



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Dimensión genérica del núcleo del Laplaciano conforme

Gabriel Krimker

Director: Guillermo Henry

Noviembre de 2023

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>6</b>
2.1. Variedades Riemannianas. . . . .	7
2.2. Derivada covariante. . . . .	9
2.3. Isomorfismos musicales y traza. . . . .	11
2.4. Densidad Riemanniana. . . . .	15
2.5. Curvatura. . . . .	17
2.6. Geodésicas y cartas normales. . . . .	21
2.7. Operadores diferenciales y teoremas integrales. . . . .	25
2.7.1. Hessiano. . . . .	26
2.7.2. Divergencia. . . . .	26
2.7.3. Operador de Laplace-Beltrami. . . . .	27
2.7.4. Teoremas integrales. . . . .	28
<b>3. Espacio de métricas Riemannianas</b>	<b>30</b>
3.1. Espacio de métricas de una variedad Riemanniana. . . . .	30
3.1.1. Distancia entre métricas. . . . .	32
3.1.2. Producto interno en el espacio de tensores. . . . .	33
3.2. Descomposiciones del espacio tangente de $\mathcal{M}$ . . . . .	34
3.3. Curvas en el espacio de métricas. . . . .	44
3.4. Funcional de Hilbert-Einstein . . . . .	55

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
<b>4. Laplaciano conforme</b>	<b>67</b>
4.1. Espectro del Laplaciano conforme. . . . .	67
4.2. Continuidad de los autovalores del Laplaciano conforme. . . . .	69
<b>5. Métricas con núcleo trivial</b>	<b>74</b>

Quiero agradecer especialmente al Colo por todo el tiempo que me dedicó, su paciencia, por estar siempre disponible, por todo lo que me enseñó, por ayudarme a no procrastinar, y por ser una gran profesor.

A Ariel Salort y a Gabriel Larotonda por tomarse el trabajo de leer esta tesis.

A mi viejo por haberme despertado el interés por la matemática, a mi vieja, a mis abuelos, a mis hermanas, Naty, Vicky y Sol. A Ine y al Negro.

A mis amigas de siempre, Fi y Chechu, por todos estos años de amistad y por siempre darme aliento. A Rafa, Manu, León, Hugo, Eri.

A todos los compañeros y compañeras con las que alguna vez compartí cursada, les pedí apuntes o nos juntamos a estudiar.

A Dani por haberme acompañado con tanto amor durante estos últimos 10 años.

A la UBA, a la universidad pública y al estado Argentino.

# Capítulo 1

## Introducción

La teoría geométrica espectral estudia la relación que existe entre el espectro de ciertos operadores diferenciales elípticos y autoadjuntos y la geometría de una variedad Riemanniana. Desde el punto de vista geométrico, y también, de las aplicaciones, es importante pedir que además estos operadores sean invariantes por isometrías del espacio.

Estos operadores, si la variedad diferenciable es compacta, que por otro lado serán los espacios que consideraremos en esta tesis, tienen un espectro que consiste en una sucesión de autovalores que tiende a infinito. ¿Qué nos dice esta sucesión sobre la variedad Riemanniana? ¿La geometría, es decir la métrica Riemanniana, quedará determinada por su espectro? Esta pregunta fue planteada a principios de la década de 1960, para el operador de Laplace-Beltrami, que para un dominio de  $\mathbb{R}^n$  dotado con la métrica Euclídea no es otra cosa que el Laplaciano. Un par de años más tarde, Milnor (ver [26]) dio una respuesta negativa. Probó que existen dos toros de dimensión 16 que tienen el mismo espectro aunque no son isométricos. Sin embargo, la pregunta de si el espectro determina la geometría de un dominio plano, propuesta por Kac en 1966 en su famoso artículo titulado “*Can one hear the shape of a drum?*” (ver [20]), no fue resuelta hasta 1982, cuando Gordon y Webb, mostraron dos dominios planos isoespectrales pero no isométricos (ver [15]).

Si bien el espectro no determina la geometría del espacio, sí determina algunas de sus propiedades fundamentales. Por ejemplo, si escribimos

$$0 = \mu_0(\Delta_g) < \mu_1(\Delta_g) \leq \dots \leq \mu_m(\Delta_g) \leq \dots$$

el espectro del operador de Laplace-Beltrami  $\Delta_g$ , de la variedad Riemanniana  $(M, g)$ , el

desarrollo asintótico de la traza del núcleo de calor (heat kernel) es

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\mu_i(\Delta_g)t} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left[ \text{Vol}(M, g) + \frac{t}{6} \int_M S_g dV_g + O(t^2) \right], \quad (1.1)$$

donde  $n$  es la dimensión de  $M$  y  $S_g$  es la curvatura escalar de  $(M, g)$ . Por lo tanto, si conocemos el espectro de  $\Delta_g$ , podemos conocer su dimensión, su volumen y la curvatura escalar total, (ver [27, 8]). En particular, para superficies, por el teorema de Gauss-Bonnet, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\mu_i(\Delta_g)t} = \frac{\text{Area}(M, g)}{4\pi t} + \frac{\chi(M)}{6} + O(t), \quad (1.2)$$

donde  $\chi(M)$  es la característica de Euler de  $M$ . Luego conocer el espectro nos permite conocer la cantidad de agujeros de  $M$ .

Calcular explícitamente el espectro de estos operadores es una tarea difícil. Incluso para el operador de Laplace-Beltrami, solo es conocido el espectro completo para un grupo muy reducido de variedades Riemannianas (ver [8]). Más aún, en general no se conoce el valor del primer autovalor no nulo (tono fundamental) de  $\Delta_g$ . Conocer los autovalores y sus autoespacios es importante porque, por ejemplo, nos dice cosas sobre las soluciones de ecuaciones diferenciales de mucho interés, como son la ecuación de onda, del calor o la ecuación de Schrödinger que modela la densidad de probabilidad de la posición de una partícula. Con lo cual es fundamental y de mucho interés si no podemos calcularlos explícitamente, tener estimaciones y cotas de los autovalores. Estas dependen fuertemente de invariantes geométricos, como el volumen, el diámetro y la curvatura. Por ejemplo, sea  $h(M, g)$  la constante de Cheeger definida por

$$h(M, g) = \inf_S \frac{\text{Area}(S)}{\min(\text{Vol}(M_1, g), \text{Vol}(M_2, g))}, \quad (1.3)$$

donde  $S$  es una hipersuperficie que divide en dos a  $M$ , con  $S = \partial M_1 = \partial M_2$ . Tenemos la conocida desigualdad de Cheeger

$$\mu_1(\Delta_g) \geq \frac{h^2(M, g)}{4} \quad (1.4)$$

(ver [9]).

La teoría geométrica espectral es un área donde confluyen la geometría y el análisis, en la cual se trata de entender la geometría de la variedad a través de las herramientas

que nos provee el análisis y, por otro lado, comprender cuales son las restricciones que el espacio impone sobre las soluciones de ciertas ecuaciones de interés.

En esta tesis estamos interesados en el Laplaciano conforme, que es una generalización del operador de Laplace-Beltrami.

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana cerrada, es decir compacta y sin borde, de dimensión  $n$  al menos 3, el Laplaciano conforme es el operador definido por

$$L_g = \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g + S_g. \quad (1.5)$$

El Laplaciano conforme es importante desde un punto de vista geométrico porque nos dice como cambia la curvatura escalar en una clase conforme. Si  $h$  es una métrica de la forma

$$h = u^{\frac{4}{n-2}} g$$

con  $u \in C_{\geq 0}^{\infty}(M)$ , es decir  $h$  es una deformación conforme punto a punto de  $g$ , entonces

$$S_h = L_g(u) u^{-\frac{n+2}{n-2}}. \quad (1.6)$$

Es bien sabido que toda métrica  $g$  puede ser deformada puntualmente a una métrica de curvatura escalar constante (ver [24]). Por lo tanto, en cada clase conforme tenemos una métrica de curvatura escalar constante. El signo de dicha curvatura escalar coincide con el signo del primer autovalor del Laplaciano conforme.

Los autovalores del operador de Laplace-Beltrami, Laplace-de Rham, el Laplaciano conforme, operadores GMJS, operador de Dirac, etcétera, pueden tener distintas multiplicidades. De hecho, por ejemplo, Colin de Verdière probó en [33] que dada cualquier sucesión finita de números reales

$$a_0 = 0 < a_1 \leq \dots \leq a_m$$

existe una métrica Riemanniana  $g$  tal que los primeros  $m+1$  valores del espectro de  $\Delta_g$  coinciden con dicha sucesión. Esto nos dice que no existen restricciones impuestas por la estructura diferencial para la primera parte del espectro. Sin embargo, las métricas con autovalores simples son muy abundantes. En efecto, Uhlenbeck probó en [32] que el conjunto de métricas Riemannianas para las cuales todos los autovalores del operador de Laplace-Beltrami son simples es genérico.

¿Sucede lo mismo para el Laplaciano conforme?

Canzani probó en [6] que el conjunto de métricas para las cuales todos los autovalores no nulos del Laplaciano conforme son simples es también genérico. Por lo tanto cabe preguntarse

¿Cuán grande es el conjunto de métricas Riemannianas cuyo núcleo del Laplaciano conforme es no trivial?

El objetivo de esta tesis es discutir esta cuestión. Gover, Hassannezhad, Jakobson y Levitin probaron en [16] que este conjunto es pequeño. Precisamente, Gover et al. demostraron que genéricamente cero no es un autovalor del Laplaciano conforme. Por lo tanto, este resultado junto con [6] implica que toda métrica Riemanniana puede ser aproximada por métricas cuyos autovalores del Laplaciano conforme son simples.

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera.

El capítulo 2 está dedicado a introducir notaciones, definiciones y a repasar resultados y nociones fundamentales de geometría Riemanniana que serán usadas en el resto de la tesis.

En el capítulo 3 estudiamos el espacio de métricas Riemannianas  $\mathcal{M}$ . Introducimos una distancia que induce la topología  $C^\infty$  en  $\mathcal{M}$ , y estudiamos diferentes descomposiciones de su espacio tangente que son de gran utilidad. Veremos como varían el operador de Laplace-Beltrami, la curvatura escalar y sus derivadas a lo largo de una curva de métricas Riemannianas. Finalmente, caracterizamos los puntos críticos del operador de Hilbert-Einstein, que son las métrica de Einstein, y mostramos que estos no pueden ser extremos locales.

En el capítulo 4 introducimos el operador Laplaciano conforme. Mostramos que su espectro es una sucesión de autovalores que tiende a infinito. Probamos que el signo del primer autovalor coincide con el signo de la constante de Yamabe, que es un invariante conforme. Esto nos da una interpretación geométrica del tono fundamental de este espectro: el signo del primer autovalor del Laplaciano conforme de una variedad Riemanniana  $(M, g)$  nos dice qué signo debe tener la curvatura escalar de una métrica en la clase conforme de  $g$  cuya curvatura escalar no cambia de signo. Por último, vemos que los autovalores dependen continuamente de la métrica Riemanniana con respecto a la topología  $C^\infty$ .

El capítulo 5 esta dedicado a ver cuan grande es el conjunto de métricas Riemannianas para las que cuales 0 no es autovalor del Laplaciano conforme. Mostramos que este conjunto es denso en el espacio de métricas Riemannianas, en realidad resulta genérico. Como corolario obtenemos que el conjunto de métricas con espectro simple es genérico.



# Capítulo 2

## Preliminares

La geometría Riemanniana tiene como objeto estudiar el espacio de modo intrínseco, es decir que estudia las propiedades geométricas que se pueden medir desde adentro del espacio (ángulos, longitudes, áreas, volúmenes, etc.). Por ejemplo, en una superficie de dimensión 2 podemos medir con herramientas intrínsecas el perímetro de un círculo de radio  $R$ . El resultado de esta medición será  $2\pi R$  si el círculo está en un plano, menor a  $2\pi R$  si el círculo está en una esfera y mayor si está en un hiperboloide de una hoja.

Para superficies sumergidas en el espacio Euclídeo, la curvatura Gaussiana  $K(p)$ , nos permite distinguir entre las distintas geometrías intrínsecas. A pesar de que a priori, la curvatura Gaussiana es una construcción extrínseca, Gauss probó en 1827, en *“Disquisitiones generales sobre superficies y curvas”*, su celebre Teorema Egregium, en donde prueba que la curvatura Gaussiana solo depende de la primera forma fundamental y por lo tanto, es un invariante intrínseco. En el mismo artículo probó el teorema “elegante” que da una relación entre los ángulos interiores,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  de un triángulo geodésico  $T$  con la

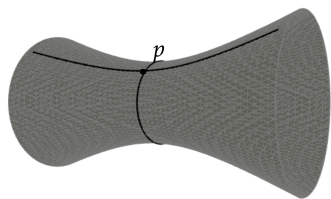


Figura 2.1:  $K(p) < 0$

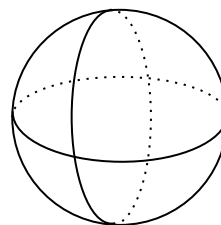


Figura 2.2:  $K(p) > 0$

curvatura Gaussiana. Precisamente el teorema elegante dice que:

$$\int_T K = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Notar que cuando la curvatura es 0 tenemos el resultado conocido para la geometría euclídea.

En 1854, en su disertación para obtener la habilitación en la Universidad de Göttingen, Riemann expuso “Sobre la hipótesis en la que se basa la geometría” en donde introduce la noción de lo que hoy conocemos como variedad diferencial y define las métricas Riemannianas que generalizan las nociones de superficie y de primera forma fundamental. También introduce la noción de curvatura seccional, que generalizando la curvatura Gaussiana, nos da una forma de medir la curvatura intrínseca de espacios de dimensiones altas.

## 2.1. Variedades Riemannianas.

Comenzaremos con algunas nociones generales de la geometría Riemanniana e introduciremos las notaciones y definiciones necesarias que utilizaremos a lo largo de esta tesis. Para un tratamiento exhaustivo de estos temas recomendamos consultar, entre otros, los libros [7] y [23].

**Definición 2.1** Una *métrica Riemanniana*  $g$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es un tensor de tipo  $(0, 2)$  simétrico y definido positivo que varía suavemente en  $M$ . Llamaremos variedad Riemanniana  $(M, g)$  a una variedad diferenciable  $M$  dotado de una métrica Riemanniana  $g$ .

Observemos que toda métrica  $g$  sobre  $M$  induce un producto interno en el espacio tangente  $T_p M$ ,  $\langle, \rangle: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\langle X_p, Y_p \rangle = g(p)(X_p, Y_p)$$

que además varía suavemente a medida que cambia el espacio tangente.

Podemos escribir localmente a la métrica  $g$  del siguiente modo. Dada una carta  $(U, x)$ , tenemos que

$$g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

de donde  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  son las funciones suaves definidas por

$$g_{ij}(p) = g(p) \left( \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right)$$

para todo  $p \in U$ .

Veamos algunos ejemplos de métricas Riemannianas.

**Ejemplo 1:** La manera más natural para asignarle una métrica Riemanniana a  $\mathbb{R}^n$  es considerar la carta global  $(\mathbb{R}^n, id)$  y definir

$$g_{ij} = \delta_{ij}.$$

Esta es la métrica Riemanniana que induce la geometría Euclídea.

**Ejemplo 2:** Si  $f : M \rightarrow N$  es una inmersión y tenemos definida en  $N$  una métrica Riemanniana  $h$ , entonces podemos definir en  $M$  la métrica Riemanniana  $g = f^*h$ , es decir si  $X_p, Y_p \in T_pM$

$$g(p)(X_p, Y_p) = h(f(p))(d_p f(X_p), d_p f(Y_p)).$$

El ejemplo anterior nos dice que a cualquier variedad inmersa en  $\mathbb{R}^n$  le podemos definir una métrica inducida. En el siguiente ejemplo lo haremos sobre  $S^n$ .

**Ejemplo 3:** Como la inclusión  $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una inmersión tenemos definida la métrica  $g_0 = i^*g$  donde  $(\mathbb{R}^n, g)$  tiene la estructura Riemanniana usual de  $\mathbb{R}^n$  definida en el Ejemplo 1.

**Ejemplo 4:** Si  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana y  $f \in C^\infty(M)$ , entonces  $\bar{g} = e^f g$  es otra métrica Riemanniana.  $\bar{g}$  tiene la propiedad de inducir la misma noción de ángulo que  $g$ , es lo que se conoce como una métrica conforme a  $g$ . Precisamente diremos que  $\bar{g}$  es puntualmente conforme a  $g$  y llamaremos al conjunto de estas métricas Riemannianas, que serán de gran interés en esta tesis, *clase conforme a  $g$*  y la notaremos con:

$$[g] = \{e^f g \text{ tales que } f \in C^\infty(M)\}.$$

**Ejemplo 5:** Si  $(M, g)$  una variedad Riemanniana, cada difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  define una métrica Riemanniana en  $M$  isométrica a  $g$  dada por

$$h = f^*g.$$

**Observación 2.2** Toda métrica conforme a  $g$  es isométrica a una métrica de  $[g]$ .

## 2.2. Derivada covariante.

Dada una función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sobre una variedad  $M$  podemos definir su diferencial

$$df : TM \rightarrow \mathbb{R}$$

solamente usando la estructura diferenciable de la variedad. Sin embargo, ciertos operadores diferenciables que incluyen derivadas de orden superior, entre el que se encuentra por ejemplo el Hessiano, no está bien definido solo haciendo uso de la estructura diferencial. Nos interesa poder aplicar este tipo de operadores sobre campos tangentes y tensores definidos sobre  $M$ .

Para esto definiremos la derivada covariante. Está noción fue introducida por Ricci-Curvastro y Levi-Civita a principios del siglo XX. En el caso de una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$  podemos interpretarla del siguiente modo. Consideremos una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ . Sea  $c : I \rightarrow S$  una curva en  $S$  y  $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo de vectores tangentes a  $S$  a lo largo de  $c$ . Notar que el vector  $\frac{dv}{dt}(t)$  no siempre pertenece a  $T_{c(t)}S$ . Definimos la derivada covariante  $\frac{Dv}{dt}(t)$  como la proyección ortogonal de  $\frac{dv}{dt}(t)$  sobre  $T_{c(t)}S$ , es decir

$$\frac{Dv}{dt} = \left[ \frac{dv}{dt} \right]^T.$$

Esta noción de derivada, permite mostrar que las curvas que minimizan localmente la distancia (geodésicas) son aquellas cuya con aceleración es nula. Por otro lado, la curvatura Gaussiana de  $S$  es una expresión de la noción de aceleración provista por la derivada covariante.

**Definición 2.3** Dada  $M$  una variedad diferenciable, decimos que la función

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

es una *conexión afín*, y notamos  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ , si

1. Es  $C^\infty(M)$  lineal en la primera variable, es decir  $\nabla_{fX+gZ}(Y) = f\nabla_X Y + g\nabla_Z Y$ .
2. Es  $\mathbb{R}$  lineal en la segunda variable,  $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$ .
3. Cumple que  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$  para cualquier  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f \in C^\infty(M)$ .

**Observación 2.4** Si  $(U, x)$  es una carta en  $p$ , y  $X|_U = \bar{X}|_U$  e  $Y|_U = \bar{Y}|_U$  se tiene que:

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{\bar{X}} \bar{Y}|_p.$$

Tenemos la siguiente expresión local para la conexión

**Observación 2.5** Si  $(U, x)$  es una carta y los campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  se escriben localmente como  $X|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $Y|_U = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  respectivamente, se tiene que para  $p \in U$

$$\nabla_X Y|_p = \sum_k \left( X|_p(b_k) + \sum_{i,j} a_i(p) b_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p,$$

donde  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  son los símbolos de Christoffel que están definidos por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p = \sum_k \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p.$$

Es decir que,  $\Gamma_{ij}^k(p) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p(x_k)$ .

Sea  $c : I \rightarrow M$  una curva diferenciable en una variedad  $M$ . Notamos con  $\mathfrak{X}_c(M)$  al espacio de campos tangentes definidos a lo largo de  $c$ . Es decir, a aquellos campos diferenciables  $X : I \rightarrow TM$  que satisfacen que

$$X(t) \in T_{c(t)}M.$$

**Proposición 2.6** Sea  $M$  una variedad diferenciable dotada con una conexión  $\nabla$ . Sea  $c : I \rightarrow M$  una curva diferenciable. Luego, existe un único operador  $\nabla_D : \mathfrak{X}_c(M) \rightarrow \mathfrak{X}_c(M)$  que satisface

1. es  $\mathbb{R}$  lineal,  $\nabla_D(aX + bY) = a\nabla_D X + b\nabla_D Y$ , para cada  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}_c(M)$ .
2.  $\nabla_D(fX) = \frac{\partial f}{\partial t} X + f\nabla_D X$ , donde  $f \in C^\infty(I)$ .
3. Si  $X \in \mathfrak{X}_c(M)$  y  $\bar{X} \in \mathfrak{X}(M)$  es tal que  $\bar{X}(c(t)) = X(t)$  entonces  $\nabla_D X(t) = \nabla_{c'(t)} \bar{X}$ .

El operador  $\nabla_D$  se llama *derivada covariante a lo largo de  $c$*  y nos permite, por ejemplo, calcular la aceleración de una curva como

$$c''(t) = \nabla_D c'(t).$$

Definiendo localmente conexiones afines (ver Observación 2.5) y utilizando particiones de la unidad es sencillo ver que existen infinitas conexiones afines sobre una variedad diferenciable. ¿Existirá una distinguida, una canónica? El siguiente teorema nos dice que sí.

**Teorema 2.7** (Teorema fundamental de la geometría Riemanniana)

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana, existe una única conexión afín  $\nabla$  que satisface:

1. Es simétrica:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

donde  $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$  es el corchete de Lie.

2. Es compatible con la métrica:

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

Esta conexión se llama *conexión de Levi-Civita* de  $(M, g)$ .

