UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El problema de von Neumann sobre la medibilidad de ciertas álgebras de Boole

Nicolás Ibañez

Director: Alejandro Petrovich

Fecha de presentación: 23 de diciembre de 2024

"...y mi desinterés quedó premiado
porque aunque nadie me pagó por eso
recibí aquellas alas en el alma
y la inmovilidad no me detuvo."
Pablo Neruda

Le agradezco a Alejandro por haber aceptado ser mi director de tesis, el cual tuvo desde el principio completa predisposición y buen ánimo.

También agradezco por supuesto a Jonathan Barmak y a Pablo De Nápoli por haber aceptado ser parte del jurado.

Tenía pensado no mencionar a nadie más, pero la reciente aparición de mi nombre en los Agradecimientos de determinada tesis me "obliga" a hacerlo: ¡Josefina Villar! (el humor ante todo).

Índice

Introducción

Desde mayo de 1935 hasta julio de 1941, un grupo de matemáticos en la (entonces) ciudad polaca de Lwów, se reunía frecuentemente en el *Café Escocés*, a veces con visitas, y registró una serie de problemas en un gran cuaderno iniciado por Stefan Banach. Luego de la segunda guerra mundial una copia del cuaderno llegó a Estados Unidos, donde Stanislaw Ulam, uno de los participantes originales, publicó la colección con un total de 193 problemas bajo el título *El Libro Escocés*. Una edición comentada, editada por Daniel Mauldin, apareció como [21].

El 4 de julio de 1937 John von Neumann introduce el problema número 163, en el cual pregunta ***si la condición de la cadena contable y la distributividad débil son suficientes para que un álgebra de Boole completa admita una medida*** (y ofrece premio a aquel que pueda resolverlo: una botella de whisky de medida mayor a 0).

Esta tesis se basa en el trabajo [4] de Bohuslav Balcar y Thomas Jech, *Weak Distributivity, a Problem of Von Neumann and the Mystery of Measurability*, del año 2006, dedicado por sus autores a Dorothy Maharam, quien hizo valiosos aportes a la resolución del problema.

En la primera sección, **Preliminares**, enunciamos definiciones y resultados básicos sobre álgebras de Boole y algunas leyes distributivas, entre las cuales se encuentra la distributividad débil, fundamental en el problema de von Neumann.

En la segunda sección, ***El método de Maharam***, introducimos la forma con la cual Maharam estudió el problema de von Neumann. Notó, entre otras cosas, que tal problema podía ser dividido en dos, y damos respuesta a uno de ellos.

En la tercera y en la cuarta sección, ***El Problema de la medida de control*** y ***El problema de la consistencia (primera parte)*** respectivamente, surgidos a partir del de von Neumann, presentamos resultados vinculados con ellos, así como herramientas que permiten resolverlos.

En la quinta sección, ***Distributividad débil***, vemos varias equivalencias de tal propiedad, entre ellas, la *Propiedad diagonal*, útiles en particular para las próximas dos secciones.

En la sexta sección, ***El Teorema de descomposición***, estudiamos la topología secuencial en álgebras de Boole completas, débilmente distributivas y que satisfacen la condición de la cadena contable, con el objetivo de describir bajo qué condiciones tales álgebras admiten una submedida de Maharam.

En la séptima sección, ***Álgebras de Maharam***, analizamos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de submedidas continuas.

En la octava sección, ***El problema de la consistencia (segunda parte)***, terminamos de resolver tal problema.

En la novena y última sección, ***Trabajo a futuro***, enunciamos tres problemas a resolver relacionados con el contenido de la tesis.

1. Preliminares

Un ***álgebra de Boole*** es un conjunto parcialmente ordenado $(B, \leq)$ que resulta ser un ***reticulado*** (para todos $x, y \in B$ existen el ínfimo $x \wedge y$ y el supremo $x \vee y$ del conjunto $\{x, y\}$) ***distributivo*** (para todos $x, y, z \in B$ resulta $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$), ***acotado*** ($B$ tiene primer elemento $\mathbf{0}$ y último elemento $\mathbf{1}$) y ***complementado*** (para todo $x \in B$ existe $y \in B$ tal que $x \wedge y = \mathbf{0}$ y $x \vee y = \mathbf{1}$). Para cada $x \in B$ resulta haber un único $y \in B$ tal que $x \wedge y = \mathbf{0}$ y $x \vee y = \mathbf{1}$, al cual denotamos $-x$ y llamamos ***negación*** o ***complemento*** de x.

Si todo subconjunto A de B tiene supremo $\bigvee A$, B se dice álgebra de Boole ***completa*** (equivalente a que todo subconjunto A de B tenga ínfimo $\bigwedge A$). Un subconjunto A de B se denomina ***anticadena*** si todo par de elementos distintos a y b de A son ***disjuntos***, es decir, $a \wedge b = \mathbf{0}$. B satisface la ***condición de la cadena contable***, y en ese caso decimos que B es ***ccc***, si toda anticadena es contable, y tal condición es equivalente a que todo subconjunto S de B tenga un subconjunto D contable tal que S y D tengan las mismas cotas superiores (y por lo tanto el mismo supremo en caso de existir). Si todo subconjunto contable A de B tiene supremo decimos que B es una ***σ-álgebra de Boole*** (equivalente a que todo subconjunto contable A de B tenga ínfimo). Toda σ-álgebra de Boole ccc es completa.

Un elemento no nulo a de B es un ***átomo*** si para todo b en B tal que $\mathbf{0} \leq b \leq a$ resulta $b = \mathbf{0}$ o $b = a$ (equivalente a que el único elemento menor que a sea $\mathbf{0}$).

Un subconjunto S de B se dice ***subálgebra*** si $\mathbf{0} \in S$, $x \wedge y \in S$ para todos $x, y \in S$ y $-x \in S$ para todo $x \in S$.

Si B_1 y B_2 son álgebras de Boole, una función $h : B_1 \to B_2$ se dice ***homomorfismo de álgebras de Boole*** si $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$ para todos $x, y \in B_1$ y $h(-x) = -h(x)$ para todo $x \in B_1$. Un ***isomorfismo de álgebras de Boole*** es un homomorfismo de álgebras de Boole biyectivo. Dos álgebras de Boole se dicen ***isomorfas*** si existe un isomorfismo de álgebras de Boole entre ellas.

El subconjunto de todos los elementos no nulos de un álgebra de Boole B es denotado B^+. Un subconjunto D de B^+ es ***denso*** en B si para cada $b \in B^+$ existe $d \in D$ tal que $d \leq b$. B se dice ***separable*** si admite un conjunto denso y contable. Si B es separable, toda anticadena es contable, y por lo tanto B es ccc. Para toda álgebra de Boole A existe una única (salvo isomorfismo) álgebra de Boole completa B tal que A es subálgebra de B y A^+ es denso en B. El álgebra de Boole completa B es llamada la ***completación*** de A.

Si B es un álgebra de Boole, una ***medida finitamente aditiva*** (estrictamente positiva normalizada) sobre B es una función $m : B \to \mathbb{R}$ tal que $m(\mathbf{0}) = 0$, $m(a) > 0$ para todo $a > \mathbf{0}$, $m(\mathbf{1}) = 1$ y $m(a \vee b) = m(a) + m(b)$ para todos a y b disjuntos.

Si B es una σ-álgebra de Boole, una ***medida*** (σ-aditiva estrictamente positiva normalizada) sobre B es una función $m : B \to \mathbb{R}$ tal que $m(\mathbf{0}) = 0$,

$m(a) > 0$ para todo $a > \mathbf{0}$, $m(\mathbf{1}) = 1$ y $m\left(\bigvee_{n\in\omega} a_n\right) = \sum_{n\in\omega} m(a_n)$ para toda anticadena $\{a_n : n \in \omega\}$. El par (B, m) se denomina ***álgebra de medida***. Notar que si $m(a) = 1$, entonces

$$\begin{aligned} 1 = m(\mathbf{1}) = m(a \vee -a) &= m(a) + m(-a) = 1 + m(-a) \\ \Rightarrow m(-a) = 0 \Rightarrow -a &= \mathbf{0} \Rightarrow a = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Si A es una anticadena en un álgebra de medida, entonces para todo n sólo un número finito de elementos $a \in A$ tiene medida mayor o igual que $1/n$, y A es necesariamente contable, pues $A \setminus \{\mathbf{0}\} = \bigcup_{n\in\omega} \{a \in A : m(a) \geq 1/n\}$. Por eso toda álgebra de medida es ccc y completa.

Para estos y otros hechos básicos sobre álgebras de Boole se pueden consultar [18] y [23].

En sus lecturas de 1936-37, [33] y [34], von Neumann consideró dos álgebras de Boole particulares, las álgebras $\mathcal{C}$ y $\mathcal{M}$:

• Sea A el álgebra de Boole contable sin átomos (que es única salvo isomorfismo e infinita, pues toda álgebra de Boole finita tiene al menos un átomo), y sea $\mathcal{C}$ la completación de A. La representación estándar de A es el *álgebra de Cantor*, el álgebra de todos los conjuntos abiertos y cerrados del espacio de Cantor (es decir, del espacio 2^ω, con $2 := \{0, 1\}$ dotado de la topología discreta). Otra representación de A es el *álgebra de Lindenbaum* de la lógica proposicional. El álgebra $\mathcal{C}$ es llamada el *álgebra de Cohen*.

La descripción clásica de $\mathcal{C}$ es el álgebra cociente $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{M}$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es el conjunto de los borelianos de números reales y $\mathcal{M}$ el de los conjuntos magros (dos borelianos son equivalentes si su diferencia simétrica es un conjunto magro). Como $\mathcal{M}$ es un ***σ-ideal*** de $\mathbb{R}$ (es decir, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $X \subseteq Y \in \mathcal{M}$ implica $X \in \mathcal{M}$ y $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{M}$ implica $\bigcup_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{M}$), $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra. Como todo conjunto de Borel es equivalente a un conjunto abierto, los intervalos abiertos con extremos racionales forman un conjunto contable denso. Como $\mathcal{C}$ tiene un conjunto contable denso, toda anticadena en $\mathcal{C}$ es necesariamente contable, y por lo tanto $\mathcal{C}$ es ccc. De este modo $\mathcal{C}$ es un álgebra de Boole completa, y sin átomos.

$\mathcal{C}$ admite una medida finitamente aditiva pero no una medida. Probemos esta última afirmación razonando por el absurdo.

Supongamos que m es una medida sobre $\mathcal{C}$. Sea $D := \{d_n : n \in \omega\}$ un conjunto denso en $\mathcal{C}$. Veamos que para cada n existe $\mathbf{0} < x_n \leq d_n$ con

$$m(x_n) < \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Sea $n \in \omega$. Como $\mathcal{C}$ no tiene átomos, existen $a_1, b_1 \in \mathcal{C}$ no nulos y disjuntos tales que $d_n = a_1 \vee b_1$. Por el mismo motivo, existen $a_2, b_2 \in \mathcal{C}$ no nulos y disjuntos tales que $b_1 = a_2 \vee b_2$, y por lo tanto $d_n = a_1 \vee a_2 \vee b_2$. Siguiendo así, existen $a_1, ..., a_{2^{n+3}} \in \mathcal{C}$ no nulos y disjuntos dos a dos tales que $d_n = \bigvee_{k=1}^{2^{n+3}} a_k$, lo que implica que existe $1 \leq k \leq 2^{n+3}$ tal que

$$m(a_k) \leq \frac{m(d_n)}{2^{n+3}} \leq \frac{1}{2^{n+3}} < \frac{1}{2^{n+2}},$$

y se toma $x_n := a_k$.

Luego, si $x := \bigvee_n x_n$ e $y := -x$, resulta $y > \mathbf{0}$ pues

$$m(x) \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x < \mathbf{1},$$

pero ningún d_n está debajo de y, pues

$$d_n \leq y \Rightarrow \mathbf{0} < x_n \leq x \wedge d_n \leq x \wedge y = \mathbf{0},$$

lo que contradice la densidad de D.

- $\mathcal{M}$ es el álgebra cociente de conjuntos de Borel en el intervalo $[0,1]$ módulo conjuntos nulos, es decir, conjuntos de medida de Lebesgue 0. $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra de Boole sin átomos que admite una medida, por lo tanto es ccc y completa.

Más allá de ser $\mathcal{C}$ y $\mathcal{M}$ álgebras de Boole completas, ccc y sin átomos, son diferentes (no son isomorfas), ya que $\mathcal{C}$ no admite una medida.

Entre otros, von Neumann introdujo la ley de distributividad débil, una propiedad algebraica que distingue a las álgebras $\mathcal{C}$ y $\mathcal{M}$.

En toda álgebra de Boole completa vale la ***ley de distributividad***

$$a \wedge \bigvee_{x \in X} b_x = \bigvee_{x \in X} (a \wedge b_x)$$

donde X es un conjunto arbitrario de índices.

Toda álgebra de Boole completa satisface la siguiente generalización de la ley de distributividad

$$\bigvee_{x \in X} a_x \wedge \bigvee_{y \in Y} b_y = \bigvee_{x \in X,\ y \in Y} (a_x \wedge b_y)$$

donde X e Y son conjuntos arbitrarios de índices.

Una ley distributiva general

$$\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} a_y^x = \bigvee_{f \in Y^X} \bigwedge_{x \in X} a_{f(x)}^x \tag{1.1}$$

vale sólo cuando el álgebra es atómica. De hecho, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{M}$ no satisfacen el caso simple de distributividad infinita

$$\bigwedge_{n \in \omega} (a_0^n \vee a_1^n) = \bigvee_{f \in \{0,1\}^\omega} \bigwedge_{n \in \omega} a_{f(n)}^n. \tag{1.2}$$

Para caracterizar a las álgebras de medida, von Neumann formuló la siguiente ***ley de distributividad débil***:

$$\text{Si } (a_k^n)_{k \in \omega} \text{ es creciente para cada } n \in \omega, \text{ entonces} \tag{1.3}$$

$$\bigwedge_{n\in\omega}\bigvee_{k\in\omega} a_k^n = \bigvee_{f\in\omega^\omega}\bigwedge_{n\in\omega} a_{f(n)}^n.$$

Notemos que el lado izquierdo de (1.3) es siempre mayor o igual que el lado derecho en toda álgebra de Boole completa, pues

$$\begin{aligned}\bigvee_k a_k^n \geq a_{f(n)}^n \ \forall\ n \text{ y } f &\Rightarrow \bigwedge_n\bigvee_k a_k^n \geq \bigwedge_n a_{f(n)}^n \ \forall\ f\\ &\Rightarrow \bigwedge_n\bigvee_k a_k^n \geq \bigvee_f\bigwedge_n a_{f(n)}^n,\end{aligned}$$

y de manera similar se prueba que el lado izquierdo de (1.1) es siempre mayor o igual que el lado derecho en toda álgebra de Boole completa.

Veamos que toda álgebra de medida satisface (1.3):

Sea m una medida sobre B y sea $(a_k^n)_{k\in\omega}$ en B creciente para cada n. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\bigvee_k a_k^n = \mathbf{1}$ para todo n (afirmación que se probará en el Teorema 5.1). Para verificar (1.3) es suficiente encontrar para cada $\varepsilon > 0$ alguna f tal que $m(\bigwedge_n a_{f(n)}^n) \geq 1-\varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\bigvee_k a_k^n = \mathbf{1}$ resulta $\text{lím}_k\, m(a_k^n) = 1$. Luego, existe $f(n)\in\omega$ tal que $m(a_{f(n)}^n) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$. Como $(\bigwedge_{n=1}^k a_{f(n)}^n)_{k\in\omega}$ es decreciente,

$$\text{lím}_k\, m\left(\bigwedge_{n=1}^k a_{f(n)}^n\right) = m\left(\bigwedge_n a_{f(n)}^n\right).$$

Veamos que $m(\bigwedge_{n=1}^k a_{f(n)}^n) \geq 1-\varepsilon$ para todo k (que implica $m(\bigwedge_n a_{f(n)}^n) \geq 1-\varepsilon$). Tenemos que

$$\begin{aligned} m\left(\bigwedge_{n=1}^k a_{f(n)}^n\right) &\geq \sum_{n=1}^k m(a_{f(n)}^n) + 1 - k\\ &\geq \sum_{n=1}^k\left(1-\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) + 1 - k\\ &= 1-\varepsilon\sum_{n=1}^k\frac{1}{2^{n+2}} \geq 1-\varepsilon,\end{aligned}$$

donde usamos que la primera desiguadad vale pues, por ser m una medida, $m(\bigvee_{n=1}^k b_n) \leq \sum_{n=1}^k m(b_n)$ para todo $\{b_1,...,b_k\}\subseteq B$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} m\left(\bigvee_{n=1}^k b_n\right) \leq \sum_{n=1}^k m(b_n) \Leftrightarrow 1 - m\left(\bigvee_{n=1}^k b_n\right) &\geq 1 - \sum_{n=1}^k m(b_n)\\ \Leftrightarrow\quad m\left(\bigwedge_{n=1}^k -b_n\right) &\geq 1-\sum_{n=1}^k(1-m(-b_n))\\ &= \sum_{n=1}^k m(-b_n) + 1 - k. \qquad\blacksquare\end{aligned}$$

A diferencia de $\mathcal{M}$, el álgebra $\mathcal{C}$ no es débilmente distributiva. Para probar esa afirmación tomemos un conjunto $\{d_n : n \in \omega\}$ denso en $\mathcal{C}$. Para cada n podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente $(a_k^n)_{k\in\omega}$ con $\bigvee_k a_k^n = \mathbf{1}$ tal que $d_n \nleq a_k^n$ para todo k pues, como $\mathcal{C}$ no tiene átomos, existe $b_0 \in \mathcal{C}^+$ tal que $b_0 < d_n$. Luego,

$$\mathbf{0} < b_0 = d_n \wedge b_0 \Rightarrow d_n \nleq -b_0 =: a_0^n.$$

Por el mismo motivo, existe $b_1 \in \mathcal{C}^+$ tal que $b_1 < b_0$. Luego,

$$\mathbf{0} < b_1 = d_n \wedge b_1 \Rightarrow d_n \nleq -b_1 =: a_1^n.$$

Siguiendo así se define $(a_k^n)_{k\in\omega}$ estrictamente creciente con $d_n \nleq a_k^n$ para todo k usando recursión.

Ahora, si $f \in \omega^\omega$ es arbitraria, tenemos $a_f := \bigwedge_n a_{f(n)}^n = \mathbf{0}$ pues sino existiría algún $d_n \leq a_f$, lo que es imposible, y por lo tanto el lado izquierdo de (1.3) es $\mathbf{1}$ y el derecho es $\mathbf{0}$. ∎

Finalizamos esta sección recordando que *toda álgebra de medida es completa, débilmente distributiva y ccc* (y por lo tanto el problema de von Neumann consiste en saber si vale la afirmación recíproca).

2. El método de Maharam

La primera observación de Maharam en [20] fue que para probar la distributividad débil y la ccc no se necesita la existencia de una medida sobre B, basta una propiedad más débil, la existencia de una *submedida continua*. Luego, como toda medida es una submedida continua y toda submedida continua implica la distributividad débil y la ccc, el problema de von Neumann se divide naturalmente en dos. Por otro lado, una submedida continua induce una distancia y ésta a su vez, por supuesto, una topología. Es posible definir en toda σ-álgebra de Boole una topología de manera puramente algebraica, es decir, valiéndose únicamente de las operaciones inducidas por el orden parcial del álgebra, la denominada *topología secuencial*. Tal topología coincide con la inducida por una submedida continua (en caso de existir) y la metrizabilidad del espacio topológico dado por la topología secuencial implica la existencia de una submedida continua.

Para motivar la técnica introducida por Maharam, consideremos un álgebra de medida B con medida m. Para cualesquiera $a, b \in B$, sea

$$d(a, b) := m(a \vartriangle b),$$

donde $a \vartriangle b$ es la ***diferencia simétrica*** $(a-b) \vee (b-a)$ (con $a-b := a \wedge -b$).

Veamos que d resulta ser una distancia sobre B.

- $d(a, b) \geq 0$: Vale pues m es no negativa.
- $d(a, a) = 0$: Vale pues $a \vartriangle a = \mathbf{0}$.
- $a \neq b \Rightarrow d(a, b) > 0$: Basta ver que $a \vartriangle b > \mathbf{0}$. Supongamos que $a \vartriangle b = \mathbf{0}$.

Luego,

$$\begin{aligned} a \vartriangle b = \mathbf{0} &\Rightarrow (a \wedge -b) \vee (-a \wedge b) = \mathbf{0} \Rightarrow a \wedge -b = \mathbf{0} \text{ y } -a \wedge b = \mathbf{0}. \\ a \wedge -b = \mathbf{0} &\Rightarrow (a \wedge -b) \vee b = \mathbf{0} \vee b = b \Rightarrow (a \vee b) \wedge (-b \vee b) = b \\ &\Rightarrow a \vee b = b \Rightarrow a \leq b, \end{aligned}$$

y de manera similar se prueba que $-a \wedge b = \mathbf{0} \Rightarrow b \leq a$. Por lo tanto $a = b$, lo que es absurdo.

- $d(a, b) = d(b, a)$: Vale pues $a \vartriangle b = b \vartriangle a$.
- $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$: Basta ver que $a \vartriangle c \leq (a \vartriangle b) \vee (b \vartriangle c)$, pues en ese caso

$$m(a \vartriangle c) \leq m((a \vartriangle b) \vee (b \vartriangle c)) \leq m(a \vartriangle b) + m(b \vartriangle c).$$

Tenemos que

$$a \vartriangle c \leq (a \vartriangle c) \vee (b \wedge -(a \vee c)) \vee (-b \wedge a \wedge c) = (a \vartriangle b) \vee (b \vartriangle c)$$

(donde la última igualdad se puede deducir a partir de un diagrama de Venn).

