



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Sincronización en Grafos Dinámicos

Fernando Daniel Perazzo

Director: Pablo Groisman

Fecha de Presentación: 28/08/2023

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	11
1.1. Grafos	12
1.2. Cadenas de Markov	13
1.3. Paseos al azar	21
1.3.1. Procesos de salto	23
1.4. Ecuaciones diferenciales	27
1.4.1. El teorema de Carathéodory	30
1.4.2. El lema de Gronwall	36
2. El modelo de Kuramoto	39
2.1. Definición	39
2.2. Sincronización	41
2.2.1. Conectividad crítica	46
3. Kuramoto en grafos dinámicos	55
3.1. Construcción	55
3.1.1. Primeros resultados	57
3.2. Resultados de convergencia	62
3.3. Resultado principal	67
4. Simulaciones numéricas	69
Conclusiones	75
Trabajo futuro	77

Introducción

La sincronización espontánea se expresa como una tendencia al orden y la coordinación, donde un comportamiento colectivo surge por medio de interacciones simples y dinámicas entre componentes o individuos. Estos pueden ser desde objetos inánimes, como péndulos, hasta personas interactuando en sociedad. En cualquier caso, el principio subyacente reside en el hecho de que por medio de interacciones localizadas y/o mecanismos de retroalimentación, estas entidades son capaces de alcanzar una conducta conjunta que resulta no solo coherente, sino altamente precisa.

En la naturaleza, se observa cómo enjambres de luciérnagas parpadean en perfecta sincronía, particularmente entre las especies tropicales que habitan el sudeste asiático. Grandes poblaciones son capaces de organizarse creando un despliegue sumamente rítmico de luces, el cual logran sin ningún tipo de ayuda externa. Lo que resulta fascinante es que ninguna luciérnaga en particular se encuentra ocupando el rol de guía, sino que logran sincronizarse únicamente mediante la percepción e influencia de sus alrededores. Es esperable que este comportamiento resulte en un beneficio colectivo, aumentando sus chances de reproducirse y por lo tanto garantizando la supervivencia de la especie.

Frecuentemente vemos cómo nos sincronizamos en varias actividades sociales de manera espontánea. Desde los aplausos al final de una película hasta el festejo de los fanáticos durante un evento deportivo, como por ejemplo cuando se produce una ola mexicana (popularizada en mundial de 1986). Otra instancia notable de sincronización ocurrió durante la apertura del Puente del Milenio (Londres) en el 2000. Al coincidir los pasos de los transeuntes, se produjo una vibración lateral que forzó la clausura y posterior modificación del puente.

En 1656 Christiaan Huygens inventó el reloj de péndulo. Tan solo nueve años después, observó que al colgar dos péndulos en una misma tabla, estos rápidamente se sincronizaban con el mismo período y amplitud, balanceándose en direcciones opuestas. Este experimento constituye el primer estudio formal de osciladores acoplados [1].

Desde entonces, los osciladores acoplados han ocupado un lugar privilegiado tanto en mecánica clásica como en el estudio de sistemas dinámicos.

Los osciladores acoplados permiten estudiar una amplia gama de dinámicas colectivas. Desde el consenso y la cooperación [2], a la propagación de enfermedades [3]. Pasando por medicina, simulando el comportamiento de las células marcapasos [4], hasta en biología, con el ya mencionado parpadeo de las luciérnagas [5], [6]. Estos son solo unos cuantos ejemplos que ilustran la importancia de la sincronización. Como vemos, este fenómeno se hace presente en disciplinas como la física, química, biología, ingeniería, así como en nuestra conducta como sociedad.

Actualmente, existen varios modelos usados para describir la sincronización espontánea. Uno de los más conocidos es el modelo de Kuramoto. La importancia de este modelo radica en el hecho de que, a pesar de exhibir la suficiente complejidad como para no ser trivial, posee la relativa simpleza que permite estudiarlo en profundidad. Aún así, hay varios interrogantes en torno a este modelo que permanecen como tema de investigación activa.

El modelo de Kuramoto será el objeto de estudio principal de esta tesis. En él, la interacción entre distintos osciladores es una red que se representa con una matriz de adyacencia. La topología de esta red tiene un papel crucial en el comportamiento del sistema. Como es esperable, las redes altamente conectadas tienden a sincronizarse, sin importar las condiciones iniciales. Por otro lado, puede ocurrir que redes bastante densas admitan un *patrón*, es decir que no alcancen la sincronización para algún conjunto de condiciones iniciales de medida positiva. Al mismo tiempo, existen algunas redes esparsas que no admiten un patrón. El estudio de qué características debe poseer una red para no admitir un patrón es extremadamente complejo.

Nuestro enfoque en esta tesis será introducir un elemento de aleatoriedad a la red de conectividad, permitiendo que esta varíe a lo largo del tiempo. Los patrones que soportan las distintas redes pueden ser muy diferentes entre sí, pero el estado de sincronización total es una solución común a todas ellas. La intuición nos dice que este estado debe prevalecer si cambiamos la estructura constantemente. Formalmente, nos enfocaremos en dar condiciones que garanticen la sincronización entre los osciladores.

La tesis está organizada en cuatro capítulos.

En el Capítulo 1 hacemos un repaso de los nociones que consideramos como pre-requeridas para esta tesis. Puntualmente, nos concentramos en las cadenas de Markov, paseos al azar y procesos de Poisson. También recordamos algunos resultados de análisis y ecuaciones diferenciales.

En el Capítulo 2 introducimos el modelo de Kuramoto, el cual es uno de los principales modelos para el estudio de sincronización. Definimos algunos conceptos básicos y mostramos algunas propiedades generales. Incluimos algunos de los resultados clásicos, ejemplos, así como también una breve reseña del estado del arte.

En el Capítulo 3 presentamos algunas variantes del modelo de Kuramoto, en las cuales la estructura subyacente cambia a lo largo del tiempo de manera aleatoria. El trabajo original de esta tesis se centra en el estudio de este modelo propuesto, y se dan resultados tanto cuantitativos como cualitativos.

Concluimos con el Capítulo 4, en el cual exhibimos simulaciones numéricas que respaldan los resultados obtenidos. A su vez, también realizamos simulaciones en un contexto más amplio, sentando las bases para un posible trabajo futuro.

Agradecimientos

A mi familia, por su amor y apoyo inquebrantable a lo largo de toda mi vida.

A Mauro Rey, por iniciar mi camino en las matemáticas. Gracias por abrir mis ojos a un mundo que desconocía por completo de una manera tan enriquecedora.

A Pablo Groisman, por su orientación experta, su paciencia y dedicación incansables. Por transmitirme su sabiduría y motivarme a llegar cada vez más lejos.

A todos los docentes que formaron parte de mi formación como matemático.

A mis amigos, los cuales me limito a nombrar unos pocos: Palan, Boro, Kevin, Cris y Enzo. Cada momento compartido con ustedes fue un regalo que ilumina mis días. Su amistad y compañía significan todo para mí.

A todos aquellos cuyo nombre no menciono aquí, pero cuya influencia ha sido una contribución esencial para la culminación de este proyecto.

Finalmente, te agradezco a vos, por tomarte el tiempo de leer mi trabajo.

Este logro lo comparto con cada uno de ustedes. ¡Muchas gracias!

Capítulo 1

Preliminares

Nuestro objetivo es entender el comportamiento de osciladores acoplados cuyas interacciones varían en el tiempo. Para ello será necesario poder describir de qué manera se acoplan estos osciladores y cómo evoluciona su estado a lo largo del tiempo.

Como veremos más adelante, en nuestro caso, el acoplamiento de dos osciladores vendrá determinado por paseos al azar en un grafo dado (puntualmente, si la distancia entre dos paseos es pequeña, diremos que los osciladores correspondientes están acoplados). Los paseos aleatorios son uno de los procesos estocásticos más conocidos, que a su vez se encuentran dentro de una de las familias de procesos más importantes y estudiadas en la literatura: la de los procesos de Markov. La teoría de los procesos de Markov es muy rica y amplia por lo que hemos dejado de lado muchos resultados que no resultan centrales a esta tesis. Dirigimos al lector a [7], [8], [9] y [10], los cuales hemos tomado de referencia. Allí se pueden encontrar estos temas (y muchos más) tratados en mayor profundidad. Habiendo enunciado las propiedades básicas de las cadenas de Markov, nos concentraremos en los paseos al azar. Presentaremos algunos resultados clásicos y trataremos brevemente el caso a tiempo continuo.

Finalmente, para poder entender cómo se comporta el sistema de osciladores debemos hacer un repaso sobre ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta es la manera natural de modelar una amplia gama de sistemas dinámicos, estudiados en una gran variedad de disciplinas. En este trabajo tan solo necesitaremos unos pocos resultados de existencia y unicidad de soluciones. También haremos un repaso del flujo gradiente. Reconocemos que hay un sinnúmero de cuestiones que se pueden tratar, pero preferimos acotar esta sección para cubrir únicamente aquellas cosas que son de interés directo con esta tesis. Para estos resultados, nos hemos basado en [11] y [12].

1.1. Grafos

Un grafo $\mathbb{G} = (V, E)$ está compuesto por una colección de vértices (o nodos) V y un conjunto de aristas E . Los vértices se corresponden con objetos que nos interesa modelar, mientras que las aristas representan alguna relación entre ellos. En esta tesis vamos a trabajar exclusivamente con grafos *no dirigidos*. Esto significa que para $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$ indica que u y v están mutuamente conectados. Esto también lo notaremos mediante $u \sim v$ y a veces diremos de modo indistinto que dos vértices 'son adyacentes' o 'son vecinos' para indicar que están conectados. Ocasionalmente, nos vamos a referir a un conjunto V como un grafo. Tal es el caso de \mathbb{Z}^d , pensando que su conjunto de aristas es la grilla que determina. Concretamente, dados $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $x \sim y \iff \|x - y\| \leq 1$.

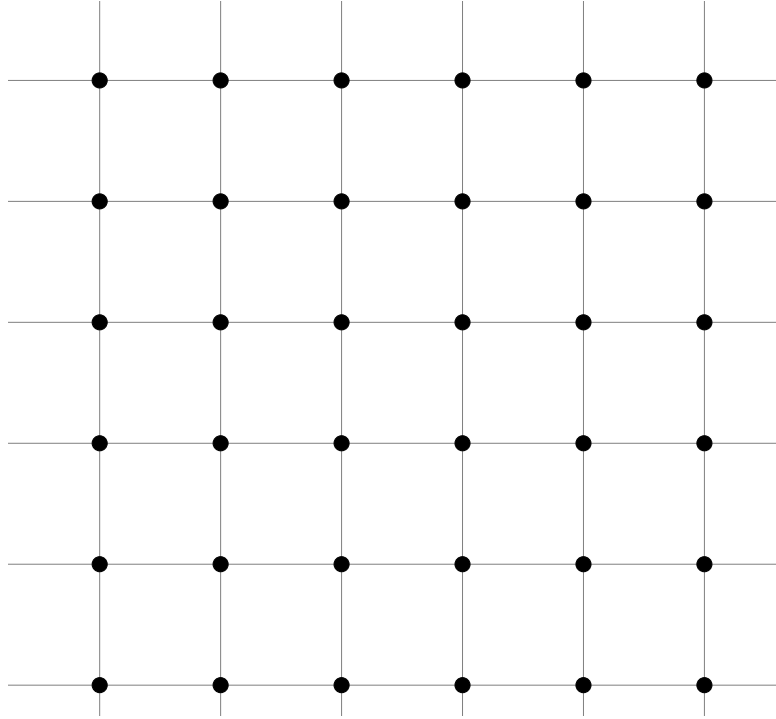


Figura 1.1: \mathbb{Z}^2 visto como grafo.

Diremos que $\mathbb{G} = (V, E)$ es *finito* si V lo es. En grafos finitos es común asumir que $V = [N] := \{1, \dots, N\}$. Para un grafo finito, su *matriz de adyacencia* es $A = (a_{uv})$ con $a_{uv} = \mathbb{1}_{\{u \sim v\}}$. Notar que dada una matriz simétrica A con coeficientes $a_{ij} \in \{0, 1\}$, podemos construir un grafo \mathcal{G}^A que tenga a A como matriz de adyacencia. Cuando tengamos un conjunto V cuya matriz de adyacencia se sobreentienda, escribiremos \mathcal{G}^V .

Un *camino* en un grafo es una secuencia $\mathcal{C} = (v_0, \dots, v_n)$ tal que $v_i \sim v_{i+1}$ para todo i ; en este caso decimos que el camino va de v_0 a v_n , y su longitud $|\mathcal{C}|$ es n . La *distancia* en un grafo es $d_{\mathbb{G}}(u, v) = d(u, v) := \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es un camino de } u \text{ a } v\}$, donde nos permitimos decir que $\min \emptyset = \infty$.

Como la relación ‘ u está conectado mediante un camino con v ’ es de equivalencia, podemos hablar de la componente conexas de u . En particular, vamos a decir que un grafo es *conexo* si para todo par u, v existe un camino de u a v .

El *grado* de un vértice u se define como $d(u) := \#\{v \in V : \{u, v\} \in E\}$. También definimos la *conectividad* μ de un grafo finito mediante $\mu := \min_u \left\{ \frac{d(u)}{\#V-1} \right\}$. Un grafo se dice *completo* si para todo par $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$.

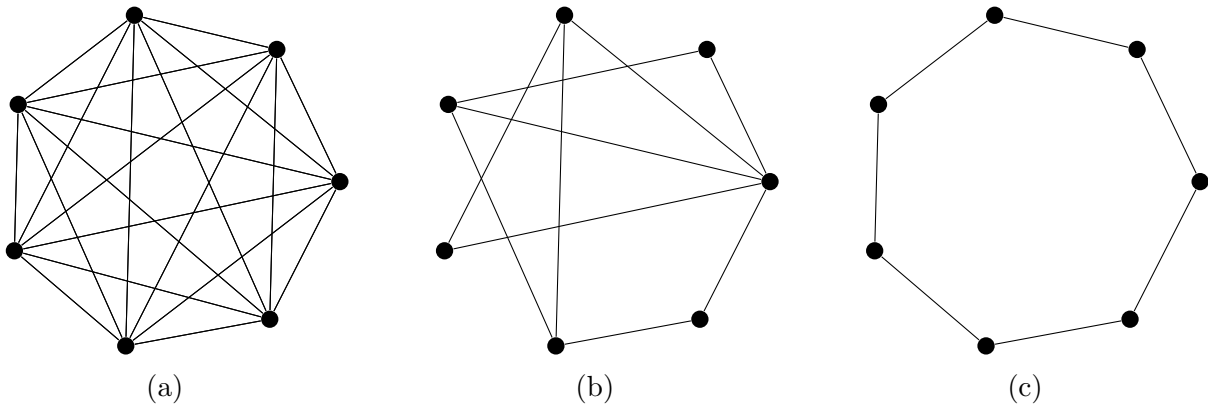


Figura 1.2: En (a) vemos un grafo completo y por lo tanto su conectividad es $\mu = 1$. En (b), cada vértice está conectado con al menos otros dos, lo que resulta en $\mu = 1/3$. El grafo en (c) se conoce como *el anillo*, y en este caso también tiene conectividad $\mu = 1/3$.

1.2. Cadenas de Markov

La propiedad que define a un proceso de Markov es la “pérdida de memoria” de aquellos sitios visitados en el pasado. Se llama *espacio de estados* al conjunto de sitios que un proceso de Markov puede visitar. Cuando un proceso con estas características se lo modela a tiempo discreto se lo suele llamar *cadena de Markov*.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Vamos a decir que $(X_n)_{n \geq 0}$ es una *cadena de Markov* con *espacio de estados* E , *matriz de transición* Π y *distribución inicial* μ si

X_0 tiene distribución μ y se satisface

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) \\ &= \Pi(x_n, x_{n+1})\end{aligned}\quad (1.1)$$

para todo $n \geq 0$ y todos $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$ con $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0$. En general, omitiremos μ salvo que sea necesario darlo de forma explícita. A (1.1) se le dice *propiedad de Markov*.

Notaremos con \mathbb{P}_μ a la probabilidad condicional de que X_0 tenga distribución μ , y con \mathbb{E}_μ a la esperanza con respecto a \mathbb{P}_μ . Cuando la distribución inicial sea $\mu = \delta_x$ para algún $x \in E$ dado, vamos a escribir \mathbb{P}_x y \mathbb{E}_x en lugar de \mathbb{P}_μ y \mathbb{E}_μ respectivamente.

Notar que podemos caracterizar \mathbb{P}_x mediante

$$\mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \Pi(x, x_1)\Pi(x_1, x_2) \cdots \Pi(x_{n-1}, x_n) \quad (1.2)$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_n \in E$. Más aún, sumando sobre x_1, \dots, x_{n-1} ,

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) = \Pi^n(x, y) \quad (1.3)$$

donde Π^n es la n -ésima potencia de la matriz de transición Π .

Teorema 1.1. (Propiedad de Markov) Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con matriz de transición Π y distribución inicial μ . Luego,

$$\mathbb{P}_\mu((X_n, X_{n+1}, \dots) \in A \mid (X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = x) = \mathbb{P}_x(A)$$

para todo $n \geq 0$ y todos $A \in \mathcal{F} = \mathcal{P}(E)^{\otimes \mathbb{Z}_+}$, $B \in E^n$ y $x \in E$, siempre y cuando se tenga que $\mathbb{P}_\mu((X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = x) > 0$.

Demostración. Vamos a demostrar este teorema para el caso en el cual $(\Omega, \mathcal{F}) = (E^{\mathbb{Z}_+}, \mathcal{P}(E)^{\otimes \mathbb{Z}_+})$ y X_n es la n -ésima proyección. La demostración del caso general requiere un resultado de unicidad que no mencionaremos en esta tesis.

Dados $k \geq 0$ y $x_0, \dots, x_k \in E$, por (1.2),

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_\mu((X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = x, X_{n+i} = x_i \text{ para } 0 \leq i \leq k) \\ &= \sum_{(y_0, \dots, y_{n-1}) \in B} \mu(y_0)\Pi(y_0, y_1) \cdots \Pi(y_{n-1}, x)\delta_{x, x_0}\Pi(x_0, x_1) \cdots \Pi(x_{k-1}, x_k) \\ &= \mathbb{P}_\mu((X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = x) \mathbb{P}_x(X_i = x_i \text{ para } 0 \leq i \leq k).\end{aligned}$$

El resultado se sigue tomando $A = \{X_i = x_i \text{ para } 0 \leq i \leq k\}$.

□

Definimos para $x \in E$ el *tiempo de parada* en x como

$$\tau_x := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = x\}.$$

Cuando x es el punto inicial τ_x también se llama el *tiempo de retorno* a x .

Una medida $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *invariante* respecto de Π si

$$\mu(x) = \sum_{y \in E} \mu(y) \Pi(y, x) \quad \forall y \in E.$$

Matricialmente, μ es una medida invariante si $\mu \Pi = \mu$, es decir si es un autovector a izquierda de autovalor 1 de la matriz Π . Si μ es la distribución estacionaria de una cadena $(X_n)_{n \geq 0}$ y también tomamos μ como la distribución inicial, entonces

$$\mathbb{P}_\mu(X_1 = x) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_\mu(X_1 = x \mid X_0 = y) \mu(y) = \sum_{y \in E} \Pi(y, x) \mu(y) = \mu(x). \quad (1.4)$$

Con lo cual la cadena tiene distribución μ a todo tiempo. Este es el motivo por el cual las distribuciones invariantes llevan ese nombre.

A continuación, estudiaremos la existencia y unicidad de estas distribuciones.

Una matriz de transición Π se dice *irreducible* si para todos $x, y \in E$ existe $n = n(x, y)$ tal que $\Pi^n(x, y) > 0$. Es decir, si partiendo de cualquier estado hay una probabilidad positiva de poder llegar a cualquier otro en una cantidad finita de pasos.

Teorema 1.2. Sea Π una matriz de transición irreducible con espacio de estados a lo sumo numerable. Si Π admite una distribución invariante μ , entonces

$$0 < \mu(x) = 1/\mathbb{E}_x(\tau_x) \quad \forall x \in E.$$

En particular, μ es la única distribución invariante.

Demostración. Primero probaremos que toda distribución invariante μ satisface

$$\mu(x) \mathbb{E}_x(\tau_x) = \mathbb{P}_\mu(\tau_x < \infty) \quad \forall x \in E. \quad (1.5)$$

Esto es cierto pues fijado x ,

$$\begin{aligned}
\mu(x)\mathbb{E}_x(\tau_x) &= \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_{\{X_0=x\}}\tau_x) = \mathbb{E}_\mu\left(\mathbf{1}_{\{X_0=x\}}\sum_{k\geq 0}\mathbf{1}_{\{\tau_x>k\}}\right) \\
&= \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}_\mu(X_0=x, \tau_x > k) \\
&= \lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k\geq 0}^{n-1}\mathbb{P}_\mu(X_0=x, X_i\neq x \quad \forall 1\leq i\leq k) \\
&= \lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k\geq 0}^{n-1}\mathbb{P}_\mu(X_{n-k}=x, X_i\neq x \quad \forall n-k+1\leq i\leq n) \\
&= \lim_{n\rightarrow\infty}\mathbb{P}_\mu(\tau_x\leq n) = \mathbb{P}_\mu(\tau_x < \infty).
\end{aligned}$$

Aquí, usamos que $\{X_{n-k}=x, X_i\neq x \quad \forall n-k+1\leq i\leq n\}$ es el evento en el cual $n-k$ es el tiempo de la última visita a x antes del paso n . Notar que esos eventos son disjuntos para cada $0\leq k\leq n-1$, y que su unión es el evento $\{\tau_x\leq n\}$, en donde x es visitado al menos una vez durante el intervalo $\{1, \dots, n\}$. También usamos (1.4) para correr el tiempo $n-k$ pasos.