**Ejemplo 6:** En  $\mathbb{R}^n$  la conexión de Levi-Civita de la métrica Euclídea es

$$\nabla_X Y \Big|_p = \sum_{j=1}^n X \Big|_p (b_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$$

donde  $Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

De aquí en más, siempre que hablemos de una conexión en una variedad Riemanniana nos estaremos refiriendo a la conexión de Levi-Civita.

### 2.3. Isomorfismos musicales y traza.

**Definición 2.8** Sobre una variedad Riemanniana  $(M, g)$ , la métrica  $g$  induce un isomorfismo  $\flat : T_p M \rightarrow T_p^* M$  de modo tal que si  $X_p \in T_p M$  entonces  $\flat(X_p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  está definido por

$$\flat(X_p)(Y_p) = g(X_p, Y_p).$$

En coordenadas locales,

$$\flat \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = g \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = g_{ij}.$$

Luego, la matriz de  $\flat$  en la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$  de  $T_p M$  es  $(g_{ij})_{ij}$  que es inversible con inversa  $(g^{ij})_{ij}$ .

$$\text{Si } X_p = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

$$\flat(X_p) = \sum_{i,j} X_i g_{ij}(p) dx_j \Big|_p$$

pues si evaluamos en  $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$  tenemos que

$$\flat(X_p) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = g \left( X_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \sum_i X_i g_{ij}(p).$$

Al operador inverso de  $\flat$  lo notamos con

$$\sharp = \flat^{-1} : T_p^* M \rightarrow T_p M.$$

Una de las aplicaciones de los isomorfismos musicales es que nos permiten definir el campo gradiente.

**Ejemplo 7:** El *gradiente* de una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nabla_g f$ , es el campo tangente definido por

$$\nabla_g f = \sharp(df).$$

Observemos que el gradiente cumple que

$$g(\nabla_g f, X) = \flat(\nabla_g f)(X) = df(X) \tag{2.1}$$

para cualquier  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Además, como sucede para funciones de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\nabla_g f$  es perpendicular a las curvas de nivel de  $f$ . En efecto, si para una curva  $c$  tenemos que  $f(c(t)) = a$  entonces

$$g(\nabla_g f, c'(t)) = df(c'(t)) = c'(t)(f) = \frac{d}{dt}(f(c(t))) = 0.$$

Localmente, si  $(U, x)$  es una carta, se verifica fácilmente que

$$\nabla_g f = \sum_i \left( \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.2}$$

**Observación 2.9** Para simplificar la notación notamos al campo gradiente de una función  $f$  con  $\nabla_g f$ . No confundir el campo gradiente de  $f$  con  $\nabla f$  que es la derivada covariante de  $f$  es decir  $df$  (ver Proposición 2.11).

Vamos a definir ahora la traza de un tensor de tipo  $(1, 1)$  sobre  $M$  y la extenderemos, usando el isomorfismo musical  $\sharp$  a tensores de tipo  $(0, 2)$ .

Al fibrado tensorial de tipo  $(l, k)$ ,  $l$  contravariantes y  $k$  covariantes, lo notaremos con

$$T^{l,k}(M) = (\otimes^l TM) \otimes (\otimes^k T^*M)$$

y al conjunto de secciones suaves, campos tensoriales o tensores,

$$\Gamma(T^{l,k}(M)) := \left\{ T : M \longrightarrow T^{l,k}(M) : T \text{ suave} \right\}$$

con  $\mathcal{T}^{l,k}(M)$ .

**Definición 2.10** Si  $T$  es un tensor de tipo  $(1, 1)$ , que en coordenadas locales escribimos como  $T = \sum_{i,j} T_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j$  definimos la *traza* de  $T$  como

$$tr_g(T) = \sum_{i,j} T_{ij} dx_j \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j} T_{ij} \delta_{ij} = \sum_i T_{ii}. \quad (2.3)$$

Sea  $T \in T^{0,2}(M)$  entonces definimos la traza de  $T$  contrayendo el primer índice del tensor. Utilizamos el isomorfismo  $\sharp$  para transformar a  $T$  es un tensor tipo  $(1,1)$  y luego tomamos la traza como en (2.3):

$$tr_g(T) = tr_g \left( \sum_{i,j} T_{ij} \sharp(dx_i) \otimes dx_j \right) = tr_g \left( \sum_{i,j,k} g^{ik} T_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \otimes dx_j \right) = \sum_{ij} g^{ij} T_{ij}.$$

Observemos que no depende del índice contraído, es decir que si contraemos el segundo índice el resultado es el mismo. De esta misma manera podemos extender esta definición a tensores cualesquiera de  $T^{l,k}(M)$ .

Con estos conceptos podemos extender la noción de derivada covariante a cualquier tensor de tipo  $(l, k)$ .

**Proposición 2.11** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana. Entonces existe una única conexión  $\nabla : \mathcal{T}^{l,k}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{l,k+1}(M)$  que satisface:



1. Coincide con la conexión (de Levi-Civita) sobre campos tangentes.
2.  $\nabla_X f = df(X) = X(f)$  si  $f \in C^\infty(M)$ .
3.  $\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$  para todo par de tensores  $F$  y  $G$ .
4.  $\nabla_X(\text{tr}_g(Y)) = \text{tr}_g(\nabla_X Y)$ .

La conexión anterior satisface además que:

1. Si  $w$  es una 1-forma diferenciable e  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  entonces

$$\nabla_X(w \otimes Y) = \nabla_X(w(Y)) + w(\nabla_X Y).$$

2. Si  $w_1, \dots, w_l$  son 1-formas diferenciables e  $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(M)$  entonces

$$\nabla_X F(w_1, \dots, w_l, Y_1, \dots, Y_k) = X(F(w_1, \dots, w_l, Y_1, \dots, Y_k)) -$$

$$- \sum_{j=1}^l F(w_1, \dots, \nabla_X w_j, \dots, w_l, Y_1, \dots, Y_k) - \sum_{i=1}^k F(w_1, \dots, w_l, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k).$$

La derivada covariante  $\nabla : \mathcal{T}^{l,k}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{l,k+1}(M)$  es la que está definida por

$$\nabla F(w_1, \dots, w_l, Y_1, \dots, Y_l, X) = \nabla_X F(w_1, \dots, w_l, Y_1, \dots, Y_l).$$

También definimos el operador *codiferencial*

$$\delta : \mathcal{T}^{l,k+1}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{l,k}(M)$$

como

$$\delta(T) = -\text{tr}(\nabla T).$$

En el próximo capítulo veremos que  $\delta$  es el operador adjunto de  $\nabla$  con respecto al producto interno definido en (3.2).

**Observación 2.12** Sea  $w$  una 1-forma. En un sistema de coordenadas  $(U, x)$ ,  $w$  se escribe como

$$w = \sum_i w_i dx_i.$$

Entonces su derivada covariante, que es un tensor de tipo  $(0, 2)$ , se escribe como

$$\nabla w = \sum_{ij} a_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

en donde

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \nabla w \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} w \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} w \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - w \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w \left( \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k w_k. \end{aligned}$$

En particular, si  $f \in C^\infty(M)$ , en un sistema de coordenadas locales tenemos que  $w = df$  es

$$\nabla df = \sum_{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) dx_i \otimes dx_j. \quad (2.4)$$

Más aún, si  $v \in C^\infty(M)$  entonces

$$\nabla(v df) = \sum_{ij} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + v \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - v \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) dx_i \otimes dx_j. \quad (2.5)$$

## 2.4. Densidad Riemanniana.

En esta sección veremos como es posible definir la noción de área y volumen en una variedad Riemanniana. Para esto, consideremos una carta  $(U, x)$ ,  $p \in U$  y sea  $\{E_1, \dots, E_n\}$  una base ortonormal de  $T_p M$ . Si escribimos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{k=1}^n a_{ik} E_k$$

tenemos que

$$g_{ij}(p) = g \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = (A \cdot A^t)_{ij}$$

donde  $(A)_{ij} = a_{ij}$ .

Como el volumen del paralelepípedo formado por  $E_1, \dots, E_n$  es  $V(E_1, \dots, E_n) = 1$ , el volumen del paralelepípedo formado por  $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p$  es

$$V\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right) = |\det(a_{ij})|V(E_1, \dots, E_n) = \sqrt{\det(g_{ij})}(p).$$

Si  $R \subseteq U$  es una región tal que  $\bar{R}$  es un conjunto compacto, definimos su volumen como

$$\text{Vol}(R) = \int_{x(R)} (x^{-1})^* \left( \sqrt{\det(g_{ij})} \right) dx_1 \dots dx_n = \int_R dV_g. \quad (2.6)$$

Si  $R$  no está incluido en una carta, consideramos un atlas  $\mathcal{A} = (U_\alpha, x_\alpha)_\alpha$  y una partición de la unidad subordinada al atlas  $\mathcal{A}$ . Es decir, una familia de funciones  $\{\rho_\alpha\}$ ,  $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$ , donde el soporte de cada función  $\rho_\alpha$  es compacto, está contenido en  $U_\alpha$  y  $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$ . Luego definimos el volumen de  $R$  como

$$\text{Vol}(R) = \int_R dV_g = \sum_\alpha \int_{x(R \cap U_\alpha)} (x_\alpha^{-1})^* \left( \rho_\alpha \sqrt{\det(g_{ij})} \right) dx_1 \dots dx_n. \quad (2.7)$$

Es fácil ver que tanto (2.6) como (2.7) no dependen de la carta, ni del atlas ni de la partición de la unidad elegida.

Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua de soporte compacto definimos la integral de  $f$  como

$$\int_M f dV_g = \sum_\alpha \int_{x(U_\alpha)} (x_\alpha^{-1})^* \left( \rho_\alpha f \sqrt{\det(g_{ij})} \right) dx_1 \dots dx_n. \quad (2.8)$$

Las funciones

$$\sqrt{\det(g_{ij})} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

las llamamos *densidades Riemannianas*.

**Observación 2.13** Si la variedad diferenciable  $M$  de la variedad Riemanniana  $(M, g)$  fuera orientable, fijamos una orientación, es decir fijamos un atlas orientado  $\mathcal{A}$ . Para cada  $p \in M$ , consideramos una base ortonormal orientada positivamente  $E_1, \dots, E_n$ . Luego definimos la  $n$ -forma en  $T_p M$

$$E^1 \wedge \dots \wedge E^n$$

donde  $\{E^1, \dots, E^n\}$  es la base dual de  $\{E_1, \dots, E_n\}$ . Es sencillo de ver que

$$p \longrightarrow w(p) = E^1 \wedge \dots \wedge E^n$$

donde  $\{E^1, \dots, E^n\}$  es una base ortonormal de  $T_p M$  es una  $n$ -forma no nula (sección diferenciable), lo que se conoce como un *elemento de volumen*.

La expresión local de esta  $n$ -forma es

$$w|_U = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

para todo carta  $(U, x)$  del atlas orientado  $\mathcal{A}$ .

## 2.5. Curvatura.

Introduciremos en esta sección las distintas nociones clásicas de curvatura y sus interpretaciones geométricas.

**Definición 2.14** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana. El *tensor de curvatura* de  $(M, g)$  es el tensor de tipo  $(1, 3)$   $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

En coordenadas locales tenemos que

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)Z = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} Z - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Z,$$

pues  $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ .

Si  $(U, x)$  es una carta tenemos que

$$R = \sum_{ijkl} R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \otimes dx_i \otimes dx_j \otimes dx_k$$

donde  $R_{ijk}^l = \left( R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \right) (x^l)$  y, por lo tanto,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Dados  $X, Y, Z, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f, h \in C^\infty(M)$  se puede ver que  $R$  satisface

1.  $R(fX_1 + X_2, Y)Z = fR(X_1, Y)Z + hR(X_2, Y)Z.$
2.  $R(X, fY_1 + gY_2)Z = fR(X, Y_1)Z + hR(X, Y_2)Z.$
3.  $R(X, Y)(fZ_1 + gZ_2) = fR(X, Y)Z_1 + hR(X, Y)Z_2.$

y por lo tanto,  $R$  es un tensor de tipo  $(1, 3)$ .

**Ejemplo 8:** Sea  $\mathbb{R}^n$  con la métrica Euclídea  $g_e$ . Si  $Z = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  con respecto a la carta  $(\mathbb{R}^n, id)$  tenemos que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} Z - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Z = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_j \partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_l} = 0.$$

Luego el tensor de curvatura de  $(\mathbb{R}^n, g_e)$  es nulo.

El ejemplo anterior nos permite pensar que el tensor de curvatura nos dice cuan distinta es la métrica de  $M$  comparada con la Euclídea.

Haciendo un abuso de notación, también llamaremos tensor de curvatura a

$$R := \flat R$$

es decir

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle .$$

$R$  resulta ser un tensor de tipo  $(0, 4)$  que cumple las siguientes propiedades algebraicas:

1. (Identidad de Bianchi)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$
2.  $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0.$
3.  $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T).$
4.  $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z).$
5.  $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y).$

La expresión en coordenadas locales de esta versión del tensor de curvatura es

$$R = \sum_{ijkl} R_{ijkl} dx_i \otimes dx_j \otimes dx_k \otimes dx_l$$

donde

$$R_{ijkl} = \langle R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \rangle = \langle \sum_{m=1}^n R_{ijk}^m \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_l} \rangle = \sum_{m=1}^n g_{lm} R_{ijk}^m.$$

El tensor de curvatura es invariante por isometrías locales. Precisamente, dadas  $(M, g)$  y  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  dos variedades Riemannianas y  $\varphi : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  una isometría local entonces  $\varphi^*(\tilde{R}) = R$ , ver [23].

**Definición 2.15** Una variedad Riemanniana se dice *plana* si es localmente isométrica con  $\mathbb{R}^n$ .

Se puede ver que  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana plana si y solo si  $R \equiv 0$ . Ver por ejemplo el Teorema 7.3 de [23].

Por la naturaleza algebraica del tensor de curvatura y sus simetrías resulta sencillo realizar cálculos. Sin embargo, es difícil obtener a simple vista de este una intuición sobre la geometría de la variedad. En cambio, algunas contracciones del tensor subrayan ciertas propiedades geométricas.

## Curvatura seccional.

**Definición 2.16** Dado  $p \in M$  y  $\sigma$  un subespacio de dimensión 2 de  $T_p M$ , se define la *curvatura seccional* de  $\sigma$  como

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X \wedge Y|^2}$$

donde  $\{X, Y\}$  es una base de  $\sigma$  y  $|X \wedge Y|^2 = \|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 - (g(X, Y))^2$ .

Debido a la propiedades del tensor de curvatura la definición de  $K(\sigma)$  no depende de la base elegida para  $\sigma$ .

Se puede ver (ver por ejemplo Lema 3.3 de [7]) que si  $K(X, Y) = \tilde{K}(X, Y)$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  linealmente independientes entonces,

$$R = \tilde{R}.$$

Como consecuencia tenemos que la curvatura seccional es constantemente  $c$  si y solo si el tensor de curvatura es

$$R(X, Y, Z, T) = c(\langle X, T \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle).$$

## Curvatura de Ricci.

**Definición 2.17** Llamamos *tensor de Ricci* al tensor de tipo  $(0, 2)$   $Ricc : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definido por

$$Ricc(X, Y) = Tr(Z \rightarrow R(Z, X)Y).$$

Dada una carta  $(U, x)$  podemos escribir localmente al tensor de Ricci de la siguiente manera

$$Ricc = \sum_{i,j} R_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

donde

$$R_{ij} = Tr \left( Z \rightarrow R \left( Z, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{kl} g^{kl} R_{kijl}.$$

En particular, si la base  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$  es ortonormal para algún  $p$  tenemos que

$$R_{ij}(p) = \sum_{k=1}^n R_{kijk}(p).$$

El tensor de Ricci es una forma bilineal simétrica. Luego su forma cuadrática asociada tiene la misma información. A partir del tensor de Ricci definimos la curvatura de Ricci.

**Definición 2.18** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$  y sean  $p \in M$  y  $X \in T_p M$  de norma 1, definimos la *curvatura de Ricci* en la dirección de  $X$  como

$$Ricc_g(X) = Ricc(X, X).$$

La curvatura de Ricci y la curvatura seccional se relacionan de la siguiente manera. Sea  $\{X, E_2, \dots, E_n\}$  una base ortogonal de  $T_p M$ , tenemos que

$$Ricc_g(X) = Ricc(X, X) = \sum_{i=2}^n \langle R(E_i, X)X, E_i \rangle = \sum_{i=2}^n K(X, E_i)$$

donde  $K(X, E_i)$  es la curvatura seccional del subespacio generado por  $\{X, E_i\}$ .

## Curvatura escalar.

**Definición 2.19** La *curvatura escalar* se define como la traza del tensor de Ricci, es decir si  $p \in M$  y  $(U, x)$  una carta en  $p$

$$S_p = \text{tr}_g(\text{Ric}(p)) = \sum_{i,j} g^{ij}(p) R_{ij}(p).$$

Observemos que la curvatura escalar en  $p \in M$  en términos de una base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  de  $T_p M$  queda expresada por

$$S_p = \sum_{i,j} R_{jij} = \sum_{i \neq j} K(E_i, E_j).$$

## 2.6. Geodésicas y cartas normales.

En esta sección repasaremos el concepto de curvas geodésica que es de utilidad para entender el significado de la curvatura. También definiremos las cartas normales, que en algunos casos, resultan ser las cartas más convenientes a elegir para realizar los cálculos.

Las geodésicas son de alguna manera, una generalización de los segmentos del espacio Euclídeo. Una de las principales características de los segmentos en  $\mathbb{R}^n$  es que su aceleración es nula. De esta forma definiremos a las geodésicas. Una propiedad que tienen las curvas de aceleración nula es que minimizan distancias localmente. Por otro lado, si una curva minimiza la distancia entre dos puntos de la variedad entonces se tratará de una geodésica.

**Definición 2.20** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana y  $c : I \rightarrow M$  es una curva. Diremos que  $c$  una *geodésica* si para todo  $t \in I$  cumple que

$$\nabla_D c' \Big|_t = 0.$$

Si  $(U, x)$  es una carta, la expresión local del campo de velocidad de la curva  $c$  es

$$c'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(x_k \circ c)(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{c(t)}.$$

Derivando esta expresión y usando las propiedades de la derivada covariante (ver la Proposición 2.6) obtenemos que



$$\begin{aligned} \nabla_D c \Big|_t &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(x_k \circ c)(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{c(t)} + \frac{\partial(x_k \circ c)(t)}{\partial t} \nabla_D \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{c(t)} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2(x_k \circ c)(t)}{\partial t^2} + \sum_{ij} \frac{\partial(x_i \circ c)(t)}{\partial t} \frac{\partial(x_j \circ c)(t)}{\partial t} \Gamma_{ij}^k(c(t)) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{c(t)}. \end{aligned}$$

Luego,  $c$  es geodésica si y solo si para todo  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\frac{\partial^2(x_k \circ c)(t)}{\partial t^2} + \sum_{ij} \frac{\partial(x_i \circ c)(t)}{\partial t} \frac{\partial(x_j \circ c)(t)}{\partial t} \Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0.$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.21** Dados  $p \in M$  y  $X \in T_p M$  existe  $\epsilon > 0$  y una única geodésica  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  tal que  $c(0) = p$  y  $c'(0) = X$ . Llamamos  $c_X$  a esta curva y notamos con  $I_X$  al intervalo maximal en el que está definida.

**Definición 2.22** Notamos con

$$\widetilde{TM} = \{(p, Y) \in TM \text{ tales que } 1 \in I_X\}$$

y con  $\widetilde{T_p M} = T_p M \cap \widetilde{TM}$ .

Definimos la aplicación *exponencial*  $exp : \widetilde{TM} \rightarrow M$  como

$$exp(p, X) = c_X(1).$$

Si fijamos  $p \in M$  definimos  $exp_p : \widetilde{T_p M} \rightarrow M$  por

$$exp_p(X) = exp(p, X).$$

Los conjuntos  $\widetilde{TM}$  y  $\widetilde{T_p M}$  satisfacen las siguientes propiedades (ver [7] o [23]) :

1.  $\widetilde{TM}$  es un abierto de  $TM$ .
2.  $0 \in \widetilde{T_p M}$ .

3.  $\widetilde{T_p M}$  es un abierto estrellado de  $T_p M$ .

**Lema 2.23** Sea  $\varphi(t, p, X) = c_X(t)$ . Tenemos que

$$\varphi(t, p, X) = \varphi(1, p, tX).$$

Luego, se tiene que

$$c_X(t) = \exp_p(tX).$$

Se puede ver que las funciones  $\exp : \widetilde{T_p M} \rightarrow M$  y  $\exp_p : \widetilde{T_p M} \rightarrow M$  son suaves y que resultan ser difeomorfismos locales alrededor de  $0 \in \widetilde{T_p M}$ . De esta manera podemos dar la definición de entorno geodésico.

**Definición 2.24** Sea  $\epsilon > 0$  y  $U \subset M$  un abierto de modo tal que  $B_\epsilon(0) \subseteq \widetilde{T_p M}$  y  $\exp_p : B_\epsilon(0) \rightarrow U$  sea un difeomorfismo. Al abierto  $U$  se lo llama *bola geodésica*.

Ahora si, podemos definir las coordenadas normales centradas  $p$  del siguiente modo.

**Definición 2.25** Sea  $p \in M$ . Llamamos *carta normal* centrada en  $p$  a una carta  $(U, x)$  donde  $U$  es una bola geodésica,

$$x = \varphi^{-1} \circ \exp_p^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

donde  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  está dado por

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i E_i$$

siendo  $\{E_1, \dots, E_n\}$  una base ortonormal de  $T_p M$ .

Las coordenadas normales son de gran utilidad porque, como veremos en la siguiente proposición, nos da una expresión más simple de las derivadas de la métrica y de los símbolos de Christoffel.

