



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Una aproximación al laplaciano fraccionario y a sus
discretizaciones numéricas

Juan Cruz Lopez

Director: Gabriel Acosta

02/08/2023

Índice general

Índice	1
1. Preliminares	11
1.1. Laplaciano Fraccionario	11
1.1.1. Definición del operador Laplaciano Fraccionario	12
1.2. Espacio de Sobolev fraccionario	14
1.2.1. Definición y propiedades	14
1.2.2. Los espacios $H^s(\Omega)$ y $\tilde{H}^s(\Omega)$	19
1.2.3. Formulación débil	31
1.2.4. Localización de las normas fraccionarias	32
1.3. Espacios de Sobolev fraccionarios pesados	34
1.3.1. Espacios en un intervalo	34
1.3.2. Espacios en dominios multi-dimensionales	38
2. Teoría De Regularidad	41
2.1. Problemas unidimensionales y radiales	42
2.1.1. Regularidad de Sobolev en un intervalo	42
2.1.2. Regularidad en dominios de multi-intervalos	45
2.1.3. El Laplaciano fraccionario para bolas	46
2.2. Regularidad de Hölder-Sobolev	47
2.2.1. El caso $s \in (0, 1/2)$: regularidad en el espacio fraccio- nario estandar	50
2.2.2. El caso $s \in (1/2, 1)$ regularidad en el espacio estándar y pesado	52
2.2.3. Regularidad Global	55
2.2.4. El caso $s = 1/2$	57

3. Aproximaciones por elementos finitos para el problema homogéneo	59
3.1. Problema discreto y espacios discretos	60
3.2. Estimaciones de quasi-interpolación	61
3.3. Mallas uniformes	66
3.3.1. Convergencia en la norma energía	67
3.3.2. Convergencia en $L^2(\Omega)$	68
3.4. Experimentos Numéricos	70

Introducción

La difusión es el movimiento neto de partículas de regiones con mayor concentración hacia regiones con menor concentración. Ya es claro que la primera ley de Fick, que es una relación constitutiva para flujos difusivos, es un modelo cuestionable para varios fenómenos (véase, por ejemplo, [37], [38]). En general, los procesos difusivos clásicos admiten interpretaciones probabilísticas asociadas a fenómenos brownianos, sin embargo existen numerosos modelos basados en otros procesos estocástico subyacentes. Es en esos casos, en los que la difusión no se puede representar con un movimiento browniano, que la difusión se denomina *anómala*. En esta situación, y al contrario del caso tradicional, los modelos necesarios requieren de la introducción de operadores pseudo diferenciales o más en general de operadores no locales. En particular emergen sustitutos para las derivadas clásicas, en ocasiones en forma de operadores de tipo fraccionario dados por expresiones integro-diferenciales. En años recientes, los modelos no locales han impactado de forma creciente en varios campos importantes de la ciencia y la tecnología.

Evidencia de procesos de difusión anómalos han sido encontrados en varios entornos físicos y sociales ([31], [38]), y modelos de transporte correspondientes han sido propuestos en áreas tan diversas como electrodifusión en células nerviosas [52], fluidos electromagnéticos [36], y transporte de aguas subterráneas [16]. Modelos no locales también han sido propuestos en campos tan variados como finanzas [41], [15], aprendizaje automático [32], peridinámica [47] y procesamiento de imágenes [1], [23], [24], [56].

Naturalmente, los operadores que aparecen en estas aplicaciones pueden variar, y una buena cantidad de estrategias de aproximación discretas han sido propuestas. Este trabajo se centra en aproximaciones por elementos finitos para uno de los más notables ejemplos de un operador no local, el laplaciano fraccionario de orden s , ($s \in (0, 1)$), que denotaremos mediante $(-\Delta)^s$. En la teoría de procesos estocásticos, este operador aparece como el

generador infinitesimal de un proceso de Lévy $2s$ -estable [8], [54].

Recalcamos la ubicuidad de los laplacianos fraccionarios en modelado de fenómenos físicos y sociales con dos ejemplos. En primer lugar, en flujo en medios porosos, las partículas pueden experimentar transiciones muy largas como consecuencia tanto de una alta heterogeneidad como de una muy larga autocorrelación espacial. En [17], los autores han llevado a cabo experimentos y estudios teóricos sobre el transporte de contaminantes en acuíferos y han provisto evidencia de difusión gobernada por procesos α -estables con órdenes $\alpha = 1,55, 1,65$ y $1,8$ para varias ubicaciones de acuíferos. Luego, la ecuación de advección-dispersión fraccionaria modelando estos fenómenos incluye laplacianos fraccionarios de órdenes $0,775, 0,825$ y $0,9$, respectivamente.

En segundo lugar, los vuelos de Lévy han sido utilizados para modelar la locomoción humana en relación con la difusión del crimen [44]. Comenzando con un modelo de agentes autómatas celulares, los autores derivan su límite continuo, que consiste de dos ecuaciones e involucra al laplaciano fraccionario, que representa en ese contexto la superdifusión de agentes.

Existen, en la literatura, algunas variantes ¹ posibles para definir el laplaciano fraccionario de orden s como una generalización del caso clásico. En este trabajo asumimos la siguiente

$$(-\Delta)^s u(x) := C(n, s) P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \quad (1)$$

donde $C(n, s)$ es una constante de normalización apropiada.

No es difícil ver que si u pertenece a la clase de Schwartz \mathcal{S} , la expresión (1) es finita para todo x . Con esta definición resulta evidente el carácter *no local* del laplaciano fraccionario: modificando una función u en un conjunto abierto (o más generalmente de medida positiva) O puede alterar el valor de $(-\Delta)^s u$ en puntos x arbitrariamente lejos de O .

¹Otro enfoque para definir el laplaciano fraccionario viene de considerar potencias de laplaciano en un sentido espectral: dada una función u , considerar su descomposición espectral en términos de las autofunciones del laplaciano con condiciones de borde Dirichlet homogéneas, y tomar el operador que actúa elevando a la potencia s cada autovalor correspondiente. Esto es, si $\{\psi_k, \lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}_+$ denota el conjunto de autofunciones normalizadas y autovalores, entonces este operador está definido como

$$(-\Delta)_S^s u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s(u, \psi_k)_{L^2(\Omega)} \psi_k(x). \quad (2)$$

Del mismo modo que en el caso del laplaciano tradicional que aparece en modelos asociados a problemas de tipo Dirichlet o Neumann definidos en conjuntos abiertos Ω , existen planteos equivalentes para el laplaciano fraccionario. Nosotros nos concentraremos en el caso Dirichlet para un dominio acotado Ω . En este, y debido a la posibilidad de que existan saltos arbitrariamente largos en el proceso estocástico correspondiente, las tradicionales condiciones de contorno se traducen en condiciones complementarias: es decir, definidas sobre el complemento de Ω , $\Omega^c := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Para ser mas precisos: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suficientemente regular, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente suave y $s \in (0, 1)$, buscamos una u tal que

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Omega^c \end{cases} \quad (3)$$

Nuestro objetivo es desarrollar un análisis de elementos finitos de problemas como éste. Además de ofrecer una demostración de la convergencia de los algoritmos que proponemos para estos problemas, buscamos estimar su eficiencia computacional. Con el propósito de obtener estimaciones de error a priori, es fundamental conocer cuán regulares son las soluciones; este trabajo presenta algunas estimaciones conocidas de regularidad para soluciones del problema mencionado anteriormente en la escala de Sobolev. También estamos interesados en dar evidencia numérica de la precisión de nuestras predicciones teóricas, y asimismo esto requiere una implementación de elementos finitos apropiada. El método de elementos finitos es una de las herramientas numéricas predilectas en la comunidad científica e ingenieril. Cuenta con un fundamento teórico sólido y largamente establecido, principalmente en el caso lineal de ecuaciones de derivadas parciales de segundo orden lineales y *elípticas*. El problema fraccionario de Poisson descrito en (3) comparte algunas características analíticas fundamentales del caso clásico, haciendo manejable, en principio, un tratamiento directo por elementos finitos. Algunas dificultades numéricas -tales como la necesidad de lidiar con integración sobre dominios no acotados y manejar la singularidad del núcleo presente en (1)- parecen ser las principales desventajas que han desalentado un enfoque directo por elementos finitos. Respecto a esto último, aplicando técnicas estándar (tomadas de la teoría del método de elementos de contorno [45]) junto a un tratamiento apropiado de las integrales que involucran el dominio no acotado Ω^c , pueden ser obtenidas soluciones de elementos finitos precisas.

Estado del arte

Antes de continuar con una descripción de la tesis y de sus descripciones específicas, repasamos el estado del arte respecto a la teoría de regularidad para el laplaciano fraccionario y diferentes métodos numéricos para ecuaciones diferenciales fraccionarias tratados en la literatura.

Teoría de regularidad

El estudio de propiedades de mapeo del laplaciano fraccionario y la regularidad de soluciones de problemas tales como (3) se remonta a la década de 1960, con los trabajos de Visik y Èskin (por ejemplo, [55]). Estos autores obtuvieron importantes propiedades de mapeo del laplaciano fraccionario. Más aún, sus resultados implican una estimación de regularidad de Sobolev en caso de que $s \in (0, 1/2)$. Posteriormente, este enfoque pseudo-diferencial también fue analizado por Grubb [26], quien obtuvo estimaciones de regularidad para problemas planteados sobre dominios suaves y $s \in (0, 1)$.

Previamente al trabajo de Grubb, el estudio de regularidad de soluciones para problemas de contorno involucrando al laplaciano fraccionario ya había vuelto a ganar popularidad a consecuencia del trabajo seminal de Cafferelli y Silvestre [13]. Allí, los autores prueban que el laplaciano fraccionario \mathbb{R}^n puede ser considerado como un mapa Dirichlet-a-Neumann para una cierta ecuación local elíptica planteada en \mathbb{R}_+^{n+1} . Esto habilita a realizar análisis vía operadores diferenciales.

Apelando a teoría de potenciales y métodos para operadores integrales, la regularidad Hölder hasta la frontera de soluciones del problema de Dirichlet para el laplaciano fraccionario fue demostrada por Ros-Oton y Serra [43]. Sus estimaciones son válidas para dominios Lipschitz que satisfacen la condición de bola exterior, lo que las hace más apropiadas para un análisis de elementos finitos que las desarrolladas por medio de métodos pseudo-diferenciales. Más aún, estas estimaciones miden en un modo preciso el comportamiento singular de soluciones cerca de la frontera.

Métodos numéricos

En contraste con EDPs elípticas, desarrollos numéricos para problemas que involucran el laplaciano fraccionario en la forma (1), incluso en contextos simplificados, son relativamente recientes. Esto, en parte, está relacionado con

dos desafíos importantes que surgen en su tratamiento numérico: el manejo de núcleos altamente singulares y la necesidad de lidiar con una región de integración no acotada.

Huang Oberman [28] desarrollaron un esquema unidimensional que combina diferencias finitas con una regla de cuadratura en un dominio no acotado; su análisis demuestra que el algoritmo es convergente bajo la condición que la solución sea de clase C^4 . La evidencia numérica provista en este trabajo para términos fuente suaves indica convergencia con orden s , en la norma infinito, con el tamaño de malla tendiendo a cero. Órdenes tan altos como $3 - 2s$ son demostrados en esa contribución para términos fuente singulares que vuelven la solución suave.

D’Elia y Gunzburger [18], en cambio, analizaron un operador de difusión no local que aproxima al laplaciano fraccionario unidimensional. Este trabajo demuestra que, bajo ciertas condiciones, la solución de la ecuación no local converge a la solución de (3) al hacer infinitas las interacciones no locales. La discretización de elementos finitos continuos en este trabajo mostró convergencia con orden $1/2$ en la norma energía. Estos autores también sugirieron que un mejoramiento del algoritmo de resolución, con un orden de convergencia aumentado, requería una consideración explícita de la singularidad de la solución cerca del borde.

Motivados por aplicaciones a mecánica cuántica fraccionaria, algunos esquemas orientados a la resolución de problemas para autovalores para el laplaciano fraccionario han sido introducidos en años recientes. Por una parte, Zoia, Rosso y Kardar [2] proveyeron una versión discretizada de este operador; distintos tipos de condiciones de frontera son justificados apelando dos modelos físicos: partículas saltarinas y resortes elásticos. Por otra parte, en [21] los autores encuentran numéricamente el estado fundamental y primer estado excitado para las ecuaciones de Schrödinger fraccionaria lineal y no lineal. La técnica que emplean está basada en la introducción de un flujo gradiente fraccionario con una normalización discreta, que luego es discretizado usando una regla de cuadratura trapezoidal en el espacio y un método de Euler semi-implícito en el tiempo. Este trabajo reporta la presencia de capas límite en los estados fundamentales de la ecuación de Schrödinger fraccionaria no lineal.

Se han desarrollado otros enfoques hacia difusión, más específicamente, relacionados a la discretización del laplaciano fraccionario espectral (2). Nochetto, Otárola Salgado [42] explotaron la técnica de localización de [12], [13], [50] y analizaron un problema local planteado sobre una cierta extensión ci-

líntrica. Como la variable de interés es una derivada conormal de la función extendida, ellos consideraron elementos finitos de tipo producto tensorial sobre mallas anisotrópicas. El algoritmo numérico propuesto y analizado por estos autores aprovecha el rápido decaimiento de la solución en la variable extendida, lo que permite truncar a un dominio de tamaño modesto. Estimaciones de error son derivadas en una norma H^1 con pesos.

