UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Previsibilidad de sistemas dinámicos discretos

Mariana Mazzón

Director: Dr. Pablo Amster

Julio de 2024

Agradecimientos

A mi director, Dr. Pablo Amster, por haberme orientado en este trabajo, por su paciencia, su amabilidad y su tiempo.

Al jurado, Dr. Pablo De Napoli y Dra. Paula Kuna, por haber aceptado leer este trabajo y por sus devoluciones.

Índice general

Introducción

Un sistema dinámico otorga una descripción funcional de la solución de un problema físico o del modelado matemático que describe el problema físico. Como afirma Devaney en [9]:

"El objetivo básico de la teoría de sistemas dinámicos es entender el comportamiento final o asintótico de un proceso iterativo. Si este proceso es una ecuación diferencial cuya variable independiente es el tiempo, entonces la teoría intenta predecir el comportamiento último de la solución de la ecuación en el futuro lejano, es decir, cuando $t \to +\infty$ o en el pasado lejano, es decir, cuando $t \to -\infty$. Si el proceso es un proceso discreto como la iteración de una función, entonces la teoría espera entender el comportamiento final de los puntos $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)$ cuando n toma valores grandes".

La dinámica topológica es una de las ramas de la teoría de sistemas dinámicos cuyo origen se encuentra en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Por dinámica topológica podemos entender el estudio de grupos de transformación con respecto a aquellas propiedades, completamente o en gran parte topológicas en naturaleza, cuyo prototipo ocurrió en dinámica clásica. Por ejemplo, dado un espacio topológico X y una función continua $f : X \to X$ podemos preguntarnos: ¿existen puntos x tales que $f^n(x) = x$ para algún $n \in \mathbb{N}$? ¿Existe algún punto x tal que dado cualquier entorno U de x, $f^n(x) \in U$ para algún $n \in \mathbb{N}$? ¿Existe $x \in X$ tal que para cualquier entorno U de x existen $n \in \mathbb{N}$ y $u \in U$, $f^n(u)$ pertenece a U? Si $f(x_0) = x_0$, ¿qué podemos decir acerca de los puntos x cercanos a x_0?, ¿son "atraídos"por x_0, esto es, $f^n(x)$ tiende a x_0 cuando n tiende a ∞?

Otro concepto que podemos estudiar, y resulta de interés en este trabajo, lo ejemplificamos de la siguiente manera: supongamos que la dinámica viene dada por la iteración de una función f y queremos calcular en una computadora la órbita de x, es decir, $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$ En cada paso por lo general existe un error de redondeo. Así pues, lo que finalmente obtenemos es una órbita aproximada de la verdadera. En este caso nos preguntamos si la órbita aproximada está cerca de la órbita verdadera.

Al trabajar con un sistema dinámico podemos considerar resultados que son verdaderos para "casi todo elemento"de un conjunto. Esto puede hacerse en diferentes contextos y existen distintas formas de definir qué significa para "casi todo elemento". El Teorema de Recurrencia de Poincaré es un ejemplo de ello, pues establece que un sistema con determinadas características regresará infinitas veces arbitrariamente cerca de su estado inicial, para casi todo estado inicial (en un sentido de categoría de Baire o de medida). Una demostración de este Teorema se puede leer en [13].

Recordamos las siguientes definiciones:

- Un subconjunto S de un espacio topologico X se dice nunca denso cuando $\left(\overline{S_n}\right)^\circ = \emptyset$
- Un subconjunto S de un espacio topologico X se dice de primera categoría en X cuando
$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n,$$
tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, S_n es nunca denso.
- Un espacio topológico X es un espacio de Baire cuando todo conjunto de primera categoría tiene interior vacío.
- ("Casi todo" en un sentido de categoría de Baire) Si X es un espacio de Baire, decimos que "casi todo elemento de X"satisface una determinada propiedad P si el conjunto de todos los $x \in X$ que no cumplen la propiedad P es de primera categoría en X.

En este trabajo estudiamos la dinámica de funciones en el conjunto de los homeomorfismos de la bola cerrada unitaria de $\mathbb{R}^n$ en sí misma y en el conjunto de las funciones continuas de una determinada variedad en sí misma. Además, la expresión "casi todo" se entiende en un sentido de categoría de Baire; cuando deba entenderse en un sentido de teoría de la medida, el enunciado se presenta de manera tal que no existe ambigüedad de interpretación.

Una breve descripción de la estructura del trabajo

Consideramos el espacio X, según se indique, la bola cerrada unitaria de $\mathbb{R}^n$, que denotamos por B^n, o una n-variedad topológica compacta y metrizable con borde (o sin borde, es decir, el borde de X es el conjunto vacío). Además, $H(X)$ denota el conjunto de todos los homeomorfismos de X en X y $C(X)$, el de todas las funciones continuas de X en X, ambos dotados con la métrica del supremo:

$$\widetilde{d}(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)).$$

La mayor parte de los resultados que demostramos en este trabajo están relacionados con el concepto de no sensibilidad. Dicha idea se introduce en el capítulo 1 y la comparamos con la noción de shadowing. También, en el capítulo 1, recordamos resultados conocidos y probamos que si M es un espacio métrico compacto, $H(M)$ es un espacio de Baire.

En el capítulo 2, con base en la publicación [7], estudiamos la noción de no sensibilidad para funciones en el espacio $H(B^n)$. Consideramos la medida de Lebesgue y demostramos que casi todas las funciones en $H(B^n)$, en un sentido de categoría de Baire, son no sensibles en casi todo punto de B^n, en un sentido de teoría de la medida. Como consecuencia del resultado anterior probamos que para casi todas las funciones en $H(B^n)$, el conjunto de todos los puntos no errantes de f tiene medida cero. Además, demostramos que para casi todas las funciones en $H(B^n)$, casi todos los elementos del conjunto de los puntos no errantes son recurrentes y no periódicos.

En el capítulo 3, con base en la publicación [7], consideramos X una n-variedad topológica compacta y metrizable, con (o sin) borde y demostramos que casi todas las funciones en $H(X)$ son no sensibles en casi todo punto de X.

Finalmente, en el capítulo 4, con base en la publicación [8], estudiamos el concepto de no sensibilidad para funciones en el espacio $C(X)$ con X una n-variedad topológica compacta y metrizable, con (o sin) borde. El primer Teorema genera dos corolarios: el primero tiene como caso particular el resultado del capítulo 3 y el segundo, un resultado del capítulo 2. Además, probamos que para casi todas las funciones en $C(X)$, el conjunto de los puntos periódicos de f es no vacío y el conjunto de los puntos no errantes de f es pequeño en un sentido de teoría de la medida y en un sentido de categoría de Baire. Por último, demostramos que para casi todas las funciones $f \in C(X)$, el conjunto de todos los puntos donde f es sensible es infinito y denso en el conjunto de todos los puntos periódicos de f.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notación y definiciones

Sea X un espacio topológico. Dado $A \subset X$, $\overline{A}$, A° y $\partial(A)$ denotan la clausura, el interior y el borde de A en X, respectivamente. Si $A, B \subset X$ decimos que A es denso en B si $B \subset \overline{A}$.

Sean (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y $r > 0$ definimos

$$B(x,r) = \{y \in X : d(y,x) < r\}, \ \ B^{*}(x,r) = \{y \in X : 0 < d(y,x) < r\},$$

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(y,x) \leq r\} \ \text{ y, para cada } \delta > 0, \ \ N_{\delta}(A) = \bigcup_{a \in A} B(a,\delta).$$

Además, dado $A \subset X$, diam$A$ denota el diámetro de A en X.

Si $f \in H(X)$ (o $C(X)$) y $r > 0$ definimos

$$B(f,r) = \{g \in C(X) : \widetilde{d}(g,f) < r\}$$

Designamos por H^n el semiespacio de $\mathbb{R}^n$:

$$H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_n \geq 0\}$$

cuyo borde es $\partial(H^n)$ definido por

$$\partial(H^n) = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_n = 0\}.$$

Definición 1.1.1. Una n-variedad topológica es un espacio de Hausdorff X no vacío tal que para cada $x \in X$ existe un homeomorfismo $h : U \to V$ de un conjunto abierto U de X que contiene a x en un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^n$. Se dice que X es una n-variedad con borde si para cada $x \in X$ existe un homeomorfismo $h : U \to V$ de un conjunto abierto U de X que contiene a x en un conjunto abierto V de H^n.

Definición 1.1.2. Sea X una n-variedad con borde. El borde de X, que denotamos $\partial(X)$, es el conjunto formado por todos los puntos $x \in X$ para los cuales existe un homeomorfismo $h : U \to V$ de un conjunto abierto U de X en un conjunto abierto V de H^n tal que $x \in U$ y $h(x) \in \partial(H^n)$. El interior de X es el espacio $X - \partial(X)$ y lo denotamos $i(X)$.

Observación 1.1.3. Notamos que no hay nada en la definición precedente que requiera que X tenga algún elemento en su borde. Si X no posee elementos en su borde, entonces $\partial(X)$ es vacío y decimos que X es una n-variedad sin borde.

1.2. Sistemas Dinámicos

Esta sección está basada en las referencias [2], [7] y [11].

1.2.1. Definición

Definición 1.2.1. Un grupo de transformación topológica, o grupo de transformación, se define como una terna (X, T, π), donde X es un espacio topológico, T es un grupo topológico y π es un mapeo de $X \times T$ en X, que satisface (para el grupo T utilizamos la notación multiplicativa y e denota su elemento neutro):

(1) $\pi(x, e) = x$ para todo $x \in X$.

(2) $\pi(\pi(x, s), t) = \pi(x, st)$ para todo $x \in X$ y para todo $t, s \in T$.

(3) π es continua.

Se dice que X es el espacio de fase, T el grupo de fase y π el mapeo de fase. Para ser exactos, cualquier función $\pi : X \times T \to X$ que satisface los axiomas (1) y (2) se dice que es una acción (de T sobre X). Así pues, hablamos de un grupo de transformación cada vez que trabajamos con una acción continua.

Dado un grupo de transformación (X, T, π), el mapeo de fase π determina dos tipos de mapeos. Fijado $t \in T$, el mapeo $\pi^t : X \to X$ definido por $\pi^t(x) = \pi(x, t)$ es un homeomorfismo que se denomina una transición. En efecto, fijado $t \in T$, la función $\pi^t : X \to X$ definida por $\pi^t(x) = \pi(x, t)$ verifica que:

- Es continua pues $\pi^t = f \circ g$ donde $f = \pi \mid_{X \times \{t\}}$ y $g : X \to X \times T \;\; g(x) = (x, t)$ son funciones continuas.

- Es biyectiva pues

$$(\pi^t \circ \pi^{t^{-1}})(x) = \pi^t(\pi(x, t^{-1})) = \pi(\pi(x, t^{-1}), t) = \pi(x, t^{-1}t) = \pi(x, e) = x$$

  para todo $x \in X$. Análogamente, $(\pi^{t^{-1}} \circ \pi^t)(x) = x$.

- $(\pi^t)^{-1} = \pi^{t^{-1}}$ es continua.

Ahora fijamos $x \in X$, entonces el mapeo $\pi_x : T \to X$ definido por $\pi_x(t) = \pi(x,t)$ es continuo y se denomina un movimiento.

El conjunto de todas las transiciones es un grupo de homeomorfismos del espacio de fase X en sí mismo tal que la transición π^e es el homeomorfismo identidad del espacio de fase X y tal que el mapeo $t \mapsto \pi^t$ es un homomorfismo de grupos.

Las siguientes frases se consideran equivalentes: "(X, T, π) es un grupo de transformación topológica", " sistema dinámico", "X es un T-espacio (con acción π)" o "T actúa continuamente sobre X (por π)". En los casos donde el grupo T se sobreentiende, un grupo de transformación (X, T, π) se denota (X, π). Además, la acción de T en un T-espacio en la mayoría de los casos se suprime como veremos a continuación.

1.2.2. Sistemas dinámicos discretos

Sea $T = \mathbb{Z}$ y $f : X \to X$ un homeomorfismo. Entonces $\pi : X \times T \to X$ con $\pi(x,n) = f^n(x)$ define una acción continua del grupo $\mathbb{Z}$ sobre el espacio X. Notemos que para este grupo de transformación tenemos que $\pi^1 = f$. Todo grupo de transformación topológica $(X, \mathbb{Z}, \pi)$ se obtiene de esta forma desde el homeomorfismo π^1, porque $(\pi^1)^n = \pi^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Así, un grupo de transformación con espacio de fase X, grupo de fase $\mathbb{Z}$ y $\pi^1 = f$, que denotamos (X, f), es lo que llamamos un sistema dinámico discreto.

Una modificación que podemos hacer es la de reemplazar el grupo que actúa por un semigrupo. Cuando $T = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f : X \to X$ continua, definimos la acción $\pi : X \times T \to X$ por la regla $\pi(x,n) = f^n(x)$. En este caso decimos que (X, f) es un sistema semidinámico discreto.

1.2.3. Puntos fijos, periódicos, recurrentes y no errantes

Sea X un espacio topológico metrizable y $f : X \to X$ una función continua. Definimos

- La órbita de x bajo f es de la forma $\{f^j(x) : j \in \mathbb{N}_0\}$. Si f es inversible, es de la forma $\{f^j(x) : j \in \mathbb{Z}\}$.
- Se dice que x es un punto fijo de f si $f(x) = x$.
- Se dice que x es un punto periódico de f de período m si $f^m(x) = x$ y $f^n(x) \neq x$ para todo $1 \leq n < m$.

- Un punto x se dice que es un punto recurrente de f si x es un punto límite de la sucesión $(f^j(x))_{j\geqslant 0}$, es decir, existe una subsucesión de $(f^j(x))_{j\geqslant 0}$ que converge a x.

- Un punto x se dice que es un punto no errante de f si para todo entorno U de x, $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$ para infinitos $k \geq 1$.

Notación:
- Orb(f,x) indica la órbita del punto x.
- F_f indica el conjunto de todos los puntos fijos de f.
- P_f indica el conjunto de todos los puntos periódicos de f.
- P_f^m indica el conjunto de todos los puntos periódicos de f de período m.
- R_f indica el conjunto de todos los puntos recurrentes de f.
- Ω_f indica el conjunto de todos los puntos no errantes de f.

Proposición 1.2.2. $P_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} F_{f^k}$.

Proposición 1.2.3. $P_f^m = F_{f^m} - \bigcup\limits_{1\leq k<m} F_{f^k}$.

Demostración. Sea $x \in P_f^m$, entonces $x \in F_{f^m}$ y $f^k(x) \neq x$ para todo $1 \leq k < m$. Así pues, $x \in F_{f^m} - \bigcup\limits_{1\leq k<m} F_{f^k}$. Ahora sea $x \in F_{f^m} - \bigcup\limits_{1\leq k<m} F_{f^k}$, entonces $f^m(x) = x$ y $f^k(x) \neq x$ para todo $1 \leq k < m$. Por lo tanto, $x \in P_f^m$. $\square$

Definición 1.2.4. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, $A \subset X$ y $f : X \to X$ homeomorfismo. Se dice que A es invariante bajo f si $f(A) = A$.

Observación 1.2.5. A es invariante si, y sólo si, $f(A) \subset A$ y $f^{-1}(A) \subset A$.

Proposición 1.2.6. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ un homeomorfismo. Entonces*

(a) $P_f \subset R_f \subset \Omega_f$.

(b) P_f, R_f y Ω_f son invariantes.

(c) Ω_f es cerrado.

Demostración. (a) Sea $x \in P_f$ de período k y sea U un entorno de x. Entonces $f^{nk}(x) \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, $x \in R_f$. Ahora sea $x \in R_f$ y sea U un entorno de x. Entonces $f^j(x) \in U$ para infinitos $j \geq 0$, y así $f^j(U) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \Omega_f$.

(b) Veamos que $f(P_f) \subset P_f$. Sea $x \in P_f$ de período k. Entonces $f^k(f(x)) = f(f^k(x)) = f(x)$. Por lo tanto, $f(x) \in F_{f^k}$, y resulta un punto periódico. Análogamente se demuestra que $f^{-1}(P_f) \subset P_f$.
Veamos que $f(R_f) \subset R_f$. Sea $x \in R_f$ y sea U un entorno de $f(x)$. Como $f^{-1}(U)$ es un entorno x, existen infinitos $j \geq 0$ tales que $f^j(x) \in f^{-1}(U)$. Entonces $f^j(f(x)) = f(f^j(x)) \in f(f^{-1}(U) \subset U$. Así pues, $f(x) \in R_f$. Análogamente se demuestra que $f^{-1}(R_f) \subset R_f$.
Veamos que $f(\Omega_f) \subset \Omega_f$. Sea $x \in \Omega_f$ y sea U un entorno de $f(x)$. Como $f^{-1}(U)$ es un entorno x, entonces $f^k(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ para infinitos $k \geq 1$. Por lo tanto,

$$\emptyset \neq f(f^k(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U))) \subset f(f^k(f^{-1}(U))) \cap U \subset f^k(U) \cap U.$$

Así, $f(x) \in \Omega_f$. Análogamente se demuestra que $f^{-1}(\Omega_f) \subset \Omega_f$.

(c) Sea $x \in X - \Omega_f$. Entonces existe un entorno U de x y un $t > 0$ tal que $f^k(U) \cap U = \emptyset$ para todo $k > t$. Como $x \in U^\circ$, existe V abierto tal que $x \in V \subset U$. Veamos que para todo elemento $y \in V$, $y \in X - \Omega_f$. Como V es entorno de y y $V \subset U$, $f^k(V) \cap V \subset f^k(U) \cap U = \emptyset$. Entonces $y \notin \Omega_f$. Por lo tanto, $X - \Omega_f$ es abierto.

□

Definición 1.2.7. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, $A \subset X$ y $f : X \to X$ es continua. Se dice que A es positivamente invariante bajo f si $f(A) \subset A$.

Observación 1.2.8. La Proposición 1.2.6 continúa siendo válida cuando $f : X \to X$ es continua, excepto el ítem (b) que cambia la condición de invariante por positivamente invariante.

1.2.4. No sensibilidad

Consideremos un sistema dinámico, o semidinámico, discreto (X, f), donde X es un espacio topológico metrizable con una métrica d compatible con la topología de X. Dado $a \in X$ estamos interesados en estudiar su órbita, es decir, la secuencia

$$a, f(a), f^2(a), \ldots$$

Existen situaciones en las que no podemos computar el valor exacto de la condición inicial a. En tal caso, calculamos un valor a_0 cercano a a. Puede ser que tampoco podamos computar exactamente $f(a_0)$, sino un valor a_1 cercano a $f(a_0)$. Luego computamos un valor a_2 cercano a $f(a_1)$, y así continuamos. De este modo obtenemos una sucesión

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

que puede considerarse como el comportamiento previsto de la órbita de a. Nos preguntamos si este comportamiento previsto se encuentra cercano a la órbita de a. Esto nos conduce a la siguiente definición:

Definición 1.2.9. Decimos que una función $f : X \to X$ es no sensible en $a \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier elección de puntos

$$a_0 \in B(a, \delta),\ a_1 \in B(f(a_0), \delta),\ a_2 \in B(f(a_1), \delta), \ldots ;$$

tenemos que

$$d(a_m, f^m(a)) < \epsilon \text{ para todo } m \geq 0.$$

La noción de no sensibilidad se definió por primera vez en [3] y luego se redefinió en [7]. Es una manera de describir matemáticamente la idea de previsibilidad: si f es no sensible en a, entonces el sistema dinámico (o semidinámico) discreto (X, f) es "predecible en a", en el sentido de que podemos predecir la evolución futura de a en el sistema con tanta precisión como queramos siempre y cuando podamos computar la condición inicial y los valores de f con suficiente precisión.

La definición dada anteriormente puede recordarnos la noción de shadowing, la cual, en el caso de que X sea compacto, puede definirse, de acuerdo a [5], como sigue: f tiene la propiedad shadowing, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ en X que satisface:

$$d(f(a_i), a_{i+1}) < \delta \quad \text{para todo} \quad i \geq 0,$$

existe un punto $x \in X$ tal que

$$d(a_m, f^m(x)) < \epsilon \text{ para todo } m \geq 0.$$

Existe una diferencia importante entre no sensibilidad y shadowing (además del hecho de que la primera es una noción puntual mientras que la segunda es global): sea $a \in X$ y eligimos puntos

$$a_0 \in B(a, \delta),\ a_1 \in B(f(a_0), \delta),\ a_2 \in B(f(a_1), \delta), \text{ etc.}$$

La propiedad shadowing nos da la existencia de un punto $x \in X$ (posiblemente diferente de a) tal que $d(a_m, f^m(x)) < \epsilon$ para todo $m \geq 0$. Por otro lado, la no sensibilidad de f en a garantiza que esto último vale con $x = a$. Esta es una gran diferencia si estamos interesados en el problema de previsibilidad: la propiedad shadowing garantiza solamente que el comportamiento previsto del sistema (X, f) en a está cerca de algún comportamiento verdadero del sistema (pero este comportamiento verdadero puede ser diferente del comportamiento verdadero en la condición inicial a).

No sensibilidad y equicontinuidad

Sea (X, f) un sistema dinámico (o semidinámico) discreto, donde X es un espacio topológico metrizable con una métrica d compatible con la topología de X. Dado $a \in X$, nos interesa analizar la siguiente situación: si $d(x, a)$ es pequeña, ¿se cumple que $d(f^n(x), f^n(a))$ es pequeña para todo $n \in \mathbb{N}$? Por ejemplo, si a denota una condición inicial y x su estimación, y consideramos $d(f^n(x), f^n(a))$ como el error que se produce al estimar el n-ésimo valor $f^n(a)$ por $f^n(x)$, querríamos un error pequeño si la aproximación x de la condición inicial a fuera buena. Es decir, quisiéramos que la familia de funciones $\{f^n : n \geq 1\}$ fuera equicontinua en a.

Definición 1.2.10. Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos. Una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f : X \to Y\}$ se dice equicontinua en $x \in X$ si, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $y \in X$: $d(y, x) < \delta$ se verifica que

$$d'(f(y), f(x)) < \epsilon.$$

para toda $f \in \mathcal{F}$.

Decimos que la familia de funciones $\mathcal{F}$ es equicontinua en $A \subset X$ si $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada $x \in A$.

Definición 1.2.11. Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y $A \subset X$. Una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f : X \to Y\}$ se dice uniformemente equicontinua en A si, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$, $y \in X$: $d(x, y) < \delta$ se verifica que

$$d'(f(y), f(x)) < \epsilon$$

para toda $f \in \mathcal{F}$.