**Proposición 2.26** Si  $(U, x)$  es una carta normal centrada en  $p$ , entonces

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0$$

y

$$\left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right|_p = 0.$$

para todo  $1 \leq i, j, k \leq n$ .

**Demostración:** La geodésica  $c(t)$  que cumple que  $c(0) = p$  y  $c'(0) = X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  está dada, como vimos anteriormente, por  $c(t) = \exp_p(tX)$ . Luego,

$$x \circ c(t) = \varphi^{-1} \circ \exp^{-1} \circ \exp(tX) = \varphi^{-1}(tX) = t\varphi^{-1}(X)$$

y por lo tanto,  $\frac{\partial^2(x \circ c(t))}{\partial t^2} = 0$ .

Sabemos que como  $c(t)$  es una geodésica entonces se satisface que

$$\frac{\partial^2(x_k \circ c)(t)}{\partial t^2} + \sum_{ij} \frac{\partial(x_i \circ c)(t)}{\partial t} \frac{\partial(x_j \circ c)(t)}{\partial t} \Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0.$$

Por lo observado anteriormente el primer término es 0 y entonces se tiene que

$$\sum_{ij} \frac{\partial(x_i \circ c)(t)}{\partial t} \frac{\partial(x_j \circ c)(t)}{\partial t} \Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0.$$

para todo  $t$ .

Si tomamos  $X = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$  y evaluando esta última ecuación en  $t = 0$  se deduce que

$$\Gamma_{ii}^k(p) = 0.$$

Si tomamos  $X = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$  y evaluamos en  $t = 0$  tenemos que

$$\Gamma_{ii}^k(p) + \Gamma_{ij}^k(p) + \Gamma_{ji}^k(p) + \Gamma_{jj}^k(p) = 0.$$

Y como  $\Gamma_{ij}^k(p) = \Gamma_{ji}^k(p)$  concluimos que  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$  para todo  $i, j, k$ .

Vemos ahora que  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \Big|_p = 0$ .

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p g(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) =$$

$$= g \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) + g \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \Big|_p \right)$$

$$= \sum_{l=1}^n \Gamma_{ki}^l(p) g_{lj}(p) + \sum_{l=1}^n \Gamma_{kj}^l(p) g_{il}(p) = 0.$$

□

Usando la función exponencial podemos relacionar la bola Euclídea con la bola geodésica. La curvatura seccional y la curvatura escalar permiten calcular como cambian sus propiedades geométricas dependiendo del espacio.

El siguiente resultado nos brinda una interpretación geométrica de la curvatura seccional. Esta mide cuánto se diferencia la longitud de una circunferencia de radio pequeño  $r$  de  $2\pi r$ .

**Teorema 2.27** Sea  $p \in M$ ,  $X, Y \in T_p M$  linealmente independientes y  $C_{T_p M}^r$  la circunferencia de radio  $r$  en el subespacio generado por  $\{X, Y\}$ . Sea  $C_M^r(p) = \exp_p(C_{T_p M}^r) \subseteq M$  y notemos con  $l(C_M^r(p))$  su longitud. Se cumple que

$$K(X, Y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - l(C_M^r(p))}{r^3}.$$

Por otro lado, la curvatura escalar mide cuanto se modifica el volumen de una bola de radio  $r$ , con  $r$  pequeño, respecto al volumen de la bola Euclídea de igual radio. La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [14]

**Teorema 2.28** Si  $p \in M$ ,  $B_r^e(0)$  la bola de radio  $r$  en  $T_p M$  y sea  $B_r(p)$  la bola geodésica en  $M$ ,  $B_r(p) = \exp_p(B_r^e(0)) \subseteq M$ , entonces si  $r$  es suficientemente chico tenemos que

$$\text{Vol}(B_r(p)) = \text{Vol}(B_r^e(0)) \left( 1 - \frac{S_g(p)r^2}{6(n+2)} + o(r^2) \right).$$

Observemos que con este resultado, si  $S_g(p) > 0$  entonces el volumen de la bola geodésica centrada en  $p$  es menor que el de la bola Euclídea y es mayor si  $S_g(p) < 0$ .

## 2.7. Operadores diferenciales y teoremas integrales.

La definición de operador diferenciable para variedades Riemannianas la dejaremos para el Capítulo 3 (ver Definición 3.6). En esta sección introduciremos algunos operadores diferenciales usuales del análisis como son el Hessiano, el Laplaciano y la divergencia en el contexto de variedades Riemannianas.

### 2.7.1. Hessiano.

Se define el Hessiano de una función  $f \in C^\infty(M)$  del siguiente modo.

**Definición 2.29** Sea  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, llamamos *Hessiano* de  $f$  y lo notamos con  $Hess_g(f)$  o  $\nabla^2 f$  al tensor de tipo  $(0, 2)$  definido por

$$\nabla^2 f = \nabla(\nabla f).$$

Es decir es aplicar dos veces la derivada covariante a la 0-forma  $f$ , o bien, la derivada covariante de la 1-forma  $df$ . Precisamente,

$$\nabla^2 f = \nabla(\nabla f)(X, Y) = \nabla_X(\nabla_Y f) = \nabla_X(df(Y)) = X(Y(f)) - df(\nabla_X Y).$$

Dada una carta  $(U, x)$  la expresión local del Hessiano es

$$\nabla^2 f = \sum_{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) dx_i \otimes dx_j.$$

Usaremos la siguiente identidad más adelante

**Proposición 2.30** El Hessiano satisface que

$$\nabla^2 f^2 = 2(f\nabla^2 f + df \otimes df). \quad (2.9)$$

**Demostración:** Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  entonces

$$\begin{aligned} \nabla^2 f^2(X, Y) &= \nabla_X(\nabla_Y f^2) = \nabla_X(2f\nabla_Y f) = 2(\nabla_X(f)\nabla_Y f + f\nabla_X\nabla_Y f). \\ &= 2(X(f)Y(f) + f\nabla^2 f(X, Y)). \end{aligned}$$

□

### 2.7.2. Divergencia.

**Definición 2.31** Si  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  entonces definimos la *divergencia* de  $X$  como

$$div_g(X) = tr_g(Z \rightarrow \nabla_Z X).$$

La divergencia cumple las siguientes propiedades, cuya demostración puede encontrarse en [10]

**Proposición 2.32** Si  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  entonces

1.  $div_g(fX) = fdiv_g(X) + g(\nabla_g f, X)$ .
2. Si  $(U, x)$  es una carta,  $X|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  podemos escribir en coordenadas locales como

$$div_g(X)|_U = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n a_j \Gamma_{ji}^i \right)$$

que además puede expresarse como

$$div_g(X)|_U = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sqrt{\det(g_{ij})} a_k \right). \quad (2.10)$$

3. Si la carta anterior es normal, la divergencia evaluada en  $P$  es

$$div_g(X)|_P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \Big|_P.$$

El siguiente diagrama conmutativo relaciona algunos de los operadores vistos.

$$\begin{array}{ccc}
 & C^\infty(M) & \\
 \begin{array}{c} \nearrow \\ -div_g \end{array} & & \begin{array}{c} \nwarrow \\ \delta \end{array} \\
 \mathfrak{X}(M) & \begin{array}{c} \xrightarrow{b} \\ \xleftarrow{\#} \end{array} & \Omega^1(M) \\
 \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nabla_g \end{array} & & \begin{array}{c} \nearrow \\ d \end{array} \\
 & C^\infty(M) & 
 \end{array}$$

### 2.7.3. Operador de Laplace-Beltrami.

**Definición 2.33** Definimos el operador de *Laplace-Beltrami* de una función suave  $f$ , al que llamaremos para abreviar Laplaciano, como

$$\Delta_g f = -div_g(\nabla_g f) = -tr_g(\nabla^2 f).$$

Del diagrama conmutativo anterior se deduce también que

$$\Delta_g f = \delta(df).$$

Podemos escribir el Laplaciano localmente para una carta  $(U, x)$  del siguiente modo

$$\Delta_g f|_U = - \sum_{ij} g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

**Observación 2.34** Si  $(U, x)$  es una carta normal centrada en  $p$ , tenemos que

$$\Delta_g f(p) = - \sum_{ii} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \Big|_p.$$

De la expresión local del campo gradiente, Ecuación (2.2), y la de la divergencia, Ecuación (2.10), tenemos la siguiente expresión local del operador de Laplace-Beltrami

$$\Delta_g f = - \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

#### 2.7.4. Teoremas integrales.

En esta sección enunciaremos el teorema de la divergencia y las fórmulas de Green, conocidas para el espacio Euclídeo, en el contexto de variedades Riemannianas. Las demostraciones de estos teoremas se pueden ver en [10].

**Teorema 2.35** (Teorema de la Divergencia)

Sea  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo con soporte compacto, entonces

$$\int_M \operatorname{div}(X) dV_g = 0.$$

Por el Teorema 2.35 y la Proposición 2.32 podemos deducir que si  $M$  es una variedad cerrada,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f \in C^\infty(M)$  entonces

$$\int_M f \operatorname{div}(X) dV_g = - \int_M g(\nabla_g f, X) dV_g.$$

Del Teorema de la Divergencia se deducen fácilmente las siguientes fórmulas llamadas comúnmente Fórmulas de Green.

**Teorema 2.36** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana,  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$  de soporte compacto, entonces

$$1. \int_M (f_1 \Delta_g f_2 - g(\nabla f_1, \nabla f_2)) dV_g = 0.$$

$$2. \int_M (f_1 \Delta_g f_2 - f_2 \Delta_g f_1) dV_g = 0.$$

En particular, si  $M$  es cerrada tenemos que

$$\int_M \Delta_g f dV_g = 0.$$

Si  $u, v \in C^\infty(M)$  y consideramos el campo  $X$  es el campo que localmente se escribe como  $X|_U = uv \frac{\partial}{\partial x_i}$ , para algún  $1 \leq i \leq n$ , entonces por (2.10) tenemos que:

$$\operatorname{div}_g(X)|_U = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{\det(g_{ij})} uv \right).$$

Por lo tanto, cuando  $M$  es una variedad cerrada obtenemos que

$$\int u \frac{\partial v}{\partial x_i} dV_g = - \int v \frac{\partial u}{\partial x_i} - \int \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{\det(g_{ij})} \right) uv dV_g. \quad (2.11)$$



# Capítulo 3

## Espacio de métricas Riemannianas

En este capítulo estudiaremos el espacio de métricas Riemannianas de una variedad diferenciable  $M$ . Veremos en primer lugar que toda variedad diferenciable admite una métrica Riemanniana, más aún admite infinitas. Luego, definiremos una noción de distancia entre métricas Riemannianas y finalmente veremos como varían algunos operadores sobre una curva definida en este espacio.

### 3.1. Espacio de métricas de una variedad Riemanniana.

En esta sección, para simplificar la exposición, solo consideraremos variedades cerradas, es decir compactas y sin borde. Sin embargo, muchas de las definiciones, observaciones y resultados que aparecen son válidas en contextos más generales.

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , notamos con  $\mathcal{M}$  al conjunto de métricas Riemannianas sobre  $M$ .

El conjunto  $\mathcal{M}$  es no vacío, más aún es un espacio muy grande. En efecto, dado un atlas  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  de  $M$ , en cada  $U_\alpha$  podemos considerar en cada carta la métrica Riemanniana inducida de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$g_\alpha = x_\alpha^* g_e.$$

Podemos extender estas métricas locales a toda la variedad considerando una partición de la unidad  $\{\rho_\alpha\}$  subordinada a  $\{U_\alpha\}$  y definiendo la métrica Riemanniana

$$g(p)(X, Y) = \sum_\alpha \rho_\alpha(p) g_\alpha(p)(X, Y).$$

Dada una métrica Riemanniana  $g$  y un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ , el pullback de  $g$  por  $f$  en  $p$  es

$$f^*g(p)(v, w) = g(f(p))(df_p v, df_p w).$$

Estas métricas Riemannianas son isométricas a  $g$  y tienen las mismas propiedades geométricas. Por otro lado, dada una función positiva  $f \in C^\infty(M)$  y una métrica Riemanniana  $g$ ,

$$h(p)(X, Y) = f(p)g(p)(X, Y)$$

también resulta una métrica Riemanniana sobre  $M$ , que como dijimos en el capítulo anterior, es puntualmente conforme a  $g$ , es decir está en la misma clase conforme de  $g$ .

$\mathcal{M}$  es un cono abierto convexo. Si  $g_1$  y  $g_2$  son dos métricas Riemannianas podemos considerar la curva

$$g(t) = tg_1 + (1 - t)g_2$$

con  $t \in [0, 1]$ . Tenemos que  $g(t) \in \mathcal{M}$  para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $g(0) = g_2$  y  $g(1) = g_1$ . Por otro lado, se verifica que  $\lambda g \in \mathcal{M}$  para todo  $\lambda > 0$  y  $g \in \mathcal{M}$ .

Si bien el espacio de métricas Riemannianas es muy grande, de hecho es una variedad de dimensión infinita, no todas las variedades admiten cualquier tipo de geometría. Existen algunas obstrucciones topológicas.

Por ejemplo, para superficies cerradas el teorema de Gauss-Bonnet nos dice que

$$\int_M K dV_g = 2\pi\chi(M) \tag{3.1}$$

donde  $\chi(M)$  la característica de Euler de  $M$ , que es un valor que solo depende de la topología de  $M$ . Si  $M = T^2$  es el toro, la característica de Euler es  $\chi(T^2) = 0$ . Por lo tanto, de (3.1) es claro que no es posible definir una métrica Riemanniana en donde la curvatura sea constante y distinta de 0. Si  $M = S^2$  su característica de Euler es  $\chi(S^2) = 2$ , con lo cual no puede haber una métrica de curvatura no positiva.

En variedades de dimensión mayor también hay obstrucciones. Por ejemplo, en [17], Gromov y Lawson y en [29], Shoen y Yau, probaron que el toro  $n$  dimensional no admite métricas Riemannianas de curvatura estrictamente positivas.

Lichnerowicz [25] y Hitchin [19] probaron que si una variedad diferenciable cerrada admite una métrica Riemanniana de curvatura escalar positiva entonces su índice  $\alpha$  necesariamente tiene que ser nulo (para una definición del índice  $\alpha$  ver [4] y las referencias allí citadas).

**Definición 3.1** Decimos que una métrica Riemanniana  $g$  en  $M$  es de Einstein si existe una función  $f \in C^\infty(M)$  tal que

$$\text{Ric}_g = fg.$$

En realidad, en caso de existir, dicha función  $f$  debe ser necesariamente

$$f(p) = \frac{S_g(p)}{n}.$$

Es conocido que existen variedades cerradas de dimensión 3 y 4 que no admiten métricas de Einstein. Esto puede verse en [22]. En el Corolario 3.18 mostramos que  $S^2 \times S^1$  no admite métricas Riemannianas de Einstein.

### 3.1.1. Distancia entre métricas.

En [1], Bando y Urakawa dotan a  $\mathcal{M}$  de una topología, que llamaremos la topología  $C^\infty$  y que es inducida por la siguiente estructura métrica.

Como  $M$  es compacta, podemos considerar un atlas finito  $\{U_i\}_{i=1,\dots,l}$  y un cubrimiento finito de abiertos  $\{V_i\}_{i=1,\dots,l}$  tales que  $\bar{V}_i \subseteq U_i$ .

Dado un tensor  $h$  de tipo  $(0, 2)$ , definimos

$$\|h\|_{k, V_s} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{i, j} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} h_{ij}^s}{\partial x_\alpha} \right\|_\infty$$

donde  $h|_{V_s} = \sum_{i, j} h_{ij}^s dx_i \otimes dx_j$ .

Definimos

$$\|h\|_k = \sum_{s=1}^l \|h\|_{k, V_s}.$$

Luego tenemos definido en  $\mathcal{T}^{0,2}(M)$  la norma

$$\|h\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|h\|_k}{2^k (1 + \|h\|_k)}$$

y su distancia asociada

$$d_1(g, h) = \|g - h\|.$$

También consideraremos la distancia  $C^0$  como

$$d_2(g, h) = \sup_{x \in M} d_2^x(g, h)$$

donde

$$d_2^x(g, h) = \inf\{\delta > 0 \text{ tales que } e^{-\delta}(h)_x < (g)_x < e^{\delta}(h)_x\}.$$

**Definición 3.2** La topología  $C^\infty$  en  $\mathcal{M}$  será la inducida por la distancia

$$d = d_1 + d_2.$$

La distancia  $d$  es completa, en particular  $\mathcal{M}$  es un espacio de Frechet.

### 3.1.2. Producto interno en el espacio de tensores.

Definiremos ahora un producto interno en el espacio  $\mathcal{T}^{0,k}(M)$ .

**Definición 3.3** Dados  $v, w \in \mathcal{T}^{0,k}(M)$  definimos el producto interno  $(, )$  como

$$(v, w) = \int_M \langle v, w \rangle dV_g \tag{3.2}$$

donde  $\langle v, w \rangle$  es el producto interno puntual definido por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_k j_k} v_{i_1 \dots i_k} w_{j_1 \dots j_k} \tag{3.3}$$

siendo  $v = \sum v_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k}$  y  $w = \sum w_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{j_k}$  las expresiones locales de los tensores  $v$  y de  $w$  alrededor de  $p$ .

En particular, para tensores de tipo  $(0, 1)$ , el producto interno puntual es

$$\langle w, v \rangle = \sum_{ij} g^{ij} w_i v_j$$

y para tensores de tipo  $(0, 2)$ , el producto interno puntual es

$$\langle w, v \rangle = \sum_{ijkl} g^{ik} g^{jl} w_{kl} v_{ij}.$$

**Observación 3.4** El operador codiferencial  $\delta : \mathcal{T}^{0,k}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{0,k-1}(M)$  es el operador adjunto de la derivada covariante  $\nabla : \mathcal{T}^{0,k-1}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{0,k}(M)$  con respecto al producto interno  $(\cdot, \cdot)$ , es decir que

$$(u, \nabla v) = (\delta u, v).$$

Recordar que si  $k = 0$  la derivada covariante coincide con la derivada exterior

$$\nabla = d : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$$

y su adjunta  $\delta : \Omega^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$  satisface localmente que

$$\delta(w) = -\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{\det(g_{ij})} w_j \right) \quad (3.4)$$

si  $w = \sum_{i=1}^n w_i dx_i$ .

En particular, si  $f \in C^\infty(M)$ ,

$$\delta(f w) = -\sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ij} w_j - f \delta w. \quad (3.5)$$

## 3.2. Descomposiciones del espacio tangente de $\mathcal{M}$ .

Como mencionamos, el espacio de métricas  $\mathcal{M}$  es un subconjunto de las secciones  $C^\infty(M)$  del fibrado tensorial de tipo  $(0, 2)$  sobre  $M$ . Precisamente, las secciones que son simétricas y definidas positiva. Si  $g \in \mathcal{M}$ , su espacio tangente,  $T_g \mathcal{M}$ , son los tensores simétricos

$$T_g \mathcal{M} = S^2(M) \subseteq \mathcal{T}^{0,2}(M).$$

En esta sección estudiaremos este espacio. Definiremos 3 acciones sobre  $\mathcal{M}$  las cuales inducirán descomposiciones de este espacio. Precisamente, veremos que  $S^2(M)$  se descompone como

$$S^2(M) = S_0 + S_1 + S_2 \quad (3.6)$$

donde

$$S_0 = \{h \in S^2(M) \text{ tales que } h = L_X g \text{ para algún } X \in \mathfrak{X}(M)\},$$

aquí  $L_X$  denota la derivada de Lie, cuya definición y principales propiedades pueden consultarse en [34];

$$S_1 = \{h \in S^2(M) \text{ tales que } h = ug \text{ para alguna } u \in C^\infty(M)\};$$

y  $S_2$  los tensores transversales y sin traza, es decir aquellos que satisfacen

$$S_2 = \{h \in S^2(M) \text{ tales que } \delta h = 0 \text{ y } tr_g h = 0\}.$$

Esta descomposición fue introducida y usada en [3], [11] y [13]. A continuación daremos una idea de como podemos dividir el espacio de tensores simétricos de tipo  $(0, 2)$ ,  $S^2$ , en estos tres conjuntos.

Notemos con  $\mathcal{D}$  al grupo de difeomorfismos de  $M$ .  $\mathcal{D}$  actúa sobre  $\mathcal{M}$  mediante el pull back

$$f \cdot g = f^*(g).$$

Observemos que dos métricas Riemannianas en la misma órbita  $\mathcal{O}_g$  son isométricamente equivalentes. Luego, en cada órbita se preservan las propiedades geométricas.

Por otro lado, las funciones suaves positivas,  $C_{>0}^\infty$ , actúan sobre  $\mathcal{M}$  por

$$f \cdot g(p) = f(p)g(p).$$

La órbita de  $g$  es la *clase conforme de  $g$* ,  $[g]$ .

Consideremos el conjunto  $\mathcal{C} = \mathcal{D} \times C_{>0}^\infty$ . Podemos dar a  $\mathcal{C}$  estructura de grupo con la operación

$$(f_1, h_1) \cdot (f_2, h_2) = (f_1 \circ f_2, h_2 \cdot (h_1 \circ f_2)).$$

Notar que  $\mathcal{C}$  es el producto semidirecto entre  $\mathcal{D}$  y  $C_{>0}^\infty$ .  $\mathcal{C}$  actúa sobre  $C_{>0}^\infty$  por

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \mathcal{D} \times C_{>0}^\infty &\rightarrow C_{>0}^\infty \\ (f, h) &\rightarrow h \circ f. \end{aligned}$$

Definimos la acción a derecha de  $\mathcal{C}$  sobre  $\mathcal{M}$  como

$$(f, h) \cdot g = h \cdot (f^*g).$$

La órbita de  $g$  con esta acción,  $\mathcal{C} \cdot g$ , está formada por las métricas *conformemente equivalentes* a  $g$ . Muchos de los resultados discutidos en esta tesis serán invariantes sobre cada una de estas órbita.