■

Vamos ahora a la primera observación de Maharam. Si B es una σ-álgebra de Boole, una función $m : B \to \mathbb{R}$ es una ***submedida continua*** si:
(a) $m(\mathbf{0}) = 0$, $m(a) > 0$ para $a > \mathbf{0}$ y $m(\mathbf{1}) = 1$,
(b) $m(a) \leq m(b)$ si $a \leq b$,
(c) $m(a \vee b) \leq m(a) + m(b)$ y
(d) $\lim_n m(a_n) = 0$ para toda sucesión decreciente $(a_n)_{n\in\omega}$ con $\bigwedge_n a_n = 0$.

Siguiendo a Balcar y a Jech [4], llamaremos a una submedida continua una ***submedida de Maharam***, y a una σ-álgebra de Boole un ***álgebra de Maharam*** si tiene una submedida de Maharam.

Proposición 2.1. Toda álgebra de Maharam satisface la ccc y es débilmente distributiva.

Demostración. Para la ccc, afirmamos que para todo $\varepsilon > 0$, existen sólo finitos elementos disjuntos dos a dos cuya medida es mayor o igual a ε. Supongamos que eso no sucede. Luego, existe una anticadena infinita $(a_n)_{n\in\omega}$ tal que $m(a_n) \geq \varepsilon$ para todo n. Sea $b_n := \bigvee_{k\geq n} a_k$ para cada n. Entonces, $(b_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente. Veamos que $(b_n)_{n\in\omega}$ tiene ínfimo nulo.

Sea $x \in B$ tal que $x \leq b_n$ para todo n. Luego,

$$\begin{aligned} x \wedge a_n \leq b_{n+1} \wedge a_n = \left(\bigvee_{k\geq n+1} a_k\right) \wedge a_n = \mathbf{0} \ \ \forall\, n \Rightarrow x \wedge a_n = \mathbf{0} \ \ \forall\, n \\ \Rightarrow x \leq -a_n \ \ \forall\, n \Rightarrow x \leq \bigwedge_{k\geq n} -a_k = -\bigvee_{k\geq n} a_k = -b_n \ \ \forall\, n \\ \Rightarrow x \leq b_0 \wedge -b_0 = \mathbf{0} \Rightarrow \bigwedge_n b_n = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(b_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente con ínfimo nulo tal que $m(b_n) \geq m(a_n) \geq \varepsilon$ para todo n, lo que contradice la continuidad de m.

En cuanto a la distributividad débil, la prueba es la misma que para una medida. ■

Queda entonces dividido en dos el problema de von Neumann:

Problema 1. ¿Toda álgebra de Maharam es un álgebra de medida?

Problema 2. ¿Toda álgebra de Boole completa, débilmente distributiva y ccc es un álgebra de Maharam?

El primer problema fue estudiado en el Análisis Funcional y es conocido como ***problema de la medida de control***, ver [7] o [15], volumen 3 (lo abordaremos en la siguiente sección). El segundo problema, el ***problema de von Neumann-Maharam***, dará lugar a un nuevo problema por determinado motivo tratado a continuación y, el nuevo problema surgido, el problema 3 o ***problema de la consistencia***, será analizado en las secciones cuarta y octava.

Antes de pasar al método de Maharam, presentamos otra de sus observaciones de [20], que aparece para responder (y modificar) el segundo problema.

El orden de la recta real es el único orden total, salvo isomorfismo, que es completo (satisface el axioma de completitud o del supremo), denso (si $x < y$ existe z tal que $x < z < y$), sin extremos (no hay ni primer ni último elemento) y separable (tiene un subconjunto denso contable). Como consecuencia, satisface la condición de la cadena contable (ccc), es decir, toda colección disjunta de intervalos abiertos es contable. Un problema de Suslin de 1920 ([27]) pregunta si todo orden total completo, denso, sin extremos y ccc es separable (y por lo tanto si es isomorfo a la recta real). El problema no se resolvió hasta la década de 1960, cuando se estableció que es indecidible: es a la vez consistente e independiente de los axiomas ZFC de la teoría de conjuntos. Ver [11], [26] y [29].

Una *línea o recta de Suslin* es un orden total completo, denso, sin extremos y ccc que no tiene un subconjunto contable denso (un contraejemplo al problema de Suslin). Un *árbol de Suslin* es un ω_1-árbol (o árbol de altura ω_1) sin cadenas y anticadenas no contables. Un ***álgebra de Suslin*** es un álgebra de Boole completa, sin átomos y ccc que satisface la (ω, ω)-ley de distributividad (es decir, la ley de distributividad (1.1) con $X = Y = \omega$), y por lo tanto la ley de distributividad débil.

Una recta de Suslin, un árbol de Suslin y un álgebra de Suslin se pueden construir uno a partir del otro (ver [13], [19] o [22] para detalles).

Maharam mostró que un álgebra de Suslin no admite una submedida continua. Para ver esto, sea B un álgebra de Suslin y sea m una submedida continua sobre B. Primero afirmamos que para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$B_\varepsilon^+ := \{a \in B^+ : m(a) < \varepsilon\}$$

es denso en B. De lo contrario, uno podría encontrar una sucesión decreciente $(a_n)_{n\in\omega}$ con $\bigwedge_n a_n = 0$ y $m(a_n) \geq \varepsilon$ (contradiciendo la continuidad de m) de la siguiente manera.

Si B_ε^+ no es denso en B, existe $\tilde{a}_1 \in B^+$ tal que $a \nleq \tilde{a}_1$ para todo $a \in B_\varepsilon^+$. En particular, $\tilde{a}_1 \notin B_\varepsilon$ (es decir, $m(\tilde{a}_1) \geq \varepsilon$). Como B no tiene átomos, existe $\tilde{a}_2 \in B^+$ tal que $\tilde{a}_2 < \tilde{a}_1$. Luego, $\tilde{a}_2 \notin B_\varepsilon^+$. Siguiendo así se construye una sucesión estrictamente decreciente $(\tilde{a}_n)_{n\in\omega} \subseteq B^+$ tal que $m(\tilde{a}_n) \geq \varepsilon$. Sean $x := -\bigwedge_n \tilde{a}_n$ y $a_n := \tilde{a}_n \wedge x$ para cada n. Como $\tilde{a}_{n+1} < \tilde{a}_n$, resulta

$$a_{n+1} = \tilde{a}_{n+1} \wedge x \leq \tilde{a}_n \wedge x = a_n,$$

así que $(a_n)_{n\in\omega}$ es decreciente. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = a_n = \tilde{a}_n \wedge x &= \tilde{a}_n \wedge -\bigwedge_k \tilde{a}_k \\ &= \tilde{a}_n \wedge \bigvee_k -\tilde{a}_k = \bigvee_k (\tilde{a}_n \wedge -\tilde{a}_k) \\ &\Rightarrow \mathbf{0} = \tilde{a}_n \wedge -\tilde{a}_k \ \forall\ k, \end{aligned}$$

lo que es absurdo, pues

$$\mathbf{0} = \tilde{a}_n \wedge -\tilde{a}_{n+1} \Leftrightarrow \tilde{a}_n \leq \tilde{a}_{n+1},$$

y se sabe que $\tilde{a}_{n+1} < \tilde{a}_n$. Luego, $a_n > \mathbf{0}$ para todo n. Entonces,

$$\mathbf{0} < a_n = \tilde{a}_n \wedge x \leq \tilde{a}_n \Rightarrow a_n \notin B_\varepsilon^+ \Rightarrow m(a_n) \geq \varepsilon.$$

Por último,

$$\bigwedge_n a_n = \bigwedge_n (\tilde{a}_n \wedge x) = \left(\bigwedge_n \tilde{a}_n\right) \wedge x = \left(\bigwedge_n \tilde{a}_n\right) \wedge \left(-\bigwedge_n \tilde{a}_n\right) = \mathbf{0}$$

(notar que si ya se tenía $\bigwedge_n \tilde{a}_n = \mathbf{0}$, resulta $x = 1$, y por lo tanto $a_n = \tilde{a}_n$).

Entonces, para cada n existe una anticadena maximal A_n en B tal que $m(a) < 1/n$ para todo $a \in A_n$ (donde se utiliza el Lema de Zorn). Afirmamos que, por la (ω, ω)-ley de distributividad, existe algún $b > \mathbf{0}$ tal que para todo n, $b \leq a$ para algún $a \in A_n$.

Como B es ccc, A_n es contable. Luego, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A_n = \{a_m^n : m \in \omega\}$. Entonces, por la (ω, ω)-distributividad, resulta $\bigwedge_n \bigvee_m a_m^n = \bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n$. Luego, si fuera $\mathbf{0} < \bigwedge_n \bigvee_m a_m^n$, tendríamos $\mathbf{0} < \bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n$, equivalente a que exista $f \in \omega^\omega$ tal que $\mathbf{0} < \bigwedge_n a_{f(n)}^n$, y llamando $b := \bigwedge_n a_{f(n)}^n$, se tendría $b \in B^+$ tal que $b \leq a_{f(n)}^n \in A_n$ para todo n.

Veamos que $\mathbf{0} < \bigwedge_n \bigvee_m a_m^n$. Afirmamos que $\bigvee_m a_m^n = \bigvee A_n = \mathbf{1}$ para todo n. Sea $n \in \omega$. Si $b_n := -\bigvee A_n$, resulta $b_n \wedge a = \mathbf{0}$ para todo $a \in A_n$. Entonces, por la maximalidad de A_n, resulta $b_n = \mathbf{0}$ o $m(b_n) \geq 1/n$, pero lo segundo es imposible, pues en ese caso, como B no tiene átomos, existirían $c_1^n, \ldots, c_{n+1}^n \in B^+$ disjuntos dos a dos tales que $b_n = \bigvee_{k=1}^{n+1} c_k^n$, y por lo tanto habría un k tal que

$$m(c_k^n) \leq \frac{m(b_n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

que implicaría que $A_n \cup \{c_k^n\}$ fuera una anticadena de elementos de medida menor que $1/n$ tal que $A_n \subsetneq A_n \cup \{c_k^n\}$, lo que es absurdo.

Se sigue que $0 < m(b) < 1/n$ para todo n, una contradicción. ■

De este modo un álgebra de Suslin es un contraejemplo al problema de von Neumann-Maharam, y se modifica tal problema de la siguiente manera:

Problema 3. ¿Es consistente que toda álgebra de Boole completa, débilmente distributiva y ccc es un álgebra de Maharam?

Ahora introduciremos el método de Maharam. Sea B una σ-álgebra de Boole que tiene una submedida de Maharam m. Luego, $d(x, y) := m(x \triangle y)$ es una métrica sobre B (hecho que se prueba como en el caso en el cual B es un álgebra de medida), para cada $a \in B$ la función $T^a(x) := a \triangle x$ es una isometría (pues $d(x \triangle a, y \triangle a) = d(x, y)$), $(B, \triangle, \mathbf{0})$ es un grupo abeliano y d es una métrica invariante sobre este grupo, es decir, $d(x, y) = d(x \triangle y, \mathbf{0})$.

Veamos algunas propiedades que verifica el espacio topológico inducido por d.

• La topología métrica sobre B está determinada por los entornos de $\mathbf{0}$ y es invariante bajo las traslaciones T^a:

Basta ver que $B(a,r) = T^a(B(\mathbf{0},r))$. Como

$$d(x,\mathbf{0}) = d(T^a(x), T^a(\mathbf{0})) = d(T^a(x), a)$$

y $(T^a)^{-1} = T^a$ (pues $a \vartriangle a \vartriangle x = x$), tenemos que

$$\begin{aligned} B(\mathbf{0},r) &= \{x \in B : d(x,\mathbf{0}) < r\} \\ &= \{x \in B : T^a(x) \in B(a,r)\} \\ &= \{x \in B : x \in T^a(B(a,r))\} \\ &= T^a(B(a,r)), \end{aligned}$$

y por lo tanto $B(a,r) = T^a(B(\mathbf{0},r))$. ■

• Las operaciones $\vee$, $\wedge$ y $\vartriangle$ son continuas:

Continuidad de $\vee$:

En $B \times B$ consideramos

$$d((a_1,b_1),(a_2,b_2)) := d(a_1,a_2) + d(b_1,b_2) = m(a_1 \vartriangle a_2) + m(b_1 \vartriangle b_2).$$

Sean $((x_n,y_n))_{n\in\omega}$ en $B \times B$ y $(x,y) \in B \times B$ tales que

$$\lim_n d((x_n,y_n),(x,y)) = 0.$$

Queremos ver que $\lim_n d(x_n \vee y_n, x \vee y) = 0$. Tenemos que

$$\lim_n d((x_n,y_n),(x,y)) = 0 \Leftrightarrow \lim_n m(x_n \vartriangle x) = \lim_n m(y_n \vartriangle y) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} d(x_n \vee y_n, x \vee y) &= m((x_n \vee y_n) \vartriangle (x \vee y)) \\ &= m(((x_n \vee y_n) \wedge (-x \wedge -y)) \vee ((x \vee y) \wedge (-x_n \wedge -y_n))) \\ &= m((x_n \wedge -x \wedge -y) \vee (y_n \wedge -x \wedge -y) \vee \\ &\quad \vee (x \wedge -x_n \wedge -y_n) \vee (y \wedge -x_n \wedge -y_n)) \\ &\leq m((x_n \wedge -x) \vee (y_n \wedge -y) \vee (x \wedge -x_n) \vee (y \wedge -y_n)) \\ &= m((x_n \vartriangle x) \vee (y_n \vartriangle y)) \\ &\leq m(x_n \vartriangle x) + m(y_n \vartriangle y) \to 0 \ (n \to +\infty). \end{aligned}$$

Continuidad de $\wedge$:

Veamos primero que $- : B \to B$ dada por $-(x) = -x$ es continua.

Sean $(x_n)_{n\in\omega}$ en B y $x \in B$ tales que $\lim_n d(x_n,x) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} d(-x_n,-x) &= m(-x_n \vartriangle -x) = m((-x_n \wedge x) \vee (-x \wedge x_n)) \\ &= m(x_n \vartriangle x) = d(x_n,x) \to 0 \ (n \to +\infty). \end{aligned}$$

Luego, $x \wedge y = -(-x \vee -y)$ es continua ($\wedge = - \circ \vee \circ (- \times -)$).

Continuidad de $\triangle$:
Resulta $\triangle = \vee \circ ((\wedge \circ (id \times -)), (\wedge \circ (- \times id)))$. ■

• $(B, \triangle, \mathbf{0})$ es un grupo topológico:
Resta ver que $x \mapsto x^{-1}$ es continua, donde $x^{-1} = x$ pues $x \triangle x = \mathbf{0}$, pero claramente la identidad lo es. ■

Resulta ser posible definir algebraicamente una topología en cualquier σ-álgebra de Boole B, y la existencia de una submedida de Maharam sobre B está relacionada con propiedades del espacio topológico así obtenido.

Sea B una σ-álgebra de Boole. Decimos que una sucesión $(a_n)_{n\in\omega}$ en B ***converge algebraicamente*** a $a \in B$, y en ese caso escribimos $\lim_n a_n = a$, si

$$\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = a,$$

donde

$$\limsup_n a_n := \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_k, \ \liminf_n a_n := \bigvee_n \bigwedge_{k\geq n} a_k$$

(notar que $\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$ pues, para cada n y cada m, $\bigwedge_{k\geq n} a_k \leq a_{n+m} \leq \bigvee_{k\geq m} a_k$). Equivalentemente, definimos $\lim_n a_n = \mathbf{0}$ si existe una sucesión decreciente $(b_n)_{n\in\omega}$ con $\bigwedge_n b_n = 0$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo n. Entonces, $\lim_n a_n = a$ si $\lim_n (a_n \triangle a) = \mathbf{0}$.

Antes de probar tal equivalencia, enunciamos y demostramos algunas propiedades básicas de la convergencia algebraica (más detalles en [20] y [32]).

(a) Si $a_n = a$ para todo n entonces $\lim_n a_n = a$.

(b) Si $(a_n)_{n\in\omega}$ converge algebraicamente a a y π es una permutación de ω entonces $(a_{\pi(n)})_{n\in\omega}$ también converge algebraicamente a a:

Basta ver que $\limsup_n a_{\pi(n)} \leq \limsup_n a_n$ y $\liminf_n a_n \leq \liminf_n a_{\pi(n)}$, pues en ese caso resulta

$$\limsup_n a_{\pi(n)} \leq \limsup_n a_n = a = \liminf_n a_n \leq \liminf_n a_{\pi(n)},$$

y como $\liminf_n a_{\pi(n)} \leq \limsup_n a_{\pi(n)}$ obtenemos

$$\limsup_n a_{\pi(n)} = \liminf_n a_{\pi(n)} = a.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\limsup_n a_{\pi(n)} \leq \limsup_n a_n &\Leftrightarrow \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_{\pi(k)} \leq \bigwedge_m \bigvee_{j\geq m} a_j \\ &\Leftrightarrow \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_{\pi(k)} \leq \bigvee_{j\geq m} a_j \ \ \forall\ m.\end{aligned}$$

Sea $m \in \omega$. Sea n_0 tal que $k \geq n_0 \Rightarrow \pi(k) \geq m$ (existe tal n_0 por ser π una biyección). Luego,

$$\bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_{\pi(k)} \leq \bigvee_{k\geq n_0} a_{\pi(k)} \leq \bigvee_{j\geq m} a_j.$$

Por otro lado,

$$\liminf_n a_n \leq \liminf_n a_{\pi(n)} \Leftrightarrow \bigvee_m \bigwedge_{j\geq m} a_j \leq \bigvee_n \bigwedge_{k\geq n} a_{\pi(k)}$$
$$\Leftrightarrow \bigwedge_{j\geq m} a_j \leq \bigvee_n \bigwedge_{k\geq n} a_{\pi(k)} \quad \forall\, m.$$

Sea $m \in \omega$. Sea n_0 tal que $k \geq n_0 \Rightarrow \pi(k) \geq m$. Luego,

$$\bigwedge_{j\geq m} a_j \leq \bigwedge_{k\geq n_0} a_{\pi(k)} \leq \bigvee_n \bigwedge_{k\geq n} a_{\pi(k)}.$$

■

(c) $\lim_n a_n = \mathbf{0}$ si y sólo si $\limsup_n a_n = \mathbf{0}$.

(d) Si los a_n son disjuntos dos a dos entonces $\lim_n a_n = \mathbf{0}$:
Usamos la propiedad (c). Sea $b \in B$ tal que $b \leq \bigvee_{k\geq n} a_k$ para todo n. Luego,

$$b \wedge a_n \leq \left(\bigvee_{k\geq n+1} a_k\right) \wedge a_n = \mathbf{0} \ \Rightarrow b \wedge a_n = \mathbf{0} \ \Rightarrow b \leq -a_n$$

para todo n. Entonces,

$$b \leq \left(\bigvee_k a_k\right) \wedge \left(\bigwedge_k -a_k\right) = \mathbf{0}.$$

■

(e) $\limsup_n -a_n = -\liminf_n a_n$:

$$\limsup_n -a_n = \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} -a_k = \bigwedge_n - \bigwedge_{k\geq n} a_k$$
$$= -\bigvee_n \bigwedge_{k\geq n} a_k = -\liminf_n a_n.$$

■

(f) $\liminf_n -a_n = -\limsup_n a_n$:
Vale por (e) aplicado a la sucesión $(-a_n)_{n\in\omega}$. ■

(g) $\limsup_n (a_n \vee b_n) = \limsup_n a_n \vee \limsup_n b_n$:

$$\begin{aligned}
\limsup_n (a_n \vee b_n) &= \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} (a_k \vee b_k) \\
&= \bigwedge_n \left(\left(\bigvee_{k\geq n} a_k \right) \vee \left(\bigvee_{k\geq n} b_k \right) \right) \\
&= \left(\bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_k \right) \vee \left(\bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} b_k \right) \\
&= \limsup_n a_n \vee \limsup_n b_n .
\end{aligned}$$

■

(h) $\liminf_n (a_n \wedge b_n) = \liminf_n a_n \wedge \liminf_n b_n$:
Por (g) sabemos que

$$\limsup_n (-a_n \vee -b_n) = \limsup_n -a_n \vee \limsup_n -b_n .$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\limsup_n (-a_n \vee -b_n) &= \limsup_n -a_n \vee \limsup_n -b_n \\
-\limsup_n (-a_n \vee -b_n) &= -\left(\limsup_n -a_n \vee \limsup_n -b_n \right) \\
\liminf_n -(-a_n \vee -b_n) &= \left(-\limsup_n -a_n \right) \wedge \left(-\limsup_n -b_n \right) \\
\liminf_n (a_n \wedge b_n) &= \liminf_n a_n \wedge \liminf_n b_n
\end{aligned}$$

■

(i) $\limsup_n (a_n \wedge b_n) = \limsup_n a_n \wedge \limsup_n b_n$:

$$\begin{aligned}
\limsup_n (a_n \wedge b_n) &= \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} (a_k \wedge b_k) \\
&= \bigwedge_n \left(\left(\bigvee_{k\geq n} a_k \right) \wedge \left(\bigvee_{k\geq n} b_k \right) \right) \\
&= \left(\bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_k \right) \wedge \left(\bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} b_k \right) \\
&= \limsup_n a_n \wedge \limsup_n b_n .
\end{aligned}$$

■

(j) $\liminf_n (a_n \vee b_n) = \liminf_n a_n \vee \liminf_n b_n$:

Por (i) sabemos que

$$\limsup_n (-a_n \wedge -b_n) = \limsup_n -a_n \wedge \limsup_n -b_n.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\limsup_n (-a_n \wedge -b_n) &= \limsup_n -a_n \wedge \limsup_n -b_n \\
-\limsup_n (-a_n \wedge -b_n) &= -\left(\limsup_n -a_n \wedge \limsup_n -b_n\right) \\
\liminf_n -(-a_n \wedge -b_n) &= \left(-\limsup_n -a_n\right) \vee \left(-\limsup_n -b_n\right) \\
\liminf_n (a_n \vee b_n) &= \liminf_n a_n \vee \liminf_n b_n
\end{aligned}$$

■

(k) Si $\lim_n a_n = a$ y $\lim_n b_n = b$ entonces $\lim_n -a_n = -a$, $\lim_n (a_n \vee b_n) = a \vee b$, $\lim_n (a_n \wedge b_n) = a \wedge b$ y $\lim_n (a_n \vartriangle b_n) = a \vartriangle b$:

• $\lim_n -a_n = -a$:

$$\begin{aligned}
\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = a \Rightarrow -\limsup_n a_n &= -\liminf_n a_n = -a \\
\liminf_n -a_n &= \limsup_n -a_n = -a.
\end{aligned}$$

• $\lim_n (a_n \vee b_n) = a \vee b$:

$$\begin{aligned}
\limsup_n a_n \vee \limsup_n b_n = a \vee b &= \liminf_n a_n \vee \liminf_n b_n \\
\limsup_n (a_n \vee b_n) = a \vee b &= \liminf_n (a_n \vee b_n).
\end{aligned}$$

• $\lim_n (a_n \wedge b_n) = a \wedge b$:

$$\begin{aligned}
\limsup_n a_n \wedge \limsup_n b_n = a \wedge b &= \liminf_n a_n \wedge \liminf_n b_n \\
\limsup_n (a_n \wedge b_n) = a \wedge b &= \liminf_n (a_n \wedge b_n).
\end{aligned}$$

• $\lim_n (a_n \vartriangle b_n) = a \vartriangle b$:

$$\begin{aligned}
\limsup_n (a_n \vartriangle b_n) &= \limsup_n ((a_n - b_n) \vee (b_n - a_n)) \\
&= \limsup_n (a_n - b_n) \vee \limsup_n (b_n - a_n) \\
&= \limsup_n (a_n \wedge -b_n) \vee \limsup_n (b_n \wedge -a_n) \\
&= \left(\limsup_n a_n \wedge \limsup_n -b_n\right) \vee \left(\limsup_n b_n \wedge \limsup_n -a_n\right) \\
&= (a \wedge -b) \vee (b \wedge -a) \\
&= a \vartriangle b,
\end{aligned}$$

y de manera similar se prueba que $\liminf_n (a_n \vartriangle b_n) = a \vartriangle b$. ■

Ahora sí, veamos que las nociones de convergencia son equivalentes. Para eso introducimos las siguientes notaciones:

• Notamos $a_n \to a$ si $\lim_n a_n = a$.