Otro enfoque basado en la descomposición espectral del laplaciano ha sido propuesto en [33], [34]. En estos trabajos, los autores introdujeron una técnica de transferencia matricial para problemas formulados sobre un intervalo. Este método consiste en utilizar como operador espectral la potencia s de una aproximación matricial del laplaciano -típicamente obtenido de un esquema de diferencias finitas-.

La discretización de (2) propuesta por Bonito y Pasciak [9] está basada en la formulación integral de potencias fraccionarias de operadores auto-adjuntos, representando soluciones por medio de integrales de Dunford-Taylor. Este método conduce a discretizar una serie de EDPs elípticas desacopladas, y lleva a estimaciones de error cuasi-óptimas en la norma L^2 .

Esquema de la tesis

Este trabajo analiza aproximaciones por elementos finitos para ciertos problemas que involucran al laplaciano fraccionario (1) sobre dominios acotados. Con este propósito, el Capítulo 1 establece notación y provee información preliminar concerniente al laplaciano fraccionario, espacios de orden fraccionario y formulaciones variacionales de problemas como (3).

Regularidad de soluciones

Un componente importante en el análisis por elementos finitos de problemas tales como (3) es la regularidad de las soluciones. Básicamente, cuanto más regular es una función, mejor puede ser aproximada por un esquema discreto. Como discutiremos en el Capítulo 2, independientemente de la suavidad del dominio, las soluciones de (3) tienen regularidad Sobolev reducida. Para problemas unidimensionales y sobre dominios radiales, la discusión de regularidad de soluciones es resuelta utilizando la autodescomposición explícita de un operador con pesos relacionado con el laplaciano fraccionario. Sin embargo, la situación en dominios arbitrarios multidimensionales es más de-

licada. Describimos estimaciones de regularidad basadas en la regularidad Sobolev del dato. Luego, desarrollamos una teoría de regularidad Hölder-Sobolev; este análisis conduce también a una fina caracterización del comportamiento de soluciones cerca al borde del dominio. Esta caracterización conduce naturalmente a la consideración de ciertos espacios fraccionarios con pesos.

Problema de Dirichlet homogéneo

Teniendo a mano estimaciones de regularidad precisas, en el Capítulo 3 nos ocupamos de un análisis de elementos finitos directo de (3) mediante elementos lagrangianos lineales a trozos. La naturaleza no local del problema bajo consideración se refleja en el hecho de que las normas de Sobolev fraccionarias no son aditivas con respecto a dominios. Por consiguiente, luego de definir un operador de interpolación apropiado y de obtener estimaciones de interpolación locales adecuadas, se debe tomar ciertas precauciones para estimar el error de interpolación global. Para tratar con mallas graduadas, extendemos estimaciones de error conocidas para el operador de interpolación de Scott-Zhang a espacios de Sobolev fraccionarios con pesos. Estas estimaciones son obtenidas introduciendo desigualdades de Poincaré en el marco fraccionario con pesos. Presentamos cotas de error en las normas de energía y L^2 , y experimentos numéricos en dominios unidimensionales.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo recolecta el material preliminar para desarrollar un estudio completo de elementos finitos para problemas que involucran al Laplaciano Fraccionario. Motivamos y definimos este operador así como los espacios de funciones involucrados.

La Sección 1.1 brinda la definición y propiedades básicas del Laplaciano fraccionario como integral singular, que utilizaremos a lo largo de la tesis.

Como el operador que estudiamos nos lleva a la formulación de los conjuntos de Sobolev fraccionarios, en la Sección 1.2 discutimos diversos aspectos de estos espacios. Más aún, examinaremos la formulación débil del Laplaciano fraccionario y la fórmula de integración por partes no-local. Uno de los grandes problemas acarreado por la no localidad del problema es que las seminormas fraccionarias no son aditivas con respecto a dominios. Para lidiar con esto discutiremos una forma de localizar dichas normas.

Finalmente, en la Sección 1.3 introducimos y discutimos algunas propiedades teóricas de una clase de espacios de Sobolev fraccionarios pesados. En esta sección hacemos una distinción entre dominios de una dimensión y dominios multi-dimensionales.

1.1. Laplaciano Fraccionario

Comenzaremos nuestra exposición con la definición y las propiedades más importantes del objeto de estudio más relevante de la tesis, el Laplaciano fraccionario.

1.1.1. Definición del operador Laplaciano Fraccionario

Con la intención de definir el Laplaciano fraccionario, debemos considerar una familia de funciones suficientemente regulares sobre la cual este operador pueda actuar. Primero consideramos, la bien conocida, clase de Schwartz.

$$\mathcal{S} := \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Definición 1.1.1. Sea $s \in (0, 1)$. Definimos el Laplaciano fraccionario de orden s de una función $u \in \mathcal{S}$ como

$$(-\Delta)^s u(x) := C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad (1.1.1)$$

donde

$$C(n, s) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta \right)^{-1}. \quad (1.1.2)$$

es una constante de normalización que justificaremos en la Proposición 1.2.15.

Observación. La constante $C(n, s)$ admite la representación alternativa

$$C(n, s) = \frac{2^{2s} s \Gamma(s + \frac{n}{2})}{\pi^{n/2} \Gamma(1 - s)}. \quad (1.1.3)$$

La constante (1.1.3) aparece naturalmente en la derivación del Laplaciano Fraccionario desde la teoría de semigrupos [51] y puede probarse que coincide con (1.1.2) que es la constante “correcta” para obtener la representación del Laplaciano Fraccionario a través de la transformada de Fourier dada en la Proposición 1.2.15. Sin embargo, la demostración que damos de este hecho en la Proposición 1.2.18 es directa (ver [11]).

Observación. Dada la singularidad del núcleo en cuestión, el lado derecho de (1.1.1) no está bien definido en general. Pero en el caso de $s \in (0, \frac{1}{2})$ no es necesario incluir el valor principal, en efecto para toda $u \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{n+2s}} dy &\leq C \int_{B(x, R)} \frac{|x - y|}{|x - y|^{n+2s}} dy + \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^c(x, R)} \frac{1}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &= C \left(\int_{B(x, R)} \frac{1}{|x - y|^{n+2s-1}} dy + \int_{B^c(x, R)} \frac{1}{|x - y|^{n+2s}} dy \right) \\ &= C \left(\int_0^R \frac{1}{|\rho|^{2s}} d\rho + \int_R^\infty \frac{1}{|\rho|^{2s+1}} d\rho \right) < \infty \end{aligned}$$

donde C es una constante positiva que solo depende de la dimensión y de las normas infinito de u y u' .

Para deshacernos del valor principal en la definición del Laplaciano fraccionario, podemos escribirlo como la integral de un cociente de diferencias pesadas de orden dos.

Proposición 1.1.2. *Sea $s \in (0, 1)$, luego para toda $u \in \mathcal{S}$,*

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) - 2u(x) + u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy.$$

Demostración. La igualdad se obtiene simplemente realizando un cambio de variables estándar. En efecto, reemplazando $z = y - x$ obtenemos:

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= -C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y) - u(x)}{|x-y|^{n+2s}} dy \\ &= -C(n, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz. \end{aligned}$$

Más aún, sustituyendo $\bar{z} = -z$ en la última igualdad, tenemos

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz = P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-\bar{z}) - u(x)}{|\bar{z}|^{n+2s}} d\bar{z}.$$

Por lo tanto, utilizando ambas igualdades,

$$\begin{aligned} 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &\quad + P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &= P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) + u(x-z) - 2u(x)}{|z|^{n+2s}} dz. \end{aligned}$$

En consecuencia, Si renombramos z por y en el esté último renglon, podemos escribir al operador Laplaciano fraccionario de (1.1.1) como

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{C(n, s)}{2} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy.$$

La representación de arriba es útil para remover la singularidad de la integral en el origen. En efecto, para cualquier u suficientemente suave, la expansión de Taylor de orden dos nos dice que

$$\frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} \leq \frac{\|D^2u\|_{L^\infty}}{|y|^{n+2s-2}},$$

siendo esta última expresión integrable en el origen. □

Para concluir con esta sección, mencionaremos una cualidad importante del Laplaciano fraccionario. La cual es que, en algún sentido, vive entre la identidad y el Laplaciano clásico. Para una demostración completa de la siguiente proposición invitamos al lector que mire [19, Capítulo 4].

Proposición 1.1.3. *Para cualquier $u \in \mathcal{S}$, valen los siguientes límites para todo $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} (-\Delta)^s u(x) &= u(x), \\ \lim_{s \rightarrow 1^-} (-\Delta)^s u(x) &= -\Delta u(x). \end{aligned}$$

1.2. Espacio de Sobolev fraccionario

El Laplaciano fraccionario nos lleva a la formulación de un espacio variacional de orden fraccionario de los espacios de Sobolev. En primer lugar, daremos las definiciones de dichos espacios y las propiedades más importantes que serán utilizadas a lo largo de la tesis. En segundo lugar, expondremos la formulación débil para un problema del tipo Dirichlet homogéneo, y para esto será necesario una fórmula de integración por partes para el Laplaciano fraccionario. Finalmente, haremos énfasis en la no-localidad de las normas de estos espacios y veremos una forma de localizarlas.

1.2.1. Definición y propiedades

Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , no necesariamente suave. Para cualquier real $s > 0$ y cualquier $p \in [1, \infty)$, queremos definir el espacio de Sobolev fraccionario $W^{s,p}(\Omega)$. En la literatura, los espacios del tipo Sobolev fraccionario también son conocidos como *espacios de Aronszajn, Gagliardo o Slobodeckij*, por los nombres de quienes los introdujeron, de forma independiente.

Definición 1.2.1. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $s \in (0, 1)$ y $p \in [1, \infty)$. El espacio de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ esta dado por

$$W^{s,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) : |v|_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty\}$$

donde

$$|v|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

representa la seminorma de Aronszajn-Slobodeckij. El espacio $W^{s,p}(\Omega)$ esta provisto de la siguiente norma

$$\|v\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \|v\|_{L^p(\Omega)} + |v|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Los espacios de Sobolev fraccionario de orden mayor a 1 están definidos de la siguiente manera. Sea $s = k + \sigma$, con $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in (0, 1)$. Luego,

$$W^{s,p}(\Omega) := \{v \in W^{k,p}(\Omega) : |\partial^\alpha v| \in W^{\sigma,p} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tal que } |\alpha| = k\},$$

y dotamos a este conjunto con la norma

$$\|v\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha v|_{W^{\sigma,p}(\Omega)}.$$

La completitud de los espacios es un resultado bien conocido (ver, por ejemplo, [6, Sección 7.32])

Proposición 1.2.2. Sea $s > 0$ y $p \in [1, \infty)$, luego $(W^{s,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)})$ es un espacio de Banach.

En lo que sigue, intentaremos darle sentido a las funciones "que se anulan en el borde" de Ω . La primera interpretación es la siguiente.

Definición 1.2.3. Denotamos por $W_0^{s,p}(\Omega)$ a la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma de $W^{s,p}(\Omega)$.

Otra posible interpretación es pensar en aquellas funciones en $W^{s,p}(\Omega)$ cuya extensión por cero sobre Ω^c pertenece a $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Llamamos a este conjunto $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$. La norma para las funciones en este espacio esta dada por

$$\|v\|_{\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)} := \|\tilde{v}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)},$$

donde \tilde{v} es la extensión de v por cero fuera de Ω . Para simplificar la notación siempre que nos referimos a una función en $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$, asumiremos que se extiende por cero sobre Ω^c .

Notemos que, aunque $s \in \mathbb{N}$, la norma en $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ no es la misma que en $W^{s,p}(\Omega)$ puesto que la primera incluye integración sobre el conjunto $\Omega \times \Omega^c$. Sin embargo, vale lo siguiente.

Proposición 1.2.4 (ver [25, Teorema 1.4.2.2]). *Sea Ω un conjunto con borde continuo, luego $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ para todo $s > 0$.*

De forma notable también se puede probar.

Proposición 1.2.5 (ver [25, Teorema 1.4.2.4]). *Sea Ω un abierto, acotado con borde continuo. Luego, para todo $s \in (0, 1/p)$, $W_0^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega)$.*

Habiendo definido los espacios de Sobolev fraccionario, recordaremos algunas de las propiedades básicas que utilizaremos más adelante. La primera de ellas sera una adaptación de la desigualdad de Poincaré para espacios fraccionarios.

Proposición 1.2.6 (Desigualdad de Poincaré I). *Sea Ω un conjunto abierto acotado, $s \in (0, 1)$ y $p \in [1, \infty)$. Para cualquier $v \in W^{s,p}(\Omega)$, escribimos $\bar{v} := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v$. Luego se tiene*

$$\|v - \bar{v}\|_{L^p(\Omega)} \leq c d_\Omega^s |v|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad (1.2.1)$$

con c acotado en terminos de $\frac{d_\Omega}{d_B}$, donde $d_\Omega = \text{diam}(\Omega)$, $d_B = \text{diam}(B)$ y B es la bola mas grande contenida en Ω

Demostración. Aplicando la desigualdad de Hölder si $p > 1$, tenemos

$$\int_\Omega |v - \bar{v}|^p dx = \frac{1}{|\Omega|^p} \int_\Omega \left| \int_\Omega (v(x) - v(y)) dy \right|^p dx \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_\Omega |v(x) - v(y)|^p dy dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega |v - \bar{v}|^p dx \leq \frac{d_\Omega^{n+sp}}{|\Omega|} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy dx.$$

Tomando en cuenta que $\frac{\sigma_{n-1}}{n2^n} d_B^n = |B| \leq |\Omega|$, la cota de (1.2.1) se obtiene con

$$c = \left(\frac{2n^{1/n} d_\Omega}{\sigma_{n-1}^{1/n} d_B} \right)^{n/p}. \quad \square$$

La siguiente es otra variante de la desigualdad, pero esta vez para funciones que se anulan en el complemento de Ω .

