A := HC(T) \quad \text{y } B := x - HC(T).$$

Vimos en el Teorema 1.3.2, que $A = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} W_j$, con $W_j \subset X$ abierto denso para todo $j \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que $B = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} x - W_j$, con $x - W_j \subset X$ abierto denso para todo $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por el Teorema 1.1.7 resulta $A \cap B \neq \emptyset$. Luego, existe $y \in A \cap B$. Es decir, $y \in HC(T)$, y existe $z \in HC(T)$ tal que $y = x - z$. □

En lo que sigue presentamos una serie de resultados necesarios par demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.3.14. *Sean X un espacio de Fréchet separable, y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Entonces $HC(T)$ es homeomorfo a X.*

Lema 1.3.15. *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador hipercíclico y $L \subset X$ es un subespacio T-invariante, entonces $L = X$ ó L tiene codimensión infinita en X.*

Demostración. Supongamos que $L \neq X$ y $dim(X/L) < \infty$. Sea $q : X \longrightarrow X/L$ la aplicación cociente. Tenemos que $Ker(q) \subset Ker(q \circ T)$, pues al ser L un subespacio T-invariante:

$$x \in Ker(q) \Rightarrow x \in L \Rightarrow Tx \in L \Rightarrow q \circ Tx = 0 \Rightarrow x \in Ker(q \circ T).$$

Luego $q \circ T$ se factoriza por q, es decir, existe $A \in \mathcal{L}(X/L)$ tal que $A \circ q = q \circ T$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "q\circ T"] & X \arrow[d, "q"] \\ X/L \arrow[r, "\exists A"'] & X/L \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que q es continua y sobreyectiva, luego por el Criterio de comparación 1.3.11, resulta que $A \in \mathcal{L}(X/L)$ es hipercíclico en un espacio de dimensión finita. Lo que es un absurdo por el Teorema 1.2.1. □

Definición 1.3.16. Sea X un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Decimos que el subespacio $E \subset X$ es *variedad hipercíclica* de T, si $E - \{0\} \subset HC(T)$.

Vimos en la Observación 1.2.4 que si X es un espacio de Banach y $L \in \mathcal{L}(X)$ es hipercíclico, entonces $T - \alpha$ tiene rango denso para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. El siguiente lema generaliza este hecho para cualquier polinomio.

Lema 1.3.17. *Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico, y P un polinomio no nulo. Entonces el operador $P(T)$ tiene rango denso.*

Demostración. Si el polinomio P es constante, entonces $P(T)$ es un múltiplo no nulo de la identidad y por lo tanto tiene rango denso. Luego, podemos suponer que $gr(P) \geq 1$. Notemos que $Ran(P(T))$ es T-invariante, pues $T \circ P(T) = P(T) \circ T$ y, si $y \in Ran(P(T))$,

existe $x \in X$ tal que $P(T)x = y$, entonces $Ty = P(T)(Tx) \in Ran(P(T))$. Luego, como T es continua, $L := \overline{Ran(P(T))}$ es T-invariante.
Queremos ver que $P(T)$ es de rango denso, es decir, $L = X$. Por el lema previo basta ver que L tiene codimensión finita en X. Sea $x \in HC(T)$ y $q : X \longrightarrow X/L$ la aplicación cociente. Dado $Q \in \mathbb{K}[t]$, existen $r, s \in \mathbb{K}[t]$ con $gr(r) < gr(P)$ ó $r = 0$ tal que $Q = Ps + r$. Por lo tanto,

$$Q(T) = P(T)s(T) + r(T),$$

y entonces,

$$Q(T)x = P(T)(s(T)x) + r(T)x \in Ran(P(T)) + \left\langle T^i(x) : i < gr(P) \right\rangle_{gen}.$$

En consecuencia, obtenemos

$$\mathbb{K}[T]x \subset Ran(P(T)) + \left\langle T^i(x) : i < gr(P) \right\rangle_{gen}. \tag{1.1}$$

Resulta, por (1.1)

$$q(\mathbb{K}[T]x) \subset \left\langle q(T^i(x)) : i < gr(P) \right\rangle_{gen}$$

así,

$$dim\big(\left\langle q(T^i(x)) : i < gr(P) \right\rangle_{gen}\big) < \infty.$$

Como $x \in HC(T)$, $X/L = q(X)$ es de dimensión finita, y por el lema anterior,

$$\Rightarrow L = X.$$

□

Teorema 1.3.18. *Sea X un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador hipercíclico. Si x es vector hipercíclico para T, entonces $\mathbb{K}[T]x$ es variedad hipercíclica de T. En particular, T admite una variedad hipercíclica densa.*

Demostración. Como vimos en la Observación 1.3.12, para cualquier polinomio no nulo P, se tiene que $HC(T)$ es $P(T)$-invariante, pues $P(T)$ conmuta con T y tiene rango denso. De aquí concluimos que $P(T)x \in HC(T)$, para todo $P \in \mathbb{K}[t]$ no nulo. Resulta $\mathbb{K}[T]x$ denso pues, $Orb(x, T) \subset \mathbb{K}[T]x$. □

Corolario 1.3.19. *$T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico. Entonces $HC(T)$ es conexo.*

Demostración. Sea $x \in HC(T)$ fijo. Observemos que $HC(T)$ se encuentra entre los siguientes conjuntos conexos,

$$\mathbb{K}[T]x \subset HC(T) \subset X,$$

donde $\mathbb{K}[T]x$ es denso en X. Podemos desde aquí concluir que $HC(T)$ es conexo: supongamos que $HC(T) = A \cup B$, con A, B abiertos disjuntos. Se tiene que $\mathbb{K}[T]x \subset A \cup B$ y al ser conexo, sin perdida de generalidad, podemos suponer que $\mathbb{K}[T]x \subset A$. Pero, $\mathbb{K}[T]x$ es denso, B es abierto y $B \cap \mathbb{K}[T]x = \emptyset$, de lo que sigue que $B = \emptyset$. Luego, $HC(T)$ es conexo. □

Para la demostración del Teorema 1.3.14, necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.3.20. Sea X separable de Fréchet, $A \subset X$ cerrado. Decimos que A es un $Z - set$ si para todo K métrico compacto $C(K, X - A)$ es denso en $C(K, X)$ (con respecto a la topología de convergencia uniforme en $C(K, X)$).

Notemos que A es un $Z - set$ si es lo suficientemente pequeño como para no influir en las funciones continuas de $C(K, X)$. Para la demostración del Teorema 1.3.14 nos basaremos en el siguiente lema, cuya demostración puede encontrarse en [7].

Lema 1.3.21. *Sea X separable de Fréchet. Si $A \subset X$ es unión numerable de $Z - sets$, entonces $X - A$ es homeomorfo a X.*

Demostración del Teorema 1.3.14. Recordemos que si $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base numerable de abiertos de X, podemos escribir $HC(T) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j)$. Tomando complementos, obtenemos $X - HC(T) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq 0} X - T^{-n}(V_j)$. De aquí, alcanza con probar que para todo V abierto no vacío, el conjunto

$$\bigcap_{n\geq 0} X - T^{-n}(V)$$

es un $Z - set$. Queremos ver que, dados un espacio métrico compacto K, $f \in C(K, X)$, y un entorno abierto O de 0 en X, existe $g \in C(K, X)$ tal que

$$g(K) \subset X - \left(\bigcap_{n\geq 0} X - T^{-n}(V) \right) = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V), \tag{1.2}$$

y,

$$(g - f)(K) \subset O.$$

Al ser X localmente convexo, podemos asumir que O es convexo. Sea $x \in HC(T)$. Para cada $t \in K$, elegimos $m_t \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^{m_t}(x) - f(t) \in O,$$

y definimos $W_t := \{s \in K : T^{m_t}(x) - f(s) \in O\} \subset K$. De esta forma, obtenemos un cubrimiento por abiertos $(W_t)_{t\in K}$ del compacto K. Recordemos que un espacio métrico compacto, cumple que los abiertos separan cerrados disjuntos, y que en todo espacio métrico compacto vale el teorema de particiones de la unidad finitas. Es decir, si tomamos un subcubrimiento finito $(W_{t_i})_{1\leq i\leq p}$ existe $(\phi_i)_{1\leq i\leq p}$ partición de la unidad finita que cumple

- ϕ_i continuas,
- $0 \leq \phi_i \leq 1$,
- $\sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1$,
- $sop(\phi_i) \subset W_{t_i}$.

Notamos $m_i := m_{t_i}$ y $g := \sum_{i=1}^{p} \phi_i T^{m_i}(x)$. Veamos que se cumple lo que necesitamos:

- Tenemos que

$$g(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(s) T^{m_i}(x) - f(s) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(s)\big[T^{m_i}(x) - f(s)\big],$$

  con lo cual, $g(s) - f(s)$ es una combinación convexa de elementos de O. Al ser O convexo, concluimos que $(g - f)(K) \subset O$.

- Para cada $a \in K$, podemos escribir $g(a) = P_a(T)x$ con $P_a(z) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(a).z^{m_i}$ polinomio no nulo. Como vimos en la Observación 1.3.12, $P_a(T)x \in HC(T)$. Luego, existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_a}(g(a)) \in V$. Por lo tanto,

$$g(K) \subset \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(V).$$

  por lo tanto g verifica la condición (1.2).

Concluimos entonces, que $X - HC(T)$ es unión numerable de $Z - set$ y por Lema 1.3.21, $HC(T)$ es homeomorfo a X.

□

1.4. Primeros Ejemplos de Operadores Hipercíclicos

Presentamos en esta sección dos operadores hipercíclicos. Desarrollaremos más adelante, en profundidad, los ejemplos que damos aquí. Fueron los primeros operadores hipercíclicos que se encontraron durante el desarrollo de la teoría. No presentaremos las demostraciones originales de los autores, sino que lo haremos usando el Criterio de Hiperciclicidad.

1.4.1. Operador de Derivación

El siguiente ejemplo se debe a G. R. MacLane [25] y data del año 1951. Lo presentamos en el espacio

$$H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ holomorfa}\},$$

con la topología dada por la convergencia uniforme sobre compactos. El espacio $H(\mathbb{C})$ es un espacio métrico completo y separable con la métrica

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f - g\|_n}{2^n\big(1 + \|f - g\|_n\big)},$$

donde, $\|f - g\|_n := sup_{|z| \leq n} |f(z) - g(z)|$. Definimos, $\mathcal{D} : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$, $\mathcal{D}(f) = f'$. Claramente, $\mathcal{D}$ es lineal y continua. Aplicamos el Criterio de Hiperciclicidad II de la

Definición 1.3.6 con la sucesión $n_k = k$; los conjuntos densos $D_1 = D_2 = \mathbb{C}[z]$, y $S : \mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbb{C}[z]$ definida por

$$S(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n) = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \cdots + a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

1. Dado $P \in \mathbb{C}[z]$, tenemos que $\mathcal{D}^n(P) = 0$, para todo $n > gr(P)$. De aquí, es claro que $\mathcal{D}^n(P) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Si $K \subset \mathbb{C}$ compacto, existe $R > 0$ tal que $K \subset \{z : |z| \geq R\}$. Entonces,

$$S^n(z^k) = \frac{z^{k+n}}{(k+n)(k+n-1)\cdots(k+1)} = \frac{k!z^{k+n}}{(k+n)!},$$

   y tenemos que,

$$\sup_{z\in K} \left|S^n(z^k)\right| \leq \frac{k!R^{k+n}}{(k+n)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   Por lo tanto, $S^n(P) \longrightarrow 0$ uniformemente sobre compactos, para todo $P \in \mathbb{C}[z]$.

3. Es claro que para cualquier polinomio P, se tiene que $\mathcal{D}S(P) = P$.

Por Teorema 1.3.7, $\mathcal{D}$ es hipercíclico. Es interesante observar que, existe $g \in H(\mathbb{C})$ tal que $Orb(g, \mathcal{D})$ es denso en $H(\mathbb{C})$. Así, dada cualquier función holomorfa y cualquier $R > 0$, tenemos que en el compacto $\{|z| \leq R\}$ la función f, es muy similar a una derivada de g:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sup_{|z|\leq R} |f(z) - \mathcal{D}^n(g)(z)| < \epsilon.$$

1.4.2. Operadores Shift

Otro ejemplo importante para la teoría es el de los operadores Shift. Esta familia de ejemplos fue presentada por S. Rolewicz [27], en el año 1961. Sea $B : \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^p(\mathbb{N})$, el shift a izquierda dado por

$$B(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots), \text{ con } 1 \leq p < \infty.$$

Veamos que λB es hipercíclico, para todo $|\lambda| > 1$. Aplicamos nuevamente el Criterio de Hiperciclicidad II de la Definición 1.3.6 con la sucesión $n_k = k$; los conjuntos densos $D_1 = D_2 = c_{00}(\mathbb{N})$ formados por las sucesiones de soporte finito, y tomamos la aplicación S/λ con $S : \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^p(\mathbb{N})$, el shift a derecha dado por $S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$,

1. Dado $x := x_0, x_1, \dots) \in c_{00}(\mathbb{N})$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\lambda B)^n(x) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Luego

$$\Rightarrow (\lambda B)^n(x_0, x_1, \dots) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Notemos que $\|S\| = 1$ entonces $\|S/\lambda\| = 1/|\lambda|$. Luego,

$$\|(S/\lambda)^n\| \leq 1/(|\lambda|)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Por lo tanto, dado $x := (x_0, x_1, \dots) \in c_{00}(\mathbb{N})$

$$(S/\lambda)^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Es claro que B y S son mutuamente inversas en $\ell^p(\mathbb{N})$, luego λB y S/λ son mutuamente inversas en c_{00}.

Concluimos, por Teorema 1.3.7, que λB es hipercíclico para todo λ con $|\lambda| > 1$. Luego, para cada $|\lambda| > 1$ tenemos asegurada la existencia de una sucesión universal $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ tal que $\left\{(\lambda B)^n x : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es denso en $\ell^p(\mathbb{N})$. Podemos concluir que toda sucesión de $\ell^p(\mathbb{N})$, se comporta de manera similar a un truncado de x.

Observación 1.4.1. Como $\|B\| = 1$, por la Observación 1.2.2, B no es hipercíclico. Esto dice que el conjunto de operadores hipercíclicos no es cerrado en $\mathcal{L}(X)$, pues $\lambda B \longrightarrow B$, si $\lambda \longrightarrow 1^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Ejemplos de operadores hipercíclicos

En este capítulo profundizamos los ejemplos que estudiamos anteriormente. Veremos distintas familias de operadores, tratando de caracterizar en cada caso, cuando resultan hipercíclicos. Esos son: operadores de traslación en el plano complejo, operadores shift, de composición, de multiplicación y de derivación. Comenzamos con una introducción sobre el espacio $H^2(\mathbb{D})$ y mostramos algunas propiedades. Introducimos las siguientes notaciones, que usaremos en el desarrollo de los ejemplos.

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, el disco unitario complejo.
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, el circulo unitario complejo.
- $H(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa}\}$, con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de $\mathbb{D}$.
- $H^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}) : f \text{ es acotada}\}$, con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{D}} |f(z)|$.

2.1. Operadores de Traslación en $H(\mathbb{C})$

El primer ejemplo que veremos es el de los operadores de traslación en el plano complejo. Se debe a G. D. Birkhoff y data del año 1929 [8]. Más adelante fue retomado por G. Godefroy y J. H. Shapiro que demostraron que un operador en $H(\mathbb{C})$ que conmuta con todas las traslaciones y no es múltiplo de la identidad es hipercíclico [17].
Para cualquier número complejo a no nulo, sea $T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$,

$$T_a(f)(z) = f(z+a)$$

el operador de traslación. Para aplicar el Criterio de Hiperciclicidad a T_a, necesitamos el siguiente lema previo. Notamos e_λ a la función $z \mapsto e^{\lambda z}$.

Lema 2.1.1. *Sea $A \subset \mathbb{C}$, con un punto de acumulación en $\mathbb{C}$. Entonces*

$$\langle \{e_\lambda : \lambda \in A\} \rangle_{gen}$$

es denso en $H(\mathbb{C})$.

Demostración. Sea $\varphi \in H(\mathbb{C})^*$ tal que $\varphi(e_\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in A$. Queremos ver que $\varphi \equiv 0$. Como φ es continua, podemos elegir $K = \overline{B(0,R)} \subset \mathbb{C}$ compacto y $c > 0$ tal que $|\varphi(f)| \leq c \sup_{z \in K} |f(z)| = c \, \| f\, |_K \|_{C(K)}$. Podemos pensar a φ como una funcional continua en el subespacio $\{f\, |_K \colon f \in H(\mathbb{C})\}$ de $C(K)$. Por el Teorema de Hahn-Banach, φ se extiende a $\tilde{\varphi} \in C(K)^*$. Luego, por el teorema de representación de Riesz existe una medida compleja μ con soporte en K tal que

$$\tilde{\varphi}(f) = \int_K f d\mu, \quad \text{para toda } f \in C(K).$$

En particular, si $f \in H(\mathbb{C})$, tenemos

$$\varphi(f) = \int_K f d\mu.$$

Consideramos la aplicación $F(\lambda) := \varphi(e_\lambda) = \int_K e^{\lambda z} d\mu(z)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que F es analítica con $F'(\lambda) = \int_K z e^{\lambda z} d\mu(z)$:

$$\left| \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - F'(\lambda_0) \right| = \left| \int_K \frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda_0 z}}{\lambda - \lambda_0} - z e^{\lambda_0 z} d\mu \right|$$

$$\leq \sup_K \left| \frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda_0 z}}{\lambda - \lambda_0} - z e^{\lambda_0 z} \right| . \big| \mu(K) \big| \underset{\lambda \to \lambda_0}{\longrightarrow} 0$$

Tenemos entonces una función $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $F(\lambda) = \varphi(e_\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in A$. Como A tiene puntos de acumulación, $F \equiv 0$ por principio de identidad de funciones holomorfas. Derivando, obtenemos

$$0 = F^{(n)}(0) = \int_K z^n d\mu = \varphi(z^n), \; \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Al ser $\langle \{1, z, z^2, \dots\} \rangle_{gen}$ denso en $H(\mathbb{C})$, concluimos que $\varphi \equiv 0$, como queríamos ver. □

Proposición 2.1.2. *El operador T_a es hipercíclico para todo $a \in \mathbb{C}$, no nulo.*

Demostración. Aplicamos el criterio de hiperciclicidad (versión Kitai) a T_a con

$$D_1 = \langle \{ e_\lambda : |e^{\lambda a}| < 1 \} \rangle_{gen},$$

$$D_2 = \langle \{ e_\lambda : |e^{\lambda a}| > 1 \} \rangle_{gen},$$

y $S : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ dado por $S = T_{-a}$. Es claro que $T \circ S = Id_{H(\mathbb{C})}$ y, por lo anterior, D_1 y D_2 son densos. Además, tenemos

$$(T_a)^n(e_\lambda) = T_{na}(e_\lambda) = e^{\lambda(z+na)} = e^{\lambda z} e^{\lambda n a} = (e^{\lambda a})^n e^{\lambda z} \longrightarrow_{n \to \infty} 0, \text{ si } |e^{\lambda a}| < 1.$$

Con lo que se cumple la primera condición del criterio de hiperciclicidad. Análogamente, se cumple la condición para S. Luego, por el Teorema 1.3.7, resulta que T_a es hipercíclico para todo $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. □

Observación 2.1.3. Lo anterior muestra que la hiperciclicidad no se mantiene por composiciones. Pues $T_a \circ T_{-a} = Id$ no es hipercíclico.

G. Godefory y J. H. Shapiro mostraron que este resultado se generaliza a otros operadores como por el ejemplo el operador de derivación. Para mostrar los resultados que obtuvieron necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.1.4. Decimos que $\phi \in H(\mathbb{C})$ es de tipo exponencial si existen constantes positivas A, B tales que $|\phi(z)| \leq Ae^{B|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Observación 2.1.5. Sea $\phi \in H(\mathbb{C})$ y sea $\phi(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ su desarrollo en serie. Entonces, ϕ es de tipo exponencial si y sólo si existen constantes C, R tales que $|c_n| \leq \frac{CR^n}{n!}$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Por las desigualdades de Cauchy, tenemos que $|c_n|r^n \leq Ae^{Br}$ para todo $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada n fijo,

$$\min_{r>0}\left\{\frac{e^{Br}}{r^n}\right\} = \frac{e^n}{(n/B)^n}$$

se alcanza en $r = n/B$. Luego, $|c_n| \leq A(n/B)^{-n}e^n \leq A\frac{(Be)^n}{n!}$.
($\Longleftarrow$) Si $|c_n| \leq \frac{CR^n}{n!}$, entonces

$$|F(z)| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{CR^n}{n!}|z|^n = C\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(R|z|)^n}{n!}\right) = Ce^{R|z|}.$$

□

Observación 2.1.6. Para $\phi \in H(\mathbb{C})$ de tipo exponencial, $\phi(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} a_n z^n$, notamos

$$\phi(\mathcal{D})(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n \mathcal{D}^n(f).$$

Lema 2.1.7. *Sea $T : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ lineal y continua tal que $T \circ T_a = T_a \circ T$ para todo $a \in \mathbb{C}$. Entonces, existe $\phi \in H(\mathbb{C})$ de tipo exponencial tal que $T = \phi(\mathcal{D})$.*

Demostración. Sea $L : H(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ el funcional definido por $L(f) = ev_0 \circ T(f) = (Tf)(0)$. Se tiene que L es continuo y

$$Tf(z) = \big(T_z(Tf)\big)(0) = \big(T(T_z f)\big)(0) = L(T_z f)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Por un argumento similar al del Lema 2.1.1, obtenemos $c > 0$, $K = \overline{B(0,R)} \subset \mathbb{C}$ y una medida compleja μ con soporte en K tal que

$$\tilde{L}(f) = \int_K f d\mu, \ \forall f \in C(K)$$

y, en particular, si $f \in H(\mathbb{C})$ tenemos que

$$L(f) = \int_K f d\mu.$$

Entonces podemos calcular $Tf(z)$ de la siguiente manera

$$Tf(z) = L(T_z f) = \int_K T_z f d\mu = \int_K f(w+z) d\mu(w) = \int_K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} w^n d\mu(w)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n!} \int_K w^n d\mu(w) \right)}_{:=c_n} \mathcal{D}^n f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{D}^n f(z).$$

Además, tenemos que $|c_n| \leq \left(\frac{R^n}{n!} \right) \|\mu\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\phi(z) := \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ es de tipo exponencial y $T = \phi(\mathcal{D})$. □

Teorema 2.1.8. *Sea $T : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ lineal y continuo tal que $T \circ T_a = T_a \circ T$ para todo $a \in \mathbb{C}$, y no es un múltiplo de la identidad. Entonces, T es hipercíclico.*

Demostración. Como T conmuta con T_a para todo $a \in \mathbb{C}$, existe ϕ de tipo exponencial tal que $T = \phi(\mathcal{D})$, por Lema 2.1.7. Como T no es un múltiplo de la identidad, ϕ no es constante. Aplicamos el Teorema 1.3.10. Veamos que las funciones e_λ son autovectores de T:

$$T(e_\lambda) = \sum_{n \geq 0} a_n \mathcal{D}^n (e_\lambda) = \sum_{n \geq 0} a_n \lambda^n e_\lambda = \phi(\lambda) e_\lambda, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Consideramos entonces los conjuntos

$$U = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\phi(\lambda)| < 1\} \quad \text{y} \quad V = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\phi(\lambda)| > 1\}.$$

Como ϕ no es constante, U y V son abiertos no vacíos. Por el Lema 2.1.1, concluimos que

$$\langle \{e_\lambda : \lambda \in U\} \rangle_{gen} \quad \text{y} \quad \langle \{e_\lambda : \lambda \in V\} \rangle_{gen}$$

son densos en $H(\mathbb{C})$. Luego, se verifican las hipótesis del Teorema 1.3.10 y así T es hipercíclico. □

Por último observemos que un operador conmuta con todas las traslaciones si y sólo si conmuta con el operador de derivación.