• Notamos $a_n \twoheadrightarrow a$ si existe $(b_n)_{n\in\omega}$ decreciente con $\bigwedge_n b_n = \mathbf{0}$ tal que $a_n \vartriangle a \leq b_n$ para todo n.

Queremos ver que $a_n \to a \;\Leftrightarrow\; a_n \twoheadrightarrow a$.

Caso $a = \mathbf{0}$:

$\Rightarrow$) Si $\mathbf{0} = \limsup_n a_n$, existe $(b_n)_{n\in\omega}$ decreciente con $\bigwedge_n b_n$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo n (basta tomar $b_n := \bigvee_{k\geq n} a_k$).

$\Leftarrow$) Sea $(b_n)_{n\in\omega}$ decreciente con $\bigwedge_n b_n = \mathbf{0}$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo n. Luego,

$$\limsup_n a_n = \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_k \leq \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} b_k = \bigwedge_n b_n = \mathbf{0},$$

entonces $\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = \mathbf{0}$.

Caso general:

Notemos que $a_n \to a \Leftrightarrow a_n \vartriangle a \to \mathbf{0}$ (basta aplicar en ambos casos la diferencia simétrica con a). Luego,

$$a_n \to a \Leftrightarrow a_n \vartriangle a \to \mathbf{0} \Leftrightarrow a_n \vartriangle a \twoheadrightarrow \mathbf{0} \Leftrightarrow a_n \twoheadrightarrow a,$$

donde la segunda equivalencia vale por el caso anterior. ■

Decimos que un conjunto $F \subseteq B$ es ***cerrado*** si $\lim_n a_n \in F$ para toda sucesión $(a_n)_{n\in\omega}$ en F que converja algebraicamente. La ***topología secuencial*** sobre B es la topología τ así obtenida. Una sucesión $(a_n)_{n\in\omega}$ converge en τ a un elemento a si y sólo si toda subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\omega}$ de $(a_n)_{n\in\omega}$ tiene una subsucesión $(a_{n_{k_j}})_{j\in\omega}$ que converge algebraicamente a a. El espacio (B,τ) es T_1 (todo subconjunto con un solo elemento es cerrado) y si $A \subseteq B$, la clausura $cl(A)$ de A se obtiene de la siguiente manera:

Sea

$$u(A) := \{x \in B : x \text{ es límite en } \tau \text{ de una sucesión de } A\}.$$

Luego,

$$cl(A) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} u^{(\alpha)}(A),$$

donde $u^{(\alpha+1)} := u(u^{(\alpha)}(A))$ y, si α es un ordinal límite, $u^{(\alpha)} := \bigcup_{\beta<\alpha} u^{(\beta)}(A)$ (detalles en [3]). Maharam señaló que, si B es ccc y débilmente distributiva, $cl(A)$ es el conjunto de todos los límites de las sucesiones de A (volveremos sobre esto más adelante).

Las operaciones $\vee$, $\wedge$ y $\vartriangle$ no son necesariamente continuas como funciones de dos variables, pero sí lo son por separado en cada variable por las propiedades vistas de la convergencia algebraica (fácilmente se prueba que la preimagen de un subconjunto cerrado es cerrada). Como cada T^a es una traslación continua, (B,τ) es un espacio homogéneo (para todos $a, b \in B$ existe un homeomorfismo de B en B que manda a en b, $T^b \circ T^a$) y τ está determinada por los entornos de $\mathbf{0}$ (pues si U es un entorno de a, $T^a(U)$ lo es de $\mathbf{0}$, y viceversa).

Si B es un álgebra de Maharam y (B, d) es el espacio métrico con distancia $d(a, b) := m(a \vartriangle b)$, entonces la topología métrica y la topología secuencial τ coinciden. Probemos tal afirmación.

Sea $F \subseteq B$. Queremos ver que F es cerrado en (B, d) si y sólo si F es cerrado en (B, τ).

$\Rightarrow$) Sean $(a_n)_{n\in\omega}$ en F y $a \in B$ tales que $\lim_n a_n = a$. Luego, existe $(b_n)_{n\in\omega}$ decreciente con ínfimo nulo tal que $a_n \vartriangle a \leq b_n$ para todo n, y entonces $d(a_n, a) = m(a_n \vartriangle a) \leq m(b_n) \to 0$ $(n \to +\infty)$ por la continuidad de m, de donde se obtiene $a \in F$ pues F es cerrado en (B, d).

$\Leftarrow$) Sean $(a_n)_{n\in\omega}$ en F y $a \in B$ tales que $\lim_n d(a_n, a) = 0$. Luego,

$$
\begin{aligned}
m(a_n \vartriangle a) = d(a_n, a) \to 0 \Rightarrow \exists\ (a_{n_k})_{k\in\omega}\ /\ m(a_{n_k} \vartriangle a) &< \frac{1}{2^k}\ \forall\ k \\
\Rightarrow m\left(\limsup_k (a_{n_k} \vartriangle a)\right) &= m\left(\bigwedge_k \bigvee_{j\geq k} (a_{n_j} \vartriangle a)\right) \\
&\leq m\left(\bigvee_{j\geq k} (a_{n_j} \vartriangle a)\right) \leq \sum_{j\geq k} m(a_{n_j} \vartriangle a) \\
&\leq \sum_{j\geq k} \frac{1}{2^j}\ \forall\ k \\
\Rightarrow m\left(\limsup_k (a_{n_k} \vartriangle a)\right) &= 0 \\
\Rightarrow \limsup_k (a_{n_k} \vartriangle a) &= \mathbf{0} \\
\Rightarrow \lim_k a_{n_k} &= a \Rightarrow a \in F,
\end{aligned}
$$

pues F es cerrado en (B, τ). ■

Maharam demostró que, a la inversa, la metrizabilidad de τ es en sí misma suficiente para la existencia de una submedida de Maharam.

Teorema 2.2 (Maharam [20]). Un álgebra de Boole completa B es un álgebra de Maharam si y sólo si la topología secuencial sobre B es metrizable.

Para la demostración del teorema necesitamos un resultado de metrización de Kakutani. Un espacio topológico X es ***primero contable*** si todo $a \in X$ tiene una familia contable de entornos abiertos $\{U_n\}_{n\in\omega}$ tal que para todo entorno abierto V de a existe $n \in \omega$ tal que $U_n \subseteq V$.

Teorema 2.3 (Kakutani [14]). Si $(G, +, \mathbf{0})$ es un grupo abeliano topológico primero contable, entonces éste es metrizable y tiene una métrica invariante.

Demostración del Teorema 2.2. Sea τ la topología secuencial sobre B y asumamos que es metrizable. Sea d una métrica en B tal que su topología coincida con τ. Es fácil ver que si $\lim_n a_n = \mathbf{0}$ entonces $\lim_n d(a_n, \mathbf{0}) = 0$ y si $\lim_n d(a_n, \mathbf{0}) = 0$ entonces existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\omega}$ tal que $\lim_k a_{n_k} = \mathbf{0}$ (ver la demostración de la coincidencia de las topologías más arriba).

Afirmamos que $\triangle$ es continua (donde en $B \times B$ consideramos la métrica $d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) := d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)$, que induce la topología producto).

Veamos en primer lugar que $\triangle$ es continua en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Si $\triangle$ no es continua en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, existen una sucesión $((x_n, y_n))_{n\in\omega}$ y algún $\varepsilon > 0$ tales que $\lim_n d((x_n, y_n), (\mathbf{0}, \mathbf{0})) = 0$ y $d(x_n \triangle y_n, \mathbf{0}) \geq \varepsilon$ para todo n. Luego, existe una subsucesión $((x_{n_k}, y_{n_k}))_{k\in\omega}$ tal que $\lim_k x_{n_k} = \lim_k y_{n_k} = \mathbf{0}$, y por lo tanto $\lim_k (x_{n_k} \triangle y_{n_k}) = \mathbf{0}$, lo que es absurdo.

Sea ahora $(a, b) \in B \times B$ y veamos que $\triangle$ es continua en (a, b). Sea $((a_n, b_n))_{n\in\omega}$ en $B \times B$ tal que $\lim_n d((a_n, b_n), (a, b)) = 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
T^a \text{ y } T^b \text{ continuas} &\Rightarrow T^a \times T^b \text{ continua} \\
&\Rightarrow \lim_n d((T^a(a_n), T^b(b_n)), (T^a(a), T^b(b))) = 0 \\
&\Rightarrow \lim_n d((T^a(a_n), T^b(b_n)), (\mathbf{0}, \mathbf{0})) = 0 \\
&\Rightarrow \lim_n (T^a(a_n) \triangle T^b(b_n)) = \mathbf{0} \text{ (por el caso anterior)} \\
&\Rightarrow \lim_n ((a \triangle a_n) \triangle (b \triangle b_n)) = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \lim_n ((a_n \triangle b_n) \triangle (a \triangle b)) = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \lim_n (a_n \triangle b_n) = a \triangle b,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\triangle$ es continua en (a, b).

De este modo $(B, \triangle, \mathbf{0})$ es un grupo abeliano topológico primero contable (esto último por ser metrizable), y por el Teorema de Kakutani 2.3, τ es metrizable por una métrica invariante ρ, es decir, $\rho(x, y) = \rho(x \triangle y, \mathbf{0})$.

Definimos a continuación tres funciones de B en $\mathbb{R}$ que nos permitirán definir una submedida continua sobre B:

$$\begin{aligned}
\nu(x) &:= \rho(x, \mathbf{0}), \\
\mu(x) &:= \min(\nu(x), 1) \text{ y} \\
\tilde{m}(a) &:= \sup\{\mu(x) : x \leq a\}.
\end{aligned}$$

La función ν satisface

$$\nu(x \triangle y) \leq \nu(x) + \nu(y),$$

pues por la desigualdad triangular para ρ resulta

$$\nu(x \triangle y) = \rho(x \triangle y, \mathbf{0}) = \rho(x, y) \leq \rho(x, \mathbf{0}) + \rho(\mathbf{0}, y) = \nu(x) + \nu(y).$$

La función $\tilde{m}$ satisface las siguientes propiedades:

• $\tilde{m}(\mathbf{0}) = 0$:

$$\tilde{m}(\mathbf{0}) = \sup\{\mu(x) : x \leq \mathbf{0}\} = \mu(\mathbf{0}) = \min(\nu(\mathbf{0}), \mathbf{1}) = \min(\rho(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \mathbf{1}) = 0.$$

• $\tilde{m}(a) > \mathbf{0}$ para todo $a > \mathbf{0}$:

$$a > \mathbf{0} \Rightarrow \rho(a, \mathbf{0}) > 0 \Rightarrow \nu(a) > 0 \Rightarrow \mu(a) > 0 \Rightarrow \tilde{m}(a) > 0.$$

• $a \leq b \Rightarrow \tilde{m}(a) \leq \tilde{m}(b)$:

$$\begin{aligned}\{\mu(x) : x \leq a\} \subseteq \{\mu(x) : x \leq b\} &\Rightarrow \sup\{\mu(x) : x \leq a\} \subseteq \sup\{\mu(x) : x \leq b\} \\ &\Rightarrow \tilde{m}(a) \leq \tilde{m}(b).\end{aligned}$$

• $\tilde{m}(a \vee b) \leq \tilde{m}(a) + \tilde{m}(b)$:

Sea $x \leq a \vee b$. Veamos que $\mu(x) \leq \tilde{m}(a) + \tilde{m}(b)$ (luego se tendrá que $\tilde{m}(a \vee b) = \sup\{\mu(x) : x \leq a \vee b\} \leq \tilde{m}(a) + \tilde{m}(b)$).

Caso $a \wedge b = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}x \leq a \vee b \Rightarrow x = x \wedge (a \vee b) &= (x \wedge a) \vee (x \wedge b) = (x \wedge a) \vartriangle (x \wedge b) \\ &\Rightarrow \nu(x) \leq \nu(x \wedge a) + \nu(x \wedge b) \Rightarrow \mu(x) \leq \nu(x \wedge a) + \nu(x \wedge b).\end{aligned}$$

Ahora hay dos posibilidades:
(i) $\nu(x \wedge a), \nu(x \wedge b) \leq 1$:
$\mu(x) \leq \nu(x \wedge a) + \nu(x \wedge b) = \mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) \leq \tilde{m}(a) + \tilde{m}(b)$.
(ii) $\nu(x \wedge a) > 1$ o $\nu(x \wedge b) > 1$:
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\nu(x \wedge a) > 1$. Luego, $\mu(x) \leq 1 = \mu(x \wedge a) \leq \tilde{m}(a) \leq \tilde{m}(a) + \tilde{m}(b)$.
Caso general:

$$x \leq a \vee b = a \vee (b - a) \Rightarrow \mu(x) \leq \tilde{m}(a) + \tilde{m}(b - a) \leq \tilde{m}(a) + \tilde{m}(b),$$

donde usamos el caso anterior pues $a \wedge (b - a) = \mathbf{0}$.

• Continuidad de $\tilde{m}$:

Sea $(a_n)_{n\in\omega}$ en B decreciente con $\bigwedge_n a_n = \mathbf{0}$. Razonamos por el absurdo:

$$\tilde{m}(a_n) \not\to 0 \ (n \to +\infty) \Rightarrow \exists \ (a_{n_k})_{k\in\omega} \text{ y } \varepsilon > 0 \ / \ \tilde{m}(a_{n_k}) \geq \varepsilon \ \forall \ k,$$

y como para todo k existe $x_k \leq a_{n_k}$ tal que $\tilde{m}(a_{n_k}) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(x_k)$, resulta

$$\frac{\varepsilon}{2} < \mu(x_k) \leq \nu(x_k) \leq \nu(a_{n_k} - x_k) + \nu(a_{n_k}) \ \forall \ k,$$

donde usamos que $x_k = (x_k \vartriangle a_{n_k}) \vartriangle a_{n_k} = (a_{n_k} - x_k) \vartriangle a_{n_k}$.

Veamos ahora que $\lim_k \nu(a_{n_k} - x_k) = \lim_k \nu(a_{n_k}) = 0$ (lo que contradice que $\frac{\varepsilon}{2} < \nu(a_{n_k} - x_k) + \nu(a_{n_k})$ para todo k). Tenemos que

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\omega} \text{ decreciente con } \bigwedge_n a_n = \mathbf{0} &\Rightarrow (a_{n_k})_{k\in\omega} \text{ decreciente con } \bigwedge_k a_{n_k} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \lim_k a_{n_k} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \lim_k \rho(a_{n_k}, \mathbf{0}) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_k \nu(a_{n_k}) = 0,\end{aligned}$$

y de manera similar se prueba que $\lim_k \nu(a_{n_k} - x_k) = 0$, donde la sucesión que prueba que $\lim_k (a_{n_k} - x_k) = \mathbf{0}$ es $(a_{n_k})_{k\in\omega}$.

Finalmente, si definimos $m : B \to \mathbb{R}$ como $m(x) := \frac{1}{\tilde{m}(\mathbf{1})}\tilde{m}(x)$, se prueba fácilmente que m es una submedida continua sobre B. Luego, B es un álgebra de Maharam. ■

Investigando la topología secuencial sobre B, Maharam fue capaz de formular otra condición suficiente para la existencia de una submedida continua.

Teorema 2.4 (Maharam [20]). Un álgebra de Boole completa B ccc es un álgebra de Maharam si y sólo si
(i) B es débilmente distributiva, y
(ii) el espacio (B, τ) es primero contable.

Maharam probó el Teorema 2.4 usando las hipótesis para mostrar que $\triangle$ es continua, y luego aplicó el Teorema de Kakutani. Más adelante introduciremos una condición más débil que ser primero contable (la propiedad G_δ) y probaremos su suficiencia.

3. El problema de la medida de control

Horn y Tarski encontraron un problema relativo a ciertas condiciones de cadena, introducidas por ellos, vinculado al problema 1, resuelto por Thümmel varios años más tarde.

Por su parte, Kelley enunció una equivalencia para la existencia de medidas σ-aditivas que involucra medidas finitamente aditivas, y una condición algebraica equivalente a la existencia de éstas últimas, relacionada con el *número de intersección*, definido por él.

Kalton y Roberts dieron un problema equivalente al de la medida de control, en el cual aparecen las submedidas *exhaustivas* y las *uniformemente exhaustivas*, que resultó ser resuelto por Talagrand.

En [10], Horn y Tarski investigaron sistemáticamente medidas en álgebras de Boole, tanto σ-aditivas como finitamente aditivas. Presentaron en detalle el trabajo de von Neumann sobre álgebras de Boole e introdujeron la terminología que se utiliza (con algunas modificaciones) en la actualidad. Entre otras, las siguientes condiciones de cadena:

cc σ-acotada: (3.1)

Existe una descomposición $B^+ = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ tal que para todo n, S_n no contiene anticadenas de tamaño $n+2$.

cc σ-finita: (3.2)

Existe una descomposición $B^+ = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ tal que para todo n, S_n no contiene anticadenas infinitas.

Si B tiene una medida finitamente aditiva m entonces satisface (3.1) (basta tomar $S_n := \{a \in B : m(a) \geq \frac{1}{n+1}\}$). En particular (3.1) es una condición necesaria para que B sea un álgebra de medida. Toda álgebra de Maharam debe satisfacer la condición más débil (3.2) pues $B^+ = \bigcup_{n\in\omega} S_n$, donde $S_n := \{a \in B : m(a) \geq 1/n\}$, ya que si $(a_k)_{k\in\omega}$ en S_n es una anticadena infinita, la sucesión $(b_j)_{j\in\omega}$ definida por $b_j := \bigvee_{k\geq j} a_k$ es decreciente y tiene ínfimo nulo, lo que implica que $\lim_j m(b_j) = 0$, pero $m(b_j) \geq m(a_j) \geq 1/n$ para todo $j \in \omega$. Horn y Tarski se preguntaron si (3.1) es equivalente (3.2), problema relacionado al de la medida de control. En 2012 Thümmel probó que no lo son ([30]).

En [17], Kelley investigó las álgebras de Boole que tienen una medida finitamente aditiva, así como las álgebras de Boole completas con una medida σ-aditiva. Mostró que estas dos propiedades están relacionadas, y dio un caracterización algebraica de ambas. El Teorema 3.1 había sido conocido previamente por Pinsker.

Teorema 3.1 (Pinsker [16]; Kelley [17]). Un álgebra de Boole comple-

ta B admite una medida σ-aditiva si y sólo si
(i) B es débilmente distributiva, y
(ii) B admite una medida finitamente aditiva.

El principal resultado de Kelley es la siguiente caracterización de (ii):
Para cada sucesión finita $s = (a_1, ..., a_n)$ de elementos no necesariamente distintos de B^+, sea $k(s)$ el máximo tamaño de un subconjunto E de $\{1, ..., n\}$ tal que $\bigwedge_{j\in E} a_j > \mathbf{0}$, y sea $i(s) := \frac{k(s)}{n}$. Para $\varnothing \neq X \subseteq B^+$, el ***número de intersección*** de X es

$$\inf\{i(s) : s \text{ es una sucesión finita de } X\}.$$

Si m es una medida finitamente aditiva sobre B y

$$S_n := \left\{a \in B : m(a) \geq \frac{1}{n+1}\right\},$$

se tiene que el número de intersección de S_n es mayor o igual que $\frac{1}{n+1}$ (pues por la Proposición 1 de [17] resulta que el número de intersección de S_n es mayor o igual que $\inf\{m(a) : a \in S_n\}$).

Teorema 3.2 (Kelley [17]). Una condición necesaria y suficiente para que un álgebra de Boole admita una medida finitamente aditiva es que exista una descomposición $B^+ = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ tal que cada S_n tenga número de intersección positivo.