Proposición 1.2.7 (Desigualdad de Poincaré II). *Dado Ω un conjunto abierto, acotado, $s \in (0, 1)$ y $p \in [1, \infty)$, existe una constante $c = c(\Omega, n, s, p)$ tal que*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq c|v|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall v \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega).$$

Demostración. Primero observemos que existe una constante $c(n, s, p) > 0$ tal que para todo x en Ω ,

$$c(n, s, p)|\Omega|^{-\frac{sp}{n}} \leq \int_{\Omega^c} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy. \quad (1.2.2)$$

En efecto, llamando

$$\rho := \left(\frac{|\Omega|}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

se sigue, para esta particular elección de ρ , que

$$\begin{aligned} |\Omega^c \cap B_\rho(x)| &= |B_\rho(x)| - |\Omega \cap B_\rho(x)| = |\Omega| - |\Omega \cap B_\rho(x)| \\ &= |\Omega \cap B_\rho(x)^c|. \end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} &= \int_{\Omega^c \cap B_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} + \int_{\Omega^c \cap B_\rho(x)^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &\geq \int_{\Omega^c \cap B_\rho(x)} \frac{dy}{\rho^{n+sp}} + \int_{\Omega^c \cap B_\rho(x)^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &= \frac{|\Omega^c \cap B_\rho(x)|}{\rho^{n+sp}} + \int_{\Omega^c \cap B_\rho(x)^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &= \frac{|\Omega \cap B_\rho(x)^c|}{\rho^{n+sp}} + \int_{\Omega^c \cap B_\rho(x)^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &\geq \int_{\Omega \cap B_\rho(x)^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} + \int_{\Omega^c \cap B_\rho(x)^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &= \int_{B_\rho(x)^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}}. \end{aligned}$$

Y ahora (1.2.2) se sigue usando coordenadas polares centradas en x .

Por otra parte, como $v \equiv 0$ en Ω^c sabemos que $|v(x)|^p = |v(x) - v(y)|^p$ para todo $x \in \Omega, y \in \Omega^c$. Por ello, obtenemos

$$c(n, s, p) |\Omega|^{-\frac{sp}{n}} \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \leq \iint_{\Omega \times \Omega^c} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy,$$

y la desigualdad de Poincaré se deduce inmediatamente. \square

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que la seminorma de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es equivalente a la norma de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ en $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$.

Definición 1.2.8. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por δ a la función distancia al borde de Ω ,

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^n &\rightarrow [0, \infty) \\ \delta(x) &= \delta(x, \partial\Omega). \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Proposición 1.2.9 (Desigualdad de Hardy, ver [25, Teorema 1.4.4.4]). *Sea Ω un dominio acotado con borde Lipschitz. Luego, si $s - \frac{1}{p}$ no es un entero, existe $c = c(\Omega, n, s, p) > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} \frac{|v(x)|^p}{\delta(x)^{sp}} dx \leq c \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \quad \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega). \tag{1.2.4}$$

Como consecuencia de la proposición anterior deducimos dos propiedades importantes.

Corolario 1.2.10. *Si $s \in (0, 1)$ y $s - \frac{1}{p} > 0$, existe una constante $c(\Omega, n, s, p) > 0$ tal que*

$$\|v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Demostración. Sea $v \in C_0^\infty(\Omega)$, luego, como $v = 0$ en Ω^c ,

$$\begin{aligned} |v|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p &= \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy + 2 \iint_{\Omega \times \Omega^c} \frac{|v(x)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \\ &\leq c(n, s, p) \left[|v|_{W^{s,p}(\Omega)}^p + \int_{\Omega} |v(x)|^p \int_{B(x, \delta(x))^c} \frac{1}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right] \\ &= c(n, s, p) \left[|v|_{W^{s,p}(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \frac{|v(x)|^p}{\delta(x)^{sp}} dx \right]. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hardy (1.2.4), la cota es obtenida. \square

Corolario 1.2.11. *Sea Ω un abierto, acotado con borde Lipschitz. Si tenemos que $s - 1/p \notin \mathbb{N}$, entonces*

$$\widetilde{W}^{s,p}(\Omega) = W_0^{s,p}(\Omega).$$

Más aún, si $0 < s < 1/p$,

$$\widetilde{W}^{s,p}(\Omega) = W_0^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega).$$

Demostración. Del corolario anterior, sabemos que las normas en $W_0^{s,p}(\Omega)$ y $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ son equivalentes si $s - 1/p \notin \mathbb{N}$. Como $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en ambos espacios (recordar Definición (1.2.3) y Proposición (1.2.4)) obtenemos la primer igualdad.

La segunda, se deduce fácilmente combinando lo anterior con la Proposición 1.2.5 □

Los espacios de Sobolev de orden negativo son definidos por dualidad.

Definición 1.2.12. Sea $s < 0$, $p \in (1, \infty)$ y sea q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Denotamos por $W^{s,p}(\Omega)$ al dual de $\widetilde{W}^{-s,q}(\Omega)$.

Para finalizar esta subsección, comentaremos sobre como los espacios de Sobolev fraccionario, que hemos definido, son consistentes con la definición clásica de espacios de Sobolev de orden entero.

Proposición 1.2.13. *Sea $v \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Luego (ver [10]),*

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1 - s) \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p = C(n, p) \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p.$$

Por otro lado, si existe $s_0 > 0$ tal que $v \in W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)$, luego (ver [35])

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \|v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p = C(n, p) \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

1.2.2. Los espacios $H^s(\Omega)$ y $\widetilde{H}^s(\Omega)$

Definición 1.2.14. El espacio $W^{s,2}(\Omega)$ suele denominarse $H^s(\Omega)$, donde la H se elije para denotar que se trata de un Hilbert. Análogamente se define

$$\widetilde{H}^s(\Omega) := \widetilde{W}^{s,2}(\Omega), \quad H_0^s(\Omega) := W_0^{s,p}(\Omega).$$

Cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$ es posible definir H^s a través de la transformada de Fourier que denotamos aquí con el símbolo usual $\hat{\cdot}$ o bien con \mathcal{F} ¹.

En efecto, consideremos:

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}. \quad (1.2.5)$$

Observemos que la expresión tiene sentido para todo $s \geq 0$ ya que la transformada $\hat{\cdot}$, es una isometría en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ver p. ej. [49], [48], para esta propiedad y otras de la transformada de Fourier).

El espíritu de la definición es relacionar el decaimiento de la transformada con la regularidad de la función. De forma notable, esta definición de $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ es equivalente a la definición de $H^s(\mathbb{R}^n)$ con las seminormas de Gagliardo como vemos en la Proposición 1.2.16. Sin embargo antes de ver esa demostración notemos que el Laplaciano Fraccionario puede verse como un operador pseudo-diferencial de símbolo $|\xi|^{2s}$. En efecto.

Proposición 1.2.15. *Sea $s \in (0, 1)$ y $(-\Delta)^s : \mathcal{S} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ el Laplaciano fraccionario dado por (1.1.1) con la constante $C(n, s)$ elegida como en (1.1.2). Entonces, para toda $u \in \mathcal{S}$,*

$$(-\Delta)^s u = \widehat{|\xi|^{2s} \hat{u}} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.6)$$

Demostración. Observemos ante todo que el miembro derecho de (1.2.6) está bien definido porque $\hat{\cdot}$ es una biyección en \mathcal{S} y luego $|\xi|^{2s}(\hat{u}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ahora bien, por la Proposición 1.1.2

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy,$$

donde $C(n, s)$ está dado por (1.1.2). Definimos

$$h(x, y) := |u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|$$

Notemos que, separando \mathbb{R}^n en B_1 y su complemento tenemos:

$$\frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{n+2s}} =$$

¹Análogamente para la inversa de la transformada usamos $\check{\cdot}$ o bien con \mathcal{F}^{-1}

$$\begin{aligned}
& 4\left(\chi_{B_1}(y)|y|^{-n-2s}h(x,y) + \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1}(y)|y|^{-n-2s}h(x,y)\right) \\
& \leq 4\left(\chi_{B_1}(y)|y|^{2-n-2s} \sup_{B_1(x)} |D^2u| + \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1}(y)|y|^{-n-2s}h(x,y)\right) \\
& \leq C\left(\chi_{B_1}(y)|y|^{2-n-2s}(1+|x|^{n+1})^{-1} + \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1}(y)|y|^{-n-2s}h(x,y)\right)
\end{aligned}$$

En la última expresión podemos ver claramente que el primer sumando pertenece a $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Veamos que el segundo sumando también es integrable. Solo basta con probar que $\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1}(y)|y|^{-n-2s}|u(x+y)|$ es integrable, los demás son análogos. Como es una función positiva es suficiente verificar que las integrales iteradas existen y son finitas. Por lo tanto integramos primero con respecto a x .

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1}(y)|y|^{-n-2s}|u(x+y)|dx \right] dy = \\
& \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1}(y)|y|^{-n-2s}dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(z)|dz \right)
\end{aligned}$$

Luego ambas integrales son finitas y obtenemos lo que queremos. Por Fubini podemos intercambiar la integral en y con la transformada de Fourier en x . Por lo tanto, usando propiedades elementales de la transformada tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x((-\Delta)^s u)(\xi) &= -\frac{1}{2} C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{F}_x(u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))}{|y|^{n+2s}} dy = \\
&= -\frac{1}{2} C(n, s) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\xi \cdot y} + e^{-i\xi \cdot y} - 2}{|y|^{n+2s}} dy \right] \mathcal{F}u(\xi) \\
&= C(n, s) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy \right] \mathcal{F}u(\xi). \tag{1.2.7}
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = C(n, s)^{-1} |\xi|^{2s}, \tag{1.2.8}$$

lo cual terminaría la demostración.

Para probar (1.2.8), consideremos $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$\mathcal{I}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy.$$

Notemos que \mathcal{I} es invariante por rotaciones. En efecto, esto es obvio si $n = 1$ por la paridad del coseno. Para $n \geq 2$ consideramos una rotación R cualquiera y tenemos, usando la sustitución $\tilde{y} = R^T y$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(R\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(R\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot R^T y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot \tilde{y})}{|\tilde{y}|^{n+2s}} d\tilde{y} = \mathcal{I}(\xi), \end{aligned}$$

ya que R es un movimiento rígido ($\det(R) = 1$ y $|Ry| = |y|$). En particular, considerando la rotación que manda ξ en $|\xi|e_1$, se ve que

$$\mathcal{I}(\xi) = \mathcal{I}(|\xi|e_1). \quad (1.2.9)$$

Gracias a (1.2.9) y a la sustitución $\zeta = |\xi|y$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\xi) &= \mathcal{I}(|\xi|e_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(|\xi|y_1)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{1}{|\xi|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta/|\xi||^{n+2s}} d\zeta = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta \right) |\xi|^{2s}. \end{aligned}$$

Observando que $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta$ es positivo y finito ² y usando (1.1.2) obtenemos (1.2.8). \square

²En efecto, si $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta|^{n+2s}} \leq \frac{|\zeta_1|^2}{|\zeta|^{n+2s}} \leq \frac{1}{|\zeta|^{n-2+2s}}$$

cerca de $\zeta = 0$ (para la primer desigualdad multiplicamos y dividimos por $1 + \cos \zeta_1$ y usamos el hecho de que $\sin(x)^2 \leq x^2$ y la segunda es obvia ya que $|\zeta_1| \leq |\zeta|$). En consecuencia,

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta < \infty.$$

Ahora podemos ver que la definición dada por la seminorma de Gagliardo coincide con la dada por la transformada de Fourier.

Proposición 1.2.16. *Para todo $s \in (0, 1)$, el espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$ definido a través de la seminorma de Gagliardo coincide con $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$. En particular, para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$*

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = 2C(n, s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

donde $C(n, s)$ está dada por (1.1.2).

Demostración. Para $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, consideramos el cambio de variables $z = x - y$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx \right) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(z + y) - u(y)|^2}{|z|^{n+2s}} dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{u(z + y) - u(y)}{|z|^{n/2+s}} \right|^2 dy \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{n/2+s}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathcal{F} \left(\frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{n/2+s}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dz, \end{aligned}$$

en donde la última igualdad se sigue de la identidad de Plancherel. La demostración finaliza usando (1.2.8) del siguiente modo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathcal{F} \left(\frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{n/2+s}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dz &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\xi \cdot z} - 1|^2}{|z|^{n+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 - \cos \xi \cdot z)}{|z|^{n+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 dz d\xi = 2C(n, s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

□

Observemos que ahora podemos probar la siguiente relación entre el operador $(-\Delta)^s$ y la seminorma fraccionaria.

