



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teselaciones simultáneas por traslación y dilatación

Teo López Puccio

Director: Carlos Cabrelli

Fecha de Presentación: 15 de agosto de 2024

# Resumen

Dadas  $A$  una matriz inversible de  $n \times n$  y  $\Gamma$  una lattice de rango completo en  $\mathbb{R}^n$ , una  $(A, \Gamma)$ -wavelet es una función de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  que genera una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  via sucesivas traslaciones de  $\Gamma$  y dilataciones de  $A$ . Una Wavelet Mínimamente Soportada en Frecuencia (MSF wavelet) es un tipo particular de wavelet cuya transformada de Fourier es la función característica de un conjunto medible de  $\mathbb{R}^n$ .

En 2021 M. Bownik y D. Speegle resolvieron una pregunta geométrica planteada 25 años atrás en el contexto de la teoría de wavelets: determinar para qué pares  $(A, \Gamma)$  existe un conjunto medible  $W$  que tesela el espacio via traslaciones de  $\Gamma$  y dilataciones de  $A$ . Tal conjunto es llamado un  $(A, \Gamma)$ -*wavelet set*. La motivación original de esta pregunta reside en el hecho de que  $W$  es un  $(A, \Gamma)$ -wavelet set si y solo si la antitransformada de Fourier de la función característica de  $W$  es una  $(A^\top, \Gamma^*)$ -wavelet.

En esta tesis se expone la historia de este problema, su relación con la teoría de wavelets y los distintos resultados parciales que fueron esenciales para su investigación. Finalmente se da la demostración del teorema de Bownik y Speegle con el que esta pregunta abierta fue resuelta.

# Agradecimientos

Creo que uno le “debe” a cualquier persona que haya pasado por su vida y le haya prestado aunque sea un poco de cariño. Me tomo esta página como la tradicional excusa para nombrar tan solo a algunos, porque es imposible nombrarlos a todos.

Primero, gracias a mis papás por ser un apoyo constante en mi vida, por inculcarme el gusto de saber y de aprender ciencia y arte, y por jamás cuestionar que yo no termine de decidirme por la matemática o la música o el teatro.

A Carlos Cabrelli por traerme un tema tan interesante, por darme seguridad y responder siempre atenta y prontamente mis inquietudes.

A Darrin Speegle por responder cuidadosamente a mis dudas sobre su propio trabajo. La Proposición 2.4 y los párrafo que la preceden son, a mi gusto, de lo más interesante de la historia de este problema, y no habría terminado de comprenderlos sin su amable comunicación directa.

A Gustavo Krimker por ser el profesor que me hizo decidir que quería estudiar esta carrera. La tipografía de esta tesis es para él.

A mis amigos de la carrera, con quienes aprender matemáticas estrambóticas fue siempre un disfrute. Algunos de ellos son Cami, Dante, Sol, Lola, Guido, Agus, Lu, Pedro, Iuri, Nico, Nico, María, Emi, Juan, Juja, y la lista continúa. Los quiero a todos.

A Bernardo, porque no solo me acompaña siempre, sino que prácticamente me enseñó a hacer las hermosas ilustraciones que acompañan a este trabajo. Invito al lector a hacer zoom sobre ellas para apreciar su resolución infinita, que simboliza mi infinito agradecimiento.

Mi balance con el mundo fuera de la facu no sería posible sin mis amigos que no son de la carrera. Todos ellos merecerían una mención: a Uri, mi primer compañero de cursada y finales para Análisis 1; a Marcos Ravaschino, Pablo Águila y Eric Molter, mis amigos de la escuela con quienes pude siempre hablar de matemática (o de otros temas, de ser estrictamente necesario); a mi hermano Pablo que no solo es mi hermano sino un amigo y compañero de nerdeada; a Estudio QP, que son Donna, Lula, Coca y Marcos, por meterme en el teatro y no dejarme salir; a Zoe; a Chiara; a Camaleón, que son Nehuén, Camilo, Dino y Teo; y a Juanma, a Moze y a Nico Pironio, porque los amo.

A la UBA, a Exactas, y a todos y todas quienes hacen posible a la educación pública y gratuita.

# Índice general

<b>1. Introducción: wavelets y teselaciones por traslación y dilatación</b>	<b>5</b>
1.1. Sobre wavelets	5
1.2. Wavelets mínimamente soportadas en frecuencia	6
1.3. Definiciones y ejemplos	8
1.3.1. Lattices	8
1.3.2. Teselaciones, cubrimientos y empaques	10
1.4. La transformada de Fourier y bases de exponenciales	14
1.4.1. Coeficientes de Fourier en una lattice	15
1.4.2. Bases ortogonales por traslación	16
1.5. El Teorema de Fuglede	17
1.6. MSF wavelets y wavelet sets	20
<b>2. El teorema de Bownik-Speegle</b>	<b>22</b>
2.1. Resultados parciales	22
2.2. El teorema de caracterización	24
2.3. Una aplicación del teorema	27
<b>3. Teoremas y nociones preliminares</b>	<b>29</b>
3.1. Una condición más simple para la existencia de wavelet sets	29
3.2. Un lema sobre empaques M-redundantes	30
3.3. El espacio métrico de conjuntos y proyecciones por traslación y dilatación	32
<b>4. Demostración de la condición suficiente para la existencia de wavelet sets</b>	<b>35</b>
<b>5. Demostración de la condición necesaria para la existencia de wavelet sets</b>	<b>45</b>

# Capítulo 1

## Introducción: wavelets y teselaciones por traslación y dilatación

En este trabajo nos proponemos comprender y exponer la solución a un problema recientemente resuelto, que se mantuvo abierto durante dos décadas y media, originado en el área matemática de la *teoría de wavelets*. Esta es un área multidisciplinaria donde el análisis armónico se conecta con matemáticas aplicadas y procesamiento de señales. Este problema, sin embargo, tiene un interés independiente de su origen en el ámbito de wavelets al poder plantearse completamente en términos geométricos, como un problema sobre *teselaciones simultáneas por traslación y dilatación*.

**Pregunta 1.1.** Si es  $A$  una matriz inversible de  $n \times n$  y  $\Gamma$  un lattice de rango completo en  $\mathbb{R}^n$ , ¿para qué pares  $(A, \Gamma)$  existe algún conjunto medible  $W \subset \mathbb{R}^n$  tal que

$$\{A^i W : i \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad \{W + \gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

son particiones medibles de  $\mathbb{R}^n$ ?

Con los fines de contextualizar la pregunta daremos una breve reseña sobre wavelets, en la medida en que es relevante para el presente trabajo. Las técnicas que llevaron a la resolución del problema no se inscriben necesariamente dentro de la teoría de wavelets, pero este ámbito es esencial para comprender su motivación.

### 1.1. Sobre wavelets

Consideremos una función  $\psi = \psi(x)$  de  $\mathbb{R}$  a valores reales o complejos, y pensemos a  $x$  como una variable temporal. Parte importante de la teoría de wavelets surge de la observación de que ciertas funciones tienen la propiedad especial de generar una base ortonormal de  $L^2$  cuando se las dilata y traslada. Dado un número real  $k$  podemos considerar el operador de *traslación por  $k$* ,

$$(\mathfrak{T}_k \psi)(x) = \psi(x - k).$$

Y, para cada número real no nulo  $a$ , definimos la *dilatación por  $a$*  como el operador

$$(\mathfrak{D}_a \psi)(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x}{a}\right).$$

El factor  $|a|^{-1/2}$  hace de este un operador unitario. En las aplicaciones, la función  $\psi$  se interpreta como una señal, por ejemplo, una onda de sonido que se desplaza en el aire, o un voltaje por un cable. El operador  $\mathfrak{T}_k$  adelanta o atrasa la señal en el tiempo, mientras que el operador  $\mathfrak{D}_a$  la dilata o la comprime (podemos pensar en acelerar o ralentizar una onda de audio). Una  *$(a, \mathbb{Z})$ -wavelet* es una función  $\psi$  tal que el conjunto  $\{\mathfrak{D}_{a^i} \mathfrak{T}_k \psi : k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ . Hemos considerado todas las traslaciones enteras de  $\psi$  seguidas de dilataciones por potencias de  $a$ . Más explícitamente,  $\psi$  es una  $(a, \mathbb{Z})$ -wavelet si

$$(1.1) \quad \{|a|^i \psi(a^i x - k) : i, k \in \mathbb{Z}\} \text{ es una base ortonormal de } L^2(\mathbb{R}).$$

Tal conjunto es llamado una *base wavelet ortonormal*. La importancia de tener una base de este tipo radica en que los coeficientes de una escritura en tal base recuperan información frecuencial de la señal a *distintas escalas*, y permite su reconstrucción a partir de aproximaciones a distintas resoluciones. Esto da origen al análisis multirresolución, una técnica de gran relevancia en análisis de señales y compresión de datos.

El primer ejemplo conocido de wavelet se debe a Haar y es la función  $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, 0)} - \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{2}]}$ . El problema que esta presenta para las aplicaciones es que, por ser discontinua, su transformada  $\hat{\psi}$  no tiene soporte compacto: en el lenguaje de señales,  $\psi$  no es *de banda limitada*. Existe en el extremo contrario otra wavelet  $\psi$  definida por  $\hat{\psi} = \mathbb{1}_{[-1, -\frac{1}{2}]} + \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}$ , que claramente está acotada en el dominio frecuencial, pero que en sí no tiene soporte compacto. En el fondo de estos dos ejemplos yace la obstrucción fundamental del análisis de tiempo-frecuencia, el llamado *principio de incertidumbre*: no es posible que  $\text{sop } \psi$  y  $\text{sop } \hat{\psi}$  sean simultáneamente pequeños. Pese a esto, los trabajos fundacionales de teoría de wavelets en la década de 1980 lograron demostrar la existencia wavelets con regularidad arbitraria y diversas propiedades deseables, particularmente, buena concentración tanto en el dominio temporal como frecuencial.

## 1.2. Wavelets mínimamente soportadas en frecuencia

Centrémonos en el caso de la wavelet dada por

$$(1.2) \quad \hat{\psi} = \mathbb{1}_{[-1, -1/2]} + \mathbb{1}_{[1/2, 1]}$$

llamada wavelet de Shannon. Luego de calcular la antitransformada, esta wavelet puede darse explícitamente como

$$\psi(x) = \frac{\sin(2\pi x) - \sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Notamos que la medida del soporte de  $\hat{\psi}$  es  $|\text{sop } \hat{\psi}| = 1$ . La siguiente proposición, que generalizaremos y demostraremos más adelante, nos dice que si deseamos que una wavelet tenga soporte “pequeño” en frecuencia, no hay muchas más opciones salvo ser de esta forma:  $\psi = \check{\mathbb{1}}_W$  para algún conjunto  $W \subset \mathbb{R}$ .

**Proposición 1.2** ([HW96, §2.2 Coro. 2.4]). *Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\{f(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal. Entonces  $|\text{sop } \hat{f}| \geq 1$  y la igualdad se obtiene si y solo si  $|\hat{f}| = \mathbb{1}_W$  para algún conjunto  $W \subset \mathbb{R}$  medible con  $|W| = 1$ .*

Este tipo de wavelets se llaman *mínimamente soportadas en frecuencia*, o *MSF wavelets*. La siguiente es una caracterización básica de ellas:

**Proposición 1.3** ([HW96, §7.2 Teo. 2.3]). *Sea  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $|\hat{\psi}| = \mathbb{1}_W$  para algún conjunto medible  $W \subset \mathbb{R}$ , y sea  $a \neq 0$ . Entonces,  $\psi$  es una  $(a, \mathbb{Z})$ -wavelet (en particular, una MSF wavelet) si y solo si se satisfacen*

$$(1.3) \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^i \xi)|^2 = 1 \quad y \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = 1$$

para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Lo interesante ocurre cuando interpretamos las condiciones (1.3) en términos del conjunto  $W \subset \mathbb{R}$ . Un corolario de la proposición anterior es:

**Corolario 1.4** ([HW96, §7.2 Coro. 2.4]). *Sea  $W \subset \mathbb{R}$  un conjunto medible, y  $\psi$  una función tal que  $|\hat{\psi}| = \mathbb{1}_W$ . Entonces,  $\psi$  es una  $(a, \mathbb{Z})$  MSF wavelet si y solo si*

$$(1.4) \quad \{a^i W : i \in \mathbb{Z}\} \quad y \quad \{W + k : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{son particiones medibles de } \mathbb{R}$$

es decir, son colecciones de conjuntos disjuntos c.t.p. cuya unión es  $\mathbb{R}$ , salvo conjuntos de medida cero.

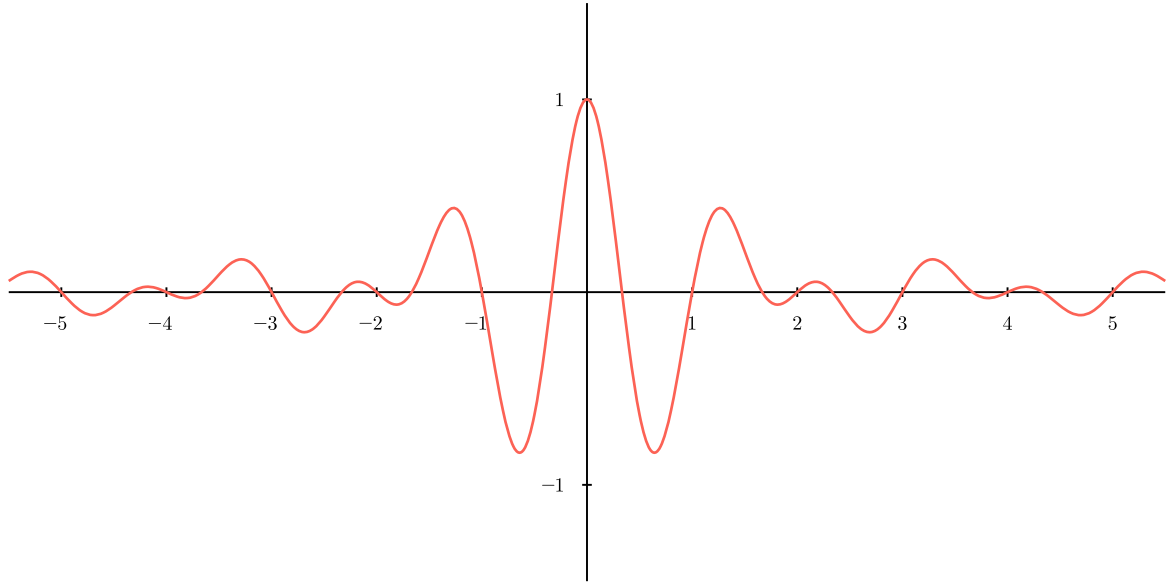


Figura 1.1: La wavelet de Shannon,  $\psi(x) = \frac{\sin(2\pi x) - \sin(\pi x)}{\pi x}$ .

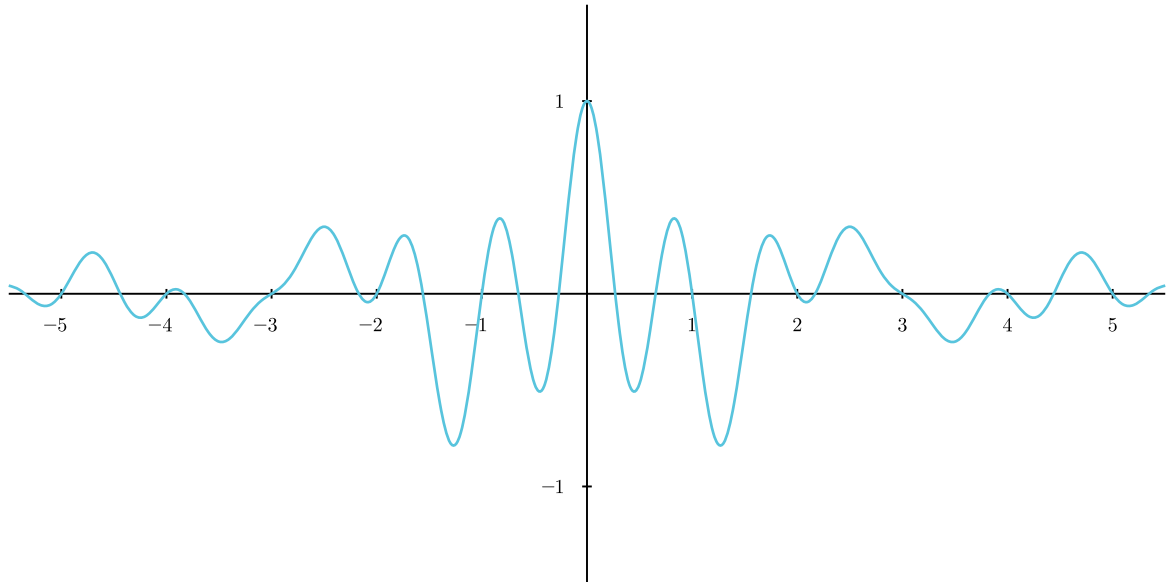


Figura 1.2: Otra wavelet dada por  $f(x) = \frac{1}{\pi x} \left( -\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right) + \sin\left(\frac{8}{3}\pi x\right) + \sin(\pi x) - \sin(2\pi x) \right)$ .

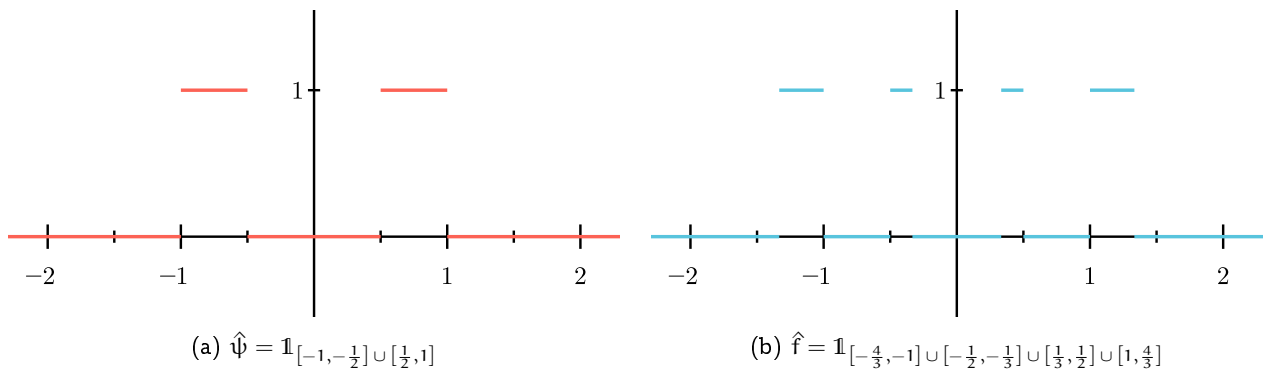


Figura 1.3: Las transformadas de las wavelets de las figuras 1.1 y 1.2 respectivamente. Los soportes de  $\hat{\psi}$  y  $\hat{f}$  son  $(2, \mathbb{Z})$  wavelet sets en la recta.

(Véase también [DLS97, lema 4.3].) Los conjuntos que cumplen las condiciones (1.4) del Corolario reciben el nombre de *wavelet sets*, más específicamente  $(\alpha, \mathbb{Z})$  *wavelet sets*. Este resultado da un método interesante para la construcción de wavelets, al convertir la condición analítica (1.1) en una condición de conjuntos. Por ejemplo, la Figura 1.5 ilustra cómo el conjunto  $[-1, -1/2] \cup [1/2, 1]$  cumple las condiciones (1.4) de una manera visualmente clara, y por lo tanto la wavelet de Shannon es efectivamente una  $(2, \mathbb{Z})$ -wavelet. Podemos aplicar el mismo método para construir otras wavelets si hallamos otros *wavelet sets* en la recta: en la Figura 1.2 se muestra otra wavelet obtenida a partir del conjunto

$$\left[-\frac{4}{3}, -1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[1, \frac{4}{3}\right]$$

del cual puede verificarse fácilmente que es un  $(2, \mathbb{Z})$ -wavelet set. Véase [Gus, §2.4] para una generalización de este ejemplo.

¿Qué ocurrió hasta ahora? En (1.1) definimos una wavelet como una función que genera una base ortonormal bajo la acción simultánea de los operadores de dilatación y traslación de funciones. Ahora, desde el punto de vista de conjuntos, estas se han convertido en la condición de que cierto conjunto *tesele* el espacio bajo dos acciones simultáneas en la recta, a saber, traslación por enteros y dilatación (multiplicación) por  $\alpha$  del conjunto  $W$  en  $\mathbb{R}$ .

Ahora generalicemos la discusión a funciones en  $\mathbb{R}^n$ . Nuestro factor de dilatación  $\alpha$  será reemplazado por una matriz invertible  $A$  de  $n \times n$ , y los enteros serán reemplazados por  $\mathbb{Z}^n$ , o más generalmente, una *lattice de rango completo*  $\Gamma$ ; esto es, la imagen de  $\mathbb{Z}^n$  por una transformación lineal invertible. Decimos que una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  es una  $(A, \Gamma)$ -wavelet si

$$\{|\det A|^{i/2} \psi(A^i x + \gamma) : i \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma\}$$

es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Llamamos *MSF-wavelet* en  $\mathbb{R}^n$  a una wavelet  $\psi$  tal que  $|\hat{\psi}| = \mathbb{1}_W$  para cierto  $W \subset \mathbb{R}^n$  medible. Más adelante demostraremos el Teorema 1.19, que es una generalización a  $\mathbb{R}^n$  del Corolario 1.4: dado un conjunto medible  $W$ , la función  $\check{\mathbb{1}}_W$  es una  $(A, \Gamma)$ -wavelet si y solo si  $\{(A^T)^i W : i \in \mathbb{Z}\}$  y  $\{W + \gamma : \gamma \in \Gamma^*\}$  son particiones medibles de  $\mathbb{R}^n$ , es decir, si y solo si  $W$  es un *wavelet set*.

Este resultado sugiere la pregunta 1.1, que podemos parafrasear así: ¿para qué pares  $(A, \Gamma)$  existe un wavelet set? Una resolución completa de este problema daría entonces una caracterización total de todas las MSF-wavelets ortogonales en  $\mathbb{R}^n$ . Veremos que la dificultad del problema reside en hallar la manera específica en que deben interactuar las acciones de  $A$  y  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , al ser dos acciones con mucha libertad y sin relación aparente.