Proposición 2.1.9. *Sea $T \in \mathcal{L}(H(\mathbb{C}))$. Entonces*

$$T \circ T_a = T_a \circ T, \ \ \textit{para todo } a \in \mathbb{C} \textit{ si y sólo si } T \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ T.$$

Demostración. ($\Longrightarrow$)

$$\mathcal{D}(Tf) = \lim_{h\to 0} \frac{T_h(Tf) - Tf}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T(T_h f) - Tf}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} T\Big(\frac{T_h(f) - f}{h}\Big) = T(\mathcal{D}f)$$

($\Longleftarrow$)Para ver esta implicación, veamos que $T_a = e^{a\mathcal{D}}$, pues

$$T_a f(z) = f(z+a) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} a^n.$$

Por otro lado,

$$e^{a\mathcal{D}} f(z) = e^{a\mathcal{D}(f)}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n \mathcal{D}^n(f)}{n!}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} a^n.$$

De esta forma concluimos

$$\begin{aligned} T\left(T_a f\right) = T \circ e^{a\mathcal{D}f} &= T\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a^n \mathcal{D}^n(f)}{n!}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{a^n \mathcal{D}^n(Tf)}{n!} = e^{a\mathcal{D}(Tf)} = T_a(Tf). \end{aligned}$$

□

Nota: los operadores de traslación son casos particulares de operadores de composición. Consideramos el automorfismo de $\mathbb{C}$, $\tau_a(z) = z + a$. El respectivo operador de composición es $C_{\tau_a}(f) = f \circ \tau_a$ actuando en $H(\mathbb{C})$. Se tiene que $T_a = C_{\tau_a}$.

2.2. El Espacio de Hardy

Recordemos que toda función holomorfa en el disco es desarrollable en serie, y la convergencia es uniforme sobre compactos de $\mathbb{D}$. Si $f \in H(\mathbb{D})$, notamos $\hat{f}(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ al n-ésimo coeficiente del desarrollo de f y tenemos que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \hat{f}(n) z^n, \; \forall z \in \mathbb{D}.$$

Definimos el Espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D}) \subset H(\mathbb{D})$, como sigue:

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |\hat{f}(n)|^2 < \infty \right\}$$

con el producto interno dado por

$$\langle f, g\rangle_{H^2} = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

y la norma inducida

$$\|f\| = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |\hat{f}(n)|^2\Big)^{1/2}.$$

Tenemos un isomorfismo isométrico entre los espacios de Hilbert $H^2(\mathbb{D})$ y $\ell^2(\mathbb{N})$,

$$H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$$

$$f \longrightarrow \{\hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Varias propiedades del espacio de Hardy se deducen de la definición. El siguiente hecho muestra que las funciones de $H^2(\mathbb{D})$, no crecen demasiado rápido.

Proposición 2.2.1 (Estimación de Crecimiento).

$$f \in H^2(\mathbb{D}) \Longrightarrow |f(z)| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|z|^2}},\ \forall z \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Usamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el hecho de que $z \in \mathbb{D}$:

$$|f(z)| \leq \sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)||z|^n \leq \Big(\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2\Big)^{1/2}.\Big(\sum_{n\geq 0} |z|^{2n}\Big)^{1/2}$$

$$= \|f\|.\Big(\frac{1}{1-|z|^2}\Big)^{1/2} = \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

□

Esta desigualdad muestra que la topología de $H^2(\mathbb{D})$, es coherente con la de $H(\mathbb{D})$.

Proposición 2.2.2. *Sean f_n, $f \in H^2(\mathbb{D})$ tales que $f_n \longrightarrow f$ en $H^2(\mathbb{D})$. Entonces, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Es decir, $H^2(\mathbb{D}) \hookrightarrow H(\mathbb{D})$ es continua.*

Demostración. Para $0 < r < 1$ fijo, $|z| \leq r$, tenemos

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|}{\sqrt{1-|z|^2}} \leq \frac{\|f_n - f\|}{\sqrt{1-r^2}}$$

Luego,

$$\sup_{|z|\leq r} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|}{\sqrt{1-r^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Lo que sigue, es una definición alternativa de la norma del espacio de Hardy mediante promedios en los círculos $\{|z| = r\}$ con $r < 1$. Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)z^n \in H^2(\mathbb{D})$. Escribimos $z = re^{i\theta}$ y usamos que las funciones $\{e^{in\theta}\}_{n\geq 0}$ son ortogonales en $L^2[-\pi,\pi]$.

$$M_2(f,r)^2 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n}$$

pues,

$$\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n} = \sum_{n\geq 0} (|\hat{f}(n)|r^n)^2 = \sum_{n\geq 0} (|\hat{f}(n)|r^n)^2 \langle e^{in\theta}, e^{in\theta}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$$

$$= \Big\langle \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)r^n e^{in\theta}, \sum_{m\geq 0} \hat{f}(m)r^m e^{im\theta}\Big\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|\big(\sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)r^n e^{in\theta}\big)\big|^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Dada $f \in H^2(\mathbb{D})$ fija, la fórmula anterior muestra que $M_2(f,r)$ es creciente en r y acotada,

$$M_2(f,r) = \Big(\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n}\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2\Big)^{1/2} = \|f\|.$$

Recíprocamente, supongamos que

$$\lim_{r\nearrow 1} M_2(f,r) = M < \infty$$

entonces,

$$\sum_{n=0}^{N} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n} \leq \sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n} = \Big(M_2(f,r)\Big)^2 \leq M^2$$

de aquí, hacemos $r \nearrow 1$ y obtenemos que todas las sumas parciales $\sum_{n=0}^{N} |\hat{f}(n)|^2$ están acotadas, y así $f \in H^2(\mathbb{D})$, $\|f\| \leq M$. De esta forma, tenemos la construcción alternativa de $H^2(\mathbb{D})$ que buscábamos. Resumimos en la siguiente proposición lo que concluimos anteriormente. Si $f \notin H^2(\mathbb{D})$, escribimos $\|f\| = \infty$.

Proposición 2.2.3. *Sea $f \in H(\mathbb{D})$, entonces*

$$\|f\|^2 = \lim_{r\nearrow 1} \big(M_2(f,r)\big)^2 = \lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

y vale,

$$f \in H^2(\mathbb{D}) \Leftrightarrow M_2(f,r) \text{ es acotado en } 0 < r < 1.$$

Así caracterizamos

$$H^2(\mathbb{D}) = \Big\{f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{r<1} M_2(f,r) < \infty\Big\}.$$

Existe una tercera forma de ver el espacio $H^2(\mathbb{D})$: como subespacio de $L^2(\mathbb{T})$. Tenemos que $H^2(\mathbb{D})$ es isométrico a $H^2(\mathbb{T}) := \{\varphi \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{\varphi}(n) = 0 \text{ para todo } n < 0\}$, donde $\hat{\varphi}(n)$ denota el n-esimo coeficiente de Fourier de φ. Dada $f \in H^2(\mathbb{D})$, el límite radial

$$\lim_{r \nearrow 1} f(re^{i\theta}) =: \tilde{f}(e^{i\theta})$$

existe para casi todo θ, y la función $\tilde{f} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ pertenece a $H^2(\mathbb{T})$ con

$$\|f\| = \|\tilde{f}\|_{L^2}.$$

Además,

$$\langle f, g\rangle_{H^2} = \langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}.\overline{\tilde{g}}.$$

2.3. Operadores de Multiplicación

El primer ejemplo que damos en el espacio de Hardy es el de los operadores de multiplicación. Estos son operadores de la forma

$$M_\phi : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D}),$$

$$M_\phi(f) = \phi f, \text{ con } \phi \in H^\infty(\mathbb{D}) \text{ fija.} \tag{2.1}$$

Observación 2.3.1. Si $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ es analítica y acotada en $\mathbb{D}$, entonces

$$M_2(\phi, r) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(re^{i\theta})|^2 d\theta\Big)^{1/2} \leq \|\phi\|_\infty,$$

para todo $r \in (0,1)$ y así, $\phi \in H^2(\mathbb{D})$ y $\|\phi\|_\infty \leq \|\phi\|$.

De igual forma, se muestra que

$$M_2(\phi f, r) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(re^{i\theta})|^2 |f(re^{i\theta})|^2 d\theta\Big)^{1/2} \leq \|\phi\|_\infty \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta\Big)^{1/2}$$

$$= \|\phi\|_\infty M_2(f, r) \leq \|\phi\|_\infty \|f\|$$

Por lo tanto, el operador de multiplicación $M_\phi : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$, definido en (2.1) es continuo y verifica

$$\inf_{\mathbb{D}}\{|\phi|\}\|f\| \leq \|M_\phi(f)\| \leq \sup_{\mathbb{D}}\{|\phi|\}\|f\|. \tag{2.2}$$

Recordemos que $f_n \longrightarrow f$ en $H^2(\mathbb{D})$, implica que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$, por Proposición 2.2.2. En particular para $z \in \mathbb{D}$ fijo, la aplicación $ev_z : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $ev_z(f) = f(z)$ es una funcional lineal y continua. Por el teorema de representación de Riesz, existe $k_z \in H^2(\mathbb{D})$ tal que

$$ev_z(f) = f(z) = \langle f, k_z\rangle_{H^2}. \tag{2.3}$$

El elemento k_z se llama el núcleo reproductor de z.

Observación 2.3.2. Podemos estimar $\|ev_z\|$, mediante la Proposición 2.2.1:

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}\|f\|_{H^2}.$$

De esta forma, tenemos que

$$\|ev_z\| \leq \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

En este caso, el núcleo reproductor k_z está dado por la fórmula explícita

$$k_z(w) = \frac{1}{1-\overline{z}w}$$

pues,

$$\langle k_z, w^n\rangle = \overline{\langle w^n, k_z\rangle} = \overline{ev_z(w^n)} = \overline{z}^n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, al ser $\{w^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de $H^2(\mathbb{D})$, resulta

$$k_z(w) = \sum_{n\geq 0} \overline{z}^n w^n = \frac{1}{1-\overline{z}w}.$$

La expresión (2.3) es, entonces, una reformulación de la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z) = \langle f, k_z\rangle_{H^2} = \langle \widetilde{f}, \widetilde{k_z}\rangle_{L^2} = \int_0^1 f(e^{2\pi it}).\overline{\Big(\frac{1}{1-\overline{z}e^{2\pi it}}\Big)}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{f(e^{2\pi it})}{1-e^{-2\pi it}z}dt = \int_0^1 \frac{f(e^{2\pi it})}{e^{2\pi it}-z}.e^{2\pi it}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Observación 2.3.3. La aplicación $ev_z : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$ es sobreyectiva y continua. Si $Orb(f, M_\phi)$ fuera denso en $H^2(\mathbb{D})$, entonces $ev_z\big(Orb(f, M_\phi)\big)$ sería denso en $\mathbb{C}$. Pero

$$ev_z(M_\phi(f)) = M_\phi(f)(z) = f(z)\phi(z),$$

y entonces,

$$ev_z(M_\phi^n(f)) = M_\phi^n(f)(z) = f(z)(\phi(z))^n.$$

En consecuencia,

$$ev_z\big(Orb(f, M_\phi)\big) = \big\{(\phi(z))^n f(z) : n \in \mathbb{N}_0\big\}$$

nunca es denso en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, M_ϕ nunca es hipercíclico.

Sin embargo, algo más se puede decir de los operadores de multiplicación.

Observación 2.3.4. Sea $M_\phi^* : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ el operador adjunto de M_ϕ. Entonces

$$\langle f, M_\phi^*(k_z)\rangle_{H^2} = \langle \phi f, k_z\rangle_{H^2} = \phi(z)f(z) = \phi(z)\langle f, k_z\rangle_{H^2}$$

$$= \langle f, \overline{\phi(z)}k_z\rangle_{H^2}, \ \forall f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Esto dice que $M_\phi^*(k_z) = \overline{\phi(z)}k_z$, es decir, $\overline{\phi(z)}$ es autovalor de M_ϕ^* para todo $z \in \mathbb{D}$.

Notemos que usando la Proposición 1.2.3, nuevamente obtenemos que M_ϕ no es hipercíclico pues $\sigma_p(M_\phi^*) \neq \emptyset$.

Proposición 2.3.5. *Sea $\phi \in H^2(\mathbb{D})$. Entonces,*

$$M_\phi^* \textit{ es hipercíclico } \textit{ si y solo si } \phi \textit{ no es constante y } \phi(\mathbb{D}) \cap (\partial\mathbb{D}) \neq \emptyset.$$

Demostración. ($\Longleftarrow$) Sean $U = \phi^{-1}(B(0,1)) = \{z \in \mathbb{D} : |\phi(z)| < 1\}$ y $V = \phi^{-1}\big(\{w : |w| > 1\}\big) = \{z \in \mathbb{D} : |\phi(z)| > 1\}$, que por el teorema de la aplicación abierta para funciones analíticas, son abiertos no vacíos. Usamos el Teorema 1.3.10. Para esto, basta ver que,

$$\left\langle \bigcup_{z\in U} Ker\big(M_\phi^* - \overline{\phi(z)}\big) \right\rangle_{gen} = \langle k_z ; z \in U \rangle_{gen}$$

$$\left\langle \bigcup_{z\in V} Ker\big(M_\phi^* - \overline{\phi(z)}\big) \right\rangle_{gen} = \langle k_z ; z \in V \rangle_{gen}$$

son densos en $H^2(\mathbb{D})$. Veámoslo para U. Sea $f \in H^2(\mathbb{D})$ ortogonal a k_z, $\forall z \in U$. Por (2.3) tenemos que $f(z) = 0$, $\forall z \in U$, lo que implica $f \equiv 0$ por el principio de identidad de funciones holomorfas. Del mismo modo se prueba para el abierto V. Luego, M_ϕ^* es hipercíclico.
($\Longrightarrow$) Supongamos que M_ϕ^* es hipercíclico. Entonces $\|M_\phi\| = \|M_\phi^*\| > 1$ y, así por (2.2), $1 < \|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$. Es más, $\operatorname{ínf}_{\mathbb{D}} |\phi(z)| < 1$. Si no lo fuera, tenemos que $1/\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$. De aquí podemos concluir que $M_{1/\phi}^*$ no es hipercíclico, pues $\|M_{1/\phi}^*\| = \|M_{1/\phi}\| = \sup_{\mathbb{D}} |\frac{1}{\phi(z)}| \leq 1$. Como $M_{1/\phi}^* = (M_\phi^*)^{-1}$, por el Corolario 1.3.3 obtenemos que M_ϕ^* no es hipercíclico, que contradice la hipótesis. Luego,

$$\operatorname*{ínf}_{\mathbb{D}} |\phi(z)| < 1 < \sup_{\mathbb{D}} |\phi(z)|.$$

De aquí obtenemos que ϕ no es constante y, como $\{|\phi(\mathbb{D})|\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ es conexo, se tiene que $\phi(\mathbb{D}) \cap (\partial\mathbb{D}) \neq \emptyset$. □

2.4. Operadores de Composición

Dada $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, nos interesa estudiar operadores del tipo $C_\phi : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ dados por $C_\phi(f) = f \circ \phi$. La hiperciclicidad del operador C_ϕ depende directamente de las propiedades de la función ϕ. Particularmente, estudiaremos en profundidad los operadores de composición cuando ϕ es una homografía del plano complejo que cumple $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Comenzamos con una introducción sobre homografías en $\mathbb{C}$. Los resultados de la subsección que sigue pueden encontrarse con mayor detalle en los libros [13] o [31].

2.4.1. Homografías

Definición 2.4.1. Una homografía es una función $\phi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$,

$$\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Notamos $LFT(\hat{\mathbb{C}})$ al conjunto de todas las homografías.

Pensamos a las homografías como automorfismos de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Recordemos que $LFT(\hat{\mathbb{C}})$ es un grupo bajo la composición. Cada homografía manda circunferencias de la esfera de Riemann en circunferencias de la esfera -circunferencias en la esfera de Riemann son, vía la proyección estereográfica, circunferencias o rectas en el plano complejo-. Dados dos círculos de la esfera existe una homografía que aplica uno en la otro. Lo mismo es cierto en ternas de puntos de la esfera, dados dos pares de ternas de puntos de la esfera existe una única homografía que manda una terna en la otra. Las homografías preservan razón doble y ángulos. Cada matriz compleja de 2x2 inversible da lugar a una homografía,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Esta representación es conveniente al trabajar con homografías porque mantiene las operaciones del grupo,

$$\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB},$$

$$(\phi_A)^{-1} = \phi_{A^{-1}}.$$

Debemos tener en cuenta que $\phi_A = \phi_{\lambda A}$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, no nulo. Por esta razón, trabajaremos con matrices normalizadas, con determinante 1.

Definición 2.4.2. Si $ad - bc = 1$, decimos que ϕ está en forma estándar.

Esto trae un pequeño inconveniente ya que para cada homografía hay dos matrices que dan su forma estándar. Si $\det(A) = 1$ entonces A y $-A$ representan la misma homografía y están en forma estándar. Podríamos agregar más condiciones a la definición de forma estándar, pero para solucionar este problema tendremos en cuenta este potencial $\pm$, cuando sea necesario.

Definición 2.4.3. Decimos que las homografías ϕ, ψ son conjugadas si existe $\tau \in LFC(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $\phi = \tau \circ \psi \circ \tau^{-1}$.

Puntos Fijos

Proposición 2.4.4. *Toda homografía distinta a la identidad tiene a lo sumo dos puntos fijos.*

Este hecho, depende directamente de las soluciones de una ecuación cuadrática en los coeficientes de la homografía. Una homografía $\frac{az+b}{cz+d}$ fija ∞ si y solo si $c = 0$; y ∞ es el único punto fijo si y sólo si $a = d$. En otro caso, podemos calcular directamente los puntos fijos. Estos son:

$$\alpha, \beta = \frac{(a-d) \pm \left[(a-d)^2 + 4bc\right]^{1/2}}{2c}.$$

Definición 2.4.5. Decimos que α es un punto fijo atractivo de ϕ, si para todo punto z de algún entorno de α la sucesión de iteraciones $\{\phi^n(z)\}$ converge a α. Por el contrario, decimos que α es repulsivo si la sucesión de iteraciones $\{\phi^n(z)\}$ se mantiene alejada del punto fijo para todo punto de algún entorno de α.

Proposición 2.4.6. *Sea ϕ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno del punto fijo α. Si $|\phi'(\alpha)| < 1$, entonces α es atractivo. Si $|\phi'(\alpha)| > 1$, entonces α es repulsivo.*

Traza

Definición 2.4.7. Para ϕ en forma estándar, definimos la traza de ϕ como

$$tr(\phi) = \pm (a+d),$$

donde la ambigüedad del signo viene dado por las dos posibilidades para la forma estándar.

Observación 2.4.8. La homografía ϕ tiene a ∞ como único punto fijo si y sólo si $\phi(z) = z + b$, en cuyo caso $|tr(\phi)| = 2$. Si no tiene a ∞ como punto fijo, podemos expresar la fórmula de los puntos fijos usando la traza,

$$\alpha, \beta = \frac{(a-d) \pm [tr(\phi)^2 - 4]^{1/2}}{2c}.$$

Esta ecuación, junto a lo que observamos recién nos permite concluir lo siguiente.

Proposición 2.4.9. *$\phi \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ tiene un único punto fijo en $\hat{\mathbb{C}}$ si y solo si $|tr(\phi)| = 2$.*

Derivadas en los puntos fijos Si ϕ está en forma estándar, entonces

$$\phi'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Usando la expresión anterior para los puntos fijos α, β, calculamos

$$\phi'(\alpha), \phi'(\beta) = 4\left[tr(\phi) \pm \left[tr(\phi)^2 - 4\right]^{1/2}\right]^{-2}.$$

De acá, se deduce que

$$\phi'(\alpha) = \frac{1}{\phi'(\beta)} \text{ y } \phi'(\alpha) + \phi'(\beta) = tr(\phi)^2 - 2.$$

En caso de que ϕ tenga dos puntos fijos, uno de ellos ∞, debe ser de la forma $\phi(z) = az + b$, en donde definimos $\phi'(\infty) = 1/a$. Resumimos lo anterior en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.10. *Sea $\phi \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$. Son equivalentes:*

- $|tr(\phi)| = 2$
- $\phi' = 1$ *en un punto fijo de* ϕ
- ϕ *tiene un único punto fijo en* $\hat{\mathbb{C}}$

Clasificación de Homografías Decimos que $\phi \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ es parabólica si tiene un único punto fijo en $\hat{\mathbb{C}}$. Supongamos que $\alpha \in \mathbb{C}$ es el punto fijo, sea $\tau \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$, $\tau(z) = \frac{1}{z-\alpha}$. Entonces $\Phi = \tau \circ \phi \circ \tau^{-1} \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$, fija solamente a ∞. Por lo tanto, $\Phi(z) = z + \delta$ para $\delta \neq 0$. Decimos que Φ es una conjugada normal a ϕ. Así, cualquier homografía parabólica es conjugada a una traslación.
Si ϕ no es parabólica, tiene dos puntos fijos α, $\beta \in \hat{\mathbb{C}}$. Sea $\tau \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ que manda α a 0 y β a ∞. Entonces $\Phi = \tau \circ \phi \circ \tau^{-1} \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$, fija a 0 y a ∞. Por lo tanto, $\Phi(z) = \lambda z$, para $\lambda \neq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Decimos que Φ es una conjugada normal a ϕ y que λ es el multiplicador de Φ. De aquí,

$$\phi(z) = \tau^{-1}\left(\lambda \tau(z)\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Luego,

$$\phi'(\alpha) = \lambda \text{ y } \phi'(\beta) = \frac{1}{\lambda}.$$

Definición 2.4.11. Sea $\phi \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$, $\phi \neq Id_{\hat{\mathbb{C}}}$ no parabólica. Sea $\lambda \neq 1$ el multiplicador de ϕ. Decimos que ϕ es:

· Elíptica si $|\lambda| = 1$,

· Hiperbólica si $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$,

· Loxodrómica, en otro caso.

Clasificamos así $LFT(\hat{\mathbb{C}}) - \{Id\}$:

· Homografías parabólicas (conjugadas a traslaciones),

· Elípticas (conjugadas a rotaciones),

· Hiperbólicas (conjugadas a dilataciones positivas),

· Loxodrómicas (conjugadas a dilataciones complejas).

Al ser, $\lambda + \frac{1}{\lambda} = tr(\phi)^2 - 2$, podemos clasificar las homografías por su traza.
Sea ϕ una homografía no loxodrómica, entonces ϕ es:

· parabólica $\iff |tr(\phi)| = 2$,

· elíptica $\iff |tr(\phi)| < 2$,

· hiperbólica $\Longleftrightarrow |tr(\phi)| > 2$.

Nos interesa estudiar homografías que cumplan $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, es decir, el subgrupo de $LFT(\hat{\mathbb{C}})$ de homografías que fijan el disco. Notamos $LFT(\mathbb{D})$ al conjunto de todas las homografías que cumplen $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Haremos hincapié en las homografías parabólicas e hiperbólicas.
Supongamos que ϕ es parabólica y una conjugada normal es $\Phi = \tau \circ \phi \circ \tau^{-1} \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$, $\Phi(z) = z + \delta$. El único punto fijo de Φ es ∞, y es atractivo pues $\Phi^n(z) = z + n\delta \longrightarrow \infty$ si $n \to \infty$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Luego, si llamamos α al punto fijo de ϕ, tenemos que $\phi^n(z) = \tau^{-1}(\Phi^n(\tau(z))) \longrightarrow \tau^{-1}(\infty) = \alpha$, o sea α es atractivo para ϕ. Si además suponemos que $\phi \in LFT(\mathbb{D})$, tenemos que $|\alpha| \leq 1$. Veamos esto: si z, $|z| < 1$ tenemos que $|\phi^n(z)| < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y obtenemos que $\phi^n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

Similarmente, supongamos que ϕ es hiperbólica con puntos fijos α, β. Sea Φ, una conjugada normal de ϕ. Tenemos que $\Phi = \tau \circ \phi \circ \tau^{-1} \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$, $\Phi(z) = \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, en donde $\tau(\alpha) = 0$ y $\tau(\beta) = \infty$. El punto fijo atractivo de Φ es el 0, luego α es atractivo de ϕ. Del mismo modo, $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Observemos además que $|\phi'(\alpha)| = 1/|\phi'(\beta)|$, entonces β es punto fijo repulsivo.

Cuando la homografía cumple $\phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, decimos que ϕ es un automorfismo de $\mathbb{D}$. Recordemos que

$$Aut(\mathbb{D}) = \left\{ e^{i\theta} \frac{p - z}{1 - \overline{p}z} : \text{con } \theta \in \mathbb{R},\, p \in \mathbb{D} \right\}.$$

Mediante un análisis de la forma conjugada normal de una homografía hiperbólica, se prueba que si $|\alpha| = |\beta| = 1$, entonces es un automorfismo del disco.