Como consecuencia, un álgebra de Boole completa B es un álgebra de medida si y sólo si B es débilmente distributiva y $B^+ = \bigcup_{n\in\omega} S_n$, de manera tal que cada S_n tenga número de intersección positivo.

Sean ahora $\mathbb{V}$ un espacio vectorial topológico metrizable y B una σ-álgebra de Boole. Una función $\mu : B \to \mathbb{V}$ es una ***medida vectorial*** si

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \mu(a_k) = \mu\left(\bigvee_n a_n\right)$$

para toda sucesión $(a_n)_{n\in\omega}$ de elementos disjuntos dos a dos. Una medida σ-aditiva m sobre B es una ***medida de control*** para μ si $\mu(a) = \mathbf{0}$ si y sólo si $m(a) = 0$ (ver [7]).

El problema de la medida de control equivale a la pregunta de si cada medida vectorial tiene una medida de control (dice Fremlin en [7], volumen 3, página 588: *The phrase 'control measure' derives, in fact, from none of the formulations above; it belongs to the theory of vector measures, as follows...*).

En [15], Kalton y Roberts encontraron una reformulación importante del problema de la medida de control. Una ***submedida*** en un álgebra de Boole B es una función $m : B \to \mathbb{R}$ que satisface:
(a) $m(\mathbf{0}) = 0$, $m(a) > 0$ para $a > \mathbf{0}$ y $m(\mathbf{1}) = 1$,

(b) $m(a) \leq m(b)$ si $a \leq b$, y
(c) $m(a \vee b) \leq m(a) + m(b)$.

Una submedida m en B es ***exhaustiva*** si $\lim_n m(a_n) = 0$ para toda sucesión $(a_n)_{n\in\omega}$ de elementos disjuntos dos a dos, y es ***uniformemente exhaustiva*** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \omega$ tal que no existen n elementos disjuntos $a_1, ..., a_n \in B$ con $m(a_i) \geq \varepsilon$ para todo $i = 1, ..., n$.

Toda submedida de Maharam es exhaustiva (ver la demostración de la Proposición 2.1) y toda medida es uniformemente exhaustiva. El resultado principal de [15] es el siguiente. Dos submedidas m y μ son ***equivalentes*** si $\lim_n m(a_n) = 0$ si y sólo si $\lim_n \mu(a_n) = 0$.

Teorema 3.3 (Kalton-Roberts [15]). Toda submedida uniformemente exhaustiva en un álgebra de Boole es equivalente a una medida finitamente aditiva.

Corolario 3.4. El problema de la medida de control es equivalente al siguiente enunciado:
Toda submedida exhaustiva en un álgebra de Boole es uniformemente exhaustiva. (3.3)

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que toda álgebra de Maharam es un álgebra de medida. Sea m una submedida exhaustiva en un álgebra de Boole B. B puede integrarse a un álgebra de Boole completa C de modo que m se extienda a una submedida de Maharam μ en C (ver [6]); C es la completación métrica de B. Por lo tanto C es un álgebra de Maharam, y por lo que asumimos tiene una medida λ. Como μ y λ son equivalentes (ver [7]), μ es uniformemente exhaustiva. Entonces lo es su restricción a B, y por lo tanto m es uniformemente exhaustiva.

$\Leftarrow$) Si B es un álgebra de Maharam con submedida de Maharam m, luego m es exhaustiva, y por lo tanto uniformemente exhaustiva por (3.3). Por el Teorema de Kalton-Roberts, B admite una medida finitamente aditiva, y por el Teorema (3.1) de Kelley, B es un álgebra de medida. ∎

En [28], Talagrand construye una submedida del álgebra de Cantor que es exhaustiva pero no uniformemente exhaustiva (y por lo tanto no es equivalente a una medida). Entonces, el problema 1 tiene una respuesta negativa: *existe un álgebra Maharam que no es un álgebra de medida.*

4. El problema de la consistencia (primera parte)

La línea de razonamiento iniciada por Maharam fue continuada en [3], lo que lleva a la siguiente modificación del Teorema 2.2 de Maharam:

Teorema 4.1 (Balcar-Glówczyński-Jech [3]). Si B es un álgebra de Boole completa y ccc, B es un álgebra de Maharam si y sólo si (B, τ) es un espacio de Hausdorff.

El espacio (B, τ) tiene la ***propiedad*** G_δ si $\{\mathbf{0}\}$ es un conjunto G_δ, es decir, si existe una familia contable $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de entornos abiertos de $\mathbf{0}$ tales que $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \{\mathbf{0}\}$.

Teorema 4.2 (Balcar-Jech-Pazák [5]). Un álgebra de Boole completa B ccc es un álgebra de Maharam si y sólo si
(i) B es débilmente distributiva y
(ii) (B, τ) tiene la propiedad G_δ.

La propiedad G_δ es más débil que ser primero contable por ser (B, τ) un espacio T_1, y por lo tanto el Teorema 4.2 implica el Teorema de Maharam 2.4. Remarcamos que la distributividad débil se sigue del ser (B, τ) primero contable, pero es necesaria en el Teorema 4.2, ya que el álgebra de Cohen también tiene la propiedad G_δ y no es débilmente distributiva.

El Teorema 4.1 combinado con un resultado de consistencia de Todorcevic ([29]) responde la pregunta del problema 3:

Teorema 4.3 (Balcar-Jech-Pazák [5]). Es consistente que toda álgebra de Boole completa, ccc y débilmente distributiva es un álgebra de Maharam.

Todorcevic modificó el Teorema 4.2 como sigue.

Teorema 4.4 (Todorcevic [31]). Un álgebra de Boole completa B es un algebra de Maharam si y sólo si
(i) B es débilmente distributiva, y
(ii) B satisface la condición de la cadena σ-finita.

Demostraremos los Teoremas 4.1 a 4.4 en las secciones 6 a 8.

5. Distributividad débil

En la presente sección damos varias descripciones equivalentes de la distributividad débil, algunas de las cuales serán utilizadas en las próximas secciones.

Para $X, Y \subseteq B$ y $a \in B$, definimos

$$\begin{aligned} X \vee Y &:= \{x \vee y : x \in X,\ y \in Y\}, \\ a \vee Y &:= \{a \vee y : y \in Y\}, \\ X \bigtriangleup Y &:= \{x \bigtriangleup y : x \in X,\ y \in Y\} \text{ y} \\ a \bigtriangleup Y &:= \{a \bigtriangleup y : y \in Y\}. \end{aligned}$$

Teorema 5.1. Sea B un álgebra de Boole completa y ccc. Son equivalentes:
(i) B es débilmente distributiva.
(ii) Sean $a_0^n \leq a_1^n \leq ...$ tales que $\bigvee_k a_k^n = \mathbf{1}$ para cada $n \in \omega$. Entonces,

$$\bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n = \mathbf{1}.$$

(iii) Sean $a_0^n \leq a_1^n \leq ...$ tales que $\bigvee_k a_k^n = \mathbf{1}$ para cada $n \in \omega$. Entonces, existen funciones $f_k \in \omega^\omega$, $k \in \omega$, tales que

$$\bigvee_k \bigwedge_n a_{f_k(n)}^n = \mathbf{1}.$$

(iv) Sean $a_0^n \leq a_1^n \leq ...$ tales que $\bigvee_k a_k^n = \mathbf{1}$ para cada $n \in \omega$. Entonces, existe una función $f \in \omega^\omega$ tal que

$$\lim_n a_{f(n)}^n = \mathbf{1}.$$

Demostración.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ como en (ii). Luego,

$$\begin{aligned} B \text{ débilmente distributiva} &\Rightarrow \bigwedge_n \bigvee_k a_k^n = \bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n \\ &\Rightarrow \bigwedge_n \mathbf{1} = \bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n \\ &\Rightarrow \mathbf{1} = \bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ con $(a_k^n)_{k\in\omega}$ creciente para cada n. Definimos $b_n := \bigvee_k a_k^n$ para cada n. Luego, $((a_k^n \vee -b_n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ es tal que $a_k^n \vee -b_n \leq a_{k+1}^n \vee -b_n$ para todos k y n, y $\bigvee_k (a_k^n \vee -b_n) = \mathbf{1}$. Entonces, por (ii), vale que

$$\mathbf{1} = \bigvee_f \bigwedge_n (a_{f(n)}^n \vee -b_n). \tag{$*$}$$

Resta ver que $\bigwedge_n \bigvee_k a_k^n \leq \bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n$, pues la otra desigualdad vale siempre en toda álgebra de Boole completa.

Supongamos que $\bigwedge_n \bigvee_k a_k^n \not\leq \bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n$ y lleguemos a una contradicción.

$$\begin{aligned}\bigwedge_n \bigvee_k a_k^n \not\leq \bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n &\Leftrightarrow \mathbf{0} < \left(\bigwedge_n \bigvee_k a_k^n\right) \wedge - \left(\bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n\right) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{1} > - \left(\left(\bigwedge_n \bigvee_k a_k^n\right) \wedge - \left(\bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n\right)\right).\end{aligned}$$

Entonces, por $(*)$, existe $g \in \omega^\omega$ tal que

$$\bigwedge_n (a_{g(n)}^n \vee -b_n) \not\leq - \left(\left(\bigwedge_n \bigvee_k a_k^n\right) \wedge - \left(\bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n\right)\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}&\bigwedge_n (a_{g(n)}^n \vee -b_n) \not\leq - \left(\left(\bigwedge_n \bigvee_k a_k^n\right) \wedge - \left(\bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n\right)\right) \Leftrightarrow \\ &\mathbf{0} < \left(\bigwedge_n (a_{g(n)}^n \vee -b_n)\right) \wedge \left(\left(\bigwedge_n \bigvee_k a_k^n\right) \wedge - \left(\bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n\right)\right) \Leftrightarrow \\ &\mathbf{0} < \left(\bigwedge_n (a_{g(n)}^n \vee -b_n)\right) \wedge \left(\bigwedge_n \bigvee_k a_k^n\right) \wedge - \left(\bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n\right) \\ &= \left(\bigwedge_n (a_{g(n)}^n \vee -b_n)\right) \wedge \left(\bigwedge_n b_n\right) \wedge \left(\bigwedge_f \left(- \bigwedge_n a_{f(n)}^n\right)\right) \\ &\leq \left(\bigwedge_n (a_{g(n)}^n \vee -b_n)\right) \wedge \left(\bigwedge_n b_n\right) \wedge \left(- \bigwedge_n a_{g(n)}^n\right) \\ &= \left(\bigwedge_n \left((a_{g(n)}^n \vee -b_n) \wedge \bigwedge_m b_m\right)\right) \wedge \left(- \bigwedge_n a_{g(n)}^n\right) \\ &= \left(\bigwedge_n \left(a_{g(n)}^n \wedge \bigwedge_m b_m\right)\right) \wedge \left(- \bigwedge_n a_{g(n)}^n\right) \\ &\leq \left(\bigwedge_n a_{g(n)}^n\right) \wedge \left(- \bigwedge_n a_{g(n)}^n\right) = \mathbf{0},\end{aligned}$$

lo que es absurdo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ como en (iii). Por (ii), $\bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n = \mathbf{1}$. Entonces, existen funciones $f_k \in \omega^\omega$, $k \in \omega$, tales que $\bigvee_f \bigwedge_n a_{f(n)}^n = \bigvee_k \bigwedge_n a_{f_k(n)}^n$ (se sigue de una propiedad general de las álgebras que satisfacen la ccc: para todo $X \subseteq B$ hay un subconjunto contable $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee_{x\in X} a_x = \bigvee_{x \in Y} a_x$), y por lo tanto $\bigvee_k \bigwedge_n a_{f_k(n)}^n = \mathbf{1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ como en (ii). Por (iii), existen funciones $f_k \in \omega^\omega$, $k \in \omega$, tales que $\bigvee_k \bigwedge_n a^n_{f_k(n)} = \mathbf{1}$, y como $\bigvee_k \bigwedge_n a^n_{f_k(n)} \leq \bigvee_f \bigwedge_n a^n_{f(n)}$, resulta $\bigvee_f \bigwedge_n a^n_{f(n)} = \mathbf{1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ como en (iv). Por (iii), existen funciones $f_k \in \omega^\omega$, $k \in \omega$, tales que $\bigvee_k \bigwedge_n a^n_{f_k(n)} = \mathbf{1}$.

Para cada n definimos $f(n) := \max\{f_k(n) : 0 \leq k \leq n\}$. Luego,

$$\begin{aligned} n \geq k &\Rightarrow f(n) \geq f_k(n) \quad \forall\, 0 \leq k \leq n \\ &\Rightarrow a^n_{f(n)} \geq a^n_{f_k(n)} \quad \forall\, 0 \leq k \leq n \\ &\Rightarrow \bigwedge_{n\geq k} a^n_{f(n)} \geq \bigwedge_{n\geq k} a^n_{f_k(n)} \geq \bigwedge_n a^n_{f_k(n)} \\ &\Rightarrow \bigvee_k \bigwedge_{n\geq k} a^n_{f(n)} \geq \bigvee_k \bigwedge_n a^n_{f_k(n)} = \mathbf{1} \\ &\Rightarrow \liminf_n a^n_{f(n)} = \mathbf{1} \\ &\Rightarrow \lim_n a^n_{f(n)} = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ como en (iii). Por (iv), existe $f \in \omega^\omega$ tal que $\bigvee_k \bigwedge_{n\geq k} a^n_{f(n)} = \mathbf{1}$. Sea $(f_k)_{k\in\omega}$ la sucesión de todas las modificaciones finitas de f. Sea $x \in B$ tal que $\bigwedge_n a^n_{f_k(n)} \leq x$ para todo k. Sea $j \in \omega$.

Si $j = 0$, existe $k \in \omega$ tal que $f_k = f$. Luego,

$$x \geq \bigwedge_n a^n_{f_k(n)} = \bigwedge_n a^n_{f(n)}.$$

Si $j = 1$, para cada $k \in \omega$ tal que $f_k(n) = f(n)$ para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} x \geq \bigwedge_n a^n_{f_k(n)} &= a^0_{f_k(0)} \wedge \left(\bigwedge_{n\geq 1} a^n_{f_k(n)}\right) \\ &= a^0_{f_k(0)} \wedge \left(\bigwedge_{n\geq 1} a^n_{f(n)}\right). \end{aligned}$$

Luego, como para cada $m \in \omega$ existe $k \in \omega$ tal que $f_k(0) = m$ y $f_k(n) = f(n)$ para todo $n \geq 1$, resulta

$$x \geq a^0_m \wedge \left(\bigwedge_{n\geq 1} a^n_{f(n)}\right)$$

para todo $m \in \omega$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \geq \bigvee_m \left(a_m^0 \wedge \left(\bigwedge_{n\geq 1} a_{f(n)}^n \right) \right) &= \left(\bigvee_m a_m^0 \right) \wedge \left(\bigwedge_{n \geq 1} a_{f(n)}^n \right) \\ &= \mathbf{1} \wedge \left(\bigwedge_{n\geq 1} a_{f(n)}^n \right) \\ &= \bigwedge_{n \geq 1} a_{f(n)}^n. \end{aligned}$$

De manera similar se prueba que $x \geq \bigwedge_{n\geq j} a_{f(n)}^n$ para j arbitrario, lo que implica que $x = \mathbf{1}$. ■

Las sucesiones crecientes que convergen algebraicamente a $\mathbf{1}$ corresponden a anticadenas maximales. Afirmamos que si $(a_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión creciente con $a_0 = \mathbf{0}$ y $\bigvee_n a_n = \mathbf{1}$, entonces $\{a_{n+1} - a_n : n \in \omega\}$ es una anticadena maximal. Sean $k, n \in \omega$ tales que $k < n$. Luego,

$$\begin{aligned} (a_{k+1} - a_k) \wedge (a_{n+1} - a_n) &= (a_{k+1} \wedge -a_k) \wedge (a_{n+1} \wedge -a_n) \\ &= (a_{k+1} \wedge a_{n+1}) \wedge (-a_n \wedge -a_k) \\ &= a_{k+1} \wedge -a_n = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow a_{k+1} \leq a_n, \end{aligned}$$

que vale pues $k + 1 \leq n$. Sea $x \in B$ tal que $x \wedge (a_{n+1} - a_n) = \mathbf{0}$ para todo $n \in \omega$. Veamos que $x = \mathbf{0}$ (lo que implica la maximalidad de la anticadena). Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = x \wedge (a_{n+1} - a_n) &= (x \wedge a_{n+1}) \wedge -a_n \\ \Rightarrow x \wedge a_{n+1} &\leq a_n \\ \Rightarrow x \wedge a_{n+1} &\leq x \wedge a_n \\ \Rightarrow x \wedge a_{n+1} &= x \wedge a_n \ \forall\ n. \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbf{0} = x \wedge \mathbf{0} = x \wedge a_0 = x \wedge a_n \ \forall\ n.$$

Entonces,

$$x = x \wedge \mathbf{1} = x \wedge \bigvee_n a_n = \bigvee_n (x \wedge a_n) = \mathbf{0}.$$

Por otro lado, si $\{a_n : n \in \omega\}$ es una anticadena maximal, entonces $(\bigvee_{k=1}^n a_k)_{n\in\omega}$ es una sucesión creciente con supremo $\mathbf{1}$, pues

$$\begin{aligned} \bigvee_n \bigvee_{k=1}^n a_k = \bigvee_n a_n < \mathbf{1} \Rightarrow x := -\bigvee_n a_n > \mathbf{0} \\ \Rightarrow a_m \wedge x = a_m \wedge -\bigvee_n a_n \\ = a_m \wedge \bigwedge_n -a_n = \bigwedge_n (a_m \wedge -a_n) \\ = \mathbf{0} \end{aligned}$$

para todo m, lo que es absurdo pues $\{a_n : n \in \omega\}$ es anticadena maximal.

Podemos formular entonces la distributividad débil en términos de anticadenas maximales.

Teorema 5.2. Sea B un álgebra de Boole completa y ccc. Son equivalentes:
(i) B es débilmente distributiva.
(ii) Sean $A_n = \{a_k^n : k \in \omega\}$, $n \in \omega$, anticadenas maximales. Entonces,

$$\bigvee_f \bigwedge_n \bigvee_{k \leq f(n)} a_k^n = \mathbf{1}.$$

(iii) Si $A_0, A_1, A_2, ...$ son anticadenas maximales entonces existe un conjunto denso D tal que cada $d \in D$ interseca sólo finitos elementos de cada A_n.

(iv) Si $A_0, A_1, A_2, ...$ son anticadenas maximales entonces cada A_n tiene un subconjunto finito E_n tal que

$$\lim_n \bigvee E_n = \mathbf{1}.$$

Demostración. La propiedad (ii) es una reformulación de (ii) del Teorema 5.1 y la propiedad (iv) es una reformulación de (iv) del Teorema 5.1. Veamos que (ii) y (iii) son equivalentes.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Para cada $n \in \omega$ sea $A_n = \{a_k^n : k \in \omega\}$ una anticadena maximal. Para cada $f \in \omega^\omega$ sea $c_f := \bigwedge_n \bigvee_{k \leq f(n)} a_k^n$. Por (ii) resulta $\bigvee_f c_f = \mathbf{1}$. Entonces,

$$\bigvee_f c_f = \mathbf{1} \Leftrightarrow \bigwedge_f -c_f = \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall\, b \in B^+ \;\exists\, f \in \omega^\omega \;/\; b \not\leq -c_f$$
$$\Leftrightarrow \forall\, b \in B^+ \;\exists\, f \in \omega^\omega \;/\; \mathbf{0} < b \wedge c_f.$$

Sea $D := \{b \wedge c_f : b \in B^+ \text{ y } f \in \omega^\omega\}$. Luego, D es denso en B. Además, si $f \in \omega^\omega$, $b \in B^+$ y $n \in \omega$,

$$(b \wedge c_f) \wedge a_j^n = b \wedge \left(\bigwedge_m \bigvee_{k \leq f(m)} (a_k^m \wedge a_j^n) \right) \leq b \wedge \left(\bigvee_{k \leq f(n)} (a_k^n \wedge a_j^n) \right) = \mathbf{0}$$

para todo $j > f(n)$, y por lo tanto cada elemento de D interseca sólo finitos elementos de cada A_n.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Para cada $n \in \omega$ sea $A_n = \{a_k^n : k \in \omega\}$ una anticadena maximal. Para cada $f \in \omega^\omega$ sea $c_f := \bigwedge_n \bigvee_{k \leq f(n)} a_k^n$. Sea $x \in B$ tal que $x \geq c_f$ para toda $f \in \omega^\omega$. Luego,

$$x = \mathbf{1} \Leftrightarrow -x = \mathbf{0}.$$

Supongamos $-x > \mathbf{0}$. Por (iii) existe un conjunto denso D tal que cada $d \in D$ interseca sólo finitos elementos de cada A_n. Sea $d \in D$ tal que $d \leq -x$. Luego, para todo $n \in \omega$ existe $f \in \omega^\omega$ tal que $d \wedge a_k^n = \mathbf{0}$ para todo $k \geq f(n)$ (y $d \wedge a_k^n = \mathbf{0}$ es equivalente a $d \leq -a_k^n$).

Por otro lado, si $f \in \omega^\omega$,

$$x \geq c_f \Leftrightarrow -x \leq -c_f \Rightarrow d \leq -c_f \Leftrightarrow \mathbf{0} = d \wedge c_f = \bigwedge_n \bigvee_{k \leq f(n)} (d \wedge a_k^n)$$

$$\Rightarrow \exists\, n \in \omega \;/\; d \not\leq \bigvee_{k \leq f(n)} (d \wedge a_k^n)$$

$$\Leftrightarrow \exists\, n \in \omega \;/\; \mathbf{0} < d \wedge \left(\bigwedge_{k \leq f(n)} (-d \vee -a_k^n) \right) = \bigwedge_{k \leq f(n)} (d \wedge -a_k^n) =: \tilde{d}.$$

Entonces, $\mathbf{0} < \tilde{d} \leq -a_k^n$ para todo $k \leq f(n)$ y $\tilde{d} \leq d \leq -a_k^n$ para todo $k \geq f(n)$, lo que es absurdo, pues como A_n es anticadena maximal resulta $\bigvee A_n = \mathbf{1}$, y por lo tanto $\bigwedge -A_n = \mathbf{0}$. ■

La propiedad 5.1 (iv) puede reformularse aún más para dar las siguientes equivalencias.