## 1.3. Definiciones y ejemplos

De ahora en adelante usaremos la notación  $|U|$  para denotar la medida de Lebesgue de cualquier conjunto medible  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Cuando digamos que una propiedad se cumple para *casi todo punto* nos referiremos a que se cumple para todo elemento de  $\mathbb{R}^n \setminus Z$  donde  $Z$  es algún conjunto de medida cero. La notación  $\#|U|$  denota al cardinal del conjunto  $U$ . El símbolo  $\mathbb{1}_W$  denota la función característica del conjunto  $W$ .

### 1.3.1. Lattices

**Definición 1.5** (Lattices). Una *lattice*  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}^n$  generado por un conjunto de vectores linealmente independiente de  $\mathbb{R}^n$ . El *rango* de la lattice es el tamaño  $k \leq n$  del conjunto de generadores. Así, la lattice  $\Gamma$  generada por  $v = \{v_1, \dots, v_k\}$  es de la forma

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}v_1 + \dots + \mathbb{Z}v_k.$$

Si  $k = n$  decimos que la lattice es *de rango completo*. Una lattice de rango completo  $\Gamma$  es de la forma  $\Gamma = R\mathbb{Z}^n$  donde  $R$  resulta ser la matriz de  $n \times n$  cuyas columnas son los vectores  $v_i$ . La lattice  $\Gamma^* = (R^{-T})\mathbb{Z}^n$  recibe el



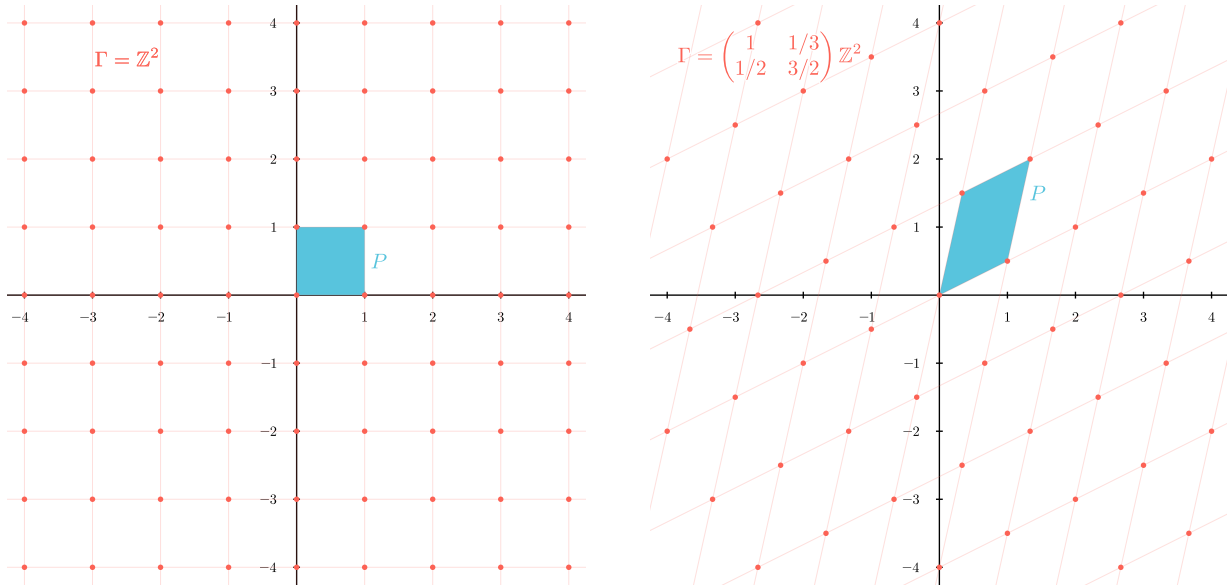


Figura 1.4: Visualizaciones de dos lattices en  $\mathbb{R}^2$ : la lattice canónica  $\mathbb{Z}^2$ , y una lattice genérica  $\Gamma = R\mathbb{Z}^2$  dada cierta elección de matriz  $R$ . Se muestra el paralelepípedo fundamental  $P$ .

nombre de *lattice dual* de  $\Gamma$ , donde utilizamos la notación  $R^{-\top} = (R^{\top})^{-1} = (R^{-1})^{\top}$  para referirnos a la matriz inversa traspuesta de  $R$ . La lattice dual de  $\Gamma$  cumple

$$\Gamma^* = \{\gamma' \in \mathbb{R}^n : \gamma \cdot \gamma' \in \mathbb{Z} \forall \gamma \in \Gamma\}$$

donde  $\cdot$  denota el producto interno usual en  $\mathbb{R}^n$ .

**Nota sobre terminología:** En el presente trabajo utilizaremos en su gran mayoría lattices de rango completo. Por eso, diremos simplemente *lattice* para referirnos a una *lattice de rango completo en  $\mathbb{R}^n$* . En los pocos casos en que utilizemos lattices de rango menor, haremos la aclaración *lattice de rango  $d$*  con  $d \leq n$ .

Toda lattice  $\Gamma$  induce una relación de equivalencia en  $\mathbb{R}^n$  dada por  $x \simeq y \iff x - y \in \Gamma$ . El espacio cociente  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  es el conjunto de clases de equivalencia de  $\mathbb{R}^n$  sobre esta relación, y resulta una variedad diferenciable con una métrica de Lebesgue natural inducida de  $\mathbb{R}^n$ . Llamamos *dominio fundamental* a cualquier conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  medible que contiene exactamente un representante para cada clase de  $\mathbb{R}^n/\Gamma$ .

Si  $\Gamma$  es de rango completo, es fácil ver que el paralelepípedo semiabierto

$$(1.5) \quad P = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i v_i : t_i \in [0, 1) \right\}$$

es un dominio fundamental de  $\Gamma$ , y entonces  $|\mathbb{R}^n/\Gamma| = |P| = |\det A| > 0$ . Lo llamaremos el *paralelepípedo fundamental* de  $\Gamma$ . (Ver la figura 1.4.)

Es claro que, con nuestra definición, toda lattice es discreta (i.e. todos sus puntos son aislados). Como resultado interesante, la siguiente proposición dice que las lattices (no necesariamente de rango completo) son exactamente los subgrupos aditivos discretos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 1.6** (Teorema fundamental de lattices [TV06, Lema 3.4]). *Todo subgrupo aditivo discreto de  $\mathbb{R}^n$  es una lattice, no necesariamente de rango completo. En particular, es finitamente generado, y es la imagen de  $\mathbb{Z}^k \subset \mathbb{R}^n$  por una transformación lineal inversible.*

### 1.3.2. Teselaciones, cubrimientos y empaques

Una *teselación* de  $\mathbb{R}^n$  es usualmente una partición de  $\mathbb{R}^n$  en conjuntos disjuntos, llamados *teselas*<sup>1</sup>, que cumplen alguna condición geométrica particular. En el problema que nos interesa estudiar trabajaremos con teselaciones en su sentido más laxo: nuestras teselas podrán intersectarse en conjuntos de medida cero. Tampoco exigimos ninguna condición topológica a las teselas, pidiéndoles solamente que sean conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  Lebesgue-medibles. A continuación damos nuestras definiciones de *teselación*, *empaques* y *cubrimientos* por dos acciones distintas: dilatación por una matriz inversible  $A$ , y traslación por una lattice  $\Gamma$ .

**Definición 1.7.** Sea  $A$  una matriz real inversible de  $n \times n$ . Sea  $M \in \mathbb{N}$ .

- Diremos que un conjunto medible  $U \subset \mathbb{R}^n$  *empaca  $M$ -redundantemente por dilataciones de  $A$*  si

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_U(A^j x) \leq M \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n$$

esto es, si casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$  está en no más de  $M$  conjuntos de la forma  $A^j U$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

- En el caso en que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_U(A^j x) \leq 1 \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n$$

diremos que  $U$  *empaca por dilataciones de  $A$* . Esto es, casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$  está en uno o ninguno de los conjuntos  $A^j U$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

- Diremos además que  $U$  *cubre por dilataciones de  $A$*  si

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_U(A^j x) \geq 1 \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n$$

esto es, si casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$  está en al menos uno de los  $A^j U$ .

- Diremos que  $U$  *tesela por dilataciones de  $A$*  si cubre y empaques simultáneamente, esto es, si

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_U(A^j x) = 1 \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

- Análogamente, dada una lattice  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ , diremos que  $U$  *empaca  $M$ -redundantemente, empaques o tesela por traslaciones de  $\Gamma$* , si se cumple la desigualdad correspondiente con  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_U(x + \gamma)$ .
- Como ya mencionamos, un conjunto medible que tesela por dilataciones de  $A$  y por traslaciones de  $\Gamma$  es llamado un  $(A, \Gamma)$  *wavelet set*.

Cuando no haya riesgo de ambigüedad abreviaremos diciendo, por ejemplo, “ $U$  empaques por dilataciones”, o “ $U$  empaques por  $A$ ”, y análogamente para  $\Gamma$  y las otras propiedades.

**Observación 1.8.** Un conjunto  $U$  empaques por dilataciones de  $A$  si  $|A^i U \cap A^j U| = 0 \ \forall i \neq j \in \mathbb{Z}$ , y cubre por dilataciones de  $A$  si  $|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j U| = 0$ . Lo mismo vale análogamente para traslaciones de  $\Gamma$ .

#### Ejemplos 1.

1. El cubo unitario semiabierto  $[0, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$  tesela por traslaciones de  $\mathbb{Z}^n$ , porque es una región fundamental de  $\mathbb{R}^n/\Gamma$ . Pero también lo hace el cubo cerrado  $[0, 1]^n$ , ya que sus traslaciones se intersectan en conjuntos de medida nula en  $\mathbb{R}^n$ . El conjunto  $(0, 1)^n$  también tesela por  $\mathbb{Z}^n$ , ya que sus traslaciones cubren todo  $\mathbb{R}^n$  salvo por conjuntos de medida nula.

<sup>1</sup> “Tesela” es quizás un término menos conocido para referirse a las piezas de un mosaico, y “teselación” refiere al mosaico en sí. Utilizamos estas palabras por su similitud con los términos estándar en inglés, *tile* y *tiling*. Otras elecciones posibles habrían sido pares como “baldosa” y “embaldosado” o “azulejo” y “mosaico”. Todas estas palabras guardan un significado similar, que da la idea de un patrón geométrico formado por cierto conjunto de figuras que “encajan” entre sí.

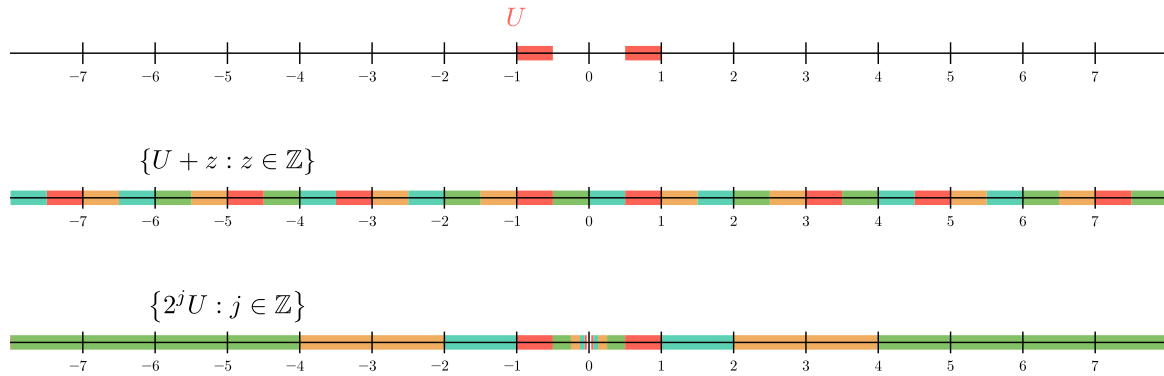


Figura 1.5: El conjunto  $U = [-1, -1/2] \cup [1/2, 1] \subset \mathbb{R}$  es un  $(2, \mathbb{Z})$  wavelet set en la recta. Se usan varios colores para marcar distintas traslaciones y dilataciones del conjunto.

2. El cubo unitario “engordado”  $(0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)^n$  con  $\varepsilon > 0$  cubre el espacio por traslaciones de  $\mathbb{Z}^n$ , pero no lo tesela.
3. El anillo  $U = B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$  tesela  $\mathbb{R}^n$  por dilataciones de la matriz  $A = 2\text{Id}$ .
4. La figura 1.5 muestra el conjunto  $U = [-1, -1/2] \cup [1/2, 1] \subset \mathbb{R}$ . Este es un  $(2, \mathbb{Z})$  wavelet set:  $U$  tesela la recta via multiplicación por 2 (igual que el anillo en el ejemplo anterior), y además tesela la recta por traslaciones enteras.
5. La figura 1.6 muestra un  $(A, \mathbb{Z}^2)$  wavelet set en  $\mathbb{R}^2$  para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. La figura 1.7 muestra otro  $(A, \mathbb{Z}^2)$  wavelet set en  $\mathbb{R}^2$ , esta vez para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se grafica en particular el caso  $a = 2$ . A diferencia del ejemplo anterior, este conjunto no es acotado. Esto no es casualidad: no existen wavelet sets acotados para esta matriz (Teorema 1.10).

Damos ahora dos resultados que caracterizan la existencia de teselas para cada acción por separado (el primero, elemental; el segundo, de mayor complejidad, y cuya demostración omitimos). Luego damos un resultado que muestra cómo la relación precisa entre ambas acciones determina fuertemente la apariencia de los posibles wavelet sets.

**Proposición 1.9** (Teselaciones por traslación). *Supongamos que  $\Gamma = M\mathbb{Z}^n$  con  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}^n)$ .*

- (a) *Existe un conjunto que tesela por  $\Gamma$ .*
- (b) *Todo conjunto  $U$  que tesela por  $\Gamma$  tiene la misma medida  $|U| = |\det M| < \infty$ .*
- (c) *Si un conjunto  $U$  empaca por  $\Gamma$ , entonces  $|U| \leq |\det M| < \infty$ .*

*Demostración.* (a) Damos por evidente el hecho de que el cubo  $[0, 1]^n$  tesela por  $\mathbb{Z}^n$ . La transformación lineal  $f(x) = Mx$  transforma  $\mathbb{Z}^n$  en  $\Gamma$  y el cubo  $[0, 1]^n$  en el conjunto  $P = M[0, 1]^n$ , que es el paralelepípedo

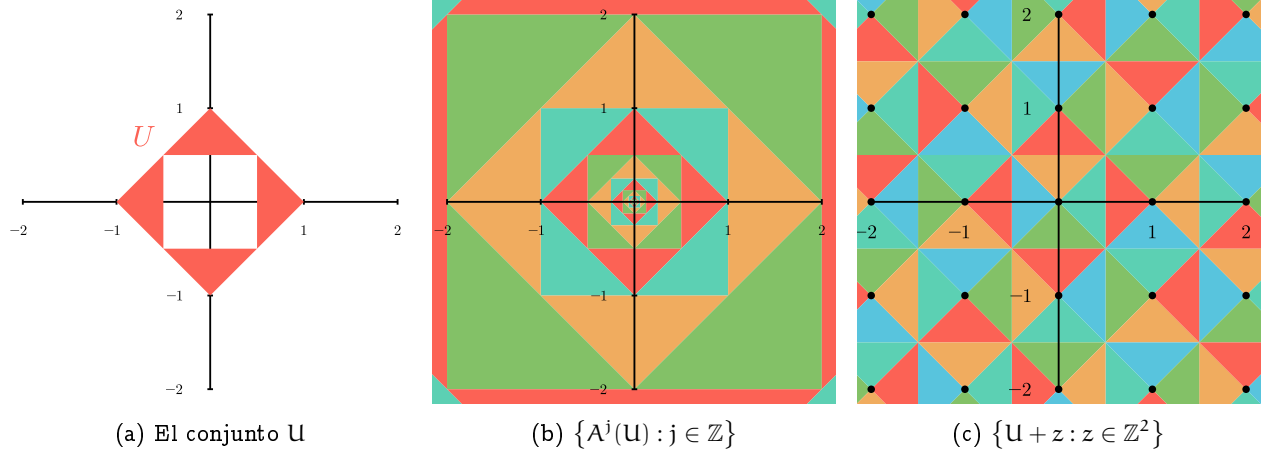


Figura 1.6: Un  $(A, \Gamma)$  wavelet set en  $\mathbb{R}^2$  para  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

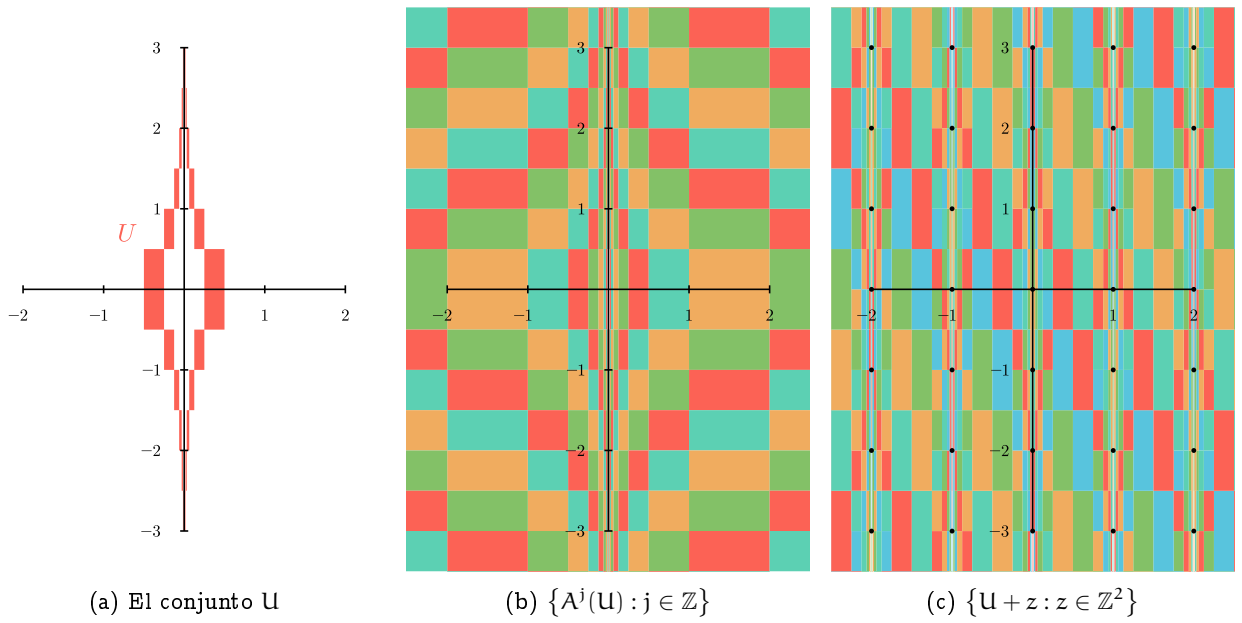


Figura 1.7: Un  $(A, \Gamma)$  wavelet set en  $\mathbb{R}^2$  para  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Este conjunto no es acotado y se extiende recursivamente en la dirección del eje  $y$ .

fundamental de  $\Gamma$  (1.5). Entonces  $P$  tesela por  $\Gamma$ .

Demostremos (c). Sea  $P$  como antes. Si  $U$  empaca por  $\Gamma$ , tenemos

$$\begin{aligned} |\det M| = |P| &= \int_P 1 \, dx \stackrel{(*)}{\geq} \int_P \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_U(x + \gamma) \, dx \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_P \mathbb{1}_U(x + \gamma) \, dx = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{P+\gamma} \mathbb{1}_U(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_U(x) \, dx = |U|. \end{aligned}$$

Pudimos intercambiar la integral con la suma por el teorema de Tonelli, ya que  $\mathbb{1}_U \geq 0$ . La demostración de (b) es idéntica observando que si  $U$  tesela por  $\Gamma$  obtenemos la igualdad en (\*).  $\square$

Acabamos de ver que toda lattice admite teselaciones por traslación, lo cual es visualmente intuitivo (ver fig. 1.4). En contraste, no resulta claro a primera vista determinar cuándo existirá una tesela por dilataciones de cierta matriz inversible  $A$ . Resulta que tal conjunto existe siempre que  $A$  no sea ortogonal. El siguiente resultado es una caracterización precisa de esta propiedad.

**Teorema 1.10** (Caracterización de teselaciones por dilatación, [LSST06, Teo. 4]). *Sea  $A \in GL_n(\mathbb{R}^n)$ .*

- (i) *Existe un conjunto que tesela por dilataciones si y solo si  $A$  no es ortogonal.*
- (ii) *Existe un conjunto de medida finita que tesela por dilataciones si y solo si  $|\det A| \neq 1$ .*
- (iii) *Existe un conjunto acotado que tesela por dilataciones si y solo si todos los autovalores reales o complejos de  $A$  o  $A^{-1}$  son mayores que 1 en módulo.*

Este teorema importante fue demostrado en 2006 y su demostración, que aquí omitimos, radica en una construcción explícita de tales conjuntos haciendo uso de la forma real de Jordan de  $A$ . Las teselas por dilatación construidas tienen además interior no vacío, lo cual será de utilidad más adelante.

Del Teorema 1.10 puede deducirse inmediatamente que la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  no admite  $(A, \mathbb{Z}^2)$  wavelet sets acotados para ningún  $a \in \mathbb{R}$ . En los ejemplos 1 mostramos la construcción de un wavelet set para esta matriz (Figura 1.7). De todas maneras, esa selección de ejemplos puede dar la expectativa de que en todos los casos se pueda obtener una imagen geoméricamente “buena” de los wavelet sets. Esto está lejos de ser así: a continuación vemos que, para cierta elección de lattice  $\Gamma$ , la matriz anterior solo admite wavelet sets de interior vacío.