2.4.2. Teorema de Littlewood

Habiendo introducido los requerimientos necesarios sobre homografías para analizar los operadores de composición, continuamos con el estudio de la hiperciclicidad de C_ϕ. Entonces, sea $C_\phi : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$, $C_\phi(f) = f \circ \phi$ con ϕ holomorfa, $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Dedicamos esta sección a la buena definición y continuidad de este operador. Primero trabajaremos con ϕ holomorfa, $\phi(0) = 0$ y $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Luego con automorfismos del disco de la forma $\frac{p-z}{1-\overline{p}z}$ con $p \in \mathbb{D}$. Por último probaremos que resulta continua para cualquier ϕ holomorfa que verifique $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Proposición 2.4.12 (Principio de subordinación de Littlewood). *Sea ϕ holomorfa, $\phi(0) = 0$ y $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces $C_\phi : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$, $C_\phi(f) = f \circ \phi$ está bien definido y es contractivo.*

Demostración. Definimos $B : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$, $Bf(z) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n+1)z^n$. El operador B actúa como el shift en $l^2(\mathbb{N})$, visto en $H^2(\mathbb{D})$. Es claro que B es contractivo en

$H^2(\mathbb{D})$ y valen las siguientes identidades para $f \in H^2(\mathbb{D})$:

$$f(z) = f(0) + z.Bf(z), \; z \in \mathbb{D}$$

$$B^k f(0) = \hat{f}(k), \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Supongamos primero que $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ es un polinomio. Tenemos que $f \circ \phi$ está acotada por $k := |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m|$ pues,

$$|f \circ \phi(z)| \leq \sup_{\mathbb{D}} |f(z)| \leq k$$

y, como vimos, esto implica que $M_2(f \circ \phi, r) \leq k$ para todo $r < 1$, y así, $f \circ \phi \in H^2(\mathbb{D})$. Para ver que C_ϕ es contractivo debemos estimar la norma $H^2(\mathbb{D})$ de $f \circ \phi$. Para $z \in \mathbb{D}$, usamos que

$$f(\phi(z)) = f(0) + \phi(z) Bf(\phi(z)),$$

o equivalentemente,

$$C_\phi f = f(0) + M_\phi \left(C_\phi \left(Bf \right) \right).$$

Como $\phi(0) = 0$, todos los factores del desarrollo en serie de $\phi(z)Bf(\phi(z))$ tienen un factor z en común, por lo tanto son ortogonales al término $f(0)$. De aquí, tenemos que

$$\|C_\phi f\|^2 = |f(0)|^2 + \|M_\phi \left(C_\phi \left(Bf \right) \right)\|^2 \leq |f(0)|^2 + \|C_\phi (Bf)\|^2$$

donde la última desigualdad es por que M_ϕ es contractivo. Cambiando sucesivamente f por Bf, $B^2 f$, $\ldots$ en esta última expresión obtenemos:

$$\|C_\phi B f\|^2 \leq |Bf(0)|^2 + \|C_\phi B^2 f\|^2$$

$$\|C_\phi B^2 f\|^2 \leq |B^2 f(0)|^2 + \|C_\phi B^3 f\|^2$$

$$\vdots$$

$$\|C_\phi B^k f\|^2 \leq |B^k f(0)|^2 + \|C_\phi B^{k+1} f\|^2, \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Poniendo juntas las desigualdades anteriores, llegamos a que

$$\|C_\phi f\|^2 \leq \sum_{n=0}^{k} |(B^n f)(0)|^2 + \|C_\phi B^{k+1} f\|^2, \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $gr(f) = m$, $B^{m+1} f = 0$, y de esta forma,

$$\|C_\phi f\|^2 \leq \sum_{n=0}^{m} |(B^n f)(0)|^2 = \sum_{n=0}^{m} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=0}^{m} |a_n|^2 = \|f\|^2.$$

Por lo tanto, C_ϕ es contractivo en el subespacio $\mathbb{C}[z]$.
Para el caso general, sea $f \in H^2(\mathbb{D})$ cualquiera. Sea f_n la n-esima suma parcial del

desarrollo de Taylor de f. Tenemos que $f_n \to f$ en $H^2(\mathbb{D})$, y como vimos en la Proposición 2.2.2, $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Luego, $f_n \circ \phi \to f \circ \phi$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Es claro que $\|f_n\| \leq \|f\|$ y por lo visto recién para polinomios $\|f_n \circ \phi\| \leq \|f_n\|$. Así, para $0 < r < 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} M_2(f \circ \phi, r) &= \lim_{n\to\infty} M_2(f_n \circ \phi, r) \qquad \text{(hay convergencia uniforme)} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n \circ \phi\| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n\| \\ &\leq \|f\|. \end{aligned}$$

Concluimos que $f \circ \phi \in H^2(\mathbb{D})$ y $\|f \circ \phi\|^2 = \lim M_2(f \circ \phi, r)^2 \leq \|f\|^2$, por lo que es contractivo. □

El siguiente paso de la prueba es verlo para $\psi_p(z) := \frac{p-z}{1-\overline{p}z} \in Aut(\mathbb{D})$.

Lema 2.4.13. *Sean $p \in \mathbb{D}$ y $\psi_p \in Aut(\mathbb{D})$. Entonces $C_{\psi_p} : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ es continua.*

Demostración. Si $f \in \mathbb{C}[z]$, f es holomorfa en $R.\mathbb{D}$ para un $R > 1$ fijo. Luego podemos expresar $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$. Notemos que ψ_p es su propia inversa. Entonces mediante un cambio de variables obtenemos la cota que buscamos:

$$\begin{aligned} \|f \circ \psi_p\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\psi_p(e^{i\theta}))|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 |\psi_p'(e^{it})| dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 \frac{1-|p|^2}{|1-\overline{p}e^{it}|^2} dt \leq \frac{1-|p|^2}{(1-|p|)^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 dt\right) \\ &= \frac{1+|p|}{1-|p|}\|f\|^2. \end{aligned}$$

Sea $f \in H^2(\mathbb{D})$ cualquiera y sea f_n la n-esima suma parcial del desarrollo de Taylor de f. Igual que en la demostración anterior, $f_n \longrightarrow f$ uniforme sobre compactos, $\|f_n\| \leq \|f\|$ y recién vimos que $\|f_n \circ \psi_p\| \leq \sqrt{\frac{1+|p|}{1-|p|}}\|f_n\|$. Así, para $0 < r < 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} M_2(f \circ \psi_p, r) &= \lim_{n\to\infty} M_2(f_n \circ \psi_p, r) \qquad \text{(hay convergencia uniforme)} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n \circ \psi_p\| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+|p|}{1-|p|}}\|f_n\| \\ &\leq \sqrt{\frac{1+|p|}{1-|p|}}\|f\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f \circ \psi_p\| \leq \sqrt{\frac{1+|p|}{1-|p|}}\|f\|,$$

y

$$\|C_{\psi_p}\| \leq \sqrt{\frac{1+|p|}{1-|p|}}.$$

□

Para concluir el caso general descomponemos una función $\phi \in H(\mathbb{D})$, $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, como composición de funciones convenientes.

Teorema 2.4.14. *Sea $\phi \in H(\mathbb{D})$, $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces, el operador $C_\phi : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ está bien definido y es acotado.*

Demostración. Sean $p = \phi(0)$ y $\varphi = \psi_p \circ \phi$, entonces $\varphi(0) = \psi_p(p) = 0$. Como $\psi_p \circ \psi_p = Id_{\mathbb{D}}$, tenemos que $\phi = \psi_p \circ \varphi$ y así C_ϕ es composición de operadores continuos y podemos estimar su norma:

$$C_\phi(f) = f \circ \phi = (f \circ \psi_p) \circ \varphi = C_\varphi C_{\psi_p}(f),$$

$$\|C_\phi\| \leq \|C_\varphi\|.\|C_{\psi_p}\| \leq \sqrt{\frac{1+|\phi(0)|}{1-|\phi(0)|}}.$$

□

2.4.3. Hiperciclicidad

Ahora si, estamos en condiciones de tratar la hiperciclicidad de estos operadores. Trabajaremos con homografías parabólicas e hiperbólicas, y caracterizaremos cuándo resultan hipercíclicos los respectivos operadores de composición.

Proposición 2.4.15. *Sea $\phi \in H(\mathbb{D})$. Si C_ϕ es hipercíclico en $H^2(\mathbb{D})$, entonces ϕ no tiene puntos fijos en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Vimos que al ser C_ϕ hipercíclico, $\sigma_p(C_\phi^*) = \emptyset$. Supongamos que $\phi(\alpha) = \alpha$. Entonces,

$$\langle f, C_\phi^*(k_\alpha)\rangle_{H^2} = \langle f \circ \phi, k_\alpha\rangle_{H^2} = f(\phi(\alpha)) = f(\alpha) = \langle f, k_\alpha\rangle_{H^2}.$$

Esto dice que k_α es autovector de C_ϕ^* de autovalor 1, lo que es absurdo. □

Por lo tanto, nos reducimos a funciones ϕ homográficas sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. Por lo hecho previamente, tenemos las siguientes opciones

Homografías Parabólicas con un único punto fijo atractivo $\alpha \in \mathbb{T}$,

Homografías Hiperbólicas con un punto fijo atractivo $\alpha \in \mathbb{T}$ y otro punto fijo repulsivo $\beta \in \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{D}$.

Probamos ahora un lema de utilidad para los resultados que queremos mostrar.

Lema 2.4.16. *Sea $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{D}$. Consideramos $\mathcal{P}_\alpha = \{P \in \mathbb{C}[z] : P(\alpha) = 0\}$. Entonces $\mathcal{P}_\alpha$ es denso en $H^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)z^n \in H^2(\mathbb{D})$ ortogonal a $\mathcal{P}_\alpha$. Elegimos $z^{p+1} - \alpha z^p \in \mathcal{P}_\alpha$ y tenemos que

$$0 = \langle f, z^{p+1} - \alpha z^p \rangle_{H^2} = \hat{f}(p+1) - \alpha \hat{f}(p), \quad \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

De acá, $\hat{f}(p+1) = \alpha \hat{f}(p)$, para todo $p \in \mathbb{N}_0$, pero como $|\alpha| \geq 1$ y $f \in H^2(\mathbb{D})$, se tiene que $\hat{f}(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$. □

Teorema 2.4.17. *Sea $\phi \in Aut(\mathbb{D})$ parabólico o hiperbólico sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. Entonces C_ϕ es hipercíclico en $H^2(\mathbb{D})$.*

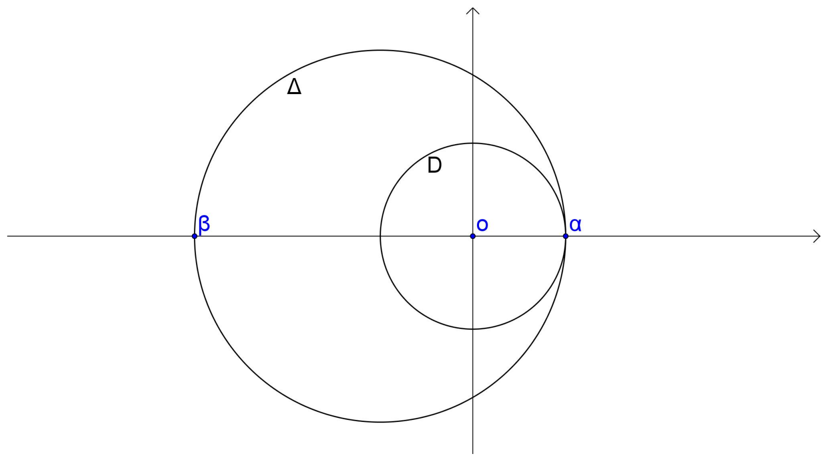
Demostración. Veamos el caso hiperbólico: sean α, β los puntos fijos de ϕ. Tenemos que $\beta \in \mathbb{T}$ porque es el punto fijo atractivo de ϕ^{-1}. Aplicamos el criterio de hiperciclicidad con los conjuntos densos $D_1 = \mathcal{P}_\alpha$, $D_2 = \mathcal{P}_\beta$ y el operador $S = C_\phi^{-1} = C_{\phi^{-1}}$. Debemos ver entonces que $C_\phi^n \longrightarrow 0$ en D_1. Sea $z \in \mathbb{T} - \{\beta\}$, entonces $\phi^n(z) \longrightarrow \alpha$ y si $f \in D_1$, $f(\phi^n(z)) \longrightarrow 0$. Luego

$$\|C_\phi^n f\|^2 = \|f \circ \phi^n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\phi^n(e^{i\theta}))|^2 d\theta,$$

que tiende a 0, por el Teorema de Convergencia Mayorada de Lebesgue. Análogamente, para $C_{\phi^{-1}}^n \longrightarrow 0$ en D_2.
El caso parabólico es más sencillo. Tomamos $D_1 = D_2 = \mathcal{P}_\alpha$ y $S = C_{\phi^{-1}}$. Como ϕ es parabólico, ϕ^{-1} también y el resultado se sigue. □

Teorema 2.4.18. *Sea $\phi \in LFT(\mathbb{D})$ hiperbólico no automorfismo sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. Entonces C_ϕ es hipercíclico en $H^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Supongamos que α, β son los puntos fijos de ϕ. Sabemos que $\alpha \in \mathbb{T}$ es atractivo y $\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{D}$ repulsivo. El hecho que ϕ no sea un automorfismo, necesariamente implica que $|\beta| > 1$. Supongamos primero que el punto fijo repulsivo β se encuentra en la línea que une al origen con α, pero del lado antipodal a α. Sea Δ el disco cuyo borde es perpendicular a esta línea y contiene a α y a β, como se ve en el siguiente gráfico.



Como ϕ es una homografía, manda el borde de Δ en una circunferencia o recta del plano complejo. Esta circunferencia o recta, contiene a α y a β, y como ϕ preserva ángulos, la única posibilidad es que sea $\partial\Delta$. Con un argumento de conexión tenemos que $\phi(\Delta) = \Delta$, porque $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces, $\phi \in Aut(\Delta)$.
Si β no está en el lugar deseado, podemos construir $\tau \in Aut(\mathbb{D})$ que fija a α y manda a β al lugar que queremos. Veamos, tomando una rotación adecuada podemos suponer que $\alpha = 1$. Consideramos $\omega(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Se cumplen las siguientes propiedades $\omega(\mathbb{D}) = \{z : Re(z) > 0\}$, $\omega(1) = \infty$, $Re(\omega(\beta)) < 0$. Aplicamos después la homografía

$$\gamma(z) = \frac{z - Im(\omega(\beta))i}{-2Re(\omega(\beta))};$$

$\gamma(\infty) = \infty$, $\gamma(\omega(\beta)) = -1/2$ y $\gamma \in Aut(\{z : Re(z) > 0\})$. Luego, tomamos la homografía $\tau = \omega^{-1} \circ \gamma \circ \omega$, $\tau \in Aut(\mathbb{D})$, $\tau(1) = 1$ y $\tau(\beta) = -3$.
Suponiendo que ϕ tiene sus puntos fijos donde queremos, $\phi \in Aut(\Delta)$. Definimos en forma análoga $H^2(\Delta) = \{f \in H(\Delta) : \sum |\hat{f}(n)|^2 < \infty\}$. Restringiéndonos a $\mathbb{D}$, vemos que $H^2(\Delta) \mid_{\mathbb{D}} \subset H^2(\mathbb{D})$ es denso porque contiene a $\mathbb{C}[z]$, y este nuevo espacio tiene una topología más fuerte. Si $f_n \longrightarrow f$ en $H^2(\Delta)$, entonces $f_n \longrightarrow f$ en $H^2(\mathbb{D})$ (los coeficientes del desarrollo de Taylor son los mismos en ambos espacios). Como $\phi \in Aut(\Delta)$, por el teorema anterior, C_ϕ es hipercíclico en $H^2(\Delta)$. Aplicamos ahora el Criterio de comparación 1.3.11:

$$\begin{tikzcd} H^2(\Delta) \arrow[r, "C_\phi"] \arrow[d, "|_{\mathbb{D}}"'] & H^2(\Delta) \arrow[d, "|_{\mathbb{D}}"] \\ H^2(\mathbb{D}) \arrow[r, "C_\phi"'] & H^2(\mathbb{D}) \end{tikzcd}$$

Resulta así, C_ϕ es hipercíclico en $H^2(\mathbb{D})$. □

Nos queda entonces determinar qué sucede cuando tenemos una homografía parabólica no automorfismo. Antes de dar la respuesta, veamos un poco más sobre homografías parabólicas.

Observación 2.4.19. Sea $\phi \in LFT(\mathbb{D})$ parabólica sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. Por simplicidad supongamos que el punto fijo atractivo es 1. Conjugando ϕ por la homografía

$\omega(z) = \frac{1+z}{1-z}$, obtenemos otra homografía Φ que fija a ∞ y $\Phi(\{z : Re(z) > 0\}) \subset \{z : Re(z) > 0\}$. Así

$$\Phi(z) = \lambda z + a,$$

como ∞ es el único punto fijo atractivo de Φ, en realidad tenemos que $\lambda = 1$, y que $Re(a) \geq 0$ pues Φ manda el semiplano derecho en sí mismo. Mediante este análisis, obtenemos las fórmulas:

$$\Phi(z) = z + a, \text{ con } Re(a) \geq 0,$$

$$\phi(z) = 1 + \frac{2(z-1)}{2 - a(z-1)}.$$

Derivando obtenemos $\phi'(1) = 1$ (que ya sabíamos, porque es parabólica) y $\phi''(1) = a$. Si además suponemos que ϕ no es un automorfismo del disco, debe ser que Φ no es automorfismo del semiplano derecho, luego $Re(a) > 0$.

Teorema 2.4.20. *Si $\phi \in LFT(\mathbb{D})$ parabólico no automorfismo, entonces C_ϕ no es hipercíclico.*

Demostración. El objetivo de la prueba es ver que el operador C_ϕ no posee órbitas densas. Veremos algo mucho más fuerte, solamente las funciones constantes pueden ser puntos límites de las órbitas de C_ϕ. Para esto, dividimos la prueba en pasos.
Paso 1. Por lo observado previamente, tenemos que $\Phi(z) = z + a$, con $Re(a) > 0$ es conjugada a ϕ. Luego, tenemos que las iteraciones de ϕ son conjugadas a las iteraciones de Φ. Como, $\Phi^n(z) = z + na$, tenemos que ϕ^n se obtiene reemplazando a por na en la fórmula de ϕ, entonces

$$\phi^n(z) = 1 + \frac{2(z-1)}{2 - na(z-1)}.$$

Para la demostración debemos estimar cuan rápido se juntan las órbitas de ϕ de puntos de $\mathbb{D}$ entre sí y al punto fijo atractivo 1. Para esto calculamos

$$\phi(z) - \phi(0) = \frac{4z}{(2+a)(2+a-az)},$$

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - \phi^n(z)] = \lim_{n\to\infty} n\frac{-2(z-1)}{2 - na(z-1)} = \frac{2}{a},$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2[\phi^n(z) - \phi^n(0)] = \lim_{n\to\infty} n^2\frac{4z}{(2+na)(2+na-naz)} = \frac{4z}{a^2(1-z)}.$$

Paso 2. Lo que sigue es una estimación similar a la hecha en la Proposición 2.2.1, pero para las derivadas de una función $f \in H^2(\mathbb{D})$. Sea $z \in \mathbb{D}$,

$$
\begin{aligned}
|f'(z)|^2 &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} n\hat{f}(n)z^{n-1}\right|^2 \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2|z|^{2(n-1)}\right) \\
&\leq \|f\|^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n|z|^{2(n-1)}\right) \\
&= \|f\|^2\frac{2}{(1-|z|^2)^3}, \\
&\Longrightarrow |f'(z)| \leq \frac{\sqrt{2}\|f\|}{(1-|z|^2)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Para llegar a la estimación que queremos, acotamos $|f(z)-f(w)|$ integrando f' sobre el segmento que une z con w. Suponemos $|z| \leq |w|$,

$$
\begin{aligned}
|f(z)-f(w)| &\leq \int_z^w |f'(\zeta)||d\zeta| \\
&\leq \sqrt{2}\|f\|\int_z^w \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^{3/2}}|d\zeta| \\
&\leq \sqrt{2}\|f\|\frac{|w-z|}{(1-|w|^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

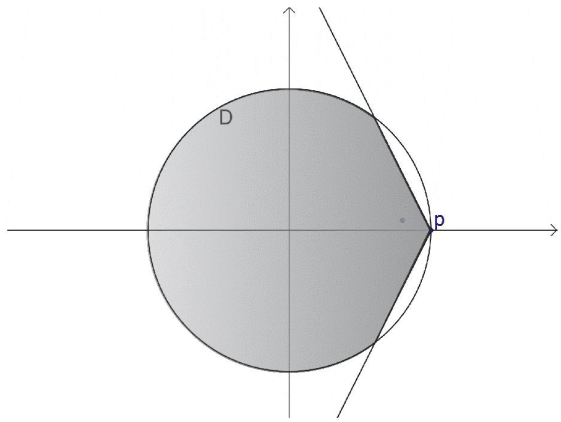
entonces, para cualquier par de puntos $z, w \in \mathbb{D}$,

$$|f(z)-f(w)| \leq \sqrt{2}\|f\|\frac{|w-z|}{(\text{mín}\{1-|w|, 1-|z|\})^{3/2}}.$$

Paso 3. Ahora debemos estudiar la geometría de las órbitas de ϕ. La representación en el semiplano derecho de ϕ es $\Phi(z) = z + a$, entonces la de ϕ^n es $\Phi^n(z) = z + na$. El hecho de que $Re(a) > 0$ implica que los puntos $\Phi^n(w)$ tienden a ∞ sobre una recta en el semiplano derecho que no es paralela al eje imaginario. Al volver al disco, esto fuerza a las órbitas $\{\phi^n(z)\}$ a aproximarse al punto fijo atractivo no tangencialmente a 1 en $\mathbb{D}$. O sea, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < ang(1-\phi^n(z)) < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon.$$

Es decir, los puntos de la sucesión $\{\phi^n(z)\}$ quedan dentro de una región angular como vemos en la siguiente figura.



Sea ahora $z \in \mathbb{D}$, la convergencia no tangencial de las órbitas nos da una constante positiva c, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - |\phi^n(z)| \geq c|1 - \phi^n(z)| \quad \text{y} \quad 1 - |\phi^n(0)| \geq c|1 - \phi^n(0)|.$$

Paso 4. Finalmente, juntando todos los resultados anteriores, llegamos a que

$$\begin{aligned} |f(\phi^n(z)) - f(\phi^n(0))| &\leq K \frac{|\phi^n(z) - \phi^n(0)|}{(\text{mín}\{1 - |\phi^n(z)|, 1 - |\phi^n(0)|\})^{3/2}} \\ &\leq K \frac{n^{-2}}{n^{-3/2}} \\ &= \frac{K}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

en donde la constante K cambia en cada paso, depende de f, z y ϕ, pero no de n. Ahora sí, sea $g \in H^2(\mathbb{D})$ punto límite de $Orb(f, C_\phi)$. Existe una subsucesión $(n_k) \nearrow \infty$ tal que $f \circ \phi^{n_k} \longrightarrow g$ en $H^2(\mathbb{D})$. Entonces, como tenemos convergencia puntual en z,

$$g(z) - g(0) = \lim_{k\to\infty} [f(\phi^{n_k}(z)) - f(\phi^{n_k}(0))] = 0$$

por lo tanto, g es constante. □

Por último veamos una aplicación del Criterio de comparación 1.3.11.

Proposición 2.4.21. *Sea $\phi \in Aut(\mathbb{D})$ holomorfa sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. Entonces el operador de composición C_ϕ actuando en $H(\mathbb{D})$ es hipercíclico.*

Demostración. Sabemos que $C_\phi \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{D}))$ es hipercíclico, $H^2(\mathbb{D}) \hookrightarrow H(\mathbb{D})$ es continua de rango denso (los polinomios son densos en ambos espacios) y convergencia en $H^2(\mathbb{D})$ implica convergencia uniforme sobre compactos. Además, es claro que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} H^2(\mathbb{D}) \arrow[r, "C_\phi"] \arrow[d] & H^2(\mathbb{D}) \arrow[d] \\ H(\mathbb{D}) \arrow[r, "C_\phi"'] & H(\mathbb{D}) \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, por el Criterio de comparación 1.3.11, C_ϕ es hipercíclico en $H(\mathbb{D})$. □

2.4.4. Un ejemplo en $L^p[0,1]$

Existen restricciones sobre el espacio X que debemos tener en cuenta para asegurar la existencia de operadores hipercíclicos. Es evidente que debemos trabajar en espacios vectoriales separables, y mostramos que deben ser de dimensión infinita. En 1969, S. Rolewicz preguntó si esta es la única restricción que se debe tener en cuenta para espacios de Banach, es decir, si todo espacio de Banach separable de dimensión infinita admite un operador hipercíclico. Este problema fue resuelto, en forma independiente, en el año 1997 por S. Ansari y L. Bernal. S. Ansari mostró que una clase mucho mayor de espacios siempre admiten operadores hipercíclicos. En particular, espacios de Fréchet bajo cierta condición admiten operadores hipercíclicos. Un año después, J. Bonet y A. Peris [10] demostraron que en todo espacio de Fréchet hay operadores hipercíclicos.