Ahora resta probar que $\mu(x) > 0$ y que $\mathbb{P}_\mu(\tau_x < \infty) = 1$ para todo x . Notar que como μ es una densidad, existe algún x_0 con $\mu(x_0) > 0$. Por irreducibilidad de Π , dado x , existe k tal que $\Pi^k(x_0, x) > 0$. Así, $\mu(x) = \mu\Pi^k(x) \geq \mu(x_0)\Pi^k(x_0, x) > 0$. Pero entonces usando (1.5) y acotando la probabilidad por 1, $\mathbb{E}_\mu(\tau_x) \leq 1/\mu(x) < \infty$, lo que implica que $\mathbb{P}_\mu(\tau_x < \infty) = 1$. Veremos más adelante en 1.6 que $\mathbb{P}_x(X_n = x$ para infinitos $n) = 1$, así que juntando esto con la propiedad de Markov

$$0 = \mathbb{P}_x(X_n \neq x \text{ para todo } n > k) = \sum_{y\in E}\Pi^k(x, y)\mathbb{P}_y(\tau_x = \infty) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esto nos dice que $\mathbb{P}_y(\tau_x = \infty) = 0$ siempre que $\Pi^k(x, y) > 0$. Pero como Π es irreducible, resulta que entonces debe ser $\mathbb{P}_y(\tau_x < \infty) = 1$ para todo $y \in E$. Finalmente, notamos que $\mathbb{P}_\mu(\tau_x < \infty) = \sum_{y\in E}\mu(y)\mathbb{P}_y(\tau_x < \infty) = \sum_{y\in E}\mu(y) = 1$, lo que completa la demostración. □

Teorema 1.3. Considerar una cadena de Markov irreducible con espacio de estados E finito. Entonces existe una distribución invariante.

Demostración. Nuestro objetivo en esta demostración será probar que el límite

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\Pi^n(x, y) = \mu(y) > 0$$

existe, no depende del punto inicial x y es la única densidad que verifica

$$\sum_{x \in E} \mu(x) \Pi(x, y) = \mu(y) \quad \forall y \in E.$$

Definimos la *variación total* entre dos densidades discretas μ y ν como

$$\|\mu - \nu\| := \sum_{x \in E} |\mu(x) - \nu(x)|.$$

Notar que

$$\|\mu\Pi - \nu\Pi\| \leq \sum_{x \in E} \sum_{y \in E} |\mu(x) - \nu(x)| \Pi(x, y) = \|\mu - \nu\|. \quad (1.6)$$

Observar que como E es finito y la cadena es irreducible, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\Pi^k(x, y) > 0$ para todo $x, y \in E$. Más aún, debe existir $\delta > 0$ tal que $\Pi^k(x, y) \geq \delta/|E|$. Consideremos la matriz U dada por $U(x, y) := 1/|E|$. Ciertamente tenemos que $\Pi^k(x, y) \geq \delta U(x, y)$. Además, como Π^k y U son estocásticas, $\delta < 1$ o bien $\delta = 1$ y luego $\Pi^k = U$. Este último caso es trivial así que vamos a continuar asumiendo que $\delta < 1$. Si ahora definimos $V := (1 - \delta)^{-1}(\Pi^k - \delta U)$, observamos que es estocástica y verifica $\Pi^k = \delta U + (1 - \delta)V$. Entonces resulta que

$$\|\mu\Pi^k - \nu\Pi^k\| \leq \delta\|\mu U - \nu U\| + (1 - \delta)\|\mu V - \nu V\|. \quad (1.7)$$

Pero $\mu U = \nu U$ pues

$$\mu U(y) = \sum_{x \in E} \mu(x)/|E| = 1/|E| = \sum_{x \in E} \nu(x)/|E| = \nu U(y). \quad (1.8)$$

Así que por tomando V en lugar de Π en (1.6),

$$\|\mu\Pi^k - \nu\Pi^k\| \leq (1 - \delta)\|\mu - \nu\|.$$

Aplicando esta desigualdad sucesivamente vemos que

$$\|\mu\Pi^n - \nu\Pi^n\| \leq \|\mu\Pi^{mk} - \nu\Pi^{mk}\| \leq 2(1 - \delta)^m, \quad (1.9)$$

donde aquí $m = \lfloor n/k \rfloor$. También acotamos $\|\mu - \nu\| \leq 2$ y usamos (1.6) en la primera desigualdad (aplicada en Π^{n-mk}). Hemos mostrado que Π es una contracción.

Dada una densidad ν , consideramos la sucesión $(\nu\Pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como el conjunto de las densidades es cerrado en $[0, 1]^E$, que es compacto, existe una subsucesión tal que $\nu\Pi^{n_k}$ converge a una probabilidad que llamaremos μ . Aplicando (1.9) en ν y $\nu\Pi$, vemos que

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu\Pi^{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu\Pi^{n_k+1} = \mu\Pi.$$

Esto muestra que μ es estacionaria y que $\mu(y) \geq \mu\Pi^k(y) \geq \delta/|E|$ para todo $y \in E$. Si ahora aplicamos (1.9) en ν y μ , resulta que $\nu\Pi^n \rightarrow \mu$ cuando $n \rightarrow \infty$. En particular si ν es estacionaria, $\nu \rightarrow \mu$ y por lo tanto $\nu = \mu$, lo que muestra que μ es única. Finalmente, si $\nu = \delta_x$ para algún $x \in E$, entonces $\nu\Pi^n = \Pi^n(x, \cdot)$ y $\Pi^n(x, \cdot) \rightarrow \mu$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto completa la demostración. \square

Corolario 1.4. Bajo las mismas condiciones que las del teorema 1.3,

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} |\mathbb{P}_x((X_n, X_{n+1}, \dots)) - \mathbb{P}_\mu(A)| \rightarrow 0,$$

para todo $x \in E$. En otras palabras, la cadena de Markov es asintóticamente estacionaria, sin importar dónde empiece.

Demostración. Dado $A \in \mathcal{F}$, por el teorema 1.1

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_x((X_n, X_{n+1}, \dots)) - \mathbb{P}_\mu(A)| &= \left| \sum_{y \in E} (\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mu(A)) \mathbb{P}_y(A) \right| \\ &\leq \sum_{y \in E} (\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mu(A)). \end{aligned}$$

El resultado se sigue usando el teorema 1.3. \square

Para $x \in E$ definimos

$$F_1(x, x) = \mathbb{P}_x(\tau_x < \infty)$$

la probabilidad de volver a x en algún tiempo (finito),

$$F_\infty(x, x) = \mathbb{P}_x(X_n = x \text{ para infinitos } n)$$

la probabilidad de volver a x infinitas veces, y

$$G(x, y) = \sum_{n \geq 0} \Pi^n(x, y) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \mathbb{E}_x \left(\sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}} \right)$$

la cantidad esperada de retornos a y partiendo de x .

Diremos que x es *recurrente* si $F_1(x, x) = 1$ y *transitorio* si $F_1(x, x) < 1$.

En la demostración del próximo teorema vamos a recurrir al siguiente resultado:

Lema 1.5. (Borel-Cantelli) Dada una sucesión de eventos $(E_n)_n$ en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sea

$$E := \{\omega \in \Omega : \omega \in E_n \text{ para infinitos } n\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n.$$

Entonces,

- Si $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(E_n) < \infty$, entonces $\mathbb{P}(E) = 0$.
- Si $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(E_n) = \infty$ y los eventos $(E_n)_n$ son independientes, entonces $\mathbb{P}(E) = 1$.

Teorema 1.6. Para $x \in E$ ocurre una (y solo una) de las siguientes:

- $F_1(x, x) = 1$, y en tal caso $F_\infty(x, x) = 1$ y $G(x, x) = \infty$.
- $F_1(x, x) < 1$, en cuyo caso $F_\infty(x, x) = 0$ y $G(x, x) = (1 - F_1(x, x))^{-1} < \infty$.

Demostración. Sea $\sigma = \sup\{n \geq 0 : X_n = x\}$ el tiempo de la última visita a x . Notar que como $X_0 = x$, σ está bien definida, aunque podría no ser finita. Ahora, observar que por definición de F_∞ ,

$$1 - F_\infty(x, x) = \mathbb{P}_x(\sigma < \infty). \quad (1.10)$$

También tenemos por el teorema 1.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(\sigma = n) &= \mathbb{P}_x(X_n = x) \mathbb{P}_x(X_i \neq x \text{ para } i > n) \\ &= \mathbb{P}_x(X_n = x) \mathbb{P}_x(X_i \neq x \text{ para } i \geq 1) = \Pi^n(x, x) (1 - F_1(x, x)). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 - F_\infty(x, x) &= \mathbb{P}_x(\sigma < \infty) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(\sigma = n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \Pi^n(x, x) (1 - F_1(x, x)) = (1 - F_1(x, x)) G(x, x). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Entonces si $F_1(x, x) = 1$, por (1.11) debe ser que $\mathbb{P}_x(\sigma = n) = 0$ para todo n . Esto implica que $\mathbb{P}_x(\sigma < \infty) = 0$ y luego (1.10) nos dice que $F_\infty(x, x) = 1$, de donde es inmediato que $G(x, x) = \infty$.

Finalmente si $F_1(x, x) < 1$, entonces por (1.12) $G(x, x) < \infty$ y

$$G(x, x) = (1 - F_\infty(x, x)) / (1 - F_1(x, x)).$$

Luego por Borel-Cantelli, $F_\infty(x, x) = 0$ y $G(x, x) = (1 - F_1(x, x))^{-1} < \infty$, tal como queríamos ver. □

Proposición 1.7. Sea Π una matriz de transición irreducible. Son equivalentes:

- $G(x, x) = \infty$ para algún $x \in E$.
- $G(x, y) = \infty$ para todos $x, y \in E$.

Demostración. Si $G(x, y) = \infty$ para todos $x, y \in E$, no hay nada que probar.

Sea entonces x_0 tal que $G(x_0, x_0) = \infty$ y tomemos $x, y \in E$. Como Π es irreducible, existen r, s tales que $\Pi^r(x, x_0) > 0$ y $\Pi^s(x_0, y) > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \Pi^r(x, x_0)\Pi^n(x_0, x_0)\Pi^s(x_0, y) &= \mathbb{P}_x(X_r = x_0, X_{r+n} = x_0, X_{r+s+n} = y) \\ &\leq \mathbb{P}_x(X_{r+s+n} = y) = \Pi^{r+s+n}(x, y). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} G(x, y) &\geq \sum_{n \geq 0} \Pi^{r+s+n}(x, y) \geq \sum_{n \geq 0} \Pi^r(x, x_0)\Pi^n(x_0, x_0)\Pi^s(x_0, y) \\ &= \Pi^r(x, x_0)\Pi^s(x_0, y) \sum_{n \geq 0} \Pi^n(x_0, x_0) \\ &= \Pi^r(x, x_0)\Pi^s(x_0, y)G(x_0, x_0). \end{aligned}$$

Como $\Pi^r(x, x_0) > 0$ y $\Pi^s(x_0, y) > 0$, concluimos que $G(x, y) = \infty$. El resultado se sigue de la arbitrariedad de x e y . □

En vista de esta proposición, una cadena de Markov irreducible se dice *recurrente* si algún estado $x \in E$ (y por lo tanto todo estado) es recurrente.

Diremos que un estado recurrente $x \in E$ es *recurrente positivo* si el tiempo de retorno esperado es finito, es decir si $\mathbb{E}_x(\tau_x) < \infty$. Caso contrario x se dice *recurrente nulo*. El teorema a continuación establece la relación que existe entre recurrencia positiva y distribuciones estacionarias.

Teorema 1.8. Sea $x \in E$. Si existe una distribución estacionaria μ con $\mu(x) > 0$, entonces x es recurrente positivo. Por otro lado, si x es recurrente positivo, entonces existe una distribución estacionaria μ dada por $\mu(x) = 1/\mathbb{E}_x(\tau_x) > 0$.

Demostración. Supongamos que existe una distribución estacionaria μ tal que $\mu(x) > 0$. Entonces por el teorema 1.2, $\mathbb{E}_x(\tau_x) \leq 1/\mu(x) < \infty$. Luego, x es recurrente positivo.

Ahora supongamos que x es recurrente positivo. Definimos

$$\nu(y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_x(n \leq \tau_x, X_n = y) = \mathbb{E}_x \left(\sum_{n=1}^{\tau_x} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}} \right),$$

la cantidad de visitas a y en promedio cuando hacemos un camino de ida y vuelta a x . Notar que $\nu(y)$ está bien definido porque como x es recurrente positivo, $\mathbb{E}_x(\tau_x) < \infty$. Observar que como $\mathbb{1}_{\{X_{\tau_x}=y\}} = \mathbb{1}_{\{X_0=y\}} = \delta_x(y)$ \mathbb{P}_x -casi seguro, podemos escribir

$$\nu(y) = \mathbb{E}_x \left(\sum_{n=0}^{\tau_x-1} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}} \right) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(n < \tau_x, X_n = y).$$

Así que para $z \in E$,

$$\begin{aligned} \nu \Pi(z) &= \sum_{y \in E} \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(n < \tau_x, X_n = y) \Pi(y, z) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x(n < \tau_x, X_n = y, X_{n+1} = z) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(n < \tau_x, X_{n+1} = z) = \nu(z). \end{aligned}$$

Finalmente como $\sum_y \nu(y) = \mathbb{E}_x(\tau_x)$, es claro que $\mu := \nu / \mathbb{E}_x(\tau_x)$ es la distribución estacionaria que buscamos pues por definición, $\nu(x) = 1$. □

1.3. Paseos al azar

De especial interés en esta tesis son los paseos al azar en \mathbb{Z}^d . En particular nos concentraremos en paseos con incrementos simétricos y acotados, aunque a veces podríamos considerar alguna otra clase más amplia. Además, daremos un criterio (método) para garantizar irreducibilidad entre varios paseos independientes, de modo que cualquier punto en \mathbb{Z}^d pueda ser alcanzado.

El típico ejemplo es el *paseo al azar simétrico simple* que empieza en un punto $x_0 \in \mathbb{Z}^d$. Este proceso lo podemos ver como una suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (que de aquí en más escribiremos i.i.d.).

$$S_n = x_0 + X_1 + \cdots + X_n$$

con $\mathbb{P}(X_j = \mathbf{e}_i) = \mathbb{P}(X_j = -\mathbf{e}_i) = 1/(2d)$ para $i = 1, \dots, d$ y \mathbf{e}_i el i -ésimo vector canónico. Para aprovechar los resultados de la sección previa, también será conveniente pensarlo como una cadena de Markov en \mathbb{Z}^d con probabilidad de transición

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = y | S_n = x) = \frac{1}{2d}, \quad y - x \in \{\pm \mathbf{e}_1, \dots, \pm \mathbf{e}_d\}.$$

A continuación, vamos a analizar la recurrencia del paseo al azar simétrico en \mathbb{Z}^d . Para esto debemos hacer uso de la fórmula de Stirling, que recordamos afirma que

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}},$$

y en particular que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (1.13)$$

Aquí, \sim significa que la razón entre estos valores tiende a 1 cuando $n \rightarrow \infty$.

Proposición 1.9. Para $d = 1$ el paseo al azar simétrico simple es recurrente $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Z}$. Notar que solo podemos volver a x luego de una cantidad par de pasos (tomando la misma cantidad de pasos a izquierda y derecha), luego,

$$G(x, x) = \sum_{n \geq 0} \Pi^{2n}(x, x) = \sum_{n \geq 0} 2^{-2n} \binom{2n}{n}.$$

Por la fórmula de Stirling (1.13), $2^{-2n} \binom{2n}{n} \sim \sqrt{\pi n}$ y como la serie $\sum_{n \geq 1} 1/\sqrt{n}$ diverge, vemos que $G(x, x) = \infty$. Así que por 1.6, x es recurrente. Como x era arbitrario, el resultado se sigue. □

Proposición 1.10. Para $d = 2$ el paseo al azar simétrico simple es recurrente $\forall x \in \mathbb{Z}^2$.

Demostración. Fijado $x \in \mathbb{Z}^2$, nuevamente notamos que solo es posible volver a x en una cantidad par de pasos. Para retornar en $2n$ pasos, k de ellos deben ser hacia la izquierda (y derecha) y $n - k$ hacia arriba (y abajo). Vemos así que

$$\begin{aligned} \Pi^{2n}(x, x) &= 4^{-2n} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!^2(n-k)!^2} = 4^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \\ &= 4^{-2n} \binom{2n}{n}^2 = \left[2^{-2n} \binom{2n}{n} \right]^2. \end{aligned}$$

Procedemos análogamente al caso $d = 1$. Basta observar que $\Pi^{2n}(x, x) \sim 1/n\pi$ y usar que $\sum_{n \geq 1} 1/n = \infty$ para concluir que $G(x, x) = \infty$. □

Proposición 1.11. Para $d \geq 3$ el paseo al azar simétrico simple es transitorio $\forall x \in \mathbb{Z}^d$.

Demostración. Fijado $x \in \mathbb{Z}^d$, obtenemos de la misma manera que en los lemas previos que

$$\Pi^{2n}(x, x) = (2d)^{-2n} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(2n)!}{k_1!^2 \cdots k_d!^2} = 2^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{\mathbf{k}} \left[d^{-n} \binom{n}{\mathbf{k}} \right]^2,$$

donde aquí la suma es sobre todos los $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ tales que $\sum_{i=1}^d k_i = n$ y usamos la notación usual del coeficiente multinomial.

Recordando la distribución multinomial sabemos que $\sum_{\mathbf{k}} d^{-n} \binom{n}{\mathbf{k}} = 1$, así que

$$\Pi^{2n}(x, x) \leq 2^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{\mathbf{k}} d^{-n} \binom{n}{\mathbf{k}} \max_{\mathbf{k}} d^{-n} \binom{n}{\mathbf{k}} \leq 2^{-2n} \binom{2n}{n} \max_{\mathbf{k}} d^{-n} \binom{n}{\mathbf{k}}.$$

Nuevamente usamos la fórmula de Stirling (1.13) para ver que

$$\max_{\mathbf{k}} d^{-n} \binom{n}{\mathbf{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} d^{d/2} / (2\pi n)^{(d-1)/2},$$

y entonces $\Pi^{2n}(x, x) \leq cn^{-d/2}$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$. Como $d \geq 3$, sabemos que $\sum_{n \geq 1} n^{-d/2} < \infty$ y por lo tanto $G(x, x) < \infty$. □

Hemos probado entonces el siguiente resultado.

Teorema 1.12. El paseo al azar simétrico en \mathbb{Z}^d es:

- recurrente para $d = 1$ y $d = 2$,
- transitorio para $d \geq 3$.

1.3.1. Procesos de salto

Diremos que un proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ con espacio de estados E es *Markov* si para todo tiempo s con $0 \leq s \leq t$ se tiene

$$\mathbb{P}(X_t = x \mid X_u, u \leq s) = \mathbb{P}(X_t = x \mid X_s) \quad \forall x \in E.$$

Intuitivamente, la idea es la misma que teníamos para cadenas de Markov: condicionar a toda la trayectoria del proceso hasta tiempo s es lo mismo que condicionar a la posición a tiempo s , y no importa el resto del pasado.

Al igual que en el caso discreto, notaremos con \mathbb{P}_x a la probabilidad condicional a $X_0 = x$, a saber

$$\mathbb{P}_x(X_t = y) = \mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x).$$

Para cada $t \geq 0$ definimos la matriz de transición

$$\Pi_t(x, y) = \mathbb{P}_x(X_t = y).$$

De manera completamente análoga al caso discreto, usamos \mathbb{P}_μ para indicar que el proceso tiene distribución μ a tiempo 0. Es decir,

$$\mathbb{P}_\mu(X_t = y) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}_x(X_t = y)\mu(x) = \sum_{x \in E} \Pi_t(x, y)\mu(x) = (\mu\Pi_t)(y).$$

Diremos que un proceso es *homogéneo* si $\Pi_s = \Pi_t$ para todos $s, t \geq 0$, y es el único caso que vamos a considerar de aquí en adelante.

Uno de los procesos de Markov más importantes es el conocido *proceso de Poisson*. Dada una sucesión de variables aleatorias i.i.d. $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $E_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$, el proceso de Poisson puede definirse mediante

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[\sum_{i=1}^n E_i, \infty)}(t).$$

Si pensamos que cada variable E_n representa el tiempo entre la llegada de una persona a una fila y la próxima llegada, entonces N_t es la cantidad total de personas que llegaron hasta el tiempo t .

De la propiedad de falta de memoria de las variables exponenciales se desprende que este proceso es efectivamente Markov.

También estamos interesados en cadenas de Markov, pero a tiempo continuo. Si bien el tiempo de salto ya no va a ser constante en cada unidad de tiempo, veremos que la propiedad de Markov fuerza qué distribución deben tener.