Proposición 1.2.17. *Para todo $s \in (0, 1)$ y $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, se tiene*

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = 2C(n, s)^{-1} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Demostración. Gracias a las Proposiciones 1.2.15 y 1.2.16, tenemos

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|\mathcal{F}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\xi|^s \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \frac{1}{2}C(n, s)[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

que es lo que se desea probar. \square

Proposición 1.2.18. *Las expresiones para $C(n, s)$ dadas por (1.1.3) y (1.1.2) coinciden.*

Demostración. Basta ver que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta = \frac{\pi^{n/2}\Gamma(1-s)}{2^{2s}s\Gamma(s+\frac{n}{2})}. \quad (1.2.10)$$

Nuestro primer propósito es probar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\pi t)}{t^{1+2s}} dt = \frac{\pi^{2s+\frac{1}{2}}\Gamma(1-s)}{2s\Gamma(s+\frac{1}{2})}. \quad (1.2.11)$$

Usando convergencia mayorada bastaría estudiar

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\pi t)}{t^{1+2s}} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\pi t)}{(t^2 + a^2)^{s+\frac{1}{2}}} dt.$$

Vamos a utilizar la siguiente identidad (ver tabla de la transformada coseno [39, Pag. 6])

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi t)}{(t^2 + a^2)^{s+\frac{1}{2}}} dt = \frac{\pi^{s+\frac{1}{2}}}{a^s \Gamma(s+\frac{1}{2})} K_s(2\pi a), \quad (1.2.12)$$

siendo K_s función *modificada de Bessel de segunda especie*³. Puede escribirse

$$K_s(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\pi s)} \left(I_{-s}(z) - I_s(z) \right), \quad (1.2.13)$$

siendo $I_s(z)$ función *modificada de Bessel de primera especie*, definida como

$$I_s(z) := e^{-\frac{i\pi s}{2}} J_s(e^{\frac{i\pi}{2}} z).$$

³Las propiedades y definiciones de estas funciones pueden verse en [3].

en términos de $J_s(z)$, la función de Bessel de primera especie

$$J_s(z) := \frac{z^s}{2^s} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(s+k+1)}.$$

Usando el asintótico

$$J_s(z) = \frac{z^s}{2^s \Gamma(1+s)} + \mathcal{O}(|z|^{2+s})$$

válido para $|z| \rightarrow 0$. Tenemos que

$$I_s(z) = e^{-\frac{i\pi s}{2}} \left(\frac{e^{\frac{i\pi s}{2}} z^s}{2^s \Gamma(1+s)} + \mathcal{O}(|z|^{2+s}) \right) = \frac{z^s}{2^s \Gamma(1+s)} + \mathcal{O}(|z|^{2+s}),$$

para $|z| \rightarrow 0$. Usando esta identidad y (1.2.13)

$$K_s(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\pi s)} \left(\frac{z^{-s}}{2^{-s} \Gamma(1-s)} - \frac{z^s}{2^s \Gamma(1+s)} + \mathcal{O}(|z|^{2-s}) \right),$$

por lo que usando las conocidas propiedades de la función Γ

$$\Gamma(1-s) \Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

y

$$\Gamma(1+s) = s \Gamma(s),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} K_s(z) &= \frac{\Gamma(1-s) \Gamma(s)}{2} \left(\frac{z^{-s}}{2^{-s} \Gamma(1-s)} - \frac{z^s}{2^s \Gamma(1+s)} + \mathcal{O}(|z|^{2-s}) \right) \\ &= \frac{\Gamma(s) z^{-s}}{2^{1-s}} - \frac{\Gamma(1-s) z^s}{2^{1+s} s} + \mathcal{O}(|z|^{2-s}), \end{aligned}$$

para $|z| \rightarrow 0$. Por lo que volviendo a (1.2.12)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi t)}{(t^2 + a^2)^{s+\frac{1}{2}}} dt &= \frac{\pi^{s+\frac{1}{2}}}{a^s \Gamma(s+\frac{1}{2})} \left[\frac{\Gamma(s)}{2\pi^s a^s} - \frac{\Gamma(1-s) \pi^s a^s}{2s} + \mathcal{O}(a^{2-s}) \right] \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(s)}{2a^{2s} \Gamma(s+\frac{1}{2})} - \frac{\pi^{2s+\frac{1}{2}} \Gamma(1-s)}{2s \Gamma(s+\frac{1}{2})} + \mathcal{O}(a^{2-2s}). \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

para $0 < a \sim 0$. Por otro lado [39, Pag. 10],

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{s+\frac{1}{2}}} &= \frac{a^{-2s}}{2} B\left(\frac{1}{2}, s\right) {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 1-s, \frac{1}{2}; 0\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(s)}{2a^{2s} \Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)}, \end{aligned}$$

siendo ${}_1F_2$ función hipergeométrica generalizada [39, pag. 211], y donde hemos usado para la última igualdad que para todo $b, c, d > 0$,

$${}_1F_2(b; c, d; 0) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} = 1$$

y que la función Beta verifica

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (1.2.15)$$

Teniendo en cuenta que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$, y usando (1.2.14), tenemos para $0 < a \sim 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\pi t)}{(t^2 + a^2)^{s+\frac{1}{2}}} dt = \frac{\pi^{2s+\frac{1}{2}} \Gamma(1-s)}{2s\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} + \mathcal{O}(a^{2-2s}).$$

Tomando límite $a \rightarrow 0$ tenemos (convergencia mayorada)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\pi t)}{t^{1+2s}} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\pi t)}{(t^2 + a^2)^{s+\frac{1}{2}}} dt = \frac{\pi^{2s+\frac{1}{2}} \Gamma(1-s)}{2s\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}.$$

Lo que prueba (1.2.11). Por otro lado [3]

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)} = B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2} + s\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{\frac{n-3}{2}}}{(1+\tau)^{\frac{n}{2}+s}} d\tau. \quad (1.2.16)$$

Como la medida $(N-1)$ -dimensional de la esfera unitaria en \mathbb{R}^N es $\frac{N\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}$, resulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dY}{(1+|Y|^2)^{\frac{N+1+2s}{2}}} = \frac{N\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{N-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{N+1+2s}{2}}} d\rho.$$

En particular tomando $N := n - 1$ y usando el cambio de variable $\rho^2 =: \tau$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\eta}{(1 + |\eta|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} &= \frac{(n-1) \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1 + \rho^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\rho \\ &= \frac{(n-1) \pi^{\frac{n-1}{2}}}{2 \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{\frac{n-3}{2}}}{(1 + \tau)^{\frac{n+2s}{2}}} d\tau. \end{aligned}$$

Comparando con (1.2.16), concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\eta}{(1 + |\eta|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} &= \frac{(n-1) \pi^{\frac{n-1}{2}}}{2 \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}. \end{aligned}$$

Cambiando variables $\eta := |\omega_1|^{-1}(\omega_2, \dots, \omega_n)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi\omega_1)}{|\omega|^{n+2s}} d\omega &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1 - \cos(2\pi\omega_1)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\omega_2 \dots d\omega_n \right) d\omega_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1 - \cos(2\pi\omega_1)}{|\omega_1|^{1+2s} (1 + |\eta|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\eta \right) d\omega_1 \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(2\pi\omega_1)}{|\omega_1|^{1+2s}} d\omega_1 \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\pi t)}{t^{1+2s}} dt. \end{aligned}$$

Recordando (1.2.11)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi\omega_1)}{|\omega|^{n+2s}} d\omega &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)} \cdot \frac{\pi^{2s+\frac{1}{2}} \Gamma(1-s)}{2s\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}+2s} \Gamma(1-s)}{s \Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}. \end{aligned}$$

Finalmente, cambiando variables $\tilde{\omega} = 2\pi\omega$ en la integral de la izquierda se obtiene (1.2.10). □

Continuemos esta disertación dotando a los espacios $H^s(\Omega)$ de un producto interno acorde.

Proposición 1.2.19. *Sea Ω un abierto. Definimos la forma bilineal $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s(\Omega)}$,*

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(y)dx, \quad (1.2.17)$$

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)} = \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dydx. \quad (1.2.18)$$

Luego el espacio $H^s(\Omega)$, provisto del producto interno dado por la formula $(u, v) \rightarrow (u, v)_{L^2(\Omega)} + \langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)}$ es un espacio de Hilbert.

La proposición anterior también se aplica para el espacio $\tilde{H}^s(\Omega)$. Recordar que la norma en este espacio es la de $H^s(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto sobre este conjunto la formula bilineal $\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ queda de la siguiente manera

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)} + 2 \int_{\Omega} u(x)v(x) \int_{\Omega^c} \frac{1}{|x - y|^{n+2s}} dydx, \quad u, v \in \tilde{H}^s(\Omega)$$

Luego, el producto interno en $\tilde{H}^s(\Omega)$ es la suma del de $H^s(\Omega)$ mas un producto interno pesado de $L^2(\Omega)$. Por conveniencia, vamos a fijar la siguiente notación para este peso.

Definición 1.2.20. Dado un abierto Ω arbitrario y $s \in (0, 1)$, denotamos por $\omega_{\Omega}^s : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ a la función dada por

$$\omega_{\Omega}^s(x) = \int_{\Omega^c} \frac{1}{|x - y|^{n+2s}} dy. \quad (1.2.19)$$

Rememorando la función δ definida en (1.2.8). Una cota superior para ω_{Ω}^s es obtenida fácilmente integrando en coordenadas polares. Más aún, si $\partial\Omega$ es Lipschitz continuo, entonces el orden de tal cota (con respecto a δ) es el siguiente

$$0 < \frac{C}{\delta(x)^{2s}} \leq \omega_{\Omega}^s(x) \leq \frac{\sigma_{n-1}}{2s\delta(x)^{2s}} \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.2.20)$$

Donde, σ_{n-1} denota la medida de la esfera $(n-1)$ -dimensional y $C > 0$ es una constante que solo depende de Ω . Para la cota por abajo de ω_Ω^s mirar [25, Formula 1.3.2.12]

En lo que sigue, estableceremos la versión no local de la formula de integración por partes para el Laplaciano fraccionario. La cual utilizaremos para la formulación débil del problema del laplaciano fraccionario con condiciones de Dirchlet homogéneo. Con este propósito, primero debemos definir *una derivada normal no local*.

Definición 1.2.21. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y v una función suficientemente suave sobre todo \mathbb{R}^n , luego la derivada no local de v con respecto a Ω es el operador $\mathcal{N}_s v : \overline{\Omega}^c \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{N}_s v(x) = C(n, s) \int_{\Omega} \frac{v(x) - v(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy.$$

Notar la dependencia de la derivada no local respecto del dominio Ω . Veamos la buena definición de \mathcal{N}_s para funciones en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. En efecto, tomamos $x \in \overline{\Omega}^c$ como x no pertenece al borde de Ω existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset \overline{\Omega}^c$. Gracias a que v esta acotada y al teorema de cambio de variables tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^{n+2s}} dy &\leq 2 \int_{\Omega} \frac{\|v\|_{L^\infty}}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &\leq 2\|v\|_{L^\infty} \int_{B_\delta^c(x)} \frac{1}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &\leq 2\|v\|_{L^\infty} \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\rho^{1+2s}} < \infty. \end{aligned}$$

La formula de integración por partes para el Laplaciano fraccionario es la siguiente.

Proposición 1.2.22. Sean $u, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suficientemente suaves, luego

$$\begin{aligned} \frac{C(n, s)}{2} \iint_Q \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ = \int_{\Omega} v(x) (-\Delta)^s u(x) dx + \int_{\Omega^c} v(x) \mathcal{N}_s u(x) dx, \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

donde $Q = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus (\Omega^c \times \Omega^c)$.

Demostración. Asumiendo suficiente regularidad sobre las funciones u y v podemos escribir la integral sobre Q como sigue

$$\begin{aligned} \iint_Q \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &\quad - \int_{\Omega^c} \int_{\Omega^c} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy. \end{aligned}$$

luego, distribuyendo ambas integrales y aprovechando la simetría del módulo obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_Q \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega^c} v(x) \int_{\Omega^c} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} dy dx. \end{aligned} \tag{1.2.22}$$

Ahora bien, para el segundo integrando del lado derecho escribimos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^c} v(x) \int_{\Omega^c} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx &= \int_{\Omega^c} v(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy - \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \right) dx \\ &= \int_{\Omega^c} v(x) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx - \int_{\Omega^c} v(x) \int_{\Omega} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy dx. \end{aligned}$$

Observar que las integrales internas de ambos sumandos son el laplaciano fraccionario y la derivada normal respectivamente salvo la constante de normalización. Por lo tanto, reemplazando esto último en (1.2.22) y multiplicando por $\frac{C(n,s)}{2}$ de ambos lados obtenemos lo que estamos buscando. \square

En la proposición anterior nosotros asumimos que u, v son funciones suficientemente suaves. Sin embargo, como $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $\tilde{H}^s(\Omega)$ y la doble integral en (1.2.21) es una constante multiplicada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ en $\tilde{H}^s(\Omega)$ podemos extender (1.2.21) a este ultimo espacio:

$$\frac{C(n,s)}{2} \iint_Q \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_Q v(x) (-\Delta)^s u(x) \quad u, v \in \tilde{H}^s(\Omega). \tag{1.2.23}$$

1.2.3. Formulación débil

En esta parte, mostraremos como escribir la formulación débil para problemas que involucran el Laplaciano fraccionario. De ahora en adelante asumiremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado. Siempre que la regularidad de Ω sea requerida, lo mencionaremos explícitamente. Por simplicidad, nos concentraremos en un problema de Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Omega^c \end{cases} \quad (1.2.24)$$

donde $(-\Delta)^s u$ denota el operador definido en (1.1.1) y $f \in H^{-s}(\Omega)$ (recordar Definición 1.2.12). Al estar buscando una función que se anula en Ω^c y la seminorma de $H^s(\mathbb{R}^n)$ es equivalente a la norma de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sobre $\tilde{H}^s(\Omega)$ (Proposición 1.2.7). Podemos considerar el siguiente espacio variacional

$$(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}) := \left(\tilde{H}^s(\Omega), \sqrt{\frac{C(n,s)}{2}} |\cdot|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \right),$$

Donde $C(n,s)$ es la constante definida en (1.1.3). \mathbb{V} es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{V}} := \frac{C(n,s)}{2} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy, \quad u, v \in \mathbb{V}. \quad (1.2.25)$$

Observar que la integración es solo sobre $Q = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus (\Omega^c \times \Omega^c)$.