**Proposición 1.11** ([Spe03, prop. 3.9]). *Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  con  $a > 1$  y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  una lattice que interseque al eje  $y$  solo en el origen. Entonces todo  $(A, \Gamma)$  wavelet set es no acotado y de interior vacío.*

Para la demostración de la proposición usaremos el siguiente hecho:

**Lema 1.12.** *Sea  $a > 1$ . Sea  $W \subset \mathbb{R}$  que tesela la recta por dilataciones de  $a$ , y supongamos  $W \subset (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty)$ . Sea  $I = [-a\varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, a\varepsilon]$ . Entonces  $|W| \geq |I| = 2(1-a)\varepsilon$ .*

*Demostración.* Como  $W$  está  $\varepsilon$ -alejado del 0, tenemos  $|a^j W \cap I| = 0 \, \forall j \geq 1$ . Entonces, como  $W$  tesela por  $a$ ,

$$I = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} I \cap a^j W = \bigcup_{j=0}^{\infty} I \cap a^{-j} W$$

y las uniones son disjuntas. Notemos además que  $I$  también tesela por dilataciones de  $a$ , con lo cual  $W = \bigcup_{j=0}^{\infty} a^j I \cap W$ . Usando  $a > 1$  obtenemos

$$|I| = \sum_{j=0}^{\infty} |I \cap a^{-j} W| \leq \sum_{j=0}^{\infty} a^j |I \cap a^{-j} W| = \sum_{j=0}^{\infty} |a^j I \cap W| = |W|$$

$\square$

Ahora demostramos la Proposición 1.11.

*Demostración.* Sea  $W$  un  $(A, \Gamma)$  wavelet set. Que no es acotado se deduce del Teorema 1.10 ya que  $A$  tiene a 1 como autovalor. Supongamos ahora que  $W$  tiene interior no vacío y lleguemos a una contradicción. Sea  $R \subset W$  un cuadrado de lado  $4\varepsilon$ . Entonces  $R$  empaqueta por traslaciones de  $\Gamma$ . Llamemos  $X, Y$  a los ejes, y  $p_X, p_Y$  a las proyecciones ortogonales sobre ellos. Sean  $v_1, v_2$  dos generadores de  $\Gamma$ . Como  $\Gamma$  no toca al eje  $Y$ , los números reales  $\alpha = p_X(v_1), \beta = p_X(v_2)$  son tales que  $\alpha/\beta$  es irracional. Por el algoritmo de Euclides podemos obtener combinaciones enteras de  $\alpha$  y  $\beta$  arbitrariamente cercanas a 0, y  $\{n\alpha + m\beta : n, m \in \mathbb{Z}\}$  es denso en  $\mathbb{R}$ . Entonces las rectas  $\{Y + \gamma : \gamma \in \Gamma\}$  son densas en  $\mathbb{R}^2$ . En particular, existen infinitos  $\gamma \in \Gamma$  tales que  $Y + \gamma$  está a distancia menor que  $\varepsilon$  del centro de  $R$ . En otras palabras, existen  $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$  no nulos y distintos entre sí tales que los cuadrados  $R + \gamma_i$  intersecan a  $Y$  a menos de  $\varepsilon$  de su centro. Sea  $S_i$  la franja horizontal  $\mathbb{R} \times p_Y(R + \gamma_i)$ . Notemos que, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , tenemos

$$(R + \gamma_i) \cap [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R} = [-\varepsilon, \varepsilon] \times p_Y(R + \gamma_i)$$

(ver Figura 1.8). Entonces, como los  $R + \gamma_i$  son disjuntos entre sí, también lo son las franjas  $S_i$ . Supongamos que  $W \cap S_i$  toca a  $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R}$ . Entonces tendríamos que  $R + \gamma_i$  toca a  $W$ , lo cual no es posible porque  $R \subset W$  empaqueta por traslaciones. Esto muestra que

$$p_X(W \cap S_i) \subset (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty).$$

Por la forma de la matriz  $A$ , sabemos que para casi todo  $y \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $W_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in W\}$  tesela  $\mathbb{R}$  por  $\alpha$ -dilataciones. Si además  $y \in p_Y(W \cap S_i)$ , tenemos  $W_y \subset (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$  y el Lema 1.12 nos dice que en ese caso  $|W_y| \geq 2(1 - \alpha)\varepsilon$ . Integrando con el teorema de Fubini sobre la altura de la franja  $S_i$  obtenemos que

$$|W \cap S_i| \geq 4\varepsilon \cdot 2(1 - \alpha)\varepsilon = c\varepsilon^2$$

para cualquier  $i \in \mathbb{N}$ . Como los  $S_i$  son infinitos y disjuntos, esto implica que  $|W| = \infty$ , lo cual es absurdo porque  $W$  tesela por traslaciones (Prop. 1.9, b).  $\square$

Vale destacar que, para cualquier par  $(A, \Gamma)$  en las hipótesis de la proposición anterior, efectivamente existen  $(A, \Gamma)$  wavelet sets. Esto se deduce de un resultado que veremos más adelante (Teorema 2.3), y muestra que en verdad existen wavelet sets de interior vacío.

## 1.4. La transformada de Fourier y bases de exponenciales

En lo que resta del capítulo apuntamos a exponer la interesante equivalencia entre MSF-wavelets y wavelet sets, culminando en una demostración elemental del Teorema 1.19. Para esto comenzamos con un repaso básico de series de Fourier en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Denotaremos con  $\|f\|_2 = (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx)^{1/2}$  a la norma de  $f$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Recordemos que la transformada de Fourier de una función  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  viene dada por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx := \hat{f}(\xi).$$

Gracias al Teorema de Plancherel, que afirma

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2 \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$$

es posible extender  $\mathcal{F}$  por un proceso de límite a un operador unitario de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en sí mismo. La transformada de Fourier inversa de  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  está dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx := \check{f}(\xi).$$

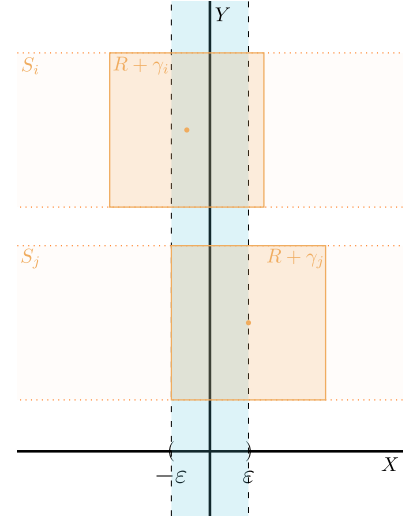


Figura 1.8

y resulta ser el operador inverso de  $\mathcal{F}^{-1}$  luego del procedimiento de límite adecuado. Usando la abreviatura  $e^{2\pi i \langle x, \cdot \rangle} = e_x$  para  $x \in \mathbb{R}^n$ , tenemos

$$\hat{f}(\xi) = \langle f, e_\xi \rangle \quad \check{f}(\xi) = \langle f, e_{-\xi} \rangle.$$

donde  $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g}$ . Recordamos que este resulta el producto interno usual de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  cuando  $f, g$  están en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Notar que en este caso  $e_x \notin L^2(\mathbb{R}^n)$ .

### 1.4.1. Coeficientes de Fourier en una lattice

Sea  $f$  una función  $\mathbb{Z}^n$ -periódica, es decir, tal que

$$f(x) = f(x + k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n.$$

Si la función  $f \cdot \mathbb{1}_{[0,1]^n}$  está en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , identificaremos  $f$  con su restricción al cubo unitario  $f|_{[0,1]^n}$  y diremos que  $f \in L^2([0,1]^n)$ . Sabemos que el espacio  $L^2([0,1]^n)$  cuenta con una base ortonormal distinguida: las exponenciales con frecuencias enteras  $\{e_n : n \in \mathbb{Z}^n\}$ . En otras palabras, tenemos la expansión de  $f$  en su serie de Fourier

$$(1.6) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, e_k \rangle e_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e_k(x) \quad \forall f \in L^2([0,1]^n).$$

$$\text{con } \hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \int_{[0,1]^n} f(x) e^{-2\pi i \langle k, x \rangle} dx$$

donde  $\hat{f}(k)$  es llamado el *k-ésimo coeficiente de Fourier* de  $f$  para cada  $k \in \mathbb{Z}^n$ .

Notemos que los coeficientes de fourier están definidos para cualquier  $f \in L^1([0,1]^n)$  sin necesidad de que  $f$  sea cuadrado-integrable. Tenemos, además, el siguiente resultado que nos será útil:

**Lema 1.13.** *Sea  $f \in L^1([0,1]^n)$  tal que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)| < \infty$ . Entonces  $f \in L^2([0,1]^n)$  y en consecuencia  $f$  coincide con su serie de Fourier en casi todo punto.*

Este resultado es estándar y puede hallarse en [SW71, p. 249, Coro. 1.8] y [You01, p.8, Teo. 2].

Vimos que una función  $\mathbb{Z}^n$ -periódica cuenta con una serie de Fourier indexada sobre  $\mathbb{Z}^n$ . Sea ahora  $\Gamma = A\mathbb{Z}^n$  una lattice de rango completo en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $F$  una función  $\Gamma$ -periódica, es decir,  $F(x) = F(x + \gamma) \forall \gamma \in \Gamma$ . Tal función se identifica con su restricción a  $A[0,1]^n$ , que está en el espacio  $L^2(A[0,1]^n)$ . Sería natural poder definir su serie de Fourier en base a coeficientes indexados ya no en  $\mathbb{Z}^n$  sino en alguna lattice relacionada con  $\Gamma$ . Para eso, consideramos la función  $f(x) = F(Ax)$ . Observamos que  $f$  es  $\mathbb{Z}^n$ -periódica y por lo tanto su serie de Fourier es la de (1.6). Usando el cambio de coordenadas  $t = Ax$ ,

$$(1.7) \quad \hat{f}(k) = \int_{[0,1]^n} F(Ax) e^{-2\pi i \langle k, x \rangle} dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{A[0,1]^n} F(t) e^{-2\pi i \langle (A^{-T}k), t \rangle} dt$$

$$:= \hat{F}(\gamma) \quad \text{con } \gamma = A^{-T}k \in \Gamma^*.$$

Acabamos de definir el *γ-ésimo coeficiente de Fourier* de una función  $\Gamma$ -periódica  $F$ , donde  $\gamma \in \Gamma^*$ . Así podemos escribir la serie de Fourier de  $F$  como

$$(1.8) \quad F(x) = f(A^{-1}x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{2\pi i \langle (A^{-T}k), x \rangle}$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \hat{F}(\gamma) e^{2\pi i \langle \gamma, x \rangle} = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \hat{F}(\gamma) e_\gamma(x).$$

Con estas definiciones puede deducirse del Lema 1.13 un resultado análogo para funciones  $\Gamma$ -periódicas:

**Corolario 1.14.** *Sea  $\Gamma = A\mathbb{Z}^n$ , y  $F \in L^1(A[0,1]^n)$  tal que  $\sum_{\gamma \in \Gamma^*} |\hat{F}(\gamma)| < \infty$ . Entonces  $F \in L^2(A[0,1]^n)$  y en consecuencia  $F$  coincide con su serie de Fourier en casi todo punto.*

### 1.4.2. Bases ortogonales por traslación

La Proposición 1.2, que dimos sin demostración, nos dice que si una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  genera un sistema ortogonal por traslaciones, el soporte de su transformada de Fourier no puede ser pequeño. Demostraremos ese resultado generalizándolo a  $\mathbb{R}^n$ . Primero, un lema auxiliar de mucha utilidad:

**Lema 1.15.** *Sea  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice y sea  $D$  un dominio fundamental de  $\Gamma$ . Entonces el conjunto  $\{g(\cdot - \gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  es un sistema ortonormal si y solo si*

$$\sum_{k \in \Gamma^*} |\hat{g}(\xi + k)|^2 = |D| \text{ para casi todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Llamemos  $D^*$  a un dominio fundamental de  $\Gamma^*$ . Si el sistema  $\{g(\cdot - \gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  es ortonormal tenemos, para cada  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\begin{aligned} \delta_{\gamma,0} &= \langle g, g(\cdot - \gamma) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \hat{g}, \widehat{g(\cdot - \gamma)} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \stackrel{a}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi) e^{-2\pi i \langle \gamma, \xi \rangle}} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi i \langle \gamma, \xi \rangle} d\xi \\ &= \sum_{k \in \Gamma^*} \int_{D^* + k} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi i \langle \gamma, \xi \rangle} d\xi \\ &= \sum_{k \in \Gamma^*} \int_{D^*} |\hat{g}(\xi - k)|^2 e^{2\pi i \langle \gamma, \xi - k \rangle} d\xi \\ &\stackrel{b}{=} \int_{D^*} \sum_{k \in \Gamma^*} |\hat{g}(\xi - k)|^2 e^{2\pi i \langle \gamma, \xi - k \rangle} d\xi \\ &\stackrel{c}{=} \int_{D^*} \sum_{k \in \Gamma^*} |\hat{g}(\xi - k)|^2 e^{2\pi i \langle \gamma, \xi \rangle} \underbrace{e^{-2\pi i \langle \gamma, k \rangle}}_{=1} d\xi \\ &= \int_{D^*} \left( \sum_{k \in \Gamma^*} |\hat{g}(\xi - k)|^2 \right) e^{2\pi i \langle \gamma, \xi \rangle} d\xi. \\ &= \frac{1}{|D^*|} \int_{D^*} \underbrace{\left( |D^*| \sum_{k \in \Gamma^*} |\hat{g}(\xi - k)|^2 \right)}_{:=h(\xi)} e^{2\pi i \langle \gamma, \xi \rangle} d\xi \\ &= \hat{h}(-\gamma) \end{aligned}$$

En (a) hemos usado la identidad  $\mathcal{F}(g(\cdot + \gamma)) = \hat{g}e_\gamma$  que es de fácil verificación. En (b) usamos el teorema de Tonelli, y en (c) usamos que  $\langle \gamma, k \rangle \in \mathbb{Z}$  por definición de lattice dual. Entonces hemos obtenido los coeficientes de Fourier de la función  $\Gamma^*$ -periódica  $h(\xi) = |D^*| \sum_{k \in \Gamma^*} |\hat{g}(\xi - k)|^2$ , como los definimos en (1.7). Gracias al Lema 1.14,  $h$  coincide con su serie de Fourier, y resulta  $h(\xi) = 1$  para casi todo punto. Usando  $|D| |D^*| = 1$ , obtenemos el resultado. Recíprocamente, si la función  $h$  vale 1 en casi todo punto, se pueden calcular sus coeficientes de Fourier con la misma cuenta, lo cual muestra que el sistema  $\{g(\cdot - \gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  es ortonormal.  $\square$

**Proposición 1.16.** *Sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice,  $D$  una región fundamental de  $\Gamma$ , y sea  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  tal que el conjunto  $\{g(\cdot - \gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  es un sistema ortonormal. Entonces  $|\text{sop}(\hat{g})| \geq |D|^{-1}$ , y la igualdad vale si y solo si  $|\hat{g}| = |W|^{-1/2} \mathbf{1}_W$  para algún conjunto medible con  $|W| = |D|^{-1}$ .*

*Demostración.* Por el Lema 1.15, es claro que  $|\hat{g}(\xi)|^2 \leq |D|$  para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Además, como el sistema es ortonormal, tenemos  $\|g\| = \|\hat{g}\| = 1$ . Por lo tanto

$$|D| |\text{sop}(\hat{g})| = \int_{\text{sop}(\hat{g})} |D| \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{g}\|^2 = 1$$



lo cual muestra la primera parte del enunciado. Para ver la otra, asumamos que  $|\text{sop}(\hat{g})| = |D|^{-1}$  pero  $|\hat{g}|$  no es un múltiplo de la función característica de un conjunto. Entonces existe  $E \subset \mathbb{R}^n$  donde  $0 < |\hat{g}| < |D|^{1/2}$ . Así,

$$\begin{aligned} 1 = \|\hat{g}\|^2 &= \int_{\text{sop } \hat{g}} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\text{sop}(\hat{g}) \setminus E} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi + \int_E |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &< (|\text{sop}(\hat{g}) \setminus E| + |E|) |D| = |\text{sop}(\hat{g})| |D| = 1 \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. El recíproco es claro, ya que si  $|\hat{g}| = |W|^{-1/2} \mathbf{1}_W$  con  $|W| = |D|^{-1}$ , entonces  $|\text{sop } \hat{g}| = |D|^{-1}$ .  $\square$

## 1.5. El Teorema de Fuglede

El mismo cambio de coordenadas que usamos en (1.7), junto con una normalización adecuada, define un operador  $\mathfrak{D}$  de dilatación por  $A$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} : L^2([0, 1]^n) &\longrightarrow L^2(A[0, 1]^n) \\ \mathfrak{D}(f)(x) &= |\det A|^{-1/2} f(A^{-1}x) \end{aligned}$$

que resulta un isomorfismo isométrico entre estos espacios de Hilbert, es decir, un operador unitario. En efecto, es isomorfismo porque su inverso es la dilatación por  $A^{-1}$ , y es isométrico porque preserva el producto interno:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{D}(f), \mathfrak{D}(g) \rangle_{L^2(A^{-1}[0, 1]^n)} &= \int_{A^{-1}[0, 1]^n} |\det A| f(Ax) \overline{g(Ax)} dx \\ &= \int_{[0, 1]^n} f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \langle f, g \rangle_{L^2([0, 1]^n)}. \end{aligned}$$

En particular, si aplicamos  $\mathfrak{D}$  a la base ortonormal  $\{e_n : n \in \mathbb{Z}^n\}$  de  $L^2([0, 1]^n)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(e_n)(x) &= |\det A|^{-1/2} e^{2\pi i \langle k, A^{-1}x \rangle} = |\det A|^{-1/2} e^{2\pi i \langle A^{-T}k, x \rangle} \\ &= |\det A|^{-1/2} e_\gamma(x) \text{ con } \gamma \in \Gamma^*. \end{aligned}$$

Como los operadores unitarios preservan bases ortonormales, hemos demostrado que

Si  $\Gamma = A\mathbb{Z}^n$  entonces  $\left\{ |\det A|^{-1/2} e_\gamma : \gamma \in \Gamma^* \right\}$  es una base ortonormal de  $L^2(A[0, 1]^n)$ .

Ahora, si en vez del paralelepípedo fundamental tomáramos un conjunto medible arbitrario  $D$  que tesele por traslaciones de  $\Gamma$ , ¿podremos obtener una base ortonormal de exponenciales para  $L^2(D)$ ? Fuglede probó en [Fug74, §6] que en tal caso el enunciado anterior se mantiene: para que las exponenciales con frecuencias en  $\Gamma^*$  formen una base ortonormal de  $L^2(D)$  es suficiente y de hecho necesario que  $D$  tesele por traslaciones de  $\Gamma$ .

**Teorema 1.17** (Fuglede). *Sea  $D$  un conjunto medible de  $\mathbb{R}^n$  con  $|D| < \infty$ , y  $\Gamma$  una lattice de rango completo. Entonces  $D$  tesela  $\mathbb{R}^n$  por traslaciones de  $\Gamma$  si y solo si las funciones*

$$|D|^{-1/2} e_\gamma, \quad \gamma \in \Gamma^*$$

*forman una base ortonormal de  $L^2(D)$ .*

Elegimos dar la demostración del Teorema de Fuglede que se encuentra en [Jos]. Primero, usaremos la siguiente caracterización más simple para las bases ortonormales de  $L^2(D)$ :

**Lema 1.18.** *El conjunto  $B = \{|D|^{-1/2} e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma^*}$  es base ortonormal de  $L^2(D)$  si y solo si*

$$(1.9) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \left| \widehat{\mathbf{1}_D}(\xi + \gamma) \right|^2 = |D|^2 \text{ para casi todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Por la identidad de Parseval,  $B$  es base ortonormal de  $L^2(D)$  si y solo si

$$(1.10) \quad |D| \|f\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \left| \langle f, e_\gamma \rangle_{L^2(D)} \right|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \left| (\widehat{\mathbb{1}_D f})(\gamma) \right|^2 \quad \forall f \in L^2(D).$$

En particular, si  $B$  es una b.o.n, tenemos que, dado  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \left| \widehat{\mathbb{1}_D}(\xi + \gamma) \right|^2 &= \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_D(x) e^{-2\pi i \langle \xi + \gamma, x \rangle} dx \right|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (e_{-\xi}(x) \mathbb{1}_D(x)) e_{-\gamma}(x) dx \right|^2 \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \left| \widehat{e_{-\xi} \mathbb{1}_D}(\gamma) \right|^2 \stackrel{(1.10)}{=} |D| \|e_{-\xi}\|_{L^2(D)}^2 = |D| \int_D |e_{-\xi}(x)|^2 dx = |D| \int_D 1 dx = |D|^2. \end{aligned}$$

Recíprocamente, asumamos (1.9). Veamos primero que  $e_\gamma$  es un sistema ortogonal: sea  $v \in \Gamma^*$ ,

$$\begin{aligned} |D|^2 &= \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \left| \widehat{\mathbb{1}_D}(\gamma + (-v)) \right|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} |\langle e_\gamma, e_v \rangle|^2 = |\langle e_v, e_v \rangle|^2 + \sum_{\gamma \neq v} |\langle e_\gamma, e_v \rangle|^2 \\ &= \left| \int_D |e_v|^2 dx \right|^2 + \sum_{\gamma \neq v} |\langle e_\gamma, e_v \rangle|^2 \\ &= |D|^2 + \sum_{\gamma \neq v} |\langle e_\gamma, e_v \rangle|^2 \end{aligned}$$

así que  $\langle e_\gamma, e_v \rangle = 0$  si  $\gamma \neq v$ . Entonces  $B$  es ortonormal gracias a la normalización  $|D|^{-1/2}$ . Para ver que es completo, consideramos el sistema  $A = \{e_x : x \in \mathbb{R}^n\} \subset L^2(D)$ . Si una  $f \in L^2(D)$  es ortogonal a todo elemento de  $A$ , entonces  $\widehat{f}(-x) = \langle f, e_x \rangle = 0$  con lo cual  $f = 0$ , así que  $A$  es completo. Si ahora nombramos  $H = \overline{\langle B \rangle}$  (la clausura del subespacio generado por  $B$  en  $L^2(D)$ ),  $B$  es una base ortogonal de  $H$ . Si proyectamos ortogonalmente  $e_x$  en  $H$ , por (1.9) obtenemos

$$\|P_H(e_x)\|_{L^2(D)}^2 = \frac{1}{|D|} \sum_{\gamma \in \Gamma^*} |\langle e_x, e_\gamma \rangle|^2 = \frac{1}{|D|} \sum_{\gamma \in \Gamma^*} |\widehat{\mathbb{1}_D}(x - \gamma)|^2 = \frac{1}{|D|} |D|^2 = |D| = \|e_x\|_{L^2(D)}^2$$

lo cual implica  $A \subset H$ . Por completitud de  $A$ , obtenemos que  $H = L^2(D)$  y  $B$  resulta una base ortonormal.  $\square$