Supongamos que a tiempo t una cadena se encuentra en x_i y queremos encontrar la distribución de τ , el tiempo hasta que la cadena cambie de estado. Como ya mencionamos, este tiempo debe ser independiente de cuánto tiempo hayamos estado en x_i . Supongamos que la cadena ya estuvo una cantidad de tiempo T en x_i . Entonces, la distribución de τ debe ser la misma que la de $\tau + T$ sin condicionar. Concretamente, debe ocurrir que

$$\mathbb{P}(\tau > t + T \mid \tau > T) = \mathbb{P}(\tau > t).$$

Esto muestra que τ tiene la propiedad de falta de memoria. Sabemos que la única distribución continua con esta propiedad es la exponencial. Por lo tanto $\tau \sim \mathcal{E}(q)$.

Formalmente, dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados E , viene dada por una matriz $Q \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ con

$$\begin{aligned} Q_{xy} &\geq 0 \quad \forall x, y \in E, x \neq y; \\ \sum_y Q_{xy} &= 0 \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

Notar que en particular $Q_{xx} = -\sum_{y \neq x} Q_{xy}$.

Veamos que efectivamente esta construcción satisface la propiedad de Markov, al menos para tiempos lo suficientemente pequeños. Recordamos que si $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, entonces

$$\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon) = e^{-\lambda\varepsilon} = 1 - \lambda\varepsilon + o(\varepsilon),$$

donde en la segunda igualdad usamos la serie de Taylor y “o chica” es la notación estándar para las funciones que satisfacen $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$. Esto nos dice que si estamos en un estado x con tasa de estadía q_x , entonces:

1. no hay saltos con probabilidad $1 - q_x\varepsilon + o(\varepsilon)$,
2. la probabilidad de que ocurra un salto es $q_x\varepsilon + o(\varepsilon)$, y
3. dos o más saltos tienen una probabilidad despreciable de $o(\varepsilon)$.

Esto nos dice que

$$\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} = y \mid X_t = x; X_u, u < t) = \begin{cases} \varepsilon Q_{xy} + o(\varepsilon) & \text{si } x \neq y, \\ 1 + \varepsilon Q_{xx} + o(\varepsilon) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Lo cual muestra que satisface la propiedad de Markov, si ε es lo suficientemente chico.

En este contexto, una probabilidad μ será estacionaria para una cadena de Markov a tiempo continuo cuando $\mu Q = 0$. Notar que esta definición es diferente a lo que uno esperaría, pero este cambio viene del hecho de que ya no estamos trabajando con probabilidades en la matriz Q . Intuitivamente, lo que estamos buscando es que para cada estado, la tasa de “salida” sea igual a la tasa de “entrada”. Esta condición resulta equivalente a pedir que $\mu_i(-Q_{ii}) = \sum_{j \neq i} \mu_j Q_{ij}$.

A partir de una cadena a tiempo continuo, podemos considerar la cadena a tiempo discreto con la lista de los estados por los que pasa la cadena (ignorando los tiempos

de salto). A partir de la matriz Q , la matriz de transición que le corresponde está dada por

$$\begin{aligned}\Pi_{xy} &= \begin{cases} q_{xy}/q_x & \text{si } x \neq y \text{ y } q_x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = y \text{ y } q_x = 0. \end{cases} \\ \Pi_{xx} &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \text{ y } q_x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = y \text{ y } q_x = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Dado un grafo $\mathbb{G} = (V, E)$, definimos *el paseo al azar simétrico a tiempo continuo* en \mathbb{G} a tasa $1/\lambda$ como el paseo cuya matriz de tasas Q viene dada por

$$\begin{aligned}Q_{vw} &= \frac{\lambda}{d(v)} \mathbb{1}_{\{v \leftrightarrow w\}} \quad \forall v, w \in V \text{ distintos, y} \\ Q_{vv} &= q_v = -\lambda.\end{aligned}$$

Aquí $d(v)$ representa el *grado* (la cantidad de vecinos) del vértice v . Además, siempre vamos a suponer que \mathbb{G} no tiene bucles, es decir que $v \leftrightarrow v$. Esto es porque no tiene utilidad contar a v como su propio vecino cuando la posibilidad de que el paseo se quede quieto en un determinado momento ya está comprendida en q_v .

Observamos que λ simplemente regula la velocidad de salto del paseo. Si consideremos $X_t^1 = X^1(t)$ un paseo al azar de tasa 1 en un grafo $\mathbb{G} = (V, E)$, entonces

$$X^\lambda(\lambda t) = X^1(t), \tag{1.14}$$

para algún paseo X^λ con tasa $1/\lambda$. Esto se deduce del hecho de que los tiempos de salto de la cadena son variables exponenciales y si $Y \sim \mathcal{E}(1)$, entonces $Y/\lambda \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Omitiremos escribir λ como superíndice cuando su valor quede claro por contexto. Además, en vista de (1.14), de aquí en más consideraremos procesos con tasa de salto 1 salvo que aclaremos lo contrario.

Los paseos al azar a tiempo continuo presentan propiedades que son más fáciles de manejar, en comparación con el caso discreto. Por ejemplo, una ventaja de estos paseos es que son aperiódicos; lo que es sencillo de ver teniendo en cuenta que $\mathbb{P}(X_t = x) > 0$ para todo $t > 0$ y $x \in \mathbb{Z}^d$. Otra ventaja es la proposición que enunciamos a continuación.

Proposición 1.13. Considerar en \mathbb{Z}^d la base canónica $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$. Sean $X_{t,1}, \dots, X_{t,d}$ paseos al azar a tiempo continuo en \mathbb{Z} con tasa de salto $1/\lambda$. Entonces

$$\mathbf{X}_t := \mathbf{e}_1 X_{t,d,1} + \dots + \mathbf{e}_d X_{t,d,d}$$

se distribuye como un paseo al azar a tiempo continuo en \mathbb{Z}^d con tasa de salto $1/\lambda$.

Demostración. Observar que \mathbf{X}_t cambia de estado cuando alguna de las $X_{t/d,j}$ cambie de estado para $j = 1, \dots, d$ (la primera que lo haga). El resultado se sigue de los siguientes hechos para variables aleatorias $Y_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$:

- $Y := \min_i \{Y_i\} \sim \mathcal{E}(\lambda)$ con $\lambda = \sum_i \lambda_i$. Con lo cual \mathbf{X}_t tiene saltos que se distribuyen exponencialmente (a tasa $1/\lambda$ puesto que $\lambda_i = \lambda/d$). Esto prueba que \mathbf{X}_t también es una cadena de Markov a tiempo continuo.
- $\mathbb{P}(Y = Y_i) = \lambda_i/\lambda$. Lo cual nos dice que, en cada salto, cada dirección canónica tiene probabilidad $1/d$ de ser elegida. Por simetría de los paseos $X_{t/d,j}$, esto muestra que cada vecino posible tiene probabilidad $1/2d$ de ser elegido.

□

En particular, cada coordenada del paseo es independiente, lo cual no ocurre para el caso discreto. Finalmente, enunciaremos la siguiente propiedad, que juega un rol fundamental en los resultados que damos en esta tesis.

Proposición 1.14. Sean S_t y R_t dos paseos al azar simétricos a tiempo continuo definidos en \mathbb{Z}^d , independientes entre sí. Entonces, la diferencia $S_t - R_t$ también es un paseo al azar simétrico a tiempo continuo en \mathbb{Z}^d .

Demostración. Sean $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, R_t = \sum_{i=1}^{N'_t} X'_i$, donde X_i, X'_i, N_t y N'_t son todas variables independientes entre sí. Notar que por simetría, $-R_t$ tiene la misma distribución que R_t , así basta con analizar la suma entre dos paseos al azar simétricos.

Acoplando las variables, usando que X_i y X'_i son i.i.d., vemos que $\sum_{i=N_t+1}^{N_t+N'_t} X_i$ se distribuye igual que $\sum_{i=1}^{N'_t} X_i$, que a su vez tiene la misma distribución que $\sum_{i=1}^{N'_t} X'_i$.

Pero entonces $S_t + R_t$ y $\sum_{i=1}^{N_t+N'_t} X_i$ tienen la misma distribución. Observamos que $N_t + N'_t$ también es un proceso de Poisson, de parámetro 2λ , pues N_t y N'_t eran procesos independientes de parámetro λ . Esto muestra que $S_t + R_t$ es un paseo al azar a tiempo continuo en \mathbb{Z}^d .

□

Corolario 1.15. Sean S_t y R_t dos paseos al azar simétricos a tiempo continuo en \mathbb{Z}^d . Entonces, si S_t y R_t son recurrentes e independientes, la diferencia $S_t - R_t$ también es recurrente.

1.4. Ecuaciones diferenciales

Un sistema dinámico es un par (X, f) , donde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado el *espacio de estados* y $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un *campo vectorial*. Para una condición inicial $x_0 \in X$, la solución

del sistema es la curva $t \mapsto x(t) \in X$ que satisface la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (1.15)$$

Este esquema es bastante flexible. Por ejemplo, en nuestro caso, nos interesará estudiar ecuaciones de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x_0. \quad (1.16)$$

Definiendo $g(x, t) := (f(x, t), 1)$ e $y(t) := (x(t), t)$ tenemos que y es solución de

$$\dot{y}(t) = g(y(t)), \quad y(0) = (x_0, t_0)$$

si y solo si x es solución de (1.15).

Veremos a continuación que lo usual es pedir ciertas condiciones de regularidad sobre f , de modo que garanticen la existencia y unicidad de una solución (al menos en algún entorno de $t = 0$). Adicionalmente, también podemos imponer condiciones sobre X para que esto ocurra. No vamos a entrar en mayor detalle del que sea necesario para esta tesis; sobre estos temas recomendamos referirse a [11] o [12].

Para un sistema (X, f) , un punto $x^* \in X$ se dice *equilibrio* si $f(x^*) = \mathbf{0}$. Si el estado inicial es $x_0 = x^*$, la solución del sistema existe, es única y constantemente $x(t) = x^*$ para todo $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$.

Un equilibrio x^* se dice:

- *estable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$.
- *inestable* si no es estable, y
- *localmente asintóticamente estable* si existe $\delta > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow x^*$ para cualquier solución cuya condición inicial satisfaga $\|x(0) - x^*\| < \delta$.

Observar que todas estas nociones son locales. Las siguientes son nociones globales del sistema (X, f) . Dado x^* localmente asintóticamente estable,

- llamamos *región de atracción* al conjunto de condiciones iniciales $x_0 \in X$ tales que su correspondiente solución converge a x^* cuando $t \rightarrow \infty$,
- x^* es *globalmente asintóticamente estable* si su región de atracción es todo X , y

- decimos que x^* es *globalmente (localmente) exponencialmente estable* si es (localmente) asintóticamente estable y existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$\|x(t) - x^*\| \leq c_1 \|x(0) - x^*\| e^{-c_2 t}.$$

De especial interés resulta el llamado *flujo gradiente*. Dado un campo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, se define su flujo gradiente como el sistema

$$\dot{x}(t) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x(t)) = -\nabla F(x(t)). \quad (1.17)$$

Si además F es dos veces diferenciable en x , para $x \in \mathbb{R}^n$ se define el Hessiano de F como la matriz $\text{Hess}F(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\text{Hess}F(x)_{ij} = \partial^2 F / \partial x_i \partial x_j(x)$. Notar que $\text{Hess}F(x)$ es simétrica. Además si x^* es un punto crítico y $\text{Hess}F(x^*)$ es definida positiva, x^* es un mínimo local aislado de F . La vuelta no es cierta: considerar por ejemplo $F(x) = x^4$ y $x^* = 0$.

Oberservar que por definición, en una ecuación con campo gradiente ∇F , x^* es un equilibrio si y solo si $\nabla F(x^*) = 0$. Equivalentemente, x^* es un equilibrio (estable) si y solo si es un mínimo local de F . Recordamos que dado $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\| = 1$, la derivada direccional de $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verifica

$$\partial_v F(x) = \nabla F(x) \cdot v.$$

Por la ley del coseno resulta que

$$\partial_v F(x) = |\nabla F(x)| \cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo entre $\nabla F(x)$ y v . En particular vemos que como $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$, si $|\nabla F(x)| \neq 0$, la dirección (unitaria) de mayor crecimiento se obtiene tomando $\theta = 0$, es decir $v = \nabla F(x) / |\nabla F(x)|$. Análogamente, la dirección de mayor decrecimiento corresponde con $v = -\nabla F(x) / |\nabla F(x)|$. Notamos entonces que el flujo gradiente (1.17), siempre se mueve en esta dirección.

Teorema 1.16. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable y supongamos que el conjunto $F_{\leq}^{-1}(\ell) := \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \leq \ell\}$ es compacto para algún $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces el sistema (1.17) satisface:

1. Toda solución $t \mapsto x(t)$ con condición inicial en el conjunto $F_{\leq}^{-1}(\ell)$ verifica que $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x(t)) = c$ para algún $c \leq \ell$. Más aún, en tal caso converge a un único punto en el conjunto de puntos críticos de F :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla F(x) = \mathbf{0}\}.$$

2. Cada mínimo local x^* es localmente asintóticamente estable y es localmente exponencialmente estable si y solo si $\text{Hess}F(x^*)$ es definida positiva.
3. Un punto crítico x^* es inestable si al menos un autovalor de $\text{Hess}F$ es estrictamente negativo.
4. Si F es analítica, toda solución con condición inicial en un subconjunto de nivel compacto tiene longitud finita y converge a un único equilibrio.

Demostración. Ver [13], teorema 15.14.

□

1.4.1. El teorema de Carathéodory

En esta sección, nos vamos a enfocar en las soluciones de sistemas de EDOs de la pinta:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}\tag{1.18}$$

En particular, nuestro objetivo será encontrar una función x definida en algún intervalo I , de modo que verifique (1.18) para todo $t \in I$ salvo, quizás, para un conjunto de medida de Lebesgue cero.

En caso de existir tales x e I , diremos que x es una *solución de (1.18) en el sentido extendido*.

A continuación, daremos condiciones necesarias para la existencia de soluciones de (1.18) en el sentido extendido, así como también condiciones que garanticen la unicidad de dicha solución.

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto. Decimos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ satisface las *condiciones de Carathéodory* en D si:

- $f(t, x)$ es continua en x para todo t fijo,
- $f(t, x)$ es medible en t para todo x fijo, y
- para todo compacto $K \subseteq D$ existe una función medible Lebesgue m_K tal que

$$\|f(t, x)\| \leq m_K(t) \quad \forall (t, x) \in K.\tag{1.19}$$

Durante la demostración del próximo teorema, será necesario acudir al teorema de Arzelá-Ascoli. Al ser un resultado muy conocido, omitimos su demostración.

Teorema 1.17. (Arzelá-Ascoli) Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de funciones con $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si \mathcal{F} es una familia que cumple

- $|f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$ (es decir, \mathcal{F} es uniformemente acotada) y,
- para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ siempre que $|x - y| < \delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$, (o sea, \mathcal{F} es uniformemente equicontinua)

entonces existe una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y una subsucesión f_{n_k} tal que $f_{n_k} \rightrightarrows f$.

Teorema 1.18. Considerar (1.18) para un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ abierto. Si f satisface las condiciones de Carathéodory en D , entonces para todo $(t_0, x_0) \in D$ existe una solución del sistema en el sentido extendido tal que $x(t_0) = x_0$.

Demostración. Sean $0 < a, b \in \mathbb{R}$ tales que $R = \{(t, x) / |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \subseteq D$ y sea $m = m_K$. Sin pérdida de generalidad vamos a considerar $t \geq t_0$, el caso $t \leq t_0$ resulta análogo.

Sea M definida por

$$M(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq t_0, \\ \int_{t_0}^t m(s) ds & \text{para } t_0 \leq t \leq a. \end{cases} \quad (1.20)$$

Observamos que M es continua, satisface que $M(t_0) = 0$ y es no-decreciente puesto que por hipótesis $m(t) \geq 0$. Luego, $(t, x_0 \pm M(t)) \in R$ para cierto intervalo de la pinta $t_0 \leq t \leq t + \beta$ para alguna constante $\beta \leq a$. Fijemos entonces algún valor de $\beta > 0$ para el cual esto es cierto y para $i \in \mathbb{N}$ definimos las funciones ϕ_i mediante

$$\phi_i(t) = \begin{cases} x_0 & \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + \beta/i, \\ x_0 + \int_{t_0}^{t-\beta/i} f(s, \phi_i(s)) ds & \text{para } t_0 + \beta/i \leq t \leq t_0 + \beta. \end{cases} \quad (1.21)$$

Estas funciones nos permitirán aproximar la solución de (1.18). Observar, por ejemplo, que ϕ_1 está bien definida en todo el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta$ ya que es la constante x_0 . Veamos que todas estas aproximaciones están bien definidas.

Fijado $i \in \mathbb{N}$, (1.21) define ϕ_i en $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta/i$ en la primer fórmula. Como $(t, x_0) \in R$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta/i$, la segunda fórmula define a ϕ_i en el intervalo $t_0 + \beta/i \leq t \leq t_0 + 2\beta/i$ de manera continua. Más aún, en tal intervalo se tiene por (1.19) y (1.20) que

$$|\phi_i(t) - x_0| \leq M(t - \beta/i). \quad (1.22)$$

Ahora supongamos que ya probamos que ϕ_i está definida en $t_0 \leq t \leq k\beta/i$ para cierto $1 < k < i$. En ese caso la segunda fórmula de (1.21) nos dice que ϕ_i también está definida en el intervalo $t_0 + k\beta/i \leq t \leq t_0 + (k+1)\beta/i$; esto es porque solo se requiere que el integrando sea medible en $t_0 \leq t \leq k\beta/i$. Además, resulta que ϕ_i también satisface (1.22) en $t_0 + k\beta/i \leq t \leq t_0 + (k+1)\beta/i$. Inductivamente, esto prueba que cada ϕ_i está bien definida, es continua y verifica

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= x_0 & \text{si } t_0 \leq t \leq t_0 + \beta/i, \\ |\phi_i(t) - x_0| &\leq M(t - \beta/i) & \text{si } t_0 + \beta/i \leq t \leq t_0 + \beta. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Para $r, s \in [t_0, t_0 + \beta]$, por (1.19), (1.20) y (1.21) tenemos que

$$|\phi_i(r) - \phi_i(s)| \leq |M(r - \beta/i) - M(s - \beta/i)|. \quad (1.24)$$

Y como M es continua en el intervalo cerrado $[t_0, t_0 + \beta]$, es uniformemente continua allí. Entonces por (1.24), $\Phi = \{\phi_i\}_i$ es una familia equicontinua. Más aún, Φ es uniformemente acotada en $[t_0, t_0 + \beta]$ por (1.23). Mediante una aplicación directa del teorema de Arzelá-Ascoli, existe una subsucesión $\{\phi_{i_k}\}$ que converge uniformemente en $[t_0, t_0 + \beta]$ a una función que llamaremos ϕ .

Recordando que por hipótesis f es continua en x para t fijo y

$$|f(t, \phi_{i_k}(t))| \leq m(t) \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + \beta,$$

tenemos entonces que, fijado $t \in [t_0, t_0 + \beta]$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t, \phi_{i_k}(t)) = f(t, \phi(t)).$$

Por convergencia dominada se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \phi_{i_k}(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds, \quad (1.25)$$

para cada $t \in [t_0, t_0 + \beta]$ fijo.

Por (1.21),

$$\phi_{i_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{i_k}(s)) ds - \int_{t_0 - \beta/i_k}^t f(s, \phi_{i_k}(s)) ds.$$

Usando (1.25) y que la última integral tiende a 0 con $k \rightarrow \infty$, tomando límite

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds,$$

de donde se sigue el teorema. □

Teorema 1.19. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto y f que satisfaga las condiciones de Carathéodory en D . Si ϕ es solución de (1.18) en algún intervalo I , entonces se puede extender esta solución a un intervalo maximal (con respecto a la existencia de solución).

Demostración. Sea $x(t)$ solución de (1.18) en un intervalo I . Si I no es un intervalo maximal, entonces se puede extender x a un intervalo I' con $I \subsetneq I'$. Luego, podemos asumir que I es cerrado en alguno de sus extremos, el cual sin pérdida de generalidad supondremos que es la derecha. Entonces, podemos tomar $I = [a, b]$ de modo que x no tenga extensión a $[a, \infty)$. La demostración de la extensión a izquierda es completamente análoga.

Sea K compacto y U abierto de modo que $K \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq D$. Repitiendo un argumento similar al que mostramos en 1.18, concluimos que para cualquier valor inicial en K se puede encontrar una solución de (1.18) en un intervalo de longitud α . Así que si $x(t), a \leq t \leq b$ pertenecen a K , x se extiende a $[a, b + \alpha]$. Como K es compacto, este proceso lo podemos repetir una cantidad finita de veces hasta encontrar una extensión de x a un intervalo $[a, b_K]$ con $(b_K, x(b_K)) \notin K$.

Sea U_n una sucesión de conjuntos abiertos en D tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = D$, \bar{U}_n es cerrado y acotado, y $U_n \subseteq U_{n+1}$. Tomando $b_n = b_{\bar{U}_n}$, el procedimiento previo nos permite encontrar una sucesión monótona creciente tal que la solución de (1.18) x definida en $[a, b]$ se extiende a $[a, b_n]$ y $(b_n, x(b_n)) \notin \bar{U}_n$. Como b_n está acotada superiormente, sea $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Esto muestra que x se extiende a $[a, \omega)$. Además, este intervalo es maximal ya que no es posible extender a x más allá del mismo puesto que la sucesión $(b_n, x(b_n))$ o bien no es acotada, o tiene límite fuera del dominio de f . □

Veamos ahora un par de resultados sobre puntos fijos.