Para cada  $g \in \mathcal{M}$ , el grupo de isotropía de  $g$  con la acción de  $\mathcal{C}$  es

$$\mathcal{C}_g = \{(f, h) \in \mathcal{C} / h \cdot (f^*g) = g\}$$

que claramente es isomorfo al grupo de difeomorfismos conformes de  $(M, g)$ , conocido como grupo conforme.

$$\{f \in \mathcal{D} / f^*g = hg \text{ para algún } h \in \mathcal{C}_{>0}^\infty\} \subseteq \mathcal{D}.$$

El isomorfismo es  $\psi(f, h) = f$ .

En [11], Ebin prueba el siguiente resultado:

**Teorema 3.5** Sea  $g \in \mathcal{M}$ . Existe un entorno abierto  $U \subseteq \mathcal{O}_g$  de  $g$  y una función  $\chi : U \rightarrow \mathcal{D}$  tal que si  $f^*g \in U$  entonces

$$(\chi(f^*g))^*g = f^*g.$$

Además, existe una subvariedad  $S$  de  $\mathcal{M}$  que contiene a  $g$  y un difeomorfismo

$$F : U \times S \rightarrow F(U \times S) \subseteq \mathcal{M}$$

que satisface que

$$F(h, s) = (\chi(h))^*(s).$$

El espacio tangente a  $S$  en  $g$  está formado por los tensores transversales,

$$T_g S = \delta^{-1}(0)$$

donde  $\delta$  es la codiferencial.

La descomposición provista por el Teorema 3.5 resulta muy útil para el estudio de métricas Riemannianas. Si  $G : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  es una curva, con  $G(0) = g$ , consideramos, eventualmente achicando  $\epsilon$ ,

$$H : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$$

dada por

$$H(t) = \pi_2 \circ F^{-1}(G(t))$$

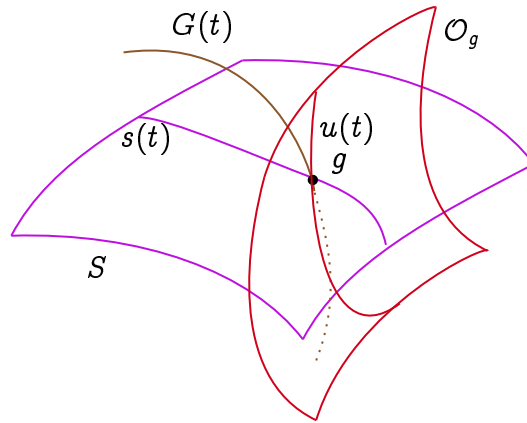
donde  $\pi_2 : U \times S \rightarrow S$  la proyección en la variedad  $S$ . Si  $F^{-1}(G(t)) = (u(t), s(t))$  tenemos que

$$\chi(u(t))^*(s(t)) = G(t)$$

con lo cual las métricas  $s(t) \in S$  y  $G(t)$  están en la misma órbita, para todo  $t$ , de la acción del grupo  $\mathcal{D}$  sobre  $\mathcal{M}$ . Es decir, si  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{D}$  es la proyección de  $\mathcal{M}$  al espacio de órbitas entonces

$$\pi H(t) = \pi G(t).$$

Luego, si tenemos una deformación de una métrica  $g$  que tiene ciertas propiedades que son preservadas por difeomorfismos conformes, como por ejemplo las que estamos interesados en esta tesis, la deformación  $H$  tendrá las mismas propiedades pero con la ventaja de que  $H$  está en la subvariedad  $S$ . Como el tangente a  $S$  en  $g$  es  $\delta^{-1}(0)$  para analizar propiedades invariantes por difeomorfismos conformes a través de deformaciones alcanza con estudiar curvas cuyo tangente en  $g$  este en  $\delta^{-1}(0)$ .



En lo siguiente trataremos otras descomposiciones de  $S^2(M)$ . Primero, recordamos brevemente la noción de operador diferenciable y su símbolo (ver [31]).

**Definición 3.6** Sean  $E$  y  $F$  dos fibrados vectoriales de rango finito sobre  $M$  y notemos con  $C^\infty(E)$  y  $C^\infty(F)$  a sus secciones suaves. Decimos que un *operador*  $D : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$  es *diferenciable de orden  $k$*  si en coordenadas locales puede escribirse como

$$D(u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_\alpha}(x)$$

donde  $\alpha$  es el multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  y  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ .

Por ejemplo, el operador de Laplace-Beltrami  $\Delta_g$  y el Laplaciano conforme  $L_g$  (ver Capítulo 4) son operadores diferenciables de orden 2.



**Definición 3.7** Con la notación de la definición anterior, si  $D : \mathcal{C}^\infty(E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(F)$  es un operador diferenciable de orden  $k$ , para cada  $x \in M$  y  $t \in T_x^*M$  definimos el *símbolo*  $\sigma_t(D)$  como el operador lineal sobre las fibras de  $x$  en  $E$  y  $F$

$$\sigma_t(D) : E_x \rightarrow F_x$$

definido del siguiente modo. Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  es tal que

$$f(x) = 0 \text{ y } df(x) = t$$

entonces  $\sigma_t(D)$  satisface que

$$\sigma_t(D)(X) = \frac{1}{k!} D(f^k X)(x)$$

para  $X \in E_x$ .

Decimos que  $D$  tiene símbolo inyectivo si

$$\sigma_t(D) : E_x \rightarrow F_x$$

es inyectivo para todo  $t \neq 0$ .

El siguiente Teorema fue probado por Berger y Ebin en [3].

**Teorema 3.8** Si  $D : \mathcal{C}^\infty(E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(F)$  es un operador diferenciable de símbolo inyectivo, entonces

$$\mathcal{C}^\infty(F) = D(\mathcal{C}^\infty(E)) \oplus (D^*)^{-1}(0). \quad (3.7)$$

Además  $D(\mathcal{C}^\infty(E))$  y  $(D^*)^{-1}(0)$  son ortogonales respecto al producto interno de  $\mathcal{C}^\infty(F)$ .

Como consecuencia de este resultado tenemos la siguiente descomposición de  $S^2(M)$ . La derivada covariante  $\nabla : \mathcal{T}^{0,1}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{0,2}(M)$  es un operador diferencial. Sea

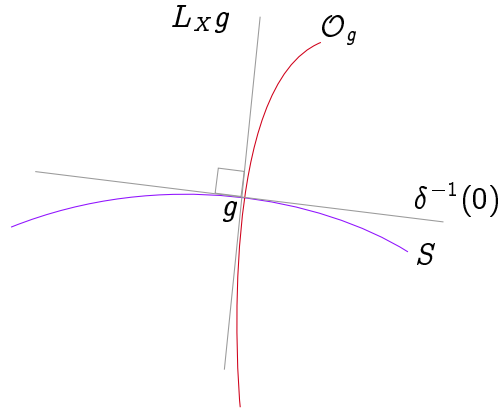
$$\delta : S^2(M) \rightarrow \Omega^1(M)$$

la restricción del codiferencial, que es el operador adjunto a  $\nabla$ , al espacio de tensores simétricos de tipo  $(0, 2)$ . Luego,

$$\delta^* : \Omega^1(M) \rightarrow S^2(M).$$

El Teorema 3.8 implica que

$$S^2(M) = \delta^{-1}(0) \oplus \delta^*(\Omega^1(M))$$



Veamos que el tangente a la órbita  $\mathcal{O}_g$  en  $g$  es  $\delta^*(\Omega^1(M))$  y  $\delta^{-1}(0)$  es su complemento ortogonal.

Dado  $g \in \mathcal{M}$  consideramos el morfismo

$$\phi_g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{O}_g$$

dada por

$$\phi_g(f) = f^*g.$$

Es fácil ver que  $T_{id}D$  es el espacio de campos tangentes a  $\mathfrak{X}(M)$ . En efecto, si  $u(t)$  es una curva de isomorfismos tal que  $u(0) = id_M$  tenemos que

$$\frac{d}{dt}u(0, p) = X(p) \in T_p M$$

para todo  $p \in M$ . Es decir,  $u$  es el grupo uniparamétrico de difeomorfismos del campo  $X$ . Luego,

$$(d\phi_g)_{id} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow T_g(\mathcal{O}_g) \subseteq S^2(M).$$

Si  $u(t)$  es el grupo uniparamétrico de difeomorfismos inducido por el campo  $X$  tenemos que

$$d\phi_g \Big|_{id}(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((u(t))^*(g)) = L_X g \tag{3.8}$$

donde  $L_X g$  denota la derivada de Lie de  $g$  en la dirección  $X$ .

Por lo tanto, podemos identificar el tangente a la órbita  $\mathcal{O}_g$  con

$$T_g(\mathcal{O}_g) \simeq \{L_X g : X \in \mathfrak{X}(M)\}.$$

Mediante el isomorfismo musical  $\flat$  podemos identificar  $\mathfrak{X}(M)$  con  $\Omega^1(M)$ . Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (\nabla_Y \flat(X))(Z) + \nabla_Z \flat(X)(Y) &= \\
 &= \frac{1}{2} [Y(\flat(X)(Z)) - \flat(X)(\nabla_Y Z) + Z(\flat(X)(Y)) - \flat(X)(\nabla_Z Y)] \\
 &= \frac{1}{2} [Y(g(X, Z)) + Z(g(X, Y)) - g(X, \nabla_Y Z + \nabla_Z Y)] \\
 &= \frac{1}{2} [g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) - g(X, \nabla_Y Z) - g(X, \nabla_Z Y)] \\
 &= \frac{1}{2} [g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y)] \\
 &= \frac{1}{2} [g(\nabla_X Y + [Y, X], Z) + g(\nabla_X Z + [Z, X], Y)] \\
 &= \frac{1}{2} [g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) + g([Y, X], Z) + g([Z, X], Y)] \\
 &= \frac{1}{2} [X(g(Y, Z)) - g([Y, X], Z) - g([Z, X], Y)] \\
 &= \frac{1}{2} L_X g(Y, Z).
 \end{aligned}$$

Luego por (3.8), tenemos que

$$d\phi_g \Big|_{id} (X) = L_X g = 2\delta^*(\flat(X)). \tag{3.9}$$

Por lo tanto, la imagen de  $\delta^*$  es el tangente a la órbita por la acción de  $D$ . Por otro lado, su complemento ortogonal es el  $Ker(\delta)$ .

Dado  $g \in \mathcal{M}$ . Consideremos la órbita de  $g$  por la acción del grupo  $\mathcal{C}$ , es decir  $\mathcal{C} \cdot g$ . Si  $\psi_g : \mathcal{C} = \mathcal{D} \times \mathcal{C}_{>0}^\infty \rightarrow \mathcal{M}$  está dada por

$$\psi_g(f, h) = h \cdot (f^*g)$$

entonces

$$\mathcal{C} \cdot g = Im(\psi_g).$$

Notar que  $\psi_g(id, 1) = g$ . Luego,  $\tau_g = (d\psi_g)_{(id,1)} : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow T_g \mathcal{C} \cdot g \subseteq S^2(M)$  está dada por

$$\tau_g(X, u) = (d\psi_g)_{(id,1)}(X, u) = L_X g + u \cdot g.$$

En efecto, si  $h$  es el grupo uniparamétrico inducido por  $X$  y  $f$  es tal que  $f(0) = 1$  y  $f'(0) = u$

$$(d\psi)_{(id,1)}(X, u) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f(t) \cdot (h(t)^*g)) = ug + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h^*(t)g) = ug + L_X g.$$

Con lo cual, el espacio tangente a la órbita  $\mathcal{C} \cdot g$  en  $g$  es

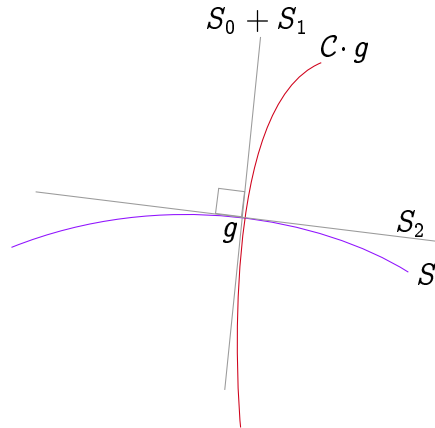
$$T_g \mathcal{C} \cdot g = \{\tau_g(X, u) = ug + L_X g : u \in \mathcal{C}^\infty(M), X \in \mathfrak{X}(M)\}.$$

El siguiente teorema, probado por Fisher y Marsden en [13] nos da otra descomposición de  $S^2(M)$ .

**Teorema 3.9**

$$S^2(M) = S_0 + S_1 + S_2$$

con  $S_2 = (S_0 + S_1)^\perp$ .



**Demostración:** Consideremos  $\tilde{\tau}_g : \mathfrak{X}^*(M) \times C^\infty \rightarrow S^2(M)$ , dada por

$$\tilde{\tau}_g(\mathfrak{b}(X), u) = L_X g + u g.$$

Como el símbolo de  $\tilde{\tau}_g$  es inyectivo, por el Teorema 3.8,  $S^2(M)$  se puede descomponer ortogonalmente como

$$S^2(M) = \text{Im}(\tilde{\tau}_g) \oplus \text{Ker}(\tilde{\tau}_g^*).$$

Luego, como  $\text{Im}(\tilde{\tau}_g) = S_0 + S_1$ , para probar el Teorema alcanza con ver que la adjunta de  $\tilde{\tau}_g$  es

$$\tilde{\tau}_g^*(h) = (2\delta_g h, \text{tr}_g h).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\tau}_g^*(h), (\mathfrak{b}(X), u) \rangle &= \langle h, \tilde{\tau}_g(\mathfrak{b}(X), u) \rangle = \\ &= \langle h, L_X g + u g \rangle = \langle h, L_X g \rangle + \langle h, u g \rangle \\ &= \langle h, L_X g \rangle + \text{utr}_g(h). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\langle h, L_X u \rangle = 2 \langle h, \nabla \mathfrak{b}(X) \rangle \quad (3.10)$$

Si suponemos cierto (3.10) tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\tau}_g^*(h), (\mathfrak{b}(X), u) \rangle &= 2 \langle h, \nabla \mathfrak{b}(X) \rangle + \text{utr}_g(h) = \\ &= 2 \langle \delta h, \mathfrak{b}(X) \rangle + \text{utr}_g(h) \\ &= \langle (2\delta h, \text{tr}_g(h)), (\mathfrak{b}(X), u) \rangle. \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\tilde{\tau}_g^* = (2\delta, \text{tr}_g(h)). \quad (3.11)$$

Por lo tanto, para probar la descomposición solo debemos demostrar la igualdad (3.10).

Dado  $p \in M$ , sea  $(U, x)$  una carta normal centrada en  $p$  y sea  $X|_U = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  la expresión local de un campo  $X$ . Por definición de la derivada de Lie sobre tensores (ver

[34]) tenemos que

$$L_X(g) \left( \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) = L_X(g_{kl}) - g \left( L_X \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - g \left( \frac{\partial}{\partial x_k}, L_X \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right). \quad (3.12)$$

Como

$$L_X \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \left[ X, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] = - \sum_r \frac{\partial a_r}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_r},$$

entonces

$$L_X(g) \left( \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) = \sum_r \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_r} + \frac{\partial a_r}{\partial x_k} g_{rl} + \frac{\partial a_r}{\partial x_l} g_{kr} \right).$$

Dado que  $(U, x)$  es una carta normal centrada en  $p$  obtenemos que

$$L_X(g) \left( \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) (p) = \frac{\partial a_l}{\partial x_k} \Big|_p + \frac{\partial a_k}{\partial x_l} \Big|_p \quad (3.13)$$

Así,

$$\begin{aligned} \langle h, L_X g \rangle (p) &= \sum_{ijkl} g^{ik}(p) g^{jl}(p) h_{ij}(p) (L_X g)_{kl}(p) = \\ &= \sum_{ij} h_{ij}(p) \left( \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \Big|_p + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \Big|_p \right) = 2 \sum_{ij} h_{ij}(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \Big|_p. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \nabla \flat X \left( \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \flat X \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - \flat X \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_r a_r g_{rl} \right) - \sum_{rs} \Gamma_{kl}^r a_s g_{sr}. \end{aligned}$$

Evaluando en  $p$ , tenemos que

$$\nabla \flat X \left( \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \Big|_p = \frac{\partial a_l}{\partial x_k} \Big|_p. \quad (3.15)$$

Luego,

$$\langle h, \nabla \flat X \rangle (p) = \sum_{ijkl} g^{ik}(p) g^{jl}(p) h_{ij}(p) (\nabla \flat X)_{kl}(p) = \sum_{ij} h_{ij}(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \Big|_p. \quad (3.16)$$

Por (3.14) y (3.16) concluimos que para cada  $p \in M$

$$\langle h, L_X g \rangle (p) = 2 \langle h, \nabla \flat X \rangle (p), \quad (3.17)$$

lo que prueba la afirmación.  $\square$

Como consecuencia directa de la descomposición provista por el Teorema 3.9 tenemos que el espacio tangente a una estructura conforme dada en el espacio Riemanniano de estructuras conformes

$$\frac{\mathcal{M}/\mathcal{C}_{>0}^\infty}{\mathcal{D}}$$

está formado por los tensores simétricos  $h \in S^2(M)$  tales que

$$\delta h = 0 \text{ y } tr_g h = 0.$$

### 3.3. Curvas en el espacio de métricas.

En esta sección estudiaremos como varían el operador de Laplace-Beltrami y la curvatura escalar cuando recorremos el espacio  $\mathcal{M}$  a través de una curva analítica. Algunos de estos resultados pueden encontrarse en [2].

En lo siguiente consideraremos el espacio de curvas analíticas en  $\mathcal{M}$ . Lo notaremos con

$$C^w(I_\epsilon) = \{G : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M} : G \text{ depende analíticamente del parámetro } t\}.$$

Los resultados de esta sección son válidos para curvas diferenciables. Sin embargo, elegimos restringirnos a curvas analíticas ya que los argumentos para probar el resultado principal que analizamos en esta tesis (ver capítulo 5) hacen uso de deformaciones analíticas.

De aquí en más, utilizaremos la siguiente notación. Si  $G : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  es una curva analítica con  $G(0) = g$  notaremos con

$$G_t = G(t),$$

$$H_t = H(t) = G'(t)$$

y

$$h = H(0) = G'(0).$$

Luego, tenemos que

$$G_t = g + th + o(t).$$

Para estudiar como cambia el Laplaciano  $\Delta_{G_t}$  y la curvatura escalar  $S_{G(t)}$  consideramos para  $f \in C^\infty(M)$

$$\Delta'_{G_t} f = \frac{d(\Delta_{G_t} f)}{dt}$$

y

$$S'_{G_t} = \frac{dS_{G_t}}{dt}.$$

**Proposición 3.10** Con la notación establecida anteriormente tenemos que

$$(G^{ij})'(t) = - \sum_{kl} G^{ik}(t) G^{jl}(t) H_{kl}(t)$$

**Demostración:** Si  $A(t)$  una matriz inversible con inversa  $A^{-1}(t)$ , entonces derivando  $A(t)A^{-1}(t) = I$  obtenemos que

$$(A^{-1}(t))' = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

Así, si  $A(t) = (G(t))_{ij}$  y  $A^{-1}(t) = (G^{ij}(t))$  se tiene que

$$(G^{ij})'(t) = - \sum_l \left( \sum_k G^{ik}(t) H_{kl}(t) \right) G^{lj}(t),$$

y esto prueba la proposición. □

Observemos que del mismo modo podemos probar que para cada  $1 \leq r \leq n$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_r}(t) = - \sum_{kl} g^{ik}(t) g^{jl}(t) \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_r}(t). \quad (3.18)$$

La siguiente proposición nos da una fórmula para la derivada del elemento de volumen  $dV_{G(t)}$  que nos será de gran utilidad para poder calcular algunas derivadas.

**Proposición 3.11** Si  $G \in C^w(I_\epsilon)$  entonces

$$(dV_{G_t})'(t) = \frac{1}{2} \text{tr}_{G_t}(H_t) dV_{G_t}.$$



**Demostración:** Recordemos que el elemento de volumen expresado en coordenadas locales es

$$dV_{G_t} = \sqrt{\det(G_{ij}(t))} dx_1 \dots dx_n.$$

Derivando esta expresión obtenemos que

$$\begin{aligned} (dV_{G_t})' \Big|_t &= \frac{1}{2\sqrt{\det(G_{ij}(t))}} (\det(G_{ij}(t)))' dx_1 \dots dx_n = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det(G_{ij}(t))}} \det(G_{ij}(t)) \operatorname{tr}_{G^{ij}(t)}(H_{ij}(t)) dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{G_t} H_t dV_{G_t}, \end{aligned}$$

donde en la anteúltima igualdad usamos la fórmula de Jacobi. Esta dice que si  $A(t)$  es una matriz simétrica que depende suavemente del parámetro  $t$ , entonces la derivada del determinante de  $A(t)$  es

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \det(A(t)) \operatorname{tr} \left( A(t)^{-1} \frac{d}{dt} A(t) \right).$$

□

En la siguiente proposición obtenemos una expresión para la derivada del Laplaciano. La demostración que daremos está inspirada en la de Berger en [2].

**Proposición 3.12** Con la notación anterior, la derivada del Laplaciano de  $G(t)$  evaluado en  $f \in C^\infty(M)$  es

$$\Delta'_{G_t} f = \langle H_t, \nabla^2 f \rangle - \langle \delta_t H_t + \frac{1}{2} d(\operatorname{tr}_{G_t}(H_t)), df \rangle. \quad (3.19)$$

**Demostración:** Para demostrar esta fórmula, bastaría ver que

$$(\Delta'_{G_t} f, v) = (\langle H_t, \nabla^2 f \rangle - \langle \delta_t H_t + \frac{1}{2} d(\operatorname{tr}_{G_t}(H_t)), df \rangle, v) \quad (3.20)$$

para toda función suave  $v$  definida en  $M$ .