Proposición 1.2.12. *Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función. Si f es no sensible en a, entonces la familia de funciones $\{f^n : n \geq 1\}$ es uniformemente equicontinua en la órbita de a bajo f.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, como f es no sensible en a, existe un $\delta > 0$ tal que para los puntos $a_j = f^j(a)$ $(0 \leq j \leq i - 1)$, $a_i \in B(f^i(a)), \delta)$ y $a_{i+j} = f^j(a_i)$ $(j \geq 1)$, tenemos que

$$d(a_n, f^n(a)) < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para cada $x = f^i(a)$ $(i \geq 0)$ e $y \in X$: $d(y, x) < \delta$ tomamos los puntos definidos anteriormente con $a_i = y$, y entonces se verifica que

$$d(f^n(y), f^n(x)) = d(a_{i+n}, f^{i+n}(a)) < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

1.3. Resultados generales

Antes de concluir este capítulo repasamos algunas definiciones y resultados conocidos.

Teorema 1.3.1 (de Punto Fijo de Brouwer)**.** *Sea $f : B^n \longrightarrow B^n$ continua. Entonces existe $x \in B^n$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Se pueden leer diferentes versiones de este Teorema en [4]. □

Definición 1.3.2. Un espacio topológico X se dice normal si para cada par C, F de conjuntos cerrados disjuntos en X, existen conjuntos abiertos disjuntos U, V con $C \subset U$ y $F \subset V$.

Teorema 1.3.3 (Teorema de extensión de Tietze)**.** *X es normal si, y sólo si, dado $C \subset X$ cerrado y dada $f : C \to \mathbb{R}$ continua, existe una extensión de f a todo X; es decir, existe una función continua $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F|_C = f$.*

Demostración. Se puede leer una demostración en [15]. □

Proposición 1.3.4. *Sea X un espacio topológico compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\varphi : H(X) \to H(X)$ definida por $\varphi(f) = f^n$ es continua.*

Demostración. Demostramos por inducción. El caso $n = 1$ es inmediato, pues $\varphi = id$ es continua. Supongamos que nuestra afirmación es cierta para cierto natural n. Veamos que es cierta para $n+1$. Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis inductiva, existe $\delta_n > 0$ tal que si $\widetilde{d}(g, f) < \delta_n$, entonces $\widetilde{d}(g^n, f^n) < \epsilon/3$. Como f^n es uniformemente continua, existe un $\delta_2 > 0$ tal que si $d(x_1, x_2) < \delta_2$, entonces $d(f^n(x_1), f^n(x_2)) < \epsilon/3$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Por lo tanto, si $\widetilde{d}(g, f) < \delta$,

$$d(g^{n+1}(x), f^{n+1}(x)) \leq d(g^n(g(x)), f^n(g(x))) + d(f^n(g(x)), f^n(f(x))) < \tfrac{2}{3}\epsilon.$$

Al tomar supremo sobre $x \in X$ obtenemos $\widetilde{d}(g, f) < \epsilon$. □

Observación 1.3.5. El resultado anterior también vale si tomamos $C(X)$ en lugar de $H(X)$.

Homeomorfismos

Definición 1.3.6. Sean (X, τ_1) e (Y, τ_2) espacios topológicos. Un homeomorfismo es una función $f : X \to Y$ continua, biyectiva y cuya inversa $f^{-1} : Y \to X$ es continua.

Proposición 1.3.7. *Sean (X, τ_1), (Y, τ_2) y (Z, τ_3) espacios topológicos.*

(a) Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f^{-1} : Y \to X$ también lo es.

(b) Si $f : X \to Z$ y $g : Z \to Y$ son homeomorfismos, entonces $g \circ f : X \to Y$ también lo es.

Proposición 1.3.8. *Toda función continua $f : X \to Y$ de un espacio compacto X en un espacio de Hausdorff Y es cerrada.*

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de X. Como X es compacto, C es compacto. Como f es continua, $f(C)$ es compacto, y entonces, como Y es Hausdorff, $f(C)$ es cerrado. □

Proposición 1.3.9. *Toda función $f : X \to Y$, continua y biyectiva, de un espacio compacto X en un espacio de Hausdorff Y es un homeomorfismo.*

Demostración. Por la Proposición 1.3.8, f es cerrada, y por lo tanto, $f^{-1} : Y \to X$ es continua. □

A continuación demostramos la existencia de homeomorfismos con determinadas condiciones.

Proposición 1.3.10. *Sean las bolas cerradas de $\mathbb{R}^n$: B^n, $\overline{B}(0, r_1)$, $\overline{B}(0, r_2)$, donde $0 < r_2 < r_1 < 1$. Entonces existe un homeomorfismo $\varphi : B^n \to B^n$ tal que*

$$\varphi(\overline{B}(0, r_1)) \subset \overline{B}(0, r_2) \quad y \quad \varphi(x) = x \text{ para todo } x \in \partial(B^n).$$

Demostración. Vamos a construir una función que transforma los radios asignando $0 \mapsto 0$, $r_1 \mapsto r_2$ y $1 \mapsto 1$; es decir, $r : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{r_2}{r_1} x & \text{si } 0 \leq x \leq r_1 \\ \dfrac{1 - r_2}{1 - r_1} x + \dfrac{r_2 - r_1}{1 - r_1} & \text{si } r_1 < x \leq 1. \end{cases}$$

Se cumple que r es continua y biyectiva. Ahora definimos una función $\varphi : B^n \to B^n$, del siguiente modo: todo punto $x \in B^n$ pertenece a algún segmento de recta S que une 0 con un punto del borde de B^n, entonces φ asigna $x \mapsto y$ de modo que $y \in S$ y la distancia de y al origen está dada por la regla r; es decir,

$$\varphi(x) = \begin{cases} r(\|x\|)\dfrac{x}{\|x\|} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

Por composición y producto de funciones continuas, φ resulta continua en $x \neq 0$. Además,

$$\lim_{x \mapsto 0} \varphi(x) = 0,$$

como resultado del producto entre una función que tiende a cero y otra que es acotada.

Veamos que φ es inyectiva. Si $x \neq 0$, entonces $\varphi(x) \neq \varphi(0)$. Sean $x_1, x_2 \in B^n - \{0\}$ y $x_1 \neq x_2$.

Si $\|x_1\| = \|x_2\|$, entonces $\dfrac{r(\|x_1\|)}{\|x_1\|} = \dfrac{r(\|x_2\|)}{\|x_2\|}$, y por lo tanto $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Si $\|x_1\| \neq \|x_2\|$, entonces $\|\varphi(x_1)\| \neq \|\varphi(x_2)\|$, y por lo tanto $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Veamos que φ es sobreyectiva. Sea $y \in B^n$. Si $y = 0$, entonces $\varphi(0) = 0$. Sean $y \neq 0$ y $\alpha = \|y\|$. Como $0 < \alpha \leq 1$ y r es sobreyectiva, existe $t_1 \in (0, 1]$ tal que $r(t_1) = \alpha$. Si tomamos $x = \dfrac{t_1}{\alpha} y$, entonces $\|x\| \leq 1$ y $\varphi(x) = y$.

Como B^n es compacto, φ es un homeomorfismo. Además, si $\|x\| \leq r_1$, entonces $\|\varphi(x)\| = \dfrac{r_2}{r_1}\|x\| \leq r_2$. Por lo tanto, $x \in \overline{B}(0, r_2)$. Por último, si $x \in \partial(B^n)$, $\varphi(x) = r(1)x = x$. □

Proposición 1.3.11. *Sean $a, b \in (B^n)^\circ$. Entonces existe un homemorfismo $\varphi : B^n \to B^n$ tal que*

$$\varphi(a) = b \quad \text{y} \quad \varphi(x) = x \ \ \text{para todo } x \in \partial(B^n).$$

Demostración. Realizamos la demostración para el caso particular $a = (0, \ldots, 0, 0)$ y $b = (0, \ldots, 0, z)$ con $0 < z < 1$, pues el caso general se obtiene componiendo traslaciones, rotaciones y el caso particular. Sean las funciones continuas $f, g : B^{n-1} \to [0, 1]$ definidas por

$$f(\tilde{x}) = \sqrt{1 - \|\tilde{x}\|^2} \qquad g(\tilde{x}) = z f(\tilde{x}).$$

Observemos que el gráfico de f es la mitad de arriba de la esfera S^{n-1} y $g(0) = z$.

Consideremos las funciones continuas $h_1, h_2 : B^n \to [0, 1]$ definidas por

$$h_1(x) = f \circ \tilde{p}(x), \quad h_2(x) = g \circ \tilde{p}(x),$$

donde $\tilde{p}$ es la proyección de las primeras $n - 1$ coordenadas. Observemos que $h_2 = zh_1$.

Ahora construimos la función $\varphi : B^n \to B^n$ de la siguiente manera: dejamos fijas las primeras $n - 1$ coordenadas de cada punto x y la última, x_n, la transformamos del siguiente modo: como $x_n \in [-h_1(x), h_1(x)]$, entonces transformamos linealmente el intervalo $[-h_1(x), 0]$ en $[-h_1(x), h_2(x)]$ asignando $-h_1(x) \mapsto -h_1(x)$ y $0 \mapsto h_2(x)$ y el intervalo $[0, h_1(x)]$ en $[h_2(x), h_1(x)]$ asignando $0 \mapsto h_2(x)$ y $h_1(x) \mapsto h_1(x)$. Formalmente,

$$\varphi(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n - z|x_n| + h_2(x)).$$

La continuidad y la biyectividad de φ se verifican inmediatamente. Como B^n es compacto, φ es un homeomorfismo. Además, $\varphi(0) = (0, \ldots, 0, z)$, y si $\|x\| = 1$, $|x_n| = h_1(x)$, y entonces $\varphi(x) = x$. □

El siguiente resultado se encuentra en [6].

Proposición 1.3.12. *Sea X un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío. Dados distintos elementos*

$$a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_s \in X^\circ,$$

existe una función $\varphi \in H(X)$ tal que

$$\varphi(a_1) = b_1, \ldots, \varphi(a_k) = b_k$$

y

$$\varphi(x) = x \text{ para todo } x \in \partial(X) \cup \{c_1, \ldots, c_s\}.$$

Demostración. Elegimos un camino simple $\alpha_i : [0,1] \to Y$ desde a_i a b_i $(1 \leq i \leq k)$ de modo que los conjuntos

$$\alpha_1([0,1]), \ldots, \alpha_k([0,1]), c_1, \ldots, c_s, \partial(X)$$

sean disjuntos dos a dos. Sea D el conjunto de todas las distancias entre cualesquiera dos de estos conjuntos y sea $\delta = \text{mín}(D)$. Fijamos $1 \leq i \leq k$ y elegimos una partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1$ de $[0,1]$ tal que

$$\text{diam } \alpha_i([t_j, t_{j+1}]) < \frac{\delta}{4} \quad \text{para cada } \ 0 \leq j \leq r-1.$$

Consideremos las bolas cerradas

$$B_j := \overline{B}(\alpha_i(t_j), \delta/4) \quad (0 \leq j \leq r-1).$$

Como $\alpha_i(t_j)$ y $\alpha_i(t_{j+1})$ pertenecen a $(B_j)^\circ$, existe un homeomorfismo $\phi : B_j \to B_j$ de modo que

$$\phi_j(\alpha_i(t_j)) = \alpha_i(t_{j+1}) \quad \text{y} \quad \phi_j(x) = x \ \text{ para todo } x \in \partial(B_j).$$

Extendemos ϕ_j a un homeomorfismo de X en X poniendo $\phi_j(x) = x$ para los restantes $x \in X$. Definimos

$$\varphi_i = \phi_{r-1} \circ \ldots \circ \phi_0.$$

Entonces, $\varphi_i \in H(X), \varphi_i(a_i) = b_i$ y $\varphi_i(x) = x$ para todo $x \in Y - (B_0 \cup \ldots \cup B_{r-1})$. Finalmente, el homeomorfismo

$$\varphi := \varphi_k \circ \ldots \circ \varphi_1$$

tiene las propiedades deseadas. □

Espacios de Baire

En esta sección recordamos algunos espacios que son de Baire y demostramos que $H(X)$ es un espacio de Baire cuando X es un espacio métrico compacto.

Proposición 1.3.13. *Un espacio topológico X es un espacio de Baire si, y sólo si, toda intersección $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ de una familia numerable de abiertos A_n densos en X es un subconjunto denso en X.*

Teorema 1.3.14. *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

Demostración. Se puede consultar en [12]. □

Teorema 1.3.15. *Todo espacio de Hausdorff localmente compacto es un espacio de Baire.*

Demostración. Se puede leer en [12]. □

Proposición 1.3.16. *Si X es un espacio de Baire e Y es un G_δ denso en X, entonces Y es un espacio de Baire.*

Antes de realizar la demostración recordemos los siguientes resultados.

(1) Sea X un espacio topológico. Si $S, T \subset$ son densos en X y S es abierto en X, entonces $S \cap T$ es denso en X.

(2) Sea X un espacio topológico y $S \subset T \subset X$. Si S es denso en T y T es denso en X, entonces S es denso en X.

(3) Sea X un espacio topológico. Si S es denso en X y $S \subset T \subset X$, entonces S es denso en T.

Demostración de la Proposición 1.3.16. Probemos que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en Y donde $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de abiertos densos de Y. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un abierto V_n de X tal que $A_n = V_n \cap Y$. Por (2), A_n es denso en X. Además, como $A_n \subset V_n$, cada V_n es denso en X. Sea $Y = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i$, donde $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de abiertos de X. Además, cada G_i es denso en X. Entonces

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (V_n \cap Y) = \bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ i\in\mathbb{N}}} (V_n \cap G_i).$$

Como V_n y G_i son abiertos densos de X, entonces $V_n \cap G_i$ es abierto de X y, por (1), es denso en X. Por lo tanto, como X es un espacio de Baire, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en X. Como $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset Y$, entonces, por (3), $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en Y. □

En lo que sigue X es un espacio métrico compacto.

Proposición 1.3.17. *$(C(X), \widetilde{d})$ es completo.*

Demostración. Se puede leer en [12]. □

Proposición 1.3.18. *El subespacio $S = \{f \in C(X) : f$ es sobreyectiva $\}$ es completo.*

Demostración. Probemos que $C(X) - S$ es abierto. Sea $f \in C(X) - S$. Entonces existe $y \in X$ tal que $y \notin Im(f)$. Como $X - Im(f)$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \bigcap Im(f) = \emptyset$. Afirmamos que si $g \in B(f, r)$, entonces $y \notin Im(g)$. En efecto, supongamos que existe una función $g \in B(f, r)$ tal que $y = g(x)$ para algún $x \in X$. Entonces

$$d(y, f(x)) = d(g(x), f(x)) < r,$$

lo cual es absurdo. Así pues, $C(X) - S$ es abierto en $C(X)$. Como $S \subset C(X)$ es cerrado, entonces S es completo. □

Proposición 1.3.19. *El conjunto $I = \{f \in C(X) : f$ es inyectiva $\}$ es un G_δ.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$A_n = \{f \in C(X) : \text{existen } x, y \in X \text{ tales que } d(x, y) \geq 1/n \text{ y } f(x) = f(y)\}.$$

Antes de probar que los conjuntos A_n son cerrados, demostremos que dada $f \in C(X) - A_n$, el ínfimo del conjunto $B = \{d(f(x), f(y)) : d(x, y) \geq 1/n\}$ es mayor que cero. Supongamos que es cero. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existen x_k, $y_k \in X$ tales que $d(x_k, y_k) \geq 1/n$ y

$$\lim_{k\to\infty} d(f(x_k), f(y_k)) = 0.$$

Como $X \times X$ es compacto existe una subsucesión $(x_{k_j}, y_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a (x_0, y_0). Además, $d(x_0, y_0) \geq 1/n$. Como las funciones f y distancia son continuas,

$$\lim_{j\to\infty} d(f(x_{k_j}), f(y_{k_j})) = d(f(x_0), f(y_0)).$$

Entonces $d(f(x_0), f(y_0)) = 0$. Por lo tanto, $f(x_0) = f(y_0)$, y, como $f \in C(X) - A_n$, entonces $d(x_0, y_0) < 1/n$, lo cual es absurdo.

Ahora demostremos que A_n es cerrado. Sea $f \in C(X) - A_n$ y $b = \inf B$. Afirmamos que $B(f, b/2) \subset C(X) - A_n$. Supongamos que no, es decir, existe $g \in B(f, b/2)$ tal que $g \in A_n$. Entonces existen $x, y \in X$ tales que $d(x, y) \geq 1/n$ y $g(x) = g(y)$. Por lo tanto,

$$b \leq d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(y)) + d(g(y), f(y)) < b,$$

lo cual es un absurdo.

Por último, probemos que $I^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Si f no es inyectiva, existen $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y $f(x) = f(y)$. Sea $0 < a = d(x, y)$. Entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a > 1/n_1$. Por lo tanto, existen $x, y \in X$ tales que $d(x, y) > 1/n_1$ y $f(x) = f(y)$. Así, $f \in A_{n_1}$, y por lo tanto $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Veamos la otra inclusión. Si $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f \in A_n$, es decir, existen $x, y \in X$ tales que $\underbrace{d(x, y) \geq 1/n}_{x\neq y}$ y $f(x) = f(y)$. Por lo tanto, f no es inyectiva. Entonces $I^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, y, por complemento, $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$, lo cual muestra que I es un G_δ. $\square$

Proposición 1.3.20. *$H(X)$ es un espacio de Baire.*

Demostración. Sean S e I los conjuntos definidos en las Proposiciones 1.3.18 y 1.3.19, respectivamente, y $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ los conjuntos definidos en la demostración de la Proposición 1.3.19. Como $\overline{H(X)}$ es cerrado en $C(X)$, entonces es completo. Por lo tanto, $\overline{H(X)}$ es un espacio de Baire. $H(X)$ es denso en $\overline{H(X)}$ pues todo conjunto es denso en su clausura. Como $H(X) \subset S$ y S es cerrado, entonces $\overline{H(X)} \subset S$. Por lo tanto,

$$H(X) = H(X) \cap \overline{H(X)} = (S \cap I) \cap \overline{H(X)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \cap (S \cap \overline{H(X)}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \cap \overline{H(X)}$$

es intersección de una familia numerable de abiertos en $\overline{H(X)}$. Así, $H(X)$ es un G_δ denso en $\overline{H(X)}$ y entonces $H(X)$ es un espacio de Baire. $\square$

Grafos

Incluimos este tema porque se utiliza en algunas demostraciones de los capítulos 2 y 4. Esta subsección se basa en la referencia [10].

Un grafo es un par $G = (V, E)$ de conjuntos donde los elementos de E son subconjuntos de V que poseen 2 elementos. Los elementos de V son los vértices del grafo G y los elementos de E son sus ramas. $V(G)$ denota el conjunto de todos los vértices (nodos o puntos) del grafo G y $E(G)$ el conjunto de sus ramas (o arcos o líneas).

El número de vértices de un grafo G es su orden. Los grafos son finitos o infinitos de acuerdo a su orden.

El grafo vacío, que denotamos $\emptyset$, es el par $(\emptyset, \emptyset)$. Un grafo de orden 0 o 1 se dice trivial.

Un vértice v es incidente a una rama e si $v \in e$. Los dos vértices incidentes a una rama son sus puntos finales y una rama une sus puntos finales. Por lo general, una rama $\{v, w\}$ se escribe como vw (o vw).

Dos vértices v, w se dicen adyacentes si vw es una rama de G.

Un camino es un grafo no vacío $P = (V, E)$ de la forma

$$V = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\} \qquad E = \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k\}$$

donde los v_i son todos distintos. Los vértices v_0 y v_k están conectados por P.

Frecuentemente nos referimos a un camino mediante la sucesión de sus vértices, que escribimos $P = v_0v_1...v_k$, y decimos que P es un camino de v_0 a v_k (o entre v_0 y v_k).

Si $P = v_0v_1...v_{k-1}$ es un camino y $k \geqslant 3$, entonces decimos que el grafo $C := P + v_{k-1}v_0$ es un ciclo.

Un grafo G es acíclico si no existe ningún ciclo en G.

Un grafo no vacío G se dice conexo si para todo par de vértices v, w existe un camino en G de v a w.

Un subgrafo maximal conexo de G se llama componente de G.

Una foresta es un grafo acíclico. Un árbol es una foresta conexa. Por consiguiente, una foresta es un grafo cuyas componentes son árboles.

Teorema 1.3.21. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo T:*

(a) T es un árbol.

(b) Dos vértices cualesquiera de T están conectados por un único camino en T.

(c) T es conexo pero $T - e$ es no conexo para toda rama $e \in T$.

(d) T no contiene ciclos pero $T + vw$ sí, para cualquier par de vértices no adyacentes $v, w \in T$.

A veces es conveniente considerar un vértice del árbol como especial; tal vértice se denomina raíz del árbol. Un árbol con una raíz fija se llama árbol con raíz.

Capítulo 2

No sensibilidad en un espacio métrico cuando f es un homeomorfismo

En este capítulo analizamos la dinámica de funciones en el espacio $H(B^n)$. Consideramos a $\mathbb{R}^n$ dotado con la métrica d dada por la norma euclídea $\|\cdot\|$ y μ denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. En la primera sección estudiamos el concepto de no sensibilidad. En la segunda sección demostramos que el conjunto de todos los puntos no errantes de f es pequeño en un sentido de teoría de la medida, y que para casi toda $f \in H(B^n)$, el conjunto de los puntos no errantes de f contiene un subconjunto G_δ denso cuyos elementos son recurrentes y no periódicos. Este capítulo se basa en la referencia [7].

2.1. No sensibilidad en la bola cerrada unitaria de $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.1.1. *Fijado $n \geq 2$. Casi todas las funciones en $H(B^n)$ son no sensibles en todo punto de un subconjunto de B^n cuya medida de Lebesgue coincide con la de B^n.*

Demostración. Por una caja abierta entendemos un conjunto de la forma

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_i < x_i < \alpha_i + \delta \quad \text{para } 1 \leq i \leq n\},$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$. Una caja cerrada es la clausura de una caja abierta.

Por un árbol entendemos un árbol finito con raíz. Si T es un árbol, $V(T)$ denota el conjunto de todos los vértices de T. Además, si $v_1, v_2 \in V(T)$, escribimos

$$v_1 > v_2 \;\; \text{o} \;\; v_2 < v_1$$

para indicar que los vértices v_1 y v_2 son adyacentes y que el único camino que conecta v_2 con la raíz de T pasa por v_1. Un B-árbol es un par (T, φ) donde T es un árbol y φ es una función biyectiva entre $V(T)$ y una colección de cajas cerradas, disjuntas dos a dos, contenidas en $(B^n)^\circ$. Si (T, φ) es un B-árbol, por lo general, omitimos la función φ y hablamos solo del B-árbol T; además, no hacemos distinción entre un vértice de T y su correspondiente caja cerrada.