Teorema 2.4.22. *Todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita, admite un operador hipercíclico.*

Por otro lado este resultado no se mantiene para espacios completos localmente convexos. Existen ejemplos de espacios separables localmente convexos que no admiten operadores hipercíclicos. Veremos un ejemplo en espacios no localmente convexos que sí admiten operadores hipercíclicos. Consideramos los espacios $L^p[0,1]$, con $0 < p < 1$.

$$L^p[0,1] = \left\{ f \text{ medible, tales que } N_p(f) := \int_{[0,1]} |f|^p dx < \infty \right\}.$$

Tenemos que $N_p(f)^{1/p}$ no cumple la desigualdad triangular, por lo tanto no da una norma para el espacio; pero sí se cumple

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g),$$

definiendo así una métrica $d(f,g) = N_p(f-g)$, que lo hace completo, por lo tanto es un F-espacio. No son espacios de Fréchet, todo abierto convexo que contiene a la función nula, es no acotado para la quasi-norma N_p, luego el vector 0 no posee una base de entornos convexos.

S. Ansari plantea si estos espacios admiten operadores hipercíclicos [1]. En efecto, los admiten y podemos dar un ejemplo de un operador de composición hipercíclico en $L^p[0,1]$. Consideramos la función $\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{si } t \leq 1/2 \\ \frac{3t-1}{2} & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases}$$

Sea $C_\phi : L^p \longrightarrow L^p$, $C_\phi = f \circ \phi$ el operador de composición correspondiente. Es claro que C_ϕ es continuo e inversible. Veamos que satisface el criterio de hiperciclicidad con respecto a la sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $n_k = 2k$ y a los conjuntos densos

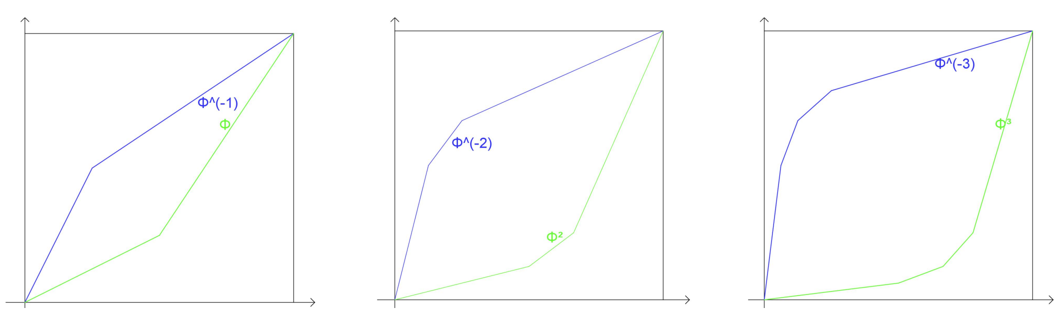
$$D_1 = D_2 = \{f \text{ continua tal que, } f(0) = f(1) = 0\}.$$

Debemos ver que $C_\phi^{2n}(f) \longrightarrow 0$ para $f \in \mathcal{C}[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$. Para ello, debemos estudiar el comportamiento de las funciones $\phi^n = \phi\circ\cdots\circ\phi$. Mediante un rápido análisis vemos que cada composición ϕ^n, es una función "lineal" a trozos. Es decir, para cada n tenemos una partición $\{0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 1\}$, en $n+1$ intervalos del $[0,1]$. En cada uno de estos intervalos, ϕ^n es una recta y se cumple lo siguiente:

- En $[0, a_1]$, $\phi^n \leq (1/2)^{n+1}$,
- En $[a_1, a_2]$, $\phi^n \leq (1/2)^n$,
- En $[a_2, a_3]$, $\phi^n \leq (1/2)^{n-1}$,

  $\vdots$
- En $[a_{n-1}, a_n]$, $\phi^n \leq (1/2)^2$,
- En $[a_n, 1]$, $\phi^n \leq 1$.

Con $a_n = 1 - \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n-1}$ para $n \geq 1$. Mostramos en las siguientes figuras, los gráficos de las primeras 3 composiciones de ϕ.



Dado $\varepsilon > 0$, sean $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ en $[0,1]$, $\delta > 0$ tal que $|f(t)| < (\varepsilon/2)^{1/p}$ en $[0,\delta]$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $(1/2)^{n+2} < \delta$ y $(2/3)^{n-1} < \varepsilon/M^p$. Tenemos entonces que

- En $[0, a_1]$, $\phi^{2n} \leq (1/2)^{2n+1}$,
- En $[a_1, a_2]$, $\phi^{2n} \leq (1/2)^{2n}$,
- En $[a_2, a_3]$, $\phi^{2n} \leq (1/2)^{2n-1}$,

  $\vdots$
- En $[a_{n-1}, a_n]$, $\phi^{2n} \leq (1/2)^{n+2}$,

$\vdots$

- En $[a_{2n-2}, a_{2n-1}]$, $\phi^{2n} \leq (1/2)^3$,
- En $[a_{2n-1}, a_{2n}]$, $\phi^{2n} \leq (1/2)^2$,
- En $[a_{2n}, 1]$, $\phi^{2n} \leq 1$.

y así,

$$d(C_\phi^{2n}(f), 0) = \int_{[0,1]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt$$

$$\leq \underbrace{\int_{[0,a_n]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt}_{(1)} + \underbrace{\int_{[a_n,1]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt}_{(2)}$$

En (1): tenemos que $t \in [0, a_n]$, entonces $\phi^{2n}(t) \leq (1/2)^{n+2} < \delta$. Luego,

$$\int_{[0,a_n]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt \leq \sup_{[0,a_n]} |f(\phi^{2n}(t))|^p . a_n \leq \varepsilon/2.$$

En (2): tenemos que

$$\int_{[a_n,1]} |f(\phi^{2n}(t))|^p dt \leq M^p.(1 - a_n) = M^p(1/2)(2/3)^{n-1} < \varepsilon/2.$$

Análogamente, usando que $f(1) = 0$ probamos que $C_{\phi^{-1}}^{2n}(f) \longrightarrow 0$ para $f \in \mathcal{C}[0, 1]$.

Nota: De aquí, podemos destacar dos problemas que aún se mantienen sin solución.

1. Caracterizar los espacios vectoriales topológicos que admiten operadores hipercíclicos.

2. Determinar si en todo F-espacio separable de dimensión infinita hay operadores hipercíclicos.

2.5. Operadores Shift

En esta sección continuamos el estudio de los operadores shift. En el capítulo anterior vimos que si B es el shift unilateral a izquierda λB es hipercíclico para todo λ, $|\lambda| > 1$. Estudiamos ahora operadores shift bilaterales con pesos en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$. Vamos a determinar cuando resultan hipercíclicos en términos de la sucesión de pesos. Los resultados que veremos se deben a N. Salas [30]. En concreto, definimos $B_{\mathbf{w}} : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, $B_{\mathbf{w}}(e_n) = w_n e_{n-1}$, en donde $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es la base canónica de $\ell^2(\mathbb{Z})$ y $\mathbf{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión acotada de números reales positivos, que llamaremos sucesión de pesos.

Es claro que $\|B_{\mathbf{w}}\| \leq \|\mathbf{w}\|_\infty$. En vez de trabajar con shifts con pesos en espacios sin pesos, trabajaremos con el shift bilateral a izquierda sin pesos en un nuevo espacio $\ell^2(\mathbb{Z}, \omega)$. Para cada sucesión de pesos $\mathbf{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, consideramos una nueva sucesión $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de números positivos definida por $\omega_0 = 1$ y $\omega_n/\omega_{n+1} = w_{n+1}$ (notar la diferencia entre ω y w). Así introducimos el espacio

$$\ell^2(\mathbb{Z}, \omega) := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \text{tal que } \|x\|^2 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_n^2 x_n^2 < \infty \right\}$$

y trabajaremos con el shift bilateral sin pesos $B : \ell^2(\mathbb{Z}, \omega) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \omega)$. Tenemos que B y $B_{\mathbf{w}}$ son unitariamente equivalentes mediante el operador $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \omega)$, $U(x_n) = (x_n/\omega_n)$. Es claro que U es unitario y que $U \circ B_{\mathbf{w}} = B \circ U$. Luego, por el Criterio de comparación 1.3.11, la hiperciclicidad de $B_{\mathbf{w}}$ es equivalente a la de B.

Teorema 2.5.1. *Sea $\boldsymbol{w} = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números positivos tales que*

$$\sup_n \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} < \infty,$$

y sea B el shift bilateral sin pesos actuando en $\ell^2(\mathbb{Z}, \omega)$. Entonces B es hipercíclico si y sólo si

$$\forall q \in \mathbb{N}\ :\ \liminf_{n\to+\infty} \omega_{\pm n+q} = 0.$$

Nota: Lo que queremos expresar en la tesis del teorema cuando escribimos

$$\liminf_{n\to+\infty} \omega_{\pm n+q} = 0,$$

es que para cada $q \in \mathbb{N}$ existe una sucesión creciente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ que cumple simultáneamente:

$$\omega_{n_k+q} \longrightarrow 0 \text{ y } \omega_{-n_k+q} \longrightarrow 0$$

Demostración. Supongamos primero que B es hipercíclico. Fijemos $q \in \mathbb{N}$. Tomamos $\delta \in (0, 1)$ y consideramos la bola $B(e_q, \delta)$. Por la transitividad de B, podemos asegurar que existe $n > 2q$ y $x \in \ell^2(\mathbb{Z}, \omega)$, tal que

$$\|x - e_q\| < \delta \text{ y } \|B^n(x) - e_q\| < \delta.$$

Mirando la q-ésima y la $(n + q)$-ésima coordenada de $\|x - e_q\|$, obtenemos que

$$|\omega_q(x_q - 1)| < \delta \text{ y } |\omega_{n+q}x_{n+q}| < \delta.$$

Mirando la q-ésima y la $(-n + q)$-ésima coordenada de $\|B^n(x) - e_q\|$, obtenemos que

$$|\omega_q(x_{n+q} - 1)| < \delta \text{ y } |\omega_{-n+q}x_q| < \delta.$$

Con esto tenemos que, para $\delta < \omega_q$,

$$\omega_{n+q} \leq |\omega_{n+q}x_{n+q}| + |\omega_{n+q}(1 - x_{n+q})| < \delta + \omega_{n+q}.\frac{\delta}{\omega_q}$$

$$\Longrightarrow \omega_{n+q}.\left(1 - \frac{\delta}{\omega_q}\right) < \delta$$

$$\Longrightarrow \omega_{n+q} < \frac{\delta\omega_q}{\omega_q - \delta}.$$

También,

$$\omega_{-n+q} \leq |\omega_{-n+q}x_q| + |\omega_{-n+q}(1 - x_q)| < \delta + \omega_{-n+q}\frac{\delta}{\omega_q}$$

$$\Longrightarrow \omega_{-n+q}.\left(1 - \frac{\delta}{\omega_q}\right) < \delta$$

$$\Longrightarrow \omega_{-n+q} < \frac{\delta\omega_q}{\omega_q - \delta}.$$

Usando esta cota repetidas veces obtenemos la sucesión que buscamos. Tomamos $\delta_1 > 0$, tal que $\frac{\delta_1\omega_q}{\omega_q - \delta_1} < 1/2$, encontramos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\omega_{\pm n_1+q} < \frac{1}{2}.$$

Para hallar n_2, tomamos $\delta_2 > 0$, tal que $\frac{\delta_2\omega_q}{\omega_q - \delta_2} < 1/4$, encontramos $n_2 \geq n_1$ tal que

$$\omega_{\pm n_2+q} < \frac{1}{4}.$$

Repitiendo el procedimiento, obtenemos el resultado.
Recíprocamente, supongamos que

$$\forall q \in \mathbb{N} \ : \ \liminf_{n\to+\infty} \omega_{\pm n+q} = 0.$$

y veamos que B satisface el criterio de hiperciclicidad. Sea C una constante positiva tal que $C > \max\{1, \sup_n(\omega_n/\omega_{n+1})\}$. Construimos una sucesión creciente $(n_k) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\omega_{n_k+k} \leq C^{-3k} \text{ y } \omega_{-n_k+k} \leq C^{-3k}.$$

Para n_1, tomamos $C^{-3} > 0$ y podemos encontrar n_1 tal que

$$\omega_{n_1+1} \leq C^{-3} \text{ y } \omega_{-n_1+1} \leq C^{-3}.$$

Para n_2, tomamos $C^{-6} > 0$ y podemos encontrar $n_2 > n_1$ tal que

$$\omega_{n_2+2} \leq C^{-6} \text{ y } \omega_{-n_2+2} \leq C^{-6},$$

y así sucesivamente.
Luego, $\omega_{n_k+i} \longrightarrow 0$ y $\omega_{-n_k+i} \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. De hecho, si fijamos i y $k \geq |i|$ tenemos,

$$\omega_{n_k+i} \leq C^{k-i}\omega_{n_k+k} \leq C^{-2k-i} \leq C^{-k}$$

$$\omega_{-n_k+i} \leq C^{k-i}\omega_{-n_k+k} \leq C^{-2k-i} \leq C^{-k}.$$

Entonces veamos que se satisface el criterio para la sucesión (n_k). Tomemos los conjuntos densos $D_1 = D_2 = c_{00}(\mathbb{Z}) = \langle e_i : i \in \mathbb{Z}\rangle_{gen}$ y sea S el shift a derecha $S(e_i) = e_{i+1}$. Como $BS = Id$ en D_2, debemos probar que $B^{n_k}(e_i)$ y $S^{n_k}(e_i)$ ambos tienden a 0 para todo $i \in \mathbb{Z}$ (y luego concluimos usando linealidad), pero esto es claro pues

$$\|B^{n_k}(e_i)\| = \omega_{-n_k+i} \text{ y } \|S^{n_k}(e_i)\| = \omega_{n_k+i}.$$

□

Volviendo a $\ell^2(\mathbb{Z})$ y shifts con pesos, podemos dar la versión análoga del teorema anterior.

Teorema 2.5.2. *Sea $B_{\boldsymbol{w}}$ el shift bilateral a izquierda actuando en $\ell^2(\mathbb{Z})$, con sucesión de pesos $\boldsymbol{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces $B_{\boldsymbol{w}}$ es hipercíclico si y sólo si, para todo $q \in \mathbb{N}$,*

$$\liminf_{n\to+\infty} \max\{(w_1 \cdots w_{n+q})^{-1}, (w_0 \cdots w_{-n+q+1})\} = 0$$

Demostración. Simplemente observar que la sucesión asociada (ω_n) cumple

$$\omega_{n+q} = (w_1 \cdots w_{n+q})^{-1} \text{ y } \omega_{-n+q} = (w_0 \cdots w_{-n+q+1}).$$

□

Ahora damos la versión del teorema anterior para shifts unilaterales. Consideramos en $\ell^2(\mathbb{N})$ el operador $B_{\mathbf{w}}$, definido por $B_{\mathbf{w}}(e_0) = 0$ y $B_{\mathbf{w}}(e_n) = w_n e_{n-1}$ para $n \geq 1$, en donde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es la base canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$ y $\mathbf{w} = (w_n)_n$ es una sucesión acotada de números positivos. Se pueden dar versiones similares a las que vimos en las demostraciones pasadas. Pero esta vez daremos una prueba basándonos en que ya tenemos el resultado para shifts bilaterales. Procedemos mostrando que al "comprimir" un operador hipercíclico en un espacio de Hilbert, se mantiene la hiperciclicidad.

Definición 2.5.3. Sean $H = \ell^2(\mathbb{Z})$, $T \in \mathcal{L}(H)$ y $\Lambda \subset H$ un subespacio, definimos la *compresión de T a Λ* como el operador PTP restringido a Λ, donde P es la proyección ortogonal sobre Λ.

Proposición 2.5.4. *Sea T un operador hipercíclico en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Supongamos que Λ es un subespacio invariante para T^*. Entonces la compresión de T a Λ es hipercíclico en Λ.*

Demostración. Sea P la proyección ortogonal sobre Λ y PTP la compresión de T a Λ. Notamos $P^{\perp} := I - P$ la proyección ortogonal sobre $\Lambda^{\perp}$. Como Λ es subespacio invariante de T^*, $\Lambda^{\perp}$ es subespacio invariante de T. En otras palabras, $PTP^{\perp} = 0$. Lo que es equivalente a decir que $PT = PTP$. Afirmamos que

$$T^n = (PTP)^n + \sum_{k=1}^{n} (P^{\perp}T)^k (PT)^{n-k} P + (P^{\perp}TP^{\perp})^n. \tag{2.4}$$

Si $n = 1$, tenemos

$$PTP + (P^{\perp}T)P + P^{\perp}TP^{\perp} = PTP + (T - PT)P + (T - PT)(I - P)$$

$$= PTP + TP - PTP + T - PT - TP + PTP = T.$$

Supongamos que es cierto para n y probemos la ecuación (2.4) para $n+1$. Queremos ver que:

$$T^{n+1} = (PTP)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (P^{\perp}T)^k (PT)^{n+1-k} P + (P^{\perp}TP^{\perp})^{n+1}.$$

Veremos que

$$(PTP)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (P^{\perp}T)^k (PT)^{n+1-k} P + (P^{\perp}TP^{\perp})^{n+1} -$$
$$\left[(PTP)^n + \sum_{k=1}^{n} (P^{\perp}T)^k (PT)^{n-k} P + (P^{\perp}TP^{\perp})^n \right] T = 0$$

Hacemos las siguientes asociaciones:

$$\underbrace{\left[(PTP)^{n+1} - (PTP)^n T\right]}_{(1)} + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} (P^{\perp}T)^k (PT)^{n+1-k} P - \left(\sum_{k=1}^{n} (P^{\perp}T)^k (PT)^{n-k} P \right) T \right]}_{(2)}$$
$$+ \underbrace{\left[(P^{\perp}TP^{\perp})^{n+1} + (P^{\perp}T)^{n+1} P - (P^{\perp}TP^{\perp})^n T\right]}_{(3)}$$

en las que cada uno de los tres términos es cero.
Para (1):

$$(PTP)^n T = (PTP)^{n-1} (PT)(PT) = (PTP)^{n+1}.$$

Para (2):

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (P^{\perp}T)^k (PT)^{n+1-k} P - \left(\sum_{k=1}^{n} (P^{\perp}T)^k (PT)^{n-k} P \right) T \right] =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \left[(P^{\perp}T)^k (PT)^{n-k} (PTP - PT) \right] = 0.$$

Para (3):

$$\begin{aligned}(P^{\perp}TP^{\perp})^nT - (P^{\perp}T)^{n+1}P - (P^{\perp}TP^{\perp})^{n+1} &= (P^{\perp}TP^{\perp})^n[T - TP^{\perp}] - (P^{\perp}T)^{n+1}P \\ &= (P^{\perp}TP^{\perp})^nTP - (P^{\perp}T)^{n+1}P = [(P^{\perp}TP^{\perp})^n - (P^{\perp}T)^nP^{\perp}]TP = 0.\end{aligned}$$

De la ecuación (2.4), se deduce que para $x \in H$ y $z \in \Lambda$

$$T^nx - z = \underbrace{((PTP)^nx - z)}_{\in\Lambda} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}(P^{\perp}T)^k(PT)^{n-k}Px + (P^{\perp}TP^{\perp})^nx\right)}_{\in\Lambda^{\perp}}$$

Luego,

$$\|(PTP)^nx - z\| \leq \|T^nx - z\|.$$

De esta forma, si elegimos $x \in HC(T)$, tenemos que Px es vector hipercíclico para PTP en Λ. □

Teorema 2.5.5. *Sea $B_{\boldsymbol{w}}$ el shift unilateral a izquierda actuando en $\ell^2(\mathbb{N})$. Entonces, $B_{\boldsymbol{w}}$ es hipercíclico si y sólo si* $\sup_n(w_1 \cdots w_n) = \infty$.

Demostración. Supongamos que $\sup_n(w_1 \cdots w_n) = \infty$. Como vimos en la Subsección 1.4.2, cuando $w_n = \lambda$ con $|\lambda| > 1$, podemos aplicar el criterio de hiperciclicidad de manera similar. Recíprocamente, tomamos $B_{\mathbf{w}} \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ como la compresión a $\ell^2(\mathbb{N})$ de un shift bilateral en $\ell^2(\mathbb{Z})$ cuyos pesos correspondientes a términos negativos son $1/2$. Aplicando el Teorema 2.5.2 y la proposición anterior tenemos el resultado. □

Observación 2.5.6. Un shift unilateral a derecha nunca puede ser hipercíclico. De hecho, sea $B_{\mathbf{w}} \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$, $B_{\mathbf{w}}(e_n) = a_ne_{n+1}$. Si $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, la proyección ortogonal de $Orb(x, B_{\mathbf{w}})$ sobre el subespacio generado por $\{e_k : k < n\}$ tiene a lo sumo n vectores.

2.6. La función Zeta de Riemann

Hasta ahora, en todos los ejemplos que estudiamos, obtuvimos que muchos operadores son hipercíclicos haciendo uso del criterio de hiperciclicidad. Sin embargo, poca información tenemos de los respectivos vectores hipercíclicos, más allá de su existencia. De hecho, la mayoría de las veces probamos que existen mediante un argumento que involucra el Teorema de la Categoría de Baire. Sorprende el hecho de que existan tales vectores, pero nunca hemos exhibido uno concreto. A pesar de todo, sí existe un caso que podemos destacar.

La función Zeta de Riemann se define en el semiplano complejo $\{Re(s) > 1\}$ mediante la fórmula

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s},$$

y luego se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un polo simple en $s = 1$. La franja crítica es

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < Re(s) < 1\}.$$

Notamos

$$H^*(\Omega) = \{f \in H(\Omega); f \text{ no tiene ceros en } \Omega\}.$$

La *Hipótesis de Riemann* afirma que ζ no tiene ceros en la franja crítica Ω. Es decir, la *Hipótesis de Riemann* dice que $\zeta \in H^*(\Omega)$. Es uno de los problemas abiertos más importantes y tiene conexión con varias ramas de matemática. Hasta el momento, todos los ceros no triviales que se conocen de la función ζ tienen parte real $1/2$ y los llamados ceros triviales son los reales pares negativos.

La franja crítica es invariante por traslaciones puramente imaginarias, tenemos entonces bien definido el semigrupo[1] de traslación $(T_t)_{t\geq 0}$ (bajo la composición de operadores), actuando en el espacio $H(\Omega)$

$$T_t f(s) = f(s + ti).$$

El Teorema de Voronin [32] afirma que cualquier función de $H^*(\Omega)$ se puede aproximar por traslaciones puramente imaginarias de la función Zeta de Riemann.

Teorema 2.6.1 (Teorema de Voronin). *Dados $f \in H^*(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ y un compacto $K \subset \Omega$, podemos encontrar números reales positivos t tales que*

$$|\zeta(s + it) - f(s)| < \varepsilon, \text{ para todo } s \in K.$$

Así, si la Hipótesis de Riemann es cierta entonces la función Zeta de Riemann es un vector hipercíclico del semigrupo de traslación (T_t) actuando en el subespacio invariante $H^*(\Omega) \subset H(\Omega)$.

[1] Un semigrupo es un grupo en el cuál sus elementos no tienen inverso, i.e, un conjunto con una operación asociativa con elemento neutro.

Capítulo 3

Criterio de Hiperciclicidad

En este capítulo estudiamos operaciones que mantienen la hiperciclicidad de un operador. Ya obtuvimos ejemplos que muestran que esta propiedad no se mantiene bajo composiciones y que el conjunto de operadores hipercíclicos no es cerrado. Notemos que tampoco se mantiene por sumas, si tomamos T y $-T$ con T un operador hipercíclico, ambos resultan hipercíclicos mientras que la suma no lo es. Recientemente, S. Grivaux mostró que todo operador en un espacio de Hilbert complejo y separable se escribe como suma de dos hipercíclicos. Puntualmente trataremos los siguientes problemas: si T es hipercíclico, es cierto que

· T^n lo es?