Comencemos observando que por las fórmulas de Green, ver Teorema 2.36,

$$(\Delta_{G_t} f, v) = \int_M G_t(\nabla_{G_t} f, \nabla_{G_t} v) dV_{G_t}.$$

Derivando con respecto a  $t$  en ambos lados, y por la Proposición 3.11, que nos da una fórmula para la derivada respecto de  $t$  del elemento de volumen, tenemos que

$$\begin{aligned} (\Delta'_{G_t} f, v) + \int_M \Delta f v \frac{1}{2} \text{tr}_{G_t}(H_t) dV_{G_t} &= \\ &= \int_M \frac{d(G_t(\nabla f, \nabla v))}{dt} dV_{G_t} + \int_M G_t(\nabla f, \nabla v) \frac{1}{2} \text{tr}_{G_t}(H_t) dV_{G_t}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dada una carta  $(U, x)$  y supongamos que el soporte de  $v$  está incluido en  $U$ . Utilizando coordenadas locales

$$G_t(\nabla_{G_t} f, \nabla_{G_t} v) = \sum_{ij} G^{ij}(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}. \quad (3.22)$$

Entonces, por la Proposición 3.10, la derivada de (3.22) con respecto a  $t$  es

$$\left. \frac{d(G_t(\nabla f, \nabla v))}{dt} \right|_t = \sum_{ij} (G^{ij})'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} = - \sum_{ijkl} G^{ik}(t) G^{jl}(t) H_{kl}(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Por otro lado, el segundo término del lado derecho de la igualdad (3.21) puede expresarse localmente, usando la ecuación (3.4), del siguiente modo

$$\begin{aligned} \int_U (\nabla f, \nabla v) \frac{1}{2} \text{tr}_{G_t}(H_t) dV_{G_t} &= \frac{1}{2} (\text{tr}_{G_t}(H_t) \nabla f, \nabla v) = \frac{1}{2} (\delta_t(\text{tr}_{G_t}(H_t) \nabla f), v) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_U \frac{1}{\sqrt{\det(G_{ij}(t))}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( G^{ij}(t) \sqrt{\det(G_{ij}(t))} \text{tr}_{G_t}(H_t) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) v dV_{G_t} \\ &= -\frac{1}{2} \int_U \left[ \sum_{ij} G^{ij}(t) \frac{\partial(\text{tr}_{G_t}(H_t))}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\det(G_{ij}(t))}} \sum_{ij} \text{tr}_{G_t}(H_t) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( G^{ij}(t) \sqrt{\det(G_{ij}(t))} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right] v dV_{G_t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \int_U \sum_{ij} G^{ij}(t) \frac{\partial(\text{tr}_{G_t}(H_t))}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} dV_{G_t} - \frac{1}{2} \int_U \text{tr}_{G_t}(H_t) \delta_t(\nabla f) v dV_{G_t} \\
 &= \int_U \left( -\frac{1}{2} \sum_{ij} G^{ij}(t) \frac{\partial(\text{tr}_{G_t}(H_t))}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \text{tr}_{G_t}(H_t) \Delta_{G_t} f \right) v dV_{G_t}.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_U G_t(\nabla f, \nabla v) \frac{1}{2} \text{tr}_{G_t}(H_t) dV_{G_t} = (\langle d(\text{tr}_{G_t}(H_t)), df \rangle, v) + \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{G_t}(H_t) \Delta_{G_t} f, v \right). \quad (3.23)$$

Por otra parte, el primer término de la parte derecha de igualdad (3.21) es

$$\begin{aligned}
 \int_U \frac{d(G_t(\nabla f, \nabla v))}{dt} dV_{G_t} &= \\
 \int_U \sum_{ij} (G^{ij})'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV_{G_t} &= - \int_U \sum_{ijkl} G^{ik}(t) G^{jl}(t) H_{kl}(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV_{G_t}. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Por las ecuaciones (3.21), (3.23) y (3.24) para probar (3.20), resta ver que

$$\int_U \sum_{ijkl} G^{ik}(t) G^{jl}(t) H_{kl}(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV_{G_t} = (\langle \delta_t H_t, df \rangle - \langle H_t, \nabla^2 f \rangle, v). \quad (3.25)$$

Comencemos observando que

$$(\langle \delta_t H_t, df \rangle, v) = (\delta_t H_t, v df) = (H_t, \nabla(v df))$$

y por lo tanto, usando la Ecuación (2.5), podemos escribir localmente

$$\begin{aligned}
 &(\langle \delta_t H_t, df \rangle - \langle H_t, \nabla^2 f \rangle, v) = \\
 &= \int_U \sum_{ijkl} \left( G^{ik}(t) G^{jl}(t) H_{kl}(t) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v - \sum_r \Gamma_{ij}^r(t) \frac{\partial f}{\partial x_r} v \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -G^{ik}(t)G^{jl}(t)H_{kl}(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\nabla^2 f)_{ij}v \Big) dV_{G_t} \\
 & = \int_U G^{ik}(t)G^{jl}(t)H_{kl}(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dV_{G_t}.
 \end{aligned}$$

Con esto último queda probada la Ecuación (3.20) para funciones  $v$  con soporte en  $U$ . Veamos que se cumple para toda función  $v \in C^\infty(M)$ . Consideremos  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{1 \leq \alpha \leq n}$  un cubrimiento finito de cartas de  $M$  y  $\{\rho_\alpha\}$  una partición de la unidad subordinada a  $\{U_\alpha\}$ . Luego,

$$v = \sum_\alpha \rho_\alpha v$$

y

$$\begin{aligned}
 (\Delta'_{G_t} f, v) & = \left( \Delta'_{G_t} f, \sum_\alpha \rho_\alpha v \right) = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \langle \Delta'_{G_t} f, \rho_\alpha v \rangle dV_{G_t} = \\
 & = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \langle \langle H_t, \nabla^2 f \rangle - \langle \delta_t H_t + \frac{1}{2} d(\text{tr}_{G_t}(H_t)), df \rangle, \rho_\alpha v \rangle dV_{G_t} = \\
 & = \langle \langle H_t, \nabla^2 f \rangle - \langle \delta_t H_t + \frac{1}{2} d(\text{tr}_{G_t}(H_t)), df \rangle, v \rangle
 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, queda demostrada la proposición.  $\square$

A continuación calcularemos la derivada de la curvatura escalar.

**Proposición 3.13** La derivada de la curvatura escalar sobre la curva  $G(t)$  en  $t = 0$  es

$$(S_{G_t})' \Big|_{t=0}(p) = - \langle h, \text{Ricc}_g \rangle + \delta_g^2 h + \Delta_g(\text{tr}_g(h)). \quad (3.26)$$

**Demostración:** Sea  $p \in M$  y consideremos  $(U, x)$  una carta normal con respecto a la métrica Riemanniana  $g = G(0)$  centrada en  $p$ . Cabe destacar que si bien la carta es normal con respecto a  $g$ , no necesariamente es una carta normal centrada en  $p$  para  $G(t)$  con  $t \neq 0$ .

Recordemos que

$$S_{G(t)}(p) = \text{tr}_{G(t)}(\text{Ric}_{G(t)}(p)) = \sum_{ij} G^{ij}(t)(p)R_{ij}(t)(p).$$

Es bien sabido que la expresión local con respecto a la carta  $(U, x)$  del tensor de Ricci de  $G(t)$  es

$$R_{ij}(t) = \sum_k \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^k(t)}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^k(t)}{\partial x_j} + \sum_l \Gamma_{kl}^k(t)\Gamma_{ji}^l(t) - \Gamma_{jl}^k(t)\Gamma_{ki}^l(t) \right).$$

donde  $\Gamma_{sl}^r(t) = \Gamma_{sl}^r(G(t))$ .

Por otro lado, los símbolos de Christoffel de  $G(t)$  son

$$\Gamma_{ij}^k(t) = \frac{1}{2} \sum_l G^{kl}(t) \left( \frac{\partial G_{il}(t)}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{jl}(t)}{\partial x_i} - \frac{\partial G_{ij}(t)}{\partial x_l} \right).$$

Luego las derivadas de los símbolos de Christoffel se escriben como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ij}^k(t)}{\partial x_k} &= \frac{1}{2} \sum_l \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ G^{kl}(t) \left( \frac{\partial G_{il}(t)}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{jl}(t)}{\partial x_i} - \frac{\partial G_{ij}(t)}{\partial x_l} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_l \left[ \frac{\partial G^{kl}(t)}{\partial x_k} \left( \frac{\partial G_{il}(t)}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{jl}(t)}{\partial x_i} - \frac{\partial G_{ij}(t)}{\partial x_l} \right) + G^{kl}(t) \left( \frac{\partial^2 G_{il}(t)}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 G_{jl}(t)}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 G_{ij}(t)}{\partial x_k \partial x_l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Del mismo modo obtenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ki}^k(t)}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \sum_l \left[ \frac{\partial G^{kl}(t)}{\partial x_j} \left( \frac{\partial G_{kl}(t)}{\partial x_i} + \frac{\partial G_{il}(t)}{\partial x_k} - \frac{\partial G_{ki}(t)}{\partial x_l} \right) + \right. \\ &\quad \left. G^{kl}(t) \left( \frac{\partial^2 G_{kl}(t)}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 G_{il}(t)}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 G_{ki}(t)}{\partial x_j \partial x_l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Como  $(U, x)$  es una carta normal centrada en  $p$ , para  $t = 0$  tenemos que

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \Big|_p = 0, \quad \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k} = 0 \Big|_p \quad \text{y} \quad g_{ij}(p) = \delta_{ij}. \quad (3.27)$$

Luego por (3.27) y la Proposición 3.10 tenemos que

$$\begin{aligned}
 (R_{ij})' \Big|_p(0) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sum_{kl} \left[ g^{kl} \left( \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right) \right. \\
 &\quad \left. - g^{kl} \left( \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x_j \partial x_l} \right) \right] \Big|_p \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{kl} \left( -h_{kl} \left( \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right) + h_{kl} \left( \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x_j \partial x_l} \right) \right) \Big|_p \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{kl} \left( g^{kl} \left( \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 h_{jl}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right) - g^{kl} \left( \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_j \partial x_l} \right) \right) \Big|_p.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Como  $G_{ij}(0)(p) = g_{ij}(p) = \delta_{ij}$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{ij} \left( G^{ij}(0)(R_{ij})'(0) \right) (p) &= \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ikl} \left( -h_{kl} \left( \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_k \partial x_l} \right) + h_{kl} \left( \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x_i \partial x_l} \right) \right) \Big|_p \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{ik} \left( \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 h_{ii}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^2 h_{kk}}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} \right) \Big|_p \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ikl} h_{kl} \left( -\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x_i \partial x_l} \right) \Big|_p + \sum_{ik} \left( \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 h_{ii}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \Big|_p.
 \end{aligned}$$

Entonces la derivada de la curvatura escalar en  $t = 0$  es

$$\begin{aligned}
 (S_{G_t})' \Big|_{t=0}(p) &= \sum_{ij} \left( (G^{ij})'(0) R_{ij}(0) + G^{ij}(0) (R_{ij})'(0) \right) (p) = \\
 &= - \sum_{ij} h_{ij} R_{ij}(0) - \frac{1}{2} \sum_{ikl} h_{kl} \left( 2 \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_i} \right) \Big|_p + \\
 &\quad + \sum_{ik} \left( \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 h_{ii}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \Big|_p.
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \Delta_g(tr_g(h))(p) &= -tr_g \left( \nabla^2 \left( \sum_{ij} g^{ij} h_{ij} \right) \right) = \\
 &= - \sum_{kl} g^{kl} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \sum_{ij} g^{ij} h_{ij} \right) - \sum_r \Gamma_{ij}^r \frac{\partial}{\partial x_r} \left( \sum_{ij} g^{ij} h_{ij} \right) \right] \Big|_p \\
 &= - \sum_{ijk} \frac{\partial^2 g^{ij}}{\partial x_k \partial x_k} \Big|_p h_{ij} - \sum_{ik} \frac{\partial^2 h_{ii}}{\partial x_k \partial x_k} \Big|_p.
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 \delta_g^2 h &= tr_g(\nabla(tr_g(\nabla h))) = \sum_{ij} g^{ij} (\nabla(tr_g(\nabla h)))_{ij} = \sum_i \nabla(tr_g(\nabla h)) \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \\
 &= \sum_i \left( \frac{\partial tr_g(\nabla h)}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - tr_g(h) \left( \overbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i}}^{=0} \right) \right) = \sum_i \frac{\partial tr_g(\nabla h)}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
 &= \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{kl} g^{kl} (\nabla h)_{kl} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{kl} g^{kl} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} h \left( \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - h \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - h \left( \frac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_l}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \right) \\
 &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{kl} g^{kl} \left( \frac{\partial h_{li}}{\partial x_k} - \sum_r \Gamma_{kl}^r h_{ri} - \sum_r \Gamma_{li}^r h_{kr} \right) \right) \\
 &= \sum_{ik} \left( \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_r \frac{\partial \Gamma_{kk}^r}{\partial x_i} h_{ri} - \sum_r \frac{\partial \Gamma_{ki}^r}{\partial x_i} h_{kr} \right) \\
 &= \sum_{ik} \left( \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} \sum_{rs} g^{rs} \left( \frac{\partial^2 g_{ks}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 g_{ks}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{kk}}{\partial x_i \partial x_s} \right) h_{ri} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{rs} g^{rs} \left( \frac{\partial^2 g_{ks}}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 g_{is}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x_i \partial x_s} \right) h_{kr} \right) \\
 &= \sum_{ik} \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} \sum_{ikr} \left( \frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{kk}}{\partial x_i \partial x_r} \right) h_{ri} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{ikr} \left( \frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 g_{ir}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x_i \partial x_r} \right) h_{kr}.
 \end{aligned}$$

Notar que por simetría tenemos que

$$\sum_{ikl} h_{kl} \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{ikl} h_{kl} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_i \partial x_l}.$$

Luego renombrando adecuadamente los índices obtenemos que

$$\delta_g^2 h = \sum_{ik} \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} \sum_{ikl} h_{kl} \left( 2 \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_i} \right). \quad (3.29)$$

Finalmente,



$$\begin{aligned}
 - \langle h, Ricc_g \rangle + \delta_g^2 h + \Delta_g(tr_g(h)) &= \\
 &= - \sum_{ij} h_{ij} R_{ij} + \sum_{ik} \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} \sum_{ikl} h_{kl} \left( 2 \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_i} \right) \\
 &\quad + \sum_{ijk} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} h_{ij} - \sum_{ik} \frac{\partial^2 h_{ii}}{\partial x_k \partial x_k} \\
 &= - \sum_{ij} h_{ij} R_{ij} + \sum_{ik} \left( \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 h_{ii}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{ikl} h_{kl} \left( 2 \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_i} - 2 \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_i} \right) \\
 &= - \sum_{ij} h_{ij} R_{ij} + \sum_{ik} \left( \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 h_{ii}}{\partial x_k \partial x_k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{ikl} h_{kl} \left( 2 \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_i} \right) = \\
 &= (S_{G_t})' \Big|_{t=0} (p).
 \end{aligned}$$

□

**Observación 3.14** La fórmula (3.26) vale para todo  $t$ , no solo para  $t = 0$ . Precisamente, se satisface que

$$(S_{G_t})'(t) = - \langle H_t, Ricc_{G_t} \rangle + \delta_{G_t}^2 H_t + \Delta_{G_t}(tr_{G_t}(H_t)). \quad (3.30)$$

En efecto, si realizamos la traslación  $\tilde{G}(t) = G(t + t_0)$ ,  $G(t_0) = \tilde{G}(0)$  y si llamamos  $g_0 = G(t_0)$  y  $h_0 = G'(t_0)$  tenemos que

$$(S_{G(t)})' \Big|_{t=t_0} = (S_{\tilde{G}(t)})' \Big|_{t=0} = - \langle h_0, Ricc_{g_0} \rangle + \delta_{g_0}^2 h_0 + \Delta_{g_0}(tr_{g_0}(h_0)). \quad (3.31)$$

### 3.4. Funcional de Hilbert-Einstein

En esta sección introduciremos el funcional de Hilbert-Einstein. Este es un funcional en el espacio de métricas  $\mathcal{M}$  que resulta muy importante porque, como veremos, sus puntos críticos son las métricas de Einstein. Este funcional no tiene cotas inferiores ni superiores. Como mencionamos en la Sección 3.1 hay variedades que no admiten métricas de Einstein, con lo cual el funcional podría no tener puntos críticos. Veremos que cuando tiene puntos críticos, estos son puntos silla.

El funcional de Hilbert-Einstein  $Y : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  está definido por

$$Y(g) = \frac{\int_M S_g dV_g}{V_g(M)^{\frac{n-2}{n}}}$$

donde  $V_g(M) = \int_M dV_g$  es el volumen de  $(M, g)$ .

Notaremos con  $\mathcal{R} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  al funcional

$$\mathcal{R}(g) = \frac{\int_M S_g dV_g}{V_g(M)}.$$

Cuando restringimos el dominio del funcional de Hilbert-Einstein a una clase conforme  $[g]$ , lo llamamos funcional de Yamabe y lo notamos con  $J$ , es decir

$$J = Y|_{[g]}.$$

Notemos que el funcional de Hilbert-Einstein es invariante por reescalamientos escalares. En efecto, si  $\tilde{g} = \lambda g$  tenemos que

$$S_{\tilde{g}} = \frac{1}{\lambda} S_g \text{ y } dV_{\tilde{g}} = \lambda^{n/2} dV_g$$

con lo cual el volumen es

$$Vol_{\tilde{g}}(M) = \lambda^{n/2} Vol_g(M).$$

Por lo tanto,

$$Y(\tilde{g}) = Y(\lambda g) = Y(g).$$

Por otro lado, si  $Vol_{\tilde{g}}(M) = 1$  entonces

$$\mathcal{R}(\tilde{g}) = Y(\tilde{g}).$$

En particular, para la métrica  $\tilde{g} = Vol_g(M)^{-2/n}g$  tenemos que

$$\mathcal{R}(\tilde{g}) = Y(g).$$

Notemos con  $\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} \text{ tales que } Vol_g(M) = 1\}$  y consideremos una curva  $G(t)$  con  $G(0) = g \in \mathcal{M}_1$  y  $G'(0) = h \in S^2(M)$ . Siguiendo con la notación anterior

$$\tilde{G}(t) = V(t)^{-2/n}G(t)$$

donde  $V(t) = Vol_{G(t)}(M)$ .

**Proposición 3.15** La derivada con respecto al parámetro  $t$  del funcional de Hilbert-Einstein puede expresarse como

$$\frac{d}{dt}(Y(G_t)) = -V(t)^{-(n-2)/n} (H_t, F(G_t))$$

donde  $F(G_t) = Ricc_{G_t} - \frac{1}{2}S_{G_t}G_t + \frac{n-2}{2n}\mathcal{R}(G_t)G_t$ .

**Demostración:** Para calcular la derivada del funcional de Hilbert-Einstein, usaremos la Proposición 3.13 que dice que

$$(S_{G_t})'(t) = - \langle H_t, Ricc_{G_t} \rangle + \delta_{G_t}^2 H_t - \Delta_{G_t}(tr(H_t)). \quad (3.32)$$

Como consecuencia de la Proposición 3.11, la derivada del volumen de  $(M, G_t)$  es

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{1}{2} \int_M tr_{G_t}(H_t) dV_{G_t}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Y(G_t)) \Big|_t &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\int_M S_{G_t} dV_{G_t}}{V(t)^{\frac{n-2}{n}}} \right) \Big|_t = \\ &= -\frac{n-2}{2n} V(t)^{-\frac{2n+2}{n}} \int_M tr_{G_t}(H_t) dV_{G_t} \int_M S_{G_t} dV_{G_t} + \\ &\quad + V(t)^{-\frac{n-2}{n}} \left( \int_M S'_{G_t} dV_{G_t} + \frac{1}{2} \int_M S_{G_t} tr_{G_t}(H_t) dV_{G_t} \right). \end{aligned}$$

Por un lado, dado que  $\delta_{G_t}$  es el operador adjunto de  $\nabla$  con respecto al producto interno  $(\cdot, \cdot)$ , tenemos que

$$\int_M \delta_{G_t}^2 H_t dV_{G_t} = (\delta_{G_t}^2 H_t, 1) = (\delta_{G_t} H_t, \nabla 1) = 0.$$

Por otro lado, el Teorema de la Divergencia nos dice que

$$\int_M \Delta_{G_t} (\text{tr}_{G_t} H_t) dV_{G_t} = 0.$$

Con lo cual, utilizando (3.26) tenemos que

$$\int_M S'_{G_t} dV_{G_t} = - \int_M \langle H_t, \text{Ric}_{G_t} \rangle dV_{G_t}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} (Y(G_t))' &= -\frac{n-2}{2n} V(t)^{-\frac{2n+2}{n}} \left( \int_M \langle H_t, G_t \rangle dV_{G_t} \right) \int_M S_{G_t} dV_{G_t} + \\ &\quad V(t)^{-\frac{n-2}{n}} \int_M \left( - \langle H_t, \text{Ric}_{G_t} \rangle + \frac{1}{2} S_{G_t} \langle H_t, G_t \rangle \right) dV_{G_t} \\ &= -V(t)^{-\frac{n-2}{n}} \left[ \frac{n-2}{2n} \left( \int_M \langle H_t, G_t \rangle dV_{G_t} \right) \frac{\int_M S_{G_t} dV_{G_t}}{V(t)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_M \langle H_t, \text{Ric}_{G_t} \rangle - \frac{1}{2} S_{G_t} \langle H_t, G_t \rangle dV_{G_t} \right] \\ &= -V(t)^{-\frac{n-2}{n}} \int_M \left\langle H_t, \frac{n-2}{2n} \mathcal{R}(G_t) G_t + \text{Ric}_{G_t} - \frac{1}{2} S_{G_t} G_t \right\rangle dV_{G_t} \\ &= -V(t)^{-\frac{n-2}{n}} (H_t, F(G_t)) \end{aligned}$$

que es lo que queríamos ver. □

Tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.16** Sea  $g \in \mathcal{M}_1$ . La métrica  $g$  es un punto crítico del funcional de Hilbert-Einstein si y solo si

$$F(g) \equiv 0.$$

En particular, podemos observar, que los puntos críticos del funcional de Hilbert-Einstein son métricas de Einstein.