Para cada $k \geq 1$, sea A_k el conjunto de todas las funciones $f \in H(B^n)$ para las cuales existe un número finito de B-árboles $T_1, \ldots, T_s$ de modo que se satisfacen las siguientes propiedades:

(I) $C \cap F = \emptyset$ cada vez que $C \in V(T_i)$, $F \in V(T_j)$ y $j \neq i$.

(II) $\text{diam} C < 1/k$ cada vez que $C \in V(T_i)$ para algún $1 \leq i \leq s$.

(III) Si $C, F \in V(T_i)$ y $C > F$, entonces $f(F) \subset C^\circ$.

(IV) Para cada i, existe una cadena $C_{i,1} > C_{i,2} > \cdots > C_{i,t_i}$ de cajas sucesivas en $V(T_i)$, comenzando por la raíz $C_{i,1}$ de T_i, de modo que $f(C_{i,1}) \subset (C_{i,t_i})^\circ$.

(V) El conjunto

$$Y_1 = \bigcup \{C : C \in V(T_i) - \{C_{i,1}, \ldots, C_{i,t_i}\} \text{ para algún } 1 \leq i \leq s\}$$

junto con el conjunto

$$Y_2 = \bigcup_{i=1}^{s} \left[(C_{i,t_i} - f(C_{i,1})) \cup (C_{i,t_i-1} - f^2(C_{i,1})) \cup \ldots \cup (C_{i,1} - f^{t_i}(C_{i,1})) \right]$$

forman un conjunto cuya medida de Lebesgue es mayor que $\mu(B^n) - 1/k$.

Veamos que A_k es abierto en $H(B^n)$. Sea $f \in A_k$. Por la regularidad de la medida de Lebesgue podemos encontrar un conjunto compacto K tal que $K \subset Y_1 \cup Y_2$ y $\mu(K) > \mu(B^n) - 1/k$. Fijamos un árbol, digamos T_i. Como $f^j(C_{i,1})$ es compacto y $K \cap f^j(C_{i,1}) = \emptyset$, $a_{i,j} = d(K, f^j(C_{i,1})) > 0$ para cada $j = 1, \ldots, t_i$. Sea $a_i = \text{mín}\{a_{i,j} : 1 \leq j \leq t_i\} > 0$. Dado $a_i > 0$ existe un $\delta_j > 0$ tal que si $\widetilde{d}(f, g) < \delta_j$, entonces $\widetilde{d}(f^j, g^j) < a_i$ para cada $1 \leq j \leq t_i$ (por la Proposición 1.3.4). Sea $\delta_i = \text{mín}\{\delta_j : 1 \leq j \leq t_i\}$.

Elegimos $r = \text{mín}\{\alpha, \beta, \delta\}$ donde

- $\alpha = \underset{1 \leq i \leq s}{\text{mín}} \{d(f(F), B^n - C^\circ) : F, C \in V(T_i) \text{ y } F < C\}$, $\alpha > 0$,
- $\beta = \underset{1 \leq i \leq s}{\text{mín}} \{d(f(C_{i,1}), B^n - (C_{i,t_i})^\circ)\}$ donde C_{i,t_i} es la menor caja de la cadena de la propiedad (IV), $\beta > 0$,

- $\delta = \min\limits_{1\leq i\leq s}\{\delta_i\}$, $\delta > 0$.

Veamos que si $g \in B(f,r)$, se verifican las propiedades (III), (IV) y (V). Supongamos que existe $x_0 \in F$ con $F < C$ tal que $g(x_0) \notin C^\circ$, entonces $\alpha \leq d(g(x_0), f(x_0)) < r < \alpha$, lo cual es un absurdo. Luego vale (III). Ahora supongamos que existe una cadena como en la propiedad (IV) y sea $x_1 \in C_{i,1}$ tal que $g(x_1) \notin (C_{i,t_i})^\circ$, entonces $\beta \leq d(f(x_1), g(x_1)) < r < \beta$, lo cual es un absurdo. Luego vale (IV). Por último, supongamos que existe un $y \in K$ tal que $y = g^{j_0}(x)$ con $x \in C_{i,1}$ y $j_0 \in \{1,\ldots,t_i\}$ para algún $i = 1,\ldots,s$. Entonces

$$a_i \leq a_{i,j_0} \leq d(y, f^{j_0}(x)) = d(g^{j_0}(x), f^{j_0}(x)) < a_i,$$

lo cual es un absurdo. Luego vale (V), y queda demostrado que cada A_k es abierto.

Ahora supongamos que $f \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Entonces, para cada $k \geq 1$, existen B-árboles $T_{k,1},\ldots,T_{k,s_k}$ que cumplen las propiedaes (I) a (V) con $T_{k,1},\ldots,T_{k,s_k}$ en lugar de $T_1,\ldots,T_s$. Sean los conjuntos

$$M_k = \bigcup\{C : C \in V(T_{k,j}) \text{ para algún } 1 \leq j \leq s_k\} \quad (k \geq 1)$$

y

$$M = \bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=r}^{\infty} M_k.$$

Veamos que $\mu(M) = \mu(B^n)$. Para cada $r \in \mathbb{N}$, consideremos los conjuntos $E_r = \bigcup\limits_{k=r}^{\infty} M_k$. Entonces $\mu(B^n) \geq \mu(E_r) \geq \mu(M_r) > \mu(B^n) - 1/r$. Además, como $E_{r+1} \subset E_r$ y $\mu(E_1) \leq \mu(B^n) < \infty$, tenemos que

$$\mu(M) = \mu(\bigcap_{r=1}^{\infty} E_r) = \lim_{r\to\infty} \mu(E_r) = \mu(B^n).$$

Veamos que f es no sensible en todo punto de M. Para cada $k \geq 1$, existe un $0 < \delta_k < 1/k$ tal que

$$f(N_{\delta_k}(F)) \subset C^\circ \quad \text{cada vez que } C > F,$$

donde $C, F \in V(T_{k,j})$ para algún $1 \leq j \leq s_k$, y

$$f(N_{\delta_k}(C_{k,j,1})) \subset (C_{k,j,t_{k,j}})^\circ,$$

donde $C_{k,j,1} > \ldots > C_{k,j,t_{k,j}}$ está relacionado con $T_{k,j}$ $(1 \leq j \leq s_k)$ como $C_{i,1} > \cdots > C_{i,t_i}$ está relacionado con el árbol T_i en la propiedad (IV). Por tanto, si $a \in M_k$ y elegimos

$$a_0 \in B(a,\delta_k),\;\; a_1 \in B(f(a_0),\delta_k),\;\; a_2 \in B(f(a_1),\delta_k),\;\; a_3 \in B(f(a_2),\delta_k),\;\ldots,$$

entonces $d(a_m, f^m(a)) < 2/k$ para todo $m \geq 0$. Veamos esta última desigualdad. El caso $m = 0$ es inmediato. Para $m \geq 1$, primero probemos que $f(a_{m-1})$ y $f^m(a)$ pertenecen a la misma caja. Sean $F, C \in V(T_{k,j})$, para algún $1 \leq j \leq s_k$, tal que $C > F$ y sea $a \in F$. Cuando $m = 1$, $a_0 \in B(a; \delta_k)$, entonces $f(a_0) \in f(B(a; \delta_k)) \subset f(N_{\delta_k}(F)) \subset C^\circ$. Así, $f(a_0)$ y $f(a)$ pertenecen a la misma caja C. Supongamos que $f(a_{m-1})$ y $f^m(a)$ pertenecen a la misma caja F' donde, por la propiedad (III), si $F' < C'$, entonces $f(F') \subset (C')^\circ$ (en el caso en que F' es la raíz, por la propiedad (IV), tenemos que $C' = C_{k,j,t_{k,j}}$ es la menor caja de la cadena de modo que $f(F') \subset (C')^\circ$). Como $a_m \in B(f(a_{m-1}); \delta_k)$, entonces $f(a_m) \in f(B(f(a_{m-1}); \delta_k)) \subset f(N_{\delta_k}(F')) \subset (C')^\circ$. Como $f^m(a) \in F'$, entonces $f^{m+1}(a) \in f(F') \subset (C')^\circ$. Por lo tanto, $f(a_m)$ y $f^{m+1}(a)$ pertenecen a la misma caja C'.

El caso $a \in C_{k,j,1}$ se demuestra con los mismos argumentos que antes. Por lo tanto,

$$d(a_m, f^m(a)) \leq d(a_m, f(a_{m-1}) + d(f(a_{m-1}), f^m(a)) < \delta_k + \tfrac{1}{k} < \tfrac{2}{k}.$$

Dados $a \in M$ y $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2/k_0 < \epsilon$ y $a \in \bigcup_{k=k_0}^{\infty} M_k$. Entonces existe un $k \geq k_0$ tal que $a \in M_k$, y por lo tanto existe $\delta_k > 0$ tal que para cualquier elección de puntos

$$a_0 \in B(a, \delta_k), a_1 \in B(f(a_0), \delta_k), a_2 \in B(f(a_1)\delta_k), a_3 \in B(f(a_2), \delta_k), \ldots,$$

tenemos que $d(a_m, f^m(a)) < 2/k < 2/k_0 < \epsilon$ para todo $m \geq 0$. Esto implica que f es no sensible en todo punto de M.

Nos queda demostrar que cada A_k es denso en $H(B^n)$. Fijemos $k \geq 1$, $f \in H(B^n)$ y $\epsilon > 0$. Sea $0 < \delta < 1/k$ tal que

$$\text{diam} f(Y) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{cada vez que} \quad Y \subset B^n \quad \text{y} \quad \text{diam} Y < \delta.$$

Sea $\mathcal{C}$ una colección finita de cajas cerradas, disjuntas dos a dos, contenidas en $(B^n)^\circ$ tal que

$$\mu\left(B^n - \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C\right) < \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \text{diam} C < \delta \quad \text{para todo} \quad C \in \mathcal{C}.$$

Sea r el cardinal de $\mathcal{C}$ y tomemos $\eta > 0$ tal que

$$\text{diam} f(Y) < \frac{\epsilon}{2^{r+1}} \quad \text{cada vez que} \quad Y \subset B^n \quad \text{y} \quad \text{diam} Y < \eta.$$

Nuestro próximo objetivo es construir una cantidad finita de B-árboles $T_1, \ldots, T_s$ que satisfagan (I) y las siguientes propiedades:

(a) diam $C < \delta$ cada vez que $C \in V(T_i)$ para algún $1 \leq i \leq s$.

(b) $\mathcal{C} \subset V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)$.

(c) Si $C, F \in V(T_i)$ y $C > F$, entonces tenemos dos posibilidades:

- o bien $C \in \mathcal{C}$ y $f(F) \subset C$,
- o bien $C \notin \mathcal{C}$ y $C^\circ \cap f(\partial(F)) \neq \emptyset$.

(d) Para cada i, existe una cadena $C_{i,1} > C_{i,2} > \cdots > C_{i,t_i}$ de cajas sucesivas en $V(T_i)$, comenzando con la raíz $C_{i,1}$ de T_i, con la siguiente propiedad:

$$f(C_{i,1}) \subset C_{i,t_i}$$

y/o existe una caja $C_{i,t_i+1} \in V(T_i)$ con $C_{i,t_i} > C_{i,t_i+1}$ tal que

$$C_{i,1}, \ldots, C_{i,t_i+1} \notin \mathcal{C}$$

y tanto $C_{i,1}$ como C_{i,t_i+1} están contenidas en una caja abierta W_i de diámetro menor que η.

Con el fin de explicar cómo construir los árboles $T_1, ..., T_s$, necesitaremos una variable $\mathcal{B}$, la cual indicará el conjunto de todas las cajas cerradas que ya se han utilizado en la construcción hasta el paso actual (al inicio tenemos $\mathcal{B} = \emptyset$). También es importante observar que durante la construcción los árboles serán vistos como variables. Incluso cuando la construcción de un árbol T_i aparentemente ya está terminada puede ser necesario cambiarlo más adelante en el proceso.

Comenzamos eligiendo una caja cerrada $C_1 \in \mathcal{C}$ y la colocamos como un vértice de T_1 (notemos que ahora $\mathcal{B} = \{C_1\}$). Supongamos que en un determinado momento T_1 está formado por los vértices $C_1 < C_2 < \cdots < C_j$. Analicemos el conjunto $f(C_j)$. Existen tres posibilidades:

Caso 1. $f(C_j) \subset C$ para algún $C \in \mathcal{B}$.
Detenemos la contrucción de T_1 (por el momento). Así pues, C_j es la raíz de T_1.

Caso 2. $f(C_j) \subset C$ para algún $C \in \mathcal{C} - \mathcal{B}$.
Sea C_{j+1} tal C. Ponemos C_{j+1} como un vértice de T_1 adyacente a C_j y que satisface $C_j < C_{j+1}$.

Caso 3. $f(C_j) \not\subset \bigcup\{C : C \in \mathcal{C} \text{ o } C \in \mathcal{B}\}$.
Entonces también tenemos que $f(\partial(C_j)) \not\subset \bigcup\{C : C \in \mathcal{C} \text{ o } C \in \mathcal{B}\}$. Por tanto, podemos elegir una caja cerrada $C_{j+1} \subset (B^n)^\circ$ disjunta de cada caja en $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}$ tal que el diam$C_{j+1} < \delta$ y $(C_{j+1})^\circ \cap f(\partial(C_j)) \neq \emptyset$. Colocamos C_{j+1} como un vértice de T_1 adyacente a C_j y que satisface $C_j < C_{j+1}$.

Si el *Caso* 1 nunca sucede, entonces la construcción puede continuar indefinidamente. En este caso detendremos la construcción de T_1 tan pronto como obtengamos una cadena $C_{1,1} > C_{1,2} > \cdots > C_{1,t_1} > C_{1,t_1+1}$ comenzando con la raíz $C_{1,1}$ de T_1 de modo que $C_{1,1}, \ldots, C_{1,t_1+1} \notin \mathcal{C}$ y tanto $C_{1,1}$ como C_{1,t_1+1} estén contenidas en una caja abierta W_1 de diámetro menor que η. Afirmamos que obtendremos tal cadena en un número finito de pasos. Supongamos que no y consideremos la cadena infinita $C_1 < C_2 < C_3 < \cdots$ Para cada $j \geq 1$, elegimos un $x_j \in C_j$. Sea $a \in B^n$ un punto límite de la sucesión $(x_j)_{j\geq 1}$ y sea W un entorno abierto de a con diámetro menor que η. Como $\mathcal{C}$ es finito, existe un $p \geq 1$ tal que, para todo $j \geq p$, $C_j \notin \mathcal{C}$ y diam$C_j < \delta$. Como W es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset W$. Sean x_k, $x_m \in B(a, r/3)$ con k y m de modo que

$$x_k \in C_k, \;\; x_m \in C_m, \;\; k < m \;\; \text{y} \;\; \frac{1}{k} < \frac{r}{3}.$$

Veamos que C_k y $C_m \subset W$. En efecto, sea $x \in C_k$ y tomemos la bola $B(x, r/3)$. Si $y \in B(x, r/3)$, tenemos que

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, x_k) + d(x_k, a) < \frac{r}{3} + \delta + \frac{r}{3} < r.$$

Por lo tanto, $B(x, r/3) \subset W$. Como esto vale para cualquier $x \in C_k$, entonces $C_k \subset W$. Análogamente se demuestra que $C_m \subset W$. Esto contradice nuestra suposición y prueba nuestra afirmación.

Supongamos que ya hemos construido $T_1, \ldots, T_{i-1}$. Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, hemos terminado. Si este no es el caso, elegimos una caja $C_1' \in \mathcal{C} - \mathcal{B}$ y la colocamos como un vértice de T_i. Si en un momento determinado T_i está formado por los vértices $C_1' < C_2' < \cdots < C_j'$, entonces analizamos $f(C_j')$. Los *Casos* 2 y 3 se tratan como antes. Sin embargo, el Caso 1 debe dividirse en dos:

Caso 1*a*. $f(C_j') \subset C$ para algún $C \in V(T_i)$.

> Detenemos la contrucción de T_i (por el momento). Así pues, C_j' es la raíz de T_i.

Caso 1*b*. $f(C_j') \subset C$ para algún $C \in \mathcal{B} - V(T_i)$.

> Sea $\tilde{C}$ tal C. Entonces $\tilde{C}$ es un vértice de un árbol anterior, digamos $\tilde{C} \in V(T_{i_0})$, donde $1 \leq i_0 < i$. En este caso no tendremos por el momento árbol T_i. Simplemente ampliamos T_{i_0} colocando la cadena $C_1' < C_2' < \ldots < C_j'$ como una nueva rama de T_{i_0} que satisface la relación $C_j' < \tilde{C}$.

Si los *Casos* 1*a* y 1*b* nunca suceden, detendremos la construcción de T_i cuando obtengamos una cadena $C_{i,1} > C_{i,2} > \cdots > C_{i,t_i} > C_{i,t_i+1}$ comenzando con la raíz $C_{i,1}$ de T_i de modo que $C_{i,1}, \ldots, C_{i,t_i+1} \notin \mathcal{C}$ y tanto $C_{i,1}$ como C_{i,t_i+1} estén contenidas en una caja abierta W_i de diámetro menor que η.

Por la forma en que los árboles $T_1, ..., T_s$ fueron construidos se cumplen las propiedades deseadas. Además, vale que $s \leq r$.

Sea $I = \{i \in \{1,\ldots,s\} : f(C_{i,1}) \subset C_{i,t_i}\}$ y $J = \{1,\ldots,s\} - I$. Para cada $C \in V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)$, elegimos una caja abierta V_C con

$$\mathrm{diam} V_C < \delta \quad \text{y} \quad C \subset V_C \subset \overline{V_C} \subset (B^n)^\circ,$$

de modo que la familia $\{\overline{V_C}\}_{C \in V(T_1)\cup\ldots\cup V(T_s)}$ sea disjunta dos a dos. También podemos asumir que

$$\overline{V_{C_{i,1}}} \subset W_i \quad \text{y} \quad \overline{V_{C_{i,t_i+1}}} \subset W_i \quad \text{para todo } i \in J.$$

Ahora vamos a definir una función $g_0 \in H(B^n)$ de la siguiente manera: supongamos que $C, F \in V(T_i)$, para algún i, y $C > F$. Por (c), existe una caja cerrada $B \subset F^\circ$ tal que $f(B) \subset C^\circ$.

- Si $F \notin \{C_{i,t_i+1} : i \in J\}$, eligimos una función $\varphi \in H(\overline{V_F})$ tal que

  $$\varphi(F) \subset B \;\; \text{y} \;\; \varphi(x) = x \quad \text{para todo } x \in \partial(V_F),$$

  y definimos

  $$g_0(x) = f(\varphi(x)) \quad \text{para todo } x \in \overline{V_F}.$$

- Si $F \in \{C_{i,t_i+1} : i \in J\}$, entonces $C \notin \mathcal{C}$, y por lo tanto $C^\circ \cap f(\partial(F)) \neq \emptyset$. Elegimos una caja abierta Z_F con $F \subset Z_F \subset \overline{Z_F} \subset V_F$ tal que existe una caja cerrada $D_F \subset V_F - \overline{Z_F}$ con $f(D_F) \subset C^\circ$. También elegimos una función $\varphi \in H(\overline{Z_F})$ tal que

  $$\varphi(F) \subset B \;\; \text{y} \;\; \varphi(x) = x \quad \text{para todo } x \in \partial(Z_F),$$

  y definimos

  $$g_0(x) = f(\varphi(x)) \quad \text{para todo } x \in \overline{Z_F}.$$

Hacemos esta definición para todo $C, F \in V(T_i)$ con $C > F$ $(1 \leq i \leq s)$.

- Para $i \in I$, también existe una caja cerrada $B \subset (C_{i,1})^\circ$ tal que $f(B) \subset (C_{i,t_i})^\circ$. Entonces elegimos una función $\varphi \in H(\overline{V_{C_{i,1}}})$ tal que

  $$\varphi(C_{i,1}) \subset B \;\; \text{y} \;\; \varphi(x) = x \quad \text{para todo } x \in \partial(V_{C_{i,1}}),$$

  y definimos

  $$g_0(x) = f(\varphi(x)) \quad \text{para todo } x \in \overline{V_{C_{i,1}}}.$$

Sea K la unión de todas las cajas cerradas donde ya hemos definido g_0. Por último, ponemos

$$g_0(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in B^n - K.$$

Entonces $g_0 \in H(B^n)$, $\widetilde{d}(g_0, f) < \epsilon/2$, (III) se cumple para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$ y (IV) vale para todo $i \in I$ con g_0 en lugar de f.