Teorema 5.3. Sea B un álgebra de Boole completa y ccc. Son equivalentes:
(i) B es débilmente distributiva.
(ii) ***(Propiedad diagonal)*** Si $\text{lím}_k\, a_k^n = \mathbf{0}$ para todo n, entonces existe una función creciente $f \in \omega^\omega$ tal que $\text{lím}_n\, a_{f(n)}^n = \mathbf{0}$.
(iii) Si $\text{lím}_n\, a_n = a$ y para cada n, $\text{lím}_k\, a_k^n = a_n$, entonces existe una función creciente $f \in \omega^\omega$ tal que $\text{lím}_n\, a_{f(n)}^n = a$.

Notación. Escribimos $x_n \searrow x$ si $(x_n)_{n\in\omega}$ es decreciente y $\text{lím}_n\, x_n = x$, y escribimos $x_n \nearrow x$ si $(x_n)_{n\in\omega}$ es creciente y $\text{lím}_n\, x_n = x$.

Demostración.
5.1 (iv) $\Rightarrow$ 5.3 (ii) Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ como en (5.3)(ii).
Caso $a_k^n \searrow \mathbf{0}$: Como $a_k^n \searrow \mathbf{0}$ resulta $-a_k^n \nearrow \mathbf{1}$, pues

$$a_k^n \geq a_{k+1}^n \Rightarrow -a_k^n \leq -a_{k+1}^n,$$

y

$$\liminf_k -a_k^n = -\limsup_k a_k^n = -\mathbf{0} = \mathbf{1}.$$

Luego, $\bigvee_k -a_k^n = \mathbf{1}$, ya que

$$\mathbf{1} = \liminf_k -a_k^n = \bigvee_k \bigwedge_{j \geq k} -a_j^n = \bigvee_k -a_k^n$$

porque $(-a_k^n)_{k\in\omega}$ es creciente. Entonces, por (5.1)(iv), existe $g \in \omega^\omega$ tal que $\text{lím}_n -a_{g(n)}^n = \mathbf{1}$, lo que implica que $\text{lím}_n\, a_{g(n)}^n = \mathbf{0}$. Definimos $f(0) := g(0)$ y $f(n+1) := \text{máx}\{f(n), g(n+1)\}$ para todo n. Luego, $f \in \omega^\omega$ es creciente y $\text{lím}_n\, a_{f(n)}^n = \mathbf{0}$, pues

$$\mathbf{0} = \limsup_n a_{g(n)}^n = \bigwedge_n \bigvee_{k \geq n} a_{g(k)}^k \geq \bigwedge_n \bigvee_{k \geq n} a_{f(k)}^k = \limsup_n a_{f(n)}^n,$$

donde la desigualdad vale porque $(a_j^k)_{j\in\omega}$ es decreciente y $g(k) \leq f(k)$.

Caso general: Como $\lim_n a_k^n = \mathbf{0}$, existe $(b_k^n)_{k\in\omega}$ decreciente tal que $a_k^n \leq b_k^n$ para todos n y k y $\bigwedge_k b_k^n = \mathbf{0}$ para todo n (que implica $b_k^n \searrow \mathbf{0}$). Por el caso anterior, existe $f \in \omega^\omega$ creciente tal que $\lim_n b_{f(n)}^n = \mathbf{0}$. Luego,

$$\limsup_n a_{f(n)}^n = \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_{f(k)}^k \leq \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} b_{f(k)}^k = \limsup_n b_{f(n)}^n = \mathbf{0},$$

y por lo tanto $\lim_n a_{f(n)}^n = \mathbf{0}$.

5.3 (ii) $\Rightarrow$ 5.1 (iv) Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ como en (5.1)(iv). Como $a_k^n \nearrow \mathbf{1}$, resulta $-a_k^n \searrow \mathbf{0}$. Por hipótesis, existe $f \in \omega^\omega$ creciente tal que $\lim_n -a_{f(n)}^n = \mathbf{0}$, y por lo tanto $\lim_n a_{f(n)}^n = \mathbf{1}$.

5.3 (ii) $\Rightarrow$ 5.3 (iii) Sean $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$, $(a_n)_{n\in\omega}$ y a como en (5.3)(iii). Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_k a_k^n = a_n \;\forall\, n &\Rightarrow \lim_k\,(a_k^n \vartriangle a_n) = \mathbf{0}\;\forall\, n\\ &\Rightarrow \exists\, f \in \omega^\omega \text{ creciente } /\ \lim_n\,(a_{f(n)}^n \vartriangle a_n) = \mathbf{0}\\ &\Rightarrow \lim_n\,(a_{f(n)}^n \vartriangle a_n \vartriangle a) = a.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_n a_{f(n)}^n = \lim_n\,((a_{f(n)}^n \vartriangle a_n \vartriangle a) \vartriangle (a_n \vartriangle a)) = a \vartriangle \mathbf{0} = a$$

(por hipótesis, $\lim_n a_n = a$, lo que implica que $\lim_n\,(a_n \vartriangle a) = \mathbf{0}$).

5.3 (iii) $\Rightarrow$ 5.3 (ii) Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ como en (5.3)(ii). Tomando $a_n = \mathbf{0}$ para todo n, resulta $\lim_k a_k^n = a_n$ y $\lim_n a_n = \mathbf{0} =: a$. Luego, por hipótesis, existe $f \in \omega^\omega$ creciente tal que $\lim_n a_{f(n)}^n = a = \mathbf{0}$. ■

Una consecuencia inmediata de 5.3 (iii) es que la clausura de un conjunto $X \subseteq B$ en la topología secuencial τ es el conjunto de todos los límites en τ de sucesiones convergentes de X (ver el Teorema 6.5).

Sea ahora X un subconjunto infinito contable de B^+. Si $\lim_n a_n = \mathbf{0}$ para alguna enumeración $(a_n)_{n\in\omega}$ de X, entonces sucede lo mismo para toda enumeración de X por una de las propiedades de la convergencia algebraica. De este modo podemos escribir $\lim X = \mathbf{0}$ sin ambigüedad y hablar de ***conjuntos convergentes a 0***.

Definición 5.4. El ***ideal de convergencia*** $\mathcal{I}$ es la colección de conjuntos $X \subseteq B$ que convergen a $\mathbf{0}$.

$\mathcal{I}$ es un ideal en $[B^+]^\omega := \{X \subseteq B^+ : \#(X) = \aleph_0\}$, es decir, una colección de elementos de $[B^+]^\omega$ tal que si X es un subconjunto infinito de algún elemento de $\mathcal{I}$ resulta $X \in \mathcal{I}$ y si $X, Y \in \mathcal{I}$ entonces $X \cup Y \in \mathcal{I}$. Si B es ccc, $\mathcal{I}$ contiene todas las anticadenas infinitas por una de las propiedades de la convergencia algebraica.

El ideal de convergencia fue considerado por primera vez (para un álgebra de Suslin) por Abraham y Todorcevic en [1], e introducido en general en [2] por Balcar, Franek y Hruška, y en [25] por Quickert.

Definición 5.5. Un ideal I en algún $[S]^\omega$ es un ***P-ideal*** si para toda sucesión $(X_n)_{n\in\omega}$ de I existe $X \in I$ tal que $X_n - X$ es finito para todo n.

En [25], Quickert muestra que $\mathcal{I}$ es un P-ideal para toda álgebra de Boole completa, ccc y débilmente distributiva. Resulta que esta propiedad es otra equivalencia de la distributividad débil:

Teorema 5.6 (Quickert). Sea B un álgebra de Boole completa y ccc. B es débilmente distributiva si y sólo si el ideal de convergencia $\mathcal{I}$ en B es un P-ideal.

Demostración.

$\Rightarrow$) Veamos que si B tiene la propiedad diagonal entonces $\mathcal{I}$ es un P-ideal.

Sea $(X_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{I}$, y supongamos $X_n = (x_k^n)_{k\in\omega}$ para cada n. Luego, sea $(y_k^n)_{k\in\omega}$ la sucesión definida por $y_k^n = x_k^0 \vee x_k^1 \vee ... \vee x_k^n$ para cada n. Como las sucesiones $(y_k^n)_{k\in\omega}$ convergen a $\mathbf{0}$, existe una función creciente $f \in \omega^\omega$ tal que $\lim_n y_{f(n)}^n = \mathbf{0}$, por la propiedad diagonal.

Sea $X := \{x_k^n : k, n \in \omega \text{ y } k \geq f(n)\}$. Claramente, $X_n - X$ es finito para cada n, y afirmamos que $\lim X = \mathbf{0}$. Para cada n, sea E_n el conjunto finito $\{x_k^i : i \leq n \text{ y } f(i) \leq k \leq f(n)\}$. Como $\bigvee(X - E_n) = \bigvee_{m\geq n+1} y_{f(m)}^m$, tenemos que

$$\begin{aligned} \limsup_n X &= \bigwedge_n \bigvee (X - E_n) = \bigwedge_n \bigvee_{m\geq n+1} y_{f(m)}^m \\ &\leq \bigwedge_n \bigvee_{m\geq n} y_{f(m)}^m = \limsup_n y_{f(n)}^n = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Veamos que si $\mathcal{I}$ es un P-ideal entonces B tiene la propiedad diagonal.

Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ como en 5.3 (ii). Queremos ver que existe $f \in \omega^\omega$ creciente tal que $\lim_n a_{f(n)}^n = \mathbf{0}$. Sea $X_n := \{a_k^n : k \in \omega\}$. Por hipótesis, existe $X \in \mathcal{I}$ tal que $X_n - X$ es finito para todo n. Definimos $f \in \omega^\omega$ por recurrencia:

• $X_0 - X$ finito $\Rightarrow$ existe $f(0) \in \omega$ tal que $a_{f(0)}^0 \in X$.

• Para $n \in \omega$, $X_{n+1} - X$ finito $\Rightarrow$ existe $f(n+1) \in \omega$ tal que $f(n+1) > f(n)$ y $a_{f(n+1)}^{n+1} \in X$.

Luego, $\lim_n a_{f(n)}^n = \mathbf{0}$ pues $\{a_{f(n)}^n : n \in \omega\} \subseteq X$ (recordar que $\mathcal{I}$ es un ideal en $[B^+]^\omega$). ■

La próxima equivalencia de la distributividad débil recuerda al Teorema de la categoría de Baire.

Definición 5.7. Un conjunto $X \subseteq B$ es ***cerrado hacia abajo*** si

$$a \leq b \in X \Rightarrow a \in X.$$

Para $a > \mathbf{0}$, $B \restriction a$ es el álgebra $\{x \in B : x \leq a\}$, y $B \restriction \mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}$.

Notar que $B \restriction a$ es un subespacio cerrado de (B, τ).

Teorema 5.8. Sea B un álgebra de Boole completa y ccc. Son equivalentes:
(i) B es débilmente distributiva.
(ii) Si $U_0, U_1, U_2, ...$ son cerrados hacia abajo y $cl(U_n) = B$ para todo n, entonces $\bigcap_n U_n$ es denso en B.
(iii) Si $U_0, U_1, U_2, ...$ son cerrados hacia abajo y $\bigcap_n U_n = \{\mathbf{0}\}$ entonces $\bigcap_n cl(U_n) = \{\mathbf{0}\}$.

Demostración.
(i) $\Rightarrow$ (iii) Sea $(U_n)_{n\in\omega}$ como en (iii). Supongamos en primer lugar que $U_n \supseteq U_{n+1}$ para todo n, y procedamos por el absurdo. Sea $a \in \bigcap_n cl(U_n)$ no nulo. Luego, para cada n existe una sucesión $(a_k^n)_{k\in\omega}$ en U_n con límite a por ser B débilmente distributiva. Usando la propiedad diagonal obtenemos una sucesión $(b_n)_{n\in\omega}$ tal que $b_n \in U_n$ y $\lim_n b_n = a$, pues

$$\begin{aligned}
\lim_k a_k^n = a \ \forall\ n \Rightarrow \lim_k\, (a_k^n \triangle a) = \mathbf{0}\ \forall\ n \\
&\Rightarrow \exists\ f \in \omega^\omega \text{ creciente } /\ \lim_n\, (a_{f(n)}^n \triangle a) = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \lim_n a_{f(n)}^n = a,
\end{aligned}$$

y definimos $b_n := a_{f(n)}^n$. Como $\liminf b_n > \mathbf{0}$, existen $b > \mathbf{0}$ y n_0 tales que para todo $n \geq n_0$ resulta $b_n \geq b$, pues

$$\mathbf{0} < \liminf_n b_n = \bigvee_n \bigwedge_{k\geq n} b_k \Rightarrow \exists\ n_0\ /\ \mathbf{0} < \bigwedge_{k\geq n_0} b_k =: b,$$

que implica $b \in U_n$ para todo $n \geq n_0$ por ser U_n cerrado hacia abajo, y por lo tanto $b \in U_n$ para todo n por ser $(U_n)_{n\in\omega}$ decreciente. Luego, $b \in \bigcap_n U_n = \{\mathbf{0}\}$, lo que es absurdo.

Si $(U_n)_{n\in\omega}$ no es necesariamente decreciente, definimos $V_n := \bigcap_{k\leq n} U_k$ para todo n, resultanto ser $(V_n)_{n\in\omega}$ una sucesión decreciente de cerrados hacia abajo con $\bigcap_n V_n = \{\mathbf{0}\}$. Por el caso anterior se tiene que $\bigcap_n cl(V_n) = \{\mathbf{0}\}$, y por lo tanto $\bigcap_n cl(U_n) = \{\mathbf{0}\}$ pues $\bigcap_n cl(V_n) = \bigcap_n cl(U_n)$ (si $x \in \bigcap_n cl(U_n)$ y $m \in \omega$, para cada $n \leq m$ existe $(x_k^n)_{k\in\omega}$ en U_n convergiendo algebraicamente a x, y por lo tanto $((\bigwedge_{n\leq m} x_k^n)_{k\in\omega})$, que está contenida en U_n para cada $n \leq m$ por ser U_n cerrado hacia abajo, también converge algebraicamente a x, así que $x \in cl(V_m)$).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(U_n)_{n\in\omega}$ como en (ii) y supongamos que $\bigcap_n U_n$ no es denso en B. Sea $a > \mathbf{0}$ tal que $\bigcap_n U_n \cap (B \restriction a) = \{\mathbf{0}\}$.

Para cada n, sea $V_n := \{a \wedge x : x \in U_n\}$. Como los U_n son cerrados hacia abajo, tenemos que $V_n = U_n \cap (B \restriction a)$, los V_n son cerrados hacia abajo y $\bigcap_n V_n = \{\mathbf{0}\}$. Por (ii), $\bigcap_n cl(V_n) = \{\mathbf{0}\}$.

Luego, como para cada n tenemos $a \in cl(U_n)$, resulta

$$a = a \wedge a \in a \wedge cl(U_n) = cl(a \wedge U_n) = cl(V_n),$$

lo que es absurdo pues $\bigcap_n cl(V_n) = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea $(A_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de anticadenas maximales. Para cada n, sea U_n el conjunto de todos los x que intersecan sólo finitos elementos de A_n. Luego, U_n es cerrado hacia abajo. Veamos que $cl(U_n) = B$. Sea $x \in B$. Si $x \in U_n$, $x \in cl(U_n)$. Si $x \notin U_n$, existe $(a_k)_{k\in\omega}$ en A_n con $a_k \neq a_j$ si $k \neq j$ tal que $x \wedge a_k > \mathbf{0}$ para todo k y $x \wedge a = \mathbf{0}$ si $a \in A_n - \{a_k : k \in \omega\}$. Luego,

$$\begin{aligned} x = x \wedge \mathbf{1} = x \wedge \bigvee A_n &= \bigvee_{a\in A_n} (x \wedge a) \\ = \bigvee_k (x \wedge a_k) &= \bigvee_k \bigvee_{m=1}^{k} (x \wedge a_m) \end{aligned}$$

(notar que $\bigvee A_n = \mathbf{1}$ pues sino $A_n \cup \{-\bigvee A_n\}$ resulta ser una anticadena que contiene estrictamente a A_n). Entonces, si $b_k := \bigvee_{m=1}^{k} (x \wedge a_m)$, $(b_k)_{k\in\omega}$ es una sucesión creciente contenida en U_n cuyo límite es x (recordar que el límite de una sucesión creciente es su supremo), y por lo tanto $x \in cl(U_n)$. Entonces, por hipótesis resulta $\bigcap_n U_n$ denso en B, probando 5.2 (iii). ■

6. El Teorema de descomposición

El trabajo sobre topología secuencial desarrollado en [3] y [5] condujo al siguiente teorema, el Teorema de descomposición, que usaremos en la siguiente sección para analizar las álgebras de Maharam.

Teorema 6.1 (Balcar-Jech-Pazák [5]). Sea B un álgebra de Boole completa y ccc. Entonces, existe $m \in B$ tal que, si $d := -m$, valen las siguientes afirmaciones:
(i) El álgebra $B \restriction m$ admite una submedida de Maharam.
(ii) En $B \restriction d$ todo conjunto abierto no vacío es topológicamente denso.

La propiedad (ii) significa que el álgebra $B \restriction d$ es ***nunca Hausdorff***: dos conjuntos abiertos no vacíos cualesquiera tienen intersección no vacía. Como consecuencia, si (B, τ) es un espacio de Hausdorff entonces B es un álgebra de Maharam (Teorema 4.1). Ahora demostraremos el siguiente teorema, que implica los Teoremas 4.1, 4.2 y 2.4.

Teorema 6.2. Sea B un álgebra de Boole completa y ccc.
(a) Si (B, τ) es un espacio de Hausdorff, entonces:
(i) B es débilmente distributiva, y
(ii) (B, τ) tiene la propiedad G_δ.
(b) Si B es débilmente distributiva y (B, τ) tiene la propiedad G_δ, entonces:
(i) $\vee$ es continua, y
(ii) (B, τ) es primero contable.
(c) (Maharam) Si $\vee$ es continua y (B, τ) es primero contable, entonces B es una álgebra de Maharam.

Para demostrar el Teorema 6.2, comenzamos con la siguiente observación:

Lema 6.3. Sea B un álgebra de Boole completa. Si (B, τ) es una espacio de Hausdorff, entonces B es débilmente distributiva.

Demostración. Sea $a_0^n \le a_1^n \le ...$ para cada n tal que $\bigvee_k a_k^n = \mathbf{1}$. Veamos que para cada $a > \mathbf{0}$ existe una función $f \in \omega^\omega$ tal que $a \wedge \bigwedge_n a_{f(n)}^n > \mathbf{0}$.

Sea $a > \mathbf{0}$. Por ser (B, τ) un espacio de Hausdorff, existe un entorno abierto U de a tal que $\mathbf{0} \notin cl(U)$. Como $\lim_k a_k^0 = \mathbf{1}$ resulta $\lim_k (a \wedge a_k^0) = a$, y por lo tanto existe $f(0) \in \omega$ tal que $b_0 := a \wedge a_{f(0)}^0 \in U$. Inductivamente, asumamos que $b_n := a \wedge a_{f(0)}^0 \wedge ... \wedge a_{f(n)}^n \in U$, y como $\lim_k (b_n \wedge a_{f(n+1)}^{n+1}) = b_n$, existe $f(n+1) \in \omega$ tal que $b_{n+1} := b_n \wedge a_k^{n+1} \in U$. Tenemos $a \wedge \bigwedge_n a_{f(n)}^n = \lim_n b_n > \mathbf{0}$, porque $\mathbf{0} \notin cl(U)$.

Luego, $\bigvee_g \bigwedge_n a_{g(n)}^n < \mathbf{1}$ implica $-\bigvee_g \bigwedge_n a_{g(n)}^n > \mathbf{0}$. Entonces, existe $f \in \omega^\omega$ tal que

$$\left(-\bigvee_g \bigwedge_n a_{g(n)}^n\right) \wedge \left(\bigwedge_n a_{f(n)}^n\right) > \mathbf{0},$$

lo que es absurdo. Por lo tanto $\bigvee_g \bigwedge_n a^n_{g(n)} = \mathbf{1}$, así que vale 5.1 (ii). ■

Decimos que B es ***nunca débilmente distributiva*** si $B \restriction a$ no es débilmente distributiva para cada $a > \mathbf{0}$. El mismo argumento que en el Lema 6.3 prueba que si B es nunca débilmente distributiva, entonces $\mathbf{0} \in cl(U)$ para todo conjunto abierto no vacío U. Luego, $a \in cl(U)$ para todo $a \in B$ (porque $a \in cl(U)$ si y sólo si $\mathbf{0} \in cl(U \vartriangle a)$), y tenemos el siguiente:

Corolario 6.4. Si B es un álgebra de Boole completa, ccc y nunca débilmente distributiva, entonces $cl(U) = B$ para todo conjunto abierto no vacío U.

El siguiente lema resume propiedades adicionales de la topología secuencial bajo la distributividad débil. Notar que si A es cerrado hacia abajo entonces $A \vee A = A \vartriangle A$, pues:

$\subseteq$) Si $x, y \in A$,

$$\begin{aligned} x \vee y &= x \vee (y - x) = (x - (x - y)) \vee ((y - x) - x) \\ &= x \vartriangle (y - x) \in A \vartriangle A, \end{aligned}$$

pues como A es cerrado hacia abajo, $y \in A$ implica $y - x \in A$.

$\supseteq$) Si $x, y \in A$,

$$x \vartriangle y = (x - y) \vee (y - x) \in A \vee A,$$

pues como A es cerrado hacia abajo, $x \in A$ implica $x - y \in A$, e $y \in A$ implica $y - x \in A$.

Lema 6.5. Sea B un álgebra de Boole completa, ccc y débilmente distributiva.