En efecto, si  $g$  es un punto crítico del funcional de Hilbert-Einstein se tiene que

$$Ric_g = \left( \frac{1}{2}S_g - \frac{n-2}{2n}\mathcal{R}(g) \right) g.$$

Si tomamos traza a ambos lados de la igualdad tenemos que: como se debe cumplir

$$\frac{1}{2}S_g - \frac{n-2}{2n}\mathcal{R}(g) = \frac{1}{n}S_g,$$

deducimos que

$$S_g = \mathcal{R}(g).$$

**Observación 3.17** Debido a la segunda identidad de Bianchi (ver [7]) si  $\dim(M) \geq 3$  y  $g$  es una métrica de Einstein, la curvatura escalar es constante en cada componente conexa de  $M$ . Esto no es cierto cuando la dimensión de  $M$  es 2. En dimensión 2, todas las métricas son de Einstein pero no todas son de curvatura escalar constante. Por otro lado, como ya mencionamos, tampoco es cierta la recíproca. Existen métricas de curvatura escalar constante que no son de Einstein.

**Corolario 3.18** En  $S^2 \times S^1$ , el funcional de Hilbert-Einstein no tiene puntos críticos.

**Demostración:** Si tuviera puntos críticos,  $S^2 \times S^1$  admitiría una métrica de Einstein.

Dados  $T$  y  $G$  dos tensores simétricos de tipo  $(0, 2)$  su *producto de Kulkarni-Nomizu* es el tensor simétrico de tipo  $(0, 4)$  definido por

$$\begin{aligned} T \otimes G(X, Y, Z, W) = & T(X, W)G(Y, Z) + T(Y, Z)G(X, W) \\ & - T(X, Z)G(Y, W) - T(Y, W)G(X, Z) \end{aligned}$$

que resulta ser un tensor algebraico de curvatura, (ver [7]).

En particular, el producto de Kulkarni-Nomizu de una métrica  $g$  consigo misma es

$$g \otimes g(X, Y, Z, W) = 2(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)).$$

El tensor de curvatura puede descomponerse del siguiente modo, (ver [4])

$$R = W + \frac{1}{n-2} \left( Ricc_g - \frac{S_g}{n} g \right) \otimes g + \frac{S_g}{2n(n-1)} g \otimes g$$

donde

$$W = R - A \otimes g$$

es el *tensor de Weyl* y

$$A = \frac{1}{n-2} \left( Ricc_g - \frac{S_g}{2(n-1)} g \right)$$

es el *tensor de Schouten*.

En dimensión 3 el tensor de Weyl es siempre nulo. Luego, si  $g$  es una métrica de Einstein entonces

$$Ricc_g = \frac{S_g}{n} g$$

y, por lo tanto,

$$R = \frac{S_g}{2(n-1)} g \otimes g = C g \otimes g$$

donde  $C$  es una constante.

De esto se deduce que la curvatura seccional de  $g$  es constante. Luego, su revestimiento universal debería ser o bien  $\mathbb{R}^3$  o bien  $S^3$ , sin embargo su revestimiento universal es  $S^2 \times \mathbb{R}$ , lo que es una contradicción.  $\square$

En caso de que el funcional de Hilbert-Einstein tenga puntos críticos, estos no serán extremos relativos.

**Teorema 3.19** Si  $g \in \mathcal{M}$  es un punto crítico del funcional de Hilbert-Einstein,  $g$  será un punto silla.

Para probar el teorema anterior comencemos calculando la fórmula de la segunda variación del funcional  $Y$  en  $g$ , donde  $g \in \mathcal{M}_1$  es una métrica de Einstein.

Derivando la primera fórmula de variación  $Y$  obtenido en la Proposición 3.15 tenemos que

$$\left( Y(G_t) \right)'' \Big|_t = \left( -V(t)^{\frac{-n-2}{n}} (H_t, F(G_t)) \right)' =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n+2}{n} V(t)^{\frac{-2n-2}{n}} V'(t) (H_t, F(G_t)) - V(t)^{\frac{-n-2}{n}} \left[ \int_M \langle H'_t, F(G_t) \rangle dV_{G_t} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_M \langle H_t, (F(G_t))' \rangle dV_{G_t} + \int_M \langle H_t, F(G_t) \rangle \frac{1}{2} \text{tr}_{G_t}(H_t) dV_{G_t} \right].
 \end{aligned}$$

Si evaluamos en  $t = 0$ , teniendo en cuenta que  $F(G(0)) = F(g) = 0$ ,  $H(0) = h$  y  $V(0) = 1$ , obtenemos que

$$Y''(G(t))\Big|_{t=0} = - \int_M \langle h, (F \circ G)'(0) \rangle dV_g.$$

Como  $g$  es una métrica de Einstein de volumen 1 se tiene que  $\mathcal{R}'(g) = 0$  y  $S_g = \mathcal{R}(g)$ . Luego

$$\begin{aligned}
 (F \circ G)'(0) &= \text{Ricc}'_g - \frac{1}{2} S'_g g - \frac{1}{2} S_g h + \frac{n-2}{2n} \mathcal{R}'(g) g + \frac{n-2}{2n} \mathcal{R}(g) h = \\
 &= \text{Ricc}'_g - \frac{1}{2} S'_g g - \frac{1}{n} \mathcal{R}(g) h.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si notamos con

$$\mathcal{L}(h) = \text{Ricc}'_g - \frac{1}{2} S'_g g - \frac{1}{n} \mathcal{R}(g) h \tag{3.33}$$

la segunda variación del funcional de Hilbert-Einstein en  $g \in \mathcal{M}_1$  un punto crítico resulta ser

$$Y''(G(t))\Big|_{t=0} = - \int_M \langle h, \mathcal{L}(h) \rangle dV_g.$$

En la Sección 3.2 mostramos que el espacio  $S^2(M)$  se puede descomponer como

$$S^2(M) = S_0 + S_1 + S_2$$

donde  $S_0$  está formado por los tensores de la forma  $L_X g$ ,  $S_1$  son los tensores de la forma  $ug$  con  $u \in C^\infty(M)$  y  $S_2$  por los tensores transversales y sin traza.

Para ver que el funcional de Hilbert-Einstein no tiene extremos, mostraremos que si  $g$  es un punto crítico entonces

$$Y''|_{t=0} < 0$$

sobre  $S_2$ . Esto nos dice que  $Y$  tiene un máximo local en la curva con tangente en  $S_2$ . Por otro lado,  $g$  resulta un mínimo local en las direcciones de  $S_0 + S_1$ .

En los siguientes lemas daremos una expresión del funcional  $\mathcal{L}(h)$  sobre cada uno de los espacios  $S_0$ ,  $S_1$  y  $S_2$ .

**Lema 3.20** Si  $h \in S_1$ , es decir  $h = ug$  con  $u \in C^\infty$ , entonces

$$\mathcal{L}(h) = Ricc'_g - \frac{1}{2}S'_g g - \frac{1}{n}S_g h = \frac{n-2}{2} ((uS_g - \Delta u)g - \nabla^2 u).$$

**Demostración:** Sea  $p \in M$ , consideremos una carta normal de centro  $p$ .

En la Proposición 3.13 demostramos la fórmula (3.28) para la derivada de la curvatura de Ricci, donde  $G_t$  es una curva que satisface que  $G(0) = g$  y  $G'(0) = h$ .

$$(R_{ij} \circ G)'(0)(p) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{kl} \left( -h_{kl} \left( \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right) + h_{kl} \left( \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x_j \partial x_l} \right) \right) \Big|_p \\ & + \frac{1}{2} \sum_{kl} \left( g^{kl} \left( \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 h_{jl}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right) - g^{kl} \left( \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_j \partial x_l} \right) \right) \Big|_p \end{aligned}$$

En nuestro caso, como  $h = ug$  obtenemos que

$$\begin{aligned} Ricc'_g(p) = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \left[ g^{kl} \left( g_{il} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + g_{jl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - g_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} \right) \right. \\ \left. - g^{kl} \left( g_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + g_{il} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} - g_{ki} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_j} \right) \right] \Big|_p dx_i \otimes dx_j \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{kl} g^{kl} g_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} \right) - n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] \Big|_p dx_i \otimes dx_j = \\
 &= \frac{2-n}{2} \nabla^2 u + \frac{1}{2} (\Delta u) g.
 \end{aligned}$$

Además, por la Proposición 3.13 tenemos que

$$S'_G|_{t=0}(p) = - \langle h(p), Ricc_g(p) \rangle + \delta^2 h(p) + \Delta(tr_g(h))(p). \quad (3.34)$$

Como  $h = ug$ , el primer término de (3.34) es

$$\begin{aligned}
 - \langle h(p), Ricc_g(p) \rangle &= - \sum_{ijkl} g^{ik} g^{jl} h_{ij} R_{kl} \Big|_p = \\
 &= - \sum_{ijkl} g^{ik} g^{jl} u g_{ij} R_{kl} \Big|_p = u \sum_{kl} g^{kl} R_{kl} \Big|_p = -u S_g(p).
 \end{aligned}$$

Por otro lado, en la Proposición 3.13 se mostró la fórmula (3.29) para  $\delta^2 h$  que en coordenadas normales en  $p$  es

$$\delta^2 h(p) = \sum_{ik} \frac{\partial^2 h_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} \sum_{ikl} h_{kl} \left( 2 \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_i} \right) \Big|_p,$$

y como  $h = ug$ ,

$$\begin{aligned}
 \delta^2 h(p) &= \sum_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} g_{ki} + u \sum_{ik} \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} \sum_{ikl} u g_{kl} \left( 2 \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_i} \right) \Big|_p \\
 &= \sum_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} g_{ki} + u \sum_{ik} \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{2} \sum_{ik} u \left( 2 \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 g_{kk}}{\partial x_i \partial x_i} \right) \Big|_p
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \Big|_p g_{ki}(p) = \Delta u(p).$$

El tercer término es

$$\Delta(\text{tr}_g(ug))(p) = \Delta(nu)(p) = n\Delta(u)(p).$$

Luego

$$\begin{aligned} S'_G|_{t=0}(p) &= - \langle h(p), \text{Ric}_g(p) \rangle + \delta^2 h(p) + \Delta(\text{tr}_g(h))(p) = \\ &= -u(p)S_g(p) - \Delta u(p) + n\Delta u(p). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(h) &= \text{Ric}'_g - \frac{1}{2}S'_g g - \frac{1}{n}S_g h = \\ &= \frac{2-n}{2}\nabla^2 u + \frac{1}{2}\Delta u g - \frac{1}{2}(-S_g u + (n-1)\Delta u)g - \frac{1}{n}S_g u g \\ &= \frac{n-2}{2} \left( \left( -\Delta u + \frac{1}{n}uS_g \right) g - \nabla^2 u \right). \end{aligned}$$

□

Se puede ver que si  $h \in S_2$  (ver página 125 de [30]) entonces

$$\mathcal{L}h = \text{Ric}'_g - \frac{1}{2}S'_g g - \frac{1}{n}S_g h = -\frac{1}{2}\Delta h + K(h) \quad (3.36)$$

donde  $K$  es el término lineal

$$(K(h))_{ij} = - \sum_{kl} R_{ijkl} h^{kl} + \frac{1}{2} \sum_k (R_{ik} h_j^k + R_{jk} h_i^k) - \frac{1}{n} S_g h_{ij}$$

y con  $\Delta h$  notamos

$$(\Delta h)_{ij} = \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}.$$

**Lema 3.21** Si  $h \in S_0$  entonces  $\mathcal{L}|_{S_0} \equiv 0$ .

**Demostración:** Sea  $h \in S_0$ , entonces existe  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $h = L_X g$  y consideremos el grupo uniparamétrico de difeomorfismos en  $M$  generado por  $X$ ,  $\phi_t : M \rightarrow M$ .

Luego si consideramos  $\bar{g}_t = \phi_t^*(g)$  el pullback de  $g$  por  $\phi$ , tenemos que

$$\int_M S_{\bar{g}_t} dV_{\bar{g}_t} = \int_M S_g dV_g$$

para todo  $t$ .

Como  $\bar{g}_t = \phi_t^*(g)$  es isométrica a  $g$  para todo  $t$

$$F(\phi_t^*(g)) = F(g) = 0.$$

Evaluando en  $t = 0$  su derivada,  $\mathcal{L}|_{S_0} \equiv 0$ . □

**Lema 3.22** Si  $u \in C^\infty(M)$  entonces  $\nabla^2 u \in S_0$ .

**Demostración:** Veamos que si  $\flat(X) = \nabla u = du$  entonces

$$2\nabla^2 u = L_X g.$$

Recordemos que

$$\nabla^2 u(Y, Z) = Y(Z(u)) - \nabla_Y Z(u) = Y(Z(u)) - g(X, \nabla_Y Z).$$

Por otro lado,

$$L_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]).$$

Debido a que  $g([X, Y], Z) = g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z)$  y por la compatibilidad de la métrica  $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$  se tiene que

$$\begin{aligned} L_X g(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) = \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) - g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Z X, Y) \\ &+ g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = Y(g(X, Z)) - g(X, \nabla_Y Z) + Z(g(X, Y)) - g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

$$= \nabla^2 u(Y, Z) + \nabla^2 u(Z, Y) = 2\nabla^2 u(Y, Z).$$

□

Daremos aquí la demostración del Teorema 3.19.

**Demostración:** Comencemos viendo que  $S_0 + S_1$  y  $S_2$  son espacios invariantes por  $\mathcal{L}$ .

Supongamos que  $h \in S_1$ , es decir que  $h = ug$  con  $u \in C^\infty(M)$ . Entonces, por el Lema 3.20,

$$\mathcal{L}h = \frac{n-2}{2} \left( \left( \frac{1}{n} S_g u - \Delta u \right) g - \nabla^2 u \right)$$

Por el Lema 3.22,  $\nabla^2 u \in S_0$ , y por lo tanto  $\mathcal{L}h \in S_0 + S_1$  si  $h \in S_1$ . Luego por el Lema 3.21 se desprende que  $S_0 + S_1$  es invariante por  $\mathcal{L}$ .

Como  $S_2$  es ortogonal a  $S_0 + S_1$  y  $S_0 + S_1$  es invariante por  $\mathcal{L}$ , para ver que  $S_2$  también es invariante por  $\mathcal{L}$ , alcanza con probar que  $\mathcal{L}$  es un operador autoadjunto.

Sean  $h$  y  $k$  dos tensores de tipo  $(0, 2)$  simétricos. Definimos

$$G(t, s) = g + th + sk$$

y

$$\tilde{G}(t, s) = V(t, s)^{-2/n} G(t, s),$$

donde  $V(t, s)$  es el volumen de  $M$  respecto a la métrica  $G(t, s)$ .

Así,

$$\frac{\partial Y(G(t, s))}{\partial t} = -V(t, s)^{-(2-n)/n} \int_M (h, F(G(t, s)))_{G(t, s)} dV_{G(t, s)}.$$

Derivando ahora con respecto a  $s$  y evaluando en  $(t, s) = (0, 0)$  obtenemos que

$$\frac{\partial^2 Y(G(t, s))}{\partial s \partial t} \Big|_{(0,0)} = - \int_M (h, \mathcal{L}(k))_g dV_g.$$

Cambiando el orden de las derivadas obtenemos que  $\mathcal{L}$  es autoadjunta, y por lo tanto, que  $S_2$  es invariante por  $\mathcal{L}$ .

Por 3.36 el espectro de  $\mathcal{L}|_{S_2} : S_2 \rightarrow S_2$  está formado por autovalores que tienden a  $-\infty$ . Por lo tanto, existe  $\lambda < 0$  y un tensor  $h \in S_2$  tal que

$$Y''(G(t)) \Big|_{t=0} = - \int_M (h, \mathcal{L}(h)) dV_g = -\lambda \|h\|^2 > 0.$$

Con lo cual  $g$  es un mínimo local del funcional de Hilbert-Einstein restringido a  $S_2$ .

Por otro lado, si  $h = ug \in S_1$ , donde  $u$  es una función suave, definimos el funcional  $\mathcal{L}_1 : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  definido por

$$\mathcal{L}_1(u) = \frac{(n-1)(n-2)}{2n} \left( \Delta u + \frac{1}{n-1} S_g u \right).$$

En el próximo capítulo veremos que el espectro del Laplaciano conforme en una variedad compacta es una sucesión discreta de autovalores que tiende a  $+\infty$ : De modo similar puede verse que  $\mathcal{L}_1$  cumple con la misma propiedad. Luego, existe un autovalor  $\lambda > 0$  y una autofunción  $u \in C^\infty(M)$  de  $\mathcal{L}_1$ .

Si  $h = ug$  entonces usando la fórmula del Lema 3.20 tenemos que

$$\begin{aligned} Y''(G(t))|_{t=0} &= - \int_M (ug, \mathcal{L}(ug)) dV_g = \\ &= - \int_M \left( ug, \frac{n-2}{2} \left( \left( \Delta u + \frac{1}{n} S_g u \right) g - \nabla^2 u \right) \right) dV_g \\ &= - \int_M \left( \frac{n-2}{2} u \operatorname{tr}_g(g) \Delta u + \frac{n-2}{2} u \frac{1}{n} S_g \operatorname{tr}_g(g) - \frac{n-2}{2} u \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) dV_g \\ &= - \int_M \left( \frac{(n-2)(n-1)}{2} u \Delta u + n \frac{n-2}{2} u \frac{1}{n} S_g u \right) dV_g = -n \int_M u \mathcal{L}_1 u dV_g \\ &= -n \lambda \|u\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que los puntos críticos del funcional de Hilbert-Einstein no pueden ser extremos locales.

□

# Capítulo 4

## Laplaciano conforme

En este capítulo introducimos el operador Laplaciano conforme y veremos algunas de las propiedades que tiene su espectro. Uno de los principales resultados de esta tesis es el hecho de que el conjunto de métricas para las cuales 0 no es un autovalor del Laplaciano conforme es denso en el espacio de métricas.

### 4.1. Espectro del Laplaciano conforme.

El Laplaciano conforme, que notaremos con  $L_g$ , es un operador que surge de manera natural al intentar resolver el problema de Yamabe para variedades cerradas. Este trata sobre la cuestión de si en cada clase conforme  $[g]$  existe una métrica Riemanniana para la cual la curvatura escalar es constante. Es decir, si dada una métrica  $g \in \mathcal{M}$  existe una función suave y positiva,  $u$  tal que si  $h = u \cdot g$  entonces  $S_h$  es una función constante.

Observemos que una métrica  $h$  está en la clase conforme  $[g]$  si y solo si existe una función suave  $u > 0$  de modo que  $h = u^{p_n-2}g$  donde  $p_n = \frac{2n}{n-2}$ .

Puede probarse el siguiente lema (ver [24] para su demostración) que relaciona la curvatura escalar de  $h$  con la de  $g$ .

**Lema 4.1** Si  $h = u^{p_n-2}g$  como antes y  $a_n = 4 \left( \frac{n-1}{n-2} \right)$  entonces

$$S_h = u^{1-p_n} (a_n \Delta_g u + S_g u).$$

**Observación 4.2** Si la curvatura escalar de  $(M, h)$  es constante  $S_h \equiv c$  la ecuación anterior puede escribirse como

$$a_n \Delta_g u + S_g u = cu^{p_n-1}.$$

El operador que se obtiene del lado izquierdo de la igualdad anterior es el *Laplaciano conforme*, es decir

$$L_g u = a_n \Delta_g u + S_g u.$$

Entonces el problema de Yamabe es equivalente a decidir si existe una constante  $c$  y una función suave y positiva  $u$  que satisface

$$L_g u = c u^{p_n - 1}.$$

La respuesta al problema de Yamabe es afirmativa ([24] y las referencias allí citadas) y el signo de la constante  $c$  coincide con el signo del primer autovalor de  $L_g$ .

Enunciaremos algunas de las propiedades más importantes del Laplaciano conforme.

**Teorema 4.3** El Laplaciano conforme es un operador autoadjunto.

**Demostración:** Se deduce inmediatamente de la fórmula de Green

$$(L_g u, v) = \int_M (a_n \Delta_g u + S_g u) v dV_g = \int_M (a_n u \Delta_g v + S_g u v) dV_g = (u, L_g v).$$

□

Daremos ahora una idea de por qué el espectro de  $L_g$  es una sucesión que tiende a infinito.

**Teorema 4.4** El espectro de  $L_g$  es una sucesión de autovalores no decreciente que tiende a infinito

$$\lambda_1(g) < \lambda_2(g) \leq \lambda_3(g) \leq \dots \leq \lambda_k(g) \rightarrow +\infty. \quad (4.1)$$

En (4.1) los autovalores aparecen repetidos según su multiplicidad.

**Demostración:** Es bien sabido que por ser un operador autoadjunto, su espectro es una sucesión de autovalores que caracterizamos en la Proposición 4.5 de la siguiente sección. Para ver que tiende a infinito, (ver [12] y [8]) recordar que el espectro de  $\Delta_g : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  es

$$0 = \beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_k \rightarrow +\infty.$$

La idea de esta demostración es considerar  $S : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  tal que

$$\Delta S u = u.$$

Resulta ser que  $S$  es un operador lineal, acotado, compacto y simétrico. Luego por el teorema espectral para operadores compactos su espectro es una sucesión que tiende a 0. Por lo tanto, como si  $\mu$  es autovalor no nulo de  $S$  entonces  $\lambda = 1/\mu$  es autovalor de  $\Delta$ .