· μT lo es, con $|\mu| = 1$?

· $T \oplus T$ lo es?

El último de los tres, tiene grandes conexiones con la teoría desarrollada y volveremos sobre este problema en el capítulo siguiente.

3.1. Primeros Resultados

Vimos que si T es un operador hipercíclico en un espacio vectorial topológico X, entonces el conjunto $HC(T)$ de todos los vectores hipercíclicos de T es conexo. Este hecho alcanza para probar que si un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ es hipercíclico, entonces T^n es hipercíclico, con los mismos vectores hipercíclicos. Este resultado se debe a S. I. Ansari [2].

Teorema 3.1.1 (Ansari). *Sea X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si $x \in X$ es un vector hipercíclico para $T \in \mathcal{L}(X)$, entonces x es vector hipercíclico para T^n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Antes de dar la prueba general veamos el caso $n = 2$. Sea $x \in HC(T)$.

Dado U abierto no vacío, queremos encontrar $q \in \mathbb{N}$ tal que $T^{2q}(x) \in U$. Definamos

$$\begin{aligned} F_0 :=& HC(T) \cap \overline{\{T^{2n}(x) : n \geq 0\}}, \\ F_1 :=& HC(T) \cap \overline{\{T^{2n+1}(x) : n \geq 0\}}. \end{aligned}$$

Usando que $x \in HC(T)$, es fácil ver que $F_0 \cup F_1 = HC(T)$. Estos conjuntos son cerrados en $HC(T)$ y no vacíos pues $x \in F_0$ y $T(x) \in F_1$. Por la conexión de $HC(T)$, existe $z \in F_0 \cap F_1$. Como $z \in HC(T)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(z) \in U$. En otras palabras, $T^{-m}(U)$ es un entorno abierto de z.

- Si m es par, usamos que $z \in F_0$ para encontrar el q que buscamos. Tenemos que $z \in \overline{\{T^{2n}(x) : n \geq 0\}}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{2n}(x) \in T^{-m}(U)$ y tomamos $q = n + m/2$.

- Si en cambio, m es impar, procediendo de forma similar usando que $z \in F_1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{2n+1}(x) \in T^{-m}(U)$, y tomamos $q = n + (m + 1)/2$.

Para el caso general, notamos $V := \mathbb{K}[T]x = \{p(T)x : p \in \mathbb{K}[t]\}$, V es variedad hipercíclica densa, conexa y T-invariante. Sea $A := T\,|_V$. Todo vector no nulo de V es hipercíclico para T, entonces $Orb(y, A)$ es denso en V para todo $y \in V$, o sea, todo elemento de V es hipercíclico para A. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $S = Orb(x, A^n) = \{x, A^n x, A^{2n} x, \dots\}$, veremos que $\overline{S}^V = V$, en donde $\overline{(.)}^V$ denota la clausura en V. Una vez visto esto, podemos deducir que S es denso en X. En efecto, tomamos $U \subset X$ abierto no vacío, entonces $V \cap U \subset V$ es abierto en V y no vacío. Luego, si $\overline{S}^V = V$, se tiene que existe $s \in (U \cap V) \cap S$, y así $U \cap S \neq \emptyset$.
Definimos los conjuntos

$$S_k = \bigcup_{0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1} \overline{A^{i_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k} S}^V, \text{ para } 1 \leq k \leq n.$$

Es claro que S_k es cerrado en V y $S_n \subset S_{n-1} \subset \cdots \subset S_1$. Además,

$$S_1 = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} \overline{A^i S}^V = \overline{\bigcup_{0 \leq i \leq n-1} A^i S}^V = \overline{\bigcup_{0 \leq i \leq n-1} A^i(Orb(x, A^n))}^V$$

$$= \overline{\bigcup_{0 \leq i \leq n-1} \{A^i x, A^{i+n} x, \dots\}}^V = \overline{\{A^k x : k \in \mathbb{N}_0\}}^V = \overline{Orb(x, A)}^V = V$$

Afirmamos que:

1. S_k es A-invariante para todo $1 \leq k \leq n$,

2. $0 \in S_n$,

3. $S_n = V$.

De aquí, podremos concluir el resultado, pues

$$S_n = \overline{S}^V \cap \overline{AS}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{n-1}S}^V = V \Longrightarrow V \subset \overline{S}^V.$$

Para 1.
Para cualquier $0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1$, existe $0 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n-1$ tal que

$$A\left(\overline{A^{i_1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k}S}^V\right) \subset \overline{A^{i_1+1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k+1}S}^V = \overline{A^{j_1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{j_k}S}^V \subset S_k,$$

- si $i_k < n-1$, entonces tomamos $j_r = i_r + 1$ para $r \leq k$,
- si $i_k = n-1$, entonces tomamos $j_r = i_r + 1$ para $r < k$, $j_k = 0$, pues

$$A^n S = \{A^n x, A^{2n} x, \dots\} = S - \{x\}$$

Luego, $A(S_k) \subset S_k$.

Para 2.
Notemos que $S_1 = \overline{S}^V \cup \overline{AS}^V \cup \cdots \cup \overline{A^{n-1}S}^V = V$ y $S_n = \overline{S}^V \cap \overline{AS}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{n-1}S}^V$.
Como $0 \in S_1$, existe i tal que $0 \in \overline{A^iS}^V$. Aplicando, A repetidas veces y recordando que $A(\overline{A^j(S)}^V) \subset \overline{A^{j+1}S}^V$ y $\overline{A^nS}^V \subset \overline{S}^V$ obtenemos que $0 \in \overline{A^jS}^V$ para todo $0 \leq j \leq n-1$.

Para 3.
Sabemos que $S_1 = V$ y $0 \in S_n \subset S_k$ para todo $k \leq n$. Supongamos que $S_k = V$ para algún k, $1 \leq k < n$. Veremos que $S_{k+1} = V$.
Si por el contrario suponemos $S_{k+1} \neq V$. Si existe $x \in S_{k+1}$, $x \neq 0$, al ser A-invariante, $Ax \in S_{k+1}$. Entonces, $A^jx \in S_{k+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y así $Orb(x, A) \subset S_{k+1}$. Pero,

$$V = \overline{Orb(x, A)}^V \subset \overline{S_{k+1}}^V = S_{k+1},$$

lo que contradice $S_{k+1} \neq V$. Por lo tanto, $S_{k+1} \neq V$ implica $S_{k+1} = \{0\}$.
Notemos que si $\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_k\}$, entonces

$$\underbrace{\left[\overline{A^{i_1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k}S}^V\right] \cap \left[\overline{A^{j_1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{j_k}S}^V\right]}_{\text{hay al menos } (k+1) \text{ términos distintos}} \subset S_{k+1}$$

Por lo tanto,

$$\left[\left(\overline{A^{i_1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k}S}^V\right) - \{0\}\right] \cap \left[\left(\overline{A^{j_1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{j_k}S}^V\right) - \{0\}\right] \subset S_{k+1} - \{0\} = \emptyset.$$

Se tiene entonces que,

$$V - \{0\} = S_k - \{0\} = \bigcup_{0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1} \underbrace{\left[\left(\overline{A^{i_1}S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k}S}^V\right) - \{0\}\right]}_{\text{cerrados en } V - \{0\}, \text{ disjuntos}}$$

Como $V-\{0\}=S_k-\{0\}$ es conexo, uno de los conjuntos de la unión es $V-\{0\}$ y los demás son vacío. Sea $\{l_1<\cdots<l_k\}$ esta k-upla. Tenemos que

$$\left(\overline{A^{i_1}S}^V\cap\cdots\cap\overline{A^{i_k}S}^V\right)-\{0\}=\begin{cases}V-\{0\} & \text{si } \{i_1,\ldots,i_k\}=\{l_i,\ldots,l_k\}\\ \emptyset & \text{si } \{i_1,\ldots,i_k\}\neq\{l_i,\ldots,l_k\}\end{cases}$$

Tenemos que

$$A\left(\left(\overline{A^{i_1}S}^V\cap\cdots\cap\overline{A^{i_k}S}^V\right)-\{0\}\right)=\begin{cases}A(V-\{0\}) & \text{si } \{i_1,\ldots,i_k\}=\{l_i,\ldots,l_k\}\\ \emptyset & \text{si } \{i_1,\ldots,i_k\}\neq\{l_i,\ldots,l_k\}\end{cases}$$

Pero,

$$A\left(\left(\overline{A^{l_1}S}^V\cap\cdots\cap\overline{A^{l_k}S}^V\right)-\{0\}\right)\subset\left(\overline{A^{i_1}S}^V\cap\cdots\cap\overline{A^{i_k}S}^V\right)\subset\{0\}.$$

Por lo tanto,

$$A(V-\{0\})\subset\{0\},$$

lo que es una contradicción, pues $A(V-\{0\})$ es denso en V. □

En el teorema anterior se puede identificar una conexión con la teoría de grupos. Tenemos la familia de operadores generada por T, es decir, $G=\{T^n:n\in\mathbb{N}_0\}$. Esta familia, es un semigrupo abeliano bajo la composición. Si T es hipercíclico, ésta es una familia hipercíclica o universal. En este contexto, el teorema de Ansari afirma que todo subsemigrupo no trivial de G es hipercíclico. Aquí, se trata de determinar subsemigrupos de una familia hipercíclica que mantienen la hiperciclicidad. En algún sentido, estamos tratando de "achicar" las órbitas manteniéndolas densas. Otra instancia del mismo fenómeno, es el siguiente resultado que se debe a F. León-Saavedra y V. Muller [24].

Teorema 3.1.2. *Sea X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$. Sea $\mathcal{T}_0$ un semigrupo de $\mathcal{L}(X)$ y $\mathcal{T}$ el semigrupo de $\mathcal{L}(X)$ formado por todas las rotaciones complejas de operadores de $\mathcal{T}_0$, i.e, $\mathcal{T}=\{\lambda S:(S,\lambda)\in\mathcal{T}_0\times\mathbb{T}\}$. Supongamos que existe $T\in\mathcal{L}(X)$ tal que $TS=ST$ para todo $S\in\mathcal{T}_0$ y $T-\alpha$ tiene rango denso para todo $\alpha\in\mathbb{C}$. Entonces, si el semigrupo $\mathcal{T}$ es hipercíclico, también lo es $\mathcal{T}_0$, con los mismos vectores hipercíclicos.*

Un caso particular de este resultado, se obtiene tomando $\mathcal{T}_0=\{T^n:n\in\mathbb{N}_0\}$ para un operador dado $T\in\mathcal{L}(X)$. Si el semigrupo $\mathcal{T}:=\{\lambda T^n:n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{T}\}$ es hipercíclico, entonces T es hipercíclico. Podemos entonces destacar un corolario que se deduce de aquí.

Corolario 3.1.3. *Si $T\in\mathcal{L}(X)$ es hipercíclico. Entonces para todo $\mu\in\mathbb{T}$, el operador μT es hipercíclico, con los mismos vectores hipercíclicos.*

Demostración. Fijamos $\mu\in\mathbb{T}$ y aplicamos el teorema de León-Saaverda y Muller con $\mathcal{T}_0=\{(\mu T)^n:n\in\mathbb{N}_0\}$. El semigrupo asociado $\mathcal{T}$ es

$$\mathcal{T}=\{\lambda T^n:n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{T}\}.$$

Es claro que se verifican las hipótesis del Teorema 3.1.2. El semigrupo $\mathcal{T}$ contiene a T y por lo tanto es hipercíclico. El operador T conmuta con $\mathcal{T}_0$ y, por el Lema 1.3.17, $T-\alpha$ tiene rango denso, para todo $\alpha\in\mathbb{C}$. Luego, concluimos que $\mathcal{T}_0$ es hipercíclico y, por lo tanto también lo es μT. □

3.2. El problema del Criterio de Hiperciclicidad

Siguiendo en una dirección similar, es natural preguntarse si $T \oplus T$ mantiene la hiperciclicidad de T. Esta pregunta, que puede parecer inocente, es mucho más profunda de lo que parece. Dio lugar a muchos trabajos, como por ejemplo [4], [6], [14] o [18]. Tiene grandes conexiones con el Criterio de Hiperciclicidad que, como veremos, dejará de ser simplemente una herramienta útil para testear hiperciclicidad.

Consideramos $T \times T : X \times X \longrightarrow X \times X$ definido por $T \times T(x, y) = (Tx, Ty)$. Cuando T es lineal, identificamos $T \times T$ con el operador $T \oplus T \in \mathcal{L}(X \oplus X)$.

Definición 3.2.1. Sea X un espacio vectorial topológico. Una función continua $T : X \longrightarrow X$ se dice *(topológicamente) mixing débil* si $T \times T$ es topológicamente transitivo en $X \times X$.

Notemos que si X es un espacio de Baire separable sin puntos aislados, el Teorema de Birkhoff 1.3.2 nos permite cambiar "topológicamente transitivo" por "hipercíclico" en la definición anterior. Así, un operador T en un F-espacio separable es mixing débil si y sólo si $T \oplus T$ es hipercíclico.

Proposición 3.2.2. *Sea $T = T_1 \oplus T_2$ un operador hipercíclico en $X = X_1 \oplus X_2$. Entonces T_i es hipercíclico en X_i, $(i = 1, 2)$.*

Demostración. Consideramos para $i = 1, 2$, la proyección en la i-esima coordenada, $\pi_i : X \longrightarrow X_i$. Tenemos que π_i es continua, sobreyectiva y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_i"'] & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ X_i \arrow[r, "T_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, por Criterio de Comparación 1.3.11, T_i es hipercíclico, y $\pi_i(HC(T)) \subset HC(T_i)$. $\square$

Corolario 3.2.3. *Si T es mixing débil, entonces es hipercíclico.*

Tenemos entonces el siguiente problema,

Problema - Mixing Débil: *Es cierto que si T es un operador hipercíclico en un F-espacio separable X, entonces es mixing débil?* Antes de dar la solución al problema, damos resultados relacionados a este problema, considerando sumas de distintos operadores.

Proposición 3.2.4. *Si $T = T_1 \oplus T_2$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad, entonces T_i también.*

Demostración. Notar que π_i es lineal y aplicar nuevamente el Criterio de Comparación 1.3.11. $\square$

Proposición 3.2.5. *Sean $T_1 \in \mathcal{L}(X_1)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(X_2)$ dos operadores que satisfacen el Criterio de Hiperciclicidad para la misma sucesión $(n_k) \in \mathbb{N}$. Entonces $T_1 \oplus T_2$ es hipercíclico. Más aún, $T_1 \oplus T_2$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad.*

Demostración. Notar que en $X_1 \oplus X_2$ tenemos la topología producto. Luego, producto de conjuntos densos es denso y una sucesión en $X_1 \oplus X_2$ converge si y sólo si converge en cada coordenada. □

Corolario 3.2.6. *Si T satisface el Criterio de Hiperciclicidad, entonces es mixing débil.*

Surge aquí, otra pregunta muy importante para la teoría de operadores hipercíclicos. Fue presentada por primera vez por D. A. Herrero y es considerada uno de los problemas más atractivos.

Problema - Criterio de Hiperciclicidad: *Es cierto que todo operador hipercíclico en un F-espacio separable X, satisface el Criterio de Hiperciclicidad?*

Todos los ejemplos que estudiamos en el Capítulo 2, cumplen el Criterio de Hiperciclicidad, por lo tanto, sería razonable pensar que este problema tiene una respuesta afirmativa. Esto implicaría que el Problema - Mixing Débil tiene respuesta afirmativa. Vemos en este esquema, la relación entre ambos problemas.

Problema - Mixing Débil:

Problema - Criterio Hiperciclicdad:

$$\begin{tikzcd}
\text{Hipercíclico} \arrow[r, Rightarrow, "?"] \arrow[d, equal] & \text{Mixing Débil} \\
\text{Hipercíclico} \arrow[r, Rightarrow, "?"] & \text{Criterio} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Antes de dar la respuesta a los problemas, damos otra definición que se relaciona con estos conceptos.

Definición 3.2.7. Sea X un F-espacio separable y $T \in \mathcal{L}(X)$. Sea (n_k) una sucesión creciente de números naturales. Decimos que T es *Hereditariamente Hipercíclico con respecto a* (n_k) si, para toda subsucesión (n'_k) de (n_k), la familia $\{T^{n'_k}\}$ es universal. Es decir, existe $x \in X$ tal que $\{T^{n'_k}x : n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X. Decimos que T es *Hereditariamente Hipercíclico*, si lo es con respecto a alguna sucesión (n_k).

Es claro, que si un operador es hereditariamente hipercíclico, entonces es hipercíclico. Además, vimos en la Observación 1.3.9, que si un operador satisface el Criterio de Hiperciclicidad, entonces es hereditariamente hipercíclico. Para terminar de comprender la conexión entre estos problemas, probamos el teorema de Bès-Peris, que afirma que los tres conceptos son equivalentes. Por lo tanto, los problemas también lo son.

Teorema 3.2.8 (Bès-Peris). *Sea X un F-espacio separable, y $T \in \mathcal{L}(X)$. Son equivalentes:*

(i) T satisface el Criterio de Hiperciclicidad,

(ii) *T es hereditariamente hipercíclico,*

(iii) *T es mixing débil.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Lo vimos en la Observación 1.3.9.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Supongamos que T es hereditariamente hipercíclico con respecto la sucesión (n_k). Sean U_1, U_2, V_1, V_2 abiertos no vacíos de X. Como la familia $\{T^{n_k}\}$ es universal, existe (m_k) subsucesión de (n_k) tal que $T^{m_k}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nuevamente, por hipótesis, la familia $\{T^{m_k}\}$ es universal, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^{m_k}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Luego, $(T \times T)^{m_k}(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \cap V_2) \neq \emptyset$. Por lo tanto, T es mixing débil.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que $T \oplus T$ es hipercíclico con $x \oplus y \in HC(T \oplus T)$. Veamos que T verifica el Criterio de Hiperciclicidad con respecto a los conjuntos densos $D_1 = D_2 = Orb(x, T)$; como $x = \pi_1(x \oplus y)$ es vector hipercíclico de T, tenemos que $Orb(x, T)$ es denso. Afirmamos que $x \oplus T^n(y) \in HC(T \oplus T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, $x \oplus T^n(y) = (I \oplus T^n)(x \oplus y)$; $I \oplus T^n$ conmuta con $T \oplus T$ y tiene rango denso, pues T^n tiene rango denso por ser hipercíclico. Luego, por la Observación 1.3.12, $HC(T \oplus T)$ es $I \oplus T^n$-invariante. Como $y \in HC(T)$, para cada abierto no vacío $U \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(y) \in U$; o sea, existe $u \in U$ tal que $x \oplus u \in HC(T \oplus T)$. En particular, existe $u_k \in B(0, 1/k)$ tal que $x \oplus u_k \in HC(T \oplus T)$. Tomando $V_k := B(0, 1/k) \oplus B(x, 1/k)$, conseguimos una sucesión creciente (n_k) tal que $(T \oplus T)^{n_k}(x \oplus u_k) \in V_k$, i.e, $u_k \longrightarrow 0$, $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0$ y $T^{n_k}(u_k) \longrightarrow x$. Definimos funciones, $S_{n_k} : D_2 \longrightarrow X$, $S_{n_k}(T^j(x)) = T^j(u_k)$ para $j \in \mathbb{N}_0$, notemos que S_{n_k} está bien definido porque $T^i(x) \neq T^j(x)$ si $i \neq j$. De esta forma:

$$
\begin{aligned}
&T^{n_k}(T^j(x)) = T^j(T^{n_k}(x)) \longrightarrow 0, \ \forall j \in \mathbb{N} \\
&S_{n_k}(T^j(x)) = T^j(u_k) \longrightarrow 0, \ \forall j \in \mathbb{N} \\
&T^{n_k} S_{n_k}(T^j(x)) = T^j(T^{n_k}(u_k)) \longrightarrow T^j(x), \ \forall j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, T satisface el Criterio con respecto a la sucesión (n_k). □

Observación 3.2.9. La prueba anterior muestra que si T satisface el Criterio de Hiperciclicidad, lo hace con el mismo conjunto denso $D = D_1 = D_2$, y como los vectores $T^j(x)$ son linealmente independientes, las funciones S_{n_k} se pueden extender por linealidad a $\langle Orb(x, T)\rangle_{gen}$; así en el Criterio de Hiperciclicidad podemos tomar las aplicaciones S_{n_k} lineales.

Tenemos entonces, que los problemas Criterio de Hiperciclicidad y Mixing Débil son equivalentes.

Corolario 3.2.10. *Sea X un F-espacio separable. Si $T \in \mathcal{L}(X)$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad, entonces T^n también lo satisface.*

Demostración. Como T satisface el Criterio, $T \oplus T$ es hipercíclico. Entonces, $(T \oplus T)^n = T^n \oplus T^n$ es hipercíclico. Luego, T^n es mixing débil, por lo tanto T^n satisface Criterio. □

3.3. Caracterizaciones del Criterio de Hiperciclicidad

En esta sección damos más caracterizaciones del Criterio de Hiperciclicidad. Estos resultados se encuentran en el artículo de S. Grivaux [18].

Definición 3.3.1. Sea X un espacio vectorial topológico. Un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice (topológicamente) mixing si para todo par de abiertos no vacíos U y V, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.

Esta definición es claramente una versión más fuerte de la transitividad (topológica). Si X es un F-espacio separable, entonces los operadores mixing son hipercíclicos. Pero, vale un resultado más fuerte.

Proposición 3.3.2. *Sea X un F-espacio separable y $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces, T es mixing si y sólo si T es hereditariamente hipercíclico con respecto a $\mathbb{N}$.*

Demostración. El operador T no es mixing si y sólo si existen abiertos no vacíos U, V y una sucesión infinita (n_k) tales que $T^{n_k}(U) \cap V = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como vimos en la Observación 1.3.9, esto es equivalente a que la sucesión $\{T^{n_k}\}$ no sea universal. □

Recordemos que un operador es hipercíclico si y sólo si es topológicamente transitivo. Así, $T \oplus T$ es hipercíclico si y sólo si para cualquier par de abiertos no vacíos (U_1, V_1) y (U_2, V_2), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, $(i = 1, 2)$. O sea, mixing débil es una propiedad que involucra cuatro abiertos. Lo siguiente muestra que esta condición puede ser significativamente debilitada a una propiedad que involucra tres abiertos. El punto (iv) usualmente se llama “Condición de los Tres Abiertos”.

Teorema 3.3.3. *Sean X un espacio de Banach separable y $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (i) *$T \oplus T$ es hipercíclico*
- (ii) *Para todo par de abiertos no vacíos U y V, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y $T^{n+1}(U) \cap V \neq \emptyset$.*
- (iii) *Existe un número natural p tal que para todo par de abiertos no vacíos U y V, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y $T^{n+p}(U) \cap V \neq \emptyset$.*
- (iv) *Para todo par de abiertos no vacíos U y V, y para cualquier entorno abierto W de 0, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap W \neq \emptyset$ y $T^n(W) \cap V \neq \emptyset$.*

Demostración. Dividiremos la prueba en dos partes. Primero veremos que las tres primeras condiciones son equivalentes y luego que estas equivalen a la cuarta. Es fácil ver que (i) implica (ii). Simplemente tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y $T^n(U) \cap T^{-1}(V) \neq \emptyset$. Es obvio que (ii) implica (iii). Luego, debemos probar que (iii) implica (i). Para ello, consideramos abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2. Queremos ver que $T^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, $(i = 1, 2)$. Notemos que en (iii), está implícita la transitividad de T. Luego, podemos tomar $v_1 \in V_1 \cap HC(T)$. Existe $r_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u_1 := T^{r_1}(v_1) \in U_1$.