Ahora necesitamos cambiar un poco g_0 para que (IV) también se cumpla para $i \in J$. Si $i \in J$ y $1 \leq j \leq t_i + 1$, denotamos la caja abierta $V_{C_{i,j}}$ por $V_{i,j}$. Además, para $i \in J$, escribimos Z_i y D_i en lugar de $Z_{C_{i,t_i+1}}$ y $D_{C_{i,t_i+1}}$, respectivamente. Recordemos que

$$D_i \subset V_{i,t_i+1} - \overline{Z_i} \quad \text{y} \quad f(D_i) \subset (C_{i,t_i})^\circ \quad (i \in J).$$

Escribimos $J = \{i_1, \ldots, i_w\}$ y ponemos

$$K_1 = K \cup \overline{V_{i_2,1}} \cup \ldots \cup \overline{V_{i_w,1}} \cup D_{i_2} \cup \ldots \cup D_{i_w}.$$

Elegimos

$$a_1 \in (C_{i_1,1})^\circ \subset \overline{V_{i_1,1}} \subset W_{i_1} - K_1 \quad \text{y} \quad b_1 \in (D_{i_1})^\circ \subset W_{i_1} - K_1.$$

Como K_1 es una unión finita de cajas cerradas, disjuntas dos a dos, incluidas en $(B^n)^\circ$, entonces $W_{i_1} - K_1$ es conexo. Por lo tanto, existe un camino continuo $\alpha : [0,1] \to W_{i_1} - K_1$ de a_1 a b_1. Además, podemos asumir que $\alpha([0,1]) \subset (B^n)^\circ$. Cubrimos $\alpha([0,1])$ con un número finito de bolas abiertas $B_1, \ldots, B_l$ cuyas clausuras están contenidas en $(W_{i_1} - K_1) \cap (B^n)^\circ$ de modo que

$$\overline{B_1} \subset (C_{i_1,1})^\circ, \quad \overline{B_l} \subset (D_{i_1})^\circ \quad \text{y} \quad B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset \quad \text{para todo } 1 \leq i < l.$$

Al trabajar en $\overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l}$ vemos que es posible construir una función $\varphi \in H(B^n)$ tal que

$$\varphi(C_{i_1,1}) \subset (D_{i_1})^\circ \quad \text{y} \quad \varphi(x) = x \;\text{ si }\; x \notin \overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup ... \cup \overline{B_l}.$$

En efecto, dados c_1 el centro de la bola $\overline{B_1}$, $d_i \in B_i \cap B_{i+1}$ $(1 \leq i \leq l-1)$ y c_l el centro de la bola $\overline{B_l}$. Entonces existe un homeomorfismo $\phi_1 : \overline{B_1} \to \overline{B_1}$ tal que

$$\phi_1(c_1) = d_1 \;\text{ y }\; \phi_1(x) = x \text{ para todo } x \in \partial(\overline{B_1}).$$

Extendemos ϕ_1 a un homeomorfismo de B^n en B^n poniendo $\phi_1(x) = x$ para los restantes x. Para cada $2 \leq i \leq l-1$, existe un homeomorfismo $\phi_i : \overline{B_i} \to \overline{B_i}$ tal que

$$\phi_i(d_{i-1}) = d_i \;\text{ y }\; \phi_i(x) = x \;\text{ para todo } x \in \partial(\overline{B_i}).$$

Extendemos ϕ_i a un homemorfismo de B^n en B^n poniendo $\phi_i(x) = x$ para los restantes x. Para el caso $i = l$, existe un homeomorfismo $\phi_l : \overline{B_l} \to \overline{B_l}$ tal que

$$\phi_i(d_{l-1}) = c_l \;\text{ y }\; \phi(x) = x \;\text{ para todo } x \in \partial(\overline{B_l}).$$

Extendemos ϕ_l a un homemorfismo de B^n en B^n como antes. Definimos

$$\phi = \phi_l \circ \ldots \circ \phi_1.$$

Entonces $\phi \in H(B^n)$, $\phi(c_1) = c_l$ y $\phi(x) = x$ para todo $x \notin \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l}$. Como $c_1 \in \phi^{-1}(B_l)$, entonces existe un $r > 0$ tal que $\overline{B}(c_1, r) \subset \phi^{-1}(B_l) \cap B_1$. Por lo tanto, existe un homeomorfismo $\widetilde{\phi} : \overline{V_{i_1,1}} \to \overline{V_{i_1,1}}$ tal que

$$\widetilde{\phi}(C_{i_1,1}) \subset \overline{B}(c_1, r) \ \text{ y } \ \widetilde{\phi}(x) = x \ \text{ para todo } x \in \partial(\overline{V_{i_1,1}}).$$

Extendemos $\widetilde{\phi}$ a un homemorfismo de B^n en B^n con $\widetilde{\phi}(x) = x$ para los restantes x. Finalmente, definimos $\varphi = \phi \circ \widetilde{\phi}$, y entonces φ tiene las propiedades deseadas.

Ahora definimos $g_1 = g_0 \circ \varphi$. Entonces $g_1 \in H(B^n)$, $g_1 = g_0$ en $B^n - (\overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l})$ y

$$g_1(C_{i_1,1}) \subset g_0(D_{i_1}) = f(D_{i_1}) \subset (C_{i_1,t_{i_1}})^\circ.$$

Además, $\widetilde{d}(g_1, g_0) < \dfrac{\epsilon}{2^{r+1}}$, pues si $x \in \overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l}$, entonces

$$d(g_1(x), g_0(x)) = d(f(\varphi(x)), f(x)) < \frac{\epsilon}{2^{r+1}},$$

porque $\varphi(x) \in \overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l}$ y $\operatorname{diam}(\overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l}) < \eta$.
También vale que

$$\operatorname{diam} g_1(Y) < \frac{\epsilon}{2^r} \ \text{ cada vez que } \ Y \subset B^n - K \ \text{ y } \ \operatorname{diam} Y < \eta.$$

En efecto, si $Y \cap (\overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l}) = \emptyset$, entonces

$$d(g_1(y_1), g_1(y_2)) = d(f(y_1), f(y_2)) < \frac{\epsilon}{2^{r+1}} < \frac{\epsilon}{2^r}.$$

Si $Y \cap (\overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l}) \neq \emptyset$, pueden presentarse dos casos:

1. $y_1, y_2 \in \overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l}$.
   Entonces $d(g_1(y_1), g_1(y_2)) = d(f(\varphi(y_1)), f(\varphi(y_2))) < \dfrac{\epsilon}{2^{r+1}} < \dfrac{\epsilon}{2^r}$.

2. $y_1 \in \overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l}$ e $y_2 \notin \overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{B_1} \cup \ldots \cup \overline{B_l}$.
   $d(g_1(y_1), g_1(y_2)) = d(g_1(y_1), g_0(y_2)) \leq d(g_1(y_1), g_0(y_1)) + d(g_0(y_1), g_0(y_2)) < \dfrac{\epsilon}{2^r}$
   porque $d(g_1(y_1), g_0(y_1)) = d(f(\varphi(y_1)), f(y_1)) < \dfrac{\epsilon}{2^{r+1}}$ y $d(g_0(y_1), g_0(y_2)) = d(f(y_1), f(y_2)) < \dfrac{\epsilon}{2^{r+1}}$.

Por lo tanto, $\text{diam} g_1(Y) < \dfrac{\epsilon}{2^r}$.

Ahora definimos

$$K_2 = K \cup \overline{V_{i_1,1}} \cup \overline{V_{i_3,1}} \cup \ldots \cup \overline{V_{i_w,1}} \cup D_{i_3} \cup \ldots \cup D_{i_w}.$$

Eligimos

$$a_2 \in (C_{i_2,1})^\circ \subset \overline{V_{i_2,1}} \subset W_{i_2} - K_2 \quad \text{y} \quad b_2 \in (D_{i_2})^\circ \subset W_{i_2} - K_2$$

y razonamos como antes. Entonces obtenemos una función $g_2 \in H(B^n)$ con $g_2(C_{i_2,1}) \subset (C_{i_2,t_{i_2}})^\circ$. Además, como g_2 difiere de g_1 solamente en un conjunto de diámetro menor que η, tenemos que $\widetilde{d}(g_2, g_1) < \epsilon/2^r$ y

$$\text{diam} g_2(Y) < \frac{\epsilon}{2^{r-1}} \;\text{ si }\; Y \subset B^n - K \;\text{ y }\; \text{diam} Y < \eta.$$

Al continuar con este proceso, en el último paso obtenemos una función $g_w \in H(B^n)$ tal que

$$\widetilde{d}(g_w, g_0) < \frac{\epsilon}{2^{r+1-(w-1)}} + \frac{\epsilon}{2^{r+1-(w-2)}} + \ldots + \frac{\epsilon}{2^{r+1}} < \frac{\epsilon}{2},$$

por lo tanto, $\widetilde{d}(g_w, f) < \epsilon$. Además, las propiedades (III) y (IV) se verifican para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$ si reemplazamos f por g_w.

Por último, nos falta analizar la propiedad (V). Recordemos que $\mathcal{C} \subset V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)$ y que $\mu\left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C\right) > \mu(B^n) - 1/k$. Si cada caja de $\mathcal{C}$ aparece en la primera unión de la propiedad (V), hemos terminado. Sin embargo, puede que este no sea el caso, porque para $i \in I$ pueden existir cajas de $\mathcal{C}$ en la cadena $C_{i,1} > C_{i,2} > \ldots > C_{i,t_i}$. Para cada $i \in I$, sea U_i una caja abierta tal que

$$C_{i,1} \subset U_i \subset \overline{U_i} \subset V_{C_{i,1}} \quad \text{y} \quad g_w(\overline{U_i}) \subset (C_{i,t_i})^\circ.$$

Sea $\varphi_i \in H(\overline{U_i})$ tal que

$$\varphi_i(x) = x \;\text{ para todo } x \in \partial(U_i) \;\text{ y }\; \text{diam} \varphi_i(C_{i,1}) \text{ es muy pequeño.}$$

Definimos

$$g = g_w \circ \varphi_i \;\text{ en }\; \overline{U_i} \;\text{ para cada }\; i \in I \;\text{ y }\; g = g_w \;\text{ en }\; B^n - \bigcup_{i \in I} \overline{U_i}.$$

Entonces $g \in H(B^n)$ y $\widetilde{d}(g, f) < \epsilon$. La desigualdad vale ya que si $x \in \bigcup_{i \in I} \overline{U_i}$, entonces $x \in \overline{U_{i_0}}$, para algún i_0, y por lo tanto

$$d(g(x), f(x)) = d(g_w(\varphi_{i_0}(x)), f(x)) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

pues $g_w(\overline{U_i}) \subset f(\overline{V_{C_{i,1}}})$ para cada $i \in I$, por la forma en que las funciones g_j fueron construidas. Si $x \notin \bigcup_{i \in I} \overline{U_i}$, $d(g(x), f(x)) = d(g_w(x), f(x)) < \epsilon$.

Además, las propiedades (III) y (IV) continuan verificándose con g en lugar de f. Al definir φ_i de modo que el diam$\varphi_i(C_{i,1})$ sea muy chico, tendremos que la medida de

$$(C_{i,t_i} - g(C_{i,1})) \cup (C_{i,t_i-1} - g^2(C_{i,1})) \cup \ldots \cup (C_{i,1} - g^{t_i}(C_{i,1}))$$

es tan cercana a la medida de $C_{i,t_i} \cup C_{i,t_i-1} \cup \ldots \cup C_{i,1}$ que (V) continúa verificándose con g en lugar de f. $\square$

Sensibilidad a las condiciones iniciales

Definición 2.1.2. f es sensible a las condiciones iniciales en $Y \subset B^n$ si existe un $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $y \in Y$ y para cualquier $\delta > 0$, existe un $x \in B^n$ con $d(x, y) < \delta$ y existe un $m \geq 1$ de modo que $d(f^m(x), f^m(y)) \geq \epsilon$.

El siguiente corolario establece que para casi toda $f \in H(B^n)$, la clausura de un conjunto donde f es sensible a las condiciones iniciales es pequeña en un sentido de teoría de la medida.

Corolario 2.1.3. *Sea $n \geq 2$. Para casi todas las funciones $f \in H(B^n)$, si f es sensible a las condiciones iniciales en un subconjunto Y de B^n, entonces $\overline{Y}$ tiene medida de Lebesgue cero.*

Demostración. Sean los conjuntos A_k $(k \in \mathbb{N})$ y M definidos como en la demostración del Teorema 2.1.1, y sea $f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Supongamos que existe $y \in \overline{Y} \cap M$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que y_n converge a y. Como f es sensible en Y existe un $\epsilon > 0$ tal que para cada y_n y cualquier $\delta > 0$, existe un $x_n \in B^n$ tal que $d(x_n, y_n) < \delta/2$ y existe un $m \geq 1$ de modo que $d(f^m(x_n), f^m(y_n)) \geq \epsilon$. Para $\epsilon/2$, como f es no sensible en y, existe un $\delta' > 0$ tal que para cualquier elección de puntos $a_0 \in B(y, \delta')$, $a_1 \in B(f(a_0), \delta')$, …, tenemos que $d(a_i, f^i(y)) < \epsilon/2$ para todo $i \geq 0$. Para $\widetilde{\delta} = \text{mín}\{\delta/2, \delta'\}$, como y_n converge a y, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $d(y_n, y) < \widetilde{\delta}$. Si tomamos $a_0 = y_{n_0}$ y $a_i = f^i(y_{n_0})$, $i \geq 1$, entonces

$$d(x_{n_0}, y) \leq d(x_{n_0}, y_{n_0}) + d(y_{n_0}, y) < \frac{\delta}{2} + \widetilde{\delta} < \delta$$

y

$$d(f^m(x_{n_0}), f^m(y)) \geq d(f^m(x_{n_0}), f^m(y_{n_0})) - d(f^m(y), f^m(y_{n_0})) \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, f es sensible en y, lo cual es un absurdo. Entonces $\overline{Y} \subset B^n - M$, y en consecuencia la medida Lebesgue de $\overline{Y}$ es cero. $\square$

2.2. Puntos no errantes y Medida de Lebesgue

El Teorema 17 de [6] afirma que para casi todas las funciones $f \in H(B^n)$, el conjunto de todos los puntos periódicos de f tiene medida de Lebesgue cero. A continuación mostramos que este resultado permanece válido para un conjunto que contiene al conjunto de los puntos periódicos de f.

Recordemos que un punto x se dice que es un punto no errante de f si para todo entorno U de x, $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$ para infinitos $k \geq 1$. Además, Ω_f denota conjunto de todos los puntos no errantes.

Teorema 2.2.1. *Sea $n \geq 2$. Para casi todas las funciones $f \in H(B^n)$, $\mu(\Omega_f) = 0$.*

Demostración. Sean los conjuntos A_k $(k \in \mathbb{N})$ como los definidos en la demostración del Teorema 2.1.1. Veamos que para cada $f \in A_k$, $\mu(\Omega_f) < 1/k$. Sea $x \in \Omega_f \cap Y_1$, donde Y_1 es el conjunto definido en el ítem (V) del Teorema 2.1.1. Entonces existe $C \in V(T_i) - \{C_{i,1}, \ldots, C_{i,t_i}\}$ para algún $1 \leq i \leq s$ tal que $x \in C$. Por definición de A_k, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^j(x) \in (C_{i,1})^\circ$, entonces existe un conjunto abierto U tal que $f^j(x) \in U \subset C_{i,1}$. Sea $V = (f^j)^{-1}(U) \cap B(x, \delta)$, donde $\delta = \text{mín}\{d(x, C_{i,q}) : 1 \leq q \leq t_i\}$ (δ es la menor de las distancias de x a todas las cajas que pertenecen a la cadena del árbol). Por lo tanto, V es un conjunto abierto que contiene a x y $f^j(V) \subset U \subset C_{i,1}$. Entonces, para todo $l \in \mathbb{N}$, $f^l(f^j(V)) \subset f^l(C_{i,1})$, donde este último conjunto está incluido en alguna caja de la cadena $C_{i,1} > \ldots > C_{i,t_i}$. Por lo tanto, $(f^{l+j}(V)) \cap V = \emptyset$, lo cual es un absurdo, pues $x \in \Omega_f$.

Sea $x \in \Omega_f \cap Y_2$, donde Y_2 es el conjunto definido en el ítem (V) del Teorema 2.1.1. Como $x \in Y_2$, existen i, t_α, j con $1 \leq i \leq s$, $1 \leq t_\alpha \leq t_i$ y $1 \leq j \leq t_i$ tales que $x \in C_{i,t_\alpha} - f^j(C_{i,1})$. Por definición de A_k, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $f^t(x) \in (C_{i,1})^\circ$, entonces existe un conjunto abierto U tal que $f^t(x) \in U \subset C_{i,1}$. Sea $V = (f^t)^{-1}(U) \cap B(x, \delta)$ donde $\delta = d(x, f^j(C_{i,1})) > 0$. Por lo tanto, V es un conjunto abierto que contiene a x y $f^t(V) \subset U \subset C_{i,1}$. Veamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^{nt_i+t}(V) \subset C_{i,1}$. Sea $n = 1$: como $f^t(V) \subset C_{i,1}$ y $f^{t_i}(C_{i,1}) \subset C_{i,1}$, entonces $f^{t_i+t}(V) \subset C_{i,1}$. Supongamos que vale para n y probemos que vale para $n+1$: $f^{(n+1)t_i+t}(V) = f^{t_i}(f^{nt_i+t}(V))$ y, por hipótesis inductiva, $f^{nt_i+t}(V) \subset C_{i,1}$, entonces $f^{(n+1)t_i+t}(V) \subset f^{t_i}(C_{i,1}) \subset C_{i,1}$. Entonces $f^{nt_i+t+j}(V) \subset f^j(C_{i,1})$, y por lo tanto $f^{nt_i+t+j}(V) \cap V \subset f^j(C_{i,1}) \cap V = \emptyset$, lo cual es un absurdo pues $x \in \Omega_f$. Entonces $\Omega_f \subset B^n - (Y_1 \cup Y_2)$. Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $f \in A_k$, $\mu(\Omega_f) < 1/k$. Así pues, cuando $f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, se tiene que $\mu(\Omega_f) = 0$. □

El siguiente resultado muestra que para casi todas las funciones $f \in H(B^n)$ el conjunto de los puntos no errantes contiene un subconjunto G_δ y denso cuyos elementos son recurrentes y no periódicos.

Proposición 2.2.2. *Fijado $n \geq 2$. Para casi todas las funciones $f \in H(B^n)$, casi todo punto de Ω_f es recurrente y no periódico.*

Antes de realizar la demostración enunciamos dos resultados que se demostraron en [6].

Proposición 2.2.3. *Fijamos $n \geq 2$ y sea X un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío. Para casi todas las funciones $f \in H(X)$, el conjunto de todos los puntos periódicos de f es denso en el conjunto de los puntos no errantes f.*

Proposición 2.2.4. *Fijamos $n \geq 2$ y sea X un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío. Para casi todas las funciones $f \in H(X)$, el conjunto de todos los puntos periódicos de f de período m es denso en el conjunto de todos los puntos periodicos de f de periodo q siempre que q divida a m.*

Demostración de la Proposición 2.2.2. Fijamos una función $f \in H(B^n)$ que cumple las propiedades de las Proposiciones 2.2.3 y 2.2.4. Para cada $m \geq 1$ y cada $r \geq 1$ sea

$$V_{m,r} = \{x \in B^n : d(x, f^t(x)) < 1/m \text{ para algún } t \geq r\}.$$

Entonces cada $V_{m,r}$ es abierto y

$$R_f - P_f = \bigcap_{m,r,k} (V_{m,r} - F_{f^k}). \tag{2.1}$$

Antes de verificar la igualdad anterior veamos que $R_f = \bigcap\limits_{m,r} V_{m,r}$. Si $x \in R_f$, entonces existen infinitos $j \in \mathbb{N}$ tales que $f^j(x) \in B(x, 1/m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para cada $r \in \mathbb{N}$, existe algún $j_r \geq r$ tal que $f^{j_r}(x) \in B(x, 1/m)$. Así, $x \in \bigcap\limits_{m,r} V_{m,r}$. Para demostrar la otra inclusión tomemos $x \in \bigcap\limits_{m,r} V_{m,r}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada $r \in \mathbb{N}$, existe $t_r \geq r$ tal que $f^{t_r}(x) \in B(x, 1/m)$, entonces la bola $B(x, 1/m)$ contiene infinitos $f^j(x)$. Esto prueba que $\bigcap\limits_{m,r} V_{m,r} \subset R_f$, y completa lo que queríamos probar.

Veamos la igualdad (2.1)

$$\bigcap_{m,r,k} (V_{m,r} - F_{f^k}) = \bigcap_{m,r} V_{m,r} \cap \bigcap_k (X - F_{f^k}) = R_f \cap (X - \bigcup_k F_{f^k}) = R_f - P_f.$$

Ahora, como $(R_f - P_f) \subset \Omega_f$,

$$R_f - P_f = \bigcap_{m,r,k} (V_{m,r} - F_{f^k}) \cap \Omega_f.$$

Para cada m, r, k, $V_{m,r} - F_{f^k}$ es abierto en X, entonces $(V_{m,r} - F_{f^k}) \cap \Omega_f$ es abierto en Ω_f. Así, $R_f - P_f$ es un subconjunto G_δ de Ω_f. Mostremos que $(V_{m,r} - F_{f^k}) \cap \Omega_f$ es denso en Ω_f. Sea U un conjunto abierto de B^n tal que $U \cap \Omega_f \neq \emptyset$. Por la Proposición 2.2.3, podemos elegir un $y \in P_f \cap U$. Sea p el período de y y eligimos un entero t de la forma sp, para algún $s \geq 1$, mayor que k. Por la Proposición 2.2.4, podemos elegir un punto periódico z de f con período t que pertenece a U. Además, para cada $r, m \in \mathbb{N}$, $d(f^{it}(z), z) = 0 < 1/m$ para algún $i \geq 1$ tal que $it \geq r$. Entonces $z \in V_{m,r}$. Por lo tanto, $z \in (V_{m,r} - F_{f^k}) \cap \Omega_f \cap U$, y así $\bigcap_{m,r,k} (V_{m,r} - F_{f^k}) \cap \Omega_f$ es denso en Ω_f, lo cual completa la demostración. $\square$

Capítulo 3

No sensibilidad en una variedad cuando f es un homeomorfismo

Un resultado relacionado con la noción de previsibilidad se obtuvo en el Teorema 20 de [6], el cual puede enunciarse de la siguiente forma:

Sea $n \geq 2$. Para casi todas las funciones $f \in H(B^n)$, la familia $\{f^m : m \geq 1\}$ es equicontinua en casi todo punto de B^n.

La equicontinuidad de $\{f^m : m \geq 1\}$ en un punto a se puede pensar como un tipo de "previsibilidad con respecto a la condición inicial a". Esta propiedad es más débil que la noción de no sensibilidad (recordemos que la Proposición 1.2.12 establece que la no sensibilidad de f en a implica que la familia $\{f^m : m \geq 1\}$ es uniformemente equicontinua en la órbita $\{a, f(a), f^2(a), \ldots\}$ de a bajo f). En efecto, si x_0 está cerca de a y la familia $\{f^m : m \geq 1\}$ es equicontinua en a, cada iteración de f en x_0 permanece cerca de la correspondiente iteración de f en a pero si, por ejemplo, comenzamos a tomar los siguientes valores: x_1 cercano a $f(x)$, x_2 cercano a $f(x_1)$, x_3 cerca de $f(x_2)$ y siguiendo, no podemos asegurar ninguna relación entre x_m y $f^m(a)$ para todo $m \geq 0$. La siguiente sección demuestra que podemos asegurar la no sensibilidad de f en casi todo punto de B^n, para casi toda $f \in H(B^n)$. De hecho, probamos que dicho enunciado es verdadero en un contexto más general. Este capítulo se basa en la referencia [7].

3.1. Resultado principal

Teorema 3.1.1. *Sea $n \geq 1$ fijo. Sea X una n-variedad topológica compacta y metrizable con (o sin) borde y fijamos una métrica d compatible con la topología de X. Entonces casi todas las funciones en $H(X)$ son no sensibles en casi todo punto de X.*

Demostración. En lo que sigue $(f \circ N_\delta)^0(A) = A$, $(f \circ N_\delta)^1(A) = f(N_\delta(A))$, $(f \circ$

$N_\delta)^2(A) = f(N_\delta(f(N_\delta(A))))$, y siguiendo. Y recordemos que $i(X)$ denota el interior de la variedad X.