(a) Para todo $A \subseteq B$ se tiene que la clausura de A es el conjunto de los límites de las suceciones convergentes en τ de A, es decir, $cl(A) = u(A)$. En particular, si $x \in cl(A)$ existe una sucesión de A que converge algebraicamente a x.

(b) Para todo entorno abierto V de $\mathbf{0}$ existe un abierto no vacío $U \subseteq V$ que es cerrado hacia abajo. Luego,

$$\mathcal{N} := \{U \subseteq B : U \text{ es no vacío, abierto y cerrado hacia abajo}\}$$

es una base de entornos de 0.

(c) Si $U \in \mathcal{N}$, entonces $cl(U) = \bigcap\{U \vee V : V \in \mathcal{N}\} \subseteq U \vee U$ y $cl(U)$ es cerrado hacia abajo.

(d) Si $U \in \mathcal{N}$, entonces $U \vee U$ es abierto y cerrado hacia abajo.

Demostración.

(a) Como $cl(A) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} u^{(\alpha)}(A)$, resta ver que $cl(A) \subseteq u(A)$. Basta ver que $u(u(A)) \subseteq u(A)$. Sea entonces $x \in u(u(A))$. Luego, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ en $u(A)$ que converge a x en τ, y por lo tanto, para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\omega}$

de ella, existe una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\omega}$ que converge algebraicamente a x. En particular, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\omega}$ que converge algebraicamente a x (pues $(x_n)_{n\in\omega}$ es subsucesión de ella misma). Entonces, para cada $k\in\omega$, por ser x_{n_k} elemento de $u(A)$, existe una sucesión $(y^k_m)_{m\in\omega}$ en A que converge en τ a x_{n_k}, y por lo tanto existe una subsucesión $(y^k_{m_j})_{j\in\omega}$ que converge algebraicamente a x_{n_k}. Entonces, como $\text{lím}_k\, x_{n_k} = x$ y $\text{lím}_j\, y^k_{m_j} = x_{n_k}$ para cada k, por 5.3 (iii) existe una función $f\in\omega^\omega$ creciente tal que $\text{lím}_k\, y^k_{m_{f(k)}} = x$, lo que implica $x\in u(A)$.

(b) Si V es un entorno abierto de $\mathbf{0}$, definimos $U := B - cl(A)$, donde $A := \{a\in B : (\exists\, b\le a)\ b\notin V\}$. Veamos que $\mathbf{0}\in U$.

$$\begin{aligned}\mathbf{0}\in cl(A) &\Rightarrow \exists\ (a_n)_{n\in\omega} \text{ en } A\ /\ \operatorname*{lím}_n a_n = \mathbf{0}\\ &\Rightarrow \exists\ (b_n)_{n\in\omega} \text{ en } V^c\ /\ b_n\le a_n\ \forall\ n\\ &\Rightarrow \operatorname*{lím}_n b_n = \mathbf{0}\\ &\Rightarrow \exists\ n_0\ /\ b_n\in V\ \forall\ n\ge n_0,\end{aligned}$$

lo que es absurdo.

Veamos ahora que U es cerrado hacia abajo. Sean $x\in U$ e $y\in B$ tales que $y\le x$.

$$\begin{aligned}y\notin U &\Rightarrow \exists\ (a_n)_{n\in\omega} \text{ en } A\ /\ \operatorname*{lím}_n a_n = y\\ &\Rightarrow \exists\ (b_n)_{n\in\omega} \text{ en } V^c\ /\ b_n\le a_n\ \forall\ n\\ &\Rightarrow b_n\le a_n\vee x\ \forall\ n\\ &\Rightarrow (a_n\vee x)_{n\in\omega} \text{ en } A\\ &\Rightarrow x = y\vee x = \operatorname*{lím}_n\,(a_n\vee x)\in cl(A),\end{aligned}$$

lo que es absurdo.

(c) Sea $U\in\mathcal{N}$. Veamos en primer lugar que $U\vartriangle V = U\vee V$ para todo $V\in\mathcal{N}$. Si $V\in\mathcal{N}$, $x\in U$ e $y\in V$,

$$x\vartriangle y = (x-y)\vee(y-x)\in U\vee V$$

pues $x-y\le x$ e $y-x\le y$, mientras que

$$\begin{aligned}x\vee y &= x\vee(y-x)\\ &= (x-(y-x))\vee((y-x)-x)\\ &= x\vartriangle(y-x)\in U\vartriangle V\end{aligned}$$

pues $y-x\le y$.

Ahora veamos que $cl(U) = \bigcap\{U\vee V : V\in\mathcal{N}\}$.

$\subseteq$) Sea $V\in\mathcal{N}$.

$$\begin{aligned}x\in cl(U) &\Rightarrow \exists\ (x_n)_{n\in\omega} \text{ en } U\ /\ \operatorname*{lím}_n x_n = x\\ &\Rightarrow \operatorname*{lím}_n (x_n\vartriangle x) = \mathbf{0}\\ &\Rightarrow \exists\ n_0\ /\ x_n\vartriangle x\in U\cap V\ \forall\ n\ge n_0\\ &\Rightarrow x = x_{n_0}\vartriangle(x_{n_0}\vartriangle x)\in U\vartriangle V.\end{aligned}$$

$\supseteq$) Sea $x \in \bigcap\{U \vee V : V \in \mathcal{N}\}$. Sea $W \subseteq B$ entorno abierto de x. Luego, $x \vartriangle W$ es entorno abierto de $\mathbf{0}$. Entonces, existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $V \subseteq x \vartriangle W$, y por lo tanto $x \vartriangle V \subseteq W$. Por otro lado, como $x \in U \vee V = U \vartriangle V$, existen $x_U \in U$ y $x_V \in V$ tales que $x = x_U \vartriangle x_V$, lo que implica que $x \vartriangle x_V = x_U$, y por lo tanto $W \cap U \supseteq (x \vartriangle V) \cap U \neq \varnothing$.

Veamos ahora que $cl(U)$ es cerrado hacia abajo. Sean x e y tales que $y \leq x \in cl(U)$. Sea $V \in \mathcal{N}$. Luego,

$$\begin{aligned} x \in cl(U) \Rightarrow x \in U \vee V \Rightarrow \exists\, x_U \in U, x_V \in V \;/\; x = x_U \vee x_V \\ \Rightarrow y = y \wedge x = y \wedge (x_U \vee x_V) \\ = (y \wedge x_U) \vee (y \wedge x_V) \in U \vee V, \end{aligned}$$

pues $y \wedge x_U \leq x_U$ e $y \wedge x_V \leq x_V$.

(d) Sea $U \in \mathcal{N}$. Luego, $U \vee U$ es abierto pues

$$U \vee U = U \vartriangle U = \bigcup_{x \in U} (x \vartriangle U) = \bigcup_{x \in U} T^x(U),$$

que es abierto pues U lo es y T^x es un homeomorfismo (la primer igualdad vale pues U es cerrado hacia abajo).

Por otro lado, $U \vee U$ es cerrado hacia abajo pues

$$\begin{aligned} y \leq x = x_1 \vee x_2 \in U \vee U \\ \Rightarrow y = y \wedge x = y \wedge (x_1 \vee x_2) \\ = (y \wedge x_1) \vee (y \wedge x_2) \in U \vee U \end{aligned}$$

pues $y \wedge x_i \leq x_i$. ■

El principal lema técnico es el siguiente.

Lema 6.6 (Balcar-Glówczyński-Jech [3]). Sea B un álgebra de Boole completa, ccc y débilmente distributiva. Entonces, para todo $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $V \vee V \vee V \subseteq U \vee U$.

Demostración. Supongamos que existe $U \in \mathcal{N}$ tal que

$$V \vee V \vee V \nsubseteq U \vee U$$

para todo $V \in \mathcal{N}$. Sea $V_0 := U$. Luego, existen $x_0, y_0, z_0 \in U_0$ tales que $x_0 \vee y_0 \vee z_0 \notin U \vee U$. Supongamos ahora que para $n \in \omega$ existen $x_n, y_n, z_n \in V_n$ tales que $x_n \vee y_n \vee z_n \notin U \vee U$, y veamos que existe $V_{n+1} \in \mathcal{N}$ tal que

$$V_{n+1} \subseteq V_n,\ x_n \vee V_{n+1} \subseteq V_n,\ y_n \vee V_{n+1} \subseteq V_n \text{ y } z_n \vee V_{n+1} \subseteq V_n.$$

Sea $f : B \to B$ tal que $f(b) = x_n \vee b$. Como f es continua, $f^{-1}(V_n)$ es abierto. Luego, $\mathbf{0} \in f^{-1}(V_n)$ pues $f(\mathbf{0}) = x_n \vee \mathbf{0} = x_n \in V_n$. Como $\mathbf{0} \in f^{-1}(V_n) \cap V_n$, existe $V'_{n+1} \in \mathcal{N}$ tal que

$$\mathbf{0} \in V'_{n+1} \subseteq f^{-1}(V_n) \cap V_n.$$

Luego,

$$V'_{n+1} \subseteq V_n \ \text{ y } \ f(V'_{n+1}) = x_n \vee V'_{n+1} \subseteq V_n.$$

Procediendo de manera similar para y_n y z_n, se obtienen $V''_{n+1}, V'''_{n+1} \in \mathcal{N}$ tales que

$$V''_{n+1}, V'''_{n+1} \subseteq V_n, \ \ y_n \vee V''_{n+1} \subseteq V_n \ \text{ y } \ z_n \vee V'''_{n+1} \subseteq V_n.$$

Luego, se toma $V_{n+1} \in \mathcal{N}$ tal que

$$\mathbf{0} \in V_{n+1} \subseteq V'_{n+1} \cap V''_{n+1} \cap V'''_{n+1}.$$

Sean $X := \bigcap_n cl(V_n)$, $x := \limsup_n x_n$, $y := \limsup_n y_n$ y $z := \limsup_n z_n$. Resulta que X es cerrado, cerrado hacia abajo y $X \subseteq cl(U) \subseteq U \vee U$. Para cada n y cada k tenemos

$$x_n \vee x_{n+1} \vee ... \vee x_{n+k} \in V_n.$$

Luego, $\bigvee_{i \geq n} x_i \in cl(V_n)$ y por lo tanto $x \in cl(V_n)$. Se sigue que $x \in X$, y de forma similar se prueba que $y, z \in X$.

Un argumento parecido prueba que para cada n y cada k,

$$x_n \vee x_{n+1} \vee ... \vee x_{n+k} \vee X \subseteq cl(V_n),$$

y entonces $\bigvee_{i \geq n} x_i \vee X \subseteq cl(V_n)$. Como $cl(V_n)$ es cerrado hacia abajo y $x \leq \bigvee_{i \geq n} x_i$, tenemos $x \vee X \subseteq cl(V_n)$. Se sigue que $x \vee X \subseteq X$, y similarmente $y \vee X, z \vee X \subseteq X$.

Luego, $x \vee y \vee z \in X$, pues

$$\begin{aligned} z \vee X \subseteq X \text{ y } \mathbf{0} \in X &\Rightarrow z = z \vee \mathbf{0} \in X \\ &\Rightarrow y \vee z \in X \text{ pues } y \vee X \subseteq X \\ &\Rightarrow x \vee y \vee z \in X \text{ pues } x \vee X \subseteq X, \end{aligned}$$

y por lo tanto en $U \vee U$. Como $U \vee U$ es abierto y

$$x \vee y \vee z = \limsup_n \, (x_n \vee y_n \vee z_n),$$

existe $n_0 \in \omega$ tal que $\bigvee_{k \geq n} (x_k \vee y_k \vee z_k) \in U \vee U$ para todo $n \geq n_0$, pero entonces, por ser $U \vee U$ cerrado hacia abajo, resulta $x_{n_0} \vee y_{n_0} \vee z_{n_0} \in U \vee U$, lo que es absurdo. ■

Notar que, para U y V como en el lema anterior, resulta $U \cap V \in \mathcal{N}$, $U \cap V \subseteq U$ y $(U \cap V) \vee (U \cap V) \vee (U \cap V) \subseteq V \vee V \vee V \subseteq U \vee U$.

Demostración del Teorema 6.2 (a). Veamos en primer lugar que para todo $b > \mathbf{0}$ existen $c \leq b$ no nulo y una sucesión $(V_n)_{n \in \omega}$ en $\mathcal{N}$ tales que $c \wedge \bigvee (\bigcap_n V_n) = \mathbf{0}$.

Como el espacio es Hausdorff, existe $V_0 \in \mathcal{N}$ tal que $b \notin V_0 \vee V_0$, pues

$$\begin{aligned} B \text{ Hausdorff}, b > \mathbf{0} &\Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{N} \;/\; b \notin cl(U) \\ &\Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{N} \;/\; b \notin U \vee V \\ &\Rightarrow b \notin (U \cap V) \vee (U \cap V) \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

y definimos $V_0 := U \cap V$ (notar que podemos usar el Lema 6.5 pues B es débilmente distributiva por el Lema 6.3).

Para cada n sea $V_{n+1} \in \mathcal{N}$ tal que $V_{n+1} \subseteq V_n$ y $V_{n+1} \vee V_{n+1} \vee V_{n+1} \subseteq V_n \vee V_n$ (donde usamos el Lema 6.6). Sean $A := \bigcap_n V_n$ y $a := \bigvee A$.

Para cada n tenemos $V_2 \vee V_2 \supseteq V_{n+2} \vee .... \vee V_{n+2}$ ($n+2$ veces), pues

$$\begin{aligned} V_2 \vee V_2 &\supseteq V_3 \vee V_3 \vee V_3 \supseteq V_4 \vee V_4 \vee V_4 \vee V_3 \\ &\supseteq V_4 \vee V_4 \vee V_4 \vee V_4 \supseteq V_5 \vee V_5 \vee V_5 \vee V_4 \vee V_4 \\ &\supseteq V_5 \vee V_5 \vee V_5 \vee V_5 \vee V_5 \end{aligned}$$

y así siguiendo, y por eso $V_2 \vee V_2 \supseteq A \vee .... \vee A$ (n veces). Como $a = \lim_n (a_1 \vee ... \vee a_n)$ para alguna sucesión $(a_n)_{n\in\omega}$ en A (pues existe $D \subseteq A$ contable tal que A y D tienen las mismas cotas superiores, por lo tanto $\bigvee A = \bigvee D$, y si suponemos $D = \{a_n : n \in \omega\}$ resulta $a = \bigvee_n a_n = \lim_n (a_1 \vee ... \vee a_n)$), tenemos $a \in cl(V_2 \vee V_2)$. Por lo tanto,

$$a \in V_2 \vee V_2 \vee V_2 \vee V_2 \subseteq V_0 \vee V_0,$$

y como $V_0 \vee V_0$ es cerrado hacia abajo resulta $b \not\leq a$, que implica

$$\mathbf{0} < b \wedge -a = b - a.$$

Entonces $c \wedge \bigvee A = \mathbf{0}$, donde $c := b - a$.

Sea C una anticadena maximal tal que para cada $c \in C$ exista $(V_{c,n})_{n\in\omega}$ en $\mathcal{N}$ tal que $c \wedge \bigvee(\bigcap_n V_{c,n}) = \mathbf{0}$.

Luego, $\{V_{c,n} : c \in C, n \in \omega\}$ es un conjunto contable de entornos abiertos de $\mathbf{0}$ y $\bigcap_c \bigcap_n V_{c,n} = \{\mathbf{0}\}$, pues

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_c \bigcap_n V_{c,n} &\Rightarrow c \wedge x \leq c \wedge \bigvee \left(\bigcap_n V_{c,n} \right) = \mathbf{0} \;\forall\, c \in C \\ &\Rightarrow x \wedge c = \mathbf{0} \;\forall\, c \in C \Rightarrow x = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

pues C es anticadena maximal. Entonces, (B, τ) tiene la propiedad G_δ. ■

Demostración del Teorema 6.2 (b). Por tener (B, τ) la propiedad G_δ, existe una sucesión $(W_n)_{n\in\omega}$ de entornos abiertos de $\mathbf{0}$ tal que $\bigcap_n W_n = \{\mathbf{0}\}$. Como B es débilmente distributiva, por el Lema 6.5 (b), para cada n existe $U_n \in \mathcal{N}$ tal que $U_n \subseteq W_n$, y por lo tanto $\bigcap_n U_n = \{\mathbf{0}\}$. Luego, por el Teorema 5.8 (iii), resulta $\bigcap_n cl(U_n) = \mathbf{0}$.

Veamos primero que la operación $\vee$ es continua (basta probarlo para $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ pues τ está determinada por los entornos de $\mathbf{0}$). Supongamos que $\vee$ no es continua en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Luego, existe $U \in \mathcal{N}$ tal que para todo $V \in \mathcal{N}$ existen $x, y \in V$ con $x \vee y \notin U$, pues $\vee$ no continua en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ implica que existe $W \subseteq B$ entorno abierto de $\mathbf{0}$ tal que $\vee(\tilde{W}) \not\subseteq W$ para todo $\tilde{W} \subseteq B \times B$ entorno abierto de $(\mathbf{0},\mathbf{0})$. En particular, $\vee(V \times V) \not\subseteq W$ para todo $V \in \mathcal{N}$. Luego, se toma $U \in \mathcal{N}$ tal que $U \subseteq W$.

Definimos ahora sucesiones $(V_n)_{n\in\omega}$, $(x_n)_{n\in\omega}$ e $(y_n)_{n\in\omega}$. Sea $V_0 := U_0 \cap U$. Para cada n, sean $x_n, y_n \in V_n$ tales que $x_n \vee y_n \notin U$. Por la continuidad a un lado de $\vee$ existe $V_{n+1} \subseteq U_{n+1}$ tal que

$$x_n \vee V_{n+1} \subseteq V_n \;\text{ e }\; y_n \vee V_{n+1} \subseteq V_n$$

(se usó una idea similar en la demostración del Lema 6.6). Sean

$$x := \limsup_n x_n \;\text{ e }\; y := \limsup_n y_n.$$

Para cada n y cada k tenemos

$$x_n \vee x_{n+1} \vee ... \vee x_{n+k} \in V_n.$$

Luego, $\bigvee_{k\geq n} x_k \in cl(V_n)$, y por lo tanto $x \in cl(V_n)$. Se sigue que $x = \mathbf{0}$. Similarmente, $y = \mathbf{0}$ y entonces $x \vee y = \mathbf{0}$.

Entonces, $\limsup_n (x_n \vee y_n) = x \vee y = \mathbf{0} \in U$ implica que existe $n_0 \in \omega$ tal que $\bigvee_{k\geq n} (x_k \vee y_k) \in U$ para todo $n \geq n_0$, y como U es cerrado hacia abajo resulta $x_{n_0} \vee y_{n_0} \in U$, lo que es absurdo.

Probemos ahora que (B, τ) es primero contable (también basta probarlo para $\mathbf{0}$ por la misma razón que antes). Por la continuidad de $\vee$ y por la propiedad G_δ existe $(U_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{N}$ tal que

$$\bigcap_n cl(U_n) = \{\mathbf{0}\} \;\text{ y }\; U_{n+1} \vee U_{n+1} \subseteq U_n$$

para todo n. Afirmamos que $(U_n)_{n\in\omega}$ es una base de entornos de $\mathbf{0}$. Supongamos que no. Luego, existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $U_n \not\subseteq V$ para todo n. Sea $x_n \in U_n - V$ para cada n. Se sigue por inducción sobre k que para cada n y cada k

$$x_{n+1} \vee x_{n+2} \vee ... \vee x_{n+k} \in U_n.$$

Entonces, $\bigvee_k x_{n+k} \in cl(U_n)$ y por lo tanto $\limsup_n x_n \in cl(U_n)$ para todo n. Luego, $\lim_n x_n = \mathbf{0}$. Esto es una contradicción pues V es un entorno abierto de $\mathbf{0}$. ∎

Demostración del Teorema 6.2 (c). $(B, \triangle, \mathbf{0})$ es un grupo topológico y un espacio primero contable. Por el Teorema de Kakutani, $(B, \triangle, \mathbf{0})$ tiene una métrica invariante, y por lo tanto B es un álgebra de Maharam, como en la demostrión del Teorema 3.2. ∎

Observación. En [3] se prueba que la contiuidad de $\vee$ es en sí misma suficiente para que B sea un álgebra de Maharam. La condición se puede expresar de la siguiente manera: para todo $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que

$V \vee V \subseteq U$. Comparar esto con la condición del Lema 6.6 que se cumple para toda B débilmente distributiva.

Demostración del Teorema 6.1. Debido al Corolario 6.4 es suficiente probar el teorema bajo la suposición de que B es débilmente distributiva.

Sean $D := \bigcap_{U \in \mathcal{N}} cl(U)$, $d := \bigvee D$ y $m := -d$. Luego, D es cerrado, cerrado hacia abajo (por el Lema 6.5 resulta $cl(U)$ cerrado hacia abajo para todo $U \in \mathcal{N}$) y $D = \bigcap_{U \in \mathcal{N}} (U \vee U)$, pues:

$\subseteq$) Vale porque, por el Lema 6.5, $cl(U) \subseteq U \vee U$ para todo $U \in \mathcal{N}$.

$\supseteq$) Sea $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}} (U \vee U)$. Sea $V \in \mathcal{N}$. Por el Lema 6.5 se tiene que $cl(V) = \bigcap_{W \in \mathcal{N}} (V \vee W)$. Sea $W \in \mathcal{N}$. Luego, $x \in (V \cap W) \vee (V \cap W) \subseteq V \vee W$ pues $V \cap W \in \mathcal{N}$.

Si $a \notin D$, en particular si $\mathbf{0} < a \leq m$ (pues si $\mathbf{0} < a \leq m$ y $a \in D$, entonces $a \leq d$, y por lo tanto $a \leq d \wedge m = \mathbf{0}$), resulta $a \notin U \vee U$ para algún $U \in \mathcal{N}$. Entonces, U y $a \vartriangle U$ son disjuntos, pues si $x, y \in U$ son tales que $x = a \vartriangle y$, se tiene $a = x \vartriangle y \in U \vartriangle U = U \vee U$ pues U es cerrado hacia abajo. Por lo tanto $(B \restriction m, \tau)$ es un espacio de Hausdorff (ver la sección 7), así que $B \restriction m$ es un álgebra de Maharam (por el Teorema 6.2).