**Demostración del Teorema 1.17 (Fuglede).** Sea  $\Gamma = A[0, 1]^n$ . Denotemos por  $Q$  y  $Q^*$  a los paralelepípedos fundamentales de las lattices  $\Gamma$  y  $\Gamma^*$  respectivamente. Notar que  $|Q| |Q^*| = 1$ . Sea  $F$  la función

$$F(\xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} |\widehat{\mathbb{1}_D}(\xi + \gamma)|^2.$$

Esta es una función  $\Gamma^*$ -periódica, y el siguiente argumento de periodización muestra que  $F \in L^1(Q^*)$ :

$$\int_{Q^*} |F(\xi)| d\xi = \int_{Q^*} \sum_{\gamma \in \Gamma^*} |\widehat{\mathbb{1}_D}(\xi + \gamma)|^2 d\xi = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \int_{Q^* + \gamma} |\widehat{\mathbb{1}_D}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\mathbb{1}_D}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

Pudimos intercambiar la suma con la integral por el teorema de Tonelli, y en la última igualdad utilizamos que  $Q^*$  tesela por  $\Gamma^*$ . Como  $F \in L^1(Q^*)$ , podemos calcular sus coeficientes de Fourier como en (1.7). Dado  $g \in \Gamma$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{F}(g) &= |Q^*|^{-1} \int_{Q^*} F(\xi) e_{-g}(\xi) d\xi \\ &= |Q^*|^{-1} \int_{Q^*} e_{-g}(\xi) \sum_{\gamma \in \Gamma^*} |\widehat{\mathbb{1}_D}(\xi + \gamma)|^2 d\xi \\ &= |Q^*|^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \int_{Q^* + \gamma} e_{-g}(\xi) |\widehat{\mathbb{1}_D}(\xi)|^2 d\xi \\ &= |Q^*|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} e_{-g}(\xi) |\widehat{\mathbb{1}_D}(\xi)|^2 d\xi \\ (1.11) \quad &= \frac{|D \cap D - g|}{|Q^*|} \end{aligned}$$

La última igualdad se deduce de la siguiente manera: recordando que  $\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \mathcal{F}(f_1)\mathcal{F}(f_2)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e_{-g}(\xi) \widehat{1_D}(\xi) \overline{\widehat{1_D}(\xi)} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} e_{-g}(\xi) \widehat{1_D}(\xi) \widehat{1_{-D}}(\xi) d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left( \widehat{1_D} \widehat{1_{-D}} \right) (-g) \\ &= (1_D * 1_{-D})(-g) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 1_D(x) 1_{D-g}(x) dx = |D \cap D - g|. \end{aligned}$$

Definamos ahora la función

$$G(\xi) = \sum_{g \in \Gamma} 1_D(\xi + g).$$

La función  $G$  es  $\Gamma$ -periódica y el mismo argumento de periodización muestra que  $G \in L^1(Q)$ :

$$\int_Q |G(\xi)| d\xi = \int_Q \sum_{g \in \Gamma} 1_D(\xi + g) d\xi = \sum_{g \in \Gamma} \int_{Q+g} 1_D(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} 1_D(\xi) d\xi < \infty$$

Entonces podemos calcular sus coeficientes de Fourier. Para  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\gamma) &= |Q|^{-1} \int_Q e_{-\gamma} G(\xi) d\xi \\ &= |Q|^{-1} \int_Q e_{-\gamma} \sum_{g \in \Gamma} 1_D(\xi + g) d\xi \\ &= |Q|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} e_{-\gamma} 1_D(\xi) d\xi \\ (1.12) \quad &= \frac{\widehat{1_D}(\gamma)}{|Q|} \end{aligned}$$

Ahora podemos demostrar fácilmente las dos implicaciones.

( $\implies$ ) Supongamos que  $D$  tesela por  $\Gamma$ . Por (1.11) obtenemos que los coeficientes de Fourier de  $F$  resultan

$$(1.13) \quad \widehat{F}(g) = 0 \quad \forall g \neq 0 \quad \text{y} \quad \widehat{F}(0) = \frac{|D|}{|Q^*|} = |Q||D| = |D|^2$$

donde usamos que  $|D| = |Q|$  por ser ambos conjuntos teselas de  $\Gamma$  (Obs. 1.9). En particular,  $\sum_{g \in \Gamma} \widehat{F}(g) = |D|^2 < \infty$ . Como  $F \in L^1(Q^*)$ , el Corolario 1.14 nos garantiza que  $F$  coincide con su serie de Fourier. Entonces tenemos

$$F(\xi) = \sum_{g \in \Gamma} \widehat{F}(g) e_g = \widehat{F}(0) + \sum_{g \neq 0} \widehat{F}(g) e_g = |D|^2$$

para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Por el Lema (1.18),  $\{|D|^{-1/2} e_\gamma : \gamma \in \Gamma^*\}$  son una b.o.n. de  $L^2(D)$ .

( $\impliedby$ ) Supongamos que  $\{|D|^{-1/2} e_\gamma : \gamma \in \Gamma^*\}$  son una b.o.n. de  $L^2(D)$ . Por el Lema (1.18), es  $F(\xi) = |D|^2$  en casi todo punto. En particular,

$$|D|^2 = F(0) = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} |\widehat{1_D}(\gamma)|^2 = |\widehat{1_D}(0)|^2 + \sum_{\gamma \neq 0} |\widehat{1_D}(\gamma)|^2 = |D|^2 + \sum_{\gamma \neq 0} |\widehat{1_D}(\gamma)|^2.$$

Por lo tanto  $\widehat{1_D}(\gamma) = 0$  para todo  $\gamma \neq 0$ ,  $\widehat{1_D}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_D(x) dx = |D|$ , así que

$$\widehat{G}(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \neq 0 \quad \text{y} \quad \widehat{G}(0) = 1.$$

Como  $G \in L^1(Q)$ , el Corolario 1.14 nos da que  $G \in L^2(Q)$  y entonces

$$G(\xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \widehat{G}(\gamma) e_\gamma = \widehat{G}(0) + \sum_{\gamma \neq 0} \widehat{G}(\gamma) e_\gamma = 1$$

para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , es decir que  $D$  tesela por traslaciones de  $\Gamma$ . □

## 1.6. MSF wavelets y wavelet sets

Habiendo establecido el teorema de Fuglede podemos demostrar cómodamente el siguiente resultado, que relaciona teselaciones por traslación y dilatación con MSF-wavelets. Este puede hallarse en [BL01, Teo. 2.2] para el caso  $A = 2\text{Id}$ . Es una versión multidimensional del Corolario 1.4 que mencionamos antes.

**Teorema 1.19.** *Sea  $W \subset \mathbb{R}^n$  medible. Dadas una matriz  $A = B^\top \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  y una lattice  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ , son equivalentes:*

1.  $\psi = \check{1}_W$  es una  $(B, \Gamma^*)$ -wavelet, es decir que

$$\left\{ |\det B|^{j/2} \psi(B^j x - \gamma) : j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma^* \right\}$$

es una base ortogonal de  $L^2(\mathbb{R}^n)$

2. Toda  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  tal que  $|\hat{\phi}| = 1_W$  es una  $(B, \Gamma^*)$ -wavelet

3.  $W$  es un  $(A, \Gamma)$ -wavelet set, es decir que  $W$  tesela por dilataciones de  $A$  y por traslaciones de  $\Gamma$ .

Nótese que el factor de dilatación  $|\det B|^{1/2}$  en 1 no es necesario para la validez del teorema, pero tal escritura nos permite asegurar además que si  $\|\psi\| = 1$ , la base wavelet es ortonormal. Esto ocurre exactamente cuando  $|W| = 1$ , y del teorema se deduce que esto es equivalente a que  $|\mathbb{R}^n/\Gamma| = 1$ .

*Demostración.* Veamos primero la equivalencia entre 1 y 3, y luego la equivalencia entre 1 y 2.

(3  $\Rightarrow$  1). Asumamos que  $W$  es un  $(A, \Gamma)$  wavelet set. Como  $W$  tesela por  $\Gamma$ ,  $W$  es un conjunto de medida finita (1.9), por lo cual  $1_W \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , y consecuentemente  $\check{1}_W \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Además, el teorema de Fuglede 1.17 nos dice que  $\{1_W e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma^*}$  es una base ortogonal de  $L^2(W)$  (notar que la base no es ortonormal ya que omitimos el factor de normalización  $|W|^{-1/2}$ ). Aplicar  $j$  veces el operador de dilatación  $\mathfrak{D}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^j : L^2(W) &\longrightarrow L^2(A^j W) \\ \mathfrak{D}^j(f)(x) &= |\det A|^{-j/2} f(A^{-j}x) \end{aligned}$$

nos resulta en otro operador unitario, y similarmente con  $\mathfrak{D}^{-1}$ . Por lo tanto, para cada  $j \in \mathbb{Z}$  tenemos que  $\{\mathfrak{D}^j(1_W e_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma^*}$  es una base ortogonal de  $L^2(A^j W)$ . Pero, al ser  $W$  un wavelet set,  $\{A^j W\}_{j \in \mathbb{Z}}$  es una partición medible de  $\mathbb{R}^n$ , así que los  $L^2(A^j W)$  son subespacios ortogonales en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  y tenemos la descomposición

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} L^2(A^j W).$$

Esto implica que  $\{\mathfrak{D}^j(1_W e_\gamma) : \gamma \in \Gamma^*, j \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortogonal de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Calculamos sus elementos explícitamente:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^j(1_W e_\gamma)(x) &= |\det A|^{-j/2} 1_W(A^{-j}x) e^{2\pi i \langle \gamma, A^{-j}x \rangle} \\ &= |\det A|^{-j/2} 1_{A^j W}(x) e^{2\pi i \langle (A^{-\top})^j \gamma, x \rangle}. \end{aligned}$$

Conceptualmente, hemos obtenido una base del “dominio frecuencial”, que es donde ocurren las operaciones de traslación y dilatación. Para llegar al “dominio temporal” debemos aplicar la transformada inversa de Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$ , que es también un operador unitario de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Obtenemos así otra base de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , que pensamos como una base del dominio temporal:

$$\{\mathcal{F}^{-1}(\mathfrak{D}^j(1_W e_\gamma)) : \gamma \in \Gamma^*, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Para calcular sus elementos usamos las siguientes identidades de fácil verificación:

- $\mathcal{F}^{-1}(\hat{g} e_\alpha)(x) = g(x + \alpha).$
- $\check{1}_{A^j W}(x) = |\det A|^j \check{1}_W((A^\top)^j x).$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1} \left( |\det A|^{-j/2} \mathbb{1}_{A^j W} e_{(A^{-\top})^j \gamma} \right) (x) &= |\det A|^{-j/2} \mathcal{F}^{-1} \left( \mathbb{1}_{A^j W} e_{(A^{-\top})^j \gamma} \right) (x) \\
 &= |\det A|^{-j/2} \check{\mathbb{1}}_{A^j W} (x + (A^{-\top})^j \gamma) \\
 &= |\det A|^{-j/2} |\det A|^j \check{\mathbb{1}}_W ((A^{\top})^j (x + (A^{-\top})^j \gamma)) \\
 &= |\det A|^{j/2} \check{\mathbb{1}}_W (B^j x + \gamma) \\
 &= |\det B|^{j/2} \psi(B^j x + \gamma)
 \end{aligned}$$

lo cual demuestra que  $\{|\det B|^{j/2} \psi(B^j x - \gamma) : j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma^*\}$  es base ortogonal de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , como queríamos. Aquí hemos usado que escribir  $\gamma$  o  $-\gamma$  es indistinto por ser  $\Gamma^* = -\Gamma^*$ .

(1  $\Rightarrow$  3) Transformando la base del enunciado, las identidades antes mencionadas para la transformada de Fourier nos dan que

$$\left\{ |\det B|^{-j/2} \mathbb{1}_{A^j W}(x) e_{B^n \gamma}(x) : j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma^* \right\}$$

es una base ortogonal de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . De aquí obtendremos que  $W$  tesela por ambas acciones. Por un lado, fijando  $j = 0$  tenemos que

$$\{\mathbb{1}_W e_{\gamma} : \gamma \in \Gamma^*\}$$

es base ortogonal de  $L^2(W)$ . Por el teorema de Fuglede, entonces,  $W$  tesela por traslaciones de  $\Gamma$ . Si por otro lado fijamos  $\gamma = 0$ , obtenemos que el conjunto

$$\{\mathbb{1}_{A^j W} : j \in \mathbb{Z}\}$$

es ortogonal. Entonces  $|A^i W \cap A^j W| = 0 \ \forall i \neq j$ , con lo cual  $W$  empaca por  $A$ . Para ver que tesela, asumamos que  $|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j| > 0$ . En ese caso, existiría  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  no nula tal que  $\text{sop } f \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j$ . Por lo tanto

$$\langle f, \mathbb{1}_{A^j W} e_{B^n \gamma} \rangle = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma$$

y antitransformando

$$\langle \check{f}, \check{\mathbb{1}}_W (B^j x - \gamma) \rangle = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma,$$

lo cual es absurdo porque  $\{\check{\mathbb{1}}_W (B^j x - \gamma)\}_{j, \gamma}$  es un sistema ortogonal completo por hipótesis, y  $\check{f} \neq 0$ . Se deduce entonces que  $|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j| = 0$ , así que  $W$  tesela por dilataciones de  $A$ . Entonces  $W$  es un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.

(1  $\Leftrightarrow$  2) Es claro que 2 implica 1. Supongamos entonces que  $\phi = \check{\mathbb{1}}_W$  es una  $(B, \Gamma^*)$ -wavelet y veamos que toda  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  con  $|\hat{\psi}| = \mathbb{1}_W$  también lo es. Como vimos antes, el sistema  $\{\mathbb{1}_W e_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma^*}$  es una base ortogonal de  $L^2(W)$ . Observemos que entonces  $\{\hat{\phi} e_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma^*}$  también lo es. En efecto, el sistema es ortogonal, ya que

$$\langle \hat{\phi} e_{\gamma}, \hat{\phi} e_{\gamma'} \rangle_{L^2(W)} = \int_W |\hat{\phi}(x)| e_{\gamma}(x) \overline{e_{\gamma'}(x)} dx = \langle e_{\gamma}, e_{\gamma'} \rangle_{L^2(W)} = 0 \quad \forall \gamma \neq \gamma' \in \Gamma^*.$$

Para ver que es completo, sea  $f \in L^2(W)$  ortogonal a todos los elementos del sistema. Entonces, para todo  $\gamma \in \Gamma^*$  vale

$$0 = \langle \hat{\phi} e_{\gamma}, f \rangle_{L^2(W)} = \langle e_{\gamma}, \overline{\hat{\phi}} f \rangle_{L^2(W)}$$

con lo cual  $\overline{\hat{\phi}} f = 0$ , por ser  $\{\mathbb{1}_W e_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma^*}$  un sistema completo. Pero  $\overline{\hat{\phi}}(x) \neq 0$  para casi todo  $x \in W$ , y entonces  $f = 0$ . Habiendo establecido que  $\{\hat{\phi} e_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma^*}$  es una base ortogonal de  $L^2(W)$ , se deduce igual que antes que  $\{\mathcal{D}^j(\hat{\phi} e_{\gamma}) : j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma\}$  es base ortogonal de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Antitransformando, obtenemos que

$$\left\{ |\det B|^{j/2} \phi(B^j x - \gamma) : j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma^* \right\}$$

es base ortogonal de  $L^2(\mathbb{R})$ , es decir,  $\phi$  es una  $(B, \Gamma^*)$ -wavelet. □

## Capítulo 2

# El teorema de Bownik-Speegle

Repetimos aquí la Pregunta 1.1 sobre la existencia de wavelet sets:

**Pregunta 1.1.** *Si es  $A$  una matriz inversible de  $n \times n$  y  $\Gamma$  un lattice de rango completo en  $\mathbb{R}^n$ , ¿para qué pares  $(A, \Gamma)$  existe algún conjunto medible  $W \subset \mathbb{R}^n$  tal que*

$$\{A^i W : i \in \mathbb{Z}\} \quad y \quad \{W + \gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

*son particiones medibles de  $\mathbb{R}^n$ ?*

Este problema fue planteado en la tesis doctoral de Darrin Speegle [Spe97] en 1997, y aparece en múltiples trabajos posteriores durante los años 2000 [Wan02, IW06, DLS97, Spe03]. No fue resuelta de manera completa sino hasta el año 2021 por Marcin Bownik y el mismo Speegle, en [BS21].

Podemos notar que el problema es simétrico en  $A$  y  $A^{-1}$ , porque se utilizan todas las potencias enteras de la matriz de dilatación. Entonces, podremos asumir  $|\det A| \leq 1$  o  $|\det A| \geq 1$  según convenga, sin pérdida de generalidad. Recordamos además que todas las lattices utilizadas serán de rango completo a menos que se indique lo contrario.

### 2.1. Resultados parciales

Vimos en la Proposición 1.9 y el Teorema 1.10 que toda lattice admite teselaciones por traslación, y toda matriz no ortogonal admite teselaciones por dilatación. Esto es, en casi todos los casos existen conjuntos que teselen por cada acción por separado. Lo que sigue es intentar encontrar las condiciones que compatibilizan estas dos acciones.

Como primera aproximación al problema de teselación simultánea, sabemos que un wavelet set debe tener medida finita para poder teselar por una lattice de rango completo. En vistas del Teorema 1.10, eso es imposible si  $|\det A| = 1$ .

**Corolario 2.1.** *Si  $|\det A| = 1$ , no existen  $(A, \Gamma)$  wavelet sets para ninguna lattice  $\Gamma$ .*

Como contraparte interesante a este hecho, Bownik y Lemvig probaron en [BL17] que dada una lattice de rango completo  $\Gamma$ , existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set para casi toda matriz  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

Decimos que  $A$  es una matriz *expansiva* cuando todos sus autovalores son estrictamente mayores a 1 en módulo. Resulta que en este caso siempre existen wavelet sets:

**Teorema 2.2** (Caso expansivo [DLS97]). *Si  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  es expansiva, existen  $(A, \Gamma)$  wavelet sets para cualquier lattice  $\Gamma$ .*

Esto fue demostrado temprano en la investigación por Dai, Larson y Speegle, en un contexto abstracto. Una década más tarde fue posible dar una demostración más simple haciendo uso del Teorema 1.10 y otro resultado importante, que damos en la sección 3.1.

Pese a haberse resuelto el caso de  $A$  expansiva, la situación con  $A$  arbitraria resultó ser mucho más difícil de atacar. Una conclusión que nos deja el caso expansivo junto al Teorema 1.10 es que todo  $(A, \Gamma)$  wavelet set acotado debe provenir de una matriz tal que  $A$  o  $A^{-1}$  sea expansiva. Es decir, los wavelet sets que quedan fuera del caso expansivo son necesariamente conjuntos no acotados.

El Teorema 2.2 se mantuvo como el único caso resuelto en dimensión arbitraria hasta que en 2006 Eugen Ionascu y Yang Wang encontraron una caracterización completa de los pares wavelet  $(A, \Gamma)$  en dimensión  $n = 2$ :

**Teorema 2.3** ([IW06]). *Sea  $A \in GL_2(\mathbb{R})$  con  $|\det A| > 1$  y sea  $\Gamma$  una lattice en  $\mathbb{R}^2$ . Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  los autovalores de  $A$  con  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ . Entonces existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set si y solo si*

(i)  $|\lambda_2| \geq 1$ , o bien

(ii)  $|\lambda_2| < 1$  y  $\ker(A - \lambda_2 I) \cap \Gamma = \{0\}$ .

Se observa que (i) incluye al caso en que  $A$  es expansiva, que estaba previamente resuelto. La condición novedosa es el caso (ii).<sup>1</sup> Cabe entonces preguntarse cómo se podría generalizar esta condición a dimensión arbitraria. Bownik y Speegle exponen cuatro posibles interpretaciones de la condición (ii) en  $\mathbb{R}^n$  cuando el menor autovalor de  $A$  cumple  $|\lambda| < 1$  y  $|\det A| > 1$ . La dificultad del problema en dimensión general resultó ser que los enunciados siguientes son equivalentes entre sí en dimensión  $n = 2$ , pero ninguno equivale a la existencia de  $(A, \Gamma)$  wavelet sets en dimensión  $n \geq 3$ :

- (1) para todo  $R > 0$ ,  $\liminf_{j \rightarrow \infty} \#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, R)) \cap \Gamma| = 1$ ,
- (2) para todo  $R > 0$ ,  $\liminf_{j \rightarrow \infty} \#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, R)) \cap \Gamma| < \infty$ ,
- (3) para toda sublattice  $\Lambda \subset \Gamma$ , si  $V$  es el subespacio generado por  $\Lambda$  y  $d = \dim V$ , entonces

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} |A^{-j}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap V|_d < \infty,$$

donde  $|\cdot|_d$  denota la medida de Lebesgue en el subespacio  $V$ ,

- (4) si  $V$  es el espacio generado por los autovectores de  $A$  de autovalor  $|\lambda| < 1$ , entonces  $V \cap \Gamma = \{0\}$ .

Veremos que para cualquier dimensión  $n$  se cumple  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ . Antes de su paper de 2021, Bownik y Speegle sabían que (1) era una condición suficiente para la existencia de wavelet sets, como un resultado derivado de las técnicas utilizadas para el caso  $n = 2$  en [IW06]. Resulta que (3), y por lo tanto (4), son ambas condiciones necesarias para la existencia de wavelet sets (véase [BS21, Teo. 5.1]). Además, (4) generaliza claramente el caso (ii) del Teorema 2.3. Esto muestra que, de haber una condición que caracterice unívocamente la existencia de wavelet sets, debe estar en alguna posición intermedia entre esta cadena de implicaciones. Aún así, no existía un buen candidato para la caracterización. El progreso clave fue pasar de la condición (1), previamente conocida, a la condición (2). Esta fue la que puso a Bownik y a Speegle en el camino correcto para hallar la condición de equivalencia, que veremos en la siguiente sección.