De la Proposición 4.5 deducimos que

$$\lambda_k(g) \geq \inf_{V \in G_k} \sup_{v \in V - \{0\}} \left( \frac{\int_M v_k L_g v_k dV_g}{\|v_k\|_2^2} \right) + m,$$

donde  $m = \min_{p \in M} \{S_g(p)\}$  y  $\|v_k\|_2$  es la norma de  $L^2$ .

Luego,

$$\lambda_k \geq a_n \beta_k + m \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty.$$

□

## 4.2. Continuidad de los autovalores del Laplaciano conforme.

En esta sección veremos que los autovalores del Laplaciano conforme varían continuamente con la métrica. Para la demostración usaremos la siguiente fórmula min-max que caracteriza al  $k$ -ésimo autovalor de  $L_g$ .

**Proposición 4.5** Si  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana cerrada,  $\lambda_k(g)$  es el  $k$ -ésimo autovalor de  $L_g$  entonces

$$\lambda_k(g) = \inf_{V \in G_k} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2) dV_g}{\|v\|_2^2}$$

donde  $G_k$  está formado por los subespacios de dimensión  $k$  de  $H_1^2(M)$ .

**Demostración:** Sea  $E = \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal de autofunciones, tal que  $u_k$  es una autofunción de autovalor asociado  $\lambda_k$ . Sea  $V \subseteq H_1^2(M)$  un subespacio de dimensión  $k$  y

$$W = \{u_1, \dots, u_{k-1}\}^\perp.$$

Luego, existe  $v \in V \cap W$ . Por lo tanto,  $v$  se puede expresar de la siguiente forma

$$v = \sum_{i=k}^{\infty} a_i u_i.$$



Así,

$$\begin{aligned} \int_M v L_g v dV_g &= \int_M \left( \sum_{i=k}^{\infty} a_i u_i \right) L_g \left( \sum_{j=k}^{\infty} a_j u_j \right) dV_g = \\ &= \sum_{i,j=k}^{\infty} a_i a_j \lambda_j(g) \int_M u_i u_j dV_g = \sum_{i=k}^{\infty} a_i^2 \lambda_i(g) \geq \lambda_k(g) \sum_{i=k}^{\infty} a_i^2 = \lambda_k(g) \|v\|_2^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\int_M v L_g v dV_g}{\|v\|_2^2} \geq \lambda_k(g).$$

en particular el supremo sobre los vectores en  $V$  lo cumple

$$\sup_{f \in V - \{0\}} \frac{\int_M v L_g v dV_g}{\|v\|_2^2} \geq \lambda_k(g).$$

Como esto se cumple para todo subespacio  $V$  de dimensión  $k$ , tenemos que

$$\inf_{V \in \mathcal{G}_k} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M v L_g v dV_g}{\|v\|_2^2} \geq \lambda_k(g).$$

Para la otra desigualdad, consideremos  $V_k = \{u_1, \dots, u_k\}$ . Si  $v \in V_k - \{0\}$  y  $v = \sum_{i=1}^k a_i u_i$  tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\int_M v L_g v dV_g}{\|v\|_2^2} &= \frac{\int_M \left( \sum_{i=1}^k a_i u_i \right) \left( \sum_{j=1}^k a_j L_g u_j \right) dV_g}{\sum_{i=1}^k a_i^2} = \\ &= \frac{\sum_{i,j=1}^k a_i a_j \lambda_j(g) \int_M u_i u_j dV_g}{\sum_{i=1}^k a_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^k a_i^2 \lambda_i(g)}{\sum_{i=1}^k a_i^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^k a_i^2 \lambda_k(g)}{\sum_{i=1}^k a_i^2} = \lambda_k(g). \end{aligned}$$

Esto muestra que para todo  $v \in V_k - \{0\}$

$$\frac{\int_M v L_g v dV_g}{\|v\|_2^2} \leq \lambda_k(g),$$

y por lo tanto,

$$\sup_{v \in V_k - \{0\}} \frac{\int_M v L_g v dV_g}{\|v\|_2^2} \leq \lambda_k(g).$$

En particular cumple la desigualdad si tomamos ínfimo sobre los subespacios de dimensión  $k$  y queda demostrado el teorema

$$\inf_{V \in G_k} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2) dV_g}{\|v\|_2^2} \leq \sup_{v \in V_k - \{0\}} \frac{\int_M v L_g v dV_g}{\|v\|_2^2} \leq \lambda_k(g).$$

□

**Observación 4.6** El primer autovalor del Laplaciano conforme es

$$\lambda_1(g) = \inf_{V \in G_1} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2) dV_g}{\int_M v^2 dV_g} = \inf_{v \in H_1^2 - \{0\}} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2) dV_g}{\left( \int_M v^2 dV_g \right)}.$$

Recordando que la constante de Yamabe es

$$Y(M, [g]) = \inf_{v \in H_1^2 - \{0\}} \frac{\int_M (a_n |\nabla_g v|^2 + S_g v^2) dV_g}{\left( \int_M v^{p_n} dV_g \right)^{\frac{2}{p_n}}}.$$

Luego, es fácil ver que el signo de  $\lambda_1(g)$  es igual al signo de  $Y(M, [g])$ .

En [1] y [5] hay una demostración de la continuidad de los autovalores del Laplaciano con la métrica  $C^\infty$ , definida en la 3.2. La extenderemos para los autovalores del Laplaciano conforme.

**Proposición 4.7** Si  $M$  es una variedad cerrada,  $\lambda_k(g)$  es el  $k$ -ésimo autovalor de  $L_g$  entonces para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(g, h) < \delta$  entonces  $|\lambda_k(g) - \lambda_k(h)| < \epsilon$ .

**Demostración:** Como  $d(g, h) < \delta$ , en particular tenemos que  $e^{-\delta}h < g < e^{\delta}h$ . Sea  $\{(V_i, x_i)\}$  un atlas finito de  $M$  y  $\{(U_i, \rho_i)_{1 \leq i \leq k}\}$  una partición de la unidad subordinada a  $\{(V_i, x_i)\}$ .

La desigualdad  $d(g, h) < \delta$  implica localmente que

$$e^{-\delta}(h_{ij}) < (g_{ij}) < e^{\delta}(h_{ij}).$$

Por lo tanto, se verifica que

$$e^{-\frac{n}{2}\delta} \sqrt{\det(h_{ij})} < \sqrt{\det(g_{ij})} < e^{\frac{n}{2}\delta} \sqrt{\det(h_{ij})}$$

y además se mantienen las desigualdades para las inversas

$$e^{-\delta}(h^{ij}) < (g^{ij}) < e^{\delta}(h^{ij}).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|f\|_g^2 &= \int_M f^2 dV_g = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^2 \rho_i(x) \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^2 \rho_i(x) e^{\frac{n}{2}\delta} \sqrt{\det(h_{ij})} dx_1 \dots dx_n = e^{\frac{n}{2}\delta} \int_M f^2 dV_g = e^{\frac{n}{2}\delta} \|f\|_h^2. \end{aligned}$$

Del mismo modo tenemos

$$e^{-\frac{n}{2}\delta} \|f\|_h^2 \leq \|f\|_g^2.$$

Por otro lado, si  $w$  es una 1-forma con soporte en  $U_i$  tenemos que

$$\begin{aligned} \|w\|_g^2 &= \int_{U_i} g^{ij} w_i w_j \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n \leq \\ &\leq e^{(\frac{n}{2}+1)\delta} \int_{U_i} h^{ij} w_i w_j \sqrt{\det(h_{ij})} dx_1 \dots dx_n = e^{(\frac{n}{2}+1)\delta} \|w\|_h^2. \end{aligned}$$

Así,

$$e^{-(\frac{n}{2}+1)\delta} \|df\|_h^2 \leq \|df\|_g^2 \leq e^{(\frac{n}{2}+1)\delta} \|df\|_h^2.$$

Además, como  $S_h \rightarrow S_g$  cuando  $h \rightarrow g$ , existe  $\tilde{\delta} > 0$  tal que si  $d(g, h) < \tilde{\delta}$  entonces

$$e^{-\delta} S_h < S_g < e^{\delta} S_h.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_M (a_n |\nabla_g f|^2 + S_g f^2) dV_g &= \sum_{i=1}^k \int_{U_i} (a_n |\nabla_g f|^2 + S_g f^2) dV_g = \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{U_i} (a_n |\nabla_g f|^2 + S_g f^2) \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n \leq \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{U_i} (a_n e^\delta |\nabla_h f|^2 + e^\delta S_h f^2) e^{\frac{n}{2}\delta} \sqrt{\det(h_{ij})} dx_1 \dots dx_n \\
&= e^{(\frac{n}{2}+1)\delta} \int_M (a_n |\nabla_h f|^2 + S_h f^2) dV_h.
\end{aligned}$$

Así,

$$e^{-(n+1)\delta} \frac{\int_M L_h(f) f dV_h}{\|f\|_h^2} \leq \frac{\int_M L_g(f) f dV_g}{\|f\|_g^2} \leq e^{(n+1)\delta} \frac{\int_M L_h(f) f dV_h}{\|f\|_h^2}.$$

Por lo tanto, tomando el ínfimo del supremo adecuadamente obtenemos que

$$e^{-(n+1)\delta} \lambda_k(h) \leq \lambda_k(g) \leq e^{(n+1)\delta} \lambda_k(h).$$

Y cuando  $d(h, g) < \delta \rightarrow 0$  entonces  $\lambda_k(h) \rightarrow \lambda_k(g)$ .

□

# Capítulo 5

## Métricas con núcleo trivial

El resultado principal de este capítulo consistirá en probar que el conjunto de métricas Riemannianas que no tienen a 0 como autovalor del Laplaciano conforme es genérico, es decir que es un abierto denso en  $\mathcal{M}$ . Este resultado fue probado por Gover, Hassannezhad, Jakobson y Levitin en [16].

Un problema central en la Teoría de Perturbaciones (ver [21] y [28]) es ver como cambian los autovalores y autoespacios de un operador lineal cuando modificamos un poco la métrica. En nuestro caso, el operador lineal que nos interesa es el Laplaciano conforme. Como hemos visto los autovalores de este operador dependen continuamente de la métrica. Sin embargo, si pretendemos que los autovalores de un operador dependan diferenciablemente ante una perturbación de una métrica Riemanniana, en general, no alcanzará con pedir que dicha perturbación sea suave.

Si aplicamos el Teorema 3 de ([28], página 74), o bien los resultados sobre familias holomorfas autoadjuntas de operadores del Capítulo VII de [21], a la familia de operadores Laplaciano conforme inducidos por una curva analítica de métricas Riemannianas tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.1** Sea  $g_0$  una métrica Riemanniana y sea  $\lambda_0$  un autovalor de  $L_{g_0}$  de multiplicidad  $m_0$ . Sea  $G : I \rightarrow \mathcal{M}$  una curva analítica de métricas Riemannianas tal que  $G(0) = g_0$ . Entonces:

1. Dado  $\epsilon > 0$ , tal que  $L_{g_0}$  no tiene otro autovalor distinto de  $\lambda_0$  en  $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $|t| < \delta$ ,  $L_{G(t)}$  tiene exactamente  $m_0$  autovalores en el intervalo  $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ .

2. Existen  $m_0$  funciones analíticas

$$\mu_1(t), \dots, \mu_{m_0}(t)$$

y  $m_0$  ramas de autofunciones

$$e_1(t), \dots, e_{m_0}(t)$$

tales que

$$L_{G(t)}e_i(t) = \mu_i(t)e_i(t)$$

y

$$\int_M e_i(t)e_j(t)dV_{G(t)} = \delta_{ij}.$$

**Definición 5.2** Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , notaremos con  $\mathcal{M}_{0,k}$  al conjunto de métricas  $g$  para las cuales la multiplicidad de 0 como autovalor de  $L_g$  es al menos  $k$ .

Notamos  $E_0(g)$  el núcleo de  $L_g$ . Sea  $G(t) = G_t$  una curva de métricas analíticas que satisface que  $G(0) = g$  y  $G'(0) = h$ . Consideremos el operador lineal  $Q_{gh} : E_0(g) \rightarrow E_0(g)$  definido por

$$Q_{gh} = \Pi_{E_0(g)} \circ \left( a_n(\Delta_{G_t})'(0) + (S_{G_t})'(0) \right)$$

donde  $\Pi_{E_0(g)}$  es la proyección ortogonal al subespacio  $E_0(g)$ .

Notaremos con  $C^w(I, \mathcal{M}_{0,m})$  al espacio de curvas analíticas en  $\mathcal{M}_{0,m}$  ( $m \geq 1$ ). Si  $g \in \mathcal{M}_{0,m}$ , denotamos con  $T_g\mathcal{M}_{0,m}$  al subconjunto del conjunto de tensores simétricos de tipo  $(0, 2)$  dado por

$$T_g(\mathcal{M}_{0,m}) = \{h \in S^2(M) \mid \text{existe } G \in C^w(I_\epsilon, \mathcal{M}_{0,m}), \epsilon > 0 \text{ y } G'(0) = h\}.$$

Con  $\mathcal{H}_{0,m}$  denotamos a

$$\mathcal{H}_{0,m} = \{h \in S^2(M) \mid 0 \text{ es autovalor de } Q_{gh} \text{ de multiplicidad al menos } m\}. \quad (5.1)$$

La siguiente proposición relaciona estos conjuntos.

**Proposición 5.3** Sea  $g \in \mathcal{M}_{0,m}$  y  $k \leq m$ . Tenemos que

$$T_g(\mathcal{M}_{0,m}) \subseteq \mathcal{H}_{0,k}.$$

**Demostración:** Por el Teorema 5.1, dado  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|t| < \delta$  el número de autovalores de  $L_{G(t)}$ , contados con multiplicidad, en el intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$  es exactamente  $m$ .

Sean  $\lambda(t)$  y  $u(t)$  una de las ramas de autovalores y autofunciones provistas por el Teorema 5.1. Es decir,

$$\begin{aligned} L_{G_t}u(t) &= \lambda(t)u(t), \\ \lambda(0) &= 0 \end{aligned}$$

y

$$u(0) \in E_0(g).$$

Veamos que  $\lambda'(0)$  es autovalor de  $Q_{gG'(0)}$ .

En efecto, tenemos que

$$L_{G_t}u(t) = \lambda(t)u(t)$$

para todo  $t$ . Si derivamos y evaluamos en  $t = 0$  obtenemos que

$$(L_{G_t})'(0)u(0) + L_g u'(0) = \lambda'(0)u(0) + \lambda(0)u'(0) = \lambda'(0)u(0). \quad (5.2)$$

Como  $L_g$  es un operador autoadjunto tenemos que dado  $w \in Ker(L_g)$

$$(L_g v, w) = (v, L_g w) = 0.$$

Por lo tanto,

$$Im(L_g) \subseteq Ker(L_g)^\perp. \quad (5.3)$$

Luego si aplicamos  $\Pi_{E_0(g)}$  a ambos lados de la igualdad (5.2) obtenemos

$$\Pi_{E_0(g)} \left( (L_{G_t})'(0)u(0) \right) = \lambda'(0)\Pi_{E_0(g)}(u(0))$$

es decir que

$$Q_{gG'(0)}u(0) = \lambda'(0)u(0).$$

Por lo tanto,  $\lambda'(0)$  es un autovalor de  $Q_{gG'(0)}$ .

Sea  $G_t \in C^w(I_\epsilon, \mathcal{M}_{0,k})$ . Luego, dado  $\epsilon > 0$  para  $t$  suficientemente chico,  $L_{G_t}$  tiene a lo sumo  $m$  autovalores en  $(-\epsilon, \epsilon)$ . Sean

$$\mu_1, \dots, \mu_m$$

las ramas de autovalores dados por el Teorema 5.1.

Supongamos que  $\mu'_j(0) \neq 0$  para algún  $1 \leq j \leq m$ . Luego

$$\mu_j(t) \neq 0 \text{ para } 0 < |t| < \delta$$

con  $\delta$  adecuadamente chico. Pero esto solo puede pasar para  $m - k$  ramas de autovalores dado que

$$\dim(\text{Ker}(L_{G(t)})) \geq k.$$

Por lo tanto, al menos  $k$  de las ramas  $\mu_1, \dots, \mu_m$  tienen derivada nula en  $t = 0$ . Con lo cual, la multiplicidad de 0 como autovalor de  $Q_{gG'(0)}$  es al menos  $k$ . En particular, si  $k = m$ , se tiene que

$$Q_{gG'(0)} \equiv 0.$$

□

De la discusión de la Sección 3.2, podemos identificar el espacio tangente a  $\frac{\mathcal{M}/\mathcal{C}_{>0}^\infty}{\mathcal{D}}$  en  $g$  con el espacio de tensores simétricos que satisfacen  $\text{tr}_g h = 0$  y  $\delta h = 0$ . Luego, podemos pensar que  $\mathcal{H}_{0,m}$  está formado por los tensores simétricos que satisfacen  $\text{tr}_g h = 0$ ,  $\delta h = 0$  y cumplen la condición de  $\mathcal{H}_{0,m}$  (ver (5.1)).

Para probar la densidad de las métricas en las que 0 no es autovalor de  $L_g$  necesitaremos la siguiente proposición.

**Proposición 5.4** Sea  $g \in \mathcal{M}_{0,m}$  de curvatura escalar constante y no nula  $S_g \equiv c$  con  $c \neq 0$ . Entonces existe  $h \in S^2(M)$  tal que  $Q_{gh} \neq 0$ .

**Demostración:** Sea  $G(t)$  una curva de métricas analíticas tal que  $G(0) = g$  y  $G'(0) = h$  (con  $\text{tr}_g(h) = 0$  y  $\delta h = 0$ ).

Sea  $\lambda(t)$  y  $u(t)$  una de las ramas de autovalores y autofunciones de  $L_{G_t}$  tal que

$$L_{G_t}u(t) = \lambda(t)u(t) \tag{5.4}$$

$$\lambda(0) = 0, u(0) \in E_0(g) \text{ y } (u(t), u(t)) = 1.$$

De la demostración de la Proposición 5.3 alcanza con ver que existe una curva  $G$  y una rama  $\lambda(t)$  (con  $\lambda(0) = 0$ ) tal que  $\lambda'(0) \neq 0$ . Pues si no  $Q_{gG'(0)} \equiv 0$ .

Derivando (5.4), tenemos que

$$(L_{G_t})'(t)u(t) + L_{G_t}u'(t) = \lambda'(t)u(t) + \lambda(t)u'(t)$$



$$(L_{G_t})'(t)u(t) + (L_{G_t} - \lambda(t))u'(t) = \lambda'(t)u(t).$$

Evaluando en  $t = 0$

$$(L_{G_t})'(0)u(0) + L_g u'(0) = \lambda'(0)u(0).$$

Por (5.3)  $(L_g u'(0), u(0)) = 0$ , luego

$$\left( (a_n \Delta'_{G_t}(0) + S'_{G_t}(0))u(0), u(0) \right) = \lambda'(0)(u(0), u(0)) = \lambda'(0). \quad (5.5)$$

Por las Proposiciones 3.12 y 3.13, tenemos que

$$(\Delta_{G_t})'(0)f = \langle h, \nabla^2 f \rangle - \langle \delta_g h + \frac{1}{2}d(tr_g h), df \rangle \quad (5.6)$$

y

$$(S_{G_t})'(0) = - \langle h, Ricc_g \rangle + \delta_g^2 h + \Delta_g(tr_g h). \quad (5.7)$$

Como  $tr_g(h) = 0$ , (5.6) y (5.7) quedan

$$(\Delta_{G_t})'(0)f = \langle h, \nabla^2 f \rangle - \langle \delta_g h, df \rangle$$

y

$$(S_{G_t})'(0) = - \langle h, Ricc_g \rangle + \delta_g^2 h.$$

Luego la igualdad (5.5) es

$$\begin{aligned} \lambda'(0) &= \left( a_n \langle h, \nabla^2(u(0)) \rangle - a_n \langle \delta_g h, d(u(0)) \rangle - \langle h, u(0) Ricc_g \rangle + u(0) \delta_g^2 h, u(0) \right) \\ &= a_n \left( \langle h, \nabla^2 u(0) \rangle, u(0) \right) - a_n \left( \langle \delta_g h, d(u(0)) \rangle, u(0) \right) \\ &\quad - \left( \langle h, u(0) Ricc_g \rangle, u(0) \right) + \left( u(0) \delta_g^2 h, u(0) \right). \quad (5.8) \end{aligned}$$

Notar que

$$\left( \langle h, u(0) Ricc_g \rangle, u(0) \right) = \int_M \langle h, u(0) Ricc_g \rangle u(0) dV_g$$

$$= \int_M \langle h, u(0)^2 Ricc_g \rangle dV_g = \left( h, u(0)^2 Ricc_g \right).$$

Con lo cual (5.8) queda

$$\begin{aligned} \lambda'(0) &= a_n \left( h, u(0) \nabla^2 u(0) \right) - a_n \left( \delta_g h, u(0) d(u(0)) \right) - \left( h, (u(0))^2 Ricc_g \right) + \left( \delta_g^2 h, (u(0))^2 \right) \\ &= a_n \left( h, u(0) \nabla^2 u(0) \right) - a_n \left( h, \nabla(u(0) d(u(0))) \right) - \left( h, (u(0))^2 Ricc_g \right) + \left( h, \nabla^2((u(0))^2) \right) \\ &= a_n \left( h, u(0) \nabla^2 u(0) \right) - a_n \left( h, u(0) \nabla^2(u(0)) \right) - a_n \left( h, d(u(0)) \otimes d(u(0)) \right) \\ &\quad - \left( h, (u(0))^2 Ricc_g \right) + \left( h, \nabla^2((u(0))^2) \right) \\ &= \int_M \langle h, -a_n d(u(0)) \otimes d(u(0)) - (u(0))^2 Ricc_g + \nabla^2((u(0))^2) \rangle dV_g. \end{aligned}$$

Usando que

$$\nabla^2 u^2 = 2(u \nabla^2 u + du \otimes du)$$

(ver (2.9)), tenemos que

$$\lambda'(0) = \int_M \langle h, u(0) \left( 2 \nabla^2(u(0)) - u(0) Ricc_g \right) + (2 - a_n) \left( d(u(0)) \otimes d(u(0)) \right) \rangle dV_g.$$

Dado un tensor  $V$  de tipo  $(0, 2)$  notamos con

$$\overset{\circ}{V} = V - \frac{1}{n} tr_g(V)g.$$

$\overset{\circ}{V}$  resulta ser un tensor de tipo  $(0, 2)$  con traza nula pues

$$tr_g(\overset{\circ}{V}) = tr_g(V) - \frac{1}{n}tr_g(V)tr_g(g) = 0.$$

Como estamos suponiendo que  $tr_g h = \langle h, g \rangle = 0$  entonces para cualquier tensor  $V$  de tipo  $(0, 2)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle h, \overset{\circ}{V} \rangle &= \langle h, V - \frac{1}{n}tr_g(V)g \rangle = \\ &= \langle h, V \rangle - \frac{1}{n}tr_g(V) \langle h, g \rangle = \langle h, V \rangle. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lambda'(0) = \int_M \langle h, u(0) \left( 2\overset{\circ}{\nabla}^2(u(0)) - u(0)Ricc_g \right) + (2 - a_n) \left( d(u(0)) \otimes d(u(0)) \right) \rangle.$$

Si consideramos el tensor simétrico y sin traza

$$h = u(0) \left( 2\overset{\circ}{\nabla}^2(u(0)) - u(0)Ricc_g \right) + (2 - a_n) \left( d(u(0)) \otimes d(u(0)) \right).$$

tenemos que  $\lambda'(0) = 0$  si y solo si

$$u(0) \left( 2\overset{\circ}{\nabla}^2(u(0)) - u(0)Ricc_g \right) + (2 - a_n) \left( d(u(0)) \otimes d(u(0)) \right) \equiv 0. \quad (5.9)$$

Ahora, afirmamos (5.9) solo tiene la solución trivial, lo cual probaría la Proposición.