Veamos ahora que en $B \restriction d$, todo conjunto abierto no vacío es topológicamente denso.

Probemos en primer lugar que $D = \bigcap_{V \in \mathcal{N}} (V \vee V \vee V \vee V)$.

$\subseteq$) Si $V \in \mathcal{N}$, $V \vee V \in \mathcal{N}$, y por lo tanto

$$\{V \vee V \vee V \vee V : V \in \mathcal{N}\} \subseteq \{U \vee U : U \in \mathcal{N}\}.$$

Luego, $D = \bigcap_{U \in \mathcal{N}} (U \vee U) \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{N}} (V \vee V \vee V \vee V)$.

$\supseteq$) Sea $x \in V \vee V \vee V \vee V$ para todo $V \in \mathcal{N}$. Sea $U \in \mathcal{N}$. Por el Lema 6.6 existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $W \vee W \vee W \subseteq U \vee U$. Por el mismo lema, existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $V \subseteq W$ y $V \vee V \vee V \subseteq W \vee W$. Luego,

$$V \vee V \vee V \vee V \subseteq W \vee W \vee V \subseteq W \vee W \vee W \subseteq U \vee U,$$

así que $x \in U \vee U$.

Probemos en segundo lugar que $D \vee D = D$.

$\subseteq$) Si $z \in D \vee D$, existen $x, y \in D = \bigcap_{U \in \mathcal{N}} (U \vee U)$ tales que $z = x \vee y$. Luego, $z = x \vee y \in (V \vee V) \vee (V \vee V) = V \vee V \vee V \vee V$ para todo $V \in \mathcal{N}$. Entonces, $z \in D = \bigcap_{V \in \mathcal{N}} (V \vee V \vee V \vee V)$.

$\supseteq$) Si $x \in D$, $x = x \vee \mathbf{0} \in D \vee D$.

Sea ahora $(a_n)_{n \in \omega}$ en D tal que $d = \lim_n (a_0 \vee ... \vee a_n)$. Como $D \vee D = D$ (que implica $\bigvee_{k \leq n} D = D$ para todo n) y D es cerrado, resulta $d \in D$. Como además D es cerrado hacia abajo, se sigue que $B \restriction d = D$.

Probemos finalmente que $cl(G) \supseteq D$ para todo conjunto abierto no vacío G en $B \restriction d$. Sea entonces G abierto no vacío en $B \restriction d$. Luego, si $a \in G$, existe $U \in \mathcal{N}$ tal que $G \supseteq (a \vartriangle U) \cap D$ (pues τ está determinada por los entornos de $\mathbf{0}$). Como $cl(U) \supseteq D$, tenemos $cl(a \vartriangle U) \supseteq a \vartriangle D$ (pues $cl(U) \supseteq D$ implica $cl(a \vartriangle U) = a \vartriangle cl(U) \supseteq a \vartriangle D$), y además $a \vartriangle D = D$, pues:

$\subseteq$) $a \vartriangle D \subseteq D \vartriangle D = D \vee D = D$, donde la primer igualdad vale por ser D cerrado hacia abajo.

$\supseteq$) Si $x \in D$, $x = a \vartriangle (a \vartriangle x) \in a \vartriangle D$, donde $a \vartriangle x \in D$ porque $D \vartriangle D = D$.

Sea ahora $x \in D$, y veamos que $x \in cl(G)$. Como $D = a \vartriangle D$, existe $y \in D$ tal que $x = a \vartriangle y$. Como $a \vartriangle D \subseteq cl(a \vartriangle U)$, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\omega} \subseteq U$ tal que $\lim_n (a \vartriangle y_n) = a \vartriangle y$, y por lo tanto $\lim_n y_n = y$. Luego, la sucesión $(y_n \wedge y)_{n\in\omega}$ está contenida en U y D por ser ambos conjuntos cerrados hacia abajo, y $\lim_n (y_n \wedge y) = y$. Entonces, la sucesión $(a \vartriangle (y_n \wedge y))_{n\in\omega}$ está contenida en $a \vartriangle U$ y en $a \vartriangle D = D$, y $\lim_n (a \vartriangle (y_n \wedge y)) = a \vartriangle y = x$, lo que implica que $x \in cl((a \vartriangle U) \cap D) \subseteq cl(G)$.

Por lo tanto, $cl(G) \supseteq D$. ■

7. Álgebras de Maharam

En esta sección presentaremos un número adicional de condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de Boole completa y ccc admita una submedida de Maharam. Resulta que algunas de las propiedades son generalizaciones naturales de las condiciones de distributividad débil vistas en la sección 5.

Por los resultados de las secciones 2 y 6, cada uno de los siguientes enunciados equivale a ser Maharam:

(B, τ) es metrizable (Maharam [20]), (7.1)

(B, τ) es Hausdorff (Balcar-Glówczyński-Jech [3]), (7.2)

B es débilmente distributiva y (B, τ) es primero contable (7.3)
(Maharam [20]),

B es débilmente distributiva y (B, τ) tiene la propiedad G_δ (7.4)
(Balcar-Jech-Pazák [5]).

Remarcamos que la suposición de la distributividad débil en (7.3) no es necesaria (pero sí lo es en (7.4)). El paper de Todorcevic [32] presenta (7.3) y (7.4) desde un punto de vista diferente.

La existencia de una familia $\mathcal{S}$ como la del siguiente resultado se conoce como ***Propiedad diagonal fuerte***.

Teorema 7.1. Sea B un álgebra de Boole completa y ccc. B es un álgebra de Maharam si y sólo si existe una familia $\mathcal{S}$ de sucesiones algebraicamente convergentes a $\mathbf{0}$ tal que toda sucesión con límite algebraico $\mathbf{0}$ tiene una subsucesión en $\mathcal{S}$, y si $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ está en $\mathcal{S}$, entonces $\lim_n a_n^n = \mathbf{0}$.

Demostración.
$\Rightarrow$) Si m es una submedida de Maharam, definimos

$$\mathcal{S} := \left\{ (a_n)_{n\in\omega} \text{ en } B : m(a_n) < \frac{1}{2^n} \ \forall\, n \right\}.$$

Veamos en primer lugar que si $(a_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{S}$ entonces $\lim_n a_n = \mathbf{0}$. Tenemos que

$$\lim_n a_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \limsup_n a_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_k = \mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow \left(x \leq \bigvee_{k\geq n} a_k \ \ \forall\, n \Rightarrow x = \mathbf{0} \right).$$

Sea entonces x tal que $x \leq \bigvee_{k\geq n} a_k$ para todo n. Luego,

$$m(x) \leq m\left(\bigvee_{k\geq n} a_k \right) \leq \sum_{k\geq n} m(a_k) \leq \sum_{k\geq n} \frac{1}{2^k} \ \ \forall\, n \Rightarrow m(x) = 0 \Rightarrow x = \mathbf{0}.$$

Veamos en segundo lugar que si $(a_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión que converge a $\mathbf{0}$, entonces existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\omega} \in \mathcal{S}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_n a_n = \mathbf{0} \Rightarrow \limsup_n a_n = \mathbf{0} \Rightarrow \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_k = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \lim_n m\left(\bigvee_{k\geq n} a_k\right) = 0, \text{ pues } \left(\bigvee_{k\geq n} a_k\right)_{n\in\omega} \text{ es decreciente} \\
&\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \;/\; m\left(\bigvee_{k\geq n} a_k\right) < \varepsilon\; \forall\, n \geq n_0 \\
&\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \;/\; m(a_n) < \varepsilon\; \forall\, n \geq n_0 \\
&\Rightarrow \exists\, (a_{n_k})_{k\in\omega} \;/\; m(a_{n_k}) < \frac{1}{2^k}\; \forall\, k \\
&\Rightarrow (a_{n_k})_{k\in\omega} \in \mathcal{S}.
\end{aligned}$$

Veamos en tercer lugar que si $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ en $\mathcal{S}$ entonces $\lim_n a_n^n = \mathbf{0}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_n a_n^n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \limsup_n a_n^n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \bigwedge_n \bigvee_{k\geq n} a_k^k = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \left(x \leq \bigvee_{k\geq n} a_k^k \;\; \forall\, n \Rightarrow x = \mathbf{0}\right).
\end{aligned}$$

Sea entonces x tal que $x \leq \bigvee_{k\geq n} a_k^k$ para todo n. Luego,

$$m(x) \leq m\left(\bigvee_{k\geq n} a_k^k\right) \leq \sum_{k\geq n} m(a_k^k) \leq \sum_{k\geq n} \frac{1}{2^k} \;\; \forall\, n \Rightarrow m(x) = 0 \Rightarrow x = \mathbf{0}.$$

$\Leftarrow$) Veamos en primer lugar que B tiene la propiedad diagonal. Para eso, sea $(a_k^n)_{k\in\omega}$ en B tal que $\lim_k a_k^n = \mathbf{0}$ para cada n. Luego, para cada n existe una sucesión $(b_k^n)_{k\in\omega}$ en B decreciente con ínfimo (y por lo tanto límite) $\mathbf{0}$ tal que $a_k^n \leq b_k^n$ para todo k. Entonces,

$$\lim_k b_k^n = \mathbf{0}\; \forall\, n \Rightarrow \forall\, n\; \exists\, (b_{k_j^n}^n)_{j\in\omega} \in \mathcal{S} \Rightarrow \lim_n b_{k_n^n}^n = \mathbf{0},$$

y por lo tanto podemos definir $f(0) := k_0^0$ y $f(n+1) := \max\{k_n^n + 1, k_{n+1}^{n+1}\}$ para cada n. Por lo tanto,

$$a_{f(n)}^n \leq b_{f(n)}^n \leq b_{k_n^n}^n$$

para todo n, que implica que $\lim_n a_{f(n)}^n = \mathbf{0}$. Luego, por el Teorema 5.3 (ii), B es débilmente distributiva.

Veamos ahora que (B, τ) tiene la propiedad G_δ. Para cada n definamos

$$U_n := \{x \in B : \exists\, (a_k)_{k\in\omega} \in \mathcal{S} \;/\; x \leq a_n\},$$

y veamos que $\mathbf{0}$ es un punto interior de cada U_n y que $\bigcap_n U_n = \{\mathbf{0}\}$.

Supongamos que $\mathbf{0} \notin U_n^o$. Luego, $\mathbf{0} \in cl(U_n^c)$. Entonces, por el Lema 6.5 (a), existe $(x_k)_{k\in\omega}$ en U_n^c tal que $\lim_k x_k = \mathbf{0}$. Luego, $x_k \nleq a_n$ para todo k y toda $(a_k)_{k\in\omega} \in \mathcal{S}$. Por hipótesis, existe una subsucesión $(x_{k_j})_{j\in\omega} \in \mathcal{S}$, y por lo tanto, $x_{k_j} \nleq x_{k_n}$ para todo j, lo que es absurdo pues $x_{k_n} \leq x_{k_n}$. Luego, $\mathbf{0} \in U_n^o$.

Por otro lado,

$$x \in \bigcap_n U_n \Rightarrow \forall\ n\ \exists\ (a_k^n)_{k\in\omega} \in \mathcal{S}\ /\ x \leq a_n^n$$
$$\Rightarrow m(x) \leq m(a_n^n) < \frac{1}{2^n}\ \forall\ n \Rightarrow x = \mathbf{0}.$$

Luego, (B,τ) tiene la propiedad G_δ. Entonces, por el Teorema 4.2, B es un álgebra de Maharam. ■

Consideramos a continuación tres propiedades relacionadas con el espacio (B,τ) que resultan equivalentes a la existencia de una submedida de Maharam. La primera es una reformulación del ser un espacio de Hausdorff: si (B,τ) es un espacio de Hausdorff, es claro que todo $a > \mathbf{0}$ tiene un entorno abierto G tal que $\mathbf{0} \notin cl(G)$, y si vale tal propiedad, para $a, b \in B$ no nulos y distintos entre sí, tenemos que

$$a \neq b \Rightarrow a \triangle b > \mathbf{0} \Rightarrow \exists\ G \text{ entorno abierto de } a \triangle b\ /\ \mathbf{0} \notin cl(G)$$
$$\Rightarrow G \triangle b \text{ entorno abierto de } a\ /\ \mathbf{b} \notin cl(G \triangle b),$$

y por lo tanto (B,τ) es un espacio de Hausdorff.

Teorema 7.2. Sea B un álgebra de Boole completa y ccc. Son equivalentes:

(i) B es un álgebra de Maharam.

(ii) Todo $a > \mathbf{0}$ tiene un entorno abierto G tal que $\mathbf{0} \notin cl(G)$.

(iii) Todo $a > \mathbf{0}$ tiene un entorno abierto G tal que $G \cap X$ es finito para todo X con límite $\mathbf{0}$ (es decir, $X \in \mathcal{I}$).

(iv) Todo $a > \mathbf{0}$ tiene un entorno abierto G tal que toda anticadena $A \subseteq G$ es finita.

Demostración. Por lo dicho anteriormente ya sabemos que (i) y (ii) son equivalentes. Probemos lo que resta.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea $a > \mathbf{0}$. Sea G un entorno abierto de a tal que $\mathbf{0} \notin cl(G)$. Supongamos que existe $X \in \mathcal{I}$ tal que $G \cap X$ es infinito. Luego, existe $(a_n)_{n\in\omega}$ en G tal que $\lim_n a_n = \mathbf{0}$, lo que es absurdo.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sea $a > \mathbf{0}$. Sea G un entorno abierto de a tal que $G \cap X$ es finito para todo $X \in \mathcal{I}$. Luego, toda anticadena $A \subseteq G$ es finita pues toda anticadena es elemento de $\mathcal{I}$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos que el espacio no es de Hausdorff. Por el Teorema de descomposición 6.1, existe $d > \mathbf{0}$ tal que en $B \restriction d$, dos conjuntos abiertos no vacíos cualesquiera se intersecan. Afirmamos que todo entorno abierto de d incluye una anticadena infinita.

Sea G un entorno abierto de d. Por ser $\{\mathbf{0}\}$ cerrado, $G - \{\mathbf{0}\}$ es un entorno abierto de d. Afirmamos que los conjuntos

$$\{x \in B : x \leq d \text{ y } x \in G - \{\mathbf{0}\}\} \quad \text{y} \quad \{x \in B : x \leq d \text{ y } d - x \in G - \{\mathbf{0}\}\}$$

son abiertos no vacíos de $B \upharpoonright d$ (notar que en el primero está d y en el segundo está $\mathbf{0}$).

En primer lugar,

$$\{x \in B : x \leq d \text{ y } x \in G - \{\mathbf{0}\}\} = (G - \{\mathbf{0}\}) \cap (B \upharpoonright d).$$

En segundo lugar,

$$\{x \in B : x \leq d \text{ y } d - x \in G - \{\mathbf{0}\}\} = \{x \in B : d - x \notin G - \{\mathbf{0}\}\}^c \cap (B \upharpoonright d),$$

y $\{x \in B : d - x \notin G - \{\mathbf{0}\}\}$ es cerrado pues si $(x_n)_{n\in\omega}$ y x son tales que $d - x_n \notin G - \{\mathbf{0}\}$ para todo n y $\lim_n x_n = x$, por ser $G - \{\mathbf{0}\}$ abierto, si fuera $d - x \in G - \{\mathbf{0}\}$, existiría n_0 tal que $d - x_n \in G - \{\mathbf{0}\}$ para todo $n \geq n_0$, lo que es absurdo.

Luego,

$$\{x \in B : x \leq d \text{ y } x \in G - \{\mathbf{0}\}\} \cap \{x \in B : x \leq d \text{ y } d - x \in G - \{\mathbf{0}\}\} \neq \varnothing,$$

y si a_1 está en tal intersección y definimos $a_2 := d - a_1$, resultan $a_1, a_2 \in G - \{\mathbf{0}\}$ disjuntos con $a_1 < d$ y $a_2 < d$. Continuando esto, producimos una anticadena infinita en G. ■

El siguiente resultado contiene tres propiedades que involucran una descomposición de B^+ en un número contable de partes (***fragmentaciones***) y están relacionadas con las condiciones del teorema anterior: (ii) es una reformulación de la propiedad G_δ, mientras que (iv) es la condición de la cadena σ-finita de Horn y Tarski (entonces el Teorema 7.3 (iv) prueba el Teorema de Todorcevic 4.4).

Teorema 7.3. Sea B un álgebra de Boole completa, ccc y débilmente distributiva. Son equivalentes:

(i) B es un álgebra de Maharam.

(ii) $B^+ = \bigcup_n S_n$ tal que para cada n, S_n es cerrado.

(iii) $B^+ = \bigcup_n S_n$ tal que para cada n, $S_n \cap X$ es finito para todo $X \in \mathcal{I}$.

(iv) $B^+ = \bigcup_n S_n$ tal que para cada n, $S_n \cap A$ es finito para toda anticadena A.

Demostración. Como es claro que (ii) implica (iii) y que (iii) implica (iv), basta ver que (i) implica (ii) y que (iv) implica 7.2 (iv).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Definimos para cada n el conjunto $S_n := \{a \in B : m(a) \geq \frac{1}{n}\}$. Es claro que $B^+ = \bigcup_n S_n$. Veamos que cada S_n es cerrado.

Sea $(a_k)_{k\in\omega} \subseteq S_n$ tal que $\lim_k a_k = a$. Como $\lim_k a_k = a$, existe $(b_k)_{k\in\omega}$ decreciente con $\bigwedge_{k\in\omega} b_k = \mathbf{0}$ tal que $a_k \vartriangle a \leq b_k$. Luego, $\lim_k m(a_k \vartriangle a) = 0$. Como $a_k = (a_k \wedge a) \vee ((a_k \vartriangle a) - a)$,

$$\begin{aligned} m(a_k) &\leq m(a_k \wedge a) + m((a_k \vartriangle a) - a) \leq m(a) + m(a_k \vartriangle a) \\ &\Rightarrow m(a) \geq m(a_k) - m(a_k \vartriangle a) \geq \frac{1}{n} - m(a_k \vartriangle a) \ \forall\ k \\ &\Rightarrow m(a) \geq \frac{1}{n} \Rightarrow a \in S_n. \end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ 7.2 (iv) Sea $(S_n)_{n\in\omega}$ como en (iv). Veamos que existe $(\tilde{S}_n)_{n\in\omega}$ cumpliendo (iv) con $\tilde{S}_n$ cerrado hacia arriba para todo n. Definimos

$$\tilde{S}_n := \{x \in B : \exists\ y \in S_n \text{ con } y \leq x\}.$$

Luego, $B^+ = \bigcup_n \tilde{S}_n$, $S_n \subseteq \tilde{S}_n$ y $\tilde{S}_n$ es cerrado hacia arriba para todo n. Por otro lado, si A es una anticadena y $x_1, x_2 \in \tilde{S}_n \cap A$ son distintos, existen $y_1, y_2 \in S_n$ tales que $y_1 \leq x_1$ e $y_2 \leq x_2$. Entonces,

$$y_1 \wedge y_2 \leq x_1 \wedge x_2 = \mathbf{0} \Rightarrow y_1 \wedge y_2 = \mathbf{0}$$

($y_1 \neq y_2$ pues S_n no contiene a $\mathbf{0}$ y x_1 y x_2 son disjuntos). Entonces, si $\tilde{S}_n \cap A$ fuera infinito, S_n contendría una anticadena infinita, lo que es absurdo.

Entonces, definiendo $U_n := B - \tilde{S}_n$ para cada n, vale que $\bigcap_n U_n = \{\mathbf{0}\}$, y como U_n es cerrado hacia abajo por ser $\tilde{S}_n$ cerrado hacia arriba y B es débilmente distributiva, resulta $\bigcap_n cl(U_n) = \{\mathbf{0}\}$ por 5.8 (iv). Se sigue que todo $a > \mathbf{0}$ es un punto interior de algún $\tilde{S}_n$, porque

$$a > \mathbf{0} \Rightarrow \exists\ n\ /\ a \notin cl(U_n) \Rightarrow a \in B - cl(U_n),$$

que es un abierto contenido en $\tilde{S}_n$. Luego, como $\tilde{S}_n \cap A$ es finito para toda anticadena A, toda anticadena contenida en $B - cl(U_n)$ es finita. ∎

Finalmente, mostramos que las versiones estratégicas de distributividad débil equivalen a admitir una submedida de Maharam. Consideramos dos juegos, uno para cada una de las propiedades 5.2 (iv) y 5.3 (ii) de la sección 5. El juego de distributividad débil es la modificación de Fremlin de un juego introducido por Jech en 1980 (ver [12]) y por Gray en [9]. El juego diagonal es una reformulación de Balcar y Jech. En diciembre de 2004, Fremlin demostró el Teorema 7.4 enunciado a continuación para el juego de distributividad débil (ver [8]).

Cada uno de los juegos siguientes es un juego infinito de dos jugadores. Los jugadores I y II se turnan para producir sucesivamente dos sucesiones infinitas de movimientos. Consideramos las propiedades de B expresadas en términos de estrategias ganadoras.

Juego de distributividad débil. I juega anticadenas maximales A_n para cada n, y II juega subconjuntos finitos $E_n \subseteq A_n$. II gana si y sólo si $\lim_n \bigvee E_n = \mathbf{1}$.

Juego diagonal. I juega sucesiones $(a_k^n)_{k\in\omega}$ para cada n, cada una convergiendo algebraicamente a $\mathbf{0}$, y II juega elementos $k(n) \in \omega$. II gana si y sólo si $\text{lím}_n\, a_{k(n)}^n = \mathbf{0}$.