**Proposición 2.4.** *Se cumple la cadena de implicaciones  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$  para toda dimensión  $n$ .*

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2) es claro.

Veamos (2)  $\Rightarrow$  (3) por el contrarrecíproco. La negación de (3) es que exista una sublattice  $\Lambda \subset \Gamma$  tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |A^{-j}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap V|_d = \infty$$

donde  $V = \text{span}(\Lambda)$  y  $d = \dim(V) = \text{rango}(\Lambda)$ . Un resultado de geometría convexa que mencionamos más adelante como Lema 5.4 nos garantiza que existe una constante  $C$  que solo depende de  $d$  tal que

$$|A^{-j}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap V|_d \leq C \#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap \Lambda| \leq C \#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap \Gamma|$$

<sup>1</sup>Aquí se formula la condición (ii) de manera distinta a como fue expresada originalmente en [IW06], para sugerir la generalización. La formulación original es que el autoespacio de  $\lambda_2$  sea una recta con pendiente irracional en las coordenadas de los generadores de  $\Gamma$ .

con lo cual

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \# |A^{-j}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap \Gamma| = \infty$$

que es la negación de (2), como queríamos.

Para ver (3)  $\Rightarrow$  (4) por el contrarrecíproco, sea  $S$  el espacio generado por los autovectores de  $A$  de autovalor menor a 1 en módulo, y asumamos  $S \cap \Gamma =: \Lambda \neq \{0\}$ . Entonces  $\Lambda \subset \Gamma$  es una sublattice de rango  $d \geq 1$  y  $V = \text{span}(\Lambda) \subset S$ . Como  $A^{-1}$  es expansiva en  $V$ , tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{-k}\|_V = \infty,$$

donde  $\|\cdot\|_V$  denota la norma del operador  $A$  restringido a  $V$ ,  $\|A\|_V = \sup_{x \in V, \|x\| \leq 1} \|Ax\|$ . Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |A^{-j}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap V|_d = \infty$$

y esto niega la condición (3).  $\square$

En dimensión  $n = 2$  puede demostrarse que, si existe un autovalor de módulo menor que 1, se cumple (4)  $\Rightarrow$  (1) y los cuatro enunciados resultan equivalentes. La demostración, que aquí omitimos, se deduce de la prueba de [IW06, Prop. 3.4], donde se demuestra que debe existir una sucesión  $j_n$  tal que  $\# |A^{-j_n}(\mathbf{B}(0, R)) \cap \Gamma| = 1$ . La prueba utiliza propiedades de fracciones continuas en aproximación a números irracionales.

## 2.2. El teorema de caracterización

El teorema principal de este artículo es el resultado que resuelve definitivamente la Pregunta 1.1. Su enunciado es el siguiente:

**Teorema 2.5** (Caracterización de existencia de wavelet sets [BS21]). *Sea  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  con  $|\det A| > 1$  y sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice. Entonces existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set si y solo si*

$$(2.1) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\# |A^{-j}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap \Gamma|} = \infty.$$

En términos coloquiales, para que exista un wavelet set es necesario que las dilataciones negativas de la bola unitaria,  $A^{-j}\mathbf{B}(0, 1)$ , no intersequen demasiado a la lattice  $\Gamma$ .<sup>2</sup> Una cualidad deseable del teorema es que no hay distinción de casos respecto de los autovalores o los autoespacios de la matriz  $A$ , como sí lo tenía el Teorema 2.3. Para ilustrar cómo el teorema se pone en uso, veamos cómo recupera los resultados previos. Las condiciones (1) y (2) de la sección anterior claramente implican la condición (2.1), lo cual muestra (a posteriori) que son condiciones suficientes para la existencia de wavelet sets. Vemos que esta caracterización también recupera el caso expansivo, que volvemos a enunciar:

**Teorema 2.2** (Caso expansivo [DLS97]). *Si  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  es expansiva, existen  $(A, \Gamma)$  wavelet sets para cualquier lattice  $\Gamma$ .*

*Demostración.* Si la matriz  $A$  es expansiva, los autovalores de  $A^{-1}$  son menores que 1 en módulo. Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{-k}\| = 0,$$

donde  $\|\cdot\|$  denota la norma de operador  $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ . Como  $\Gamma$  es separado, existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que

$$A^{-j}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap \Gamma = \{0\} \quad \forall j \geq K.$$

Por lo tanto la suma en (2.1) es constantemente 1 a partir de un momento, y diverge. Entonces existen wavelet sets independientemente de la elección de  $\Gamma$ .  $\square$

<sup>2</sup>Más adelante se verá que el radio de la bola que se considere no altera este teorema. Más aún, es posible que la misma caracterización valga incluso con cualquier cuerpo simétrico convexo, pero no indagaremos en esta dirección.



Parte importante de la dificultad de este problema resultó lo elusivo de la caracterización (2.1). Esta condición, dada por la divergencia de cierta suma, no había sido una de las condiciones previamente estudiadas como candidato para caracterizar los wavelet sets. En lo que sigue intentaremos dar un ejemplo derivado de [Spe22], que pretende dar la motivación por la cual se podría estudiar tal condición en primer lugar.

**Ejemplos 2.** Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  el par  $(A, \Gamma)$  dado por

$$\Gamma = \mathbb{Z}^2 \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \lambda_2 < 1 < \lambda_1 \quad \text{y} \quad \lambda_1 \lambda_2 > 1.$$

Mostraremos con un argumento directo que no pueden existir  $(A, \mathbb{Z}^2)$  wavelet sets en  $\mathbb{R}^2$  (como puede preverse si se tiene el Teorema 2.3).

Supongamos que  $W$  es un conjunto que tesela por dilataciones de  $A$  y traslaciones de  $\mathbb{Z}^2$ . Sea entonces

$$U = [1, \lambda_1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

Observemos que  $U$  empaca por dilataciones de  $A$ . Sea para cada  $j \in \mathbb{Z}$

$$W_j = A^{-j}(U) \cap W.$$

Los conjuntos  $W_j$  cumplen tres puntos:

1. Cada  $W_j$  empaca por traslaciones de  $\mathbb{Z}^2$ , porque así lo hace  $W$ . Entonces  $|W_j| \leq 1$  (Prop. 1.9 (c)).
2. Cada  $W_j$  empaca por dilataciones de  $A$ , porque así lo hace  $A^{-j}(U)$ .
3.  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |A^j W_j| = \infty$ , porque

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |A^j W_j| = \left| \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j W_j \right| = \left| \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j (A^{-j}(U) \cap W) \right| = \left| U \cap \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j(W) \right| = |U| = \infty.$$

Pero, por otro lado, podemos acotar más finamente la medida de  $W_j$  para  $j \geq 1$ . Como  $W_j$  empaca por  $\mathbb{Z}^2$ , para casi todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $(x, y) \in W_j$  se cumple

$$|\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in W_j\}|_{\mathbb{R}} \leq 1$$

donde  $|\cdot|_{\mathbb{R}}$  denota la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Dado que además se cumple

$$W_j \subset [\lambda_1^{-j}, \lambda_1^{-j+1}] \times \mathbb{R}$$

deducimos que debe ser

$$(2.2) \quad |W_j| \leq \lambda_1^{-j+1}$$

pero entonces tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |A^j W_j| &= \sum_{j \geq 1} |A^{-j} W_{-j}| + \sum_{j \geq 0} |A^j W_j| \\ &= \underbrace{\sum_{j \geq 1} |\det A|^{-j} |W_{-j}|}_{< \infty} + \sum_{j \geq 0} |\det A|^j |W_j|. \end{aligned}$$

La serie de las potencias negativas converge por ser  $\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 1$ . Usando la estimación (2.2) en el otro término,

$$\sum_{j \geq 0} |\det A|^j |W_j| = \sum_{j \geq 0} (\lambda_1 \lambda_2)^j |W_j| \leq \sum_{j \geq 0} \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^j}{\lambda_1^{j-1}} = \lambda_1 \sum_{j \geq 0} \lambda_2^j < \infty.$$

Deducimos que  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |A^j W_j| < \infty$ , contradiciendo el punto (3). Entonces no existe ningún  $(A, \mathbb{Z}^2)$  wavelet set.

El ejemplo anterior puede brindarnos una idea de por qué la caracterización (2.1) involucra la divergencia de una suma. Ahora modifiquemos ese argumento para ver qué podemos deducir en caso de que  $\Gamma$  no sea  $\mathbb{Z}^2$ .

**Ejemplos 3.** Sea  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  con  $|\det A| > 1$ , y sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  un lattice arbitrario. Tomemos  $U \subset \mathbb{R}^n$  que empaque por dilataciones de  $A$ , como hicimos en el ejemplo anterior. Siguiendo una construcción análoga, sabemos que, de existir un  $(A, \Gamma)$  wavelet set  $W$ , debemos poder construir conjuntos  $W_j \subset A^{-j}(U)$  que cumplan

1. Cada  $W_j$  empaque por traslaciones de  $\Gamma$
2. Cada  $W_j$  empaque por dilataciones de  $A$
3.  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |A^j W_j| = \infty$ .

Ahora, asumamos más todavía. Supongamos que  $B = B(x_0, r) \subset U$  es una bola contenida en  $U$ , y supongamos que los  $W_j$  cumplen una condición adicional,

4.  $W_j \subset A^{-j}(B) \subset A^{-j}(U)$ , con  $W_j$  de medida máxima entre los subconjuntos de  $A^{-j}(B)$  que cumplen 1.

¿Qué podemos deducir sobre  $\Gamma$  y  $A$ ? Podemos reescribir 3, recordando que la serie de potencias negativas converge (porque  $\det A > 1$ ):

$$\infty = \sum_{j=1}^{\infty} |A^j W_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |\det A|^j |W_j| = |B| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|W_j|}{|A^{-j}(B)|}.$$

La cantidad  $\frac{|W_j|}{|A^{-j}(B)|}$  nos da una medida de cuán grande es  $W_j$  dentro de  $A^{-j}(B)$ . Si  $W_j$  ocupa casi toda la medida de  $A^{-j}(B)$ , la proporción será muy cercana a 1, y viceversa.

Ahora usaremos el siguiente Lema, que demostraremos en otra sección:

**Lema 3.3** (Empaque a partir de un empaque  $M$ -redundante). *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  medible que empaque  $M$ -redundantemente por traslaciones de  $\Gamma$ . Entonces existe una partición medible de  $U$  de tamaño  $M$ ,  $\{U_k\}_{k=1}^M$  tal que cada  $U_k$  empaque por traslaciones. En particular existe  $U' \subset U$  que empaque por  $\Gamma$  y  $|U'| \geq \frac{1}{M}|U|$ .*

De esto deducimos que, si  $m_j \in \mathbb{N}$  es tal que  $A^{-j}(B)$  empaque  $m_j$ -redundantemente por traslaciones, entonces

$$\frac{|W_j|}{|A^{-j}(B)|} \geq \frac{1}{m_j}$$

ya que, por el punto 4,  $W_j$  es maximal entre los subconjuntos de  $A^{-j}(B)$  que empaquen por traslaciones. Obtenemos que, si  $A^{-j}(B)$  empaque  $m_j$ -redundantemente por traslaciones,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j} = \infty.$$

Finalmente observamos que, por definición,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{A^{-j}(B(x_0, r_0))}(x + \gamma) \leq m_j \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n$$

tomando  $x$  cercano a  $A^{-j}(-x_0)$ , obtenemos la desigualdad <sup>3</sup>

$$\#|A^{-j}(B(0, r_0)) \cap \Gamma| = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{A^{-j}(B(0, r_0))}(\gamma) \leq m_j.$$

De donde surge la condición del Teorema 2.5:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\#|A^{-j}(B(0, r_0)) \cap \Gamma|} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j} = \infty.$$

Esta argumentación muestra cómo, haciendo las suposiciones correctas, la divergencia de esta serie puede surgir como una posible condición necesaria para la existencia de  $(A, \Gamma)$  wavelet sets.

En los capítulos siguientes nos dedicamos a dar los prerrequisitos básicos y la demostración completa del Teorema 2.5.

<sup>3</sup>Este paso está detallado en el Lema 4.4, (1)  $\Rightarrow$  (2), donde la argumentación es análoga.

## 2.3. Una aplicación del teorema

La caracterización de los pares  $(A, \Gamma)$  que admiten wavelet sets en [BS21] dio lugar a un resultado nuevo que mejora el Teorema 2.2, y que sirve para ilustrar la utilidad de tener una caracterización completa.

**Teorema 2.6.** *Sea  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  con  $|\det A| > 1$  y tal que todos sus autovalores son mayores o iguales a uno en módulo. Entonces, para cualquier lattice  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.*

El progreso de este teorema parece pequeño respecto del caso expansivo, pero la demostración involucra al teorema de caracterización y dos resultados más, que son diversos e interesantes en sí mismos. Daremos la demostración de 2.6 citando los lemas necesarios, sin demostrarlos.

**Lema 2.7** ([BS21], [CF20]). *Sea  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Existe una constante  $c > 1$  y otra matriz  $\tilde{A} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  cuyos autovalores son todos positivos, tal que*

$$(2.3) \quad A^j(\mathbf{B}(0, r/c)) \subset \tilde{A}^j(\mathbf{B}(0, r)) \subset A^j(\mathbf{B}(0, cr)) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, r > 0.$$

Recordamos que un *grupo a un parámetro* de matrices es un morfismo de grupos continuo  $U : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Llamamos *unipotente* a una matriz cuyos autovalores son todos iguales a 1.

**Lema 2.8** ([Mar71]). *Sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice y sea  $U_t$  un grupo a un parámetro de matrices unipotentes. Entonces existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\sup\{t \in \mathbb{R} : \mathbf{B}(0, \delta) \cap U_t \Gamma = \{0\}\} = \infty.$$

*Demostración del Teorema 2.6.* Por el Lema 2.7 existe una constante  $c$  y una matriz inversible  $\tilde{A}$  cuyos autovalores son todos positivos y tal que se cumple la condición (2.3). Como los autovalores de  $\tilde{A}$  son reales, existe un cambio de base  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  tal que  $P\tilde{A}P^{-1}$  está en forma de Jordan y tiene coeficientes reales. Reemplazando  $A$  por  $PAP^{-1}$  y  $\tilde{A}$  por  $P\tilde{A}P^{-1}$ , las contenciones en (2.3) siguen valiendo. Notemos que  $W$  es un  $(P\tilde{A}P^{-1}, P\Gamma P^{-1})$  wavelet set si y solo si  $P^{-1}WP$  es un  $(A, \Gamma)$  wavelet set. Esto nos permite asumir sin pérdida de generalidad que  $\tilde{A}$  está en forma de Jordan y proceder a mostrar que en ese caso existe un wavelet set para cualquier lattice. Escribamos

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

donde todos los autovalores de  $A_1$  son mayores que 1, los de  $A_2$  son iguales a uno, y ambos bloques están en forma de Jordan. Ahora, si  $A_2$  fuera la matriz identidad, existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que

$$\tilde{A}^{-j}(\mathbf{B}(0, \varepsilon)) \cap \Gamma = \{0\} \quad \text{a partir de cierto } j \in \mathbb{N}.$$

Entonces también

$$A^{-j}(\mathbf{B}(0, \varepsilon/c)) \cap \Gamma \subset \tilde{A}^{-j}(\mathbf{B}(0, \varepsilon)) \cap \Gamma = \{0\} \quad \text{a partir de cierto } j \in \mathbb{N}$$

con lo cual

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\#A^{-j}(\mathbf{B}(0, \varepsilon/c)) \cap \Gamma} = \infty$$

y entonces por el Teorema 2.5 existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set. Supongamos entonces que  $A_2$  no es la identidad, es decir, que contiene un bloque de Jordan no trivial de autovalor 1. Sea  $T$  la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Notamos que  $U_t = T^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  es un grupo a un parámetro de matrices unipotentes. Por el Lema 2.8, existen  $\varepsilon > 0$  y una sucesión  $n_1 < n_2 < \dots \in \mathbb{N}$  tales que

$$T^{-n_k}(\mathbf{B}(0, \varepsilon)) \cap \Gamma = \{0\}.$$

Además, como  $\|\tilde{A}\| \geq \|T\|$ , tenemos

$$\tilde{A}^{-n_k}(\mathbf{B}(0, \varepsilon)) \subset T^{-n_k}(\mathbf{B}(0, \varepsilon)) \quad \text{a partir de cierto } k \in \mathbb{N}$$

así que existe otra sucesión  $j_1 < j_2 < \dots \in \mathbb{N}$  tal que

$$A^{-j_k}(\mathbf{B}(0, \varepsilon)) \cap \Gamma = \{0\}.$$

Por la misma contención que antes deducimos del Teorema 2.5 que existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.

□

## Capítulo 3

# Teoremas y nociones preliminares

En este capítulo demostramos primero dos resultados pivotaes para las demostraciones de los capítulos siguientes. Luego damos algunas definiciones técnicas que serán de utilidad.

### 3.1. Una condición más simple para la existencia de wavelet sets

Demostraremos un teorema que brinda una estrategia principal para demostrar la existencia de wavelet sets, relajando enormemente las condiciones necesarias. Nos dice que, para que exista un conjunto que tesele por dilataciones y traslaciones simultáneamente, basta tan solo que haya algún conjunto que tesele por dilataciones pero empaque por traslaciones. Para esto usamos fuertemente el Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein aplicado a conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 3.1** (Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein para conjuntos medibles). *Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos medibles,*

$$A \begin{matrix} \xrightarrow{\phi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{matrix} B$$

*funciones inyectivas bimedibles (esto es, funciones medibles cuya preimagen preserva medibilidad). Entonces el conjunto*

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\psi\phi)^k(A \setminus \psi(B))$$

*es medible y tal que*

$$h(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in E \\ \psi^{-1}(x) & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

*es una biyección bimedible.*

*Demostración.* Se deduce fácilmente del hecho de que  $h$  sea una biyección, resultado que se da usualmente en libros introductorios de análisis; y de que  $E$  es medible por ser  $\psi, \phi$  bimedibles. Una demostración más detallada puede encontrarse en [Sri98, p. 5 y 96].  $\square$

**Teorema 3.2** ([IW06]). *Sean  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice. Si existe un conjunto medible  $U \subset \mathbb{R}^n$  que tesela por dilataciones de  $A$  y empaqueta por traslaciones de  $\Gamma$ , existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.*

*Demostración.* Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  que tesela por  $A$  y empaqueta por  $\Gamma$ . Por construcción en la demostración de 1.10, existe  $U_0 \subset \mathbb{R}^n$  de interior no vacío que tesela por  $A$ . Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que el conjunto dilatado  $U^* = nU_0$  contiene cierto  $F \subset U^*$  que tesela por  $\Gamma$ . Notar que además  $U^*$  tesela por dilataciones de  $A$ . Además, como  $U$  empaqueta por  $\Gamma$ , está contenido en algún conjunto  $F^* \supset U$  que tesela por  $\Gamma$ . Ahora, dado que  $F, F^*$  teselan por  $\Gamma$ , para casi todo  $x \in F^*$  existe un único  $\gamma(x) \in \Gamma$  tal que  $x + \gamma(x) \in F$ . Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} f : F^* &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto x + \gamma(x) \end{aligned}$$

es una biyección *en casi todo punto*. Similarmente, como  $U$ ,  $U^*$  teselan por dilataciones, para casi todo  $x \in U^*$  existe un único  $k(x) \in \mathbb{Z}$  tal que  $A^{k(x)}x \in U$ . Definiendo

$$\begin{aligned} u : U^* &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto A^{k(x)}x \end{aligned}$$

resulta una biyección en casi todo punto. Las restricciones

$$\begin{aligned} \phi &= f|_U : U \longrightarrow F \\ \psi &= u|_F : F \longrightarrow U \end{aligned}$$

son funciones inyectivas, así que por el Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein (Prop. 3.1) existe un conjunto medible  $E \subset U$  y una biyección medible  $h : U \rightarrow F$  de la forma

$$h(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in E \\ \psi^{-1}(x) & \text{si } x \in U \setminus E. \end{cases}$$

Notemos que la inversa de  $u$  cumple  $u^{-1}(y) = A^{-k(u^{-1}(y))}y$  para cierto  $k(u^{-1}(y)) \in \Gamma$ . Entonces para cada  $x \in U$  hay unos únicos  $k(x) \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma(x) \in \Gamma$  (quizás nulos) tales que  $h(x) = A^{k(x)}x + \gamma(x) \in F$ . Definimos

$$W = \{A^{k(x)}x : x \in U\}.$$

Como  $U$  tesela por dilataciones, también lo hace  $W$ , ya que

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_W(A^i x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_U(A^i(A^{-k(x)}x)) = 1 \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Pero además, como  $T$  tesela por traslaciones, también lo hace  $W$ , ya que

$$\sum_{\gamma' \in \Gamma} \mathbb{1}_W(x + \gamma') = \sum_{\gamma' \in \Gamma} \mathbb{1}_F((x - \gamma(x)) + \gamma') = 1 \quad \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto  $W$  es un  $(A, \Gamma)$  wavelet set como buscábamos.  $\square$

Como ejemplo de la utilidad del resultado anterior, veremos cómo nos brinda una demostración rápida del caso  $A$  expansiva. Lo volvemos a enunciar y lo demostramos a continuación:

**Teorema 2.2** (Caso expansivo [DLS97]). *Si  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  es expansiva, existen  $(A, \Gamma)$  wavelet sets para cualquier lattice  $\Gamma$ .*

**Demostración del teorema 2.2.** Sea  $A$  expansiva,  $\Gamma$  una lattice. Por la caracterización de teselaciones por dilatación (Teorema 1.10), existe un conjunto acotado  $V$  que tesela por dilataciones de  $A$ . Tomemos  $F$  un conjunto que tesele por traslaciones de  $\Gamma$  y contenga un entorno del 0 (por ejemplo, cierta traslación pequeña del paralelepípedo fundamental de  $\Gamma$ ). Como los autovalores de  $A^{-1}$  son menores que 1 en módulo, tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{-k}\| = 0,$$

donde  $\|\cdot\|$  denota la norma de operador  $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ . En particular existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que  $A^{-K}(V) \subset F$ . El conjunto  $U = A^{-K}(V)$  empaca por  $\Gamma$ , por estar contenido en  $F$ , y tesela por  $A$  ya que  $V$  lo hace. Por el Teorema 3.2, existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.  $\square$

### 3.2. Un lema sobre empaques M-redundantes

Demostraremos un lema que es de mucha utilidad camino a nuestro resultado principal. Este lema se enuncia sin demostración en [BS21]. Ofrecemos aquí una demostración más explícita de lo necesario, con el afán de evidenciar el significado geométrico de la prueba.