Como T^{r_1} tiene rango denso, por ser hipercíclico, existe algún vector $w_2 \in X$ tal que $u_2 := T^{r_1}(w_2) \in U_2$. Sea v_2 cualquier elemento de V_2. Tomemos $\delta > 0$ tal que $B(u_2, \delta) \subset U_2$ y $B(v_2, \delta) \subset V_2$. Por el Teorema 1.3.18, $\mathbb{K}[T]v_1$ es variedad hipercíclica de T, y así $(T^p - I)v_1 \in HC(T)$. Entonces, existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T^{q_1}(T^p - I)v_1 - (-v_2 + w_2)\| < \frac{\delta}{2\|T\|^{r_1}}.$$

Del mismo modo existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T^{p_1}v_1 - (v_2 - T^{q_1}v_1)\| < \frac{\delta}{2\|T\|^{r_1}}.$$

Denotemos $z = T^{p_1}u_1 + T^{q_1+p}u_1$, se tiene que $z \in U_2$. De hecho, $z \in B(u_2, \delta)$,

$$\begin{aligned}
\|z - u_2\| =& \|T^{p_1+r_1}v_1 + T^{q_1+p+r_1}v_1 - T^{r_1}w_2\| \\
&\leq \|T^{r_1}\|.\|T^{p_1}v_1 + T^{q_1+p}v_1 - w_2\| \\
&\leq \|T^{r_1}\|.\left[\|T^{p_1}v_1 - (v_2 - T^{q_1}v_1)\| + \left\|v_2 - T^{q_1}v_1 + T^{q_1+p}v_1 - w_2\right\|\right] \\
&< \delta.
\end{aligned}$$

De forma similar, si denotamos $y = T^{p_1}v_1 + T^{q_1}v_1$, se tiene que $y \in B(v_2, \delta) \subset V_2$, pues

$$\|y - v_2\| = \|T^{p_1}v_1 + T^{q_1}v_1 - v_2\| < \delta.$$

Consideramos los abiertos, $U_k = B(u_1, \frac{1}{2^k})$ y $V_k = B(v_1, \frac{1}{2^k})$. Aplicamos entonces la hipótesis (iii) para el par de abiertos U_k y V_k. De esta forma, obtenemos una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$T^{n_k}(U_k) \cap V_k \neq \emptyset \text{ y } T^{n_k+p}(U_k) \cap V_k \neq \emptyset.$$

Luego, tenemos dos sucesiones en U_k, $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(u''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que verifican simultáneamente

$$T^{n_k}(u'_k) \in V_k \text{ y } T^{n_k+p}(u''_k) \in V_k.$$

En otras palabras, vemos que las sucesiones $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(u''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cumplen

$$u'_k \longrightarrow u_1 \text{ y } u''_k \longrightarrow u_1,$$

$$T^{n_k}(u'_k) \longrightarrow v_1 \text{ y } T^{n_k+p}(u''_k) \longrightarrow v_1.$$

Para concluir, usando que $u'_k \longrightarrow u_1$ y $T^{n_k}(u'_k) \longrightarrow v_1$, obtenemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_k}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ para todo $k \geq k_0$. Similarmente, observemos que

$$T^{p_1}u'_k + T^{q_1+p}u''_k \longrightarrow T^{p_1}u_1 + T^{q_1+p}u_1 = z \in U_2$$

$$T^{n_k}\left(T^{p_1}u'_k + T^{q_1+p}u''_k\right) \longrightarrow T^{p_1}v_1 + T^{q_1}v_1 = y \in V_2.$$

Existe entonces, $k_1 \geq k_0$ tal que $T^{n_k}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, para todo $k \geq k_1$. Concluimos entonces que $T \oplus T$ es topológicamente transitivo, y por ende hipercíclico. Hasta aquí tenemos demostrada la equivalencia de las condiciones (i), (ii) y (iii). Observemos que si $T \oplus T$ es topológicamente transitivo, entonces se verifica (iv). Luego, para finalizar la demostración veremos que (iv) implica (ii). Consideremos dos abiertos no vacíos U y V cualesquiera, y un entorno W de 0. Aplicando (iv), a los abiertos U, $W \cap T^{-1}(W)$ y $T^{-1}(V)$ obtenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(U) \cap (W \cap T^{-1}(W)) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad T^n(W \cap T^{-1}(W)) \cap T^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Lo que implica que,

$$T^n(U) \cap W \neq \emptyset, \quad T^n(W) \cap V \neq \emptyset, \quad T^{n+1}(U) \cap W \neq \emptyset, \quad T^{n+1}(W) \cap V \neq \emptyset.$$

Así, si u y v son vectores de U y V respectivamente, con un argumento similar al anterior, tomando bolas centradas en u y en 0, obtenemos sucesiones $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(w'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que

$$u_k \longrightarrow u \text{ y } T^{n_k}(u_k) \longrightarrow 0,$$

$$w_k \longrightarrow 0 \text{ y } T^{n_k}(w_k) \longrightarrow v,$$

$$u'_k \longrightarrow u \text{ y } T^{n_k+1}(u'_k) \longrightarrow 0,$$

$$w'_k \longrightarrow 0 \text{ y } T^{n_k+1}(w'_k) \longrightarrow v.$$

De aquí, obtenemos que

$$u_k + w_k \longrightarrow u \quad \text{y} \quad T^{n_k}(u_k + w_k) \longrightarrow v$$

$$u'_k + w'_k \longrightarrow u \quad \text{y} \quad T^{n_k+1}(u'_k + w'_k) \longrightarrow v.$$

Concluimos diciendo que si k es suficientemente grande, $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$ y $T^{n_k+1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Luego, se verifica la condición (ii). □

Observación 3.3.4. Hacemos notar que este resultado da una sensación de cercanía a la teoría de números y la combinatoria. Definimos, para un par de abiertos no vacíos U y V el conjunto

$$N(U, V) = \{n \in \mathbb{N} \text{ tales que } T^n(U) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Para cada par de conjuntos A y B de números naturales, definimos el conjunto de las diferencias como

$$A - B = \{n - m \text{ con } n \in A, m \in B \text{ y } n \geq m\}.$$

Vemos que un operador es mixing débil si y sólo si $1 \in N(U,V) - N(U,V)$ para todo par de abiertos no vacíos U y V, si y sólo si existe algún natural p tal que $p \in N(U,V) - N(U,V)$ para todo par de abiertos U y V. También es equivalente a que $N(U,W) \cap N(W,V) \neq \emptyset$ para cualquier par de abiertos no vacíos U y V y cualquier entorno abierto W de 0. De aquí se desprende una nueva definición respecto a la frecuencia con que las órbitas del operador visitan los abiertos del espacio.

Definición 3.3.5. Sea $A \subset \mathbb{N}$. Definimos la densidad inferior de A como

$$\underline{dens}(A) := \liminf_{N\to\infty} \frac{\sharp\{n \in A : n \leq N\}}{N}.$$

donde $\sharp$ denota la cantidad de elementos del conjunto.

Definición 3.3.6. Sea X un espacio vectorial topológico y $T \in \mathcal{L}(X)$. Un vector $x \in X$ se dice *frecuentemente hipercíclico para* T, si para todo abierto no vacío $U \subset X$, el conjunto

$$N(x,U) := \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\}$$

tiene densidad inferior positiva. En caso de que exista un vector así, decimos que T es *frecuentemente hipercíclico.*

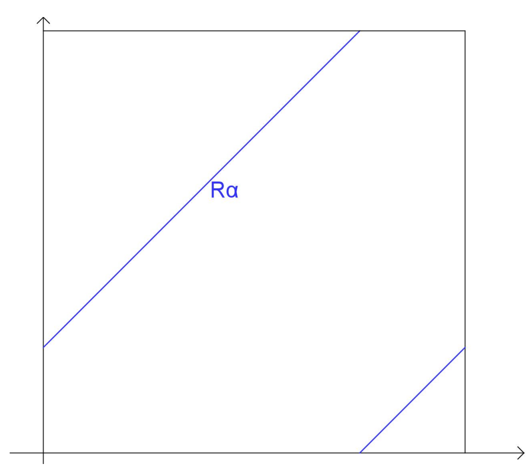
Observación 3.3.7. Vimos en el segundo capítulo que un operador en $H(\mathbb{C})$ que conmuta con todas las traslaciones y no es un múltiplo de la identidad, es hipercíclico. A. Bonilla y K.-G. Grosse-Erdmann muestran que estos operadores son frecuentemente hipercíclicos [11].

3.4. Indicios de una respuesta negativa

En un trabajo reciente de S. Grivaux, se demuestra que en todo espacio de Banach separable de dimensión infinita hay operadores mixing.

Proposición 3.4.1. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces X admite un operador mixing.*

Por definición, mixing débil implica transitividad. En sistemas dinámicos topológicos se pueden encontrar contraejemplos para el recíproco. Por ejemplo, podemos citar, la rotación por α en $[0,1)$, definida por $R_\alpha(x) = x + \alpha$ mód 1.



Cuando $\alpha \in \mathbb{R}$ es irracional, la función es transitiva pero no es mixing débil. Este ejemplo, da indicios de que el problema Mixing Débil debería tener respuesta negativa. Insistimos en que todos los ejemplos estudiados anteriormente satisfacen el Criterio de Hiperciclicidad. Sin embargo, existen operadores hipercíclicos que no son mixing débil. Dedicaremos el cuarto capítulo a este tema. Pero antes, veamos que existen dos operadores hipercíclicos tales que la suma directa no es hipercíclica. Para ello retomamos la clase de Operadores Shift. Enunciamos la versión análoga al Teorema 2.5.5, para sumas de operadores shifts unilaterales a izquierda.

Teorema 3.4.2. *Sean B_i, $1 \leq i \leq m$, shifts unilaterales con pesos en $\ell^2(\mathbb{N})$, $B_i(e_n) = w_n^{(i)} e_{n-1}$ y $B_i(e_0) = 0$. Entonces, $\bigoplus B_i$ es hipercíclico si y sólo si,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \text{mín} \left\{ \prod_{s=1}^{n} w_s^{(i)} : 1 \leq i \leq n \right\} \right\} = \infty.$$

Corolario 3.4.3. *Existen operadores hipercíclicos B_1, B_2, tales que $B_1 \oplus B_2$ no es hipercíclico.*

Demostración. Tomamos shifts unilaterales con pesos, $B_i(e_n) = w_n^{(i)} e_{n-1}$, de forma tal que satisfacen la condición del Teorema 3.4.2 cada una por separado, pero no la satisfacen juntas. Por ejemplo, podemos tomar

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{2n-1}^{(1)} = n, \ n \geq 1 \\ w_{2n}^{(2)} = 1/n, \ n \geq 1 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1^{(2)} = 1 \\ w_{2n}^{(2)} = 2n, \ n \geq 1 \\ w_{2n+1}^{(2)} = 1/2n, \ n \geq 1 \end{array} \right.$$

Tenemos que

$$\prod_{i=1}^{k} w_i^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{k+1}{2} \text{ si } k \text{ es impar} \\ 1 \text{ si } k \text{ es par} \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \prod_{i=1}^{k} w_i^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } k \text{ es impar} \\ k \text{ si } k \text{ es par} \end{array} \right.$$

y por lo tanto,

$$\text{mín} \left\{ \prod_{i=1}^{k} w_i^{(1)}, \prod_{i=1}^{k} w_i^{(2)} \right\} = 1.$$

Es claro que cada operador satisface la condición por separado, pero no lo hacen juntos. Luego B_1 y B_2 son hipercíclicos pero $B_1 \oplus B_2$ no lo es. $\square$

Capítulo 4

Contraejemplo del problema Mixing Débil

Dedicamos este capítulo a mostrar que existen operadores hipercíclicos que no son mixing débil. Trabajaremos el problema en la forma $T \oplus T$. Es un trabajo en conjunto de F. Bayart y É. Matheron [4], publicado en el año 2007. La construcción que haremos nos servirá para probar la existencia de estos operadores en muchos espacios de Banach clásicos, como ser $c_0(\mathbb{N})$ o $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$. Anteriormente el problema fue encarado por muchos autores. Recién en 2006 M. De La Rosa y C. Read [14] pudieron resolver la incógnita construyendo un espacio de Banach y un operador hipercíclico que no es mixing débil. Aunque no es difícil comprender la definición del espacio X, no se sabe si se puede identificar como un espacio de Banach clásico.

4.1. La estrategia

Primero fijamos el contexto en el que trabajaremos y damos los preliminares que nos permitirán demostrar el resultado.

Definición 4.1.1. Si $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial. Entonces el shift a derecha asociado a $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se define como el operador lineal $S : E \longrightarrow E$, $S(e_i) = e_{i+1}$, en donde, $E = \langle e_i : i \in \mathbb{N}\rangle_{gen}$.

El resultado principal al que queremos llegar es

Teorema 4.1.2. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que X tiene una base incondicional normalizada $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, para la cual el shift a derecha asociado es continuo. Entonces, X admite un operador hipercíclico tal que $T \oplus T$ no es hipercíclico.*

Corolario 4.1.3. *Existen operadores hipercíclicos en $c_0(\mathbb{N})$ o $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ que no satisfacen el Criterio de Hiperciclicidad. En particular se puede encontrar este tipo de operadores en todo espacio de Hilbert separable.*

4.1.1. Sobre bases incondicionales en espacios de Banach

Trabajaremos en espacios de sucesiones, es decir, aquellos espacios de Banach que pueden ser presentados en forma natural como espacios de sucesiones. Introduciremos una noción de “sistema de coordenadas”, en algún sentido, análogo a una base en espacios de dimensión finita.

Definición 4.1.4. Una sucesión $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X, se dice *base de Schauder de* X si para todo $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. Decimos que es normalizada si $\|e_i\| = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Tenemos la siguiente caracterización de bases de Schauder.

Proposición 4.1.5. *Sea $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores de X. Entonces, $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder de X si y sólo si las siguientes tres condiciones se cumplen.*

1. *Todos los vectores e_i son no nulos.*

2. *Existe una constante K tal que, para toda elección de escalares $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y naturales $n < m$, se tiene que*
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\right\|.$$

3. *El subespacio generado por $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es denso en X.*

Antes de dar la definición de base incondicional, vemos en la siguiente proposición distintas formas equivalentes de definir convergencia incondicional.

Proposición 4.1.6. *Sea $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores en el espacio de Banach X. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *La serie $\sum_{i=1}^{\infty} e_{\pi(i)}$ converge para toda permutación π de $\mathbb{N}$.*

2. *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_{i_n}$ converge para toda sucesión creciente $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

3. *La serie $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i e_i$ converge para toda elección de signos $\theta_i = \pm 1$.*

4. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\sum_{i\in S} e_i\right\| < \varepsilon$ para todo subconjunto S de $\mathbb{N}$ que cumple $\min\{i;\ i \in S\} > n$.*

Una serie que cumple cualquiera de las cuatro condiciones anteriores se dice que converge incondicionalmente.

Definición 4.1.7. Una base de Schauder $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X se dice incondicional si para todo $x \in X$, la expresión de x en la base converge incondicionalmente.

La convergencia incondicional en una base de Schauder nos permite olvidarnos del orden en la sucesión $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y poder mirarlo como un conjunto.

Teorema 4.1.8. *Sea $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base incondicional. Existe una constante $K > 0$ tal que para toda elección de escalares $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ para los cuales $\sum_i x_i e_i$ converge y para cualquier sucesión $\lambda \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $\lambda = \{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, se tiene que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i e_i \right\| \leq 2K \sup_i |\lambda_i| \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \right\|.$$

Es decir, para toda sucesión acotada $\lambda = \{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tenemos un operador lineal en $E = \langle e_i : i \in \mathbb{N}\rangle_{gen}$ definido por $M_\lambda(e_i) = \lambda_i e_i$. Resulta que

$$\|M_\lambda\| \leq 2K \sup_i |\lambda_i|.$$

En particular, si consideramos sucesiones de la forma $\lambda_j = 1$ para algún $j \in \mathbb{N}$ y $\lambda_i = 0$ para todo $i \neq j$, llamamos $M_j = M_\lambda$ y obtenemos que

$$M_j(x) = M_j\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right) = x_j e_j,$$

y $\|M_j\| \leq 2K$. Pero, si consideramos $\{e_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funcionales de X^* asociadas a $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tenemos que

$$M_j(x) = e_j^*(x) e_j.$$

Así,

$$\|M_j(x)\| \leq |e_j^*(x)| \|e_j\| \leq \|e_j^*\| \|e_j\| \|x\|.$$

Luego, $\|M_j\| = \|e_j^*\| \|e_j\|$ y entonces $\sup_j \|e_j^*\| \|e_j\| < \infty$. En particular, si $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es base normalizada, $\{e_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ es acotada.

4.1.2. Preliminares Algebraicos

Para demostrar el Teorema 4.1.2, daremos una especie de "criterio de no-hiperciclicidad" para la suma directa $T \oplus T$. Empezamos con resultados algebraicos que darán lugar a este "nuevo criterio".

Lema 4.1.9. *Sea A un álgebra conmutativa junto con una topología τ. Sea $\mathfrak{n}$ una seminorma en A tal que la aplicación $(p, q) \mapsto pq$ es continua de $(A, \tau) \times (A, \tau)$ en $(A, \mathfrak{n})$. Dados a, a', b, b' en A, supongamos que existen tres sucesiones $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tales que $p_n \to a$, $q_n \to b$, $r_n p_n \to a'$ y $r_n q_n \to b'$. Entonces $\mathfrak{n}(ab' - a'b) = 0$.*

Demostración. Usamos que A es un algebra conmutativa y tenemos que

$$\begin{tikzcd} p_n(r_nq_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & ab' \\ (r_np_n)q_n \arrow[r] & a'b \end{tikzcd}$$

Luego, al ser $(p,q) \mapsto pq$ continua de $(A,\tau)\times(A,\tau)$ en $(A,\mathfrak{n})$, tenemos que

$$0 = \mathfrak{n}(0) = \mathfrak{n}(p_n(r_nq_n) - (r_np_n)q_n) \longrightarrow \mathfrak{n}(ab' - a'b).$$

$\square$

Corolario 4.1.10. *Supongamos que el álgebra A tiene unidad, y que para cualesquiera a, a', b, b' en A, existen sucesiones $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A que cumplen la hipótesis del Lema 4.1.9. Entonces $\mathfrak{n} = 0$.*

Demostración. Tomamos $a \in A$ cualquiera, $b' = 1_A$ y $a' = b = 0$. Luego, por 4.1.9, $\mathfrak{n}(a) = \mathfrak{n}(a1_A - 0) = 0$ para todo $a \in A$. $\square$

Aplicaremos el Corolario 4.1.10, al álgebra $\mathbb{K}[T]e_0$, en donde $T \in \mathcal{L}(X)$, X es un espacio de Banach y e_0 es un vector cíclico de T. Recordemos que un vector cíclico cumple que

$$\mathbb{K}[T]e_0 = \{P(T)e_0, P \text{ polinomio}\} = \langle Orb(e_0,T)\rangle_{gen},$$

es denso en X. El producto en el álgebra $\mathbb{K}[T]e_0$ está dado por

$$P(T)e_0.Q(T)e_0 = (P.Q)(T)e_0,$$

y e_0 es la unidad del álgebra. Además, $\mathbb{K}[T]e_0$ hereda la topología de X.

Corolario 4.1.11. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador cíclico con vector cíclico e_0. Supongamos que existe una funcional lineal no nula $\phi : \mathbb{K}[T]e_0 \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que la aplicación $(x,y) \mapsto \phi(x.y)$ es continua en $\mathbb{K}[T]e_0 \times \mathbb{K}[T]e_0$. Entonces $T \oplus T$ no es hipercíclico en $X \times X$.*

Demostración. Supongamos, por el absurdo, que $T \oplus T$ es hipercíclico. Tenemos entonces, que $HC(T)$ es denso en $X \oplus X$. Sean, a, a', b, b' en $\mathbb{K}[T]e_0$ cualesquiera. Existe $x_k \oplus y_k \in HC(T \oplus T)$ tal que $x_k \oplus y_k \longrightarrow a \oplus b$ y una sucesión de números naturales $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $T^{n_k}x_k \oplus T^{n_k}y_k \longrightarrow a' \oplus b'$. Como $\mathbb{K}[T]e_0$ es denso en X, podemos encontrar sucesiones de polinomios en $\mathbb{K}$, $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\|x_k - P_k(T)e_0\| < \text{mín}\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{k\|T^{n_k}\|}\right\} \quad \text{y} \quad \|y_k - Q_k(T)e_0\| < \text{mín}\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{k\|T^{n_k}\|}\right\}.$$

Es claro que $P_k(T)e_0 \longrightarrow a$ y también

$$\begin{aligned}\|T^{n_k}(P_k(T)e_0) - a'\| &\leq \|T^{n_k}(P_k(T)e_0) - T^{n_k}x_k\| + \|T^{n_k}x_k - a'\| \\ &\leq \|T^{n_k}\| \,\text{mín}\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{k\|T^{n_k}\|}\right\} + \|T^{n_k}x_k - a'\| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Análogamente para la sucesión $Q_k(T)e_0$. Consideramos entonces $p_k = P_k(T)e_0$, $q_k = Q_k(T)e_0$ y $r_k = T^{n_k}e_0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} p_k &= P_k(T)e_0 \longrightarrow a, \\ q_k &= Q_k(T)e_0 \longrightarrow b, \\ r_k.p_k &= T^{n_k}e_0.P_k(T)e_0 = T^{n_k} \circ P_k(T)e_0 \longrightarrow a', \text{ y} \\ r_k.q_k &= T^{n_k}e_0.Q_k(T)e_0 = T^{n_k} \circ Q_k(T)e_0 \longrightarrow b'. \end{aligned}$$

Aplicamos el Corolario 4.1.10 con la seminorma de $\mathbb{K}[T]e_0$, $\mathfrak{n}(z) = |\phi(z)|$. Por hipótesis, $\mathbb{K}[T]e_0$ es un álgebra conmutativa y $(z, w) \mapsto |\phi(z.w)|$ es continua. Obtenemos de esta forma una contradicción pues ϕ es no nula. $\square$

4.1.3. Pasos a seguir

En lo que resta de este capítulo X será un espacio de Banach con base normalizada incondicional $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ cuyo shift a derecha asociado es continuo. Notamos $c_{00} := \langle e_i; i \in \mathbb{N}\rangle_{gen}$. El Teorema 4.1.2 quedará probado si somos capaces de construir un operador lineal $T : c_{00} \longrightarrow c_{00}$ y una funcional lineal no nula $\phi : c_{00} \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que se verifican las propiedades siguientes.

(a) $\langle T^i e_0; i \in \mathbb{N}\rangle_{gen} = \langle e_i; i \in \mathbb{N}\rangle_{gen}$, i.e, $\mathbb{K}[T]e_0 = c_{00}$.

(b) El conjunto $\{T^i e_0 : i \in \mathbb{N}\}$ es denso en c_{00}.

(c) T es continuo.

(d) La aplicación $(x, y) \mapsto \phi(x.y)$ es continua en $c_{00} \times c_{00}$.

De hecho, (c) nos permite extender el operador a todo el espacio X. Por (a) y (b), T tiene a e_0 como vector hipercíclico. Finalmente resulta, por (a), (d) y el Corolario 4.1.11 que $T \oplus T$ no es hipercíclico. Lo que resta de la demostración es construir el operador T y la funcional ϕ. Ambos dependerán de tres sucesiones de números positivos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $(w(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Especificaremos en el camino, las condiciones necesarias sobre las sucesiones. Por conveniencia pedimos $a_0 = 1$ y $b_0 = 0$.