Fijamos una sucesión $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $i(X)$ la cual es densa en X. Para cada $r \geq 1$ y cada $k \geq 1$, sea $\mathcal{O}_{r,k}$ el conjunto de todas las funciones $f \in H(X)$ para las cuales existe un conjunto cerrado $V \subset i(X)$ y existen enteros $q \geq 0$ y $m \geq 1$ de modo que

$$f^q(z_k) \in V^\circ, \quad f^m(V) \subset V^\circ \quad \text{y} \quad \text{diam} f^i(V) < \frac{1}{r} \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq m-1.$$

Veamos que cada $\mathcal{O}_{r,k}$ es abierto. Fijamos $r \geq 1$, $k \geq 1$ y $f \in \mathcal{O}_{r,k}$. Como $f^q(z_k) \in V^\circ$, existe un $r_1 > 0$ tal que $B(f^q(z_k), r_1) \subset V$. Entonces, para r_1, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\widetilde{d}(f,g) < \delta_1$, entonces $\widetilde{d}(f^q, g^q) < r_1$ (por la Proposición 1.3.4). Como $f^m(V)$ es compacto en X y $f^m(V) \subset V^\circ$, entonces existe $r_2 > 0$ tal que

$$\bigcup_{v\in V} B(f^m(v), r_2) \subset V^\circ.$$

Entonces, para r_2, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\widetilde{d}(f,g) < \delta_2$, entonces $\widetilde{d}(f^m, g^m) < r_2$ (por la Proposición 1.3.4). Por último, sea $a_i = \text{diam} f^i(V) < 1/r$, entonces existe $\alpha_i > 0$ tal que $a_i + \alpha_i < 1/r$ para cada $0 \leq i \leq m-1$. Sea $m = \text{mín}\{\alpha_i : 0 \leq i \leq m-1\}$. Entonces, para $m/2 > 0$, existe $\delta_i > 0$ tal que si $\widetilde{d}(f,g) < \delta_i$, entonces $\widetilde{d}(f^i, g^i) < m/2$ (por la Proposición 1.3.4). Definimos $\delta_3 = \text{mín}\{\delta_i : 0 \leq i \leq m-1\}$.

Ahora sea con $R = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y veamos que $B(f,R) \subset \mathcal{O}_{r,k}$. Sea $g \in B(f,R)$. Como $R < \delta_1$, entonces $g^q(z_k) \in B(f^q(z_k), r_1) \subset V$. Sea $r' = r_1 - d(g^q(z_k), f^q(z_k))$. Entonces $d(w, f^q(z_k)) < r_1$ para cada $w \in B(g^q(z_k), r')$. Así pues, $B(g^q(z_k), r') \subset B(f^q(z_k), r_1) \subset V$, y queda demostrado que $g^q(z_k) \in V^\circ$.

Como $R < \delta_2$, para cada $v \in V$, $g^m(v) \in B(f^m(v), r_2) \subset V^\circ$. Sea $r'' = r_2 - d(g^m(v), f^m(v))$. Entonces $d(w, f^m(v)) < r_2$ para cada $w \in B(g^m(v), r'')$. Así pues, $B(g^m(v), r'') \subset B(f^m(v), r_2) \subset V^\circ$, y queda probado que $g^m(V) \subset V^\circ$.

Finalmente, sean $v_1, v_2 \in V$. Como $R < \delta_3$, para cada $0 \leq i \leq m-1$, se cumple que

$$d(g^i(v_1), g^i(v_2)) \leq d(g^i(v_1), f^i(v_1)) + d(f^i(v_1), f^i(v_2)) + d(f^i(v_2), g^i(v_2)) < m + a_i.$$

Por lo tanto, $\text{diam} g^i(V) \leq m + a_i \leq \alpha_i + a_i < 1/r$, y queda demostrado que $\text{diam} g^i(V) < 1/r$.

Sea $f \in \bigcap_{r,k} \mathcal{O}_{r,k}$. Para cada $r \geq 1$ y cada $k \geq 1$, existe un conjunto cerrado $V_{r,k} \subset i(X)$ y existen enteros $q_{r,k} \geq 0$ y $m_{r,k} \geq 1$ tales que

$$f^{q_{r,k}}(z_k) \in (V_{r,k})^\circ, \;\; f^{m_{r,k}}(V_{r,k}) \subset (V_{r,k})^\circ \;\; \text{y} \;\; \text{diam} f^i(V_{r,k}) < \frac{1}{r} \; \text{para} \; 0 \leq i \leq m_{r,k} - 1.$$

Sea $W_{r,k}$ una bola abierta con centro en z_k tal que

$$f^{q_{r,k}}(\overline{W_{r,k}}) \subset (V_{r,k})^{\circ} \quad \text{y} \quad \text{diam} f^{i}(\overline{W_{r,k}}) < 1/r \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq q_{r,k} - 1.$$

Elegimos $0 < \delta_{r,k} < 1/r$ tal que

$$(f \circ N_{\delta_{r,k}})^{q_{r,k}}(\overline{W_{r,k}}) \subset (V_{r,k})^{\circ}, \quad (f \circ N_{\delta_{r,k}})^{m_{r,k}}(V_{r,k}) \subset (V_{r,k})^{\circ},$$

$$\text{diam}(f \circ N_{\delta_{r,k}})^{i}(\overline{W_{r,k}}) < \frac{1}{r} - \delta_{r,k} \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq q_{r,k} - 1$$

y

$$\text{diam}(f \circ N_{\delta_{r,k}})^{i}(V_{r,k}) < \frac{1}{r} - \delta_{r,k} \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq m_{r,k} - 1.$$

Sea $D_r = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_{r,k}$. Entonces D_r es abierto y denso en X. Además, si $a \in D_r$, entonces $a \in W_{r,k}$ para algún $k \geq 1$, y entonces para cualquier elección de puntos

$$a_0 \in B(a, \delta_{r,k}),\ a_1 \in B(f(a_0), \delta_{r,k}),\ a_2 \in B(f(a_1), \delta_{r,k}),\ \ldots,$$

tenemos que $d(a_m, f^m(a)) < 1/r$ para todo $m \geq 0$. Por lo tanto, $D = \bigcap_{r=1}^{\infty} Dr$ es un subconjunto G_δ denso de X y f es no sensible en todo punto de D, pues dado $a \in D$ y $\epsilon > 0$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/r_0 < \epsilon$. Como $a \in D_{r_0}$, existe un $k \geq 1$ tal que $a \in W_{r_0,k}$, y, por lo tanto, para cualquier elección de puntos

$$a_0 \in B(a, \delta_{r_0,k}),\ a_1 \in B(f(a_0), \delta_{r_0,k}),\ a_2 \in B(f(a_1), \delta_{r_0,k}),\ \ldots,$$

tenemos que $d(a_m, f^m(a)) < 1/r_0 < \epsilon$ para todo $m \geq 0$.

Resta probar que cada $\mathcal{O}_{r,k}$ es denso en $H(X)$. Fijamos $r \geq 1$, $k \geq 1$, $f \in H(X)$ y $\epsilon > 0$. Sea a un punto límite de la sucesión $(f^j(z_k))_{j \geq 0}$ y tomemos un entorno W de a en X para el cual existe un homeomorfismo

$$\psi : W \to B^n \quad \text{con} \quad \psi(i(X) \cap W^{\circ}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}.$$

Sea $q \geq 0$ el menor entero tal que $f^q(z_k) \in W^{\circ}$. Sea $s \geq 1$ tal que $f^{q+s}(z_k) \in W^{\circ}$. Tenemos dos posibilidades:

Caso 1. $n \geq 2$.

Elegimos un punto $b \in (i(X) \cap W^{\circ}) - \{f^j(z_k) : j \in \mathbb{Z}\}$ tan cerca de $f^q(z_k)$ que tenemos $f^s(b) \in W^{\circ}$, y sea $m \geq 1$ el entero más pequeño tal que $f^m(b) \in W^{\circ}$.

Caso 2. $n = 1$.

Podemos suponer $W = [-1, 1]$. Entonces podemos definir los conjuntos

$$L = \{x \in W : -1 < x < f^q(z_k)\} \quad \text{y} \quad R = \{x \in W : f^q(z_k) < x < 1\}.$$

Si $f^{q+s}(z_k) = f^q(z_k)$, elegimos $b \in R - \{f^j(z_k) : j \in \mathbb{Z}\}$ tan cerca de $f^q(z_k)$ que tenemos $f^s(b)$ y $f^{2s}(b) \in W^\circ$; entonces $f^s(b)$ o $f^{2s}(b) \in R$, pues f es estrictamente monótona.

Si $f^{q+s}(z_k) \neq f^q(z_k)$, entonces o bien $f^{q+s}(z_k) \in L$, o $f^{q+s}(z_k) \in R$. Supongamos que $f^{q+s}(z_k) \in R$. En este caso elegimos $b \in R - \{f^j(z_k) : j \in \mathbb{Z}\}$ de modo que $f^s(b) \in R$. Sea $m \geq 1$ el entero más pequeño tal que $f^m(b) \in R \subset W^\circ$.

Sea $\phi \in H(X)$ tal que

$$\phi(f^m(b)) = b \;\text{ y }\; \phi(x) = x \;\text{ para todo }\; x \in (X - W^\circ) \cup \{f^q(z_k)\}.$$

Si $n = 1$, también asumimos que $\phi(x) = x$ para todo $x \in L$. Ahora definimos $g = \phi \circ f \in H(X)$. Entonces

$$g(x) = f(x) \text{ siempre que } f(x) \in (X - W^\circ) \cup \{f^q(z_k\}.$$

y b resulta un punto periódico de g de período m. Además,

$$g^q(z_k) = f^q(z_k) \in W^\circ \;\text{ y }\; g^j(z_k) = f^j(z_k) \notin W^\circ \;\text{ para }\; 0 \leq j \leq q - 1.$$

Sean Z y V entornos cerrados de b tales que

$$g^q(z_k) \in V^\circ \subset V \subset Z^\circ \subset Z \subset W^\circ$$

y $\psi(Z)$ una bola cerrada contenida en $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$. Si $n = 1$, también podemos asumir que

$$g(b), \ldots, g^{m-1}(b) \notin Z.$$

Como $g(b), \ldots, g^{m-1}(b) \notin Z$, existe un entorno cerrado V' de b tal que

$$V' \subset Z^\circ, \;\; Z, g(V'), \ldots, g^{m-1}(V') \;\text{ son disjuntos dos a dos,}$$

$$g^m(V') \subset V^\circ \;\text{ y }\; \text{diam} g^i(V') < \frac{1}{r} \;\text{ para }\; 1 \leq i \leq m - 1.$$

Ahora sea $\varphi \in H(X)$ tal que

$$\varphi(V) \subset V' \text{ y } \varphi(x) = x \text{ para todo } x \in (X - Z^\circ) \cup \{b\}.$$

Sea $h = g \circ \varphi \in H(X)$. Entonces

$$h^q(z_k) = g^q(z_k) \in V^\circ,$$

$$h^m(V) = h^{m-1}(g(\varphi(V))) \subset g^m(V') \subset V^\circ \quad \text{ y}$$

$$\text{diam} h^i(V) \leq \text{diam} g^i(V') < \frac{1}{r} \;\text{ para todo } 1 \leq i \leq m - 1.$$

Además, si elegimos W suficientemente chico también podemos garantizar que $\mathrm{diam} V < 1/r$. Por lo tanto, $h \in \mathcal{O}_{r,k}$ y $\widetilde{d}(h, f) < \epsilon$.

$\square$

Capítulo 4

No sensibilidad en una variedad cuando f es continua

En este capítulo analizamos la dinámica de funciones en el espacio $C(X)$, donde X es una n-variedad topológica compacta, metrizable, con (o sin) borde y fijamos d una métrica compatible con la topología de X. En la primera sección estudiamos la noción de no sensibilidad. En la segunda sección analizamos el problema de la existencia de puntos periódicos. Finalmente, en la tercera sección consideramos el problema de la existencia de puntos donde las funciones son sensibles. Este capítulo se basa en la referencia [8].

4.1. Sobre no sensibilidad

Antes de desarrollar los resultados principales recordemos las siguientes definiciones.

Definición 4.1.1. Sea X un espacio topológico.

1. Una colección $\mathfrak{S}$ de entornos de un punto $x \in X$ se dice un sistema fundamental de entornos de x cuando, para todo entorno V de x en X, existe un entorno $U \in \mathfrak{S}$ tal que $x \in U \subset V$.

2. Un entorno de un subconjunto S de X es un conjunto V tal que $S \subset V^\circ$.

3. Un sistema fundamental de entornos de un conjunto S es una colección $\mathfrak{S}$ de entornos de S tal que, dado cualquier entorno V de S, existe $U \in \mathfrak{S}$ con $S \subset U \subset V$.

De ahora en adelante fijamos un entero $n \geq 1$, X una n-variedad topológica compacta, metrizable, con (o sin) borde y una métrica d compatible con la topología de X. Denotamos con $\mathcal{G}_X$ el conjunto de todos los subconjuntos cerrados A de X tales que $A^\circ \neq \emptyset$ y A posee un sistema fundamental de entornos que son homeomorfos a B^n. Observamos que cada punto $a \in X$ posee un sistema fundamental de entornos que pertenecen a $\mathcal{G}_X$.

A continuación enunciamos un teorema de extensión que utilizaremos varias veces en este capítulo.

Teorema 4.1.2. *Sean Y un espacio compacto de X, A es un subespacio cerrado de Y y Z un espacio topológico homeomorfo a B^n. Entonces toda función continua $\phi : A \to Z$ posee una extensión continua $\widetilde{\phi} : Y \to Z$.*

Demostración. Sea el homeomorfismo $f : Z \to [0,1]^n$, entonces la función $\varphi : A \to [0,1]^n$ tal que $\varphi(a) = (f \circ \phi)(a) = (\varphi_1(a), \varphi_2(a), \ldots, \varphi_n(a))$ es continua. Para cada $1 \leq i \leq n$, $\varphi_i : A \to [0,1]$ es continua, entonces, por el Teorema de extensión de Tietze, existe una extensión continua $\widetilde{\varphi}_i : Y \to [0,1]$. Por lo tanto, $\widetilde{\varphi} : Y \to [0,1]^n$ tal que $\widetilde{\varphi}(a) = (\widetilde{\varphi}_1(a), \widetilde{\varphi}_2(a), \ldots, \widetilde{\varphi}_n(a))$ es una extensión continua de φ, y entonces $\widetilde{\phi} = f^{-1} \circ \widetilde{\varphi} : Y \to Z$ resulta una extensión continua de ϕ. $\square$

Teorema 4.1.3. *Supongamos que para cada entero $r \geq 1$ tenemos una colección finita $\mathcal{C}_r$ de conjuntos de $\mathcal{G}_X$, disjuntos dos a dos, con diámetros menores que $1/r$. Sea $Q_r = \bigcup_{A \in \mathcal{C}_r} A$ $(r \geq 1)$. Entonces para casi todas las funciones $f \in C(X)$, existe una sucesión $(t_k)_{k \geq 1}$ de enteros positivos tal que $t_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ y f es no sensible en todo punto del conjunto*

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=r}^{\infty} Q_{t_k}.$$

Demostración. Dada una coleccion $\mathcal{C}$ de conjuntos, por un $\mathcal{C}$-árbol nos referimos a un par (T, φ), donde T es un árbol finito con raíz y φ es una función biyectiva entre el conjunto $V(T)$ de todos los vértices de T y una colección de conjuntos en $\mathcal{C}$ disjuntos dos a dos. Si (T, φ) es un $\mathcal{C}$-árbol, por lo general, omitimos la función φ y decimos solamente el $\mathcal{C}$-árbol T; además, no hacemos distinción entre un vértice de T y su correspondiente conjunto de $\mathcal{C}$. Si T es un $\mathcal{C}$-árbol y v_1, $v_2 \in V(T)$, la notación $v_1 > v_2$ o $v_2 < v_1$ indica que v_1 y v_2 son adyacentes y que el único camino que conecta v_2 con la raíz de T pasa por v_1. Se dice que dos $\mathcal{C}$-árboles T_1 y T_2 son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$ siempre que $A \in V(T_1)$ y $B \in V(T_2)$.

Para cada entero $k \geq 1$, sea $\mathcal{O}_k$ el conjunto de todas las funciones $f \in C(X)$ tales que, para algún entero $t \geq k$, existen finitos $\mathcal{G}_X$-árboles $T_1, \ldots, T_s$, disjuntos dos a dos, de modo que:

(I) $\mathrm{diam} A < 1/k$ para todo $A \in V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)$.

(II) $\mathcal{C}_t \subset V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)$.

(III) Si $A, B \in V(T_i)$ y $A > B$, entonces $f(B) \subset A^\circ$.

(IV) Si R_i es la raíz de T_i, entonces existe un $S_i \in V(T_i)$ tal que $f(R_i) \subset S_i^\circ$.

Veamos que cada $\mathcal{O}_k$ es abierto en $C(X)$. Sea $f \in O_k$. Para cada árbol T_i en $\mathcal{O}_k$, sean

$$\alpha_i = \text{mín}\{d(f(B), X - A^\circ) : B \in V(T_i), B < A \text{ y } f(B) \subset A^\circ\},\ \alpha_i > 0,$$

$$\beta_i = \text{mín}\{d(f(R_i), X - (S_i)^\circ) : R_i \text{ es la raíz de } T_i \text{ y } f(R_i) \subset (S_i)^\circ\},\ \beta_i > 0,$$

y

$$r = \text{mín}\{\alpha_i, \beta_i : 1 \leq i \leq s\},\ r > 0.$$

Veamos que si $g \in B(f, r)$, entonces $g \in O_k$. Sean $A, B \in V(T_i)$ con $B < A$ y supongamos que existe $b \in B$ tal que $g(b) \notin A^\circ$, entonces $r \leq \alpha_i \leq d(f(b), g(b)) < r$, lo cual es un absurdo. Sea R_i es la raíz de T_i y supongamos que existe $x \in R_i$ tal que $g(x) \notin (S_i)^\circ$, entonces $r \leq \beta_i \leq d(f(x), g(x)) < r$, lo cual es un absurdo.

Sea $f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k$. Para cada $k \geq 1$, existen un número entero $t_k \geq k$ y $\mathcal{G}_X$-árboles $T_{k,1}, \ldots, T_{k,s_k}$, disjuntos dos a dos, de modo que (I) hasta (IV) se verifican con t_k en lugar de t y $T_{k,1}, \ldots, T_{k,s_k}$ en lugar de $T_1, \ldots, T_s$. Para cada $k \geq 1$, sea $0 < \delta_k < 1/k$ tal que

$$f(N_{\delta_k}(B)) \subset A^\circ$$

siempre que $A, B \in V(T_{k,i})$, $A > B$ $(1 \leq i \leq s_k)$ y tal que

$$f(N_{\delta_k}(R_{k,i})) \subset (S_{k,i})^\circ,$$

donde $R_{k,i}$ y $S_{k,i}$ están relacionados con $T_{k,i}$ $(1 \leq i \leq s_k)$ como R_i y S_i están relacionados con T_i en la propiedad (IV). Entonces si $a \in \bigcup\{A : A \in V(T_{k,i})$ para algún $1 \leq i \leq s_k\}$ y si elegimos

$$a_0 \in B(a, \delta_k),\ a_1 \in B(f(a_0), \delta_k),\ a_2 \in B(f(a_1), \delta_k) \ldots,$$

entonces

$$d(a_m, f^m(a)) < \delta_k + 1/k < 2/k \ \text{ para todo } m \geq 0.$$

Dados $a \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=r}^{\infty} Q_{t_k}$ y $\epsilon > 0$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{r_0} < \epsilon$ y $a \in \bigcup_{k=r_0}^{\infty} Q_{t_k}$. Entonces existe $k_0 \geq r_0$ tal que $a \in Q_{t_{k_0}}$, y por lo tanto existe existe $\delta_{k_0} > 0$ tal que para cualquier elección de puntos $a_0 \in B(a, \delta_{k_0})$, $a_1 \in B(f(a_0), \delta_{k_0})$, $a_2 \in B(f(a_1), \delta_{k_0})$, $a_3 \in B(f(a_2), \delta_{k_0})$, ..., entonces

$$d(a_m, f^m(a)) < \tfrac{2}{k_0} \leq \tfrac{2}{r_0} < \epsilon \text{ para todo } m \geq 0.$$

Esto implica que f es no sensible en todo punto de $\bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=r}^{\infty} Q_{t_k}$.

Veamos que cada $\mathcal{O}_k$ es denso en $C(X)$. Fijamos $k \geq 1$, $f \in C(X)$ y $\epsilon > 0$. Sea $0 < \delta < \text{mín}\{1/k, \epsilon/2\}$ tal que

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon/2 \text{ siempre que } d(x,y) < \delta \ \ (x, y \in X).$$

Elegimos un $t \in \mathbb{N}$ tal que $1/t < \delta$. Construiremos $\mathcal{G}_X$-árboles $T_1, \ldots, T_s$, disjuntos dos a dos, que satisfagan las siguientes propiedades:

(a) diam A $< \delta$ para todo $A \in V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)$.

(b) $\mathcal{C}_t \subset V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)$.

(c) Si $A, B \in V(T_i)$ y $A > B$, entonces $f(B) \cap A \neq \emptyset$.

(d) Si R_i es la raíz de T_i, entonces existe un $S_i \in V(T_i)$ tal que por lo menos se cumple una de las siguientes propiedades:

  (1) $f(R_i) \cap S_i \neq \emptyset$.

  (2) Existe un $C_i \subset X$ homeomorfo a B^n con diam$C_i < \epsilon/2$, $f(R_i) \subset C_i^\circ$ y $S_i \subset C_i^\circ$.

A fin de explicar cómo construir los $\mathcal{G}_X$-árboles $T_1, \ldots, T_s$ necesitaremos una variable $\mathcal{B}$, la cual indicará el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{G}_X$ que han sido utilizados en la construcción hasta el paso actual (iniciamos con $\mathcal{B} = \emptyset$). Comenzamos eligiendo un conjunto $A_1 \in \mathcal{C}_t$ y lo colocamos como un vértice de T_1 (notemos que ahora $\mathcal{B} = \{A_1\}$). Supongamos que en un determinado momento T_1 consiste de los vértices $A_1 < A_2 < \cdots < A_j$. Examinemos el conjunto $f(A_j)$. Aquí hay tres posibilidades:

Caso 1. $f(A_j) \cap A \neq \emptyset$ para algún $A \in \mathcal{B}$.

En este caso detenemos la construcción de T_1 (por el momento). Entonces A_j es la raíz R_1 de T_1 y S_1 puede ser cualquier conjunto de $\mathcal{B}$ tal que $f(R_1) \cap S_1 \neq \emptyset$

Caso 2. $f(A_j) \cap A = \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{B}$ y $f(A_j) \cap A \neq \emptyset$ para algún $A \in \mathcal{C}_t - \mathcal{B}$.