En efecto, si  $u(0) \not\equiv 0$  es una solución no trivial de la Ecuación (5.9), como  $u(0) \in Ker(L_g)$  y  $g$  tiene curvatura escalar constante  $c \neq 0$  tenemos que

$$a_n \Delta_g u(0) = -cu(0).$$

Esto implica que  $u(0)$  es ortogonal a cualquier función constante no nula, pues

$$\int_M u(0) a dV_g = \int_M \left( -\frac{a_n}{c} \Delta_g(u(0)) \right) a dV_g = \int_M \frac{a_n}{c} \nabla(u(0)) \nabla a dV_g = 0.$$

Lo cual nos dice que  $u$  es una función que cambia de signo. Como  $M$  es conexa, el conjunto nodal de  $u$ ,  $N(u)$ , es decir aquellos puntos de  $M$  donde  $u$  se anula, es distinto de vacío.

Si nos restringimos a puntos de  $N(u)$ , la ecuación (5.9) es

$$(2 - a_n) \left( d(u(0)) \otimes d(u(0)) \right) \Big|_{N(u(0))}^{\circ} \equiv 0.$$

Como  $a_n \neq 2$  esto implica que

$$\left( d(u(0)) \otimes d(u(0)) \right) \Big|_{N(u(0))}^{\circ} \equiv 0$$

lo cual implica que

$$d(u(0)) \otimes d(u(0)) = \frac{1}{2} \|d(u(0))\|_g^2 g. \quad (5.10)$$

Sin embargo, notar que ambos lados de la igualdad anterior tienen distinto rango si

$$d(u(0)) \Big|_{N(u(0))} \neq 0.$$

Luego, solo podríamos tener la igualdad (5.10) si los puntos de  $N(u(0))$  son además puntos críticos. No obstante, es bien sabido que el conjunto de puntos nodales que son puntos críticos (ver [18] y las referencias que allí aparecen) tienen medida de Hausdorff  $n - 2$  dimensional, lo cual implica que

$$du \Big|_{N(u(0))} \neq 0.$$

□

**Corolario 5.5** Sea  $g$  una métrica Riemanniana con curvatura escalar constante  $S_g = c$  ( $c \neq 0$ ) que satisface que  $g \in \mathcal{M}_{0,m}(M) \cap \mathcal{M}_{0,m+1}(M)^c$ . Para  $u(0)$  un elemento no nulo de  $E_0(g)$  consideramos el tensor

$$h = u(0) \left( u(0) Ric_g^{\circ} - 2 \nabla^2(u(0)) \right) + (a_n - 2) \left( d(u(0)) \otimes d(u(0)) \right)^{\circ}.$$

Sea  $G(t)$  la curva dada por

$$G(t) = g + th.$$

Tenemos que para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  tal que  $G(t)$  no se encuentra en  $\mathcal{M}_{0,m}(M)$ .

**Demostración:** Por la proposición anterior existe  $h$  tal que  $Q_{g,h} \neq 0$ . Entonces existe  $u \in E_0(g)$  tal que  $Q_{g,h}(u) \neq 0$ . Como  $g \in \mathcal{M}_{0,m}(M) \cap \mathcal{M}_{0,m+1}(M)^c$ , tenemos que  $\dim(E_0(g)) = m$  y 0 es autovalor de  $Q_{gh} : E_0(g) \rightarrow E_0(g)$  de multiplicidad menor a  $m$ , pues  $\dim(E_0(g)) = m$  y  $Q_{gh} \neq 0$ . Luego,  $h \notin T_g(\mathcal{M}_{0,m})$ , lo que prueba que  $G(t) \notin C^\omega(I_\epsilon, \mathcal{M}_{0,m})$  para algún  $t \neq 0$ .  $\square$

**Lema 5.6** Supongamos que una sucesión de métricas  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tiende a  $g$  en la topología  $C^\infty$ . Sea  $h = e^f g \in [g]$  donde  $f \in C^\infty(M)$ . Luego,

$$e^f g_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} h.$$

**Demostración:**

Para demostrar el lema, basta probar que el operador  $T_f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  definido por

$$T_f(g) = e^f g$$

es un homeomorfismo con inversa  $T_{-f}$  con respecto a la topología  $C^\infty$  (ver Sección 3.1.1).

Por definición, tenemos que

$$d_1(T_f(g), T_f(h)) = e^f d_1(g, h) \leq K d_1(g, h)$$

donde  $K = \max_{x \in M} \{e^{f(x)}\}$ .

Por otro lado,

$$d_2(e^f g, e^f h) = d_2(g, h),$$

pues

$$d_2^x(e^f g, e^f h) = \inf \left\{ \delta > 0 \text{ tales que } e^{-\delta} (e^f g)_x < (e^f f)_x < e^\delta (e^f g)_x \right\}$$

y

$$e^{-\delta} (e^f g)_x < (e^f f)_x < e^\delta (e^f g)_x \text{ si y solo si } e^{-\delta} (g)_x < (f)_x < e^\delta (g)_x.$$

Luego,

$$d(T_f(g), T_f(h)) = d_1(T_f(g), T_f(h)) + d_2(T_f(g), T_f(h)) \leq$$

$$K d_1(g, h) + d_2(g, h) \leq \max\{K, 1\} d(g, h).$$

$\square$

Estamos en condiciones de demostrar la densidad de las métricas que no tienen a cero como autovalor.

**Teorema 5.7** El complemento de  $\mathcal{M}_{0,1}(M)$  es un abierto denso de  $\mathcal{M}(M)$ .

**Demostración:** El hecho de que  $(\mathcal{M}_{0,1}(M))^c$  es un conjunto abierto se debe a que  $\mathcal{M}_{0,1}(M)$  es un conjunto cerrado. Si  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de métricas en  $\mathcal{M}_{0,1}$  que tiende a una métrica Riemanniana  $g$  en la topología  $C^\infty$  entonces tenemos que

$$\lambda_l(g_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_l(g)$$

para todo  $l$ . Supongamos que  $g \notin \mathcal{M}_{0,1}(M)$ . Luego o todo espectro de  $L_g$  es positivo o existe un  $k_0$  para el cual los primeros  $k_0$  autovalores son negativos,  $\lambda_k(g) < 0$  si  $k \leq k_0$ , y a partir de  $k_0$  son todos positivos  $\lambda_k(g) > 0$  si  $k > k_0$ . Tomando  $\epsilon > 0$  de modo tal que

$$\epsilon < \min\{-\lambda_{k_0}(g), \lambda_{k_0+1}(g)\}$$

existe  $l_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|\lambda_{k_0}(g) - \lambda_{k_0}(g_l)| < \epsilon$  y  $|\lambda_{k_0+1}(g) - \lambda_{k_0+1}(g_l)| < \epsilon$  para todo  $l > l_0$ .

Por lo tanto  $\lambda_{k_0}(g_l) < 0$  y  $\lambda_{k_0+1}(g_l) > 0$  para todo  $l > l_0$  pero esto no puede ocurrir ya que el núcleo de  $L_{g_l}$  es no trivial para todo  $l$ .

En particular, existe un  $l_0$  tal que  $\lambda_{l_0}(g_k) = 0$  para todo  $k \geq k_0$ , Luego,  $\lambda_{l_0}(g) = 0$ .

Para ver la densidad de este conjunto basta con probar que para todo  $g \in \mathcal{M}$  y un entorno  $U$  de  $g$  existe  $\tilde{g} \in \mathcal{M}_{0,1}^c(M) \cap U$ . Si  $g$  es una métrica en cuya clase conforme  $[g]$  existe una métrica de curvatura escalar positiva, entonces  $\lambda_1(g) > 0$  (ver la discusión de este hecho en el Capítulo 4) y por lo tanto, la misma  $g$  está en  $\mathcal{M}_{0,1}^c(M)$ .

Luego, podemos suponer que  $g$  es una métrica en cuya clase conforme no hay métricas de curvatura escalar positiva. Es decir,

$$\lambda_1(g) \leq 0.$$

Para demostrar el teorema bastaría probar el enunciado para una métrica con curvatura escalar constante no positiva. Pues supongamos por un momento que hayamos probado esto. Si  $g$  es una métrica Riemanniana de curvatura escalar no constante, tenemos, por la resolución positiva del problema de Yamabe, que existe una función suave  $f$  tal que

$$h = e^{-f} g \in [g]$$

es una métrica Riemanniana de curvatura escalar constante. Luego, existe

$$h_k \in \mathcal{M}_{0,1}^c(M) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} h.$$

Por el Lema 5.6, tenemos que

$$e^f h_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} g.$$

El Laplaciano conforme satisface la siguiente propiedad de invarianza

$$L_{u^{p_n-2}g}(v) = u^{1-p_n} L_g(uv).$$

Luego,

$$L_{e^f h_k}(v) = e^{-f \frac{n+2}{4}} L_{h_k}(e^{\frac{f}{p_n-2}} v).$$

Por lo tanto, si  $h_k \notin \mathcal{M}_{0,1}(M)$ ,  $e^f h_k$  tampoco pertenecerá a ese conjunto.

Supongamos primero que  $g$  tiene curvatura escalar constante negativa.

Probaremos que  $\mathcal{M}_{0,1}^c(M)$  es denso en este subconjunto de métricas utilizando un argumento inductivo en la dimensión del núcleo de  $L_g$ .

Si  $\dim(E_0(g)) = 1$ , por el Corolario 5.5, deducimos que en todo entorno de  $g$  tenemos una métrica Laplaciano conforme tiene núcleo trivial.

Asumamos que el resultado es cierto para toda métrica  $g$  de curvatura escalar constante negativa y  $\dim(E_0(g)) \leq m - 1$ .

Sea  $g$  una métrica tal que 0 tenga multiplicidad exactamente  $m$  como autovalor de  $L_g$  y sea  $U$  un entorno de  $g$ . Por el Corolario 5.5, existe  $g_1 \in U$  tal que la multiplicidad de 0 como autovalor de  $L_{g_1}$  es a lo sumo  $m - 1$ . Luego, por hipótesis inductiva, existe  $g_2 \in U$  tal que  $\text{Ker}(L_{g_2}) = \{0\}$ .

Solo resta ver el caso en el que la curvatura escalar de  $g$  es  $S_g \equiv 0$ . Recordar que en esta situación  $g$  es un mínimo del funcional  $J = Y|_{[g]}$ . Si cualquier entorno de  $g$  admite una métrica  $\tilde{g}$  con  $\lambda_1(\tilde{g}) < 0$  entonces procedemos como en el párrafo anterior. Supongamos que esta no fuera la situación. Con lo cual, debería existir un entorno  $U$  de  $g$  tal que  $\lambda_1(\tilde{g}) \geq 0$  para todo  $\tilde{g} \in U$ . Luego,

$$\frac{\int_M S_h dV_h}{(\text{Vol}(M, h))^{\frac{n-2}{n}}} \geq 0$$

para todo  $h \in [\tilde{g}]$  para todo  $\tilde{g} \in U$ . Pero esto implica que  $g$  es un mínimo local del funcional de Hilbert-Einstein, y por el Teorema 3.19 es una contradicción.

□

Para finalizar comentaremos brevemente una aplicación del Teorema 5.7.

Tal como comentamos en la Introducción, en 1976 Uhlenbeck probó que el conjunto de métricas Riemannianas para las cuales los autovalores del operador de Laplace-Beltrami son simples, es genérico en  $\mathcal{M}$  (ver [32]). En 2014, Canzani (ver [6]) probó que si  $F_g$  son operadores, elípticos, autoadjuntos, conformemente covariantes que actúan sobre  $C^\infty(E)$ , entonces el conjunto de métricas  $g$  para los cuales todos los autovalores no nulos de  $F_g$  son simples es genérico en el espacio de métricas Riemannianas (Corolario 2.4 [6]). En realidad, el resultado que probó Canzani es mucho más general. Vale para operadores de este tipo que actúan en secciones de fibrados sobre la variedad siempre y cuando para un grupo denso de métricas los operadores correspondientes no posean espacios rígidos (ver página 950 en [6] para la definición de espacios rígidos).

Como corolario del Teorema 5.7 y los resultados de [6] tenemos que

**Corolario 5.8** El conjunto de métricas para las cuales el espectro del Laplaciano conforme está formado por autovalores simples es genérico en  $\mathcal{M}$ .

**Demostración:** Por la continuidad de los autovalores del Laplaciano conforme con respecto a la métrica es inmediato que el conjunto de métricas cuyo espectro solo consiste en autovalores simples es un conjunto abierto. Sean  $g \in \mathcal{M}$  y  $U$  un entorno de  $g$ . Por el Teorema 5.7 existe  $g_1 \in U$  tal que 0 no es autovalor de  $L_{g_1}$ . Luego existe  $g_2 \in U$  próxima tanto como queramos a  $g_1$  tal que los autovalores de  $L_{g_2}$  son todos simples.

□



# Bibliografía

- [1] Shigetoshi Bando y Hajime Urakawa. «Generic properties of the eigenvalue of the Laplacian for compact Riemannian manifolds». English. En: *Tôhoku Math. J. (2)* 35 (1983), págs. 155-172. ISSN: 0040-8735. DOI: 10.2748/tmj/1178229047.
- [2] M. Berger. «Sur les premieres valeurs propres des variétés Riemanniennes». French. En: *Compos. Math.* 26 (1973), págs. 129-149. ISSN: 0010-437X.
- [3] M. Berger y D. Ebin. «Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifolds». English. En: *J. Differ. Geom.* 3 (1969), págs. 379-392. ISSN: 0022-040X. DOI: 10.4310/jdg/1214429060.
- [4] Arthur L. Besse. *Einstein manifolds*. English. Vol. 10. *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, 3. Folge. Springer, Cham, 1987.
- [5] Yaiza Canzani. *Notes for Analysis on Manifolds via the Laplacian*. 2013.
- [6] Yaiza Canzani. «On the multiplicity of eigenvalues of conformally covariant operators». English. En: *Ann. Inst. Fourier* 64.3 (2014), págs. 947-970. ISSN: 0373-0956. DOI: 10.5802/aif.2870.
- [7] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry. (Geometria riemanniana)*. Portuguese. Vol. 10. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1979.
- [8] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry. With a chapter by Burton Randol. With an appendix by Jozef Dodziuk*. English. Vol. 115. *Pure Appl. Math.*, Academic Press. Academic Press, New York, NY, 1984.
- [9] J. Cheeger. *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*. English. *Probl. Analysis, Sympos. in Honor of Salomon Bochner*, Princeton Univ. 1969, 195-199 (1970). 1970.

- [10] Mircea Craioveanu, Mircea Puta y Themistocles M. Rassias. *Old and new aspects in spectral geometry*. English. Vol. 534. Math. Appl., Dordr. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. ISBN: 1-4020-0052-9.
- [11] D. G. Ebin. «On the space of Riemannian metrics». English. En: *Bull. Am. Math. Soc.* 74 (1968), págs. 1001-1003. ISSN: 0002-9904. DOI: 10.1090/S0002-9904-1968-12115-9.
- [12] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. English. Vol. 19. Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998. ISBN: 0-8218-0772-2.
- [13] Arthur E. Fischer y Jerrold E. Marsden. «The manifold of conformally equivalent metrics». English. En: *Can. J. Math.* 29 (1977), págs. 193-209. ISSN: 0008-414X. DOI: 10.4153/CJM-1977-019-x.
- [14] S. Gallot, D. Hulin y J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. English. Universitext. Springer, Cham, 1987. ISBN: 3-540-17923-2.
- [15] Carolyn Gordon, David L. Webb y Scott Wolpert. «One cannot hear the shape of a drum». English. En: *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* 27.1 (1992), págs. 134-138. ISSN: 0273-0979. DOI: 10.1090/S0273-0979-1992-00289-6.
- [16] A. Rod Gover, Asma Hassannezhad, Dmitry Jakobson y Michael Levitin. «Zero and negative eigenvalues of the conformal Laplacian». English. En: *J. Spectr. Theory* 6.4 (2016), págs. 793-806. ISSN: 1664-039X. DOI: 10.4171/JST/142.
- [17] Mikhael Gromov y H. Blaine Lawson. «The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature». English. En: *Ann. Math. (2)* 111 (1980), págs. 423-434. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/1971103. URL: semanticscholar.org/paper/2441b94f710dea851a1c6360258bba59be032c8a.
- [18] Qing Han, Robert Hardt y Fanghua Lin. «Geometric measure of singular sets of elliptic equations». English. En: *Commun. Pure Appl. Math.* 51.11-12 (1998), págs. 1425-1443. ISSN: 0010-3640. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0312(199811/12)51:11/12<1425::AID-CPA8>3.0.CO;2-3.
- [19] Nigel J. Hitchin. «Harmonic spinors». English. En: *Adv. Math.* 14 (1974), págs. 1-55. ISSN: 0001-8708. DOI: 10.1016/0001-8708(74)90021-8.
- [20] Mark Kac. «Can one hear the shape of a drum?». English. En: *Am. Math. Mon.* 73 (1966), págs. 1-23. ISSN: 0002-9890. DOI: 10.2307/2313748.
- [21] Tosio Kato. *A short introduction to perturbation theory for linear operators*. English. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. XIII, 161 p. DM 49.00; \$ 19.60 (1982). 1982.

- [22] Claude LeBrun. «Einstein metrics and the Yamabe problem». English. En: *Trends in mathematical physics. Proceedings of the conference, University of Tennessee, Knoxville, TN, USA, October 14–17, 1998*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999, págs. 353-376. ISBN: 0-8218-2006-0.
- [23] John M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. English. Vol. 176. Grad. Texts Math. New York, NY: Springer, 1997. ISBN: 0-387-98322-8.
- [24] John M. Lee y Thomas H. Parker. «The Yamabe problem». English. En: *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* 17 (1987), págs. 37-91. ISSN: 0273-0979. DOI: 10.1090/S0273-0979-1987-15514-5.
- [25] A. Lichnerowicz. «Spineurs harmoniques». French. En: *C. R. Acad. Sci., Paris* 257 (1963), págs. 7-9. ISSN: 0001-4036.
- [26] John W. Milnor. «Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds». English. En: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 51 (1964), pág. 542. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.51.4.542.
- [27] S. Minakshisundaram. «Eigenfunctions on Riemannian manifolds». English. En: *J. Indian Math. Soc., New Ser.* 17 (1954), págs. 159-165. ISSN: 0019-5839.
- [28] Franz Rellich. *Perturbation theory of eigenvalue problems*. English. Notes on Mathematics and its Applications. New York-London-Paris: Gordon and Breach Science Publishers. X, 127 p. (1969). 1969.
- [29] Richard Schoen y Shing-Tung Yau. «On the structure of manifolds with positive scalar curvature». English. En: *Manuscr. Math.* 28 (1979), págs. 159-183. ISSN: 0025-2611. DOI: 10.1007/BF01647970.
- [30] Richard M. Schoen. *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*. English. Topics in calculus of variations, Lect. 2nd Sess., Montecatini/Italy 1987, Lect. Notes Math. 1365, 120-154 (1989). 1989.
- [31] N. K. Smolentsev. «Spaces of Riemannian metrics». English. En: *J. Math. Sci., New York* 142.5 (2007), págs. 2436-2519. ISSN: 1072-3374. DOI: 10.1007/s10958-007-0185-3.
- [32] K. Uhlenbeck. «Generic properties of eigenfunctions». English. En: *Am. J. Math.* 98 (1976), págs. 1059-1078. ISSN: 0002-9327. DOI: 10.2307/2374041.

- [33] Yves Colin de Verdière. «Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée. (Construction of Laplacians when a finite part of the spectrum is given)». French. En: *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 20.4 (1987), págs. 599-615. ISSN: 0012-9593. DOI: 10.24033/asens.1546.
- [34] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. English. 1971.