Las soluciones débiles de (1.2.24) están definidas multiplicando por una función test y aplicando la formula de integración por partes (1.2.23). Luego utilizando la notación que acabamos de fijar, la formulación débil de este problemas es:

$$\text{Hallar } u \in \mathbb{V} \text{ tal que } \langle u, v \rangle_{\mathbb{V}} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in \mathbb{V}. \quad (1.2.26)$$

Aplicando el teorema de Lax-Milgram podemos probar que el problema esta bien puesto. La coercividad es inmediata, mientras la continuidad se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Proposición 1.2.23. *EL problema (1.2.26) esta bien puesto: existe una única solución $u \in \mathbb{V}$, y el operador solución $f \rightarrow u$ es continuo (con constante de continuidad igual a 1):*

$$\|v\|_{\mathbb{V}} \leq \|f\|_{H^{-s}(\Omega)}.$$

1.2.4. Localización de las normas fraccionarias

Como mostraremos en el capítulo 3, cuando queramos computar soluciones discretas con el método de elementos finitos, necesitaremos calcular la matriz de rigidez. La cual en sus entradas tiene los productos internos entre cualquier par de funciones que formen parte de la base nodal. La no localidad implica que, independientemente de la distancia entre los soportes de las funciones nodales, sus productos internos son no nulo. En efecto, asumamos que ϕ_i y ϕ_j son dos funciones no negativas tales que $\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$, por lo tanto

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\mathbb{V}} = -2C(n, s) \iint_{\text{supp}(\phi_i) \times \text{supp}(\phi_j)} \frac{\phi_i(x)\phi_j(y)}{|x-y|^{n+2s}} dydx < 0.$$

Esto significa que la matriz de rigidez esta llena, lo cual afecta a la eficiencia del algoritmo. Puesto que debemos calcular muchos mas coeficientes para completar la matriz. El segundo inconveniente que afrontaremos por la no localidad, es que las normas no son aditivas con respecto a descomposición de dominios. Es decir, si tenemos que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, con $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, tenemos entonces

$$|v|_{H^s(\Omega)}^2 = |v|_{H^s(\Omega_1)}^2 + |v|_{H^s(\Omega_2)}^2 + 2 \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx. \quad (1.2.27)$$

Si no se toma otra hipótesis sobre v , no es posible acotar la integral sobre $\Omega_1 \times \Omega_2$ en términos de las normas en Ω_1, Ω_2 . Esto implica que, siempre que calculemos el error (o interpolación) de estimación no va a ser posible sumar los errores en cada componente. Para solucionar este impedimento proponemos una forma de localizar dicha norma.

Proposición 1.2.24. *Sea $s \in (0, 1)$ y Ω un dominio acotado. Supongamos que existe una descomposición finita $\overline{\Omega} = \bigcup_i \overline{\Omega}_i$, donde los sub-dominios Ω_i son abiertos y disjuntos dos a dos. Luego, para todo $v \in H^s(\Omega)$ se tiene que*

$$|v|_{H^s(\Omega)}^2 \leq \sum_i \left[\iint_{\Omega_i \times S_i} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dydx + \frac{2\sigma_{n-1}}{s\delta_i^{2s}} \|v\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right], \quad (1.2.28)$$

donde

$$S_i := \bigcup_{j: \overline{\Omega}_j \cap \overline{\Omega}_i \neq \emptyset} \Omega_j,$$

$\delta_i = d(\Omega_i, \Omega \setminus S_i)$ y σ_{n-1} denota la medida de la esfera $(n-1)$ -dimensional.

Demostración. Tomando un elemento Ω_i de la partición, definimos $D_i = \Omega \setminus S_i$. Tenemos

$$|v|_{H^s(\Omega)}^2 \leq \sum_i \left[\iint_{\Omega_i \times S_i} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx + \iint_{\Omega_i \times D_i} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \right].$$

Debemos acotar la integral del lado derecho,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_i \times D_i} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx &\leq 2 \left[\int_{\Omega_i} |v(x)|^2 \int_{D_i} |x - y|^{-n-2s} dy dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{D_i} |v(y)|^2 \int_{\Omega_i} |x - y|^{-n-2s} dx dy \right] \\ &=: J_{i,1} + J_{i,2}. \end{aligned}$$

Vamos ahora a probar que $\sum_i J_{i,1} = \sum_i J_{i,2}$. En efecto, escribimos

$$\begin{aligned} \sum_i J_{i,2} &= \sum_i \int_{\Omega} \chi_{D_i}(y) |v(y)|^2 \int_{\Omega_i} |x - y|^{-n-2s} dx dy \\ &= \int_{\Omega} |v(y)|^2 \left(\sum_i \chi_{D_i}(y) \int_{\Omega_i} |x - y|^{-n-2s} dx \right) dy = \int_{\Omega} |v(y)|^2 f(y) dy, \end{aligned}$$

donde $f(y) = \sum_i \chi_{D_i}(y) \int_{\Omega_i} |x - y|^{-n-2s} dx$. Luego, escribimos la integral sobre Ω como una suma de integrales sobre los dominios Ω_j . Observar que, si $y \in \Omega_j$, tenemos

$$\chi_{D_i}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset \text{ (i.e., si } \Omega_i \subset D_j), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, para $y \in \Omega_j$,

$$f(y) = \sum_i \chi_{D_i}(y) \int_{\Omega_i} |x - y|^{-n-2s} dx = \int_{D_j} |x - y|^{-n-2s} dx,$$

y por esto

$$\sum_i J_{i,2} = \sum_j \int_{\Omega_j} |v(y)|^2 \int_{D_j} |x - y|^{-n-2s} dx dy = \sum_j J_{j,1}.$$

Hasta ahora, hemos probado que

$$|v|_{H^s(\Omega)}^2 \leq \sum_i \left[\iint_{\Omega_i \times S_i} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx + 4J_{i,1} \right].$$

Finalmente, $J_{i,1}$ es fácilmente acotado notando que $D_i \subset \Omega \setminus B(x, \delta_i)$ para todo $x \in \Omega_i$ e integrando en coordenadas polares:

$$J_{i,1} \leq \sigma_{n-1} \int_{\Omega_i} |v(x)|^2 \int_{\delta_i}^{\infty} \rho^{-1-2s} d\rho dx = \frac{\sigma_{n-1}}{2s\delta_i^{2s}} \|v\|_{L^2(\Omega_i)}^2.$$

Y esto completa la demostración. \square

Observación 1.2.25. Como indica la proposición anterior, no asumimos ningún tipo de regularidad en los elementos de la partición de Ω . De hecho, esto está oculto en la variable δ_i . Con vistas a aplicar este resultado en el contexto de aproximación por elementos finitos deberemos relacionar la variable δ_i con el diámetro de Ω_i . Por lo tanto, quasi-uniformidad local será asumida.

1.3. Espacios de Sobolev fraccionarios pesados

Los espacios de Sobolev pesados son una herramienta muy usual para describir soluciones singulares. Caracterizar la regularidad de una solución en términos de un espacio pesado nos da mayor información sobre el comportamiento de las mismas. Los pesos que utilizaremos aquí serán potencias de la distancia al borde de Ω , y los espacios que estos inducen nos darán una caracterización precisa del comportamiento de las soluciones de (1.2.24).

1.3.1. Espacios en un intervalo

Para empezar, veremos el caso unidimensional, en el cual Ω es un intervalo. Más aún, a lo largo de esta subsección supondremos que $\Omega = (-1, 1)$ ya que resultados para intervalos arbitrarios se obtienen aplicando transformaciones afines. La teoría que comentaremos aquí, será utilizada para obtener información sobre la regularidad de soluciones de un problema del tipo Dirichlet para el Laplaciano fraccionario unidimensional.

En el intervalo $(-1, 1)$ la función distancia (1.2.3) toma la siguiente forma $\delta(x) = \min\{x + 1, 1 - x\}$. Nosotros utilizaremos el siguiente peso equivalente

$$\omega(x) = (1 - x^2), \quad (1.3.1)$$

y como primer paso, definiremos el espacio L^2 pesado,

$$L_s^2(-1, 1) := \left\{ \phi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-1}^1 |\phi(x)|^2 \omega^s(x) dx < \infty \right\}, \quad (1.3.2)$$

junto con el producto interno natural

$$(\phi, \psi)_{(-1,1)} := \int_{-1}^1 \phi(x)\psi(x)\omega^s(x)dx,$$

y su norma asociada. Este espacio es un espacio de Hilbert, ahora introduciremos una familia de funciones muy importantes al lo largo de la tesis.

Definición 1.3.1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, la familia de polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(\alpha)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ está definida por recurrencia de la siguiente manera

$$\begin{aligned} C_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \\ C_1^{(\alpha)}(x) &= 2\alpha x, \\ C_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{n} \left[2x(n + \alpha - 1)C_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + 2\alpha - 2)C_{n-2}^{(\alpha)}(x) \right]. \end{aligned}$$

Lema 1.3.2 ([3, Capitulo 22]). *Dado $s \in (0, 1)$, el conjunto de los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(s+1/2)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ conforma una base ortogonal de $L_s^2(-1, 1)$. Para simplificar, notaremos*

$$\tilde{C}_j^{(s+1/2)}(x) := \frac{C_j^{(s+1/2)}(x)}{\|C_j^{(s+1/2)}\|_{L_s^2(-1,1)}}$$

para los polinomios normalizados.

En vistas del lema anterior, dada una función $v \in L_s^2(-1, 1)$ podemos considerar la expansión

$$v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \tilde{C}_j^{(s+1/2)}(x), \quad (1.3.3)$$

donde los v_j son los coeficientes de Gegenbauer y están definidos por

$$v_j := \int_{-1}^1 v(x) \tilde{C}_j^{(s+1/2)}(x) \omega^s(x) dx. \quad (1.3.4)$$

La siguiente proposición relaciona la suavidad de una función y el decaimiento de sus coeficientes [5, Ver p. ej. Sección 4] .

Proposición 1.3.3. *Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $v \in C^k[-1, 1]$ tal que para cierta descomposición de $[-1, 1] = \bigcup_{i=1}^n [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ($-1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = 1$) y para ciertas funciones $\tilde{v}_i \in C^{k+2}([\alpha_i, \alpha_{i+1}])$ tenemos que $v(x) = \tilde{v}_i(x)$ para todo $x \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ y $1 \leq i \leq n$. Luego los coeficientes de Gegenbauer v_i en la ecuación (1.3.4) son cantidades de orden $O(j^{-(k+2)})$ cuando $j \rightarrow \infty$.*

$$|v_j| < C j^{-(k+2)}$$

para cierta constante que depende de v y de k .

Como consecuencia del decaimiento de los coeficientes de Gegenbauer desembarcamos en una definición natural de la clase de espacios de Sobolev pesados.

Definición 1.3.4. Sean $r, s \in \mathbb{R}, r \geq 0, s > -1/2$ y, para $v \in L_s^2(-1, 1)$ sean v_j sus correspondientes coeficientes de Gegenbauer (1.3.4). Definimos el s -espacio de Sobolev pesado de orden r como,

$$H_s^r(-1, 1) := \left\{ v \in L_s^2(-1, 1) : \sum_{j=0}^{\infty} (1 + j^2)^r |v_j|^2 < \infty \right\}.$$

Naturalmente, tenemos el siguiente lema.

Lema 1.3.5. *Sea $r, s \in \mathbb{R}, r \geq 0, s > -1/2$. Luego el espacio $H_s^r(-1, 1)$ junto con el producto interno $\langle v, w \rangle_s^r = \sum_{j=0}^{\infty} v_j w_j (1 + j^2)^r$ y su norma asociada*

$$\|v\|_{H_s^r(-1, 1)} := \sum_{j=0}^{\infty} (1 + j^2)^r |v_j|^2$$

es un espacio de Hilbert.