Estos juegos corresponden a las propiedades en los Teoremas 5.2 (iv) y 5.3 (ii), y para álgebras de Boole completas y ccc son mutuamente equivalentes, es decir, I (respectivamente II) tiene una estrategia ganadora en un juego si y sólo si I (respectivamente II) tiene una estrategia ganadora en otro juego. Se puede demostrar que si B es un álgebra de Boole completa y ccc entonces B es débilmente distributiva si y sólo si I no tiene estrategia ganadora (ver [12]).

Teorema 7.4 (Fremlin [8]). Sea B un álgebra de Boole completa y ccc. B es un álgebra de Maharam si y sólo si el jugador II tiene una estrategia ganadora en cualquiera de los dos juegos.

Demostración.

$\Rightarrow$) Consideremos el juego diagonal. Si m es una submedida de Maharam, entonces II tiene la siguiente estrategia ganadora: en el movimiento n, II juega $k(n)$ tal que $m(a_{k(n)}^n) < \frac{1}{2^n}$. En ese caso resulta

$$\begin{aligned} m\left(\limsup_n a_{k(n)}^n\right) &\le m\left(\bigvee_{j\ge n} a_{k(j)}^j\right) \le \sum_{j\ge n} m(a_{k(j)}^j) \\ &\le \sum_{j\ge n} \frac{1}{2^j} \quad \forall\, n \\ &\Rightarrow m(\limsup_n a_{k(n)}^n) = 0 \\ &\Rightarrow \limsup_n a_{k(n)}^n = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \lim_n a_{k(n)}^n = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Veamos primero que si II tiene una estrategia ganadora, entonces B tiene la propiedad diagonal (y por lo tanto será débilmente distributiva).

Sea $((a_k^n)_{k\in\omega})_{n\in\omega}$ tal que $\text{lím}_k\, a_k^n = \mathbf{0}$ para todo n. Veamos que existe una función $f \in \omega^\omega$ creciente tal que $\text{lím}_n\, a_{f(n)}^n = \mathbf{0}$. Como $\text{lím}_k\, a_k^n = \mathbf{0}$, para cada n existe una sucesión $(b_k^n)_{k\in\omega}$ decreciente con $\bigwedge_k b_k^n = \mathbf{0}$ tal que $a_k^n \le b_k^n$. Por hipótesis, existe $k \in \omega^\omega$ tal que $\text{lím}_n\, b_{k(n)}^n = \mathbf{0}$. Definimos $f \in \omega^\omega$ por recurrencia: $f(0) := k(0)$ y $f(n+1) := \text{máx}\{f(n)+1, k(n+1)\}$ para cada n.

Entonces,

$$\begin{aligned} f(n) \ge k(n)\ \forall\, n &\Rightarrow b_{f(n)}^n \le b_{k(n)}^n\ \forall\, n \\ &\Rightarrow \bigvee_{j\ge n} b_{f(j)}^j \le \bigvee_{j\ge n} b_{k(j)}^j\ \forall\, n \\ &\Rightarrow \bigwedge_n \bigvee_{j\ge n} b_{f(j)}^j \le \bigwedge_n \bigvee_{j\ge n} b_{k(j)}^j = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \lim_n b_{f(n)}^n = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
a^n_{f(n)} \leq b^n_{f(n)} \ \forall\ n &\Rightarrow \bigvee_{j\geq n} a^j_{f(j)} \leq \bigvee_{j\geq n} b^j_{f(j)} \ \forall\ n \\
&\Rightarrow \bigwedge_n \bigvee_{j\geq n} a^j_{f(j)} \leq \bigwedge_n \bigvee_{j\geq n} b^j_{f(j)} = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \lim_n a^n_{f(n)} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que (B, τ) es un espacio de Hausdorff. Si no lo es, por el Teorema de descomposición 6.1 existe algún $d > \mathbf{0}$ tal que en $B \restriction d$, dos conjuntos abiertos no vacíos cualesquiera se intersecan. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $d = \mathbf{1}$ porque II tiene una estrategia ganadora en $B \restriction d$ (como II tiene una estrategia ganadora en B, si $\lim_k a^n_k = \mathbf{0}$ para todo n, existe $(k(n))_{n\in\omega}$ tal que $\lim_n a^n_{k(n)} = \mathbf{0}$, y en particular vale si $a^n_k \leq d$ para todos n y k).

Sea σ_0 una estrategia ganadora para el jugador II en el juego diagonal, y sea σ_1 una estrategia ganadora para II en un juego relacionado donde I juega sucesiones convergiendo a $\mathbf{1}$ y II intenta construir una sucesión diagonal con límite $\mathbf{1}$. Sean X_0 e Y_0 los conjuntos de todos los elementos de B dados por los primeros movimientos del jugador II usando σ_0 y σ_1 respectivamente, es decir,

$$X_0 := \{x_{k(0)} : k(0) = \sigma_0((x_j)_{j\in\omega}) \text{ donde } \lim_j x_j = \mathbf{0}\},$$

$$Y_0 := \{y_{k(0)} : k(0) = \sigma_1((y_j)_{j\in\omega}) \text{ donde } \lim_j y_j = \mathbf{1}\}.$$

Afirmamos que $\mathbf{0}$ es un punto interior de X_0. Si no lo es, existe una sucesión $(a_n)_{n\in\omega}$ en X_0^c que converge a $\mathbf{0}$, pues $\mathbf{0} \notin X_0^\circ$ si y sólo si $\mathbf{0} \in cl(X_0^c)$ (donde usamos que B es débilmente distributiva; recordar el Lema 6.5 (a)). Pero si $k(0) = \sigma_0((a_n)_{n\in\omega})$, entonces $a_{k(0)} \in X_0$, una contradicción. De manera similar se prueba que $\mathbf{1}$ es un punto interior de Y_0.

Luego, como dos conjuntos abiertos no vacíos cualesquiera se intersecan, se tiene que $X_0^\circ \cap Y_0^\circ \neq \varnothing$, y por lo tanto $X_0 \cap Y_0 \neq \varnothing$. Sea $a_0 \in X_0 \cap Y_0$. Existen sucesiones $(x^0_n)_{n\in\omega}$ e $(y^0_n)_{n\in\omega}$ tales que $a_0 = x^0_{k(0)} = y^0_{l(0)}$, donde $k(0) = \sigma_0((x^0_n)_{n\in\omega})$ y $l(0) = \sigma_1((y^0_n)_{n\in\omega})$. Sean X_1 e Y_1, respectivamente, los conjuntos de todos los elementos de B dados por los segundos movimientos del jugador II usando σ_0 y σ_1 respectivamente, con el primer movimiento de I dado por $(x^0_n)_{n\in\omega}$ e $(y^0_n)_{n\in\omega}$, respectivamente. Otra vez, $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son, respectivamente, puntos interiores de X_1 e Y_1; por lo tanto $X_1 \cap Y_1 \neq \varnothing$ y existen sucesiones $(x^1_n)_{n\in\omega}$ e $(y^1_n)_{n\in\omega}$ tales que $a_1 = x^1_{k(1)} = y^1_{l(1)}$, donde $k(1) = \sigma_0((x^0_n)_{n\in\omega}, (x^1_n)_{n\in\omega})$ y $l(1) = \sigma_1((y^0_n)_{n\in\omega}, (y^1_n)_{n\in\omega})$. Siguiendo de esta manera, se obtiene una sucesión $(a_n)_{n\in\omega}$. Como σ_0 y σ_1 son estrategias ganadoras, tenemos que $\lim_n a_n = \mathbf{0}$ y $\lim_n a_n = \mathbf{1}$, lo que es absurdo.

Entonces, (B, τ) es un espacio de Hausdorff y por lo tanto B es un álgebra de Maharam. ■

8. El problema de la consistencia (segunda parte)

Probamos el Teorema 4.3, y por lo tanto damos la respuesta al problema 3, utilizando un resultado de consistencia general de Todorcevic y una de las equivalencias presentadas en la sección 7.

Dicotomía P-ideal (Todorcevic). Sea S un conjunto infinito. Entonces, para todo P-ideal $I \subseteq [S]^\omega$,
(i) $\exists\, Y \subseteq S$ no contable tal que $[Y]^\omega \subseteq I$, o
(ii) $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ tal que para cada n, $S_n \cap X$ es finito para todo $X \in I$.

Teorema 8.1 (Todorcevic [31]). La dicotomía P-ideal es consistente con ZFC.

El Teorema 4.3 es ahora una consecuencia del siguiente resultado.

Teorema 8.2 (Balcar-Jech-Pazák [5]). Suponiendo válida la dicotomía P-ideal, toda álgebra de Boole completa, ccc y débilmente distributiva admite una submedida de Maharam.

Demostración. Sea B un álgebra de Boole completa débilmente distributiva ccc, y sea $\mathcal{I}$ el ideal de convergencia de B. Por el Teorema 5.6, $\mathcal{I}$ es un P-ideal. Notar que la condición (ii) para $\mathcal{I}$ en la dicotomía P-ideal es exactamente la condición (iii) en el Teorema 7.3, que implica que B es un álgebra de Maharam.

Por lo tanto basta demostrar que la condición (i) en la dicotomía P-ideal falla para $\mathcal{I}$. Esto se prueba en el siguiente lema, completando la demostración del Teorema 8.2 (si valiera (i) de la dicotomía P-ideal, existiría $Y \subseteq B^+$ no contable tal que $[Y]^\omega \subseteq \mathcal{I}$. Luego, por el Lema 8.3, existiría $X \subseteq Y$ contable tal que $\limsup X > \mathbf{0}$, pero eso es absurdo, pues $X \subseteq Y$ contable $\Rightarrow X \in \mathcal{I} \Rightarrow \limsup X = \mathbf{0}$). ■

Lema 8.3. Sea B un álgebra de Boole completa y ccc. Para todo $Y \subseteq B^+$ no contable existe $X \subseteq Y$ contable tal que $\limsup X > \mathbf{0}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que Y tiene cardinal $\aleph_1$. Sea $Y = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Para cada $\alpha < \omega_1$, sea $b_\alpha := \bigvee_{\xi\geq\alpha} a_\xi$. Luego, $(b_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ es decreciente. Veamos que existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $b_\alpha = b_{\alpha_0}$ para todo $\alpha_0 \leq \alpha < \omega_1$. Para cada $\alpha < \omega_1$ notaremos α' al ordinal sucesor de α, y α^* al primer ordinal límite mayor que α (que existe por ser $\alpha < \omega_1$).

Sean

$$T := \{\alpha < \omega_1 : b_\alpha > b_{\alpha'}\} \quad \text{y} \quad T' := \{b_\alpha \wedge -b_{\alpha'} : \alpha \in T\}.$$

Afirmamos que T' es una anticadena de T. Sean $\alpha, \beta \in T$ con $\alpha \neq \beta$. Supongamos que $\alpha < \beta$. Luego, $\alpha' \leq \beta$, y por lo tanto $b_{\alpha'} \geq b_\beta$. Entonces $-b_{\alpha'} \wedge b_\beta = \mathbf{0}$, que implica $(b_\alpha \wedge -b_{\alpha'}) \wedge (b_\beta \wedge -b_{\beta'}) = \mathbf{0}$.

Como B es ccc, T resulta ser contable. Sea $\alpha_1 := \bigvee T$. Luego, $\alpha_1 < \omega_1$ pues es unión contable de ordinales menores que ω_1 (los elementos de T). Por construcción se sigue que si $\alpha_2 := \alpha_1'$, entonces $b_\alpha = b_{\alpha'}$ para todo $\alpha_2 \leq \alpha < \omega_1$.

Sean

$$U := \{\alpha < \omega_1 : \alpha \in L \text{ y } b_\alpha > b_{\alpha^*}\} \quad \text{y} \quad U' := \{b_\alpha \wedge -b_{\alpha^*} : \alpha \in U\},$$

donde L es la colección de los ordinales límite. Notar que si $\alpha < \omega_1$ entonces $\alpha^* < \omega_1$ por ser α^* contable. Razonando de manera similar a la anterior se prueba que U' es contable, y tomando un ordinal α_0 tal que

$$\text{máx}\{\alpha_2, \bigvee U\} < \alpha_0 < \omega_1,$$

se sigue por inducción transfinita que $b_\alpha = b_{\alpha_0}$ para todo $\alpha_0 \leq \alpha < \omega_1$.

Sea $b := b_{\alpha_0}$. Veamos que para cada $\alpha_0 \leq \alpha < \omega_1$ existe $\alpha < f(\alpha) < \omega_1$ tal que

$$b_\alpha = \bigvee_{\alpha \leq \xi < f(\alpha)} a_\xi.$$

Sea $\alpha_0 \leq \alpha < \omega_1$. Para cada $\alpha < \beta < \omega_1$ definimos $c_\beta := \bigvee_{\alpha \leq \xi < \beta} a_\xi$. Luego, $(c_\beta)_{\alpha < \beta < \omega_1}$ es creciente. Usando un argumento similar al de arriba se prueba que existe $\alpha < f(\alpha) < \omega_1$ tal que $c_\beta = c_{f(\alpha)}$ para todo $f(\alpha) \leq \beta < \omega_1$. Afirmamos que $b_\alpha = \bigvee_{\alpha \leq \xi < f(\alpha)} a_\xi$. Para eso basta ver que $a_\xi \leq \bigvee_{\alpha \leq \xi < f(\alpha)} a_\xi$ para todo $f(\alpha) \leq \xi < \omega_1$. Luego, si $f(\alpha) \leq \xi < \omega_1$, resulta

$$a_\xi \leq \bigvee_{\alpha \leq \gamma < \xi'} a_\gamma = c_{\xi'} = c_{f(\alpha)} = \bigvee_{\alpha \leq \gamma < f(\alpha)} a_\gamma.$$

Si $\alpha_{n+1} := f(\alpha_n)$ para cada $n \in \omega$ y $\alpha_\omega := \text{lím}_n \, \alpha_n$, definiendo

$$X := \{a_\xi : \alpha_0 \leq \xi < \alpha_\omega\}$$

resulta X contable, y por lo tanto podemos escribir $X = \{a_{n_k} : k \in \omega\}$. Luego, como $b = b_\alpha = c_{f(\alpha)}$ para todo $\alpha_0 \leq \alpha < \omega_1$, resulta que para cada $j \in \omega$, $\bigvee_{k \geq j} a_{n_k} = b$, que implica que $\text{lím sup}\, X = b$. ■

9. Trabajo a futuro

Así como el concepto de medida en álgebras de Boole es una abstracción del concepto de medida utilizada en Análisis, podemos del mismo modo definir el concepto de medida exterior en álgebras de Boole como sigue.

Sea B un álgebra de Boole. Una ***medida exterior finitamente subaditiva*** en B es una función $\mu^* : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que verifica las siguientes condiciones:

(i) $\mu^*(\mathbf{0}) = 0$.
(ii) Si $a, b \in B$, entonces $\mu^*(a) \leq \mu^*(b)$.
(iii) Si $a, b \in B$, entonces $\mu^*(a \vee b) \leq \mu^*(a) + \mu^*(b)$.

Si B es una σ-álgebra de Boole, una ***medida exterior contablemente subaditiva*** en B es una función $\mu^* : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que verifica las condiciones (i) y (ii) anteriores y (iv), donde

(iv) Si $(a_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión de elementos de B, entonces

$$\mu^*\left(\bigvee_n a_n\right) \leq \sum_n \mu^*(a_n).$$

Es claro que toda medida exterior contablemente subaditiva definida en una σ-álgebra de Boole es también finitamente subaditiva. Es importante destacar que en la Teoría de la Medida las álgebras de Boole que se consideran son σ-álgebras de conjuntos y las medidas exteriores son siempre contablemente subaditivas. Sin embargo, uno puede a través de la definición anterior debilitar dichos conceptos y trabajar con medidas exteriores que sean solamente finitamente subaditivas. Notar tambien que toda submedida continua en el sentido de Maharam es una medida exterior.

Sea B un álgebra de Boole (respectivamente σ-álgebra de Boole) y sea $\mu^* : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una medida exterior finitamente subaditiva (respectivamente contablemente subaditiva). Un elemento $a \in B$ se dice μ^* ***medible*** si

$$\mu^*(x) = \mu^*(x \wedge a) + \mu^*(x \wedge -a)$$

para todo $x \in B$.

Notaremos con $Med(B)$ al conjunto de los elementos de B que son μ^* medibles. Notar que $a \in Med(B)$ si y sólo si $\mu^*(x \wedge a) + \mu^*(x \wedge -a) \leq \mu^*(x)$ para todo $x \in B$, ya que la otra desigualdad vale siempre.

Se puede demostrar la versión abstracta del hecho que los elementos medibles determinan una subálgebra (ver [24]).

La siguiente lista es una serie de problemas a investigar en el futuro que está en directa relación con el contenido de la tesis.

Problema I: Si B es un álgebra de Boole y S es una subálgebra de B, determinar condiciones necesarias y suficientes sobre S para que exista una medida exterior finitamente subaditiva en B tal que $Med(B) = S$.

Problema II: Si B es un álgebra de Boole y S es una subálgebra de B, determinar condiciones necesarias y suficientes sobre S para que exista una submedida continua en B tal que $Med(B) = S$.

Problema III: Dada una σ-álgebra de Boole B y una σ-subálgebra S de B (es decir, una subálgebra cerrada por supremos contables), determinar condiciones necesarias y suficientes sobre S para que exista una medida exterior contablemente subaditiva en B tal que $Med(B) = S$.

Referencias

[1] U. Abraham y S. Todorcevic, ***Partition properties of*** ω_1 ***compatible with CH***, Fundamenta Mathematicae, volumen 152, 1997.

[2] B. Balcar, F. Franek y H. Hruška, ***Exhaustive zero-convergence structures on Boolean algebras***, Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, volumen 40, 1999.

[3] B. Balcar, W. Główczyński y T. Jech, ***The sequential topology on complete Boolean algebras***, Fundamenta Mathematicae, volumen 155, 1998.

[4] B. Balcar y T. Jech, ***Weak Distributivity, a Problem of Von Neumann and the Mystery of Measurability***, The Bulletin of Simbolic Logic, volumen 12, junio 2006.

[5] B. Balcar, T. Jech y T. Pazák, ***Complete ccc Boolean algebras, the order sequential topology and a problem of von Neumann***, The Bulletin of the London Mathematical Society, volumen 37, 2005.

[6] D. H. Fremlin, ***Measure algebras, Handbook of Boolean algebras***, volumen 3, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1989.

[7] D. H. Fremlin, ***Measure theory***, volúmenes 1 a 4, Torres Fremlin, Colchester, 2000-2004.

[8] D. H. Fremlin, ***Maharam algebras***, Unpublished notes, 2004.

[9] C. Gray, ***Iterated forcing from the strategic point of view, PhD Thesis***, Berkeley, 1982.

[10] A. Horn y A. Tarski, ***Measures in Boolean algebras***, Transactions of the American Mathematical Society, volumen 64, 1948.

[11] T. Jech, ***Non-provability of Souslin's hypothesis***, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, volumen 8, 1967.

[12] T. Jech, ***More game-theoretic properties of Boolean algebras***, Annals of Pure and Applied Logic, volumen 26, 1984.

[13] T. Jech, ***Set theory, the third millennium edition***, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[14] S. Kakutani, ***Über die Metrisation der topologischen Gruppen***, Proceedings of the Imperial Academy, Tokyo, volumen 12, 1936.

[15] N. J. Kalton y J. W. Roberts, ***Uniformly exhaustive submeasures and nearly additive set functions***, Transactions of the American Mathematical Society, volumen 278, 1983.

[16] L. V. Kantorovic, A. G. Pinsker y B. Z. Vulikh, ***Functional analysis in partially ordered spaces***, 1950.

[17] J. L. Kelley, ***Measures on Boolean algebras***, Pacific Journal of Mathematics, volumen 9, 1959.

[18] S. Koppelberg, ***Handbook of Boolean algebras***, volumen 1, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1989.

[19] D. Kurepa, ***Ensembles ordonnés et ramifiés***, Publicationes Mathematicae, University of Belgrade, volumen 4, 1935.

[20] D. Maharam, ***An algebraic characterization of measure algebras***, Annals of Mathematics. Second Series, volumen 4, 1948.

[21] D. Mauldin (editor), ***The Scottish Book***, Birkhäuser Boston, Massachusetts, 1981.

[22] E. W. Miller, ***A note on Souslin's problem***, American Journal of Mathematics, volumen 65, 1943.

[23] J. D. Monk (editor), ***Handbook of Boolean algebras***, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1989.

[24] A. G. Petrovich, ***Álgebras de Boole***, notas de la materia optativa Álgebras de Boole (FCEN, UBA), 2020.

[25] S. Quickert, ***CH and the Sacks property***, Fundamenta Mathematicae, volumen 171, 2002.

[26] R. M. Solovay y S. Tennenbaum, ***Iterated Cohen extensions and Souslin's problem***, Annals of Mathematics. Second Series, volumen 94, 1971.

[27] M. Suslin, ***Problème 3***, Fundamenta Mathematicae, volumen 1, 1920.

[28] M. Talagrand, ***Maharam's problem***, Comptes Rends de l'Académie des Sciences, 2006.

[29] S. Tennenbaum, ***Souslin's problem***, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, volumen 59, 1968.

[30] E. Thümmel, ***The problem of Horn and Tarski***, Proceedings of

the American Mathematical Society, 2012.

[31] S. Todorcevic, ***A dichotomy for P-ideals of countable sets***, Fundamenta Mathematicae, volumen 166, 2000.

[32] S. Todorcevic, ***A problem of von Neumann and Maharam about algebras supporting continuous submeasures***, Fundamenta Mathematicae, volumen 183, 2004.

[33] D. A. Vladimirov, ***Boolean algebras in analysis***, Mathematics and its Applications, volumen 540, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[34] J. von Neumann, ***Continuous geometry***, The Institute for Advanced Study, 1936-1937, notas de L. Roy Wilcox sobre las conferencias impartidas durante 1935-36 y 1936-37 en el Institute for Advanced Study.

[35] J. von Neumann, ***Continuous geometry***, Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1960.