Teorema 1.20. Sean A un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X , B un subconjunto de un espacio de Banach Y y $T_y: A \rightarrow A$ (con $y \in B$) una contracción uniforme en A tal que $T_y x$ es continua en y para $x \in A$ fijo. Entonces existe un único punto fijo de T_y , que notaremos con $g(y)$, y ese punto varía continuamente para $y \in B$.

Demostración. Primero veamos existencia y unicidad de puntos fijos para una contracción $T: A \rightarrow A$ arbitraria.

Sea $T: A \rightarrow A$ una contracción de constante $1 > \lambda \geq 0$. Supongamos que existen $x, x' \in A$ tales que $x = Tx, x' = Tx'$. Entonces $|x - x'| = |Tx - Tx'| \leq \lambda|x - x'|$. Luego, $|x - x'| \leq 0$ de donde se sigue que $x = x'$. Concluimos que si existe un punto fijo, es único.

Sea ahora $x_0 \in A$ y consideremos $x_{n+1} = Tx_n$ para $n \geq 0$. Inductivamente, vemos que $|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda|x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq \lambda^n|x_1 - x_0|$. Así, para $m > n$,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (\lambda^{m-1} + \dots + \lambda^n)|x_1 - x_0| \\ &= \frac{\lambda^n - \lambda^m}{1 - \lambda}|x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Esto muestra que $(x_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces existe $x^* \in X$ tal que $x_n \rightarrow x^*$ y como $T: A \rightarrow A$ y A es cerrado, $x^* \in A$. Como T y $|\cdot|$ son continuas,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = |x^* - Tx^*|,$$

con lo cual $x^* = Tx^*$ y queda probada la existencia de un punto fijo.

Ahora como $T_y: A \rightarrow A$ es una contracción uniforme, por definición, existe $1 > \lambda \geq 0$ tal que $|T_y x - T_y x'| \leq \lambda|x - x'|$ para todo $y \in B$ y todos $x, x' \in A$. Sea entonces $g(y)$ el punto fijo de T_y . Luego,

$$\begin{aligned} g(y+h) - g(y) &= T_{y+h}g(y+h) - T_yg(y) \\ &= T_{y+h}g(y+h) + T_{y+h}g(y) - T_{y+h}g(y) - T_yg(y), \end{aligned}$$

y entonces

$$|g(y+h) - g(y)| \leq \lambda|g(y+h) + g(y)| + |T_{y+h}g(y) - T_yg(y)|.$$

Por lo tanto,

$$|g(y+h) - g(y)| \leq |T_{y+h}g(y) - T_yg(y)|/(1 - \lambda)^{-1}.$$

La continuidad de g se sigue del hecho de que, por hipótesis, T_yx es continua en y para x fijo.

□

Ahora sí, tenemos las herramientas para demostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.21. (Carathéodory). Sea $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto, f que satisfaga las condiciones de Carathéodory en D y supongamos que para cada compacto $K \subseteq D$ existe una función medible $m_K(t)$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq m_K(t)|x - y| \quad \forall (t, x), (t, y) \in K.$$

Entonces, para todo $(t_0, x_0) \in D$ existe una única solución $x(t, t_0, x_0)$ de (1.18) tal que $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Más aún, el dominio $E \subseteq \mathbb{R}^{N+2}$ en el cual $x(t, t_0, x_0)$ se encuentra definida es abierto y x es continua en E .

Demostración. Fijado un conjunto $K \subseteq D$ compacto, tomamos $0 < a, b \in \mathbb{R}$ de manera que $R(t_0, x_0) := \{(t, x) / |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \subseteq D$ para todo $(t_0, x_0) \in K$. Sea

$$U := \bigcup_{(t_0, x_0) \in K} R(t_0, x_0),$$

notar que $\bar{U} \subseteq D$.

Tomamos $M(t)$ como en (1.20) y definimos M_K como

$$M_K(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq t_0, \\ \int_{t_0}^t m_K(s) ds & \text{para } t_0 \leq t \leq a. \end{cases} \quad (1.26)$$

Elegimos α, β tales que $0 < \alpha \leq a, 0 < \beta \leq b, |M(t)| \leq \beta$ y $M_K(t) < 1$ para $t \in [-\alpha, \alpha]$.

Sea

$$\mathcal{F} = \{\phi \in \mathcal{C}([-\alpha, \alpha], \mathbb{R}^N) : \phi(0) = 0, \|\phi(t)\| \leq \beta \quad \forall t \in [-\alpha, \alpha]\}.$$

Para $\phi \in \mathcal{F}$ definimos $T\phi : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^N$ como la función dada por

$$T\phi(t) := \int_{t_0}^t f(s, \phi(s - t_0) + x_0) ds.$$

Observar que los puntos fijos de T en \mathcal{F} coinciden con las soluciones de (1.18) de la forma $x(t) = \phi(t - t_0) + x_0$ con $(t, x(t)) \in R(t_0, x_0)$. Es claro que $T\phi(0) = 0$ y, por construcción, también tenemos que $|T\phi(t)| \leq |M(t)| \leq \beta$. Esto muestra que la imagen de T está contenida en \mathcal{F} , es decir que $T\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$. Además, como $|T\phi(t) - T\psi(t)| \leq M_K(t)|\phi(t) - \psi(t)|$ y tomamos α de modo que $M_K(t) < 1$, vemos que T es una contracción en \mathcal{F} . Como \mathcal{F} es un cerrado, existe un único punto fijo $\phi(t, t_0, x_0)$. En otras palabras, existe una única solución de (1.18) que pasa por (t_0, x_0) y verifica que $(t, x(t)) \in R(t_0, x_0)$.

Pensando T como función de (t_0, x_0) , hemos probado que $T = T_{(t_0, x_0)}$ es una contracción uniforme de \mathcal{F} para $(t_0, x_0) \in K$. Entonces $\phi(\cdot, t_0, x_0)$ es continua en (t_0, x_0) . Por 1.20, $\phi(t, t_0, x_0)$ es continua en t_0, x_0 uniformemente respecto de t . Es claro que $\phi(t, t_0, x_0)$ es continua en t , así que ϕ es continua en todas sus variables para $t \in [-\alpha, \alpha]$, $(t_0, x_0) \in K$. Concluimos que $x(t) = \phi(t - t_0, t_0, x_0) + x_0$ es continua para $t \in [-\alpha, \alpha]$, $(t_0, x_0) \in K$.

Esto muestra unicidad local, pero veamos que de hecho también implica unicidad global. Supongamos que existen $x(t), y(t)$ soluciones de (1.18) con $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ y existe un punto s tal que $x(s) = y(s)$ y para todo entorno de s , existe s' con $x(s') \neq y(s')$. En tal caso, podemos encontrar un compacto K que contenga las trayectorias de $x(t)$ e $y(t)$ para todo t en un entorno de s . Pero probamos que para todo punto en K hay una única solución de (1.18) que pasa por dicho punto. Este absurdo viene de suponer que existían dos soluciones distintas, con lo cual concluimos que la unicidad es global.

Dado (s, t_0, x_0) en el dominio de $x(t, t_0, x_0)$ (el cual sin pérdida de generalidad asumimos que cumple $s \geq t_0$ ya que el otro caso es análogo), consideramos el conjunto cerrado $K = \{(t, x(t, t_0, x_0)) : t_0 \leq t \leq s\}$. Notar que K está bien definido y $K \subseteq E$. Por lo probado anteriormente, $x(t, \xi, \eta)$ es continua en (t, ξ, η) para $|t - \xi| \leq \alpha$ y $(\xi, \eta) \in K$. Entonces, existe un entero k con $t_0 + k\alpha > s \geq t_0 + (k - 1)\alpha$. Por unicidad,

$$x(t + t_0 + \alpha, t_0, x_0) = x(t + t_0 + \alpha, t_0 + \alpha, x(t_0 + \alpha, t_0, x_0)) \quad \forall t.$$

Así, $x(\xi, t_0, x_0)$ es continua para $|\xi - t_0| \leq 2\alpha$, $(t_0, x_0) \in D$ siempre que $(\xi, t_0, x_0) \in E$. Inductivamente, concluimos que $x(s, t_0, x_0)$ es continua en s y que E es abierto. Esto completa la demostración. □

1.4.2. El lema de Gronwall

Lema 1.22. (Gronwall) Sea $f : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y diferenciable en (t_0, ∞) . Si existe una función $\alpha : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$f'(t) \leq \alpha(t)f(t),$$

entonces

$$f(t) \leq f(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.27)$$

Demostración. Consideramos la función $g : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) := \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right).$$

Observar que

$$g'(t) := \alpha(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) = \alpha(t)g(t),$$

y también tenemos que $g(t_0) = 1$ y $g(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$.

Ahora, derivando $f(t)/g(t)$ vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{f(t)}{g(t)} &= \frac{f'(t)g(t) - g'(t)f(t)}{g^2(t)} = \frac{f'(t)g(t) - \alpha(t)g(t)f(t)}{g^2(t)} \\ &= \frac{f'(t) - \alpha(t)f(t)}{g(t)} \leq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(t)/g(t)$ es no-creciente y alcanza su máximo en $t = t_0$. Es decir

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{f(t_0)}{g(t_0)} \quad \forall t \geq t_0.$$

Pero recordando la definición de g y que $g(t_0) = 1$, esto es lo mismo que decir

$$f(t) \leq f(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) \quad \forall t \geq t_0,$$

tal como queríamos probar. □

Típicamente nos va a interesar el caso en el que $f \geq 0$ y $\alpha(t)$ es una constante negativa, lo cual va a implicar que f decrece/converge a cero exponencialmente.

Capítulo 2

El modelo de Kuramoto

El biólogo Arthur Winfree (1967) fue uno de los primeros investigadores que aspiró a describir la sincronización desde un punto de vista matemático. En el modelo de Winfree, los osciladores interactúan colectivamente entre sí.

Inspirado por el trabajo de Winfree, en 1975 Yoshiki Kuramoto propuso un modelo más simple para un sistema de N osciladores acoplados, el cual estudiaremos durante este capítulo. A pesar de su relativa simpleza a primera vista, veremos que posee una vasta riqueza. Una de las características que hace muy interesante a este modelo es que la ecuación que lo describe no es lineal.

En este capítulo vamos a definir formalmente este modelo, así como también las distintas nociones de sincronización. Luego, vamos a estudiar algunas de las propiedades que exhibe este modelo y finalmente daremos una breve reseña del estado del arte. En el próximo capítulo nos enfocaremos en los resultados originales de esta tesis, que se centran en una versión adaptada de este modelo.

Como principales referencias se encuentran: [14], [15] y [16]. En ellos también se pueden apreciar un sinnúmero de variantes del modelo de Kuramoto, sus aplicaciones, así como también resultados analíticos y numéricos.

2.1. Definición

En la literatura frecuentemente encontramos modelos diferentes que reciben indistintamente el nombre de modelo de Kuramoto. Sin importar de qué variante estemos considerando, las siguientes características se mantienen presentes: hay una cantidad N de osciladores $\theta_i(t)$, cuyas frecuencias naturales ω_i provienen de una distribución que

notaremos $g(\omega)$. La dinámica de las fases del sistema está dada por

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad \text{para } i = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Aquí, los coeficientes K_{ij} son simétricos en i, j . Notar que (2.1) es 2π -periódica, y por lo tanto vamos a asumir que $\theta_i(t) \in \mathbb{S}^1$ para todo i . Hay muchos modelos posibles para la matriz K_{ij} . En primer lugar veremos la versión más común, que nos permitirá introducir la gran mayoría de las nociones de interés. Más adelante comentaremos sobre algunas variantes, incluyendo la que será el objeto de estudio de esta tesis.

Notar que la existencia y unicidad de la solución de (2.1) está garantizada por el teorema 1.18 ya que tenemos la cota

$$|\dot{\theta}_i| \leq N \|K_{ij}\|_\infty + \|\omega\|_\infty.$$

Observar que si $\sum_{i=1}^N \omega_i = 0$, $t \mapsto \sum_{i=1}^N \theta_i(t)$ es constante pues

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^N \theta_i(t) \right)' &= \sum_{i=1}^N \theta_i'(t) = \sum_{i=1}^N \left[\omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) + \sum_{i=1}^N \omega_i \\ &= \sum_{i>j}^N K_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) + \sum_{i<j}^N K_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) + \sum_{i=1}^N K_{ii} \sin(\theta_i(t) - \theta_i(t)) \\ &= \sum_{i>j}^N K_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) + \sum_{i>j}^N K_{ji} \sin(\theta_i(t) - \theta_j(t)) = 0, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $K_{ij} = K_{ji}$, y que el seno es una función impar.

Esto nos permite asumir, sin pérdida de generalidad, que la condición inicial satisface $\sum_{i=1}^N \theta_i(0) = \mathbf{0}$. Si esto no ocurre, trasladamos la condición inicial.

El modelo propuesto originalmente por Kuramoto se corresponde con $K_{ij} = K/N$. La matriz de adyacencia asociada es el grafo completo y a K se lo llama coeficiente de acople. El modelo (2.1) entonces resulta

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

De este modo, cada oscilador se mueve independientemente según su frecuencia natural, pero al mismo tiempo trata de sincronizarse con aquellos a quienes está acoplado.

También podemos definir el modelo de Kuramoto para un grafo no dirigido $\mathbb{G} = (V, E)$. Salvo que aclaremos lo contrario, se asume que $V = \{1, \dots, N\}$ y que \mathbb{G} no posee bucles. En términos de la matriz de adyacencia $A = (a_{ij})$, estamos asumiendo que $a_{ii} = 0$ para todo i . Este modelo se corresponde con tomar $K_{ij} = a_{ij}K/N$ en (2.1). Concretamente, el modelo que estamos describiendo es

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Notar que (2.2) es un caso particular de (2.3), que se obtiene tomando el grafo completo.

2.2. Sincronización

Diremos que hay *sincronización de frecuencias* cuando

$$\dot{\theta}_i(t) = \dot{\theta}_j(t) \quad \forall t \geq t_0,$$

y decimos que hay *sincronización de fases* cuando

$$\theta_i(t) = \theta_j(t) \quad \forall t \geq t_0.$$

Por lo general, nos interesará estudiar estos fenómenos en el límite (asintóticamente). Decimos que *se alcanza* la sincronización de fases si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\theta_i(t) - \theta_j(t)| = 0 \quad \forall i, j.$$

Análogamente se puede decir que se alcanza la sincronización de frecuencias.

Es de especial interés estudiar si se alcanza la sincronización de fases para toda condición inicial (salvo un conjunto de medida cero). En este caso diremos que hay *sincronización global*. Cuando esto no ocurre decimos que el modelo *soporta un patrón*.

Lema 2.1. Sincronización de fases implica $\omega_i = \omega_j$ para todo i, j .

Demostración. En primer lugar veamos que sincronización de fases implica sincronización de frecuencias. Esto es sencillo pues si

$$\theta_i(t) = \theta_j(t) \quad \forall t \geq t_0,$$

entonces

$$\dot{\theta}_i(t) = \dot{\theta}_j(t) \quad \forall t \geq t_0.$$

Ahora también notar que en ese caso,

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) = \omega_i,$$

puesto que $\theta_i(t) = \theta_j(t)$ implica que en cada sumando tenemos $\sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) = 0$. Entonces hemos visto que $\omega_i = \dot{\theta}_i(t) = \dot{\theta}_j(t) = \omega_j$, tal como queríamos probar. \square

En vista de este lema, de aquí en más vamos a estudiar el modelo asumiendo que $\omega_i = \omega_j = \omega$. Mediante el cambio de variable $\tilde{\theta}_i(t) := \theta_i(t) - \omega t$ tenemos que

$$\dot{\tilde{\theta}}_i(t) = \dot{\theta}_i(t) - \omega = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\tilde{\theta}_j(t) - \tilde{\theta}_i(t)),$$

lo cual nos permitirá trabajar con $\omega = 0$.

En tal caso, consideremos la función

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq N} K_{ij} (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)). \quad (2.4)$$

Vemos entonces que

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} = -\frac{\partial U(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}(0),$$

es decir, cuando $\omega = 0$ (2.1) se reescribe como

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} = -\nabla U(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}(0).$$

Esto muestra que el sistema es un flujo gradiente. Como U es acotada inferiormente (por 0), el teorema 1.16 afirma que el sistema evoluciona en la dirección que la energía decrece lo más rápidamente y cada equilibrio estable de $\boldsymbol{\theta}$ se corresponde con un mínimo local de la energía $U(\boldsymbol{\theta})$. También es claro que U es no negativa y que tiene un mínimo global en $\theta_i = \theta_j$.

Es natural preguntarse si hay condiciones que se puedan imponer de modo que exista un único mínimo local (que resultará global). Idealmente, estas condiciones no deberían

resultar muy restrictivas, de modo que apliquen en las condiciones más generales posibles. En lo que resta de esta sección, estudiaremos estas cuestiones.

Introducimos los *momentos de orden* como los números complejos

$$\rho_m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{im\theta_j} \quad \text{para } m \in \mathbb{N}, \text{ donde } \mathbf{i}^2 = -1.$$

A $\rho := \rho_1$ se lo conoce como el *parámetro de orden*. Notar que $\rho = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = r e^{i\psi}$ se corresponde con el centroide de las fases (pensadas como puntos que recorren el disco unitario). Observamos que $\psi(t)$ es la fase promedio, mientras que $r(t)$ mide la coherencia entre fases. Notar que mediante una rotación del sistema, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Multiplicando al parámetro de orden por $e^{-i\theta_i}$ obtenemos

$$r e^{i(\psi - \theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j - \theta_i)}.$$

Tomando parte imaginaria,

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i),$$

lo que permite reescribir la ecuación (2.2) como

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K r \sin(\psi - \theta_i). \quad (2.5)$$

Con esta escritura, los osciladores no parecen estar acoplados a simple vista, pero no debemos olvidar que sí lo están. Esta información está codificada en la interacción con ψ y r . Lo que vemos es que los osciladores no buscan asemejarse a ningún otro oscilador en particular, sino que tratan de parecerse al promedio. De esta forma, notamos que cada individuo en este sistema tiene un enfoque “global” a la hora de sincronizarse.

Otra forma de medir la cohesividad del sistema es mediante los siguientes conjuntos. Dado $0 < \gamma < \pi$, sean

$$\Delta(\gamma) := \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{T}^n : |\theta_i - \theta_j| \leq \gamma, \forall i, j\}$$

$$\Gamma(\gamma) := \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{T}^n : \text{existe un arco de longitud } \gamma \text{ en } \mathbb{S}^1 \text{ que contiene a } \theta_1, \dots, \theta_N\}.$$

Aquí cuando escribimos $|\theta_i - \theta_j|$ nos referimos a la distancia geodésica entre ángulos.

Además, notar que ambos conjuntos son convexos y se tienen las siguientes inclusiones:

- $\Gamma(\gamma) \subset \Delta(\gamma)$,
- para $2\gamma < \pi$ se tiene que $\Delta(\gamma) \subset \Gamma(2\gamma)$.

Teorema 2.2. Sea $0 < \gamma < \pi$ y sea $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}(t_0)$.

- Si $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Delta(\gamma/2)$, entonces $\boldsymbol{\theta}(t) \in \Delta(\gamma/2) \quad \forall t \geq t_0$.
- Si $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Gamma(\gamma)$, entonces $\boldsymbol{\theta}(t) \in \Gamma(\gamma) \quad \forall t \geq t_0$, θ_{\max} no crece y θ_{\min} no decrece.

Demostración.

- Dado $t \geq t_0$ para el cual $\boldsymbol{\theta}(t) \in \Delta(\gamma/2)$, sean i_{\max}, i_{\min} índices para los cuales

$$|\theta_{i_{\max}}(t) - \theta_{i_{\min}}(t)| \geq |\theta_i(t) - \theta_j(t)|, \quad \forall i, j.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\sin(\theta_{i_{\max}}(t) - \theta_{i_{\min}}(t)) \geq 0$, con lo cual para cualquier j

$$\sin(\theta_{i_{\max}}(t) - \theta_j(t)) \geq 0, \quad \sin(\theta_j(t) - \theta_{i_{\min}}(t)) \geq 0.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\theta_{i_{\max}}(t) - \theta_{i_{\min}}(t)) &= \\ &- \sum_{j=1}^N [K_{i_{\max}j} \sin(\theta_{i_{\max}}(t) - \theta_j(t)) + K_{i_{\min}j} \sin(\theta_j(t) - \theta_{i_{\min}}(t))] \leq 0. \end{aligned}$$

Así, la distancia máxima entre ángulos no es creciente y el resultado se sigue.

- Ver [13], teorema 17.4. □

Consideremos el anillo de N nodos, que recordamos es el grafo $\mathbb{G} = (V, E)$ con $V = [N] := \{1, \dots, N\}$ y matriz de adyacencia $A = (a_{ij})$ dada por $a_{ij} = 1 \iff i \equiv j \pm 1 \pmod{N}$. Sea $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ dado por $\theta_i = \frac{i2\pi}{N}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} (\sin(\theta_{i-1} - \theta_i) + \sin(\theta_{i+1} - \theta_i)) \\ &= \frac{K}{N} \left(\sin\left(\frac{(i-1)2\pi}{N} - \frac{i2\pi}{N}\right) + \sin\left(\frac{(i+1)2\pi}{N} - \frac{i2\pi}{N}\right) \right) \\ &= \frac{K}{N} \left(\sin\left(-\frac{2\pi}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{\theta}$ es un punto crítico de (2.3). Veamos que también es un mínimo local.