Notaciones Si P es un polinomio, notamos $gr(P)$ al grado de P y $|P|_1$ a la suma de los módulos de los coeficientes de P. Fijamos, de ahora en más, un conjunto denso numerable $Q \subset \mathbb{K}$. Diremos que una sucesión de polinomios $\mathbf{P} = \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es admisible si $P_0 = 0$ y $\mathbf{P}$ enumera todos los polinomios con coeficientes en Q (no necesariamente de forma inyectiva). Pedimos desde ahora que $b_n - 1 > gr(P_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.2. El operador T

Afirmación 4.2.1. *Sea $\boldsymbol{P}$ una sucesión admisible de polinomios. A las sucesiones $\boldsymbol{P}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(w(n))_{n\in\mathbb{N}}$, le podemos asociar un único operador lineal $T : c_{00} \longrightarrow$*

c_{00} *que cumple las siguientes dos condiciones.*

$$Te_i = w(i+1)e_{i+1} \text{ si } i \in [b_{n-1}, b_n - 2] \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

$$T^{b_n}(e_0) = P_n(T)e_0 + \frac{1}{a_n}e_{b_n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Demostración. En efecto, notemos que en realidad estamos definiendo T sobre todos los vectores de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Para mostrar cómo es que queda definido $T(e_{b_n-1})$, lo vemos primero con $n = 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} Te_i &= w(i+1)e_{i+1} \text{ si } i \in [b_0, b_1 - 2], \\ T^{b_1}(e_0) &= P_1(T)e_0 + \frac{1}{a_1}e_{b_1}. \end{aligned}$$

Aplicamos T reiteradas veces al vector e_0 para despejar el valor de $T(e_{b_1-1})$:

$$\begin{aligned} Te_0 &= w(1)e_1, \\ T^2e_0 &= w(1)w(2)e_2, \\ &\vdots \\ T^{b_1-1}e_0 &= w(1)w(2)\dots w(b_1-1)e_{b_1-1} := We_{b_1-1}. \end{aligned}$$

Luego, tenemos las siguientes dos expresiones para $T^{b_1}(e_0)$. Por un lado,

$$T^{b_1}(e_0) = WT(e_{b_1-1}),$$

y por el otro lado,

$$T^{b_1}(e_0) = P_1(T)e_0 + \frac{1}{a_1}e_{b_1}.$$

Así,

$$\begin{aligned} T(e_{b_1-1}) &= \frac{1}{w(1)\dots w(b_1-1)}T^{b_1}(e_0) \\ &= \frac{1}{w(1)\dots w(b_1-1)}\left(P_1(T)e_0 + \frac{1}{a_1}e_{b_1}\right). \end{aligned}$$

Como $gr(P_1) < b_1 - 1$, $T(e_{b_1-1})$ está bien definido. De igual forma, se despeja $T(e_{b_n-1})$ en el caso general:

$$\begin{aligned} T^{b_n}e_0 &= T^{b_n-b_{n-1}}T^{b_{n-1}}e_0 \\ &= T^{b_n-b_{n-1}}\left(P_{n-1}(T)e_0 + \frac{1}{a_{n-1}}e_{b_{n-1}}\right) \\ &= T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)e_0 + \frac{w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1)}{a_{n-1}}T(e_{b_n-1}). \end{aligned}$$

De aquí, podemos despejar $T(e_{b_n-1})$ usando nuevamente que $T^{b_n}e_0 = P_n(T)e_0 + \frac{1}{a_n}e_{b_n}$.

$$Te_{b_n-1} := \varepsilon_n e_{b_n} + f_n \tag{4.3}$$

con

$$\varepsilon_n = \frac{a_{n-1}}{a_n w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1)}$$

y

$$f_n = \frac{a_{n-1}}{w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1)}(P_n(T)e_0 - T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)e_0). \tag{4.4}$$

Como $gr(P_n) < b_n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos definido T en todos los vectores de la base por (4.1) y (4.3). $\square$

Observación 4.2.2. Tenemos, por definición de T, $\{P(T)e_0;\ gr(P) \leq N\} = \langle e_0, \dots, e_N\rangle_{gen}$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Luego, $\mathbb{K}[T]e_0 = c_{00}$. Se sigue que $\{P_n(T)e_0;\ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en c_{00}, puesto que $\mathbf{P}$ es admisible. Entonces por (4.2), también lo es el conjunto $\{T^i e_0;\ i \in \mathbb{N}\}$. De esta forma, tenemos aseguradas las primeras dos condiciones (a) y (b).

Notemos que las sucesiones $\mathbf{P}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(w(n))_{n\in\mathbb{N}}$ son parámetros en la definición de T. Podemos entonces encontrar distintos operadores hipercíclicos que no satisfacen el Criterio de Hiperciclicidad. Para simplificar la notación tomamos ahora y para el resto de la construcción,

$$w(n) := 4\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right),$$

$$a_n := n+1,$$

$$b_n := 3^n.$$

Observamos que $w(n)$ es creciente y $2 \leq w(n) \leq 4$, para todo $n \geq 1$.

Definición 4.2.3. Decimos que una sucesión admisible $\mathbf{P}$ está controlada por una sucesión de números positivos $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si $gr(P_n) < u_n$ y $|P_n|_1 < u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En ese caso, tal sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se llama una sucesión de control. Es claro que para cualquier sucesión no acotada $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe una sucesión admisible de polinomios $\mathbf{P}$, que está controlada por $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 4.2.4. Para $x \in c_{00}$, $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_i$, definimos la norma ℓ^1, como $\|x\|_1 := \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$.

El próximo lema nos permitirá probar la continuidad de T. Notamos $d_n = gr(P_n)$.

Lema 4.2.5. *Con las notaciones de la Afirmación 4.2.1, se cumple:*

1. $\varepsilon_n \leq 1$ *para todo* $n \geq 1$.
2. *Si* $n \geq 1$ *y si* $\|f_k\|_1 \leq 1$ *para todo* $k < n$ *entonces*

$$\|f_n\|_1 \leq n\, 4^{\text{máx}(d_n, d_{n-1})+1}\left(\frac{|P_n|_1}{2^{b_{n-1}}} + |P_{n-1}|_1 \exp(-c\sqrt{b_{n-1}})\right),$$

en donde $c > 0$ *es una constante universal.*

Demostración. La primera parte es obvia pues, $w(n) \geq 1$, entonces

$$\varepsilon_n = \frac{n}{(n+1)w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1)} < \frac{n}{n+1} < 1.$$

Para probar la segunda parte, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\|f_k\|_1 \leq 1$, para todo $k < n$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, notamos $E_j := \langle e_0, \dots, e_j \rangle_{gen}$. Tenemos que como $\{w(i)\}$ es creciente y $w(i) \geq 2$, si $j < b_n - 1$ entonces $\|T(x)\|_1 \leq w(j+1)\|x\|_1$ para todo $x \in E_j$. Veamos, si $x = \sum_{i=1}^{j} x_i e_i$, se tiene que

$$\begin{aligned} T(x) = \sum_{i=1}^{j} x_i T(e_i) &= \sum_{i=b_k-1} x_i T(e_i) + \sum_{i\neq b_k-1} x_i T(e_i) \\ &= \sum_{i=b_k-1} x_i(\varepsilon_k e_{b_k} + f_k) + \sum_{i\neq b_k-1} x_i w(i+1) e_i. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_1 &\leq \sum_{i=b_k-1} |x_i| \underbrace{(\varepsilon_k \|e_{b_k}\|_1 + \|f_k\|_1)}_{\leq 2 \leq w(j+1)} + \sum_{i\neq b_k-1} |x_i| w(i+1) \|e_{i+1}\|_1 \\ &\leq w(j+1) \sum_{i=1}^{j} |x_i| = w(j+1)\|x\|_1. \end{aligned}$$

De aquí, deducimos que

$$\|T^p e_0\|_1 \leq \prod_{i=1}^{p} w(i),$$

para todo $p \in [1, b_n)$. Mirando en (4.4), obtenemos que

$$\|f_n\|_1 \leq \frac{n\left(|P_n|_1 \prod_{i=1}^{d_n} w(i) + |P_{n-1}|_1 \prod_{i=1}^{b_n - b_{n-1}+d_{n-1}} w(i)\right)}{w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1)};$$

y como, $2 \leq w(i) \leq 4$ para todo $i \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &\leq n\left(\frac{|P_n|_1 4^{d_n}}{2^{b_n-b_{n-1}-2}} + |P_{n-1}|_1 4^{d_{n-1}+1} \prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1} \frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})}\right) \\ &\leq n 4^{\text{máx}(d_n, d_{n-1})+1} \left(\frac{|P_n|_1}{2^{b_n-b_{n-1}-1}} + |P_{n-1}|_1 \prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1} \frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})}\right). \end{aligned}$$

Consideramos la función $h(u) = (1-u)e^u$, con $u \in [0,1)$. Tenemos que h es decreciente pues, $h'(u) = -ue^u \leq 0$, si $u \in [0,1)$. Luego, si consideramos $0 \leq u < v < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} (1-v)e^v \leq (1-u)e^u &\iff 1 \leq \frac{(1-u)e^u}{(1-v)e^v} \\ &\iff \frac{1-v}{1-u} \leq e^{u-v} \iff \ln\left(\frac{1-v}{1-u}\right) \leq u - v. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1}\frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})}\right)=\sum_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{i}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{i+b_{n-1}}}}\right)$$
$$\leq\sum_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{i+b_{n-1}}}-\frac{1}{2\sqrt{i}}\right).$$

Con lo cual,

$$\prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1}\frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})}\leq\exp\left[\sum_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{i+b_{n-1}}}-\frac{1}{2\sqrt{i}}\right)\right].$$

Consideramos la función $g(u)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, con $x>0$. Tenemos que $g'(x)=\frac{-1}{4x^{3/2}}$. Usamos el Teorema del Valor Medio, y obtenemos que existe μ entre i y $i+b_{n-1}$, tal que

$$\frac{1}{2\sqrt{i+b_{n-1}}}-\frac{1}{2\sqrt{i}}=g(i+b_{n-1})-g(i)=g'(\mu)(b_{n-1})=\frac{-b_{n-1}}{4\mu^{3/2}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\sqrt{i+b_{n-1}}}-\frac{1}{2\sqrt{i}}\leq\frac{-b_{n-1}}{4(i+b_{n-1})^{3/2}},$$

Notemos que $b_{n-1} = 3^{n-1} \leq 3^n - 3^{n-1} - 1 = b_n - b_{n-1} - 1$, tenemos entonces que,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{b_n - b_{n-1} - 1} \frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})} &\leq \exp\left[\sum_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{i+b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}}\right)\right] \\
&\leq \exp\left(\sum_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1} \frac{-b_{n-1}}{4(i+b_{n-1})^{3/2}}\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{(i+b_{n-1})^{3/2}}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{i=b_{n-1}+1}^{2b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{i}\frac{1}{i^{1/2}}\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{8}\sum_{i=b_{n-1}+1}^{2b_{n-1}} \frac{1}{i^{1/2}}\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}}\sqrt{b_{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

Tomando $c = \frac{1}{8\sqrt{2}}$, obtenemos el resultado. Por lo hecho anteriormente y usando que $b_{n-1} \leq b_n - b_{n-1} - 1$,

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_1 &\leq n4^{\text{máx}(d_n,d_{n-1})+1}\left(\frac{|P_n|_1}{2^{b_n-b_{n-1}-1}} + |P_{n-1}|_1 \prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1}\frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})}\right) \\
&\leq n4^{\text{máx}(d_n,d_{n-1})+1}\left(\frac{|P_n|_1}{2^{b_n-b_{n-1}-1}} + |P_{n-1}|_1 \exp(-c\sqrt{b_{n-1}})\right) \\
&\leq n4^{\text{máx}(d_n,d_{n-1})+1}\left(\frac{|P_n|_1}{2^{b_{n-1}}} + |P_{n-1}|_1 \exp(-c\sqrt{b_{n-1}})\right).
\end{aligned}$$

□

Podemos entonces, mostrar que si elegimos adecuadamente la sucesión admisible $\mathbf{P}$, T resulta continua.

Proposición 4.2.6. *Existe una sucesión de control $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que si $\boldsymbol{P}$ está controlada por $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces T es continuo en c_{00} con respecto a la topología de X.*

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de números positivos tal que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \text{ y} \\ &n4^{u_n+1}\left(\frac{u_n}{2^{b_{n-1}}} + u_n \exp(-c\sqrt{b_{n-1}})\right) \leq \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$, podemos encontrar tal sucesión pues $b_n = 3^n$. Si $\mathbf{P}$ está controlada por $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces aplicando el Lema anterior junto con una inducción directa, tenemos que

$$\|f_n\|_1 \leq \frac{1}{2^n}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Descomponemos entonces T como $T = R+K$, donde R es un shift a derecha con pesos asociado a la sucesión acotada

$$r_n = \begin{cases} w(i+1) & \text{si } i \neq b_n - 1 \\ \varepsilon_n & \text{si } i = b_n - 1 \end{cases}$$

y K está definido por $K(e_{b_n-1}) = f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $K(e_i) = 0$ si i no es de la forma $b_n - 1$. Como el shift asociado a $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es continuo y la base $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es incondicional, tenemos que R es continuo. También, como $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es normalizada

$$\|K(e_{b_n-1})\| = \|f_n\| \leq \|f_n\|_1.$$

Así, si $x \in c_{00}$, $\|x\| \leq 1$, se expresa en la base $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, como $x = \sum_i x_i e_i$ con $|x_i| = |e_i^*(x)| \leq \|e_i^*\|\|x\| \leq \|e_i^*\|$ y la sucesión $\{e_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ es acotada tenemos que

$$\|K(x)\| = \left\|K\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} x_{b_j-1} f_{b_j-1}\right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_{b_j-1}|\|f_{b_j-1}\|_1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|e^*_{b_j-1}\|\frac{1}{2^j},$$

está acotado y luego K es continuo. Por lo tanto, T es continuo. □

4.3. La funcional lineal ϕ

Para concluir con la prueba del Teorema 4.1.2, nos resta construir una funcional lineal no nula $\phi : c_{00} \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que la aplicación $(x, y) \mapsto \phi(x.y)$ sea continua en $c_{00} \times c_{00}$. El siguiente lema nos brinda una herramienta para asegurarla.

Lema 4.3.1. *Sea ϕ una funcional lineal en c_{00}. Supongamos que $\sum_{p,q} |\phi(e_p.e_q)| < \infty$. Entonces la aplicación $(x, y) \mapsto \phi(x.y)$ es continua en $c_{00} \times c_{00}$.*

Demostración. Escribimos $x = \sum_p x_p e_p$ y $y = \sum_q y_q e_q$, tenemos que

$$|\phi(x.y)| \leq \sum_{p,q} |x_p||y_q||\phi(e_p.e_q)| \leq C^2 \sum_{p,q} |\phi(e_p.e_q)|\|x\|\|y\|,$$

para todo $(x, y) \in c_{00} \times c_{00}$, donde $C = sup_i\|e_i^*\|$. □

Debemos entonces, estimar los términos $\phi(e_p.e_q)$. En este punto, se presenta el problema de comprender los productos $e_p.e_q$. Recordemos que $c_{00} = \mathbb{K}[T]e_0$, por esta razón trabajamos con la base $\{T^i(e_0)\}_{i\in\mathbb{N}}$ que es "natural" para trabajar con el producto que hemos definido en $c_{00} = \mathbb{K}[T]e_0$.

Definición 4.3.2. Decimos que $x \in c_{00}$ está soportado en $I \subset \mathbb{N}$ si

$$x \in \langle T^i(e_0);\ i \in I\rangle_{gen}.$$

Observación 4.3.3. Para calcular $|\phi(e_p.e_q)|$, fijamos $p \leq q$, y escribimos $p = b_k + u$, $q = b_l + v$, con $u \in [0, b_{k+1} - b_k)$ y $v \in [0, b_{l+1} - b_l)$. Por definición de T tenemos que

$$T^p(e_0) = T^u(T^{b_k}(e_0)) = T^u\left(P_k(T)(e_0) + \frac{1}{k+1}e_{b_k}\right)$$

$$= P_k(T)T^u(e_0) + \frac{w(b_k+1)\dots w(b_k+u)}{k+1}e_p.$$

Luego,

$$e_p = \frac{k+1}{w(b_k+1)\dots w(b_k+u)}\left(T^{b_k} - P_k(T)\right)T^u(e_0).$$

De forma similar,

$$e_q = \frac{l+1}{w(b_l+1)\dots w(b_l+v)}\left(T^{b_l} - P_l(T)\right)T^v(e_0).$$

Por lo tanto, para cualquier funcional lineal $\phi : c_{00} \longrightarrow \mathbb{K}$ se tiene que

$$|\phi(e_p.e_q)| \leq \frac{(k+1)(l+1)}{2^{u+v}}|\phi(y_{(k,u)(l,v)})|,$$

en donde

$$y_{(k,u)(l,v)} = (T^{b_k} - P_k(T))(T^{b_l} - P_l(T))T^{u+v}(e_0).$$

Por lo tanto, bastará asegurar la convergencia de

$$\sum \frac{(k+1)(l+1)}{2^{u+v}}|\phi(y_{(k,u)(l,v)})|.$$

Definimos ϕ como sigue: $\phi(e_0) = 1$ y $\phi(T^i(e_0)) = 0$ para $i \in (0, b_1)$. Si $i \in [b_n, b_{n+1})$,con $n \geq 1$, ponemos

$$\phi(T^i(e_0)) = \begin{cases} \phi(P_n(T)T^{i-b_n}(e_0)) & \text{si } i \in [b_n, 3b_n/2) \cup [2b_n, 5b_n/2), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $\phi(T^i(e_0))$ está bien definido si conocemos todos los valores que toma ϕ en potencias menores que i, pues $d_n + i - b_n < i$ y entonces $P_n(T)T^{i-b_n}(e_0)$ está soportado en $[0, i)$.

Lema 4.3.4. *Supongamos que* $d_n := gr(P_n) < b_n/3 = 3^{n-1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Si* $0 \leq k \leq l$*, se tienen las siguientes propiedades:*

- $|\phi(y_{(k,u)(l,v)})| = 0$ *si* $u + v < \frac{b_l}{6}$.
- $|\phi(y_{(k,u)(l,v)})| \leq M_l(\mathbf{P}) := \max\limits_{0\leq j\leq l}(1 + |P_j|_1)^2 \prod\limits_{0<j\leq l+1} \max(1, |P_j|_1)^2.$

Antes de dar la prueba, necesitamos un lema previo para poder demostrar el segundo item.

Lema 4.3.5. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, se cumple que*

$$\max_{i\in[0,b_n)} |\phi(T^i(e_0))| \leq \prod_{0<j<n} \max(1, |P_j|_1)^2.$$

Demostración. Observemos primero que si R es un polinomio entonces aplicando la desigualdad triangular obtenemos,

$$|\phi(R(T)e_0)| \leq |R|_1 \max_{j\leq gr(R)} |\phi(T^j(e_0))|.$$

Notamos

$$K_n := \prod_{0<j<n} \max(1, |P_j|_1)^2 \quad \text{y} \quad \phi_i := |\phi(T^i(e_0))|.$$

Si $n = 0$ o $n = 1$, asignamos el valor 1 a un producto vacío y el resultado es cierto. Supongamos que es válido para algún $n \geq 1$, veámoslo para $n + 1$. Tenemos que $K_{n+1} = K_n. \max(1, |P_n|_1)^2 \geq K_n$. Queremos ver que

$$\max_{i\in[0,b_{n+1})} \phi_i \leq K_{n+1}.$$

Aplicando la hipótesis inductiva tenemos que

$$\max_{i\in[0,b_n)} \phi_i \leq K_n \leq K_{n+1}.$$

Luego, basta ver que

$$\max_{i\in[b_n,b_{n+1})} \phi_i \leq K_{n+1}.$$

Lo haremos en dos partes. En $[b_n, 2b_n)$, usamos las desigualdades $b_n/2 + d_n < b_n$ y $|P_n|_1 \leq \max(1, |P_n|_1) \leq \max(1, |P_n|_1)^2$ y tenemos que

$$\begin{aligned}\max_{i\in[b_n,2b_n)} \phi_i &= \max_{i\in[b_n,3b_n/2)} |\phi(P_n(T)T^{i-b_n}(e_0))| \\ &\leq |P_n|_1 \max_{j<b_n/2+d_n} \phi_j \\ &\leq |P_n|_1 K_n \leq K_{n+1}.\end{aligned}$$

En $[2b_n, b_{n+1})$, usamos la desigualdad $3/2b_n + d_n < 2b_n$ y tenemos que

$$\begin{aligned}\max_{i\in[2b_n,b_{n+1})} \phi_i &= \max_{i\in[2b_n,5b_n/2)} \phi_i \\ &\le |P_n|_1 \max_{j<2b_n} \phi_j \\ &\le |P_n|_1^2 .K_n \le K_{n+1}.\end{aligned}$$

Así, probamos el resultado. □

Ahora sí, damos la demostración del Lema 4.3.4.

Demostración. Veamos la primera parte: observemos primero que si z está soportado en $A := [0, b_k/2) \cup [b_k, 3b_k/2)$, entonces $\phi((T^{b_k} - P_k(T))z) = 0$. Puesto que si $z = \sum_{\alpha\in A} z_\alpha T^\alpha(e_0)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi((T^{b_k} - P_k(T))z) &= \phi\left(\sum_{\alpha\in A} z_\alpha T^{b_k+\alpha}(e_0)\right) - \phi\left(P_k(T)\sum_{\alpha\in A} z_\alpha T^\alpha(e_0)\right) \\ &= \sum_{\alpha\in A} z_\alpha \phi(T^{b_k+\alpha}(e_0)) - \sum_{\alpha\in A} z_\alpha \phi(P_k(T)T^\alpha(e_0)) \\ &= \sum_{\alpha\in A} z_\alpha \phi(P_k(T)T^{b_k+\alpha-b_k}(e_0)) - \sum_{\alpha\in A} z_\alpha \phi(P_k(T)T^\alpha(e_0)) = 0.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $u + v < \frac{b_l}{6}$, con $l \ge 1$. Cuando $k = l \ge 1$, escribimos

$$\begin{aligned}y_{(k,u)(l,v)} &= (T^{b_k} - P_k(T))(T^{b_k} - P_k(T))T^{u+v}(e_0) \\ &= (T^{b_k} - P_k(T))(z_1) - (T^{b_k} - P_k(T))(z_2).\end{aligned}$$

En donde, $z_1 := T^{b_k+u+v}(e_0)$ está soportado en $[b_k, b_k+u+v] \subset [b_k, 7b_k/6) \subset [b_k, 3b_k/2)$ y $z_2 := P_k(T)T^{u+v}(e_0)$ está soportado en $[0, d_k + u + v] \subset [0, b_k/3 + b_k/6) = [0, b_k/2)$. Luego, ambos términos se anulan y $\phi(y_{(k,u)(l,v)}) = 0$. Cuando $l > k$, escribimos

$$y_{(k,u)(l,v)} = (T^{b_l} - P_l(T))(z),$$

en donde, $z := (T^{b_k} - P_k(T))T^{u+v}(e_0)$ está soportado en $[0, b_k + u + v] \subset [0, b_l/2)$. Para la segunda parte, notar que el vector $y_{(k,u)(l,v)}$ tiene la forma $R(T)e_0$, con R un polinomio en $\mathbb{K}$. Se cumple que $gr(R) \le b_k + b_l + u + v < b_{k+1} + b_{l+1} < 2b_{l+1} < b_{l+2}$ y $|R|_1 \le (1+|P_k|_1)(1+|P_l|_1) \le (1+|P_l|_1)^2$. De aquí, junto con el Lema 4.3.5 se concluye el resultado. □

Ahora sí, podemos probar que si elegimos correctamente la sucesión admisible **P**, la funcional ϕ satisface lo que necesitamos.

Proposición 4.3.6. *Existe una sucesión de control $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que si $\boldsymbol{P}$ está controlada por $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces la aplicación $(x,y)\mapsto\phi(x.y)$ es continua.*

Demostración. Notamos $\Lambda := \{(m,w)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ w < b_{m+1}-b_m\}$. Entonces,

$$\sum_{p,q}|\phi(e_p.e_q)| \leq \sum_{\substack{(k,u)\in\Lambda\\(l,v)\in\Lambda}} \frac{(k+1)(l+1)}{2^{u+v}}|\phi(y_{(k,u)(l,v)})|$$

$$\leq 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l\geq k}(l+1)^2M_l(\boldsymbol{P})\sum_{u+v\geq\frac{b_l}{6}}\frac{1}{2^{u+v}}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l\geq k}(l+1)^2M_l(\boldsymbol{P})\sum_{i\geq\frac{b_l}{6}}\frac{i+1}{2^i}.$$

Tomemos ahora, una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números positivos tendiendo a infinito, con $A_n\geq 2$, tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l\geq k}(l+1)^2A_l\sum_{i\geq\frac{b_l}{6}}\frac{i+1}{2^i}<\infty.$$

Podemos entonces fijar una sucesión de control $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que si $\mathbf{P}$ está controlada por $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $M_n(\mathbf{P})\leq A_n$; notar que $M_n(\mathbf{P})$ depende solamente de los polinomios de $\mathbf{P}$. Luego,

$$\sum_{p,q}|\phi(e_p.e_q)|<\infty$$

y por el Lema 4.3.1, obtenemos el resultado. □

Juntando las Proposiciones 4.2.6 y 4.3.6, tenemos que si la sucesión admisible **P** está controlada por $\min\{u_n,v_n\}$, se cumplen las condiciones (c) y (d). De esta forma concluimos la prueba del Teorema 4.1.2.

4.4. Variaciones del resultado principal

El mismo Teorema 4.1.2 nos permite encontrar operadores hipercíclicos que no son mixing débil en una clase más grande de espacios de Banach.