Demostración. La buena definición del producto interno es inmediata de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para probar que $H_s^r(-1, 1)$ es completo, tomamos $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Dado ε existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_n - v_k\| < \varepsilon$ para $n, k \geq N(\varepsilon)$. Por lo tanto tenemos,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1 + j^2)^r |v_{j,n} - v_{j,k}|^2 < \varepsilon \quad (1.3.5)$$

en particular, fijando $j \in \mathbb{N}$ y $n, k \geq N(\varepsilon)$

$$|v_{j,n} - v_{j,k}|^2 < \varepsilon$$

y como \mathbb{R} es completo, existe $v_j \in \mathbb{R}$ tal que $v_{j,n} \rightarrow v_j$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si hacemos tender $k \rightarrow \infty$ en (1.3.5) obtenemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1 + j^2)^r |v_{j,n} - v_j|^2 < \varepsilon$$

para todo $n \geq N(\varepsilon)$, definimos entonces

$$v := \sum_{j=0}^{\infty} v_j \tilde{C}_j^{(s+1/2)}(x).$$

Luego claramente $\|v_n - v\|_{H_s^r(-1,1)} \rightarrow 0$ y $v \in H_s^r(-1, 1)$ pues para $\varepsilon = 1$

$$\|v\|_{H_s^r(-1,1)} \leq \|v - v_{n_0}\|_{H_s^r(-1,1)} + \|v_{n_0}\|_{H_s^r(-1,1)} < 1 + \|v_{n_0}\|_{H_s^r(-1,1)} < \infty.$$

Luego $H_s^r(-1, 1)$ es completo. \square

Observación 1.3.6. Directo de la definición anterior se desprende que para toda función $v \in H_s^r(-1, 1)$ la expansión de Gegenbauer (1.3.3) con coeficientes (1.3.4) es convergente en $H_s^r(-1, 1)$.

Observación 1.3.7. Teniendo en cuenta la identidad de Parseval sabemos que $\|v\|_{L_s^2(-1,1)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2$ luego se sigue que los espacios $H_s^0(-1, 1)$ y $L_s^2(-1, 1)$ coinciden. Más aún, tenemos una inclusión densa $H_s^t(-1, 1) \subset H_s^r(-1, 1)$ siempre que $r < t$. Esto se deduce inmediatamente de la observación anterior ya que cualquier polinomio está contenido en $H_s^r(-1, 1)$ para todo r .

1.3.2. Espacios en dominios multi-dimensionales

En la subsección anterior vimos espacios que basados en dominios unidimensionales. Hicimos esta distinción con las demás dimensiones, ya que en la anterior contamos con una base ortonormal de polinomios, y como veremos en el próximo capítulo estos polinomios son autofunciones de un cierto operador del tipo Laplaciano fraccionario pesado. Desafortunadamente, no es posible copiar esta estrategia en las dimensiones mayores. Por lo que deberemos dar otra definición de los espacios de Sobolev fraccionario pesados. Teniendo en cuenta la Definición 1.2.8, incluimos la siguiente notación

$$\delta(x, y) := \min\{\delta(x), \delta(y)\}. \quad (1.3.6)$$

Definición 1.3.8. Sea Ω un abierto, acotado con borde Lipschitz, $s > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Escribimos $s = k + \sigma$, con $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in (0, 1]$, definimos el espacio de Sobolev fraccionario pesado

$$H_\alpha^s := \{v \in H^k(\Omega) : |\partial^\beta v|_{H_\alpha^\sigma(\Omega)} < \infty \forall \beta \in \mathbb{N}^n \quad t.q. \quad |\beta| = k\},$$

donde

$$|w|_{H_\alpha^\sigma(\Omega)} := \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|w(x) - w(y)|^2}{|x - y|^{n+2\sigma}} \delta(x, y)^{2\alpha} dx dy.$$

Le proporcionamos a este espacio la siguiente norma

$$\|v\|_{H_\alpha^s(\Omega)}^2 := \|v\|_{H^k(\Omega)}^2 + \sum_{|\beta|=k} |\partial^\beta v|_{H_\alpha^\sigma(\Omega)}^2.$$

También necesitamos definir el mismo espacio sobre todo \mathbb{R}^n

Definición 1.3.9. Sea Ω , s y α como en las definiciones anteriores. El espacio de Sobolev global pesado $H_{\alpha, \Omega}^s$ es

$$H_{\alpha, \Omega}^s := \left\{ v \in H^k(\mathbb{R}^n) : |D^\beta v|_{H_{\alpha, \Omega}^\sigma(\mathbb{R}^n)} < \infty \forall \beta \in \mathbb{N}^n \quad t.q. \quad |\beta| = k \right\},$$

donde

$$|w|_{H_{\alpha, \Omega}^\sigma(\mathbb{R}^n)} := \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|w(x) - w(y)|^2}{|x - y|^{n+2\sigma}} \delta(x, y)^{2\alpha} dx dy.$$

La norma de este espacio esta dada por

$$\|v\|_{H_{\alpha,\Omega}^s(\mathbb{R}^n)}^2 := \|v\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2 + \sum_{|\beta|=k} |D^\beta v|_{H_{\alpha,\Omega}^\sigma(\mathbb{R}^n)}.$$

Siempre que el conjunto Ω este claro por contexto, lo excluirémos de la notación y simplemente escribiremos $H_\alpha^s(\mathbb{R}^n)$.

Observación 1.3.10. Con el objetivo de obtener una definición adecuada para los espacios pesados, es decir, para asegurar su completitud, debemos considerar algunas restricciones para los pesos utilizados. Una familia clásica de pesos es la clase de Muckenhoupt A_2 [30]. En la versión global $H_\alpha^\ell(\mathbb{R}^n)$ necesitamos restringir el rango de α a $|\alpha| < 1/2$ para tener que $\delta^{2\alpha} \in A_2$.

Las desigualdades de Poincaré juegan un rol fundamental en el análisis de los métodos de elementos finitos. Por lo tanto, sera de nuestro interés obtener un resultado análogo al de la Proposición 1.2.7 para los espacios de Sobolev pesados. Nuestro punto de partida es la siguiente desigualdad, sin demostración, de Sobolev-Poincaré para funciones con promedio cero.

Proposición 1.3.11 ([29, Teorema 4.10]). *Sea Ω un abierto acotado, estrellado con respecto a una bola, $\sigma, \tau \in (0, 1)$, $1 < p \leq q \leq \frac{np}{n-\sigma p}$ y $p < \frac{n}{\sigma}$. Luego se obtiene la siguiente desigualdad*

$$\left(\int_{\Omega} |v(x) - \bar{v}|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap B(x, \tau\delta(x))} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dy dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.3.7)$$

Junto con la proposición previa, estamos listos para demostrar un resultado análogo a (1.2.6). Aquí damos una demostración simple que vale con $\alpha < s$, sin embargo, recientemente se ha demostrado para $\alpha = s$ [20].

Proposición 1.3.12 (Desigualdad fraccionaria mejorada de Poincaré). *Tomamos $s \in (0, 1)$, $\alpha < s$ y Ω un dominio estrellado con respecto a una bola B . Entonces, existe una constante C tal que para toda $v \in L^2(\Omega)$, se tiene*

$$\|v - \bar{v}\| \leq C d_{\Omega}^{s-\alpha} \|v\|_{H_{\alpha}^s(\Omega)}, \quad (1.3.8)$$

con C una constante que depende de la excentricidad de Ω (i.e. $\frac{\text{diam}(\Omega)}{\text{diam}(B)}$).

Demostración. Fijamos $\tau = 1/2$ en (1.3.7). Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\bar{v} = 0$; más aún, podemos considerar Ω tal que $d_\Omega = 1$. Para σ a ser elegido, podemos tomar p de tal forma que $\frac{np}{n-\sigma p} = 2 = q$. Observemos que esta elección implica que $p < 2$, y por lo tanto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{2}{p}$ y $\frac{2}{2-p}$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C I_1^{\frac{1}{2}} I_2^{\frac{2-p}{2p}},$$

donde

$$I_1 = \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap B(x, \frac{\delta(x)}{2})} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \delta(x, y)^{\frac{2\alpha}{p}} dy dx,$$

y

$$I_2 = \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap B(x, \frac{\delta(x)}{2})} |x - y|^{-n + \frac{2p(s-\sigma)}{2-p}} \delta(x, y)^{-\frac{2\alpha}{2-p}} dy dx.$$

Como para cada $x \in \Omega$ e $y \in B(x, \frac{\delta(x)}{2})$ se tiene que $\delta(x, y) \in [\frac{\delta(x)}{2}, \delta(x)]$, asumiendo que $\sigma < s$ la segunda integral I_2 puede ser acotada de la siguiente manera:

$$I_2 \leq C \int_{\Omega} \left(\int_0^{\frac{\delta(x)}{2}} \rho^{-1 + \frac{2p(s-\sigma)}{2-p}} d\rho \right) \delta(x)^{-\frac{2\alpha}{2-p}} dx \leq C \int_{\Omega} \delta(x)^{\frac{2p(s-\sigma)-2\alpha}{2-p}} dx.$$

Esta integral es finita si y solo si $\frac{2p(s-\sigma)-2\alpha}{2-p} > -1$, y recordando la elección de p , es suficiente con tomar

$$\alpha < \frac{2n(s-\sigma) + 2\sigma}{n + 2\sigma}.$$

Eligiendo α conforme a esta restricción, obtenemos que el peso en el termino I_1 debe satisfacer

$$\frac{2\alpha}{p} < 2s - 2\sigma \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Por lo tanto, tomando $\sigma = \frac{\varepsilon n}{2(n-1)}$ para $\varepsilon \in (0, 2s)$, obtenemos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap B(x, \frac{\delta(x)}{2})} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \delta(x, y)^{2s-\varepsilon} dy dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde la constante C depende de n, s, ε y de la que aparece en (1.3.7).

Para dominios de diámetro arbitrario, un argumento de escale nos lleva directamente a una dependencia en d_Ω . \square

Capítulo 2

Teoría De Regularidad

Dada una función $f \in H^r(\Omega)$ ($r \geq -s$), recordamos el problema homogéneo con condiciones de Dirichlet para el Laplaciano Fraccionario,

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Omega^c, \end{cases} \quad (2.0.1)$$

y el marco variacional definido en el capítulo anterior (Sección 1.2.3). En particular, la existencia y unicidad de la solución débil $u \in \tilde{H}^s(\Omega)$ que fue establecido en la Proposición 1.2.23. El camino a seguir ahora es identificar cuando una solución débil tiene mayor regularidad que $\tilde{H}^s(\Omega)$, y que suposiciones sobre f tienen que ser establecidas para asegurar eso. Más aún, teniendo en cuenta el análisis de elementos finitos que queremos desarrollar, estas estimaciones de regularidad serán utilizadas para acotar las normas de Sobolev de las soluciones.

Un objetivo mas general es proveer una caracterización del mapeo del Laplaciano fraccionario. Más precisamente, cuando es posible invertir el operador en la escala de Sobolev. De hecho, esto es posible en el caso de dominios unidimensionales. Vamos a probar que cierta variación del Laplaciano fraccionario induce una biyección entre espacios de Sobolev pesados definidos en la subsección (1.3.1). En la sección 2.1 desarrollamos la teoría de regularidad para espacios unidimensionales y radiales. Esta sección nos va a dar un vistazo general sobre que tipo de resultados esperamos conseguir en espacios mas generales.

2.1. Problemas unidimensionales y radiales

Nuestro recorrido comienza con el problema unidimensional y radial. Los contenidos de esta sección servirán como guía de que tipos de resultados vamos a esperar para el caso de dominios mas generales. Estudiaremos la regularidad de soluciones del problema (2.0.1) bajo hipótesis de suavidad de la función del lado derecho f , incluyendo análisis en espacios de Sobolev y funciones analíticas, y en dominios de multi-intervalos.

El background teórico presentado en esta sección esta basado en [5].

2.1.1. Regularidad de Sobolev en un intervalo

En esta subsección retomamos al Laplaciano fraccionario como un operador integral en un dominio acotado. Esto, naturalmente, motiva la utilización de espacios de Sobolev pesados de la subsección (1.3.1), los cuales proveen un resultado de regularidad óptimo para el Laplaciano fraccionario pesado $(-\Delta)_\omega^s(\cdot) := (-\Delta)^s(\omega^s \cdot)$. Mostraremos que induce una biyección entre estos espacios de Sobolev Pesados. Usando una versión del lema de Sobolev, podemos concluir que el factor de regularidad de las soluciones del Laplaciano fraccionario admite k derivadas continuas para cierto k que depende de la regularidad del lado derecho. Por conveniencia, vamos a restringirnos a mirar el dominio $\Omega = (-1, 1)$; las definiciones correspondientes para los casos de multi-intervalos se siguen fácilmente.

El siguiente lema brinda una expresión muy útil del Laplaciano fraccionario en términos de un operador integro-diferencial. Para una prueba, referenciamos al lector a [5, Lema 2.3].