Sea $A_{j+1} \in \mathcal{C}_t - \mathcal{B}$ tal que $f(A_j) \cap A_{j+1} \neq \emptyset$. Ponemos A_{j+1} como un vértice de T_1 adyacente a A_j y que satisface $A_j < A_{j+1}$.

Caso 3. $f(A_j) \cap A = \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{C}_t \cup \mathcal{B}$.

Elegimos un $A_{j+1} \in \mathcal{G}_X$ disjunto con cada uno de los elementos de $\mathcal{C}_t \cup \mathcal{B}$ tal que el diam$A_{j+1} < \delta/j$ y $f(A_j) \cap A_{j+1} \neq \emptyset$. Colocamos A_{j+1} como un vértice de T_1 adyacente a A_j y que satisface $A_j < A_{j+1}$.

Si el *Caso* 1 nunca sucede, la construcción puede continuar indefinidamente. En este caso detendremos la construcción de T_1 en cuanto obtengamos un A_m para el cual existe un conjunto $C \subset X$ homeomorfo a B^n con diam $C < \epsilon/2$, $f(A_m) \subset C^\circ$ y $A_k \subset C^\circ$ para algún $1 \leq k \leq m$ (entonces A_m será la raíz R_1 de T_1 y S_1 puede ser A_k). Afirmamos que obtendremos tal A_m en un número finito de pasos. Supongamos que no y consideremos la cadena infinita $A_1 < A_2 < A_3 < \cdots$ Para cada $j \geq 1$, elegimos un $x_j \in A_j$. Sea $a \in X$ un punto límite de la sucesión $(x_j)_{j\geq 1}$ y sea C un entorno de a homeomorfo a B^n con diámetro menor que $\epsilon/2$. Como $\mathcal{C}_t$ es finito, debe existir un $p \geq 1$ tal que $A_j \notin \mathcal{C}_t$ para todo $j \geq p$, y entonces

$$\text{diam} A_j < \frac{\delta}{j-1} \quad \text{para todo } j \geq p.$$

Por tanto, podemos elegir un $k \geq 1$ suficientemente grande de modo que $A_k \subset C^\circ$. En efecto, como $a \in C^\circ$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset C$. Sea $x_k \in B(a, r/3)$ con k tal que $\delta/(k-1) < r/3$. Veamos que $A_k \subset C^\circ$. Sea $x \in A_k$ y tomemos $B(x, r/3)$. Entonces dado $y \in B(x, r/3)$ tenemos que

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,x_k) + d(x_k,a) < \frac{r}{3} + \frac{\delta}{k-1} + \frac{r}{3} < r.$$

Por lo tanto, $B(x, r/3) \subset C$. Como esto vale para cualquier $x \in A_k$, entonces $A_k \subset C^\circ$. Ahora, como $f(A_j) \cap A_{j+1} \neq \emptyset$ para todo j, también podemos elegir $m \geq k$ suficientemente grande de modo que $f(A_m) \subset C^\circ$. Por cierto, dado $r/4 > 0$ existe $\widetilde{\delta} > 0$ tal que si $d(x,y) < \widetilde{\delta}$, entonces $d(f(x), f(y)) < r/4$. Sea $x_{m+1} \in B(a, r/4)$ de modo que $m \geq k$, $\delta/(m-1) < \widetilde{\delta}$, $\delta/m < r/4$. Veamos que $f(A_m) \subset C^\circ$. Sea $x \in f(A_m)$ y tomemos $B(x, r/4)$. Si $y \in B(x, r/4)$ e $\widetilde{y} \in f(A_m) \cap A_{m+1}$ tenemos que

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,\widetilde{y}) + d(\widetilde{y}, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, a) < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{\delta}{m} + \frac{r}{4} < r.$$

Por lo tanto, $B(x, r/4) \subset C$. Como esto vale para cualquier $x \in f(A_m)$, entonces $f(A_m) \subset C^\circ$. Esto contradice nuestra suposición y prueba nuestra afirmación.

Supongamos que ya hemos construido $T_1, \ldots, T_{k-1}$. Si $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{B}$, hemos terminado. Si este no es el caso, elegimos un $A'_1 \in \mathcal{C}_t - \mathcal{B}$ y lo colocamos como un vértice de T_i. Si en un determinado momento T_i está formado por los vértices $A'_1 < A'_2 < \ldots < A'_j$, entonces examinamos $f(A'_j)$. Los *Casos* 2 y 3 se tratan como antes. Sin embargo, el *Caso* 1 debe dividirse en dos:

Caso $1.a:$ $f(A'_j) \cap A \neq \emptyset$ para algún $A \in V(T_i)$.

Detenemos, por el momento, la construcción de T_i. Así pues, A'_j es la raíz R_i de T_i y S_i puede ser cualquier conjunto de $V(T_i)$ tal que $f(R_i) \cap S_i \neq \emptyset$.

Caso $1.b:$ $f(A'_j) \cap A = \emptyset$ para todo $A \in V(T_i)$ y $f(A'_j) \cap A \neq \emptyset$ para algún $A \in \mathcal{B} - V(T_i)$.

Sea $\widetilde{A} \in \mathcal{B} - V(T_i)$ tal que $f(A'_j) \cap \widetilde{A} \neq \emptyset$. Entonces $\widetilde{A}$ es un vértice de un árbol ya construido; digamos $\widetilde{A} \in V(T_{i_0})$, donde $1 \leq i_0 < i$. En este caso no tendremos, por el momento, ningún árbol T_i. Agrandamos el árbol T_{i_0} colocando la cadena $A'_1 < A'_2 < \ldots < A'_j$ como una nueva rama de este que satisface la relación $A'_j < \widetilde{A}$.

Si los *Casos* 1.a y 1.b nunca suceden, detendremos la construcción de T_i cuando obtengamos un A'_m para el cual existe un $C' \subset X$ homeomorfo a B^n con diam$C' < \epsilon/2$, $f(A'_m) \subset (C')^\circ$ y $A'_k \subset (C')^\circ$ para algún $1 \leq k \leq m$ (entonces A'_m será la raíz R_i de T_i y S_i puede ser A'_k).

Los $\mathcal{G}_X$-árboles $T_1, \ldots, T_s$ así construidos poseen todas las propiedades deseadas.

Sea $I = \{i \in \{1, \ldots, s\} : f(R_i) \cap S_i \neq \emptyset\}$ y $J = \{1, \ldots, s\} - I$.

Para cada $A \in V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)$, elegimos un entorno V_A de A homeomorfo a B^n con diámetro menor que δ. Eligiendo los entornos V_A sufientemente pequeños, también podemos asumir que la familia $\{V_A\}_{A \in V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)}$ es disjunta dos a dos y que

$$f(V_{R_i}) \subset C_i^\circ \quad \text{para todo } i \in J.$$

Para cada $B \in V(T_i) - \{R_i\}$ $(1 \leq i \leq s)$, sea A_B el único elemento de $V(T_i)$ tal que $B < A_B$, elegimos un $a_B \in f(B) \cap A_B$ y sea $b_B \in B$ tal que $f(b_B) = a_B$. Sea $\varphi_B : V_B \to V_B$ una función continua tal que

$$\varphi_B(B) = \{b_B\} \;\text{ y }\; \varphi_B(x) = x \;\text{ para todo }\; x \in \partial(V_B),$$

y definimos

$$g(x) = f(\varphi_B(x)) \text{ para todo } x \in V_B.$$

Para cada $i \in I$, elegimos un $a_i \in f(R_i) \cap S_i$ y sea $b_i \in R_i$ tal que $f(b_i) = a_i$.

Sea $\varphi_i : V_{R_i} \to V_{R_i}$ una función continua tal que

$$\varphi_i(R_i) = \{b_i\} \;\text{ y }\; \varphi_i(x) = x \text{ para todo } x \in \partial(V_{R_i}),$$

y definimos

$$g(x) = f(\varphi_i(x)) \text{ para todo } x \in V_{R_i}.$$

Para cada $i \in J$, elegimos un $a_i \in S_i$, definimos

$$g(x) = a_i \text{ para } x \in R_i \;\text{ y }\; g(x) = f(x) \text{ para } x \in \partial(V_{R_i}),$$

y extendemos continuamente g de V_{R_i} en C_i. Finalmente, ponemos

$$g(x) = f(x) \text{ para todo } x \in X - \bigcup\{V_A : A \in V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)\}\}.$$

Entonces

$$g \in C(X),\ \ \widetilde{d}(f,g) < \epsilon/2$$
$$g(B) = \{a_B\} \subset A_B \ \text{ para todo } B \in V(T_i) - \{R_i\} \ \text{ y}$$
$$g(R_i) = \{a_i\} \subset S_i \ (1 \le i \le s).$$

Ahora sea $\psi \in C(X)$ tal que $\widetilde{d}(\psi, id_X) < \epsilon/2$, donde id_X es la función identidad de X, $\psi(a_B) \in (A_B)^\circ$ para todo $B \in V(T_i) - \{R_i\}$ y $\psi(a_i) \in S_i^\circ$ $(1 \le i \le s)$. En efecto, podemos definir ψ de la siguiente forma: para cada $B \in V(T_i) - \{R_i\}$ y $B < A_B$ elegimos $a'_B \in (A_B)^\circ$. Sea el homeomorfismo $f_{A_B} : V_{A_B} \to B^n$. Entonces existe una función $\varphi_{A_B} \in H(B^n)$ tal que

$$\varphi_{A_B}(f_{A_B}(a_B)) = f_{A_B}(a'_B) \ \text{ y } \ \varphi_{A_B}(y) = y \ \text{ para todo } y \in \partial(B^n).$$

Luego tomamos $\psi : V_{A_B} \to V_{A_B}$ como $\psi(x) = (f_{A_B}^{-1} \circ \varphi_{A_B} \circ f_{A_B})(x)$. Entonces $\psi(a_B) = a'_B \in (A_B)^\circ$, $\psi(x) = x$ para todo $x \in \partial(V_{A_B})$ y $d(\psi(x), x) \le \operatorname{diam} V_{A_B} < \delta < \epsilon/2$. Para el caso $B = R_i$ repetimos la misma idea cambiando a_B por a_i y a'_B por $a'_i \in (S_i)^\circ$. Sea K la unión de todos los conjuntos donde ya hemos definido ψ. Finalmente, definimos $\psi(x) = x$ para todo $x \in X - K$, y por consiguiente ψ tiene las propiedades deseadas.

Definimos $h = \psi \circ g$. Entonces $h \in C(X)$ y $\widetilde{d}(h,g) < \epsilon/2$. Así $\widetilde{d}(h,f) < \epsilon$ y las propiedades (iii) y (iv) se cumplen con h en lugar de f, y en consecuencia $h \in O_k$. □

El siguiente corolario generaliza el resultado del capítulo 4.

Corolario 4.1.4. *Casi todas las funciones en $C(X)$ son no sensibles en casi todo punto de X.*

Demostración. Sea $z_1, z_2, z_3, \ldots$ una sucesión de elementos diferentes de X la cual es densa en X. Para cada $r \ge 1$, sean $A_{r,1}, \ldots A_{r,r}$ elementos de $\mathcal{G}_X$, disjuntos dos a dos, con $\operatorname{diam} A_{r,i} < 1/r$ y $z_i \in (A_{r,i})^\circ$ para cada $1 \le i \le r$. Consideramos los conjuntos $\mathcal{C}_r = \{A_{r,1}, \ldots, A_{r,r}\}$ para cada $r \ge 1$ y $Q_r = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{C}_r} A$ $(r \ge 1)$. Entonces, por el Teorema 4.1.3, para casi todas las funciones $f \in C(X)$, existe una sucesión $(t_k)_{k \ge 1}$ de enteros positivos tal que $t_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ y f es no sensible en todo punto del conjunto

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=r}^{\infty} Q_{t_k}.$$

Sea el conjunto abierto $\widetilde{Q_{t_k}} = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{C}_{t_k}} A^\circ$. Entonces, $\bigcup\limits_{k=r}^{\infty} \widetilde{Q_{t_k}}$ es abierto. Además, $(z_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \bigcup\limits_{k=r}^{\infty} \widetilde{Q_{t_k}}$, pues para cada $i \le t_r$, $z_i \in \widetilde{Q_{t_r}}$ y para cada $i > t_r$, existe un

$k_0 > r$ tal que $z_i \in \widetilde{Q_{t_{k_0}}}$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{k=r}^{\infty} \widetilde{Q_{t_k}}$ es denso. Entonces, $\bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=r}^{\infty} \widetilde{Q_{t_k}}$ es un subconjunto G_δ y denso y f es no sensible en cada uno de sus puntos, pues $\bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=r}^{\infty} \widetilde{Q_{t_k}} \subset \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=r}^{\infty} Q_{t_k}$. $\square$

El siguiente corolario generaliza el Teorema 2.1.1 del capítulo 3.

Corolario 4.1.5. *Si μ es una medida de Borel positiva y finita sobre X, entonces casi todas las funciones en $C(X)$ son no sensibles en casi todo punto de X con respecto a μ.*

Antes de realizar la demostración veamos el siguiente Lema.

Lema 4.1.6. *Supongamos que μ es una medida de Borel finita y positiva sobre X. Para todo $\delta > 0$, existen conjuntos $B_1, \ldots, B_s \in \mathcal{G}_X$, disjuntos dos a dos, tales que $\mu\left(X - (B_1 \cup \ldots \cup B_s)\right) < \delta$ y $diam B_i < \delta$ para todo $1 \leq i \leq s$.*

Demostración. Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^n :\| x \|< 1\}$. Por una caja en $\mathbb{R}^n$ entendemos un conjunto de la forma

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \leq x_i < \alpha_i + \epsilon \ \text{ para } 1 \leq i \leq n\} \ ,$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Una caja cerrada en $\mathbb{R}^n$ es la clausura de una caja en $\mathbb{R}^n$.

Como X es compacto, existen conjuntos $V_1, \ldots, V_l, \ldots, V_t \subset X$ tales que:

(1) Para $1 \leq j \leq l$, existe un homeomorfismo $\psi_j : V_j \to B^n$ con $\psi_j(V_j^\circ) = D$.

(2) Para $l < j \leq t$, existe un homeomorfismo $\psi_j : V_j \to B^n \cap H^n$ con $\psi_j(V_j^\circ) = D \cap H^n$.

(3) Los conjuntos $\psi_1^{-1}(\frac{1}{2}B^n), \ldots, \psi_l^{-1}(\frac{1}{2}B^n), \psi_{l+1}^{-1}(\frac{1}{2}B^n \cap H^n), \ldots, \psi_t^{-1}(\frac{1}{2}B^n \cap H^n)$ forman un cubrimiento de X.

Para cada $1 \leq j \leq l$ (respectivamente $l < j \leq t$), elegimos $r_j \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tal que el borde del conjunto $A_j = \psi_j^{-1}(r_j B^n)$ (respectivamente $A_j = \psi_j^{-1}(r_j B^n \cap H^n)$) tiene μ-medida cero. En efecto, consideremos j fijo y nombremos I al intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Para cada $r \in I$, llamemos $B_r = \partial(\psi_j^{-1}(rB^n))$. Sea

$$s = \sup\left\{\sum_{r \in F} \mu(B_r) : F \ es \ finito \ y \ F \subset I\right\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos fijar un conjunto finito F_n tal que

$$\sum_{r \in F_n} \mu(B_r) > s - \frac{1}{n}.$$

Además, se pueden elegir los conjuntos de manera tal que F_n sea una sucesión creciente. Llamemos $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y supongamos que $R \in I$ no pertenece a F. Si $\mu(B_R) = c > 0$, podemos elegir n tal que $\frac{1}{n} < \frac{c}{2}$ y, entonces,

$$\sum_{r\in F_n\cup R} \mu(B_r) > s,$$

lo cual es un absurdo.

Fijemos $\eta > 0$. Expresamos $\psi_1(A_1^\circ)$ como una unión numerable de cajas disjuntas $C_{1,i}$ $(i \in \mathbb{N})$ de diámetro menor que η. Pongamos $B_{1,i} = \psi_1^{-1}(C_{1,i})$ $(i \in \mathbb{N})$, entonces $A_1^\circ = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{1,i}$. Ahora escribimos $\psi_2(A_2^\circ - A_1)$ como una unión numerable de cajas disjuntas $C_{2,i}$ $(i \in \mathbb{N})$ de diámetro menor que η. Pongamos $B_{2,i} = \psi_2^{-1}(C_{2,i})$ $(i \in \mathbb{N})$, entonces $A_2^\circ - A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{2,i}$. Consideremos $\psi_3(A_3^\circ - (A_1 \cup A_2))$ y continuamos este proceso. Como cada ψ_j es un homeomorfismo uniforme, eligiendo η suficientemente pequeño tenemos que cada $B_{j,i}$ tiene diámetro menor que δ. Puesto que $X - \bigcup_{j=1}^{t}\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{j,i} \subset \partial(A_1) \cup \ldots \cup \partial(A_t)$, podemos elegir un número finito de conjuntos $B_{j_1,i_1}, \ldots, B_{j_s,i_s}$ de los $B_{j,i}$ de modo que

$$\mu(X - (B_{j_1,i_1} \cup \ldots \cup B_{j_s,i_s})) < \delta.$$

Como cada $C_{j,i}$ es la unión de una sucesión creciente de cajas cerradas, para cada $1 \le k \le s$ podemos elegir una caja cerrada $C_k \subset C_{j_k,i_k}$ de modo que

$$\mu(X - (\psi_{j_1}^{-1}(C_1) \cup \ldots \cup \psi_{j_s}^{-1}(C_s))) < \delta.$$

Por tanto, los conjuntos $B_1 = \psi_{j_i}^{-1}(C_i), \ldots, B_s = \psi_{j_s}^{-1}(C_s)$ tienen todas las propiedades deseadas. □

Demostración del Corolario 4.1.5. Por el Lema 4.1.6, para cada entero $r \ge 1$, existe una colección finita $\mathcal{C}_r$ de conjuntos de $\mathcal{G}_X$, disjuntos dos a dos, tal que $\mu\left(X - \bigcup_{A\in\mathcal{C}_r} A\right) < 1/r$ y diam$A < 1/r$ para todo $A \in \mathcal{C}_r$. Sea $Q_r = \bigcup_{A\in\mathcal{C}_r} A$, entonces, por el Teorema 4.1.3, para casi toda $f \in C(X)$, existe una sucesión $(t_k)_{k\ge1}$ de enteros positivos tal que $t_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ y f es no sensible en todo punto del conjunto $\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=r}^{\infty} Q_{t_k}$. Entonces el conjunto de los puntos donde f es sensible está incluido en $X - \bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=r}^{\infty} Q_{t_k}$ y

$$\mu\left(X - \bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=r}^{\infty} Q_{t_k}\right) = \mu\left(\bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{k=r}^{\infty}(X - Q_{t_k})\right) = \lim_{r\to\infty}\mu\left(\bigcap_{k=r}^{\infty}(X - Q_{t_k})\right) \leq$$
$$\lim_{r\to\infty}\mu(X - Q_{t_r}) < \lim_{r\to\infty}\frac{1}{t_r} = 0.$$

Por lo tanto, f es no sensible en casi todo punto de X con respecto a μ. □

4.2. Algunos resultados sobre puntos periódicos y puntos no errantes

Recordemos que $i(X)$ denota el interior de la variedad X. De ahora en adelante $\mathcal{B}_X$ denota el conjunto de todos los subconjuntos cerrados de $i(X)$ que son homeomorfos a B^n. Observamos que cada punto $x \in i(X)$ posee un sistema fundamental de entornos que pertenecen a $\mathcal{B}_X$.

4.2.1. Sobre puntos periódicos

Lema 4.2.1. *Supongamos que $f \in C(X)$, $p \in X$ es un punto periódico de f con período k y m es un múltiplo de k. Entonces, para todo $\alpha > 0$, existe una función $g \in C(X)$ tal que:*

(I) $\widetilde{d}(g,f) < \alpha$.

(II) $g(x) = f(x)$ *si* $x \in X - \left[B^*(p,\alpha) \cup B^*(f(p),\alpha) \cup \ldots \cup B^*(f^{k-1}(p),\alpha)\right]$.

(III) *g tiene un punto periódico de período m en $i(X) \cap B^*(p,\alpha)$.*

Demostración. Elegimos entornos $V_0, V_1, \ldots, V_k$ de $p, f(p), \ldots, f^k(p)$, respectivamente, homeomorfos a B^n, de modo que $V_0 \subset V_k, V_1, \ldots, V_k$ son disjuntos dos a dos, $V_i \subset B(f^i(p), \alpha/2)$ para $1 \leq i \leq k$ y $f(V_i) \subset V_{i+1}$ para $0 \leq i \leq k-1$. Elegimos diferentes puntos $y_0, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m \in i(X)$ de modo que

$$y_i, y_{i+k}, y_{i+2k}\ldots, y_{i+(m-k)} \in (V_i)^\circ - \{f^i(p)\} \quad (0 \leq i \leq k-1),$$

$$z_i, z_{i+k}, z_{i+2k}\ldots, z_{i+(m-k)} \in (V_i)^\circ - \{f^i(p)\} \quad (1 \leq i \leq k-1) \text{ y}$$

$$z_k, z_{2k}, \ldots, z_m \in (V_0)^\circ - \{p\}.$$

Para cada $0 \leq i \leq k-1$, definimos

$$h(y_i) = z_{i+1},\ \ h(y_{i+k}) = z_{i+k+1},\ \ldots,\ \ h(y_{i+(m-k)}) = z_{i+(m-k)+1}$$

y $h(x) = f(x)$ si $x \in \partial(V_i) \cup \{f^i(p)\}$, y luego extendemos h continuamente a una función de V_i en V_{i+1}. Definimos $h(x) = f(x)$ para $x \in X - (V_0 \cup \ldots \cup V_{k-1})$. Entonces $h \in C(X)$, $h(x) = f(x)$ si $x \in [X - (V_0 \cup \ldots \cup V_{k-1})] \cup Orb(f,p)$, $h(V_i) \subset V_{i+1}$ para $0 \leq i \leq k-1$ y $h(y_j) = z_{j+1}$ para $0 \leq j \leq m-1$. Ahora sea $\psi \in C(X)$ tal que $\psi(z_m) = y_0$, $\psi(z_j) = y_j$ para $1 \leq j \leq m-1$, $\psi(V_i) \subset V_i$ para $0 \leq i \leq k-1$ y $\psi(x) = x$ si $x \in [X - (V_0 \cup \ldots \cup V_{k-1})] \cup Orb(f,p)$. Sea $g = h \circ \psi \in C(X)$. Entonces $g(V_i) \subset V_{i+1}$ $(0 \leq i \leq k-1)$ y $g(x) = f(x)$ si $x \in [X - (V_0 \cup \ldots \cup V_{k-1})] \cup Orb(f,p)$. Por lo tanto, se verifican (I) y (II). Además, z_m es un punto periódico de g con período m y $z_m \in i(X) \cap B^*(p,\alpha)$. □

Teorema 4.2.2. *Para casi toda función $f \in C(X)$, el conjunto de todos los puntos periódicos de f es no vacío y se verifica la siguiente propiedad:*

(P) *Para cada entero $m \geq 1$, cada $x \in F_{f^m}$ y cada entorno N_x de x en X, existe un conjunto $V \in \mathcal{B}_X$ tal que $V \subset N_x - \{x\}$, los conjuntos $V, f(V), \ldots, f^{m-1}(V)$ son disjuntos dos a dos y $f^m(V) \subset V^\circ$.*

Demostración. Sea $\mathcal{O}$ el conjunto de todas las funciones $f \in C(X)$ para las cuales existe un conjunto $V \in \mathcal{B}_X$ y un entero $s \geq 1$ tales que $f^s(V) \subset V^\circ$. Para cada entero $m \geq 1$ y cada entero $k \geq 1$, sea $\mathcal{O}_{m,k}$ el conjunto de todas las funciones $f \in C(X)$ tales que o bien $F_{f^m} = \emptyset$, o bien se cumple la siguiente propiedad: existe una cantidad finita de conjuntos $V_1, \ldots, V_r \in \mathcal{B}_X$, disjuntos dos a dos, tales que

$$V_j, f(V_j), \ldots, f^{m-1}(V_j) \text{ son disjuntos dos a dos } (1 \leq j \leq r),$$

$$f^m(V_j) \subset (V_j)^\circ \ (1 \leq j \leq r) \ \text{ y}$$

cada $x \in F_{f^m}$ tiene un entorno con diámetro menor que $1/k$ que contiene por lo menos dos V_j diferentes.