Para esto, recordamos la función potencial (2.4) y consideramos $\text{Hess}U$. Al calcular las derivadas parciales U_{ij} , notamos que se anulan salvo que $j \equiv i-1, i, i+1 \pmod{N}$. Entonces,

- Si $j \equiv i-1 \pmod{N}$: $U_{ij} = \frac{K}{N} \cos(\theta_{i-1} - \theta_i)$.
- Si $j = i$: $U_{ij} = -\frac{K}{N} (\cos(\theta_{i-1} - \theta_i) + \cos(\theta_{i+1} - \theta_i))$.
- Si $j \equiv i+1 \pmod{N}$: $U_{ij} = \frac{K}{N} \cos(\theta_{i+1} - \theta_i)$.

En particular vemos que $\text{Hess}U(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{K}{N} \cos(2\pi/N)L$, donde L es la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora afirmamos que L es semi-definida positiva, es decir, L verifica $x^T Lx \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Esto es cierto puesto que dado $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} x^T Lx &= (x_1, \dots, x_N) \cdot Lx \\ &= (x_1, \dots, x_N) \cdot (2x_1 - x_2 - x_N, \dots, -x_1 - x_{N-1} + 2x_N) \\ &= \sum_{i=1}^N x_i(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i x_{i-1} - \sum_{i=1}^N x_i x_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N x_i x_{i-1} + \sum_{i=1}^N x_{i-1}^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \geq 0, \end{aligned}$$

tal como queríamos ver. Notar que hicimos un pequeño abuso de notación durante varias de las igualdades, permitiendonos escribir x_0 en lugar de x_N . Mediante el criterio del Hessiano, podemos concluir que U tiene un mínimo local en $\boldsymbol{\theta}$. Por lo tanto, $\boldsymbol{\theta}$ es un equilibrio estable que no se encuentra en sincronización de fases.

Esto muestra que el anillo soporta un patrón.

2.2.1. Conectividad crítica

Consideramos el modelo de Kuramoto en un grafo $\mathbb{G} = (V, E)$ como en (2.3). Recordar que la conectividad μ de un sistema está dada por el grado mínimo de todos los nodos del sistema, dividido por $N-1$, la cantidad máxima de posibles vecinos de un nodo en V .

Es razonable preguntarse si existe una transición de fase en términos de μ . Es decir si existe una constante μ_c , que llamaremos *conectividad crítica*, que sea el mínimo valor de μ para el cual cualquier red de n osciladores se sincroniza globalmente. Más precisamente, nos preguntamos si existe un valor μ_c de modo que:

- si $\mu < \mu_c$, entonces existe una red con conectividad μ que soporta un patrón, y
- si $\mu > \mu_c$, el único mínimo local de (2.4) es $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ (salvo rotaciones) sin importar el grafo \mathbb{G} subyacente.

Como mencionamos en la sección previa, por lo general se asume que los nodos en la red no tienen bucles. Teniendo en cuenta que la dinámica del sistema no cambia si $a_{ii} = 1$ (pues $\sin(\theta_j - \theta_i) = 0$ cuando $i = j$), de aquí en adelante vamos a suponer que cada oscilador está conectado consigo mismo. Claramente, esto no cambia el comportamiento de $\boldsymbol{\theta}$, pero sí tiene un impacto en la conectividad del grafo, que aumenta de μ a

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu(N-1) + 1}{N}. \quad (2.6)$$

Nuestro objetivo para lo que queda de esta sección será dar una cota superior para μ_c . En [17] demuestran que μ_c se encuentra acotado inferiormente por 0,6818.

Proposición 2.3. Sea $\boldsymbol{\theta}$ un mínimo local de (2.4). Si existe $r = |r|e^{i\theta_r} \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\sin(\theta_i - \theta_r)| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \forall 1 \leq i \leq N,$$

entonces $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$, el único mínimo local de (2.4) salvo rotaciones.

Demostración. Ver [18], proposición 5.1. □

Lema 2.4. Sea $\boldsymbol{\theta}$ un equilibrio estable, entonces para $i = 1, \dots, n$ se tiene:

$$N\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \sin^2(\theta_i)} \geq \sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) |\cos(\theta_j - \theta_i)| \geq 0.$$

Demostración. Fijemos $i \in \{1, \dots, N\}$. Recordar que $\sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) = 0$, pues θ es un equilibrio. Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) \sin(\theta_j - \theta_i) &= \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \\ &= \sum_{j=1}^N [\sin(\theta_j) \cos(\theta_i) - \cos(\theta_i) \sin(\theta_j)] \\ &= \sum_{j=1}^N [\sin(\theta_j) \cos(\theta_i)] - \sum_{j=1}^N [\cos(\theta_j) \sin(\theta_i)] \\ & \quad (\text{como } \rho_1 \in \mathbb{R}) = -N\rho_1 \sin(\theta_i). \end{aligned}$$

Dado que $(1 - a_{ij})^2 = 1 - a_{ij}$ y $\sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) \leq N(1 - \tilde{\mu})$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que

$$\left(\sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) \sin(\theta_j - \theta_i) \right)^2 \leq N(1 - \tilde{\mu}) \sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) \sin^2(\theta_j - \theta_i).$$

Como $\sin^2(\theta_j - \theta_i) = 1 - \cos^2(\theta_j - \theta_i)$ y recordando que $\sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) \leq N(1 - \tilde{\mu})$,

$$N^2 \rho_1^2 \sin^2(\theta_i) \leq N^2 (1 - \tilde{\mu})^2 - N(1 - \tilde{\mu}) \sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) \cos^2(\theta_j - \theta_i),$$

y por lo tanto

$$N(1 - \tilde{\mu}) \sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) \cos^2(\theta_j - \theta_i) \leq N^2 (1 - \tilde{\mu})^2 - N^2 \rho_1^2 \sin^2(\theta_i).$$

Finalmente, usando Cauchy-Schwarz una vez más,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) |\cos(\theta_j - \theta_i)| \right)^2 &\leq N(1 - \tilde{\mu}) \sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) \cos^2(\theta_j - \theta_i) \\ &\leq N^2 (1 - \tilde{\mu})^2 - N^2 \rho_1^2 \sin^2(\theta_i). \end{aligned}$$

Se siguen las desigualdades deseadas. □

Corolario 2.5. Sea θ un equilibrio estable con $\rho_1 > \sqrt{2}(1 - \tilde{\mu})$. Entonces se alcanza la sincronización de fases.

Demostración. Por 2.4 tenemos que $(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \sin^2(\theta_i) \geq 0$, es decir

$$(1 - \tilde{\mu})/\rho_1 \geq |\sin(\theta_i)| \quad \forall 1 \leq i \leq N.$$

Como $\rho_1 > \sqrt{2}(1 - \tilde{\mu})$, debe ser $|\sin(\theta_i)| < 1/\sqrt{2}$ para todo $1 \leq i \leq N$. Entonces $\boldsymbol{\theta}$ se encuentra en sincronización de fases por la proposición 2.3. \square

Nuestro objetivo ahora será probar que $\tilde{\mu} > 3/4$ implica $\rho_1 > \sqrt{2}(1 - \tilde{\mu})$, lo cual demostrará que toda red lo suficientemente conectada se sincroniza globalmente.

Primero notemos que

$$|\rho_m|^2 = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{k=1}^N e^{imk} \sum_{j=1}^N e^{-imj} \right) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \cos(m(\theta_k - \theta_j)).$$

Como $\cos^2(x - y) = \frac{1}{2}(\cos(2(x - y)) + 1)$,

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \cos^2(m(\theta_k - \theta_j)) = \frac{1}{2N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (\cos(2m(\theta_k - \theta_j)) + 1) = \frac{1}{2}(1 + |\rho_{2m}|^2).$$

En [18] también prueban (durante la demostración del Lema 5.4) que si $\boldsymbol{\theta}$ es un equilibrio, entonces se satisface que

$$-\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N a_{jk} \cos(\theta_k - \theta_j) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N a_{jk} \cos^2(\theta_k - \theta_j) \leq 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (1 - a_{jk}) (\cos(\theta_k - \theta_j) - \cos^2(\theta_k - \theta_j)) &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (\cos(\theta_k - \theta_j) - \cos^2(\theta_k - \theta_j)) \\ &= \frac{N^2}{2} (2\rho_1^2 - |\rho_2|^2 - 1). \end{aligned}$$

Podemos reescribir esta desigualdad como

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (1 - a_{jk}) (\cos(\theta_k - \theta_j) - \cos^2(\theta_k - \theta_j)) + \frac{1 + |\rho_2|^2}{2} \leq \rho_1^2.$$

Notar que $|\cos(x) - \cos^2(x)| = |\cos(x)(1 - \cos(x))| \leq 2|\cos(x)|$, así que por el lema 2.4

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) (\cos(\theta_j - \theta_i) - \cos^2(\theta_j - \theta_i)) &\geq -2 \sum_{j=1}^N (1 - a_{ij}) |\cos(\theta_j - \theta_i)| \\ &\geq -2N \sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \sin^2(\theta_i)}, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq N$. Combinando ambas desigualdades obtenemos

$$-\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \sin^2(\theta_i)} + \frac{1 + |\rho_2|^2}{2} \leq \rho_1^2. \quad (2.7)$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} 2 \left(\tilde{\mu} - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} |\rho_2|^2 &= 2\tilde{\mu} - 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} |\rho_2|^2 \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2} + \frac{1 + |\rho_2|^2}{2} \\ &\leq -\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \sin^2(\theta_i)} + \frac{1 + |\rho_2|^2}{2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde en la última desigualdad acotamos usando que $\rho_1^2 \sin^2(\theta_i) \geq 0$.

Hemos demostrado entonces la siguiente proposición:

Proposición 2.6.

$$2 \left(\tilde{\mu} - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} |\rho_2|^2 \leq \rho_1^2.$$

Demostración. Se sigue de aplicar la desigualdad (2.8) seguida de (2.7). \square

Lema 2.7. Sea θ un equilibrio estable con $\rho_1 > 0$. Entonces se satisface

$$|\rho_2| \geq a + b(1 + |\rho_2|^2 - 2\rho_1^2) \quad \forall 0 \leq x_0 \leq \min\{1, (1 - \tilde{\mu})^2/\rho_1^2\},$$

donde

$$a = 1 + 2x_0 - 4 \frac{(1 - \tilde{\mu})^2}{\rho_1^2}, \quad b = \frac{\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x_0}}{\rho_1^2}.$$

Demostración. Ya que $\cos(2\theta_i) = 1 - 2\sin^2(\theta_i)$, vemos que

$$N|\rho_2| \geq |\operatorname{Re}(N\rho_2)| = \left| \sum_{i=1}^N \cos(2\theta_i) \right| \geq \sum_{i=1}^N (1 - 2\sin^2(\theta_i)).$$

Teniendo en mente la desigualdad (2.8), nos gustaría poder llegar a una cota de la pinta

$$1 - 2\sin^2(\theta_i) \geq a + 4b\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \sin^2(\theta_i)} \quad \forall 1 \leq i \leq N.$$

Para simplificar la notación, escribimos $x = \sin^2(\theta_i)$. Como queremos encontrar una cota para cada θ_i , la misma debería tener la siguiente forma

$$1 - 2x \geq a + 4b\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x} \quad 0 \leq x \leq \min\{1, (1 - \tilde{\mu})^2/\rho_1^2\}.$$

Esta condición sobre x se sigue del corolario 2.5 (pues $(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \sin^2(\theta_i) \geq 0$) y del hecho de que $0 \leq \sin^2(\theta_i) \leq 1$. Por lo tanto, no estamos restringiendo realmente los valores de x .

Dado x_0 con $0 \leq x_0 \leq \min\{1, (1 - \tilde{\mu})^2/\rho_1^2\}$, sean a y b como en el enunciado del lema. A saber,

$$a = 1 + 2x_0 - 4\frac{(1 - \tilde{\mu})^2}{\rho_1^2}, \quad b = \frac{\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x_0}}{\rho_1^2}.$$

Ahora, sean

$$f(x) = 1 - 2x, \quad g(x) = a + 4b\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x}.$$

Afirmamos que estas funciones f y g se intersecan tangencialmente en $x = x_0$. Ciertamente se intersecan en $x = x_0$ pues

$$\begin{aligned} g(x_0) &= 1 + 2x_0 - 4\frac{(1 - \tilde{\mu})^2}{\rho_1^2} + 4\frac{\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x_0}}{\rho_1^2} \sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x_0} \\ &= 1 + 2x_0 - 4\frac{(1 - \tilde{\mu})^2}{\rho_1^2} + 4\frac{(1 - \tilde{\mu})^2}{\rho_1^2} - 4\frac{\rho_1^2 x_0}{\rho_1^2} \\ &= 1 - 2x_0 = f(x_0). \end{aligned}$$

Y también tenemos que

$$f'(x_0) = -2 \quad \text{y} \quad g'(x_0) = -4\frac{\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x_0}}{\rho_1^2} \frac{1}{2} \frac{\rho_1^2}{\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x_0}} = -2,$$

como queríamos ver. Además, la función $x \mapsto \sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x}$ es cóncava y por lo tanto g también lo es. Concluimos entonces que $f(x) \geq g(x)$, es decir

$$1 - 2x \geq a + 4b\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x} \quad \forall 0 \leq x_0 \leq \min\{1, (1 - \tilde{\mu})^2/\rho_1^2\}.$$

Una aplicación directa del corolario 2.5 da

$$|\rho_2| \geq a + \frac{4b}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \sin^2(\theta_i)}.$$

Ahora notar que por la desigualdad (2.8)

$$\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \sin^2(\theta_i)} \geq \frac{1 + |\rho_2|^2}{2} - \rho_1^2.$$

Y luego,

$$\begin{aligned} |\rho_2| &\geq a + \frac{4b}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \sin^2(\theta_i)} \\ &\geq a + 2b \left(\frac{1 + |\rho_2|^2}{2} - \rho_1^2 \right) = a + b(1 + |\rho_2|^2 - 2\rho_1^2), \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Lema 2.8. Si $\tilde{\mu} > 3/4$ y θ es un equilibrio estable, $|\rho_2| \geq 1/2$.

Demostración. Notar que si $1 - 2\rho_1^2 < 0$ tenemos que $\rho_1 > \sqrt{2}/2 > 2\sqrt{2}(1 - \tilde{\mu})$ ya que $\tilde{\mu} > 3/4$. Pero entonces por el corolario 2.5, hay sincronización de fases. En particular $\rho_2 = 1$. Luego, sin pérdida de generalidad, asumimos que $1 - 2\rho_1^2 \geq 0$.

Por lo tanto, supongamos que $1 - 2\rho_1^2 \geq 0$ y veamos que las desigualdades

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &\geq 2 \left(\tilde{\mu} - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} |\rho_2|^2 \\ \text{y} \quad |\rho_2| &\geq a + b(1 + |\rho_2|^2 - 2\rho_1^2) \end{aligned}$$

para a y b según el lema 2.7, se satisfacen para $0 < x \leq \min\{1, (1 - \tilde{\mu})^2/\rho_1^2\}$ solo si $|\rho_2| \geq 1/2$.

Como sabemos que θ es un equilibrio y además $|\rho_2|^2 \geq 0$ y $\tilde{\mu} > 3/4$, vemos que $\rho_1^2 \geq 2(\tilde{\mu} - 3/4) > 0$. En particular $\rho_1 > 0$ y por consiguiente se satisfacen las hipótesis del lema 2.7, con lo cual $|\rho_2| \geq a + b(1 - 2\rho_1^2)$ para todo $0 < x \leq \min\{1, (1 - \tilde{\mu})^2/\rho_1^2\}$.

Optimizando la segunda cota, la expresión $a + b(1 - 2\rho_1^2)$ e igualando a 0 obtenemos

$$2 - (1 - 2\rho_1^2) \frac{\rho_1^2}{2\rho_1^2 \sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 x}} = 0.$$

De donde despejamos y encontramos que

$$x^* := \frac{(1 - \tilde{\mu})^2}{\rho_1^2} - \frac{(1 - 2\rho_1^2)^2}{16\rho_1^2}$$

es un punto crítico de $a + b(1 - 2\rho_1^2)$. Más aún, se puede ver que es un máximo.

Es evidente que $x^* \leq (1 - \tilde{\mu})^2/\rho_1^2$. Usando la proposición 2.6 vemos que

$$\rho_1^2 \geq 2(\tilde{\mu} - 3/4) \iff \frac{\rho_1^2}{2} \geq \frac{1}{4} + \tilde{\mu} - 1 \iff (1 - \tilde{\mu}) \geq \frac{1 - 2\rho_1^2}{4}.$$

Como estábamos suponiendo que $1 - 2\rho_1^2 \geq 0$, elevando al cuadrado,

$$\frac{(1 - \tilde{\mu})^2}{\rho_1^2} \geq \frac{(1 - 2\rho_1^2)^2}{16\rho_1^2},$$

lo que muestra que $x^* \geq 0$. Finalmente, veamos que $x^* < 1$, o lo que es equivalente,

$$16(1 - \tilde{\mu})^2 - (1 - 2\rho_1^2)^2 < 16\rho_1^2.$$

Despejando, vemos que esto es lo mismo que probar

$$\rho_1^4 + 3\rho_1^2 + \frac{1}{4} - 4(1 - \tilde{\mu})^2 > 0.$$

Mediante el cambio de variable $y = \rho_1^2$, queremos ver que el polinomio cuadrático $h(y) = y^2 + 3y + 1/4 - 4(1 - \tilde{\mu})^2$ es positivo para todo $0 \leq y \leq 1$ siempre que $\tilde{\mu} > 3/4$. Para esto, basta con probar que ambas raíces son negativas. Notar que el discriminante de h es $\Delta = 8 + 16(1 - \tilde{\mu})^2 > 0$, así que mediante la fórmula resolvente, bastará con ver que la mayor raíz es negativa. A saber, dicha raíz es

$$y_2 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 1 + 16(1 - \tilde{\mu})^2}}{2}.$$

Como $\tilde{\mu} > 3/4$, se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} < \tilde{\mu} &\iff 1 - \tilde{\mu} < \frac{1}{4} \\ &\iff 16(1 - \tilde{\mu})^2 < 1 \iff 8 + 16(1 - \tilde{\mu})^2 < 9 \iff \sqrt{8 + 16(1 - \tilde{\mu})^2} < 3, \end{aligned}$$

donde al cambiar de renglón usamos que $\tilde{\mu} \leq 1$.

Hemos probado entonces que $0 \leq x^* \leq \min\{1, (1 - \tilde{\mu})^2/\rho_1^2\}$ y por lo tanto se verifican las hipótesis del lema 2.7. Esto nos dice que $|\rho_2| \geq a + b(1 - 2\rho_1^2)$, donde

$$a = 1 - 2\frac{(1 - \tilde{\mu})^2}{\rho_1^2} - \frac{(1 - 2\rho_1^2)^2}{8\rho_1^2}, \quad b = \frac{\sqrt{(1 - \tilde{\mu})^2 - \rho_1^2 \frac{(1 - \tilde{\mu})^2}{\rho_1^2} + \rho_1^2 \frac{(1 - 2\rho_1^2)^2}{16\rho_1^2}}}{\rho_1^2} = \frac{(1 - 2\rho_1^2)}{4\rho_1^2}.$$

Reemplazando los valores de a y b encontramos que

$$|\rho_2| \geq 1 - 2\frac{(1 - \tilde{\mu})^2}{\rho_1^2} + \frac{(1 - 2\rho_1^2)^2}{8\rho_1^2} = 1 - 2x^*.$$

Obervando que

$$1 - 2x^* \geq \frac{1}{2} \iff \rho_1^4 \geq (16(1 - \tilde{\mu})^2 - 1)/4,$$

el resultado que queremos probar se sigue del hecho de que

$$\frac{16(1 - \tilde{\mu})^2 - 1}{4} < 0 \iff \tilde{\mu} > \frac{3}{4},$$

ya que en ese caso $(16(1 - \tilde{\mu})^2 - 1)/4 < 0 \leq \rho_1^4$. Como por hipótesis $\tilde{\mu} > 3/4$, tenemos entonces que $|\rho_2| \geq 1 - 2x^* \geq 1/2$, tal como queríamos demostrar. \square

Teorema 2.9. Si $\tilde{\mu} > 3/4$, el único equilibrio posible es la sincronización de fases.

Demostración. Por el lema 2.8, $|\rho_2| \geq 1/2$ y como $\tilde{\mu} > 3/4$, sabemos por la proposición 2.6 que $\rho_1^2 \geq |\rho_2|^2/2$. Por lo tanto, $\rho_1^2 \geq 1/8$. Notar que $\tilde{\mu} > 3/4 \Rightarrow 1/8 > 2(1 - \tilde{\mu})^2$ así que podemos concluir que $\rho_1 > \sqrt{2}(1 - \tilde{\mu})$. Por el corolario 2.5, el único equilibrio posible es la sincronización de fases. \square

Hemos probado entonces el siguiente resultado sobre μ_c .