Lema 2.1.1. *Sea $s \in (0, 1)$, sea $u \in C_0^2(-1, 1)$ tal que $|u'|$ es integrable en $(-1, 1)$, sea $x \in \mathbb{R}, x \notin \partial\Omega = \{-1, 1\}$, y recordando (1.1.3), definimos*

$$C_s = \frac{C(1, s)}{2s(1 - 2s)} = -\Gamma(2s - 1)\sin(\pi s)/\pi \quad (s \neq 1/2). \quad (2.1.1)$$

si $s \neq \frac{1}{2}$, entonces

$$(-\Delta)^s u(x) = C_s \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 |x - y|^{1-2s} \frac{d}{dy} u(y) dy,$$

y si $s = \frac{1}{2}$, tenemos

$$(-\Delta)^{1/2} u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \ln|x - y| \frac{d}{dy} u(y) dy.$$

Usando la función peso $\omega(x)$ dada en (1.3.1), para $\phi \in C^2(-1, 1) \cap C^1[-1, 1]$ introducimos la versión pesada del lema anterior.

$$(-\Delta)_\omega^s \phi(x) = \begin{cases} C_s \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 |x-y|^{1-2s} \frac{d}{dy} (\omega^s \phi(y)) dy & (s \neq 1/2), \\ \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \ln|x-y| \frac{d}{dy} (\omega^s \phi(y)) dy & (s = 1/2). \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Observación 2.1.2. Claramente, dada una solución de la ecuación

$$(-\Delta)_\omega^s \phi = f$$

en el dominio $\Omega = (-1, 1)$, la función $u = \omega^s \phi$ extendida por cero fuera de Ω resuelve el problema de Dirichlet para el Laplaciano fraccionario (2.0.1).

Recordar que el conjunto normalizado de polinomios de Gengenbauer $\left\{ C_n^{(s+1/2)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ constituyen una base ortonormal de $L_s^2(-1, 1)$ (cf. 1.3.2). Ahora bien, el resultado clave que relaciona estos polinomios con el Laplaciano fraccionario en dominios unidimensionales es que los polinomios de Gengenbauer conforman, además de una base ortonormal, un sistema de autofunciones para el operador Laplaciano fraccionario pesado (2.1.2). El siguiente teorema establece dicho resultado, para una prueba del mismo ver [5, Teorema 3.14 y Corolario 3.15].

Teorema 2.1.3. *El operador pesado, $(-\Delta)_\omega^s$ en el intervalo $(-1, 1)$ satisface la identidad*

$$(-\Delta)_\omega^s (C_n^{(s+1/2)}) = \lambda_n^s C_n^{(s+1/2)},$$

donde

$$\lambda_n^s = \frac{\Gamma(2s + n + 1)}{n!}. \quad (2.1.3)$$

Observación 2.1.4. Una consecuencia muy útil del hecho de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\beta-\alpha} \Gamma(n + \alpha) / \Gamma(n + \beta) = 1,$$

es que tenemos una relación asintótica $\lambda_n^s \approx O(n^{2s})$ para los autovalores (2.1.3).

Recordando la Definición (1.3.4) es ahora evidente que el espacio de Sobolev $H_s^r(-1, 1)$ caracteriza completamente la regularidad de Sobolev del operador Laplaciano fraccionario pesado $(-\Delta)_\omega^s$.

Teorema 2.1.5. *Sea $r \geq 0$. Entonces, el operador Laplaciano fraccionario pesado (2.1.2) puede ser unívocamente extendido a un operador continuo y lineal $(-\Delta)_\omega^s$ de $H_s^{r+2s}(-1, 1)$ en $H_s^r(-1, 1)$. El operador extendido es biyectivo y bicontinuo.*

Demostración. Sea $\phi \in H_s^{r+2s}(-1, 1)$, y sea $\phi^n = \sum_{j=0}^n \phi_j \tilde{C}_j^{(s+1/2)}$ donde ϕ_j denota los coeficiente de Gengenbauer de ϕ (ver (1.3.4)). De acuerdo con el Teorema 2.1.3 tenemos que $(-\Delta)_\omega^s \phi^n = \sum_{j=0}^n \lambda_j^s \phi_j \tilde{C}_j^{(s+1/2)}$. En vista de la Observación 1.3.6 y 2.1.4 es claro que $(-\Delta)_\omega^s \phi^n$ es una sucesión de Cauchy (y por lo tanto converge) en $H_s^r(-1, 1)$. Por lo tanto definimos

$$(-\Delta)_\omega^s \phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\Delta)_\omega^s \phi^n = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^s \phi_j \tilde{C}_j^{(s+1/2)} \in H_s^r(-1, 1).$$

La biyección y la bicontinuidad de la extensión se siguen fácilmente, considerando la Observación 2.1.4, así como la unicidad. La demostración esta completa. \square

Corolario 2.1.6. *La solución u de (2.0.1) con lado derecho $f \in H_s^r(-1, 1)$, ($r \geq 0$) puede ser expresada en la forma $u = \omega^s \phi$ para alguna $\phi \in H_s^{r+2s}(-1, 1)$.*

Demostración. Se sigue directamente del Teorema (2.1.5) y Observación (2.1.2). \square

La suavidad clásica de soluciones de la ecuación (2.0.1), para funciones del lado derecho suficientemente diferenciables, resulta de la siguiente versión del teorema de Sobolev.

Teorema 2.1.7. *[[5, Theorem 4.14]] Sea $s \geq 0, k \in \mathbb{N}$ y $r > 2k + s + 1$. Luego tenemos una inclusión continua $H_s^r(-1, 1) \subset C^k[-1, 1]$ de $H_s^r(-1, 1)$ en el espacio de Banach $C^k[-1, 1]$ de funciones k -diferenciables en $[-1, 1]$ con la norma usual $\|v\|_k := \|v\|_\infty + \|v^{(k)}\|_\infty$.*

Observación 2.1.8. El resultado previo es óptimo, veamos un contraejemplo en el caso $k = 0$. La función $v(x) = |\log(x)|^\beta$ con $0 < \beta < 1/2$ no esta acotada, pero si pertenece a $H_s^{s+1}(0, 1)$ para $s \in \mathbb{N}$

Corolario 2.1.9. *El operador Laplaciano fraccionario pesado (2.1.2) mapea biyectivamente el espacio $C^\infty[-1, 1]$ en si mismo.*

Demostración. Sale directamente de la proposición 1.3.3 junto con los Teoremas 2.1.5 y 2.1.7. \square

2.1.2. Regularidad en dominios de multi-intervalos

En esta subsección nos concentramos en el caso de multi-intervalos es decir:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^M (a_i, b_i), \quad (2.1.4)$$

donde los intervalos (a_i, b_i) son disjuntos y no comparten frontera. Teniendo a mano las estimaciones de regularidad para el Laplaciano fraccionario en intervalos, el análisis para el problema de Dirichlet homogéneo (2.0.1) en dominios Ω tales como (2.1.4) no es una tarea difícil. La técnica que describiremos se basa en la idea de dividir al Laplaciano fraccionario pesado en una componente de auto-interacción singular mas un resto diferenciable. La componente de auto-interacción es un bloque diagonal que comparte las propiedades de mapeo del Laplaciano fraccionario sobre intervalos (cf. Subsección 2.1.1), mientras que el resto es una suma de convoluciones con respecto a un núcleo suave.

En primer lugar, un resultado similar al Lema 2.1.1 se obtiene para multi-intervalos.

Lema 2.1.10. *Dado un dominio Ω del tipo (2.1.4), sean $s \in (0, 1)$, $u \in C_0^2(\Omega)$ y C_s la constante definida en (2.1.1) tenemos que*

si $s \neq \frac{1}{2}$, entonces

$$(-\Delta)^s u(x) = C_s \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^M \int_{a_i}^{b_i} |x - y|^{1-2s} \frac{d}{dy} u(y) dy,$$

y si $s = \frac{1}{2}$, tenemos

$$(-\Delta)^{1/2} u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^M \int_{a_i}^{b_i} \ln|x - y| \frac{d}{dy} u(y) dy.$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \partial\Omega = \bigcup_{i=1}^M \{a_i, b_i\}$

Usando la función característica $\chi_{(a_i, b_i)}$ de cada intervalo individual, y tomando $\omega^s(x) = \sum_{i=1}^M (x - a_i)^s (b_i - x)^s \chi_{(a_i, b_i)}$ y aplicando el lema anterior, podemos definir el Laplaciano fraccionario pesado para multi-intervalos sobre

Ω como $(-\Delta)_\omega^s = \mathcal{K}_s + \mathcal{R}_s$, donde

$$\mathcal{K}_s(\phi)(x) = C_s \sum_{i=1}^M \chi_{(a_i, b_i)}(x) \frac{d}{dx} \int_{a_i}^{b_i} |x - y|^{1-2s} \frac{d}{dy} (\omega^s \phi)(y) dy$$

es un operador diagonal y donde \mathcal{R}_s es el operador asociado al resto de la no diagonal. Usando la formula de integración por partes es fácil chequear que

$$\mathcal{R}_s \phi(x) = C(1, s) \int_{\Omega \setminus (a_j, b_j)} |x - y|^{-1-2s} \omega^s(y) \phi(y) dy \quad \text{for } x \in (a_j, b_j).$$

El bloque diagonal se asemeja al Laplaciano fraccionario pesado para un solo intervalo. Y como el núcleo de \mathcal{R}_s es suave, escribiendo la ecuación $(-\Delta)_\omega^s \phi = f$ como $\mathcal{K}_s \phi = f - \mathcal{R}_s$, y habiendo probado la existencia y unicidad de soluciones para un solo intervalo, es posible probar la regularidad en el espacio de Sobolev pesado así como para el espacio de funciones analíticas.

Teorema 2.1.11. [5, Theorem 4.21] *Sea Ω acorde con (2.1.4). Entonces, dada $f \in L_s^2(\Omega)$, existe una única $\phi \in L_s^2(\Omega)$ tal que $(-\Delta)_\omega^s \phi = f$. Más aún, para $f \in H_s^r(\Omega)$ tenemos $\phi \in H_s^{r+2s}(\Omega)$.*

2.1.3. El Laplaciano fraccionario para bolas

En esta subsección proveeremos una familia de soluciones para bolas. Aunque los resultados presentados aquí no hablan directamente sobre los problemas de regularidad, están estrechamente relacionados con los resultados obtenidos en una dimensión.

Independientemente de [5], una forma diagonal para el Laplaciano fraccionario es obtenida en [22] empleando argumentos basados en la transformada de Mellin. La forma diagonal desarrollada allí provee, en particular, una familia de soluciones explícitas en las bolas n -dimensionales de \mathbb{R}^n , las cuales están dadas por un producto de un termino singular y las G-funciones generales de Meijer.

Aquí mencionaremos la construcción más simple provista en ese trabajo. Considerar los polinomios de Jacobi $P_k^{(\alpha, \beta)} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dados por

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{k! \Gamma(\alpha + \beta + k + 1)} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + k + m + 1)}{\Gamma(\alpha + m + 1)} \left(\frac{x - 1}{2} \right)^m,$$

y la función peso esta dada por $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \omega(x) = 1 - |x|^2$.

En [22, Theorem 3] se muestra como construir explícitamente autofunciones para el Laplaciano fraccionario pesado usando $P_k^{(s, n/2-1)}$. Para ser mas preciso, los autores demuestran el siguiente teorema.

Teorema 2.1.12. *Sea $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ la bola unitaria. Para $s \in (0, 1)$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos*

$$\lambda_{k,s} = \frac{2^{2s} \Gamma(1 + s + k) \Gamma(\frac{n}{2} + s + k)}{k! \Gamma(\frac{n}{2} + k)} \quad (2.1.5)$$

y $p_k^{(s)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p_k^{(s)}(x) = P_k^{(s, n/2-1)}(2|x|^2 - 1) \chi_{B(0,1)}(x).$$

Entonces se obtiene la siguiente ecuación

$$(-\Delta)^s \left(\omega^s p_k^{(s)} \right) (x) = \lambda_{k,s} p_k^{(s)}(x) \quad \text{in } B(0, 1).$$

La conexión entre el teorema previo y el Teorema 2.1.3 esta dada por la relación entre los polinomios de Gegenbauer y Jacobi.

$$P_k^{(s, -1/2)}(x) = c(s, k) C_{2k}^{(s+1/2)} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} \right).$$

Una simple manipulación conecta los autovalores correspondientes. A saber, se tiene que $\lambda_{2k}^s = \lambda_{k,s}$ (cf. (2.1.3) y (2.1.5)).

2.2. Regularidad de Hölder-Sobolev

En esta parte hablaremos de la regularidad Sobolev para resultados de (2.0.1) en dominios mas generales comparados con la sección anterior. Además, estamos listos para dar estimaciones en términos de los espacios de Sobolev pesados definidos en la Subsección 1.3. Sin embargo, el inconveniente en este proceso es que las estimaciones que obtenemos están expresadas en términos de la regularidad Hölder de la función dato.

Las demostraciones que presentamos aquí se siguen de [4] y dependen de los resultados de regularidad Hölder de [43]. En particular, algunas de estas estimaciones miden, de una forma precisa, el comportamiento singular de las

soluciones cerca del borde. Expondremos en el Capitulo 3 como aprovechar el incremento de regularidad en los espacios pesados para mejorar el orden de convergencia de la aproximación por elementos finitos para el problema de Dirichlet fraccionario.

Empezamos con algunos resultados clave.