Veamos que $\mathcal{O}$ es abierto. Sea $f \in \mathcal{O}$. Por definición de $\mathcal{O}$, existe un conjunto $V \in \mathcal{B}_X$ y un entero $s \geq 1$ tales que $f^s(V) \subset V^\circ$. Como $f^s(V)$ es compacto, existe $\epsilon > 0$, tal que $N_\epsilon(f^s(V)) \subset V^\circ$. Para dicho ϵ existe un $\delta > 0$ tal que si $\widetilde{d}(g,f) < \delta$, entonces $\widetilde{d}(g^s, f^s) < \epsilon$ (por la Proposición 1.3.4). De este modo, si $g \in B(f,\delta)$, entonces, para todo $x \in V$, $g^s(x) \in B(f^s(x),\epsilon) \subset V^\circ$. Entonces $B(f,\delta) \subset \mathcal{O}$, y por lo tanto $\mathcal{O}$ es abierto.

Veamos que cada $\mathcal{O}_{m,k}$ es abierto. Sea $f \in \mathcal{O}_{m,k}$. Si $F_{f^m} = \emptyset$, entonces, porque X es compacto, existe $\nu > 0$ tal que $d(x, f^m(x)) \geq \nu$ para todo $x \in X$. Para dicho ν existe $\delta > 0$ tal que si $\widetilde{d}(g,f) < \delta$, entonces $\widetilde{d}(g^m, f^m) < \nu$ (por la Proposición 1.3.4). Si tomamos $g \in B(f,\delta)$, vale que $g^m(x) \neq x$ para todo $x \in X$. Supongamos que no, es decir, existe un $x \in X$ tal que $g^m(x) = x$. Entonces

$$\nu \leq d(x, f^m(x)) \leq d(x, g^m(x)) + d(g^m(x), f^m(x)) < \nu,$$

lo cual es un absurdo. Entonces $B(f,\delta) \subset \mathcal{O}_{m,k}$, y por lo tanto $\mathcal{O}_{m,k}$ es abierto.

Ahora sea $F_{f^m} \neq \emptyset$. Por definición de $\mathcal{O}_{m,k}$, existe una cantidad finita de conjuntos $V_1, \ldots, V_r \in \mathcal{B}_X$, disjuntos dos a dos, tales que $V_j, f(V_j), \ldots, f^{m-1}(V_j)$ son disjuntos dos a dos $(1 \leq j \leq r)$. Sea

$$a = \text{mín}\{d(f^i(V_j), f^l(V_j)) : 0 \leq i, l \leq m-1, 1 \leq j \leq r\}, a > 0.$$

Dado $a/4 > 0$ existe un $\delta_i > 0$ tal que si $\widetilde{d}(g,f) < \delta_i$, entonces $\widetilde{d}(g^i, f^i) < a/4$ para cada $0 \leq i \leq m-1$ (por la Proposición 1.3.4). Llamamos

$$\delta = \text{mín}\{\delta_i : 0 \leq i \leq m-1\}, \delta > 0.$$

Por definición del conjunto $\mathcal{O}_{m,k}$, $f^m(V_j) \subset (V_j)^\circ \quad (1 \leq j \leq r)$. Entonces, por compacidad de $f^m(V_j)$, existe $\epsilon_j > 0$ tal que $N_{\epsilon_j}(f^m(V_j)) \subset (V_j)^\circ$. Sea $0 < \epsilon = \text{mín}\{\epsilon_j : 1 \leq j \leq r\}$, entonces existe $\delta' > 0$ tal que si $d(g,f) < \delta'$, entonces $d(g^m, f^m) < \epsilon$ (por la Proposición 1.3.4). Además, cada $x \in F_{f^m}$ tiene un entorno U_x con diámetro menor que $1/k$ que contiene por lo menos dos V_j diferentes. Sea $\widetilde{U_x}$ un conjunto abierto tal que $x \in \widetilde{U_x} \subset U_x$. Por la compacidad de $X - \bigcup_{x \in F_{f^m}} \widetilde{U_x}$, existe un $\alpha > 0$ tal que

$$d(y, f^m(y)) \geq \alpha \quad \text{para todo} \quad y \in X - \bigcup_{x \in F_{f^m}} \widetilde{U_x}.$$

Para dicho α existe $\widetilde{\delta} > 0$ tal que si $d(g,f) < \widetilde{\delta}$, entonces $d(g^m, f^m) < \alpha$ (por la Proposición 1.3.4). Tomemos $r = \text{mín}\{\delta, \delta', \widetilde{\delta}\}$ y veamos que si $g \in B(f,r)$, entonces $g \in \mathcal{O}_{m,k}$. Si $F_{g^m} = \emptyset$, $g \in \mathcal{O}_{m,k}$. Sea el caso $F_{g^m} \neq \emptyset$, entonces, para $0 \leq i,\ l \leq m-1$, $1 \leq j \leq r$,

$$\begin{aligned} a \quad &\leq d(f^i(V_j), f^l(V_j)) \quad \leq d(f^i(V_j), g^i(V_j)) + d(g^i(V_j), g^l(V_j)) + d(g^l(V_j), f^l(V_j)) \\ &< \frac{a}{4} + d(g^i(V_j), g^l(V_j)) + \frac{a}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$0 < \frac{a}{2} < d(g^i(V_j), g^l(V_j)).$$

Así pues, $V_j, g(V_j), \ldots, g^{m-1}(V_j)$ son disjuntos dos a dos $(1 \leq j \leq r)$. Además, vale que $g^m(V_j) \subset (V_j)^\circ \quad (1 \leq j \leq r)$, pues $g^m(x) \in B(f^m(x), \epsilon) \subset (V_j)^\circ$ para todo $x \in V_j$. Por último, si $y \in F_{g^m}$, entonces $d(y, f^m(y)) = d(g^m(y), f^m(y)) < \alpha$. Por lo tanto, $y \in \bigcup_{x \in F_{f^m}} \widetilde{U_x}$, es decir, existe $x \in F_{f^m}$ tal que $y \in \widetilde{U_x} \subset U_x$. Así probamos que existe un entorno de y de diámetro menor que $1/k$ y que contiene por lo menos dos V_j diferentes. Esto demuestra que $\mathcal{O}_{m,k}$ es abierto.

Veamos que para cada $f \in \mathcal{O} \bigcap (\bigcap_{m,k} \mathcal{O}_{m,k})$ el conjunto de los puntos periódicos de f es no vacío y se verifica la propiedad (P). Como $f \in \mathcal{O}$, existe un conjunto

$V \in \mathcal{B}_X$ y un entero $s \geq 1$ tal que $f^s(V) \subset V^\circ$. Sea el homeomorfismo $g : V \to B^n$ y sea la función continua $\widetilde{f} = f^s|_V : V \to V$, entonces la función $G : B^n \to B^n$ tal que $G(x) = (g \circ \widetilde{f} \circ g^{-1})(x)$ es continua y, por el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, tiene un punto fijo x_0. Es decir,

$$x_0 = (g \circ \widetilde{f} \circ g^{-1})(x_0) = g(f^s(g^{-1}(x_0)).$$

Sea $y_0 = g^{-1}(x_0)$, entonces $x_0 = g(f^s(y_0))$. Por lo tanto, $g^{-1}(x_0) = f^s(y_0)$, y entonces $y_0 = f^s(y_0)$. Así pues, el conjunto de los puntos fijos de f^s es no vacío, y, en consecuencia, el conjunto de los puntos periódicos de f es no vacío.

Ahora, para cada $m \geq 1$ y para cada $x \in F_{f^m}$, sea N_x un entorno de x en X. Como $f \in \bigcap_{m,k} \mathcal{O}_{m,k}$, existe un entorno U_x de x con diam$U_x < 1/k_0$, incluido en N_x y que contiene dos V_j diferentes. En alguno de estos V_j no está x, lo llamamos V. Por lo tanto, existe $V \in \mathcal{B}_X$, tal que $V \subset N_x - \{x\}$, los conjuntos $V, f(V), \ldots, f^{m-1}(V)$ son disjuntos dos a dos y $f^m(V) \subset V^\circ$. Esto muestra que f verifica la propiedad (P).

Veamos que los conjuntos $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}_{m,k}$ son densos en $C(X)$. Fijemos $f \in C(X)$ y $\epsilon > 0$. Elegimos $a \in X$. Sea $b \in X$ un punto límite de la sucesión $\left(f^l(a)\right)_{l\geq 1}$ y sea W un entorno de $b \in X$ el cual es homeomorfo a B^n. Sea $l_1 \geq 1$ un entero tal que $f^{l_1}(a) \in W^\circ$ y sea $l_2 > l_1$ el entero más pequeño tal que $f^{l_2}(a) \in W^\circ$. Elegimos un punto $y \in i(X) \cap W^\circ$ y sean $\phi, \psi \in C(X)$ tales que

$$\phi(x) = x \text{ y } \psi(x) = x \text{ si } x \in X - W^\circ,$$

$$\phi(W) \subset W, \ \psi(W) \subset W, \ \phi(y) = f^{l_1}(a) \text{ y } \psi(f^{l_2}(a)) = y.$$

Definimos $g = \psi \circ f \circ \phi \in C(X)$. Entonces y es un punto periódico de g con período $s = l_2 - l_1$. Además, si elegimos W suficientemente pequeño, tenemos que $\widetilde{d}(g, f) < \epsilon/2$. Ahora sea $U \in \mathcal{B}_X$ un entorno de y tal que los conjuntos $U, g(U), \ldots, g^{s-1}(U)$ son disjuntos dos a dos. Sea $V \in \mathcal{B}_X$ un entorno de y incluido en U° y sea $\varphi \in C(X)$ tal que

$$\varphi(x) = x \text{ si } X - U, \quad \varphi(U) \subset U, \quad \text{y} \quad \varphi(V) = \{y\}.$$

Sea $h = g \circ \varphi \in C(X)$. Entonces $h^s(V) \subset V^\circ$. Además, si elegimos U suficientemente pequeño, se cumple que $\widetilde{d}(h, g) < \epsilon/2$. Esto prueba que el conjunto $\mathcal{O}$ es denso en $C(X)$.

Veamos que $\mathcal{O}_{m,k}$ es denso en $C(X)$. Si $F_{f^m} = \emptyset$, entonces $f \in \mathcal{O}_{m,k}$. Ahora asumamos que $F_{f^m} \neq \emptyset$. Como F_{f^m} es compacto, podemos elegir una cantidad finita de bolas abiertas $U_1, \ldots, U_t \in X$ de radio menor que $1/2k$ que intersecan a F_{f^m} de modo que $F_{f^m} \subset U_1 \cup \ldots \cup U_t$. Para cada $1 \leq j \leq t$, elegimos un $x_j \in F_{f^m} \cap U_j$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x_1, \ldots, x_t$ son distintos. Sea k_j el período de x_j $(1 \leq j \leq t)$. Fijamos $\eta > 0$. Sea $0 < \alpha_1 < \eta$ tal que $B(x_1, \alpha_1) \subset U_1$ y las bolas

$$B(x_1, \alpha_1), B(f(x_1), \alpha_1)), \ldots, B(f^{k_1-1}(x_1), \alpha_1)$$

son disjuntas dos a dos y no intersecan al conjunto $Orb(f, x_j)$ para todo j tal que $Orb(f, x_j) \neq Orb(f, x_1)$. Por el Lema 4.2.1, existe una función $g_1 \in C(X)$ tal que $d(g_1, f) < \alpha_1 < \eta$,

$$g_1(x) = f(x) \text{ para todo } x \in Orb(f, x_1) \cup \ldots \cup Orb(f, x_t),$$

y g_1 posee un punto periódico $a_1 \in i(X) \cap B^*(x_1, \alpha_1) \subset i(X) \cap U_1$ de período m. Notemos que $a_1 \notin Orb(f, x_1) \cup \ldots \cup Orb(f, x_t)$. Elegimos $0 < \alpha_2 < \eta$ tal que $B(x_1, \alpha_2) \subset U_1$ y las bolas

$$B(x_1, \alpha_2), B(g_1(x_1), \alpha_2), \ldots, B(g_1^{k_1-1}(x_1), \alpha_2)$$

son disjuntas dos a dos y no cortan al conjunto $Orb(g_1, a_1)$ ni a $Orb(g_1, x_j)$ para todo j tal que $Orb(g_1, x_j) \neq Orb(g_1, x_1)$. Por el Lema 4.2.1, existe una función $g_2 \in C(X)$ tal que $d(g_2, g_1) < \alpha_2 < \eta$,

$$g_2(x) = g_1(x) \text{ para todo } x \in Orb(g_1, a_1) \cup Orb(g_1, x_1) \cup \ldots \cup Orb(g_1, x_t),$$

y g_2 posee un punto periódico $b_1 \in i(X) \cap B^*(x_1, \alpha_2) \subset i(X) \cap U_1$ de período m. Notemos que $b_1 \notin Orb(g_1, a_1) \cup Orb(g_1, x_1) \cup \ldots \cup Orb(g_1, x_t)$. Ahora consideremos x_2 en lugar de x_1 y repetimos el proceso anterior. En el último paso obtendremos una función g $(= g_{2t})$ que posee puntos periódicos $a_j, b_j \in i(X) \cap U_j$ de período m $(1 \leq j \leq t)$ de modo que los conjuntos

$$Orb(g, a_1), Orb(g, b_1), \ldots, Orb(g, a_t), Orb(g, b_t)$$

son disjuntos dos a dos. Además, elegiendo $\eta > 0$ suficientemente pequeño, también podemos garantizar que

$$\widetilde{d}(g, f) < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad F_{g^m} \subset U_1 \cup \ldots \cup U_t,$$

pues si $y \in X - \bigcup_{i=1}^{t} U_i$, por compacidad, existe $\delta > 0$ tal que $d(y, f^m(y)) \geq \delta$. Además, para δ, existe $\delta' > 0$ tal que si $\widetilde{d}(g, f) < \delta'$, entonces $\widetilde{d}(g^m, f^m) < \delta$ (por la Proposición 1.3.4). Por lo tanto, como $d(g, f) < 2t\eta$, si tomamos

$$\eta < \text{mín}\{\frac{\epsilon}{4t}, \frac{\delta'}{2t}\},$$

se cumple que $\widetilde{d}(g, f) < \epsilon/2$ y, además, cuando $y \in F_{g^m}$, $d(y, f^m(y)) < \delta$, entonces $y \in U_1 \cup \ldots \cup U_t$.

Ahora elegimos entornos $Z_1, \ldots, Z_t, W_1, \ldots, W_t \in B_X$ de $a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t$, respectivamente, de modo que $Z_j \subset U_j$, $W_j \subset U_j$ $(1 \leq j \leq t)$ y los conjuntos

$$g^i(Z_j),\, g^i(W_j) \quad (1 \leq j \leq t,\, 0 \leq i \leq m-1)$$

sean disjuntos dos a dos. Sean $Z_1', \ldots, Z_t', W_1', \ldots, W_t' \in B_X$ entornos de $a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t$, respectivamente, tales que

$$Z_j' \subset (Z_j)^\circ \text{ y } W_j' \subset (W_j)^\circ \ \ (1 \leq j \leq t).$$

Sea $\Psi \in C(X)$ tal que

$$\Psi(x) = x \text{ si } X - (Z_1 \cup \ldots \cup Z_t \cup W_1 \ldots \cup W_t),$$

$$\Psi(Z_j) \subset Z_j,\, \Psi(W_j) \subset W_j,\, \Psi(Z_j') = \{a_j\} \text{ y } \Psi(W_j') = \{b_j\} \ \ (1 \leq j \leq t).$$

Definimos $h = g \circ \Psi \in C(X)$. Entonces

$$Z_j', h(Z_j'), \ldots, h^{m-1}(Z_j')$$

son disjuntos dos a dos y

$$h^m(Z_j') \subset (Z_j')^\circ \quad (1 \leq j \leq t).$$

Las mismas propiedades valen si tomamos W_j' en lugar de Z_j'. Además, al elegir $Z_1, \ldots, Z_t, W_1, \ldots, W_t$ suficientemente pequeños también podemos asegurar que

$$\widetilde{d}(h, g) < \epsilon/2 \text{ y } F_{h^m} \subset U_1 \cup \ldots U_t.$$

Así, $h \in \mathcal{O}_{m,k}$ y $\widetilde{d}(h, f) < \epsilon$, lo cual completa la demostración. □

Corolario 4.2.3. *Para casi todas las funciones $f \in C(X)$, el conjunto de todos los puntos periódicos de f es no vacío y no tiene puntos aislados.*

Demostración. Sea $f \in C(X)$ que cumple la propiedad establecida en el Teorema 4.2.2, es decir, P_f es no vacío y cumple la propiedad (P). Sea x un punto periódico de f de período m y sea N_x un entorno de x en X. Por la propiedad (P), existe un $V \in \mathcal{B}_X$ tal que $V \subset N_x - \{x\}$ y $f^m(V) \subset V^\circ$. Entonces, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $y \in V$ tal que $f^m(y) = y$. Por lo tanto, $N_x - \{x\} \cap P_f \neq \emptyset$, y queda probado que P_f no tiene puntos aislados. □

Corolario 4.2.4. *Para casi todas las funciones $f \in C(X)$, el conjunto de todos los puntos periódicos de f de período m es denso en el conjunto de todos los puntos periódicos de f de período q siempre que m sea un múltiplo de q.*

Demostración. Sea $f \in C(X)$ una función que cumple la propiedad (P) del Teorema 4.2.2. Sea $x \in P_f^q$ donde q es un divisor de m y sea U un abierto en X que contiene a x. Entonces $x \in F_{f^m}$, y por lo tanto por la propiedad (P), existe un $V \in \mathcal{B}_X$ tal que $V \subset U - \{x\}$, los conjuntos $V, f(V), \ldots, f^{m-1}(V)$ son disjuntos dos a dos y $f^m(V) \subset V^\circ$. Por lo tanto, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $x_0 \in V$ tal que $f^m(x_0) = x_0$ y $f^i(x_0) \neq x_0$ para cada $1 \leq i \leq m-1$. Así, x_0 es un punto periódico de f de período m que pertenece a U, lo cual completa la demostración. □

Antes de enunciar el último corolario veamos la siguiente definición.

Definición 4.2.5. Sea X un espacio topológico. Se dice que X tiene la propiedad del punto fijo si toda función continua $f : X \to X$ posee un punto fijo.

Corolario 4.2.6. *Supongamos que X tiene la propiedad del punto fijo. Entonces, para casi todas las funciones $f \in C(X)$, F_{f^m} es un conjunto perfecto y el conjunto de todos los puntos periódicos de f de período m es denso en F_{f^m} ($m \geq 1$). En particular, casi todas las funciones $f \in C(X)$ tienen no numerables puntos periódicos con período m, para cada $m \geq 1$.*

Demostración. Sea $f \in C(X)$ una función que verifica la propiedad (P) del Teorema 4.2.2. Fijamos $m \in \mathbb{N}$. Como X posee la propiedad del punto fijo, $F_{f^m} \neq \emptyset$. Como f^m es continua, el conjunto F_{f^m} es cerrado. Veamos que todos los puntos de F_{f^m} son de acumulación. Sea $x \in F_{f^m}$ y sea N un entorno de x en X. Por la propiedad (P), existe un conjunto $V \in \mathcal{B}_X$ tal que $V \subset N - \{x\}$, los conjuntos $V, f(V), \ldots, f^{m-1}(V)$ son disjuntos dos a dos y $f^m(V) \subset V^\circ$. Entonces, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $x_0 \in V$ tal que $f^m(x_0) = x_0$. Por lo tanto, $x_0 \in F_{f^m}$ y $x_0 \in N - \{x\}$, y así hemos probado que todo punto de F_{f^m} es de acumulación. Además, para cada $1 \leq i \leq m-1$, $f^i(x_0) \neq x_0$, entonces $x_0 \in P_f^m$. Como también $x_0 \in N$, $x \in \overline{P_f^m}$, y queda probado que P_f^m es denso en F_{f^m}. Ahora demostremos que P_f^m es no numerable. Supongamos que P_f^m es numerable. Entonces

$$P_f^m = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\},$$

donde $x_i \in P_f^m$. Como $\{x_i\}$ es cerrado y nunca denso en F_{f^m}, P_f^m es de primera categoría en F_{f^m}. Como P_f^m es denso en F_{f^m} y, por la Proposición 1.2.3, P_f^m es un abierto de F_{f^m}, entonces $F_{f^m} - P_f^m$ es nunca denso. Por lo tanto, $F_{f^m} = P_f^m \cup (F_{f^m} - P_f^m)$ es de primera categoría, lo cual es un absurdo. Luego, P_f^m es no numerable. □

Observación 4.2.7. (a) Agronsky, Bruckner y Laczkovich [1] demostraron que para casi todas las funciones $f \in C([0,1])$, cualquier entorno de un punto periódico de f contiene puntos periódicos de f de período arbitrariamente grandes. Luego Simon [14] mejoró este resultado al obtener el Corolario 4.2.4 en el caso $X = [0,1]$. En [1] también se demostró que F_{f^m} es un conjunto perfecto para casi todas las funciones $f \in C([0,1])$.