**Lema 3.3** (Empaque a partir de un empaque M-redundante). *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  medible que empaqueta M-redundantemente por traslaciones de  $\Gamma$ . Entonces existe una partición medible de  $U$  de tamaño  $M$ ,  $\{U_k\}_{k=1}^M$  tal que cada  $U_k$  empaqueta por traslaciones. En particular existe  $U' \subset U$  que empaqueta por  $\Gamma$  y  $|U'| \geq \frac{1}{M}|U|$ .*

*Demostración.* Llamemos

$$G_U(x) := \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_U(x + \gamma)$$

y observemos que  $G_U(x) = i$  si y solo si existen exactamente  $i$  elementos distintos  $\gamma \in \Gamma$  tales que  $x + \gamma \in U$ . Además,  $G_U(x) \geq 1$  para casi todo  $x \in U$ .

Como  $G_U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ , los conjuntos  $R_i = U \cap G_U^{-1}(i)$  con  $1 \leq i \leq M$  claramente forman una partición medible de  $U$ , que cumple  $G_{R_i}(x) = i$  para casi todo  $x \in R_i$ . En particular, cada  $R_i$  empaqueta  $i$ -redundantemente.

Afirmamos que para probar el lema basta hallar, para cada  $i$ , una partición medible de  $R_i$  con tamaño  $i$ ,

$$R_i = \bigcup_{k=1}^i U_i^k$$

donde cada  $U_i^k$  empaqueta por traslaciones. En efecto, en ese caso podremos definir

$$U_k = \bigcup_{i=k}^M U_i^k, \quad 1 \leq k \leq M$$

es decir, tomar de cada  $R_i$  uno solo de los  $U_i^1, U_i^2, \dots, U_i^i$ . Para ver que  $\{U_k\}_{k=1}^M$  forman una partición de  $U$ , definamos por simplicidad de escritura  $U_i^k = \emptyset$  si  $k > i$ . Entonces  $R_i = U_i^1 \cup \dots \cup U_i^M \forall i$ , con lo cual

$$U = \bigcup_{i=1}^M R_i = \bigcup_{i=1}^M \bigcup_{k=1}^M U_i^k = \bigcup_{k=1}^M \bigcup_{i=1}^M U_i^k = \bigcup_{k=1}^M \left( \bigcup_{i=k}^M U_i^k \right) = \bigcup_{k=1}^M U_k$$

y todas las uniones son disjuntas. Veamos que cada  $U_k$  empaqueta. Por hipótesis los  $U_i^k$  empaquetan, así que basta ver que  $\forall i \neq j, \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$  vale  $U_i^k \cap (U_j^k + \gamma) = \emptyset$ . De no ser así, existirían  $x \in U, \gamma \neq 0 \in \Gamma$  tales que

$$\begin{aligned} x &\in U_i^k \cap (U_j^k + \gamma) \subset R_i \cap (R_j + \gamma) \\ &\implies G_U(x) = i \neq j = G_U(x - \gamma) \end{aligned}$$

lo cual es absurdo dado que  $G$  es una función  $\Gamma$ -periódica.

Por lo visto hasta ahora, entonces, para probar el Lema 3.3 basta demostrar el siguiente caso particular:

**Afirmación.** *Sea  $V \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible tal que*

$$G_V(x) = i \quad \text{para casi todo } x \in V$$

*entonces existe una partición medible de  $V$  con tamaño  $i$ ,  $\{V_k\}_{k=1}^i$  donde cada  $V_k$  empaqueta por traslaciones.*

Tomando  $V = R_i$  y aplicando la Afirmación, quedará demostrado el Lema.

Demostremos la Afirmación. Para cada  $x \in V$  llamemos  $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma : x + \gamma \in V\}$  (notar que  $0 \in \Gamma_x$ ). Por hipótesis,  $\#\Gamma_x = i$  para casi todo  $x \in V$ . Existe entonces en  $V$  una relación de equivalencia dada por  $x \sim y \iff \Gamma_x = \Gamma_y$ . Denotemos por  $C_x$  a la clase de equivalencia de  $x \in V$ , y llamémosla *sector* de  $x$ . Explícitamente,

$$\begin{aligned} C_x &= \{y \in V : \Gamma_x = \Gamma_y\} \\ &= \{y \in V : \forall \gamma \in \Gamma, x + \gamma \in V \iff y + \gamma \in V\} \\ &= V \cap \bigcap_{\gamma \in \Gamma_x} \{y \in \mathbb{R}^n : y + \gamma \in V\} = V \cap \bigcap_{\gamma \in \Gamma_x} (\mathbb{1}_{V-\gamma})^{-1}(\{1\}) \end{aligned}$$

lo cual muestra que cada sector  $C_x$  es un conjunto medible. Podemos asumir  $|C_x| > 0 \forall x \in V$  sin pérdida de generalidad.

Sea  $\mathcal{C} = \{C_x : x \in V\}$  el conjunto de sectores. Definiremos otra relación en  $\mathcal{C}$ :

$$C_x \approx C_y \iff \exists \gamma \in \Gamma : x + \gamma \in C_y.$$

Probemos que  $\approx$  es una relación de equivalencia en  $\mathcal{C}$ . Observemos primero que se cumple  $\Gamma_{x+\gamma} = \Gamma_x - \gamma$  para cualesquiera  $x \in V, \gamma \in \Gamma$ , donde la última operación es restarle  $\gamma$  a cada elemento de  $\Gamma_x$ . Esta identidad es de fácil verificación y puede usarse para ver que  $\approx$  está bien definida. La transitividad se desprende de que si  $C_x \approx C_y$  y  $C_y \approx C_z$ , existen  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  tales que

$$\begin{aligned} x + \gamma_1 \in C_y, \quad y + \gamma_2 \in C_z &\implies \Gamma_y = \Gamma_{x+\gamma_1}, \quad \Gamma_z = \Gamma_{y+\gamma_2} = \Gamma_y - \gamma_2 \\ \implies \Gamma_{x+\gamma_1} = \Gamma_z + \gamma_2 &\implies \Gamma_{x+\gamma_1+\gamma_2} = \Gamma_z \implies x + (\gamma_1 + \gamma_2) \in C_z \implies C_x \approx C_z. \end{aligned}$$

Para la simetría, si  $C_x \approx C_y$ , tenemos que  $\exists \gamma \in \Gamma : x + \gamma \in C_y$ , así que

$$\Gamma_y = \Gamma_{x+\gamma} = \Gamma_x - \gamma \implies \Gamma_x = \Gamma_y + \gamma = \Gamma_{y-\gamma} \implies y - \gamma \in C_x \implies C_y \approx C_x.$$

La reflexividad es clara porque  $x \in C_x$ . Con esto probamos que  $\approx$  es de equivalencia.

Para cada sector  $C \in \mathcal{C}$  sea  $\overline{C} = \{C' \in \mathcal{C} : C \approx C'\} \in \mathcal{C}/\approx$  su clase de equivalencia por  $\approx$ . La reflexividad y simetría implican

$$\overline{C_x} = \{C_{x+\gamma} \in \mathcal{C} : \gamma \in \Gamma_x\}$$

es decir que cada sector está relacionado con exactamente  $i$  sectores distintos (incluido sí mismo). Fijemos un orden  $\overline{C} = \{C^1, \dots, C^i\}$  para los sectores de cada clase  $\overline{C} \in \mathcal{C}/\approx$ . Definimos

$$V_k = \bigcup_{\overline{C} \in \mathcal{C}/\approx} C^k, \quad 1 \leq k \leq i.$$

Las clases  $\overline{C}$  forman una partición de  $\mathcal{C}$ , así que esta es una unión disjunta de conjuntos de medida positiva, con lo cual la unión es numerable y  $V_k$  es medible.

Afirmamos que  $V_k$  empaca por traslaciones para cada  $k$ . En primer lugar, todo sector  $C_x$  empaca. Si no fuera así, existiría  $y \in C_x$  tal que  $G_{C_x}(y) \geq 2$ , es decir,  $\exists \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : y + \gamma \in C_x$ . Entonces  $\Gamma_y = \Gamma_x = \Gamma_{y+\gamma} = \Gamma_y - \gamma$  lo cual es absurdo. Como  $V_k$  es una unión disjunta de sectores no relacionados por  $\approx$ , para ver que  $V_k$  empaca basta mostrar que si  $C_x \not\approx C_y$ ,

$$C_x \cap (C_y + \gamma) = \emptyset \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

En efecto, supongamos que al contrario  $z \in C_x \cap (C_y + \gamma)$  para algún  $z \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \Gamma$ . Entonces, por un lado,  $C_z = C_x$ . Por el otro,  $z - \gamma \in C_y \implies C_z \approx C_y$ . Entonces  $C_x \approx C_y$  contradiciendo la hipótesis.

Finalmente,

$$V = \bigcup_{C \in V/\sim} C = \bigcup_{\overline{C} \in \mathcal{C}/\approx} \left( \bigcup_{C \in \overline{C}} C \right) = \bigcup_{\overline{C} \in \mathcal{C}/\approx} \bigcup_{k=1}^i C^k = \bigcup_{k=1}^i \left( \bigcup_{\overline{C} \in \mathcal{C}/\approx} C^k \right) = \bigcup_{k=1}^i V_k$$

es una partición medible de  $V$  donde cada  $V_k$  empaca por traslaciones. Así concluye la demostración de la Afirmación y consecuentemente del Lema 3.3.  $\square$

### 3.3. El espacio métrico de conjuntos y proyecciones por traslación y dilatación

Denotemos por  $\triangle$  a la *diferencia simétrica* de conjuntos,  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

**Observación 3.4.** El conjunto de conjuntos medibles de  $\mathbb{R}^n$  es un espacio métrico completo con la distancia  $|A \triangle B|$ , hecho estándar que se demuestra en cursos introductorios de espacios métricos. Denotaremos la convergencia en esta métrica con  $U_n \xrightarrow{\triangle} U$  y en ese caso diremos que “ $U_n$  convergen en diferencia simétrica a  $U$ ”. En particular, vale lo siguiente:



1. Si una sucesión de conjuntos  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  cumple  $\sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i \Delta U_{i+1}| < \infty$ , entonces existe  $\lim_{i \rightarrow \infty} U_i$  en la métrica de la diferencia simétrica y resulta ser el límite superior de conjuntos de  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ :

$$U_i \xrightarrow{\Delta} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} U_k \quad \text{cuando } i \rightarrow \infty.$$

2. Si  $U_i \subset S \forall i \in \mathbb{N}$  y existe  $\lim_{i \rightarrow \infty} U_i$ , entonces  $\lim_{i \rightarrow \infty} U_i \subset S$ .

A continuación damos dos definiciones que serán de utilidad, y agregamos algunas observaciones y proposiciones cuya demostración es rutinaria.

**Definición 3.5.** Dado un conjunto  $W$  que empaca por dilataciones de  $A$ , definimos la *proyección por dilatación* sobre  $W$ :

$$d_W(V) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j V \cap W \quad \text{para } V \subset \mathbb{R}^n$$

y la denotaremos tanto  $d_W$  como  $d$  cuando sea claro por contexto.

**Observación 3.6.** Sea  $W \subset \mathbb{R}^n$  que empaca por dilataciones. La proyección  $d = d_W$  cumple:

- (a)  $d(U \cup V) = d(U) \cup d(V) \quad \forall U, V \subset \mathbb{R}^n$
- (b)  $d(U \cap V) \subset d(U) \cap d(V) \quad \forall U, V \subset \mathbb{R}^n$
- (c) Si  $U \subset V$  entonces  $d(U) \subset d(V)$
- (d) Si  $W$  tesela por  $A$ ,  $U$  empaca por  $A$ , y  $d(U) = W$ , entonces  $U$  tesela por  $A$ .
- (e) Si  $U \subset V$  y  $V$  empaca por  $A$ , entonces  $d(V \setminus U) = d(V) \setminus d(U)$
- (f) Si  $V$  empaca por  $A$ , entonces también lo hace  $A^k(W \setminus d_W(V)) \cup V$  para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (g) Si  $U, V$  empacan por  $A$  y  $d(U) \cap d(V) = \emptyset$ , entonces  $U \cup V$  empaca por  $A$ .

**Proposición 3.7.** Sea  $W \subset \mathbb{R}^n$  que empaca por dilataciones y  $d$  la proyección por dilatación sobre  $W$ . Supongamos que  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de conjuntos que empacan por dilataciones y traslaciones, y tal que  $U_k \xrightarrow{\Delta} U$ . Entonces:

(i)  $U$  empaca por dilataciones y traslaciones.

(ii) Si

$$(3.1) \quad \sum_k |d(U_k \Delta U_{k+1})| < \infty,$$

entonces  $d(U_k) \xrightarrow{\Delta} d(U)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

(iii) Si  $V \subset W$  es tal que

$$(3.2) \quad \sum_k |d(U_k \Delta U_{k+1}) \cap V| < \infty,$$

entonces  $d(U_k) \cap V \xrightarrow{\Delta} d(U) \cap V$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

La demostración de la proposición anterior es un ejercicio simple y puede hallarse en [Spe03, Lema 3.1] y [BS21, Prop. 2.4].

**Definición 3.8.** Dado un conjunto  $U$  que empaca por traslaciones de  $\Gamma$ , definimos la *proyección por traslación* sobre  $U$ :

$$\tau_U(V) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (V + \gamma) \cap U \quad \text{para } V \subset \mathbb{R}^n.$$

que denotaremos tanto  $\tau_U$  como  $\tau$  cuando sea claro por contexto.

**Observación 3.9.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  que empaca por traslaciones. La proyección  $\tau = \tau_U$  cumple:

- (a) Si  $V_1 \subset V_2$  entonces  $\tau(V_1) \subset \tau(V_2)$
- (b)  $|\tau(V)| \leq |V|$  para cualquier  $V \subset \mathbb{R}^n$
- (c) Si  $V \subset \mathbb{R}^n$  empaca por traslaciones de  $\Gamma$ , también lo hace  $V \cup (U \setminus \tau_U(V))$ .

## Capítulo 4

# Demostración de la condición suficiente para la existencia de wavelet sets

En este capítulo detallamos la demostración del siguiente teorema principal, que da una condición suficiente para la existencia de wavelet sets.

**Teorema 4.1** (Condición suficiente para wavelet sets). *Sea  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice. Si existe  $r > 0$  tal que*

$$(4.1) \quad |\det A| > 1 \quad y \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, r)) \cap \Gamma|} = \infty,$$

*o bien*

$$(4.2) \quad |\det A| < 1 \quad y \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\#|A^j(\mathbf{B}(0, r)) \cap \Gamma|} = \infty,$$

*entonces existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.*

Como la condición (4.2) puede obtenerse de (4.1) reemplazando  $A$  por  $A^{-1}$ , demostraremos el teorema asumiendo  $|\det A| > 1$  sin pérdida de generalidad. Antes enunciamos también un contrarrecíproco:

**Corolario 4.2.** *Si  $|\det A| > 1$  y no existe ningún  $(A, \Gamma)$  wavelet set, entonces*

$$(4.3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap \Gamma|} < \infty$$

**Observación 4.3.** El valor de  $r$  en el Teorema 4.1 es arbitrario: si existe algún  $r > 0$  tal que se cumplen las condiciones (4.1) o (4.2), entonces también se cumplen para cualquier valor de  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . La razón reside en el siguiente resultado, que será de importancia:

**Lema 4.4.** *Sea  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice. Son equivalentes:*

1. *Para todo  $r > 0$ , el conjunto  $A^{-j}(\mathbf{B}(0, r))$  empaca  $m_j$  redundantemente por traslaciones de  $\Gamma$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ , donde la sucesión  $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$  cumple  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{m_j} = \infty$*
2.  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, r)) \cap \Gamma|} = \infty$  *para cualquier  $r > 0$ ,*
3.  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, r)) \cap \Gamma|} = \infty$  *para algún  $r > 0$ .*

*Demostración.* (1  $\Rightarrow$  2) Asumiendo 1, por definición de empaque redundante, tenemos

$$(4.4) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{A^{-j}(\mathbf{B}(0,r))}(\mathbf{x} + \gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{A^{-j}(\mathbf{B}(0,r) - \mathbf{x})}(\gamma) \leq m_j$$

para casi todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . En particular, dado  $\varepsilon > 0$ , (4.4) vale para casi todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{B}(0, \varepsilon)$ . Notemos que como  $\Gamma$  es separado y  $A^{-j}(\mathbf{B}(0, r))$  es abierto, existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que

$$(A^{-j}(\mathbf{B}(0, r)) - \mathbf{x}) \cap \Gamma = (A^{-j}(\mathbf{B}(0, r)) \cap \Gamma) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{B}(0, \varepsilon).$$

Entonces para casi todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{B}(0, \varepsilon)$  tenemos

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{A^{-j}(\mathbf{B}(0,r))}(\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{A^{-j}(\mathbf{B}(0,r) - \mathbf{x})}(\gamma) \leq m_j$$

de donde se obtiene que  $\#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, r)) \cap \Gamma| \leq m_j$ , y con lo cual

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, r)) \cap \Gamma|} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j} = \infty$$

(2  $\Rightarrow$  3) Es trivial.

(3  $\Rightarrow$  1) Asumamos que vale 3 para cierto  $r_0$ . Notemos primero que para  $j \in \mathbb{Z}$  fijo,

$$(4.5) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{A^{-j}(\mathbf{B}(0, r_0/2))}(\mathbf{x} + \gamma) \leq \#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, r_0)) \cap \Gamma| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Porque, en efecto, si para cierto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  el lado izquierdo toma el valor  $k$ , entonces existen  $k$  elementos distintos  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$  tales que  $\mathbf{x} + \gamma_1, \dots, \mathbf{x} + \gamma_k$  están en  $A^{-j}(\mathbf{B}(0, r_0/2)) = \frac{1}{2}A^{-j}(\mathbf{B}(0, r_0))$ . Por lo tanto  $\gamma_i - \gamma_1$  con  $i = 1, \dots, k$  son  $k$  elementos distintos en  $A^{-j}(\mathbf{B}(0, r_0)) \cap \Gamma$ , lo cual demuestra (4.5). Para cualquier  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  fijo, podemos tomar un  $\mathbf{x}$  adecuado en (4.5) para obtener la característica de la bola centrada en  $\mathbf{x}_0$ :

$$(4.6) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{A^{-j}(\mathbf{B}(\mathbf{x}_0, r_0/2))}(\mathbf{x} + \gamma) \leq \#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, r_0)) \cap \Gamma| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora sea  $r > 0$  cualquiera. Existen  $M \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M \in \mathbb{R}^n$  tales que  $\mathbf{B}(0, r) \subset \bigcup_{i=1}^M \mathbf{B}(\mathbf{x}_i, r_0/2)$ . Entonces  $A^{-j}(\mathbf{B}(0, r)) \subset \bigcup_{i=1}^M A^{-j}(\mathbf{B}(\mathbf{x}_i, r_0/2))$ . Escribiendo este cubrimiento según las características de dichos conjuntos, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{A^{-j}(\mathbf{B}(0,r))}(\mathbf{x} + \gamma) &\leq \sum_{i=1}^M \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{A^{-j}(\mathbf{B}(\mathbf{x}_i, r_0/2))}(\mathbf{x} + \gamma) \\ &\leq M \#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, r_0)) \cap \Gamma| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos (4.6). Podemos definir ahora  $m_j = M \#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, r_0)) \cap \Gamma|$ . Vemos que  $A^{-j}(\mathbf{B}(0, r))$  empaca  $m_j$  redundantemente por traslaciones para cualquier  $j \in \mathbb{N}$ , y además

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\#|A^{-j}(\mathbf{B}(0, r)) \cap \Gamma|} = \infty$$

lo cual muestra (1). □

Necesitaremos el siguiente lema elemental sobre sucesiones.

**Lema 4.5.** Sea  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  una sucesión tal que  $a_i \in [0, 1] \forall i$ , y  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión que cumple

$$b_{i+1} \leq (1 - a_{i+1}) b_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Entonces  $\sum a_{i+1} b_i < \infty$ .