Corolario 2.10. $\mu_c \leq 0,75$.

Demostración. Por el teorema 2.9, toda red de tamaño N con $\tilde{\mu} > 3/4$ se sincroniza globalmente. Despejando μ de la definición (2.6), obtenemos que alcanza que

$$\mu > \frac{1}{N-1} \left(\frac{3N}{4} - 1 \right)$$

para que la red se sincronice globalmente. En particular, como $\mu(N-1)$ es el grado mínimo de los nodos, debe ser entero. Por lo tanto, es suficiente que una red tenga conectividad de al menos

$$\mu > \frac{1}{N-1} \left\lfloor \frac{3N}{4} - 1 \right\rfloor$$

para alcanzar la sincronización global. Como esta cota tiende a 0,75 inferiormente, concluimos que $\mu_c \leq 0,75$. \square

Capítulo 3

Kuramoto en grafos dinámicos

Como vimos en el capítulo previo, existen redes altamente conectadas que admiten un patrón. Pero también hay ejemplos de redes poco conectadas que se sincronizan globalmente. Esto pone en evidencia que la topología de la red juega un papel clave. Sin embargo, parecería ser que algunos de estos ejemplos son tan arbitrarios que no dan cuenta de la mayoría de las redes observadas en la naturaleza.

Por este motivo, es valioso encontrar un modelo que se ajuste mejor a la realidad y que permita dar cuenta del comportamiento colectivo a nivel general. En los últimos años, se ha estudiado el modelo de Kuramoto en grafos aleatorios, obteniendo resultados de sincronización global con alta probabilidad.

Nuestro enfoque va a ser distinto, optando por concentrarnos en otra variante del modelo de Kuramoto. Presentaremos un modelo dinámico, en el cual la red subyacente depende del tiempo. Intuitivamente, podemos pensar en agentes moviéndose en el espacio e interactuando con aquellos que se encuentran en su cercanía.

A diferencia de los modelos que vimos hasta ahora, la red de este modelo no tiene por qué ser conexa a todo tiempo. Nuestro objetivo será establecer condiciones que garanticen la sincronización de fases así como dar una estimación del tiempo necesario para alcanzarla.

3.1. Construcción

Fijado un grafo $\mathbb{G} = (V, E)$ y dados $N \geq 2$, $d \in \mathbb{N}$ y $\lambda > 0$, consideramos una colección $\mathbf{X}^\lambda(t) := (X_1^\lambda(t), \dots, X_N^\lambda(t))$ de paseos al azar simétricos en \mathbb{G} con tasa de salto $1/\lambda$.

Llamaremos *paseo al azar de Kuramoto* en \mathbb{G} , con frecuencias $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^N$ y coeficiente de acople K , al sistema de ecuaciones ordinarias con coeficientes aleatorios que depen-

den del tiempo para $\boldsymbol{\theta}^\lambda(t) := (\theta_1^\lambda(t), \dots, \theta_N^\lambda(t)) \in \mathbb{T}^N$ de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_i^\lambda(t) &= \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ji}(\mathbf{X}^\lambda(t)) \sin(\theta_j^\lambda(t) - \theta_i^\lambda(t)) \\ \boldsymbol{\theta}^\lambda(0) &= \boldsymbol{\theta}^\lambda, \quad \mathbf{X}^\lambda(0) = \mathbf{X}^\lambda, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde para todos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in V$, $1 \leq i, j \leq N$, a_{ij} es una función que satisface

$$a_{ji}(\mathbf{x}) = a_{ij}(\mathbf{x}), \quad a_{ii}(\mathbf{x}) = 1.$$

A partir de ahora trabajaremos con $a_{ji}(\mathbf{x}) := \mathbb{1}_{\{\|x_i - x_j\| \leq 1\}}$, donde $\|\cdot\|$ es la distancia en el grafo entre x_i y x_j . Estamos interesados principalmente en el caso $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^d$.

De aquí en más, nos vamos a referir al modelo dado por (3.1) mediante la sigla KRW.

Notar que si $\boldsymbol{\theta}^\lambda(t)$ es solución de (3.1), definiendo $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) := \boldsymbol{\theta}^\lambda(\lambda t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\theta}_i(t) &= \frac{d}{dt}(\theta_i^\lambda(\lambda t)) = \lambda \left(\frac{d}{dt}\theta_i^\lambda \right) (\lambda t) \\ &= \lambda\omega_i + \lambda \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ji}(\mathbf{X}^\lambda(\lambda t)) \sin(\theta_j^\lambda(\lambda t) - \theta_i^\lambda(\lambda t)) \\ &= \lambda\omega_i + \lambda \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ji}(\mathbf{X}^1(t)) \sin(\tilde{\theta}_j(t) - \tilde{\theta}_i(t)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde en la última igualdad usamos la observación (1.14). Esto muestra que $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)$ también es solución de (3.1) pero con coeficiente de acople λK y frecuencias $\lambda\omega$. Luego, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que los paseos tienen tasa de salto 1.

También introducimos el *modelo de Kuramoto con conductividad dinámica al azar* en un grafo \mathbb{G} , con frecuencias $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^N$ y coeficiente de acople K (que denotaremos con la sigla KDC), como el sistema de ecuaciones ordinarias con coeficientes aleatorios que dependen del tiempo para $\boldsymbol{\theta}^{\lambda, \kappa}(t) := (\theta_1^{\lambda, \kappa}(t), \dots, \theta_N^{\lambda, \kappa}(t)) \in \mathbb{T}^N$ dado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_i^{\lambda, \kappa}(t) &= \omega_i + \frac{K}{|V|} \sum_{j=1}^N a_{ji}(\mathcal{E}^{\lambda, \kappa}(t)) \sin(\theta_j^{\lambda, \kappa}(t) - \theta_i^{\lambda, \kappa}(t)) \\ \boldsymbol{\theta}^{\lambda, \kappa}(0) &= \boldsymbol{\theta}^{\lambda, \kappa}, \quad \mathcal{E}^{\lambda, \kappa}(0) = \mathcal{E}_0^{\lambda, \kappa}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde para $\mathcal{E} \subseteq E$, notamos

$$a_{ij}(\mathcal{E}) := \mathbb{1}_{\{(i, j) \in \mathcal{E}\}}, \quad a_{ii}(\mathcal{E}) = 1 \iff i \in V.$$

En particular, la construcción del subgrafo de \mathbb{G} dado por $G^{\lambda,\kappa}(t) = (V, \mathcal{E}^{\lambda,\kappa}(t))$ es la siguiente. Para cada arista $e \in E$ se tiene una cadena de Markov a tiempo continuo $(e^{\lambda,\kappa}(t))_{t \geq t_0}$ con espacio de estados $\{0, 1\}$. La cadena pasa del estado 0 a 1 con tasa $1/\lambda$ y de 1 a 0 con tasa $1/\kappa$. Cada cadena es independiente y el conjunto de aristas $\mathcal{E}^{\lambda,\kappa}(t)$ se define como

$$\mathcal{E}^{\lambda,\kappa}(t) := \{e \in E : e^{\lambda,\kappa}(t) = 1\}.$$

En KDC, generalmente estamos interesados en un grafo \mathbb{G} finito y conexo.

Tal como hicimos con el modelo de Kuramoto estándar, en ambos casos vamos a trabajar asumiendo que $\omega_i = 0$ para todo i y que $\sum_i \theta_i(0) = 0$.

3.1.1. Primeros resultados

En este capítulo vamos a trabajar asumiendo que $\theta \in \Gamma(\gamma)$ con $\gamma < \pi$.

Supongamos entonces que las componentes de θ se encuentran contenidas en un arco. En ese caso, podemos suponer que existen a, b con $b - a = \gamma$ tales que $a \leq \theta_i \leq b$ para todo $i = 1, \dots, N$. Nos gustaría entonces reordenar los osciladores según su posición relativa, de forma dinámica.

Para esto, buscamos definir $i(t)$ para $i = 1, \dots, N$ de modo que $\theta_{1(t)}(t) \leq \dots \leq \theta_{N(t)}(t)$. Primero definimos $1(t) := j$ si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\theta_j(t) \leq \theta_k(t) \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}$
- $\theta_j(t) = \theta_k(t)$ y ocurre alguna de las siguientes:
 - $\exists n_0$ tal que $\theta_j^{(n)}(t) = \theta_k^{(n)}(t) \quad \forall n < n_0$ y $\theta_j^{(n_0)}(t) < \theta_k^{(n_0)}(t)$
 - $\theta_j^{(n)}(t) = \theta_k^{(n)}(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $j < k$.

Aquí, $\theta_j^{(n)}$ denota la n -ésima derivada (a derecha) de θ_j . Inductivamente, una vez definidos $1(t), \dots, (i-1)(t)$ decimos que $i(t) := j$ si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{1(t), \dots, (i-1)(t)\}$
- $\theta_j(t) \leq \theta_k(t) \quad \forall k \in \{1, \dots, N\} \setminus \{1(t), \dots, (i-1)(t)\}$
- $\theta_j(t) = \theta_k(t)$ y ocurre alguna de las siguientes:
 - $\exists n_0$ tal que $\theta_j^{(n)}(t) = \theta_k^{(n)}(t) \quad \forall n < n_0$ y $\theta_j^{(n_0)}(t) < \theta_k^{(n_0)}(t)$
 - $\theta_j^{(n)}(t) = \theta_k^{(n)}(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $j < k$.

Lema 3.1. $i(t)$ es continua (a derecha) para todo $i = 1, \dots, N$.

Demostración. Como $i : \mathbb{R} \rightarrow \{1, \dots, N\}$, alcanza con probar que $i(t) = i(t+h)$ para todo $h > 0$ suficientemente chico para demostrar que $i(t)$ es continua.

Además, notar que por continuidad de θ_i y θ_j , $\theta_i(t) > \theta_j(t) \Rightarrow \theta_i(t+h) > \theta_j(t+h)$ para todo $h > 0$ suficientemente chico. Por lo tanto, basta con ver que para $i > j$ tal que $\theta_{i(t)}(t) = \theta_{j(t)}(t) \Rightarrow \theta_{i(t)}(t+h) \geq \theta_{j(t)}(t+h)$ para todo $h \ll 1$.

Fijado t , supongamos que para ciertos $i > j$ ocurre que $\theta_{i(t)}(t) = \theta_{j(t)}(t)$. Entonces, por definición tenemos que o bien $\exists n_0$ tal que $\theta_{i(t)}^{(n)}(t) = \theta_{j(t)}^{(n)}(t)$ para todo $n < n_0$ y $\theta_{j(t)}^{(n_0)}(t) < \theta_{i(t)}^{(n_0)}(t)$; o $\theta_{i(t)}^{(n)}(t) = \theta_{j(t)}^{(n)}(t)$ para todo n . En este último caso no hay nada que probar, así que sin pérdida de generalidad asumimos que estamos en el primer caso.

Por continuidad (de las n_0 -ésimas derivadas), como $\theta_{j(t)}^{(n_0)}(t) < \theta_{i(t)}^{(n_0)}(t)$ tenemos que $\theta_{j(t)}^{(n_0)}(t+h) < \theta_{i(t)}^{(n_0)}(t+h)$ para $h \ll 1$. Pero entonces, ya que $\theta_{i(t)}^{(n_0-1)}(t) = \theta_{j(t)}^{(n_0-1)}(t)$, debe ser $\theta_{i(t)}^{(n_0-1)}(t+h) \geq \theta_{j(t)}^{(n_0-1)}(t+h)$ para h suficientemente chico.

Procedemos inductivamente, usando que $\theta_{i(t)}^{(n_0-1)}(t+h) \geq \theta_{j(t)}^{(n_0-1)}(t+h)$ para $h \ll 1$ y $\theta_{i(t)}^{(n_0-2)}(t) = \theta_{j(t)}^{(n_0-2)}(t)$, podemos demostrar que $\theta_{i(t)}^{(n_0-2)}(t+h) \geq \theta_{j(t)}^{(n_0-2)}(t+h)$ para h suficientemente chico. Aplicando este razonamiento finitas veces llegamos a ver que $\theta_{i(t)}(t+h) \geq \theta_{j(t)}(t+h)$ para $h \ll 1$, tal como queríamos. □

Corolario 3.2. Si $\boldsymbol{\theta} \in \Gamma(\gamma)$ con $\gamma < \pi$, entonces

$$(\boldsymbol{\theta}'(t))_{i(t)} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\theta}(t) \right)_{i(t)} = \frac{\partial}{\partial t} (\theta_{i(t)}(t)) = \theta'_{i(t)}(t) \quad \text{para todo } i = 1, \dots, N.$$

Es decir, al ordenar los osciladores según su fase, la derivada del i -ésimo oscilador se calcula como si el índice estuviera fijo.

Demostración. Como vimos en el lema 3.1, $i(t)$ es localmente constante. Luego,

$$\theta'_{i(t)}(t) = \lim_{h \searrow 0} \frac{\theta_{i(t+h)}(t+h) - \theta_{i(t)}(t)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{\theta_{i(t)}(t+h) - \theta_{i(t)}(t)}{h} = (\boldsymbol{\theta}'(t))_{i(t)}.$$

□

A continuación, vamos a definir una función auxiliar que llamaremos \mathcal{D} . Sumado a la hipótesis que $\boldsymbol{\theta} \in \Gamma(\gamma)$, esta función va a cumplir el papel de una función de Lyapunov. En particular, la función \mathcal{D} va a ser nuestra principal herramienta para probar que

KRW alcanza la sincronización de fases (bajo condiciones adecuadas).

Definimos entonces la función

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\theta_i(t) - \theta_j(t)|. \quad (3.4)$$

Observar que como $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| = |\theta_j(t) - \theta_i(t)|$ y $|\theta_i(t) - \theta_i(t)| = 0$, $\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t))$ es la suma de las distancias entre todas las fases. Por lo tanto, tenemos que

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^N |\theta_i(t) - \theta_j(t)|. \quad (3.5)$$

En particular, cuando $\boldsymbol{\theta} \in \Gamma(\gamma)$ con $\gamma < \pi$, tenemos que

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^N (\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)). \quad (3.6)$$

Proposición 3.3. Si $\boldsymbol{\theta} \in \Gamma(\gamma)$ con $\gamma < \pi$, entonces \mathcal{D} se puede escribir como

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \sum_{i=1}^N (2i - (N + 1))\theta_{i(t)}(t).$$

Demostración. Por inducción en N .

En el caso base $N = 1$ tenemos $\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)) = 0 = 0 \cdot \theta_1(t) = \sum_{i=1}^1 (2i - 2)\theta_{i(t)}(t)$.

Ahora, asumimos como hipótesis inductiva que para todo $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\theta_1, \dots, \theta_{N-1}) \in \Gamma(\gamma)$

$$\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) = \sum_{i=1}^{N-1} (2i - N)\theta_{i(t)}(t).$$

Notar que

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^N (\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N-1} (\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) + \sum_{j=1}^{N-1} (\theta_{N(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)).$$

Considerando $\hat{\boldsymbol{\theta}} := (\theta_1, \dots, \theta_{N-1})$, tenemos que $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \Gamma(\gamma)$ puesto que $\boldsymbol{\theta} \in \Gamma(\gamma)$. Pero entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)) &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N-1} (\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) + \sum_{j=1}^{N-1} (\theta_{N(t)}(t) - \theta_j(t)) \\
&= \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) + \sum_{j=1}^{N-1} (\theta_{N(t)}(t) - \theta_j(t)) \\
&\stackrel{\text{HI}}{=} \sum_{i=1}^{N-1} (2i - N)\theta_{i(t)}(t) + \sum_{j=1}^{N-1} (\theta_{N(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} (2i - N)\theta_{i(t)}(t) + (N - 1)\theta_{N(t)}(t) - \sum_{i=1}^{N-1} \theta_{i(t)}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} (2i - (N + 1))\theta_{i(t)}(t) + (N - 1)\theta_{N(t)}(t) = \sum_{i=1}^N (2i - (N + 1))\theta_{i(t)}(t).
\end{aligned}$$

□

Mediante un cambio de índices, también se puede ver que

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \sum_{i=\lceil \frac{N+1}{2} \rceil}^N (2i - (N + 1)) (\theta_{i(t)}(t) - \theta_{(N+1-i)(t)}(t)). \quad (3.7)$$

Para la próxima proposición necesitamos el siguiente lema auxiliar.

Lema 3.4. Sea $(b_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tales que $b_{ij} = -b_{ji}$ y $b_{ii} = 0$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$. Entonces se verifica la siguiente identidad,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (2i - (n + 1))b_{ji} = - \sum_{i>j}^n 2(i - j)b_{ij} \quad \forall n \geq 2.$$

Demostración. Por inducción en n .

En el caso base, $n = 2$ y tenemos

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (2i - 3)b_{ji} = -b_{11} - b_{21} + b_{12} + b_{22} = -2b_{21} = -2(2 - 1)b_{21} = - \sum_{i>j}^2 2(i - j)b_{ij},$$

donde en la segunda igualdad usamos que $b_{11} = b_{22} = 0$ y $b_{12} = -b_{21}$.

Para el paso inductivo asumimos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (2i - n) b_{ji} = - \sum_{i>j}^{n-1} 2(i - j) b_{ij}.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (2i - (n + 1)) b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^n (n - 1) b_{jn} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n (2i - (n + 1)) b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^n (n - 1) b_{jn} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[(2i - (n + 1)) b_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} (2i - (n + 1)) b_{ji} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n (n - 1) b_{jn} + \sum_{i=1}^{n-1} (2i - (n + 1)) b_{ni} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (2i - (n + 1)) b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (2i - (n + 1) - (n - 1)) b_{nj} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (2i - (n + 1)) b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} 2(i - n) b_{nj} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (2i - n) b_{ji} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji} \\ &\stackrel{\text{HI}}{=} - \sum_{j=1}^{n-1} 2(n - i) b_{nj} - \sum_{i>j}^{n-1} 2(i - j) b_{ij} - 0 \\ &= - \sum_{i>j}^n 2(i - j) b_{ij}. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Proposición 3.5. Cuando $\boldsymbol{\theta}(t) \in \Gamma(\gamma)$ y $\gamma < \pi$, \mathcal{D}' viene dada por

$$\mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}(t)) = -\frac{2K}{N} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^N (i - j) A_{ij} \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)). \quad (3.8)$$

Demostración. Por la proposición 3.3 tenemos que

$$\mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N (2i - (N + 1))\theta'_i = \sum_{i=1}^N (2i - (N + 1)) \left(\frac{K}{N} \sum_{j=1}^N A_{ji} \sin(\theta_j - \theta_i) \right),$$

donde mediante un abuso de notación, omitimos las evaluaciones en t correspondientes.

Definimos $b_{ij} := \frac{K}{N} A_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)$ para $i, j \leq N$ y $b_{ij} := 0$ en cualquier otro caso. Notar que claramente $b_{ij} = -b_{ji}$ y $b_{ii} = 0$, así que aplicando el lema 3.4 con $n = N$ resulta

$$\mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (2i - (N + 1))b_{ji} = - \sum_{i>j}^N 2(i - j)b_{ij} = - \sum_{i>j}^N 2(i - j) \frac{K}{N} A_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j).$$

□

Corolario 3.6. Si $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Gamma(\gamma)$ con $\gamma < \pi$, $\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta})$ es no creciente. Más aún, basta que $\theta_i \neq \theta_j$ para ciertos i, j con $A_{ij} = 1$ para que $\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta})$ sea estrictamente decreciente.

Demostración. Se sigue de la proposición 3.5 que sin importar la matriz de adjacencia, $\mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}) \leq 0$. Si existen i, j tales que $\theta_i \neq \theta_j$ y $A_{ij} = 1$, entonces resulta que $\mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}) < 0$.

□

3.2. Resultados de convergencia

Nuestro objetivo en esta última sección será mostrar que \mathcal{D} decrece exponencialmente con probabilidad 1. Esto implicará, a su vez, que la distancia entre las fases tiende a 0 y por lo tanto se alcanza la sincronización de fases.

Notar que si $\boldsymbol{\theta} \in \Gamma(\gamma)$ y $\gamma < \pi$,

- Existe una constante $g > 0$ que depende únicamente de γ , tal que

$$\sin(\theta_i - \theta_j) \geq g(\theta_i - \theta_j) \quad \forall i > j, \forall t \geq t_0. \quad (3.9)$$

Esto es porque $0 \leq \theta_i - \theta_j \leq \gamma$ para todo $i > j$, todo t y para cualquier $0 \leq x \leq \gamma$, $\sin(x) \geq gx$ donde $g = \sin(\gamma)/\gamma$.

- Para cualesquiera $i' \geq i > j \geq j'$ se tiene que $\theta_{i'} - \theta_{j'} \geq \theta_i - \theta_j$. Esto se sigue de la definición de $i(t)$.

Por la segunda obsección, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=\lceil \frac{N+1}{2} \rceil}^N (2i - (N+1)) (\theta_i - \theta_{N+1-i}) \\
&\leq \sum_{i=\lceil \frac{N+1}{2} \rceil}^N (N-1) (\theta_N - \theta_1) \\
&= (N-1) (\theta_N - \theta_1) \sum_{i=\lceil \frac{N+1}{2} \rceil}^N 1 = (N-1) (\theta_N - \theta_1) \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor,
\end{aligned}$$

donde usamos que $2i - (N+1) \leq N-1$ y $\theta_i - \theta_{N+1-i} \leq \theta_N - \theta_1$ para cada valor de i .