(b) Para $X = B^n$ con $n \geq 2$, el Corolario 4.2.6 se obtuvo en [6].

4.2.2. Sobre puntos no errantes y medida

Teorema 4.2.8. *Si μ es una medida de Borel finita y positiva, entonces para casi toda función $f \in C(X)$, $\mu(\Omega_f) = 0$*

Demostración. Sea $Z = \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}$. Como μ es una medida finita, el conjunto Z es numerable, y entonces $X - Z$ es denso en X. En efecto, $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$ con $\{x_i\}$ es cerrado y $\{x_i\}^\circ = \emptyset$, porque x_i no es un punto aislado, entonces Z es de primera categoría, y, como X es un espacio de Baire, se tiene que $X - Z$ es denso en X.

Para cada $k \geq 1$, sea $\mathcal{O}_k$ el conjunto de todas las funciones $f \in C(X)$ tales que existe una cantidad finita de $\mathcal{G}_X$-árboles $T_1, \ldots T_s$, disjuntos dos a dos, con las siguientes propiedades:

(I) Si A, $B \in V(T_i)$ y $A > B$, entonces $f(B) \subset A^\circ$.

(II) Si R_i es la raíz de T_i, entonces existe un $S_i \in V(T_i)$ tal que $f(R_i) \subset S_i^\circ$.

(III) Sea $R_i = A_{i,1} > A_{i,2} > \ldots > A_{i,s_i} = S_i$ la cadena de elementos sucesivos de $V(T_i)$ que conecta R_i con S_i. Si

$$Y_1 = \bigcup \{A : A \in V(T_i) - \{A_{i,1}, \ldots, A_{i,i_s}\} \text{ para algún } 1 \leq i \leq s\} \quad \text{e}$$

$$Y_2 = \bigcup_{i=1}^{s} [(A_{i,t_i} - f(A_{i,1})) \cup (A_{i,t_i-1} - f^2(A_{i,1})) \cup \ldots \cup (A_{i,1} - f^{t_i}(A_{i,1}))],$$

entonces $\mu\left(X - (Y_1 \cup Y_2)\right) < 1/k$.

Como μ es regular, cada $\mathcal{O}_k$ es abierto en $C(X)$. Además, vale que $\mu(\Omega_f) = 0$ para toda $f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k$.

Veamos que cada $\mathcal{O}_k$ es denso en $C(X)$. Fijamos $k \geq 1$, $f \in C(X)$ y $\epsilon > 0$. Sea $0 < \delta < \text{mín}\{1/k, \epsilon/2\}$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon/2$ siempre que $d(x, y) < \delta$ $(x, y \in X)$. Por el Lemma 4.1.6, existen conjuntos $B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{G}_X$, disjuntos dos a dos, tales que

$$\mu\left(X - (B_1 \cup \ldots \cup B_r)\right) < 1/k \;\text{ y }\; \text{diam} B_i < \delta \;\text{ para todo } 1 \leq i \leq r.$$

Razonando como en la demostración del Teorema 4.1.3 (con $\mathcal{C}_t = \{B_1, \ldots, B_r\}$), podemos construir $\mathcal{G}_X$-árboles $T_1, \ldots, T_s$, disjuntos dos a dos, y una función $h \in C(X)$ de modo que $\tilde{d}(h, f) < \epsilon$, $\{B_1, \ldots, B_r\} \subset V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)$ y (I) y (II) se verifican con h en lugar de f. Además, por la forma en que se construye la función h en la demostración del Teorema 4.1.3, tenemos también que para cada $A \in V(T_1) \cup \ldots \cup V(T_s)$, el conjunto $h(A)$ consiste en exactamente un punto que podemos suponerlo en $X - Z$ (pues $X - Z$ es denso en X), y entonces $\mu(h(A)) = 0$.

Por lo tanto, (III) también se cumple con h en lugar de f, lo cual completa la demostración. $\square$

Corolario 4.2.9. *Para casi todas las funciones $f \in C(X)$, Ω_f es nunca denso en X.*

Demostración. Notamos con m_n la medida de Lebesgue n-dimensional. Sea $(O_k)_{k\geq 1}$ una base numerable para la topología de X que consta de conjuntos O_k para los cuales existe un homeomorfismo $h_k : \overline{O_k} \to B^n$ con

$$h_k\left(i(X) \cap O_k\right) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}.$$

Para cada $k \geq 1$ y cada conjunto de Borel S de X , definimos $\mu_k(S) = m_n(h_k(S \cap \overline{O_k}))$. Por el Teorema 4.2.8, para casi todas las funciones $f \in C(X)$, $\mu_k(\Omega_f) = 0$ y, por lo tanto, $O_k \not\subset \Omega_f$. Esto demuestra que $(\Omega_f)^\circ = \emptyset$ para casi todas las funciones $f \in C(X)$. $\square$

Corolario 4.2.10. *Para casi todas las funciones $f \in C(B^n)$, Ω_f es un conjunto de medida Lebesgue nula.*

Observación 4.2.11. El caso $n = 1$ del corolario anterior se obtuvo en [1].

Observación 4.2.12. Se dice que un punto $x \in X$ es un punto recurrente en cadena de una función $f \in C(X)$ si, para todo $\epsilon > 0$, existe una secuencia finita

$$x_0, x_1, \ldots, x_k \quad \text{con} \quad k \geq 1, \quad x_0 = x_k = x \quad \text{y}$$

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon \quad \text{para} \quad 0 \leq i < k.$$

$CR(f)$ denota el conjunto de todos los puntos recurrentes en cadena de la función f.

1. $CR(f)$ es cerrado.

   Demostración. Sea $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset CR(f)$ que converge a x. Veamos que $x \in CR(f)$. Dado $\epsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_N, x) < \epsilon/2$ y $d(f(x_N), f(x)) < \epsilon/2$. Para $\epsilon/2 > 0$, como $x_N \in CR(f)$, existe una secuencia finita $x_0, x_1, \ldots, x_k$ con $k \geq 1$, $x_0 = x_k = x_N$ y $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon/2$ para $0 \leq i < k$. Entonces, la secuencia $x, x_1, \ldots, x_{k-1}, x$ verifica que

   $$d(f(x), x_1) \leq d(f(x), f(x_N)) + d(f(x_N), x_1) < \epsilon,$$

   $$d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon \text{ para } 1 \leq i \leq k-2 \quad \text{y}$$

$$d(f(x_{k-1}), x) \leq d(f(x_{k-1}), x_N) + d(x_N, x) < \epsilon.$$

Por lo tanto, $x \in CR(f)$. □

2. $\Omega_f \subset CR(f)$.

Demostración. Sea $x' \in \Omega_f$. Dado $\epsilon > 0$, como $f \in C(X)$, existe $\delta' > 0$ tal que $d(x, x') < \delta' \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon$. Sea $\delta = \min\{\delta', \epsilon\}$ y sea $k = \min\{j : f^j(B(x', \delta)) \cap B(x', \delta) \neq \emptyset\}$. Sea $y \in B(x', \delta)$ tal que $y = f^k(\widetilde{x})$, con $\widetilde{x} \in B(x', \delta)$.
Definimos la secuencia finita

$$x_0 = x',\ x_1 = f(\widetilde{x}),\ x_2 = f^2(\widetilde{x}), \ldots,\ x_{k-1} = f^{k-1}(\widetilde{x}),\ x_k = x',$$

la cual verifica

$$d(f(x_0), x_1) = d(f(x'), f(\widetilde{x})) < \epsilon,$$

$$d(f(x_1), x_2) = d(f^2(\widetilde{x}), f^2(\widetilde{x})) = 0 < \epsilon,$$

y así siguiendo, en el último paso tenemos

$$d(f(x_{k-1}), x_k) = d(f^k(\widetilde{x}), x') = d(y, x') < \epsilon.$$

□

3. Si μ es una medida de Borel finita y positiva sobre X, entonces para casi todas las funciones $f \in C(X)$, $\mu(CR(f)) = 0$.

Demostración. Sean los conjuntos $\mathcal{O}_k$, con $k \in \mathbb{N}$, Y_1 e Y_2 que se definieron en la demostración del Teorema 4.2.8. Veamos que para cada $f \in \mathcal{O}_k$, $\mu(CR(f)) < 1/k$. Sea $x \in CR(f) \cap Y_1$. Entonces existe un árbol T_i tal que $x \in B_x$, con $B_x \in V(T_i) - \{A_{i,1}, \ldots, A_{i,t_i}\}$. Sea $\alpha = \min\{d(x, A) : A \in V(T_i), A \neq B_x\}$. Para cada $B \in V(T_i)$, por los ítems (I) y (II) de la demostración del Teorema 4.2.8, existe $\delta_B > 0$ tal que $N_{\delta_B}(f(B)) \subset A^\circ$. Sea $\delta = \min\{\delta_B : B \in V(T_i)\}$. Entonces, para $0 < \epsilon = \min\{\alpha, \delta\}$, existe una secuencia finita

$$x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = x \quad \text{con} \quad k \geq 1 \quad \text{y} \quad d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon \quad \text{para} \quad 0 \leq i < k.$$

Observemos que, para cada $0 \leq i \leq k-1$, $x_i \in A$ para algún $A \in V(T_i)$. Si para todo $0 \leq i \leq k-1$ se tiene que $x_i \notin R_i$, entonces, por construcción de los árboles, $f(x_{k-1})$ no pertenece al mismo vértice que x. Por lo tanto,

$$\epsilon \leq \alpha = d(x, A) \leq d(x, f(x_{k-1})) < \epsilon,$$

lo cual es un absurdo. Si existe $1 \leq j \leq k-1$ tal que x_j pertenece a la raíz, entonces, para todo $j \leq i \leq k-1$, x_i pertenece a la cadena definida en el ítem

(III) de la demostración del Teorema 4.2.8. En particular, $f(x_{k-1})$ pertenece a la cadena y entonces

$$\epsilon \leq \alpha = d(x, A) \leq d(x, f(x_{k-1})) < \epsilon,$$

lo cual es un absurdo.

Ahora sea $x \in CR(f) \cap Y_2$. Entonces existe $1 \leq i \leq s$ tal que $x \in A_{i,q} - f^j(A_{i,1})$ para algún $1 \leq j, q \leq t_i$. Entonces existen conjuntos abiertos y disjuntos U, V y $r > 0$ tales que $B(x,r) \subset U$ y $f^j(A_{i,1}) \subset V \subset (A_{i,q})^\circ$. Como $f^{j-1}(A_{i,1}) \subset f^{-1}(V)$, existen $0 < \delta^2_{j-1} < \delta^1_{j-1}$ y $a_{j-1} > 0$ tales que $\delta^1_{j-1} = \delta^2_{j-1} + a_{j-1}$ y

$$f^{j-1}(A_{i,1}) \subset N_{\delta^2_{j-1}}(f^{j-1}(A_{i,1})) \subset N_{\delta^1_{j-1}}(f^{j-1}(A_{i,1})) \subset f^{-1}(V) \cap (A_{i,q-1})^\circ.$$

Como $f^{j-2}(A_{i,1}) \subset f^{-1}(N_{\delta^2_{j-1}}(f^{j-1}(A_{i,1})))$, existen $0 < \delta^2_{j-2} < \delta^1_{j-2}$ tales que $\delta^1_{j-2} = \delta^2_{j-2} + a_{j-2}$ y

$$\begin{aligned} f^{j-2}(A_{i,1}) \subset N_{\delta^2_{j-2}}(f^{j-2}(A_{i,1})) \subset N_{\delta^1_{j-2}}(f^{j-2}(A_{i,1})) \subset \\ f^{-1}(N_{\delta^2_{j-1}}(f^{j-1}(A_{i,1}))) \cap (A_{i,q-2})^\circ. \end{aligned}$$

Continuamos este proceso hasta llegar $f(A_{i,1})$. Como $f(A_{i,1}) \subset f^{-1}(N_{\delta^2_2}(f^2(A_{i,1})))$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(A_{i,1}) \subset N_{\delta_1}(f(A_{i,1})) \subset f^{-1}(N_{\delta^2_2}(f^2(A_{i,1}))) \cap (A_{t_i})^\circ$. Además, para cada vértice $A_{i,u}$ $(q-1 \leq u \leq 2)$, existe $\delta_{A_{i,u}} > 0$ tal que$N_{\delta_{A_{i,u}}}(f(A_{i,u})) \subset (A_{i,u-1})^\circ$. Entonces, para $\epsilon = \min\{r, \delta_1, a_n, \delta_{A_{i,u}}, d(x, A_{i,u}) : 2 \leq n \leq j-1, q-1 \leq u \leq 2\}$ existe una secuencia finita $x_0, x_1, \ldots, x_k$ con $k \geq 1$, $x_0 = x_k = x$ con $k \geq 1$ y $d(f(x_m), x_{m+1}) < \epsilon$ para $0 \leq m < k$. Observemos que para cada $0 \leq m \leq k-1$, x_i pertenece a la cadena $A_{i,1} > A_{i,2} > \ldots > A_{i,t_i}$.

Caso 1. Si para todo $0 \leq m \leq k-1$ se tiene que $x_m \notin A_{i,1}$, entonces todos los x_m pertenecen a distintos vértices y $f(x_{k-1}) \in A_{i,u}$ para algún $q-1 \leq u \leq 1$. Entonces

$$\epsilon \leq d(x, A_{i,u}) \leq d(x, f(x_{k-1})) < \epsilon,$$

lo cual es un absurdo.

Caso 2. Si existe un m tal que $x_m \in A_{i,1}$, entonces $x_{k-1} \in N_{\delta^1_{j-1}}(f^{j-1}(A_{i,1})) \subset f^{-1}(V) \cap (A_{i,q-1})^\circ$. Entonces, $f(x_{k-1}) \in V$ y, como $d(x, f(x_{k-1})) < \epsilon < r$, $f(x_{k-1}) \in B(x,r) \subset U$, lo cual es un absurdo.

Entonces $CR(f) \subset X - (Y_1 \cup Y_2)$. Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cada $f \in A_k$, $\mu(CR(f)) < 1/k$. Así, cada vez que $f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, se tiene que $\mu(CR(f)) = 0$. □

4.3. Un resultado sobre no sensibilidad

Teorema 4.3.1. *Para casi todas las funciones $f \in C(X)$, el conjunto de todos los puntos donde f es sensible es denso en el conjunto de todos los puntos periódicos de f.*

Demostración. Sea $f \in C(X)$ una función que verifica la propiedad (P) del Teorema 4.2.2.

Supongamos que x es un punto periódico de f y sea N un entorno de x en X. Sea m el período de x y definamos $g = f^m$. Por la Propiedad (P) existe un conjunto $V \in B_X$ tal que $V \subset N - \{x\}$ y $g(V) \subset V^\circ$. Consideremos los conjuntos

$$A = V \cap \Omega_g \quad \text{y} \quad B = \bigcap_{k=0}^{\infty} g^k(V).$$

A es un subconjunto no vacío pues g posee un punto fijo en V. Además, A es un subconjunto cerrado de V°. En efecto, supongamos que existe $v \in A \cap \partial(V)$. Como $g(V) \subset V^\circ$, existe $r > 0$ tal que $B(g(v), r) \subset V$. Como $g(V)$ es cerrado, existe un conjunto abierto W de X tal que

$$g(V) \subset W \subset \overline{W} \subset V^\circ.$$

Sea $\delta = d(v, \overline{W}) > 0$ y sea $g^{-1}(B(g(v), r)) \cap B(v, \delta)$ un entorno de v. Entonces, para todo $k \geq 1$,

$$g^k \left[g^{-1}(B(g(v), r)) \cap B(v, \delta)\right] \bigcap \left[g^{-1}(B(g(v), r)) \cap B(x, \delta)\right] = \emptyset,$$

y por lo tanto $v \notin \Omega_g$, lo cual es un absurdo.

B es un subconjunto no vacío y cerrado de V°. Además, B es conexo.

Veamos que A no es conexo y, por lo tanto, $A \neq B$. En efecto, sea $z \in V^\circ \cap F_g$. Por la propiedad (P), existe un conjunto $W \in \mathcal{B}_X$ tal que $W \subset V^\circ - \{z\}$ y $g(W) \subset W^\circ$. Por tanto, los conjuntos $(X - W) \cap A$ y $W^\circ \cap A$ forman una separación de A, lo cual prueba que A es no conexo.

Veamos que $A \subset B$. Supongamos que no y sea $y \in A - B$. Entonces $y \notin g^t(V)$ para un cierto $t \geq 1$. Sea $\gamma > 0$ tal que $B(y, \gamma) \subset V$ y $d(y, g^t(V)) > \gamma$. Como $y \in \Omega_g$, existe un $s \geq t$ tal que $B(y, \gamma) \cap g^s(B(y, \gamma)) \neq \emptyset$. Como $g^s(B(y, \gamma)) \subset g^t(V)$, obtenemos una contradicción.

Ahora elegimos $b \in B - A$ y definimos

$$F = V \cap \bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq r} (g^k)^{-1}(\{b\})}.$$

Entonces,

- $F \neq \emptyset$: como $b \in B$, existe $v_k \in V$ tal que $b = g^k(v_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Para cada $r \in \mathbb{N}$, definimos los conjuntos $A_r = \{v_k : k \geq r\}$. Así, $(\overline{A_r})_{r\in\mathbb{N}} \subset V$ tiene la propiedad de intersección finita y, como V es compacto,

$$\bigcap_{r\in\mathbb{N}} \overline{A_r} \neq \emptyset$$

De este modo,

$$\emptyset \ \neq \ V \cap \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \overline{A_r} \ \subset \ V \cap \bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k\geq r} (g^k)^{-1}(\{b\})}.$$

- $g(F) \subset F$: Observemos que si $r \geq 2$ y $g^k(x) = b$ para algún $k \geq r$, entonces $g^{k-1}(g(x)) = b$ para algún $k - 1 \geq 1$.

$$\begin{aligned} g(F) \ &\subset \ V \cap g\left(\overline{\bigcap_{r=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq r}(g^k)^{-1}(b)\right)}\right) \\ &\subset \ V \cap g\left(\overline{\left(\bigcup_{k\geq 1}(g^k)^{-1}(b)\right)} \cap \bigcap_{r=2}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{k\geq r}(g^k)^{-1}(b)\right)}\right) \\ &\subset \ V \cap g\left(\bigcap_{r=2}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{k\geq r}(g^k)^{-1}(b)\right)}\right) \\ &\subset \ V \cap \overline{\bigcap_{r=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq r}(g^k)^{-1}(b)\right)} = F. \end{aligned}$$

- $b \notin F$: Como $b \notin \Omega_g$ existe un entorno U de b y existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq r$

$$g^k(U) \cap U = \emptyset.$$

Por lo tanto,

$$(g^k)^{-1}(U) \cap U = \emptyset.$$

Así, para todo $k \geq r$, tenemos que $(g^k)^{-1}(\{b\}) \cap U = \emptyset$. Esto demuestra que

$$b \notin \bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{k\geq r}(g^k)^{-1}(\{b\})\right)},$$

y por lo tanto $b \notin F$.

Sea $\epsilon = d(b, F) > 0$. Elegimos $a \in F$ y $\delta > 0$. Existe un $k \geq 1$ tal que la intersección

$$B(a, \delta) \cap (g^k)^{-1} (\{b\}) \neq \emptyset.$$

Si a_0 pertenece a esta intersección, entonces

$$d(a_0, a) < \delta \quad \text{y} \quad d(g^k(a_0), g^k(a)) = d(b, g^k(a)) \geq \epsilon.$$

Esto muestra que la familia $\{g^s : s \geq 1\}$ no es equicontinua en a. Por lo tanto, $\{f^s : s \geq 1\}$ no es equicontinua en a y, en particular, f es sensible en a. $\square$

Corolario 4.3.2. *Casi todas las funciones en $C(X)$ son sensibles en infinitos puntos de X.*

Demostración. Sabemos, por el Corolario 4.2.3 y por el Teorema 4.3.1, que para casi todas las funciones $f \in C(X)$, el conjunto de todos los puntos periódicos de f es no vacío y no tiene puntos aislados, y el conjunto de todos los puntos donde f es sensible es denso en el conjunto de todos los puntos periódicos de f. Fijamos una función $f \in C(X)$ que tenga estas dos propiedades. S denota el conjunto de todos los puntos donde f es sensible. Supongamos que S es finito. Entonces $S = \overline{S}$, y por lo tanto el conjunto de todos los puntos periódicos de f es finito, lo cual es un absurdo. $\square$

Observación 4.3.3. Todos los resultados presentados en este capítulo permanecen válidos si en lugar de $C(X)$ consideramos el espacio $CO(X)$ de todas las funciones de X en X sobreyectivas dotado con la métrica del supremo. Las demostraciones son basicamente las mismas. Solamente tenemos que observar que todas las pequeñas perturbaciones necesarias en las demostraciones se pueden realizar por medio de funciones sobreyectivas y continuas (lo cual se desprende del teorema de extensión enunciado el inicio del presente capítulo).

Bibliografía

[1] S. J. Agronsky, A. M. Bruckner and M. Laczkovich, *Dynamics of typical continuous functions*, J. London Math. Soc., 1989.

[2] E. Akin, *The General Topology of Dynamical Systems*, Amer. Math. Doc., Providence, RI.

[3] E. Akin, *On chain continuity*, Discrete Contin. Dynam. Systems, 1996.

[4] P. Amster, *Métodos Topológicos en el Análisis No Lineal*, Publicaciones matemáticas, IMPA, 2009.

[5] N. Aoki and K. Hirade, *Topological Theory of Dynamical Systems: Recent Advances*, North-Holland, 1994.

[6] N. C. Bernardes Jr., *On the dynamics of homeomorphisms on the unit ball of* $\mathbb{R}^n$, 1999.

[7] N. C. Bernardes Jr., *On the predictibility of discrete dynamical systems*, 2001.

[8] N. C. Bernardes Jr., *On the predictibility of discrete dynamical systems II*, 2005.

[9] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[10] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, 1997.

[11] W. Gottschalk and G. Hedlund, *Topological Dynamics*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1955.

[12] E. Lages Lima, *Elementos de topologia geral*. IMPA, 1970.

[13] John C. Oxtoby, *Measure and Category. A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces*. Second Edition. Springer.

[14] K. Simon, *On the periodic points of a typical continuous function*, Proc. Amer. Math. Soc., 1989.

[15] S. Willard, *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.