*Demostración.* Definimos otra sucesión  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 \\ c_i &= \exp\left(-\sum_{j=2}^i a_j\right) \quad \forall i \geq 2. \end{aligned}$$

Por el teorema de valor medio, existe  $t \in \left[-\sum_{j=2}^{i+1} a_j, -\sum_{j=2}^i a_j\right]$  tal que

$$\exp(t) = \exp'(t) = \frac{1}{a_{i+1}} \left( \exp\left(-\sum_{j=2}^i a_j\right) - \exp\left(-\sum_{j=2}^{i+1} a_j\right) \right)$$

Por monotonía,  $\exp(t) \geq \exp\left(-\sum_{j=2}^{i+1} a_j\right)$ , así que

$$a_{i+1} c_{i+1} = a_{i+1} \exp\left(-\sum_{j=2}^{i+1} a_j\right) \leq a_{i+1} \exp(t) = \exp\left(-\sum_{j=2}^i a_j\right) - \exp\left(-\sum_{j=2}^{i+1} a_j\right).$$

Sumando esta expresión sobre todos los  $i \in \mathbb{N}$  la suma es telescópica y vemos que  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} c_{i+1} < \infty$ . Además tenemos  $b_i \leq c_i \forall i$  ya que  $b_1 = c_1$  e, inductivamente,

$$\begin{aligned} b_{i+1} &\leq (1 - a_{i+1}) b_i \leq (1 - a_{i+1}) c_i \\ &= (1 - a_{i+1}) \exp\left(-\sum_{j=2}^i a_j\right) \\ &\leq \exp(-a_{i+1}) \exp\left(-\sum_{j=2}^i a_j\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{j=2}^{i+1} a_j\right) = c_{i+1} \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} b_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} c_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} e^{a_{i+1}} c_{i+1} \leq e \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} c_{i+1} < \infty$$

□

**Lema 4.6.** Sea  $W$  un conjunto que empaca por dilataciones de  $A$ . Sea  $U \subset W$  de medida finita tal que  $A^{-j}(U)$  empaca  $m_j$  redundantemente por traslaciones de  $\Gamma \forall j \in \mathbb{N}$ , donde la sucesión  $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$  cumple  $\sum_{j \in \mathbb{N}} 1/m_j = \infty$ . Sea  $d = d_W$  como en la Def. 3.5. Entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto  $V$  tal que:

- (i)  $V$  empaca por dilataciones,
- (ii)  $V$  empaca por traslaciones,
- (iii)  $d_W(V) = U$ ,
- (iv)  $|V| < \varepsilon$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Dado que  $|\det A| > 1$ , tenemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A^{-j}(U)| = |U| \sum_{j=1}^{\infty} |\det A|^{-j} < \infty$$

Sea entonces  $J \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{j=J}^{\infty} |A^{-j}(U)| < \varepsilon$$

Construiremos  $V$  como el límite de una sucesión de conjuntos  $(U_j)_{j \geq J}$  que cumpla lo siguiente:

- (a)  $U_j$  empaca por traslaciones y dilataciones,
- (b) Los conjuntos  $W_j := U \setminus d(U_j)$  cumplen  $|W_j| \leq \left(1 - \frac{c}{m_j}\right) |W_{j-1}|$ , con  $c = 1 - |\det A|^{-1}$
- (c)  $U_j \setminus U_{j-1} \subset A^j(W_{j-1})$ ,

Sea  $U_{j-1} = \emptyset$ . Como  $A^{-j}(U)$  empaca  $m_j$  redundantemente por traslaciones, por el Lema 3.3 existe  $U_j \subset A^{-j}(U)$  que empaca por traslaciones y tal que  $|U_j| \geq \frac{1}{m_j} |A^j(U)|$ . Como  $U_j \subset A^{-j}(U) \subset A^{-j}(W)$  y  $W$  empaca por dilataciones,  $U_j$  empaca por traslaciones y dilataciones, así que cumple (a). Para ver (b), notamos que

$$\begin{aligned}
 U \cap d(U_j) &= U \cap \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j(U_j) && \text{ya que } U \subset W \\
 A^{-j}(U \cap d(U_j)) &= A^{-j}(U) \cap \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j(U_j) \\
 &\supseteq U_j \cap \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j(U_j) \\
 &= U_j && \text{ya que } U_j \text{ empaca por } A.
 \end{aligned}$$

Tomando medida obtenemos

$$\begin{aligned}
 |U \cap d(U_j)| &\geq |\det A|^j \frac{1}{m_j} |U| \geq \frac{1}{m_j} |U| \\
 |W_j| &= |U \setminus d(U_j)| = |U| - |U \cap d(U_j)| \leq \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) |U| \\
 &\leq \left(1 - \frac{1 - |\det A|^{-1}}{m_j}\right) |U| \\
 &= \left(1 - \frac{1 - |\det A|^{-1}}{m_j}\right) |W_{j-1}|
 \end{aligned}$$

lo cual prueba que  $U_j$  cumple (b). Además, cumple (c) por hipótesis (ya que  $W_{j-1} = U$ ).

Supongamos ahora que  $U_j, \dots, U_j$  y  $W_j, \dots, W_j$  fueron definidos de tal forma que cumplen (a), (b), (c). Como  $A^{-(j+1)}U$  empaca  $m_{j+1}$  redundantemente por traslaciones y  $W_j \subset U$ , existe un conjunto  $\tilde{U}_{j+1} \subset A^{-(j+1)}W_j$ , que empaca por traslaciones tal que

$$(4.7) \quad |\tilde{U}_{j+1}| = \frac{1}{m_{j+1}} |A^{-j-1}W_j|.$$

Notar que  $\tilde{U}_{j+1}$  empaca también por dilataciones ya que  $W_j$  lo hace. Definimos

$$U_{j+1} = \tilde{U}_{j+1} \cup \left( U_j \setminus \tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}) \right).$$

Veamos que  $U_{j+1}$  cumple (a)–(c).

Por la Obs. 3.9 c, como  $\tilde{U}_{j+1}$  y  $U_j$  empacan por  $\Gamma$ , entonces  $U_{j+1}$  también empaca por  $\Gamma$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 U_{j+1} &\subseteq \tilde{U}_{j+1} \cup U_j \\
 &\subseteq A^{-(j+1)}(W_j) \cup U_j \\
 &= A^{-(j+1)}(U \setminus d_W(U_j)) \cup U_j \\
 &\subseteq A^{-(j+1)}(W \setminus d_W(U_j)) \cup U_j.
 \end{aligned}$$

Dado que  $U_j$  y  $\tilde{U}_{j+1}$  empacan por  $A$ , la Obs. 3.6 f implica que  $U_{j+1}$  también empaca por dilataciones. Así,  $U_{j+1}$  cumple (a). La propiedad (c) se cumple fácilmente:

$$\begin{aligned}
 U_{j+1} \setminus U_j &\subseteq (\tilde{U}_{j+1} \cup U_j) \setminus U_j \\
 &\subseteq \tilde{U}_{j+1} \\
 &\subseteq A^{-(j+1)}W_j.
 \end{aligned}$$

Resta entonces probar que  $U_{j+1}$  cumple (b). Primero veamos por inducción que

$$(4.8) \quad U_j \subset \bigcup_{l=J}^j A^{-l}(U).$$

El caso base es claro porque  $U_J \subset A^{-J}(U)$ . Luego uniendo  $U_j \cap U_{j-1}$  a ambos lados de (c), obtenemos

$$\begin{aligned} U_j &\subseteq A^j(W_{j-1}) \cup (U_j \cap U_{j-1}) \\ &\subseteq A^{-j}(U) \cup U_{j-1} \\ &\subseteq A^{-j}(U) \cup \bigcup_{l=J}^{j-1} A^{-l}(U) && \text{por hipótesis inductiva} \\ &\subseteq \bigcup_{l=J}^j A^{-l}(U) \end{aligned}$$

lo cual establece (4.8). Como  $\tilde{U}_{j+1} \subset A^{-(j+1)}W$  tenemos que  $A^{j+1}\tilde{U}_{j+1} \subset W$  empaca por dilataciones de  $A$ , así que

$$d(\tilde{U}_{j+1}) = W \cap \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A^i(\tilde{U}_{j+1}) = A^{j+1}\tilde{U}_{j+1}$$

y por (4.7) tenemos

$$(4.9) \quad |d(\tilde{U}_{j+1})| = |A^{j+1}\tilde{U}_{j+1}| = |\det A|^{j+1} |\tilde{U}_{j+1}| = \frac{|W_j|}{m_{j+1}}.$$

Por (4.8), hay un  $l \in \{J, \dots, j\}$  tal que  $A^l(U_j) \subset U$ . Como  $U \subset W$  empacan por  $A$ , tal  $l$  es el único que cumple  $A^l(U_j) \subset W$ . Entonces

$$d(\tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1})) = W \cap \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A^i(\tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1})) = A^l(\tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}))$$

lo cual nos da

$$\begin{aligned} |d(\tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}))| &= |\det A|^l |\tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1})| \\ &\leq |\det A|^j |\tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1})| && \text{porque } |\det A| > 1, l \leq j \\ &\leq |\det A|^j |\tilde{U}_{j+1}| && \text{por obs. 3.9 b} \end{aligned}$$

y usando (4.9) obtenemos

$$(4.10) \quad |d(\tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}))| \leq \frac{|d(\tilde{U}_{j+1})|}{|\det A|}.$$

Igual que antes, existe un único  $l \in \mathbb{Z}$  tal que  $A^l(U_{j+1}) \subset U$ , por lo cual  $d(U_{j+1}) \subset U$ . Además notemos que  $d(\tilde{U}_{j+1})$  y  $d(U_j)$  son disjuntos ya que  $d(\tilde{U}_{j+1}) = A^{j+1}\tilde{U}_{j+1} \subset W_j = U \setminus d(U_j)$ . Entonces

$$\begin{aligned} |W_{j+1}| &= |U| - |d(U_{j+1})| = |U| - \left| d\left(\tilde{U}_{j+1} \cup (U_j \setminus \tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}))\right) \right| \\ &= |U| - \left| d(\tilde{U}_{j+1}) \cup d(U_j \setminus \tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1})) \right| && \text{por obs. 3.6 a} \\ &= |U| - \left( |d(\tilde{U}_{j+1})| + \left| d(U_j \setminus \tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1})) \right| \right) && \text{por ser disj. } d(\tilde{U}_{j+1}) \text{ y } d(U_j) \\ &= (|U| - |d(U_j)|) - |d(\tilde{U}_{j+1})| + |d(\tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}))| && \text{por obs. 3.6 e} \\ &\leq |W_j| - |d(\tilde{U}_{j+1})| + \frac{1}{|\det A|} |d(\tilde{U}_{j+1})| && \text{por (4.10)} \\ &= |W_j| - \left(1 - |\det A|^{-1}\right) |d(\tilde{U}_{j+1})| \\ &= \left(1 - \frac{1 - |\det A|^{-1}}{m_j}\right) |W_j| && \text{por (4.9)} \end{aligned}$$

lo cual prueba (b). Así queda definida la sucesión de conjuntos  $(U_j)_{j \geq J}$  que cumplen (a), (b) y (c). Ahora, para evaluar la convergencia de la sucesión  $(U_j)_{j \geq J}$ , evaluamos  $U_{j+1} \triangle U_j$ . Por un lado:

$$U_{j+1} \setminus U_j \subset U_{j+1} \setminus (U_j \setminus \tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1})) = \tilde{U}_{j+1}.$$

Por el otro:

$$\begin{aligned} U_j \setminus U_{j+1} &= U_j \setminus (\tilde{U}_{j+1} \cup (U_j \setminus \tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}))) \\ &= (U_j \setminus \tilde{U}_{j+1}) \cap \tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}) \\ &\subset \tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}). \end{aligned}$$

Así vemos que la sucesión  $(U_j)_{j \geq J}$  cumple

$$\begin{aligned} U_{j+1} \triangle U_j &\subseteq \tilde{U}_{j+1} \cup \tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}) \subseteq A^{-(j+1)}(W_j) \cup \tau_{U_j}(A^{-(j+1)}(W_j)) \\ \sum_{j=J}^{\infty} |U_{j+1} \triangle U_j| &\leq \sum_{j=J}^{\infty} 2 |\det A|^{-(j+1)} |W_j| < \infty. \end{aligned}$$

Por la Observación 3.4, esto implica que existe un conjunto límite  $V = \lim_{j \geq J} U_j$  en la métrica de la diferencia simétrica. En vista de (4.8) tenemos  $|V| \leq |\bigcup_{j=J}^{\infty} U_j| < \varepsilon$ , así que  $V$  cumple (iv). Más aún,

$$\begin{aligned} |d(U_{j+1} \triangle U_j)| &\leq |d(\tilde{U}_{j+1})| + |d(\tau_{U_j}(\tilde{U}_{j+1}))| \\ &\leq 2|d(\tilde{U}_{j+1})| && \text{por 4.10} \\ &= 2 \frac{|W_j|}{m_{j+1}}. && \text{por 4.9} \end{aligned}$$

Tomando  $a_j = \frac{1-|\det A|^{-1}}{m_j}$ , y  $b_j = |W_j|$  la propiedad (b) nos da  $b_j \leq (1 - a_j)b_{j-1}$ . Observando que  $a_j \in [0, 1]$ , las sucesiones  $(a_j), (b_j)$  cumplen las hipótesis del Lema 4.5, con lo cual  $\sum_{j=J}^{\infty} a_{j+1} b_j < \infty$ . Así tenemos

$$\sum_{j=J}^{\infty} |d(U_{j+1} \triangle U_j)| \leq 2 \sum_{j=J}^{\infty} \frac{|W_j|}{m_{j+1}} = \frac{2}{c} \sum_{j=J}^{\infty} a_{j+1} b_j < \infty.$$

En consecuencia, por la Proposición 3.7, el conjunto  $V$  empaqueta por dilataciones y traslaciones, y además  $\lim_{j \rightarrow \infty} d(U_j) = d(V)$ . Pero  $d(V) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(U_j) = U$  ya que

$$\begin{aligned} |U \triangle d(U_i)| &= |U \setminus d(U_i)| + |d(U_i) \setminus U| \\ &= |W_i| + 0 && \text{porque } d(U_i) \subset U \\ &\leq \prod_{i=J+1}^j \left(1 - \frac{c}{m_i}\right) |W_J| && \text{por recursión en (b)} \\ &\leq \exp \left( - \sum_{i=J+1}^j \frac{c}{m_i} \right) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 && \text{porque } \sum \frac{1}{m_j} = \infty. \end{aligned}$$

Esto muestra que  $V$  cumple (i), (ii) y (iii), finalizando la demostración.  $\square$

El resultado que probamos a continuación es el verdadero paso crucial para demostrar el teorema de suficiencia. Una vez establecido, el resultado final se deduce fácilmente de este y las consideraciones anteriores.

**Teorema 4.7.** *Sea  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  y  $\Gamma$  una lattice en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que existe un conjunto de medida finita  $W \subset \mathbb{R}^n$  que tesela por dilataciones, y una partición medible  $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de  $W$  tal que  $A^{-j}(W_m)$  empaqueta  $m_j$  redundantemente por traslaciones para cada  $j \in \mathbb{N}$ , donde la sucesión  $(m_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  cumple  $\sum_{j \in \mathbb{N}} 1/m_j = \infty$ . Entonces existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.*



*Demostración.* Por hipótesis, observamos que  $|W_n| < |W| < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $|W_n| \leq \frac{1}{2} \forall n$ . Sea  $d = d_W$  la proyección por dilatación sobre  $W$ . Construiremos inductivamente dos sucesiones de conjuntos,  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  y  $(\tilde{U}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tales que  $\forall k \in \mathbb{N}$  cumplen:

- (a)  $U_k$  empaca por dilataciones y traslaciones,
- (b)  $\tilde{U}_k$  empaca por dilataciones y traslaciones,
- (c)  $U_{k+1} = \tilde{U}_k \cup (U_k \setminus \tau_{U_k}(\tilde{U}_k))$ ,
- (d)  $d(\tilde{U}_k) = (\bigcup_{j=1}^{k+1} W_j) \setminus d(U_k)$ ,
- (e)  $|d(\tau_{U_k}(\tilde{U}_k))| < \frac{1}{2^k}$ .

Como  $A^{-j}(W_1)$  empaca  $m_j$  redundantemente por traslaciones para cada  $j$  y  $\sum 1/m_j = \infty$ , por el Lema 4.6 existe  $U_1$  que empaca por traslaciones y dilataciones, y tal que  $d(U_1) = W_1$ . Similarmente con  $W_2$ , existe  $\tilde{U}_1$  que empaca por traslaciones y dilataciones, que cumple  $d(\tilde{U}_1) = W_2$  y además  $|\tilde{U}_1| < \frac{1}{2}$ . Entonces  $|d(\tau_{U_1}(\tilde{U}_1))| \leq |d(U_1)| = |W_1| < \frac{1}{2}$ . Por lo tanto (a), (b), (d), (e) se cumplen para  $k = 1$ , y en (c) no hay nada que verificar.

Supongamos entonces que  $U_1, \dots, U_k$  y  $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_k$  ya fueron definidos para cumplir (a)–(e). La propiedad (c) determina unívocamente al conjunto  $U_{k+1}$ . Este empaca por traslaciones por la Observación 3.9 c. Para ver que empaca por dilataciones, por la Observación 3.6 g, basta lo siguiente:

$$d(\tilde{U}_k) \cap d(U_k \setminus \tau_{U_k}(\tilde{U}_k)) \subset \left( \bigcup_{j=1}^{k+1} W_j \setminus d(U_k) \right) \cap d(U_k) = \emptyset$$

con lo cual (a) se cumple para  $k + 1$ .

Inductivamente, usando (d) y  $d(U_1) = W_1$  observamos que

$$d(U_{k+1}) = d(\tilde{U}_k \cup (U_k \setminus \tau_{U_k}(\tilde{U}_k))) \subset d(\tilde{U}_k) \cup d(U_k) \subset \bigcup_{j=1}^{k+1} W_j$$

tiene medida finita. Entonces para  $K \in \mathbb{N}$  fijo

$$\left| d\left( U_{k+1} \cap \bigcup_{j \geq K} A^{-j}(W) \right) \right| = \left| \bigcup_{j \geq K} W \cap A^j U_{k+1} \right| = \sum_{j \geq K} |W \cap A^j U_{k+1}| < \infty.$$

Por lo tanto existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que

$$(4.11) \quad \left| d\left( U_{k+1} \cap \bigcup_{j \geq K} A^{-j}(W) \right) \right| < \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Como los  $W_j$  son una partición de  $W$ , y  $W$  empaca por  $\Gamma$ , el conjunto  $A^{-j}(\bigcup_{i=1}^{k+1} W_i \setminus d(U_{k+1}))$  empaca  $m_j$  redundantemente por  $\Gamma$  para todo  $j$ . Entonces se cumplen las condiciones del Lema 4.6 para afirmar que existe un conjunto  $\tilde{U}_{k+1}$  que empaca por traslaciones y dilataciones, tal que

$$d(\tilde{U}_{k+1}) = \bigcup_{j=1}^{k+2} W_j \setminus d(U_{k+1})$$

y

$$(4.12) \quad |\tilde{U}_{k+1}| < \varepsilon := |\det A|^{-K} / 2^{k+2}$$

con lo cual se cumplen (b) y (d) para  $k+1$ . Resta probar la propiedad (e) para  $k+1$ . Primero notemos que para todo conjunto medible  $V \subset \mathbb{R}^n$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \left| d\left(V \cap \bigcup_{j < K} A^{-j}W\right) \right| &= \left| \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} W \cap A^i \left(V \cap \bigcup_{j < K} A^{-j}W\right) \right| \\
 &= \left| \bigcup_{i < K} W \cap A^i V \right| && \text{porque } W \text{ empaca por } A \\
 &\leq \left| \bigcup_{i < K} A^i V \right| \\
 &\leq \left( \sum_{i=0}^{k-1} |\det A|^i + \sum_{i=1}^{\infty} |\det A|^{-i} \right) |V| = \frac{|\det A|^K}{|\det A| - 1} |V| && \begin{array}{l} \text{al evaluar} \\ \text{las series geométricas} \end{array} \\
 (4.13) \quad &\leq |\det A|^K |V|.
 \end{aligned}$$

Ahora, como  $W$  tesela por  $A$ ,

$$\begin{aligned}
 |d(\tau_{U_{k+1}}(\tilde{U}_{k+1}))| &\leq \left| d\left(\tau_{U_{k+1}}(\tilde{U}_{k+1}) \cap \bigcup_{j \geq K} A^{-j}W\right) \right| + \left| d\left(\tau_{U_{k+1}}(\tilde{U}_{k+1}) \cap \bigcup_{j < K} A^{-j}W\right) \right| \\
 &\leq \frac{1}{2^{k+2}} + |\det A|^K |\tau_{U_{k+1}}(\tilde{U}_{k+1})| && \text{por (4.11) y (4.13)} \\
 &\leq \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{|\det A|^{-K}}{2^{k+2}} && \text{por (4.12)} \\
 &\leq \frac{1}{2^{k+1}}
 \end{aligned}$$

así que hemos probado (a)–(d) para  $k+1$ . Por lo tanto, hemos construido las sucesiones de conjuntos  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  y  $(\tilde{U}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Mostremos que  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge en la métrica de la diferencia simétrica.

Observamos

$$\begin{aligned}
 d(U_{k+1}) &= d(\tilde{U}_k) \cup d(U_k \setminus \tau_{U_k}(\tilde{U}_k)) && \text{por (c) y la Obs. 3.6 a} \\
 &= \left( \bigcup_{j=1}^{k+1} W_j \setminus d(U_k) \right) \cup (d(U_k) \setminus d(\tau_{U_k}(\tilde{U}_k))) && \text{por la Obs. 3.6 d} \\
 &\supseteq \bigcup_{j=1}^{k+1} W_j \setminus d(\tau_{U_k}(\tilde{U}_k))
 \end{aligned}$$

así que para  $k \geq 2$  tenemos

$$\begin{aligned}
 d(U_{k+1} \setminus U_k) &= d\left(\tilde{U}_k \cup (U_k \setminus \tau_{U_k}(\tilde{U}_k)) \setminus U_k\right) \\
 &= d(\tilde{U}_k \setminus U_k) \subseteq d(\tilde{U}_k) \\
 &= \bigcup_{j=1}^{k+1} W_j \setminus d(U_k) \\
 (4.14) \quad &\subseteq \bigcup_{j=1}^{k+1} W_j \setminus \left( \bigcup_{j=1}^k W_j \setminus d(\tau_{U_{k-1}}(\tilde{U}_{k-1})) \right) \\
 &= W_{k+1} \cup d(\tau_{U_{k-1}}(\tilde{U}_{k-1}))
 \end{aligned}$$

y por otro lado

$$U_k \setminus U_{k+1} \subset U_k \setminus (U_k \setminus \tau_{U_k}(\tilde{U}_k)) = \tau_{U_k}(\tilde{U}_k).$$

Con las últimas dos inclusiones obtenemos

$$d(u_{k+1} \Delta u_k) \subset W_{k+1} \cup d(\tau_{u_{k-1}}(\tilde{u}_{k-1})) \cup d(\tau_{u_k}(\tilde{u}_k))$$

y similarmente

$$u_{k+1} \Delta u_k \subset \tilde{u}_k \cup \tau_{u_k}(\tilde{u}_k).$$

Consecuentemente por (4.12) resulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_{k+1} \Delta u_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{u}_k| + |\tau_{u_k}(\tilde{u}_k)| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{u}_k| < \infty.$$

Por la Obs. 3.4 y la Prop. 3.7, existe un conjunto  $U$  tal que  $u_k \xrightarrow{\Delta} U$  y  $U$  empaca por dilataciones y traslaciones. Demostraremos finalmente que  $U$  tesela por dilataciones, y entonces el Teorema 3.2 nos dará la existencia de un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.