Proposición 3.7. Sea $\boldsymbol{\theta}(t) \in \Gamma(\gamma)$ para $\gamma < \pi$. Existe una constante $c > 0$ que depende únicamente de γ y N tal que si existe un camino en $\mathcal{G}^{\mathbf{X}(t)}$ de $1(t)$ a $N(t)$,

$$\mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}(t)) \leq -c\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)).$$

En particular, esta desigualdad se verifica cuando $\mathcal{G}^{\mathbf{X}(t)}$ es conexo.

Demostración. Sean $n > m$ tales que existe un camino en $\mathcal{G}^{\mathbf{X}(t)}$ que une las aristas $n(t)$ y $m(t)$. De ser así, fijemos algún camino \mathcal{C} de longitud mínima que une $n(t)$ con $m(t)$. Vamos a escribir $(i, j) \in \wp(n, m)$ cuando la arista que une $i(t)$ con $j(t)$ pertenece a \mathcal{C} . En particular, esto significa que $A_{i(t)j(t)}(t) = 1$ cuando $(i, j) \in \wp(n, m)$.

Teniendo en cuenta la proposición 3.5, sumando sobre las aristas del camino elegido (y acotando el resto de los términos por 0) será suficiente con demostrar que

$$-\frac{2K}{N} \sum_{\substack{(i,j) \in \wp(n,m) \\ i > j}} (i-j) A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \leq -\frac{2Kg}{N} (\theta_{n(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)).$$

Esto lo probaremos por inducción en ℓ , la longitud del camino \mathcal{C} entre $n(t)$ y $m(t)$.

En el caso base $\ell = 1$, la desigualdad se satisface ya que

$$-\frac{2K}{N} (n-m) \sin(\theta_{n(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)) \leq -\frac{2Kg}{N} (\theta_{n(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)).$$

Ahora, supongamos cierta la desigualdad para caminos de longitud ℓ y veamos que también es cierta para caminos de longitud $\ell + 1$. Consideremos un camino de longitud $\ell + 1$ desde $n(t)$ hasta $m(t)$. Sea $k(t)$ el nodo que está conectado con $m(t)$ en este camino. Entonces existe un camino de longitud ℓ de $n(t)$ a $k(t)$, con el cual definimos $\wp(n, k)$.

Ahora, distinguiamos los siguientes casos:

- Si $k > n > m$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2K}{N} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathcal{P}(n,m) \\ i > j}} (i-j) A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \\
&= -\frac{2K}{N} (k-m) \sin(\theta_{k(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)) - \frac{2K}{N} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathcal{P}(n,k) \\ i > j}} (i-j) A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \\
&\leq -\frac{2Kg}{N} (k-m) (\theta_{k(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)) \leq -\frac{2Kg}{N} (\theta_{n(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)).
\end{aligned}$$

- Si $n > k > m$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2K}{N} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathcal{P}(n,m) \\ i > j}} (i-j) A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \\
&= -\frac{2K}{N} (k-m) \sin(\theta_{k(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)) - \frac{2K}{N} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathcal{P}(n,k) \\ i > j}} (i-j) A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \\
&\stackrel{\leq}{HI} -\frac{2K}{N} (k-m) \sin(\theta_{k(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)) - \frac{2Kg}{N} (\theta_{n(t)}(t) - \theta_{k(t)}(t)) \\
&\leq -\frac{2Kg}{N} (\theta_{k(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)) - \frac{2Kg}{N} (\theta_{n(t)}(t) - \theta_{k(t)}(t)) = -\frac{2Kg}{N} (\theta_{n(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)).
\end{aligned}$$

- Si $n > m > k$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2K}{N} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathcal{P}(n,m) \\ i > j}} (i-j) A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \\
&= -\frac{2K}{N} (k-m) \sin(\theta_{k(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)) - \frac{2K}{N} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathcal{P}(n,k) \\ i > j}} (i-j) A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \\
&\stackrel{\leq}{HI} 0 - \frac{2Kg}{N} (\theta_{n(t)}(t) - \theta_{k(t)}(t)) \leq -\frac{2Kg}{N} (\theta_{n(t)}(t) - \theta_{m(t)}(t)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, probamos que si existe un camino de $1(t)$ a $N(t)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}(t)) &\leq -\frac{2Kg}{N} (\theta_{N(t)}(t) - \theta_{1(t)}(t)) = -\frac{2Kg}{N} \frac{(N-1) \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor}{(N-1) \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} (\theta_{N(t)}(t) - \theta_{1(t)}(t)) \\
&\leq -\frac{2Kg}{N(N-1) \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} \mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)).
\end{aligned}$$

La constante que buscamos entonces resulta ser

$$c = \frac{2Kg}{N(N-1) \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor}, \text{ con } g \text{ definida como en (3.9).}$$

□

Proposición 3.8. Sea $\boldsymbol{\theta}(t) \in \Gamma(\gamma)$ con $\gamma < \pi$. Existe una constante $c > 0$ que depende únicamente de γ y N tal que si $A_{1(t)N(t)}(t) = 1$,

$$\mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}(t)) \leq -c\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)).$$

Demostración. Nuevamente, por la proposición 3.5,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}(t)) &= -\frac{2K}{N} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^N (i-j)A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \\ &\leq -\frac{2Kg}{N}(N-1)(\theta_{N(t)}(t) - \theta_{1(t)}(t)) \\ &= -\frac{2Kg}{N}(N-1) \frac{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} (\theta_{N(t)}(t) - \theta_{1(t)}(t)) \\ &\leq -\frac{2Kg}{N \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} \mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)), \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad acotamos de la siguiente manera:

- Si $i = N, j = 1$,

$$-\frac{2K}{N}(i-j)A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \leq -\frac{2Kg}{N}(N-1)(\theta_{N(t)}(t) - \theta_{1(t)}(t)).$$

- En cualquier otro caso,

$$-\frac{2K}{N}(i-j)A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \leq 0.$$

Tomando $c = \frac{2Kg}{N \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor}$ (con g como en (3.9)) tenemos la desigualdad buscada.

□

Proposición 3.9. Sea $\boldsymbol{\theta}(t) \in \Gamma(\gamma)$ con $\gamma < \pi$. Existe una constante $c > 0$ que depende únicamente de γ y N tal que si se verifica que $A_{i(t)j(t)}(t) = 1$ para $j = N+1-i$ y todo $\lfloor (N+1)/2 \rfloor \leq i \leq N$,

$$\mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}(t)) \leq -c\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)).$$

Demostración. Usando la proposición 3.5,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(\boldsymbol{\theta}(t)) &= -\frac{2K}{N} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^N (i-j) A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \\ &\leq -\frac{2Kg}{N} \sum_{i=\lceil \frac{N+1}{2} \rceil}^N (2i - (N+1)) (\theta_{i(t)}(t) - \theta_{(N+1-i)(t)}(t)) \\ &= -\frac{2Kg}{N} \mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)), \end{aligned}$$

donde acotamos de la siguiente manera:

- Para $j = N + 1 - i$,

$$-\frac{2K}{N} (i-j) A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \leq -\frac{2Kg}{N} (2i - (N+1)) (\theta_{i(t)}(t) - \theta_{(N+1-i)(t)}(t)).$$

- En cualquier otro caso,

$$-\frac{2K}{N} (i-j) A_{i(t)j(t)}(t) \sin(\theta_{i(t)}(t) - \theta_{j(t)}(t)) \leq 0.$$

Tomando $c = \frac{2Kg}{N}$ (con g como en (3.9)) tenemos la desigualdad buscada. □

Notar que el enunciado de la proposición 3.8 es un caso particular de la proposición 3.7. A su vez, las hipótesis de la proposición 3.9 implican que se satisfacen las condiciones de la proposición 3.8. La diferencia entre estas proposiciones (y el motivo de demostrarlas individualmente) reside en que restringir más las hipótesis nos permite acotar mejor la constante c involucrada.

Teorema 3.10. Considerar KRW en un grafo $\mathbb{G} = (V, E)$ finito. Si $\boldsymbol{\theta}(t_0) \in \Gamma(\gamma)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\gamma < \pi$, entonces se alcanza la sincronización de fases.

Demostración. Como \mathbb{G} es finito, entonces cada paseo al azar es recurrente positivo, porque admite una medida invariante μ . Luego, trivialmente se verifica que

$$\int_{t_0}^t \mathbb{1}_{\{A_{1(s)N(s)}(s)=1\}} ds \rightarrow \infty \quad \text{con } t \rightarrow \infty.$$

Juntando el lema de Gronwall 1.22 con la proposición 3.8 obtenemos

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t)) \leq \mathcal{D}(\boldsymbol{\theta}(t_0)) \exp\left(-c \int_{t_0}^t \mathbb{1}_{\{A_{1(s)N(s)}(s)=1\}} ds\right) \rightarrow 0 \quad \text{con } t \rightarrow \infty.$$

□

3.3. Resultado principal

A continuación, nos proponemos estudiar KRW cuando el grafo no es finito. El teorema principal de esta tesis es un resultado análogo al teorema 3.10, pero para \mathbb{Z}^d con $d \leq 2$. Recordar que para $d > 2$ los paseos al azar dejan de ser recurrentes y por lo tanto hay probabilidad positiva de que no se alcance la sincronización de fases.

En el teorema 3.10 vimos que KRW no solo alcanza la sincronización en grafos finitos cuando $\boldsymbol{\theta}(t_0) \in \Gamma(\gamma)$ con $\gamma < \pi$, sino que lo hace exponencialmente rápido. A diferencia del teorema 3.10, dar un resultado cuantitativo para \mathbb{Z}^d resulta ser un problema más complejo de estudiar, el cual puede ser un buen objeto de estudio en el futuro. De todos modos veremos que el resultado se mantiene, cualitativamente. La demostración del teorema principal de esta tesis (a continuación) se basa en las ideas presentadas en [19].

Teorema 3.11. Considerar KRW en \mathbb{Z}^d con $d = 1$ o $d = 2$. Si $\boldsymbol{\theta}(t_0) \in \Gamma(\gamma)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\gamma < \pi$, entonces se alcanza la sincronización de fases.

Demostración. Sea Θ el conjunto de los puntos $\boldsymbol{\theta}$ para los cuales existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\boldsymbol{\theta}(t_n) \rightarrow \boldsymbol{\theta}$. A saber, este conjunto es conocido en la literatura como el conjunto de los ω -límites de $(\boldsymbol{\theta}(t))_{t \geq t_0}$.

Observamos que dados $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}' \in \Theta$ se tiene que $\theta_{\min} = \theta'_{\min}$ y $\theta_{\max} = \theta'_{\max}$. Vamos a demostrar que $\theta_{\max} = \theta'_{\max}$, la demostración de $\theta_{\min} = \theta'_{\min}$ es análoga. Si existiesen $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}' \in \Theta$ tales que $\theta_{\max} < \theta'_{\max}$, en particular existen sucesiones t_n, t'_n (que tienden a infinito) tales que $\boldsymbol{\theta}(t_n) \rightarrow \boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\theta}(t'_n) \rightarrow \boldsymbol{\theta}'$. Como $\boldsymbol{\theta}(t_n) \rightarrow \boldsymbol{\theta}$, existe n_1 tal que $\theta_{\max}(t_{n_1}) < (\theta_{\max} + \theta'_{\max})/2$. Como $\boldsymbol{\theta}(t'_n) \rightarrow \boldsymbol{\theta}'$, existe n_2 tal que $t'_{n_2} \geq t_{n_1}$ y $\theta_{\max}(t'_{n_2}) > (\theta_{\max} + \theta'_{\max})/2$. Esto contradice el hecho de que $\theta_{\max}(t)$ no crece, tal como vimos en el teorema 2.2.

Luego, vimos que para $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, los valores de θ_{\min} y θ_{\max} no dependen de $\boldsymbol{\theta}$. Por lo tanto, los notaremos con m y M , respectivamente.

Queremos probar que $m = M$, así que supongamos que esto no pasa. En tal caso, definimos las funciones

$$\begin{aligned} b_M(\boldsymbol{\theta}) &:= \{i \in \mathcal{N} : \theta_i = M\}, \\ b_m(\boldsymbol{\theta}) &:= \{i \in \mathcal{N} : \theta_i = m\}. \end{aligned}$$

Observar que para $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ necesariamente se tiene que $b_M(\boldsymbol{\theta}) \neq \emptyset$ y $b_m(\boldsymbol{\theta}) \neq \emptyset$.

Ahora afirmamos que fijado $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, existe $\bar{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta$ tal que $b_m(\bar{\boldsymbol{\theta}}) \subseteq b_m(\boldsymbol{\theta})$, $b_M(\bar{\boldsymbol{\theta}}) \subseteq b_M(\boldsymbol{\theta})$ y al menos una de esas inclusiones es estricta. De momento, postergamos la demostración de esta afirmación.

Usando esta afirmación una cantidad finita de veces, obtenemos que existe cierto θ^* con $b_m(\theta^*) = \emptyset$ o $b_M(\theta^*) = \emptyset$. Claramente esto es una contradicción, que venía de suponer que $m \neq M$. Concluimos que $\theta(t)$ converge al estado $\theta_i \equiv 0$ para todo $i \in \mathcal{N}$.

Para terminar, damos la demostración de la afirmación que quedó pendiente. Sea $\theta \in \Theta$. Por definición, existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\theta(t_n) \rightarrow \theta$. En base a $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y θ construimos la siguiente sucesión.

$$\hat{t}_n := \inf\{t \geq t_n : i \sim j \text{ para ciertos } i \in b_m(\theta), j \notin b_m(\theta) \\ \text{o } i \sim j \text{ para ciertos } i \in b_M(\theta), j \notin b_M(\theta)\}.$$

Observar que la existencia de \hat{t}_n está garantizada por el corolario 1.15 ya que $d \leq 2$. Tomando subsucesiones si es necesario, podemos asumir que $(\hat{t}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumple que

- $\theta(\hat{t}_n) \rightarrow \hat{\theta}$ (usando que $\theta(t)$ es acotada),
- $A(\hat{t}_n) \equiv A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pues hay finitas posibilidades para $A(\hat{t}_n)$),
- $\theta(\bar{t}_n) \rightarrow \bar{\theta}$, donde \bar{t}_n es el tiempo de salto inmediatamente después de \hat{t}_n ,
- $\bar{t}_n - \hat{t}_n \rightarrow T$, para algún valor $T > 0$.

Ahora verifiquemos que $\bar{\theta}$ es el elemento de Θ que buscamos. Primero, notemos que por construcción se tiene que $b_m(\theta) = b_m(\hat{\theta})$ y $b_M(\theta) = b_M(\hat{\theta})$. Probaremos solo $b_m(\theta) \subseteq b_m(\hat{\theta})$, el resto de las inclusiones son similares. Si $\hat{t}_n = t_n$ no hay nada que probar. Ahora notemos que para $t \in [t_n, \hat{t}_n]$, un agente en $b_m(\theta)$ se conecta a lo sumo con otros agentes en $b_m(\theta)$. Por lo tanto si $i \in b_m(\theta)$ es tal que a tiempo $t \in [t_n, \hat{t}_n]$, $\theta_i(t)$ es máximo sobre los valores de $\theta_j(t)$ con $j \in b_m(\theta)$, entonces debe ocurrir que $\theta'_i(t) \leq 0$. Concluimos que $\theta_i(\hat{t}_n) \leq \theta_i(t_n)$ para todo $i \in b_m(\theta)$ y por lo tanto $\hat{\theta}_i \rightarrow m$ para todo $i \in b_m(\theta)$. Esto muestra que $b_m(\theta) \subseteq b_m(\hat{\theta})$. La inclusión $b_m(\hat{\theta}) \subseteq b_m(\theta)$ se puede ver considerando el mínimo valor para $i \notin b_m(\theta)$.

A continuación, debemos probar que $b_m(\bar{\theta}) \subseteq b_m(\hat{\theta})$, $b_M(\bar{\theta}) \subseteq b_M(\hat{\theta})$ y que una de esas inclusiones es estricta. Notar que, por continuidad, $\bar{\theta}$ representa el estado de la solución del sistema (3.1) con matriz de adyacencia A y estado inicial $\hat{\theta}$ a tiempo T . En particular, ningún oscilador puede tomar los valores m o M sin haber comenzado en alguno de ellos. Y además sabemos que al menos uno de los osciladores que toma el valor m o M a tiempo t_0 , se encuentra acoplado con otro oscilador con un valor diferente. Estas afirmaciones nos permiten concluir que $b_m(\bar{\theta}) \subseteq b_m(\hat{\theta})$, $b_M(\bar{\theta}) \subseteq b_M(\hat{\theta})$ y además alguna de esas inclusiones debe ser estricta.

Esto completa la demostración. □

Capítulo 4

Simulaciones numéricas

En este capítulo, examinamos el comportamiento de los modelos descritos en el capítulo previo mediante simulaciones numéricas. Principalmente nos enfocamos en el modelo KRW, con agentes que realizan paseos al azar en \mathbb{Z} . A su vez, también exploramos qué sucede cuando θ_0 no se encuentra contenida en un arco de longitud menor a π . Elegimos realizar las simulaciones en Python; el código utilizado está disponible en GitHub [20]. Para su elaboración, adaptamos la implementación de (2.2) que se encuentra en [21].

Usando un esquema de Runge-Kutta, nuestro objetivo será integrar numéricamente (3.1). Decidimos inicializar los pases al azar de manera uniforme en $[-N, N] \subset \mathbb{Z}$ y una vez generados los tiempos de salto (que están distribuidos exponencialmente) t_i , aprovechamos que la matriz de adjacencia $A(t)$ es constante en el período $[t_i, t_{i+1})$ para resolver la ecuación pensada como en (2.1). Esto nos permite evitar llamados a una función que calcule $A(t)$ para cada valor de t ; más aún, vamos a tratar a $A(t)$ como una matriz esparsa para optimizar el proceso. Notar que la solución simulada se corresponde con la solución vista como función $\hat{\theta} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$, mientras que originalmente buscábamos encontrar una solución $\theta : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{T}^N$. Esto no es ningún problema ya que tomando la proyección $\pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$, resulta que $\theta = \pi \circ \hat{\theta}$ por unicidad. En la figura 4.1, presentamos la información relevante para un primer ejemplo, en el cual consideramos una población de $N = 50$ osciladores, $K = 5$ y $\lambda = 1$. La solución se encuentra expresada hasta un tiempo $T = 3000$.

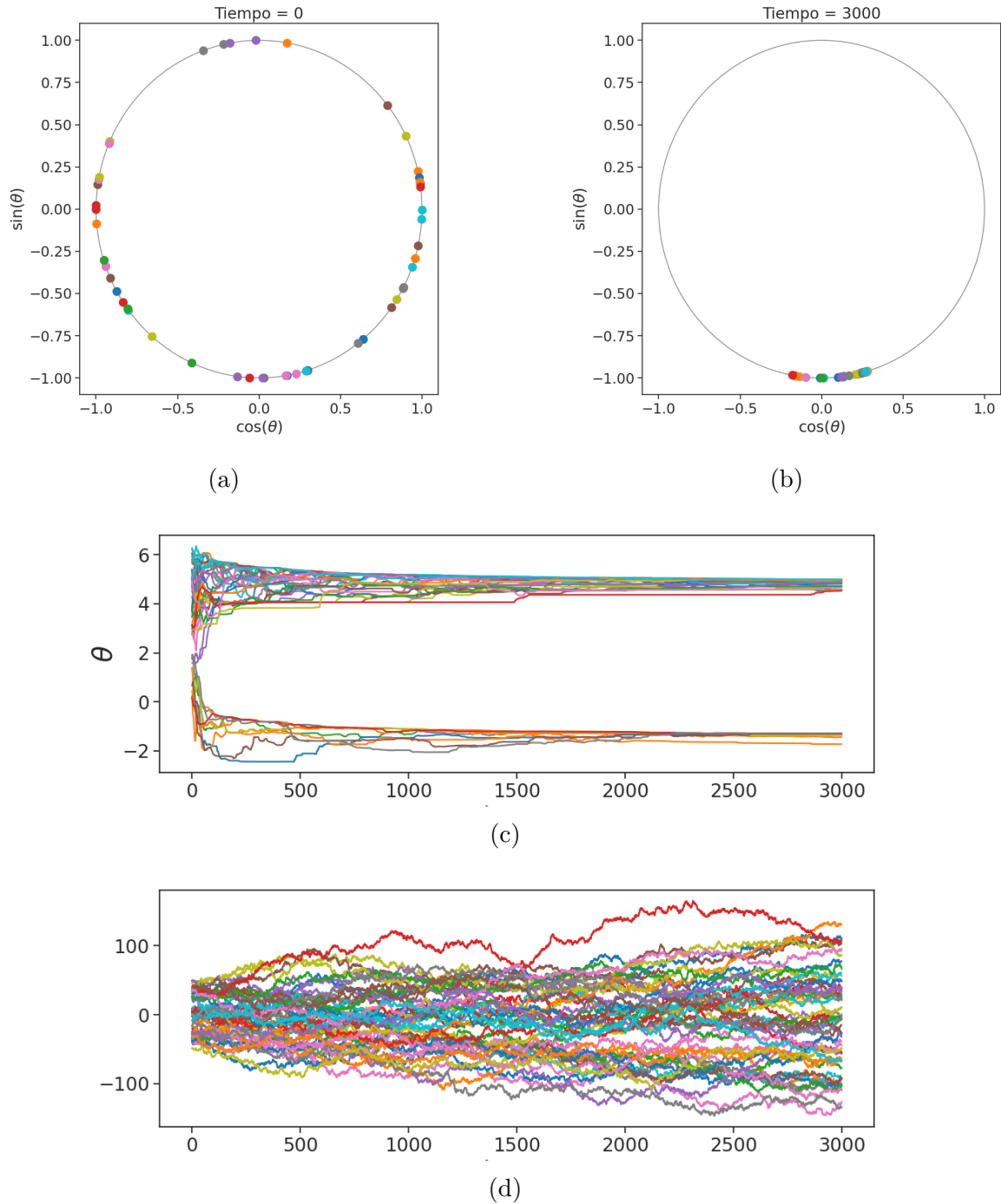


Figura 4.1: Sincronización de $N = 50$ osciladores con frecuencia natural $\omega = 0$. Partiendo de un estado distribuido uniformemente en el círculo (a), vemos que las fases convergen a un valor (c). La sincronización está por alcanzarse (b), pero debido a la recurrencia nula de los paseos al azar (d), algunos osciladores pueden tardar mucho tiempo en hacerlo. Los colores de los paseos se corresponden con los de los osciladores.