Lema 4.4.1. *Sean X_0, Y dos espacios de Banach separables de dimensión infinita. Si T_0 es un operador hipercíclico en X_0, entonces existe un operador $R\in\mathcal{L}(Y)$ tal que $T:=T_0\oplus R$ es hipercíclico en $X:=X_0\oplus Y$.*

Demostración. Por el Teorema 3.4.1, tomamos $R \in \mathcal{L}(Y)$ un operador mixing. Entonces, $T_0 \oplus R$ es topológicamente transitivo, luego hipercíclico. □

Con este lema y el Teorema 4.1.2, podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 4.4.2. *Sea X un espacio de Banach separable. Supongamos que X admite un subespacio complementado X_0 que tiene base normalizada incondicional cuyo shift asociado a derecha es continuo y tiene codimensión infinita. Entonces existe un operador hipercíclico en X que no satisface el Criterio de Hiperciclicidad.*

Demostración. Tomamos $T_0 \in \mathcal{L}(X_0)$ hipercíclico que no satisface el Criterio de Hiperciclicidad. Luego, aplicamos el Lema 4.4.1 y obtenemos un operador hipercíclico que no satisface el Criterio de Hiperciclicidad (recordemos que si $T_0 \oplus R$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad entonces T_0 también lo satisface). □

Corolario 4.4.3. *Si X es un espacio de Banach separable que contiene una copia complementada de algún $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ o una copia de $c_0(\mathbb{N})$, entonces existe un operador hipercíclico en X que no satisface el Criterio de Hiperciclicidad. En particular, podemos encontrar este tipo de operadores en $L^1[0,1]$ y $\mathcal{C}[0,1]$.*

Demostración. El resultado es obvio si contiene una copia complementada de algún $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$. Para la parte de $c_0(\mathbb{N})$, un resultado de A. Sobczyk afirma que si X contiene una copia de $c_0(\mathbb{N})$, entonces $c_0(\mathbb{N})$ está complementado en X. Para aplicar el resultado a los espacios $L^1[0,1]$ y $\mathcal{C}[0,1]$, notar que $L^1[0,1]$ contiene una copia complementada de $\ell^1(\mathbb{N})$ y $\mathcal{C}[0,1]$ contiene una copia de $c_0(\mathbb{N})$, que necesariamente está complementada. □

Capítulo 5

Comentarios Finales

Para finalizar el trabajo, damos algunos resultados de interés. Son problemas que quedan abiertos dentro de la teoría. Por ejemplo, se trata de caracterizar los espacios en los que todo operador hipercíclico es mixing débil o aproximarse a una solución del problema del subespacio (o subconjunto) invariante.

5.1. Operadores hipercíclicos que son mixing débil

Sabemos que los conceptos de hiperciclicidad y mixing débil no son equivalentes. Veremos que agregando hipótesis extra de regularidad sobre el operador podemos asegurar que $T \oplus T$ sea hipercíclico.

Teorema 5.1.1. *Sea X un espacio de Banach separable de dimensión infinita. Dado $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico, son equivalentes las siguientes condiciones.*

(i) $T \oplus T$ *es hipercíclico.*

(ii) $T \oplus T$ *es cíclico.*

(iii) *Para cualesquiera abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2 de X, existe un polinomio p con coeficientes en $\mathbb{K}$, tal que los conjuntos $p(T)(U_1) \cap V_1$ y $p(T)(U_2) \cap V_2$ son no vacíos.*

(iv) *Para todo par de abiertos no vacíos U y V y para todo entorno abierto W, de 0, existe un polinomio p con coeficientes en $\mathbb{K}$, tal que los conjuntos $p(T)(U) \cap W$ y $p(T)(W) \cap V$ son no vacíos.*

Demostración. Las implicaciones $(i) \Rightarrow (ii)$ y $(iii) \Rightarrow (iv)$ son obvias. Veamos $(ii) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que T es hipercíclico y $T \oplus T$ es cíclico. Afirmamos que el conjunto de vectores cíclicos de $T \oplus T$ es denso en $X \oplus X$. Tomamos $x \oplus y$ vector cíclico para $T \oplus T$ y p un polinomio cualquiera no nulo. Se tiene que $p(T)x \oplus p(T)y$ es cíclico de $T \oplus T$, pues

$$\mathbb{K}[T \oplus T](p(T)x \oplus p(T)y) = (p(T) \oplus p(T))\mathbb{K}[T \oplus T](x \oplus y)$$

es denso por que $(p(T)\oplus p(T))$ tiene rango denso y $\mathbb{K}[T\oplus T](x\oplus y)$ es denso en $X\oplus X$. Tenemos entonces los abiertos de $X\oplus X$, $U_1\oplus U_2$ y $V_1\oplus V_2$. Tomamos $x\oplus y\in U_1\oplus U_2$ vector cíclico de $T\oplus T$. Como $\mathbb{K}[T\oplus T](x\oplus y)$ es denso en $X\oplus X$, existe p polinomio, tal que $p(T)x\oplus p(T)y\in V_1\oplus V_2$. Por lo tanto, los conjuntos $p(T)(U_1)\cap V_1$ y $p(T)(U_2)\cap V_2$ son no vacíos. Por último veremos $(iv)\Rightarrow(i)$. Mostraremos que se cumple la condición de los tres abiertos para T. Vimos en el Teorema 3.3.3, que esta es equivalente a que el operador T sea mixing débil. Tomemos entonces abiertos U y V no vacíos y un entorno abierto W de 0. Queremos ver que existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $T^n(U)\cap W$ y $T^n(W)\cap V$ son no vacíos. Por hipótesis, elegimos un polinomio p con coeficientes en $\mathbb{K}$, tal que los conjuntos $p(T)(U)\cap W$ y $p(T)(W)\cap V$ son no vacíos. Sea $x\in HC(T)$ tal que $x\in U\cap(p(T))^{-1}(W)$, (podemos elegir tal x, pues $U\cap(p(T))^{-1}(W)$ es un abierto no vacío y $HC(T)$ es denso en X). De aquí, podemos fijar $n\in\mathbb{N}$ tal que $T^n(x)\in W\cap(p(T))^{-1}(V)$ (podemos elegir tal n, pues $W\cap(p(T))^{-1}(V)$ es un abierto no vacío y $Orb(x,T)$ es denso en X). Luego podemos concluir que $x\in U$ y $T^n(x)\in W$, por lo tanto $T^n(U)\cap W$ es no vacío. De forma similar, $p(T)x\in W$ y $T^n(p(T)x)=p(T)(T^n(x))\in V$, así tenemos que $T^n(W)\cap V$ es no vacío. □

Observación 5.1.2. Notar que en la prueba de la implicación $(iv)\Rightarrow(i)$ solamente usamos que $p(T)$ y T conmutan. Luego la misma prueba sirve si para cualquier par de abiertos no vacíos U y V, y cualquier entorno no vacío W de 0, existe un operador A que conmuta con T tal que $A(U)\cap W$ y $A(W)\cap V$ son no vacíos.

El anterior es un resultado de S. Grivaux. Además de éste, ella dio otros resultados que aseguran que un operador hipercíclico es mixing débil. Por ejemplo, podemos citar que si T tiene un conjunto denso de vectores con órbita acotada entonces es mixing débil.

5.2. Caos y Caos Lineal

Recientemente los sistemas dinámicos caóticos han sido un objeto de estudio en constante progreso al igual que los sistemas dinámicos lineales. Aunque no se reconoce una definición formal de caos, podemos decir que una de las más estudiadas fue la definida por R. L. Devaney en el año 1989 [15]. Se intenta definir funciones cuyas órbitas se comportan de manera complicada e impredecible. Esta definición involucra tres conceptos que juntos dan la noción de caos en el sentido de R. L. Devaney. Uno de ellos es la transitividad topológica que definimos en el Capítulo 1. Las otras dos son las siguientes.

Definición 5.2.1. Sean (X,d) un espacio métrico y $f:X\to X$ una función continua. Decimos que $x\in X$ es un *punto periódico* si existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $f^k(x)=x$. En ese caso, decimos que $k:=\min\{n\in\mathbb{N}:\ f^n(x)=x\}$ es el *período* de x.

Definición 5.2.2. Sean (X,d) un espacio métrico y $f:X\to X$ una función continua. Decimos que f tiene *sensibilidad a las condiciones iniciales* si existe $\delta>0$ tal que para todo $x\in X$ y para cualquier entorno abierto N de x, existe $y\in N$ y $n\in\mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x),f^n(y))>\delta$. En ese caso, decimos que δ es una constante de sensibilidad para f.

Con las definiciones anteriores podemos dar la definición de caos en el sentido de R. L. Devaney.

Definición 5.2.3. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Decimos que f es caótica si

- f es topológicamente transitiva,
- los puntos periódicos de f forman un conjunto denso en X,
- f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

Uno de los problemas que trae esta definición es que la tercera condición no es, en general, preservada por conjugaciones topológicas. Es decir, si tenemos una función caótica f y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ X_0 \arrow[r, "g"'] & X_0 \end{tikzcd}$$

con X_0 otro espacio métrico y h un homeomorfismo. Es cierto que g es caótica?
Queda claro que las primeras dos condiciones de la Definición 5.2.3 son puramente topológicas y por lo tanto son preservadas por conjugaciones topológicas. Pero no podemos decir lo mismo de la sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo, veremos en el siguiente teorema que la transitividad y la existencia de un conjunto denso formado por puntos periódicos aseguran que la sensibilidad se preserve por conjugaciones topológicas. Más aún, el siguiente teorema muestra que la tercera condición de la Definición 5.2.3 es redundante.

Teorema 5.2.4. *Sean (X, d) un espacio métrico infinito y $f : X \to X$ una función continua. Si f es topológicamente transitiva y admite un conjunto denso formado por puntos periódicos, entonces f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.*

Demostración. Observemos primero que si q_1 y q_2 son dos puntos periódicos de f tales que $Orb(q_1, f) \cap Orb(q_2, f) \neq \emptyset$, entonces $Orb(q_1, f) = Orb(q_2, f)$. En efecto, si $q \in Orb(q_1, f) \cap Orb(q_2, f)$, se tiene que $Orb(q, f) = Orb(q_1, f)$ y $Orb(q, f) = Orb(q_2, f)$. Puesto que, como $q \in Orb(q_1, f)$ obtenemos que $Orb(q, f) \subset Orb(q_1, f)$. Por otro lado, si $f^k(q_1) = q_1$ y $f^j(q_1) = q$ con $j \leq k$, entonces

$$q_1 = f^{k-j}(f^j(q_1)) = f^{k-j}(q) \in Orb(q, f).$$

Luego, $Orb(q_1, f) \subset Orb(q, f)$. De igual forma se muestra que $Orb(q, f) = Orb(q_2, f)$. De aquí, asumiendo que X es infinito y el conjunto de puntos periódicos es denso, podemos asegurar la existencia de dos puntos periódicos q_1 y q_2 tales que

$$Orb(q_1, f) \cap Orb(q_2, f) = \emptyset.$$

Sea $\delta_0 = d(Orb(q_1, f), Orb(q_2, f))$. De esta forma, usando la desigualdad triangular, conseguimos que para cualquier $x \in X$ la distancia de x a alguna de las órbitas

$Orb(q_1, f)$ ó $Orb(q_2, f)$ es por lo menos $\delta_0/2$. Mostraremos que f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta := \delta_0/8$.
Sea $x \in X$ arbitrario y sea N un entorno abierto de x. Por densidad, existe $p \in X$ punto periódico de f tal que $p \in U := N \cap B(x, \delta)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ el período de p. Por lo observado previamente, existe un punto periódico $q \in X$ tal que la órbita $Orb(q, f)$ dista de x como mínimo en 4δ. Consideramos

$$V := \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(B(f^i(q), \delta)).$$

Es claro que V es abierto y no vacío pues $q \in V$. Como f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap f^k(U) \neq \emptyset$. Es decir, existe $y \in U$ tal que $f^k(y) \in V$.
Consideramos ahora, $j \in \mathbb{N}$ la parte entera de $k/n+1$. Se tiene que $k/n < j \leq k/n+1$, y luego, $1 \leq nj - k \leq n$. Por construcción tenemos que

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subset B(f^{nj-k}(q), \delta).$$

Al ser, $f^{nj}(p) = p$ aplicando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) &= d(p, f^{nj}(y)) \\ &\geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(p, x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando que $p \in B(x, \delta)$ y $f^{nj}(y) \in B(f^{nj-k}(q), \delta)$ se tiene

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 2\delta.$$

Para concluir, notemos que aplicando una vez más la desigualdad triangular tenemos que

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta \quad \text{o bien} \quad d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta,$$

y tanto p como y pertenecen a N. Resulta entonces, que f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. □

Volviendo al contexto lineal, los operadores hipercíclicos verifican una especie de sensibilidad a las condiciones iniciales más fuerte que la definición 5.2.2.

Proposición 5.2.5. *Sea X un F-espacio separable y sea $T \in \mathcal{L}(X)$ hipercíclico. Entonces, para cualquier $x \in X$ existe un conjunto G_δ denso $G(x) \subset X$ tal que el conjunto $\{T^n(y) - T^n(x);\ n \geq 0\}$ es denso en X para cualquier $y \in G(x)$.*

Demostración. Dado $x \in X$, buscamos un conjunto G_δ denso tal que $y - x \in HC(T)$ para cualquier $y \in G(x)$. Simplemente tomamos $G(x) := x + HC(T)$, y listo. □

Así en el contexto lineal, para cualquier elemento $x \in X$ y cualquier entorno abierto no vacío N de x, existe $y \in G(x) \cap N$. Por lo tanto, $y \in N$ y $\{T^n(y) - T^n(x);\ n \geq 0\}$ es denso en X. Mientras que en la definición 5.2.2 pedíamos que para cualquier elemento $x \in X$ y cualquier entorno abierto no vacío N de x, exista $y \in N$ tal que alguna iteración de f separe a x de y en mayor distancia que δ.

Desde aquí, asumimos que X es un F-espacio complejo, separable de dimensión infinita. Luego, un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ es caótico si y sólo si T es hipercíclico y

$$Per(T) := \{x \in X; x \text{ es punto periódico de } T \}$$

es denso en X.

Proposición 5.2.6. *Si admite T puntos periódicos entonces existen autovectores de T cuyo autovalor en una raíz enésima de la unidad. Más aún,*

$$Per(T) = \langle \{x \in X \text{ tales que existe } n \in \mathbb{N} \text{ y } \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } \lambda^n = 1 \text{ y } Tx = \lambda x\} \rangle_{gen}.$$

Demostración. Es claro que $Per(T)$ es un subespacio vectorial, pues T es lineal. Si $Tx = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ con $\lambda^n = 1$, entonces $T^n x = x$ y luego $x \in Per(T)$. Para la otra inclusión, si $T^n x = x$, descomponemos el polinomio $z^n - 1$ en un producto de monomios

$$z^n - 1 = (z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_n).$$

Como todas las raíces λ_i, con $i = 1, \dots, n$ son distintas, es fácil ver que $\{p_1(z), \dots, p_n(z)\}$ con $p_i(z) = \prod_{j \neq i} (z - \lambda_j)$, es una base del espacio de los polinomios de grado menor estricto que n. En particular, existen α_i, $i = 1, \dots, n$ tales que

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(z).$$

Evaluando en T, obtenemos

$$I = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(T).$$

Consideramos ahora, $y_i := p_i(T)x$. Tenemos que

$$(T - \lambda_i) y_i = (T - \lambda_i) \prod_{j \neq i} (T - \lambda_j) x = (T^n - I)x = 0,$$

y entonces $Ty_i = \lambda_i y_i$ con $\lambda_i^n = 1$. Además, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$. De esta forma, x es combinación lineal de autovectores de T asociados a autovalores que son raíces enésimas de la unidad. $\square$

Como consecuencia directa tenemos la siguiente generalización del Corolario 1.3.10.

Corolario 5.2.7. *Sea X un F-espacio complejo, separable de dimensión infinita, y $T \in \mathcal{L}(X)$. Si*

$$\bigcup_{|\lambda| > 1} Ker(T - \lambda), \quad \bigcup_{|\lambda| < 1} Ker(T - \lambda) \quad y \quad \bigcup_{|\lambda| = 1} Ker(T - \lambda),$$

generan subespacios densos, entonces T es caótico.

5.2.1. Operadores Shift

En la Sección 1.4.2, vimos que en $\ell^p(\mathbb{N})$ con $1 \leq p < \infty$, el operador $\lambda B : \ell^p \to \ell^p$ con $|\lambda| > 1$ es hipercíclico. Veamos que son caóticos. Debemos mostrar que $Per(\lambda B)$ es denso en ℓ^p. En efecto, observemos que dada una sucesión $x = (x_1, x_2 x_3, \dots)$ podemos encontrar $x^{(n)}$ puntos periódicos de λB, tales que $x^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ en ℓ^p. Tomamos

$$x^{(n)} = \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{x_1}{\lambda^n}, \frac{x_2}{\lambda^n}, \dots, \frac{x_n}{\lambda^n}, \frac{x_1}{\lambda^{2n}}, \frac{x_2}{\lambda^{2n}}, \dots, \frac{x_n}{\lambda^{2n}}, \dots\right).$$

Luego, como $|\lambda| > 1$ se tiene que $x^{(n)} \in \ell^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $(\lambda B)^n x^{(n)} = x^{(n)}$, y

$$\|x - x^{(n)}\|_p = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i - x_i^{(n)}|^p\right)^{1/p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Concluimos que los puntos periódicos de λB son densos, y luego el operador es caótico.

5.2.2. Operador de Derivación

Otro ejemplo de operador caótico es el operador de derivación que definimos en le Sección 1.4.1. Veamos ahora que los puntos periódicos de $\mathcal{D} : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ son densos en $H(\mathbb{C})$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ una raíz n-ésima de la unidad. Luego $e_\lambda \in H(\mathbb{C})$ es un punto periódico de $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D}^n(e_\lambda) = \lambda^n e_\lambda = e_\lambda.$$

Además,

$$S := \langle\{e_\lambda; \lambda \text{ raíz de la unidad}\}\rangle_{gen}$$

es un subespacio formado por puntos periódicos. Puesto que si $\lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{n_1}}$ y $\lambda_2 = e^{\frac{2\pi j}{n_2}}$ son dos raíces de la unidad y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$\mathcal{D}^{n_1 n_2}(e_{\lambda_1} + \alpha e_{\lambda_2}) = e_{\lambda_1} + \alpha e_{\lambda_2}.$$

Por Lema 2.1.1, como el conjunto $A := \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \text{ raíz de la unidad }\}$ tiene un punto de acumulación, tenemos que S es denso. Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es caótico.

5.2.3. Criterio de Caoticidad

Veremos a continuación un criterio que da condiciones suficientes para determinar si un operador es caótico. Recordemos que seguimos trabajando en F-espacios complejos, separables de dimensión infinita.

Teorema 5.2.8. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Supongamos que existe un conjunto denso $D \subset X$ y una aplicación $S : D \to D$ que cumplen*

(1) Las series $\sum_{n\geq 1} T^n(x)$ y $\sum_{n\geq 1} S^n(x)$ convergen incondicionalmente para todo $x \in D$,

(2) $TS = I$ en D.

Entonces, T es caótico.

Demostración. Se sigue de (1), que $T^n(x) \longrightarrow 0$ y $S^n(x) \longrightarrow 0$ para cualquier $x \in D$. Por lo tanto, T satisface el Criterio de Hiperciclicidad. Ahora, dados $x \in D$ y $k \geq 1$, consideramos

$$x_k := \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + x + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x).$$

Por la Definición 4.1.6, las series definidas anteriormente convergen y entonces $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$. Además, se sigue de (2) que

$$\begin{aligned} T^k(x_k) &= \sum_{n=1}^{\infty} T^k(S^{nk}(x)) + T^k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{(n+1)k}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n-1)k}(x) + T^k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{(n+1)k}(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} S^{(n-1)k}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x) \\ &= x_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier punto de D se aproxima por puntos periódicos de T, concluimos entonces que $Per(T)$ es denso en X. De esta forma queda demostrado que T es caótico.
□

Queda claro que si T satisface el Criterio de Caoticidad entonces es mixing débil. Pero vale notar que todos los operadores caóticos son mixing débil. Para mostrarlo, citamos el siguiente resultado de S. Grivaux [18].

Teorema 5.2.9. *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es hipercíclico y el conjunto de vectores con órbita acotada es denso, entonces T es mixing débil.*

Corolario 5.2.10. *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es caótico entonces es mixing débil.*

5.3. El Problema del Subespacio Invariante

Para concluir, comentamos un resultado de C. Read [28], que resuelve de forma negativa el problema del subespacio invariante para espacios de Banach.
Problema del Subespacio Invariante: *es cierto que en un espacio de Banach todo operador acotado admite un subespacio propio cerrado e invariante?*
Encontrar un contraejemplo para el Problema del Subespacio Invariante, es equivalente a encontrar un operador acotado, tal que el subespacio generado por la órbita de cualquier elemento no nulo sea densa.

Teorema 5.3.1 (C. Read). *Existe un operador lineal y continuo en $\ell^1(\mathbb{N})$ tal que todo vector no nulo es hipercíclico.*

Es más, este operador no tiene conjuntos propios cerrados e invariantes. Si $F \neq \emptyset$ es cerrado, T-invariante y $x \in F$ entonces, $X = \overline{Orb(x,T)} \subset F$.
Todavía queda abierto el problema para espacios de Hilbert.

Bibliografía

[1] S. I. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. 148 (1997), no. 2, 384–390.

[2] S. I. Ansari, *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. 128 (1995), 374-383.

[3] F. Bayart y É. Matheron, Dynamics of linear operators, Cambridge University Press, Vol. 179 (2009).

[4] F. Bayart y É. Matheron, *Hypercyclic operators failing the hypercyclicity criterion on classical Banach spaces*, J. Funct. Anal. 250 (2007), no. 2, 426–441.

[5] J. Bès, *Three problem's on hypercyclic operators.* Ph.D thesis, Bowling Green State University, Bowling Green, Ohio, 1998.

[6] J. Bès y A. Peris, *Hereditarily hypercyclic operators*, J. Funct. Anal. 167 (1999) 94–112.

[7] C. Bessaga y A. Pelczynski. Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology, PWN, Warsaw, 1975.

[8] G. D. Birkhoff, *Dèmonstration d'un théoreme elementaire sur les fonctions entieres*, C. R. Acad. Sci. París 189 (1929), 473–475.

[9] G. D. Birkhoff *Surface transformations and their dynamical applications.* Acta Math., 43:1-119, 1922.

[10] J. Bonet y A. Peris, *Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces*, J. Funct. Anal. 159 (1998), 587–595.

[11] A. Bonilla y K.-G. Grosse-Erdmann, *On a theorem of Godefroy and Shapiro.* Integral Equations Operator Theory 56 (2006), no. 2, 151–162.

[12] P. S. Bourdon y J. H. Shapiro, *Cyclic Phenomena for Composition Operators*, Memoirs AMS 596, Vol. 125 (1997), 1–105.

[13] J. B. Conway, Functions of a complex variable, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin and New York, 1978.

[14] M. De La Rosa y C. Read, *A hypercyclic operator whose direct sum is not hypercyclic*, preprint, 2006.

[15] R. L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems. Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[16] R. M. Gethner y J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 281–288.

[17] G. Godefroy y J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, Funct. Anal. 98 (1991), no. 2, 229–269.

[18] S. Grivaux, *Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem*, J. Operator Theory 54 (1) (2005), 147–168.

[19] K.-G. Grosse-Erdmann, *Recent developments in hypercyclicity*, Rev. R. Acad. Cien. 97 (2003), 273–286.

[20] K.-G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic vectors*, Bull. Amer. Math. Soc., 36 (3) (1999), 345–381.

[21] K.-G. Grosse-Erdmann y A. Peris, Linear Chaos, Universitext, Springer, to appear.

[22] D. Herrero, *Limits of hypercyclic and supercyclic operators*, J. Funct. Anal. 99 (1991) 179–190.

[23] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Thesis, Univ. of Toronto, 1982.

[24] F. León-Saavedra y V. Muller, *Rotations of hypercyclic and supercyclic operators.* En *Perspectives in Operator Theory,* 50: 385-391, 2004.

[25] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. 2, (1952). 72–87.

[26] A. Peris, *Hypercyclicity criteria and the Mittag-Leffer theorem*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liége 70 (2001) 365-371.

[27] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. 33 (1969), 17–22.

[28] C. J. Read *The invariant subspace problem for a class of Banach spaces. II. Hypercyclic operators.* Israel J. Math., 63: 1-40, 1988.

[29] H. Salas, *A hypercyclic operator whose adjoint is also hypercyclic*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 765–770.

[30] H. N. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995), 993-1004.

[31] J. H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, 1993.

[32] S. M. Voronin, *A theorem on the "universality" of the Riemann zeta function*, Math. USSR-Izv., 9:443-453, 1975.