Fijemos  $K \in \mathbb{N}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=K}^{\infty} \left| d(u_{k+1} \Delta u_k) \cap \bigcup_{j=1}^K W_j \right| &\leq \sum_{k=K}^{\infty} \left| \left[ W_{k+1} \cup d(\tau_{u_k} \tilde{u}_k) \cup d(\tau_{u_{k-1}} \tilde{u}_{k-1}) \right] \cap \bigcup_{j=1}^K W_j \right| \\ &= \sum_{k=K}^{\infty} \left| \bigcup_{j=1}^K W_j \cap d(\tau_{u_k} \tilde{u}_k) \right| + \left| \bigcup_{j=1}^K W_j \cap d(\tau_{u_{k-1}} \tilde{u}_{k-1}) \right| \\ &\leq \sum_{k=K}^{\infty} |d(\tau_{u_k} \tilde{u}_k)| + |d(\tau_{u_{k-1}} \tilde{u}_{k-1})| < \infty \end{aligned} \quad \text{por (c).}$$

Entonces por la Proposición 3.7 (iii), resulta

$$d(u_k) \cap \bigcup_{j=1}^K W_j \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\Delta} d(U) \cap \bigcup_{j=1}^K W_j.$$

Por otro lado y de forma análoga a (4.14) observamos que

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^K W_j \setminus d(u_k) &\subseteq \bigcup_{j=1}^K W_j \setminus \left( \bigcup_{j=1}^k W_j \setminus d(\tau_{u_{k-1}} \tilde{u}_{k-1}) \right) \\ &= \left( \bigcup_{j=k+1}^K W_j \right) \cup d(\tau_{u_{k-1}} \tilde{u}_{k-1}) \end{aligned}$$

cuya medida tiende a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$  gracias a (e). Esto muestra que

$$d(u_k) \cap \bigcup_{j=1}^K W_j \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\Delta} \bigcup_{j=1}^K W_j.$$

Por lo tanto  $\bigcup_{j=1}^K W_j = d(U) \cap \bigcup_{j=1}^K W_j$  para  $K$  arbitrario, con lo cual  $d(U) = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j = W$ . Esto significa, por la Observación 3.6 d, que  $U$  tesela por dilataciones. Gracias al Teorema 3.2, existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set, como queríamos demostrar.  $\square$

En el último teorema asumimos que  $W$  es de medida finita. Esta hipótesis puede ser removida si exigimos en cambio que cada conjunto de la partición  $W_m$  sea de medida finita. De ambas maneras el Teorema sigue siendo útil como vía hacia nuestro resultado principal.

Ahora estamos en condiciones de completar la demostración del Teorema 4.1.

**Demostración del Teorema 4.1** Asumimos  $|\det A| > 1$  sin pérdida de generalidad. Por el Lema 4.4, la hipótesis (4.1) del Teorema implica que, para todo  $r > 0$ , cada conjunto  $A^{-j}(\mathbf{B}(0, r))$  empaca  $m_j$  redundantemente por traslaciones  $\forall j \in \mathbb{N}$ , donde la sucesión  $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$  cumple  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{m_j} = \infty$ . Además  $|\det A| \neq 1$  implica que existe un conjunto de medida finita  $W \subset \mathbb{R}^n$  que empaca por dilataciones, por el Teorema 1.10. Sea  $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , la partición de  $W$  dada por

$$W_m = W \cap (\mathbf{B}(0, m) \setminus \mathbf{B}(0, m-1)).$$

Entonces  $A^{-j}(W_m)$  empaca  $m_j$  redundantemente por traslaciones  $\forall j \in \mathbb{N}$ , ya que  $A^{-j}(W_m) \subset A^{-j}(\mathbf{B}(0, m))$ . El conjunto  $W$  y la partición  $W_m$  están en las hipótesis del Teorema 4.7, así que existe un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.  $\square$

## Capítulo 5

# Demostración de la condición necesaria para la existencia de wavelet sets

En este capítulo mostraremos que la condición del Teorema 4.1 es además necesaria para la existencia de un  $(A, \Gamma)$  wavelet set. Nuestro objetivo será demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 5.1** (Condición necesaria para wavelet sets). *Sea  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  con  $|\det A| > 1$  y sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice. Si además tenemos*

$$(5.1) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\# |A^{-j}(\mathbf{B}(0, r)) \cap \Gamma|} < \infty$$

*entonces no existe ningún  $(A, \Gamma)$  wavelet set.*

**Lema 5.2.** *Sea  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$  un elipsoide centrado en 0, es decir, la imagen de  $\mathbf{B}(0, 1)$  por una transformación lineal inversible. Sea  $V \subset \mathbb{R}^n$  un subespacio de dimensión  $d$ . Sea  $Q$  la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  en  $V^\perp$ . Entonces*

$$|\mathcal{E} \cap V|_d |Q(\mathcal{E})|_{n-d} \leq 2^n |\mathcal{E}|_n$$

*donde  $|\cdot|_k$  denota la medida de Lebesgue  $k$ -dimensional.*

*Demostración.* Por el teorema de Fubini,

$$(5.2) \quad \begin{aligned} |\mathcal{E}|_n &= \int_{V^\perp} |\mathcal{E} \cap (V + x)|_d \, d\mathbf{m}_{n-d}x = \int_{Q(\mathcal{E})} |\mathcal{E} \cap (V + x)|_d \, d\mathbf{m}_{n-d}x \\ &\geq \int_{Q(\frac{1}{2}\mathcal{E})} |\mathcal{E} \cap (V + x)|_d \, d\mathbf{m}_{n-d}x \end{aligned}$$

Fijemos  $x_0 \in Q(\frac{1}{2}\mathcal{E})$  y sea  $x_1 \in \mathcal{E}$  tal que  $x_0 = \frac{1}{2}Q(x_1)$ . Existe  $v \in V$  tal que  $x_1 = 2x_0 + v$ . Tomemos la transformación afín  $f: V \longrightarrow V + x_0$  dada por

$$f(x) := \frac{x_1 + x}{2} = \frac{x + v}{2} + x_0 \in V + x_0$$

Observamos que por la convexidad de  $\mathcal{E}$  tenemos  $f(\mathcal{E} \cap V) = \frac{1}{2}((\mathcal{E} \cap V) + x_1) \subset \mathcal{E} \cap (V + x_0)$ . Consecuentemente

$$(5.3) \quad |\mathcal{E} \cap (V + x_0)|_d \geq |f(\mathcal{E} \cap V)|_d = \frac{1}{2^d} |\mathcal{E} \cap V|_d.$$

Uniendo (5.2) y (5.3) obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}|_n &\geq \int_{Q(\frac{1}{2}\mathcal{E})} |\mathcal{E} \cap (V + x)|_d \, d\mathbf{m}_{n-d}x \\ &\geq 2^{-d} |\mathcal{E} \cap V|_d |Q(\frac{1}{2}\mathcal{E})|_{n-d} \\ &= 2^{-n} |\mathcal{E} \cap V|_d |Q(\mathcal{E})|_{n-d} \end{aligned}$$

□

**Lema 5.3.** Sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice (de rango completo en  $\mathbb{R}^n$ ). Sea  $W \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto que empaqueta por traslaciones de  $\Gamma$ . Sea  $V$  un subespacio de dimensión  $d$  tal que  $\Gamma \cap V$  es una lattice de rango  $d$ . Sea  $F$  un dominio fundamental de  $\Gamma \cap V$  en  $V$ . Entonces

$$|W \cap (V + y)|_d \leq |F|_d \quad \text{para casi todo } y \text{ en } V^\perp$$

*Demostración.* Sea  $K \subset V^\perp$  un conjunto medible. Por definición de empaque por traslaciones,  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_W(x + \gamma) \leq 1$  para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$\int_{K+F} \sum_{\gamma \in \Gamma \cap V} \mathbb{1}_W(x + \gamma) \, dm_n x \leq \int_{K+F} dm_n x = |K|_{n-d} |F|_d.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{K+F} \sum_{\gamma \in \Gamma \cap V} \mathbb{1}_W(x + \gamma) \, dm_n x &= \int_K \int_F \sum_{\gamma \in \Gamma \cap V} \mathbb{1}_W(x_1 + x_2 + \gamma) \, dm_d x_1 \, dm_{n-d} x_2 \\ &= \int_K \left| \left\{ x_1 \in F : \sum_{\gamma \in \Gamma \cap V} \mathbb{1}_W(x_1 + x_2 + \gamma) = 1 \right\} \right|_d \, dm_{n-d} x_2 \\ &= \int_K \left| \left\{ x_1 \in F : \exists \gamma \in \Gamma \cap V, x_1 + x_2 + \gamma \in W \right\} \right|_d \, dm_{n-d} x_2 \\ &= \int_K \left| \bigcup_{\gamma \in \Gamma \cap V} (F + \gamma + x_2) \cap W \right|_d \, dm_{n-d} x_2 \\ &= \int_K |(V + x_2) \cap W|_d \, dm_{n-d} x_2 \end{aligned}$$

Uniando las dos ecuaciones obtenemos

$$\int_K |(V + y) \cap W|_d \, dm_{n-d} y \leq |F|_d |K|_{n-d} \quad \text{para todo } K \subset V^\perp.$$

Entonces no existe ningún  $K \subset V^\perp$  de medida positiva tal que  $|(V + y) \cap W|_d > |F|_d \quad \forall y \in K$ . De esto se deduce la conclusión del lema.  $\square$

El siguiente lema puede encontrarse en [TV06, 3.24 y 3.26]. Lo damos sin demostración.

**Lema 5.4.** Sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice, sea  $\Omega$  un conjunto simétrico y convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$\frac{1}{2^n} \frac{|\Omega|}{|\mathbb{R}^n/\Gamma|} \leq \#|\Omega \cap \Gamma|.$$

Si además los vectores de  $\Omega \cap \Gamma$  generan todo  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$(5.4) \quad \#|\Omega \cap \Gamma| \leq \frac{3^n n!}{2^n} \frac{|\Omega|}{|\mathbb{R}^n/\Gamma|}.$$

**Lema 5.5.** Sea  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice. Sea  $W \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto medible que empaqueta por traslaciones de  $\Gamma$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  que solo depende de la dimensión  $n$  tal que

$$|B(x, 1) \cap A(W)| \leq \frac{C}{\#|A^{-1}(B(0, 1)) \cap \Gamma|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

*Demostración.* Si  $A^{-1}(B(0, 1)) \cap \Gamma = \{0\}$ , entonces el resultado vale claramente para  $C = |B(0, 1)|$ . Si no, tomemos  $V$  como el subespacio generado por los vectores  $A^{-1}(B(0, 1)) \cap \Gamma$ . Sea  $F$  un dominio fundamental de

$V/(\Gamma \cap V)$ , y sea  $d = \dim V$ . Por el Lema 5.3,  $|W \cap (V + y)|_d \leq |F_0|_d$  para casi todo  $y \in V^\perp$ . Entonces, si  $Q$  es la proyección ortogonal a  $V^\perp$ ,

$$\begin{aligned} |A^{-1}(\mathbf{B}(0, 1)) \cap W| &= \int_{V^\perp} \left| A^{-1}(\mathbf{B}(x, 1) \cap W \cap (V + y)) \right|_d \, d\mathbf{m}_{n-d} y \\ &= \int_{Q(A^{-1}(\mathbf{B}(x, 1)))} |W \cap (V + y)|_d \, d\mathbf{m}_{n-d} y \\ &\leq |Q(A^{-1}\mathbf{B}(x, 1))|_{n-d} |F_0|_d \\ &\leq |Q(A^{-1}\mathbf{B}(0, 1))|_{n-d} |F_0|_d \end{aligned}$$

Entonces por el Lema 5.2

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}(x, 1) \cap A(W)| &= |\det A| |A^{-1}\mathbf{B}(x, 1) \cap W| \\ &\leq |\det A| |Q(A^{-1}\mathbf{B}(0, 1))|_{n-d} |F|_d \\ &\leq |\det A| \frac{2^n |A^{-1}\mathbf{B}(0, 1)|_n}{|(A^{-1}\mathbf{B}(0, 1)) \cap V|_d} |F|_d \\ (5.5) \quad &= \frac{2^n |\mathbf{B}(0, 1)|_n |F|_d}{|(A^{-1}\mathbf{B}(0, 1)) \cap V|_d}. \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos usar la estimación (5.4) del Lema 5.4 tomando como espacio vectorial  $V$  y como lattice  $\Gamma \cap V$ . Esto nos da

$$\# |(A^{-1}\mathbf{B}(0, 1)) \cap \Gamma| \leq \frac{3^d d!}{2^d} \frac{|(A^{-1}\mathbf{B}(0, 1)) \cap V|_d}{|F|_d}.$$

Reorganizando esta desigualdad y usando (5.5) obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}(x, 1) \cap A(W)| &\leq \frac{3^d d! 2^n}{2^d} \frac{|\mathbf{B}(0, 1)|}{\# |(A^{-1}\mathbf{B}(0, 1)) \cap \Gamma|} \\ &\leq 3^n n! \frac{|\mathbf{B}(0, 1)|}{\# |(A^{-1}\mathbf{B}(0, 1)) \cap \Gamma|} \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende fácilmente de  $(\frac{2}{3})^{n-d} \leq \frac{n!}{d!}$ . Esto nos da el resultado buscado con  $C = 3^n n! |\mathbf{B}(0, 1)|$ .  $\square$

El siguiente lema es un corolario inmediato de la demostración del teorema de caracterización de teselaciones por dilatación 1.10, que no damos aquí. Referimos al lector a [LST06].

**Lema 5.6.** *Sea  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  tal que  $|\det A| > 1$ . Entonces existe un conjunto  $U$  que tesela por dilataciones de  $A$  que y que contiene una colección numerable de bolas disjuntas de igual radio.*

En la proposición que sigue radica el paso principal de la demostración de nuestra condición necesaria para la existencia de wavelet sets.

**Proposición 5.7.** *Sea  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  con  $|\det A| > 1$ , sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una lattice, y sea  $W \subset \mathbb{R}^n$ . Supongamos que existe un conjunto  $U$  que tesela por dilataciones de  $A$  y que contiene una colección numerable de conjuntos  $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tales que  $|V_k| > \varepsilon \, \forall k \in \mathbb{N}$  para cierto  $\varepsilon > 0$  fijo, y tales que*

$$\alpha_J := \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=J}^{\infty} |V_k \cap A^j(W)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } J \rightarrow \infty.$$

*Entonces  $W$  no es un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.*

*Demostración.* Por contradicción, asumamos que  $W$  es un  $(A, \Gamma)$  wavelet set. Definimos los conjuntos  $W_j = A^{-j}(\mathcal{U}) \cap W$  para  $j \in \mathbb{Z}$ , que forman una partición de  $W$ . Para cualquier  $J \in \mathbb{N}$  tenemos

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{j=-\infty}^J A^j(W_j) \right| &\leq \sum_{j=-\infty}^J |A^j(W_j)| = \sum_{j=-\infty}^J |\det A|^j |W_j| \\ &\leq |W| \sum_{j=-\infty}^J |\det A|^j = |W| |\det A|^J \sum_{j=0}^{\infty} |\det A|^{-j} < \infty. \end{aligned}$$

En particular, tomemos  $J$  tal que  $\alpha_J < \frac{\varepsilon}{2}$ . Como  $V_k$  son disjuntos de medida positiva y  $\left| \bigcup_{j=-\infty}^J A^j(W_j) \right| < \infty$ ,

$$\left| V_k \cap \bigcup_{j=-\infty}^J A^j(W_j) \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

y entonces existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$(5.6) \quad \left| V_{k_0} \cap \bigcup_{j=-\infty}^J A^j(W_j) \right| < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{|V_{k_0}|}{2}.$$

Observemos por otro lado que  $V_k \cap A^j(W) = V_k \cap A^j(W) \cap \mathcal{U} = V_k \cap A^j(W \cap A^{-j}\mathcal{U}) = V_k \cap A^j(W_j)$ . Entonces

$$\frac{|V_k|}{2} > \frac{\varepsilon}{2} > \alpha_J \geq \sum_{j=J}^{\infty} |V_k \cap A^j(W)| = \left| \bigcup_{j=J}^{\infty} V_k \cap A^j(W) \right| = \left| V_k \cap \bigcup_{j=J}^{\infty} A^j(W_j) \right| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

De las últimas dos desigualdades obtenemos

$$\left| V_{k_0} \cap \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j(W) \right| = \left| V_{k_0} \cap \bigcup_{j=-J}^{\infty} A^j(W_j) \right| + \left| V_{k_0} \cap \bigcup_{j=-\infty}^J A^j(W_j) \right| < |V_{k_0}|,$$

entonces  $W$  no tesela por  $A$ , lo cual contradice la suposición de que  $W$  es un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.  $\square$

Finalmente estamos en condiciones de dar la demostración del Teorema de Necesidad 5.1.

**Demostración del Teorema 5.1** Supongamos que  $W$  es un conjunto medible que tesela por traslaciones de  $\Gamma$ . Veremos que no puede ser un  $(A, \Gamma)$  wavelet set porque estamos en las hipótesis de la Proposición 5.7. Por el Lema 5.6 existe un conjunto  $\mathcal{U}$  que tesela por dilataciones de  $A$  y que contiene una colección numerable de bolas  $V_k \subset \mathcal{U}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , todas del mismo radio  $\leq 1$ . Sea  $x_k$  el centro de la bola  $V_k$ . Aplicando el Lema 5.5 a la matriz  $A^j$  obtenemos, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$|V_k \cap A^j(W)| \leq |B(x_k, 1) \cap A^j(W)| \leq \frac{C}{\#|A^{-j}(B(0, 1)) \cap \Gamma|}.$$

La hipótesis (5.1) de nuestro enunciado nos da entonces que, para  $J \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{j=J}^{\infty} |V_k \cap A^j(W)| \leq C \sum_{j=J}^{\infty} \frac{1}{\#|A^{-j}(B(0, 1)) \cap \Gamma|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } J \rightarrow \infty.$$

Como  $k \in \mathbb{N}$  es arbitrario, el supremo sobre todo  $k$  de dicha suma también tiende a cero cuando  $J \rightarrow \infty$ . Entonces los conjuntos  $W$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$  están en las hipótesis del Lema 5.7, con lo cual  $W$  no puede ser un  $(A, \Gamma)$  wavelet set.  $\square$



# Bibliografía

- [BL01] John J Benedetto and Manuel Leon. The construction of single wavelets in d-dimensions. *The Journal of Geometric Analysis*, 11:1–15, 2001.
- [BL17] Marcin Bownik and Jakob Lemvig. Wavelets for non-expanding dilations and the lattice counting estimate. *International Mathematics Research Notices*, 2017(23):7264–7291, 2017.
- [BS21] Marcin Bownik and Darrin Speegle. Simultaneous dilation and translation tilings of  $\mathbb{R}^n$ . *arXiv preprint arXiv:2109.10323*, 2021.
- [CF20] Jahangir Cheshmavar and Hartmut Führ. A classification of anisotropic besov spaces. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 49(3):863–896, 2020.
- [DL98] Xingde Dai and David R Larson. *Wandering vectors for unitary systems and orthogonal wavelets*, volume 640. American Mathematical Soc., 1998.
- [DLS97] Xingde Dai, David Larson, and Darrin Speegle. Wavelet sets in  $\mathbb{R}^n$ . *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 3:451–456, 07 1997.
- [Fug74] Bent Fuglede. Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem. *Journal of Functional Analysis*, 16(1):101–121, 1974.
- [Gus] Sara Gussin. Wavelets and wavelet sets (2008). *HMC Senior Theses*. 206. [https://scholarship.claremont.edu/hmc\\_theses/206](https://scholarship.claremont.edu/hmc_theses/206).
- [HW96] Eugenio Hernández and Guido Weiss. *A first course on wavelets*. CRC press, 1996.
- [ILP98] Eugen Ionascu, David Larson, and Carl Percay. On wavelet sets. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4:711–721, 11 1998.
- [Ios] Alex Iosevich. Fuglede conjecture for lattices. <https://people.math.rochester.edu/faculty/iosevich/expository/FugledeLattice.pdf>.
- [IW06] Eugen Ionascu and Yang Wang. Simultaneous translational and multiplicative tiling and wavelet sets in  $\mathbb{R}^2$ . *Indiana University Mathematics Journal*, 55, 09 2006.
- [JM02] Steve Jackson and R Mauldin. On a lattice problem of h. steinhaus. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(4):817–856, 2002.
- [KFS75] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, and Richard A. Silverman. *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, 1975.
- [LSST06] David Larson, Eckart Schulz, Darrin Speegle, and Keith F Taylor. Explicit cross-sections of singly generated group actions. *Harmonic Analysis and Applications: In Honor of John J. Benedetto*, pages 209–230, 2006.
- [Mar71] G. A. Margulis. On the action of unipotent groups in a lattice space. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 15(4):549, 1971.

- [Spe97] Darrin Matthew Speegle. *S-elementary wavelets and the into  $C(K)$  extension property*. Texas A&M University, 1997.
- [Spe03] Darrin Speegle. On the existence of wavelets for non-expansive dilation matrices. *Collectanea Mathematica*, pages 163–179, 2003.
- [Spe22] Darrin Speegle. Darrin speegle, simultaneous dilation and translation tilings of  $\mathbb{R}^n$ , 2022.02.08. <https://youtu.be/VROAPAn3ni0?si=df6sZAT08iDi6vtE>, February 2022.
- [Sri98] S. M. Srivastava. *A Course on Borel Sets*. Springer, 1998.
- [SW71] Elias M Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, volume 1. Princeton university press, 1971.
- [TV06] Terence Tao and Van H Vu. *Additive combinatorics*, volume 105. Cambridge University Press, 2006.
- [Wan02] Yang Wang. Wavelets, tiling, and spectral sets. *Duke Mathematical Journal*, 2002.
- [You01] Robert M Young. *An introduction to non-Harmonic fourier series, revised edition, 93*. Elsevier, 2001.