Ahora, retomamos la proposición (3.2) que decía que el comportamiento del modelo con tasa de salto λ es análogo al de un modelo con tasa de salto 1 si cambiamos la constante de acople, K , por λK . Consideramos una población de $N = 25$ osciladores, para distintos valores de la tasa de salto λ , que tomamos entre 0,25 y 1. Las simulaciones están hechas manteniendo constante λT , siendo T el tiempo final. Asimismo, al discretizar el tiempo ajustamos el tamaño de la grilla de manera acorde, manteniendo constante la cantidad de puntos totales. La figura 4.2 muestra que, tal como afirmamos, el comportamiento es esencialmente el mismo. Luego, para el resto de las simulaciones vamos a trabajar con una tasa promedio de un salto por unidad de tiempo.

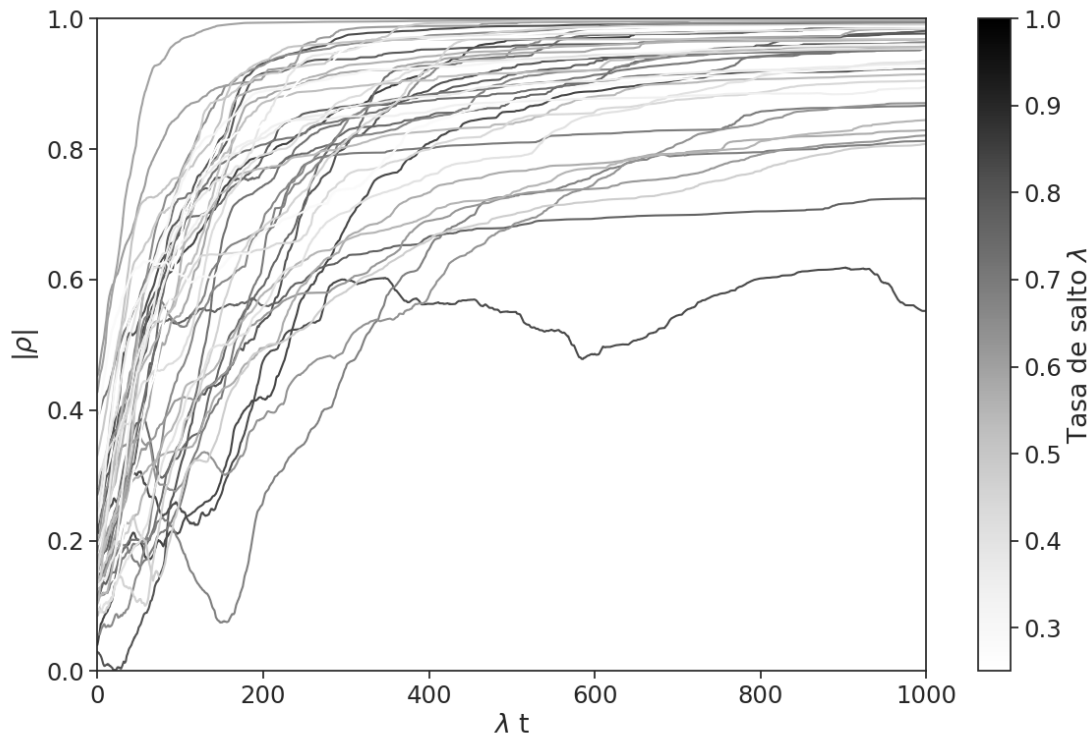


Figura 4.2: Gráfico del parámetro de orden $|\rho(t)|$ para distintos valores del tiempo de salto medio λ , que toma valores entre 0,25 y 1. A mayor λ , el gráfico correspondiente está representado con un tono de gris más oscuro. En cada caso, se tomó un conjunto de $N = 25$ osciladores, con condición inicial uniforme en \mathbb{T}^N .

Nos enfocamos ahora en comprobar el teorema principal 3.11 de esta tesis. Para esto, simulamos 40 realizaciones con $N = 25$ osciladores, partiendo de una condición uniforme en $[0, \pi]^N$ (la cual con probabilidad 1 se encuentra bajo las hipótesis del teorema) y tomamos como constante de acople $K = 8$. Como se ve en la figura 4.3, luego de $T = 500$ unidades de tiempo, $\mathcal{D}(\theta)$ toma valores relativamente pequeños. Las diferencias

entre cada instancia son producto del azar. Asimismo, destacamos que como estamos trabajando con $w = 0$, el valor de K elegido no juega un papel muy relevante a la hora de alcanzar la sincronización, más allá de acelerar el proceso (producto de lo mencionado previamente en el lema 2.1).

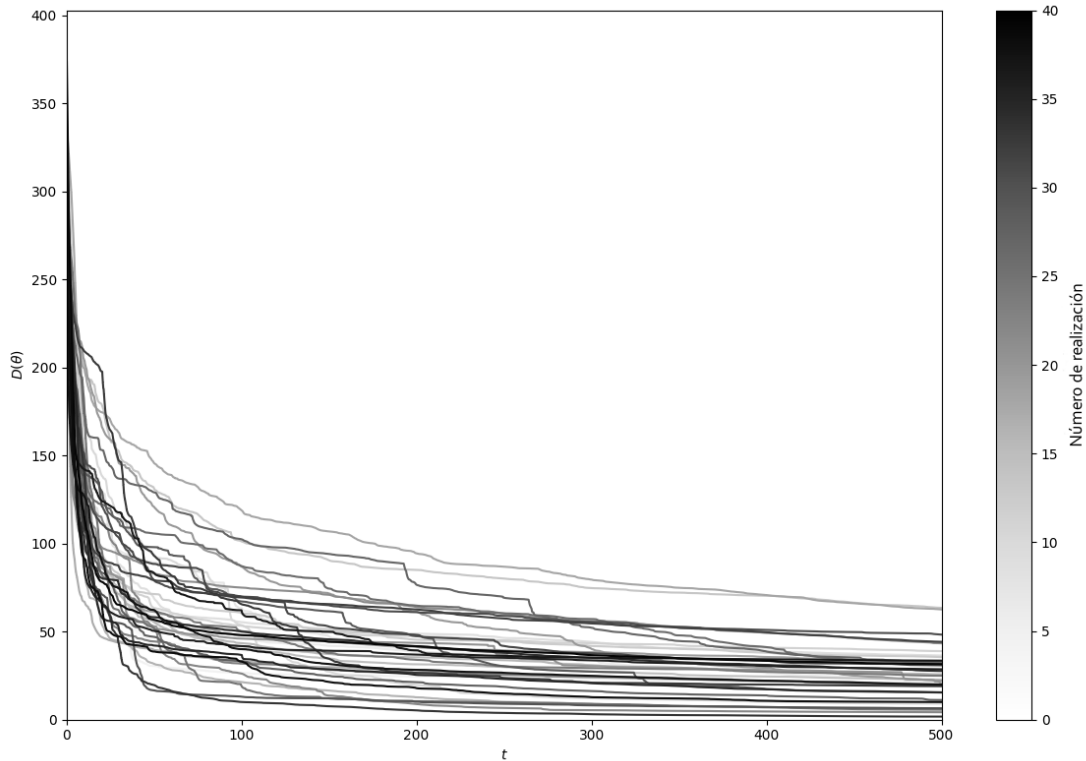


Figura 4.3: Gráfico de $\mathcal{D}(\theta)$ en las condiciones del teorema 3.11. Se grafican 40 simulaciones tomando $N = 25$ osciladores y constante de acople $K = 8$, partiendo de una condición inicial tomada uniformemente en $[0, \pi]^N$. El tono de gris representa el número de la realización.

Dirigimos nuestra atención al caso en el cual la condición inicial no se encuentra en $\Gamma(\gamma)$ con $\gamma < \pi$. Puntualmente, realizamos simulaciones para θ_0 con distribución uniforme en \mathbb{T}^N . En la figura 4.4, vemos el resultado de 40 instancias, realizadas hasta $T = 2000$ con $K = 8$. La misma sugiere que KRW alcanza la sincronización de fases en \mathbb{Z} ya que, eventualmente, $\theta(t)$ se encuentra en las condiciones del teorema principal 3.11. Observar como, al principio, $\mathcal{D}(\theta(t))$ no resulta necesariamente decreciente puesto que $\theta(t) \notin \Gamma(\gamma)$ para $\gamma < \pi$. Lamentablemente, esto confirma que $\mathcal{D}(\theta(t))$ no es una función de Lyapunov para el sistema de ecuaciones (3.1).

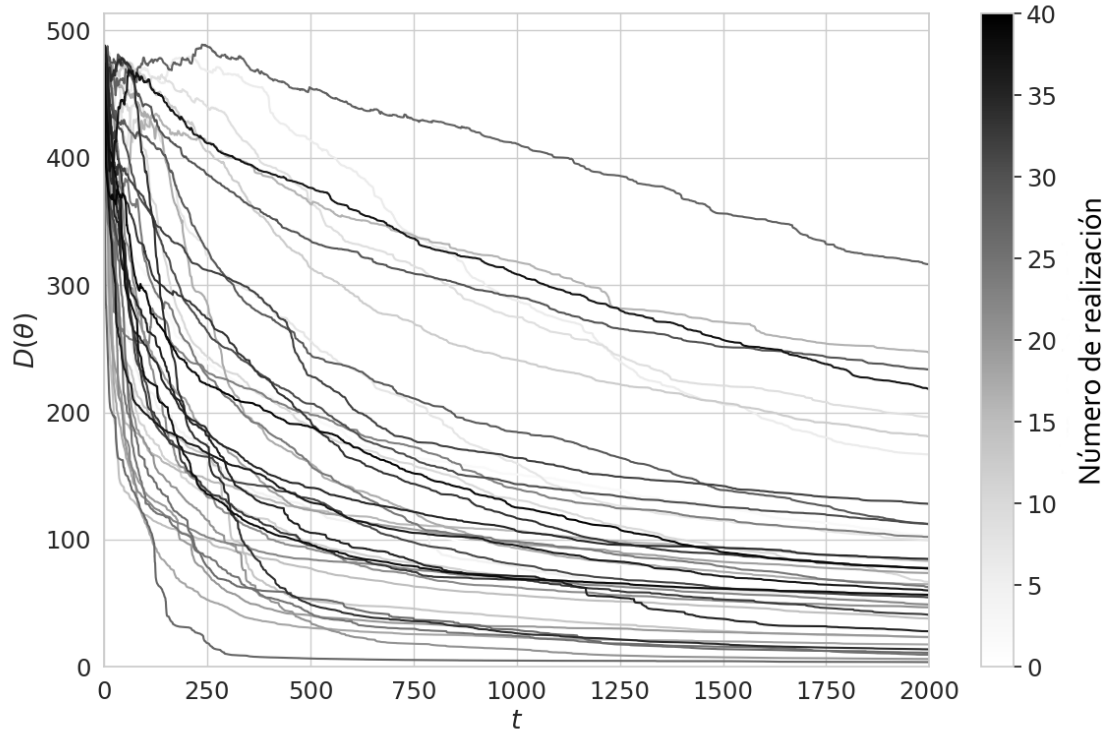


Figura 4.4: Gráfico de $\mathcal{D}(\theta)$ fuera de las condiciones del teorema 3.11. Se grafican 40 simulaciones tomando $N = 25$ osciladores y constante de acople $K = 8$, partiendo de una condición inicial tomada uniformemente en \mathbb{T}^N . El tono de gris representa el número de la realización.

Un elemento clave en la demostración del teorema 3.11 fue que, mediante el corolario 1.15, sabíamos que el evento $A_{ij}(t) = 1$ era recurrente nulo para todos i, j . Teniendo en mente que para el modelo de Kuramoto en un grafo fijo \mathbb{G} (2.3) existe una conectividad crítica (recordar el teorema 2.9), es interesante pensar qué ocurre cuando $A_{ij}(t) = 1$ no es recurrente para algunos pares i, j .

Esto nos lleva al próximo y último ejemplo de este capítulo, en el cual hemos considerado un solo agente que se mueve al azar en $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, que se acopla con el oscilador correspondiente a su posición; el resto de los osciladores están acoplados formando un anillo. A pesar de que, para este agente, el evento $A_{1j}(t) = 1$ es recurrente positivo para todo j , es el único con tal propiedad. La figura 4.5 parecería indicar que el sistema no logra alcanzar la sincronización de fases partiendo de una condición inicial próxima a la mexican wave. En base a esto, nos preguntamos si existirá alguna proporción crítica de agentes que deban moverse de forma aleatoria que garantice la sincronización.

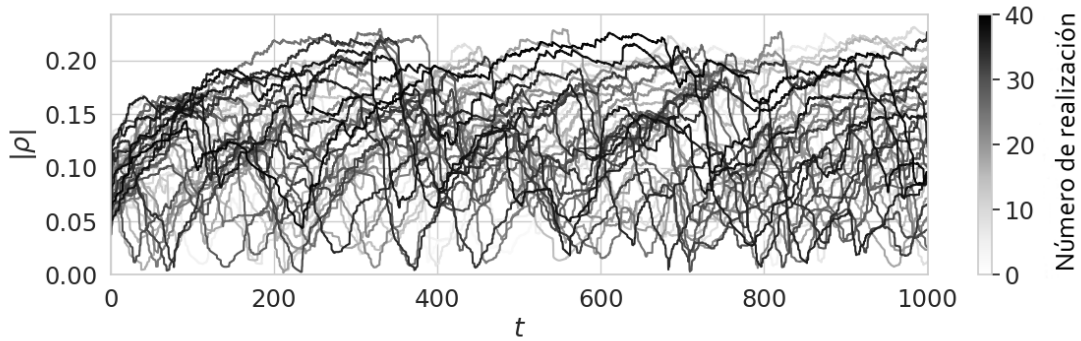


Figura 4.5: Simulación para $N = 21$ osciladores. 20 de ellos están acoplados de manera estática formando un anillo, mientras que uno de ellos se acopla siguiendo un paseo al azar en $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. Para $i \leq 20$, $\theta_i(0) = 2\pi i/20 + \epsilon_i$, donde ϵ_i es una pequeña perturbación que se distribuye normalmente.

Asimismo, si trabajamos una matriz con pesos (en lugar de tomar $a_{ij} \in \{0, 1\}$), ¿será capaz un único agente de atraer al resto de las fases? Dejaremos estos interrogantes como posibles cursos de investigación en el futuro.

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado el modelo de Kuramoto y explorado el fenómeno conocido como la sincronización espontánea. Como mencionamos en la introducción, este modelo tiene extensas aplicaciones en diversas áreas de la ciencia. Introdujimos varias nociones que nos permitieron analizar las propiedades de este modelo y observamos que para alcanzar la sincronización de fases, la conectividad juega un rol importante.

Sin embargo, notamos que las redes con un alto coeficiente de conectividad no son frecuentes. Decidimos entonces explorar nuevas variantes del modelo de Kuramoto, en esta ocasión introduciendo elementos que dependen del azar. Esto nos permitió considerar un modelo que, en general, no tiene una red conexas. Más aún, es esperable que dicha red no esté altamente conectada. En este contexto, dimos condiciones sobre los paseos al azar que dictan la conectividad de esta red que nos permitió acotar el tiempo necesario para alcanzar la sincronización.

Nuestro principal aporte fue extender un conocido resultado (frecuentemente referido en la literatura como el “lema del semicírculo”) a estos modelos alternativos. Esto nos permitió entender el rol que juegan las conexiones entre los osciladores cuando la red es dinámica. La única condición necesaria resultó ser la capacidad de que para todo t_0 , dos osciladores cualesquiera se acoplen durante algún período de tiempo posterior a t_0 , con probabilidad uno. Destacamos que esta es una cualidad individual (de cada agente) y no una propiedad que deba cumplir el colectivo (como pedir que el grafo sea conexo).

Trabajo futuro

Para concluir, dejamos algunos interrogantes que pueden ser objeto de estudio a futuro.

En primer lugar, aún hay mucho trabajo por hacer con respecto al modelo de Kuramoto clásico, como vimos en (2.1). Por ejemplo, como mencionamos anteriormente, el valor de μ_c continúa siendo un problema abierto.

A la hora de extender el trabajo presentado en esta tesis, el mayor objetivo será analizar si el resultado encontrado en el teorema 3.11 se verifica para cualquier condición inicial. Es decir, ¿será cierto que KRW se sincroniza globalmente? En base a las simulaciones del capítulo 4, la respuesta pareciera resultar afirmativa. Notar que bastará con mostrar que para toda condición inicial (salvo un conjunto de medida de Lebesgue cero) existe algún $t \in \mathbb{R}$ tal que $\theta(t) \in \Gamma(\gamma)$ para cierto $\gamma < \pi$.

A su vez, otra alternativa a considerar podría ser una variante de KRW, en la que no todas las aristas de la red dependen de paseos al azar. En particular, nos preguntamos si alcanza con que un solo nodo se mueva de manera aleatoria, con probabilidad uno de eventualmente conectarse con cualquiera de los demás nodos para lograr la sincronización global. En este caso, parece factible encontrar un contraejemplo basado en el anillo (basándonos en lo visto en el capítulo 4). Teniendo este potencial resultado negativo en mente, conjeturamos que sería posible dar una respuesta en términos de μ_c . Posiblemente, si en lugar de pedir que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ permitimos que $a_{ij} \in [0, \infty)$, sería posible encontrar alguna condición que garantice la sincronización global.

Finalmente, también podría ser interesante considerar el límite de este tipo de sistemas cuando la cantidad de osciladores N tiende a infinito.

Bibliografía

- [1] C. Huygens, *The Pendulum Clock: Geometrical Demonstrations Concerning the Motion of Pendula as Applied to Clocks*. Iowa State University Press, Ames, 1986.
- [2] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.
- [3] V. Kohar and S. Sinha, “Emergence of epidemics in rapidly varying networks,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 54, pp. 127–134, 2013.
- [4] C. S. Peskin, “Mathematical aspects of heart physiology,” *Courant Inst. Math*, 1975.
- [5] J. Buck and E. Buck, “Synchronous fireflies,” *Scientific American*, vol. 234, no. 5, pp. 74–85, 1976.
- [6] J. Buck, “Synchronous rhythmic flashing of fireflies. ii.” *The Quarterly review of biology*, vol. 63, no. 3, pp. 265–289, 1988.
- [7] D. A. Levin and Y. Peres, *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Soc., 2017, vol. 107.
- [8] T. M. Liggett, *Continuous time Markov processes: an introduction*. American Mathematical Soc., 2010, vol. 113.
- [9] J. R. Norris, *Markov chains*. Cambridge University Press, 1998, no. 2.
- [10] H.-O. Georgii, *Stochastics. Introduction to probability theory and statistics*. De Gruyter, 2007.
- [11] E. A. Coddington, N. Levinson, and T. Teichmann, *Theory of ordinary differential equations*. American Institute of Physics, 1956.
- [12] J. K. Hale, *Ordinary differential equations*. Courier Corporation, 2009.

- [13] F. Bullo, *Lectures on network systems*. Kindle Direct Publishing Seattle, DC, USA, 2020, vol. 1, no. 3.
- [14] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, “The kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena,” *Reviews of modern physics*, vol. 77, no. 1, p. 137, 2005.
- [15] G. Cooray, *The Kuramoto Model*, 2008.
- [16] S. Strogatz, *Sync: The emerging science of spontaneous order*. Penguin UK, 2004.
- [17] A. Townsend, M. Stillman, and S. H. Strogatz, “Dense networks that do not synchronize and sparse ones that do,” *Chaos*, vol. 30, no. 8, pp. 083 142, 7, 2020.
- [18] S. Ling, R. Xu, and A. S. Bandeira, “On the landscape of synchronization networks: a perspective from nonconvex optimization,” *SIAM J. Optim.*, vol. 29, no. 3, pp. 1879–1907, 2019.
- [19] L. Moreau, “Stability of multiagent systems with time-dependent communication links,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 2, pp. 169–182, 2005.
- [20] F. Perazzo, “Implementación en python del modelo de kuramoto en grafos dinámicos,” <https://github.com/fabridamicelli/kuramoto>, 2023.
- [21] F. Damicelli, “Python implementation of the kuramoto model,” <https://github.com/fabridamicelli/kuramoto>, 2019.