Teorema 2.2.1. [Ver Prop. 1.1 en [43]] Si Ω es un dominio acotado y Lipschitz que satisface la condición de la bola exterior y $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces cualquier solución u de (2.0.1) pertenece a $C^s(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|u\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Omega, s) \|f\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (2.2.1)$$

Aún más, si f es Hölder continua, entonces el orden de estimación Hölder obtenido para u es mas alto; y éste está expresado en términos de ciertas normas pesadas. Para $0 < \beta$, denotamos por $|\cdot|_{C^\beta(\Omega)}$ la seminorma de $C^\beta(\Omega)$. Para $\theta \geq -\beta$, escribiendo $\beta = k + \beta'$ con k entero y $\beta' \in (0, 1]$. Recordando la definición (1.2.3), definimos la seminorma pesada

$$|w|_\beta^{(\theta)} = \sup_{x, y \in \Omega} \delta(x, y)^{\beta+\theta} \frac{|D^k w(x) - D^k w(y)|}{|x - y|^{\beta'}},$$

y la norma asociada $\|\cdot\|_\beta^{(\theta)}$ de la siguiente forma: para $\theta \geq 0$,

$$\|w\|_\beta^{(\theta)} = \sum_{\ell=0}^k \left(\sup_{x \in \Omega} \delta(x)^{\ell+\theta} |D^\ell w(x)| \right) + |w|_\beta^{(\theta)},$$

mientras que para $-\beta < \theta < 0$,

$$\|w\|_\beta^{(\theta)} = \|w\|_{C^{-\theta}(\Omega)} + \sum_{\ell=1}^k \left(\sup_{x \in \Omega} \delta(x)^{\ell+\theta} |D^\ell w(x)| \right) + |w|_\beta^{(\theta)}.$$

La estimación Hölder de orden mas alto para soluciones es la siguiente.

Teorema 2.2.2. [Ver Prop. 1.4 en [43]] Sea Ω un dominio acotado y $\beta > 0$ tal que ni β ni $\beta + 2s$ son enteros. Dada $f \in C^\beta(\Omega)$ tal que $\|f\|_\beta^{(s)} < \infty$, y $u \in C^s(\mathbb{R}^n)$ es una solución de (2.0.1). Entonces, $u \in C^{\beta+2s}(\Omega)$ y

$$\|u\|_{\beta+2s}^{(-s)} \leq C(\Omega, s, \beta) \left(\|u\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_\beta^{(s)} \right).$$

En las siguientes observaciones exploraremos algunas consecuencias del teorema previo.

Observación 2.2.3 (caso $s \in (0, 1/2)$). Tomando $\beta \in (0, 1 - 2s)$ en el Teorema 2.2.2, obtenemos que existe una constante $C(\Omega, \beta, s)$ tal que

$$\sup_{x, y \in \Omega} \delta(x, y)^{\beta+s} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\beta+2s}} \leq C \left(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{\beta}^{(s)} \right). \quad (2.2.2)$$

Más aún, como $\beta < 1$, para $f \in C^\beta(\Omega)$ es sencillo probar que

$$\|f\|_{\beta}^{(s)} \leq C(\Omega, s) \|f\|_{C^\beta(\Omega)}.$$

Observación 2.2.4 (Caso $s \in (1/2, 1)$). Considerando $\beta \in (0, 2 - 2s)$, Teorema 2.2.2 implica que

$$\sup_{x, y \in \Omega} \delta(x, y)^{\beta+s} \frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x - y|^{\beta+2s-1}} \leq C \left(\Omega, s, \beta, \|f\|_{\beta}^{(s)} \right),$$

y

$$\sup_{x \in \Omega} \delta(x)^{1-s} |Du(x)| \leq C \left(\Omega, s, \beta, \|f\|_{\beta}^{(s)} \right).$$

En lo que sigue de esta sección mostraremos como usar estos resultados para acotar la norma de Sobolev de u . Primero nos enfocaremos en regularidad dentro de Ω tanto para espacios estándar como para espacios pesados; luego extenderemos los resultados a todo el dominio \mathbb{R}^n .

Para nuestros propósitos, es útil dividir a $\Omega \times \Omega$ en un conjunto en el cual la distancia entre x e y esta acotada inferiormente por $\delta(x, y)$ y otro conjunto en el que $|x - y|$ sea menor que eso. Para el primer conjunto, la regularidad de Hölder de la solución es suficiente para controlar el integrando que involucra a la seminorma fraccionaria de u , ya que la diagonal $\{x = y\}$ esta apartada de este conjunto. En el caso del segundo conjunto, como la diagonal si lo interseca entonces el peso involucrado es singular, luego algunos términos extras son requeridos para controlar su crecimiento; esto es obtenido gracias al Teorema 2.2.2. Es conveniente observar que, dada una función $v : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(x, y) = v(y, x)$ para todo par $x, y \in \Omega$, la integral de v sobre $\Omega \times \Omega$ es igual a integrar dos veces sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : \delta(x, y) = \delta(x)\}. \quad (2.2.3)$$

Pensando en la descomposición mencionada en el párrafo anterior definimos

$$B = \{(x, y) \in A : |x - y| \geq \delta(x)\}. \quad (2.2.4)$$

Observación 2.2.5. Recordamos una identidad muy útil respecto a la integrabilidad de la función potencia de la distancia al borde. Lo siguiente vale siempre que $\alpha < 1$:

$$\int_{\Omega} \delta(x)^{-\alpha} dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \quad (2.2.5)$$

Después de estos resultados preliminares estamos listos probar la regularidad de tipo Sobolev-Hölder que buscamos. Separaremos el argumento en dos: primero estableceremos los resultados en un dominio Ω en el caso estándar, y luego nos enfocaremos en los espacios pesados. Para finalizar, haremos una extensión a todo \mathbb{R}^n .

2.2.1. El caso $s \in (0, 1/2)$: regularidad en el espacio fraccionario estándar

Estamos en posición de probar, que si el lado derecho es suficientemente suave, entonces las soluciones ganan casi media derivada en el sentido Sobolev.

Teorema 2.2.6. *Sea $s \in (0, 1/2)$ y $f \in C^{\frac{1}{2}-s}(\Omega)$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, las soluciones u de (1.2.26) pertenece a $H^{s+\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)$, con*

$$|u|_{H^{s+\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)} \leq \frac{C(\Omega, s, n)}{\varepsilon} \|f\|_{C^{\frac{1}{2}-s}(\Omega)}.$$

Demostración. Tomemos $\theta \in (s, 1)$ y consideremos la división de A mencionada anteriormente. Luego aplicando la estimación (2.2.1),

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dx dy &\leq \\ &\leq C(\Omega, s) \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} \int_{B(x, \delta(x))^c} |x - y|^{-n-2\theta+2s} dx dy \\ &\leq \frac{C(\Omega, s, n) \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\theta - s} \int_{\Omega} \delta(x)^{2(s-\theta)} dx. \end{aligned}$$

Una condición necesaria y suficiente para la finitud del lado derecho en la desigualdad previa es que $\theta < s + \frac{1}{2}$.

Por otro lado, asumiendo que $f \in C^\beta(\Omega)$ para algun $\beta > 0$. La desigualdad de (2.2.2) conlleva a

$$\begin{aligned} \iint_{A \setminus B} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dx dy &\leq \\ &\leq C \int_{\Omega} \delta(x)^{-2(\beta+s)} \left(\int_{B(x, \delta(x))} |x - y|^{-n-2\theta+2\beta+4s} dy \right) dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, la integral sobre $B(x, \delta(x))$ es finita si y solo si $\beta + 2s > \theta$. Entonces, en este caso tenemos que

$$\iint_{A \setminus B} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dx dy \leq C \int_{\Omega} \delta(x)^{2(s-\theta)} dx, \quad (2.2.6)$$

donde la constante final toma la forma de

$$C = \frac{C(\Omega, s, n, \beta)}{\beta + 2s - \theta} \|f\|_{C^\beta(\Omega)}^2.$$

Una vez más, la integral de (2.2.6) es finita si y solo si $\theta < s + \frac{1}{2}$. Si $\beta = \frac{1}{2} - s$, eligiendo $\theta = s + \frac{1}{2} - \varepsilon$, concluimos que

$$\iint_{A \setminus B} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dx dy \leq \frac{C(\Omega, s, n)}{\varepsilon} \int_{\Omega} \delta(x)^{-1+2\varepsilon} dx.$$

Como la integral del lado derecho es $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, la prueba concluye. \square

Observación 2.2.7. Si f es mas regular que $C^{\frac{1}{2}-s}(\Omega)$, no obtendremos mayor regularidad a partir de la desigualdad (2.2.2) puesto que en nuestra prueba el termino β desaparece en la estimación de la integral sobre $A \setminus B$: en la desigualdad (2.2.6), la dependencia de la regularidad del dato esta oculto en la constante que aparece en el lado derecho, pero no así en el exponente del integrando.

2.2.2. El caso $s \in (1/2, 1)$ regularidad en el espacio estándar y pesado

En lo siguiente mostraremos que un análogo al Teorema 2.2.6 es posible para $s \in (1/2, 1)$ y, al igual que antes, ganamos casi media derivada en la estimación a priori. Más aún, a lo largo de la prueba es evidente que si el lado derecho es suficientemente suave el comportamiento singular de la solución se localiza cerca del borde. Por lo tanto, introduciendo pesos apropiados encontraremos resultados alternativos de regularidad.

Antes de empezar, observaremos que ganar media derivada implicaría que la solución pertenezca a $H^1(\Omega)$. Por consiguiente, una importante herramienta a ser utilizada es la Proposición 1.2.13, que caracteriza el comportamiento de la norma fraccionaria $|\cdot|_{H^{1-\varepsilon}(\Omega)}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

En primer lugar, queremos probar que para soluciones u de (1.2.26), el producto $\varepsilon^{1/2}|u|_{H^{1-\varepsilon}(\Omega)}$ está acotado cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, y por lo tanto, u está en $H^1(\Omega)$. Para este propósito, es necesario la siguiente estimación local de regularidad Hölder [43, Lemma 2.9].

Lema 2.2.8. *Si $f \in L^\infty(\Omega)$ y $\gamma \in (0, 2s)$, luego u verifica*

$$|u|_{C^\gamma(\overline{B_R(x)})} \leq CR^{s-\gamma} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.2.7)$$

donde $R = \frac{\delta(x)}{2}$ y la constante C depende únicamente de Ω, s y γ , y explota solo cuando $\gamma \rightarrow 2s$

La regularidad H^1 previamente mencionada se sigue usando este lema y por un argumento similar al Teorema 2.2.6.

Lema 2.2.9. *Si $s \in (1/2, 1)$ y $f \in L^\infty(\Omega)$, luego la solución u de (1.2.26) pertenece a $H^1(\Omega)$ y por lo tanto a $H^1(\mathbb{R}^n)$. Más aún, satisface*

$$|u|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C(\Omega, s, n) \|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{2s - 1},$$

donde la constante $C(\Omega, s, n)$ está uniformemente acotada para todo $s \in (1/2, 1)$.

Demostración. Tomemos $\varepsilon \in (0, 1 - s)$ y, con la misma idea de antes, consideramos los conjuntos A y B, pero con la pequeña diferencia de $\frac{\delta(x)}{2}$ en vez de $\delta(x)$ en la definición del último conjunto. Tomando $\gamma = 1 - C(\varepsilon)$ para algún

$0 < C(\varepsilon) < \varepsilon$ a ser elegido. Aplicando la desigualdad (2.2.7) y procediendo igual que el Teorema 2.2.6, se sigue que

$$\iint_{A \setminus B} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2(1-\varepsilon)}} dy dx \leq \frac{C(\Omega, s, n) \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\varepsilon - C(\varepsilon)} \int_{\Omega} \delta(x)^{2(s-1+\varepsilon)} dx.$$

Observar que la constante C en la desigualdad previa se mantiene acotada para todo $s \in (1/2, 1)$, y que la integral de la derecha es $\mathcal{O}((2s-1+2\varepsilon)^{-1})$. Por otro lado, tomando en cuenta la regularidad Hölder global de u (cf. ecuación (2.2.1)) se obtiene inmediatamente

$$\iint_B \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2(1-\varepsilon)}} dy dx \leq C(\Omega, s, n) \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} \delta(x)^{2(s-1+\varepsilon)} dx.$$

Combinándola con la estimación previa, obtenemos

$$|u|_{H^{1-\varepsilon}(\Omega)}^2 \leq \frac{C(\Omega, s, n) \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{(\varepsilon - C(\varepsilon))(2s - 1 + \varepsilon)},$$

donde la constante $C(\Omega, s, n)$ se mantiene acotada uniformemente para $s \in (1/2, 1)$. Tomando $C(\varepsilon)$ tal que $\varepsilon - C(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, la conclusión buscada se obtiene de la Proposición 1.2.13. \square

Ahora, debemos conseguir alguna regularidad para Du . Sea $\beta \in (0, 2-2s)$ y asumamos que $f \in C^\beta(\Omega)$. Consideramos los conjuntos A y B de Ω como al principio (cf. (2.2.3) y (2.2.4)) e introducimos la integral pesada

$$I := \iint_{A \setminus B} \frac{|Du(x) - Du(y)|^2}{|x - y|^{n+2(\ell-1)}} \delta(x, y)^{2\alpha} dx dy.$$

Usando la primera desigualdad de la Observación 2.2.4 veremos como se involucran los parámetros ℓ y α para que I se mantenga acotada. En primer lugar,

$$\begin{aligned} I &\leq C \int_{\Omega} \left(\int_{B(x, \delta(x))} |x - y|^{2(\beta+2s-1)-n-2(\ell-1)} dy \right) \delta(x)^{2(\alpha-\beta-s)} dx \\ &\leq \frac{C}{\beta + 2s - \ell} \int_{\Omega} \delta(x)^{2(\alpha+s-\ell)} dx \leq \frac{C}{(\beta + 2s - \ell)(1 + 2(\alpha + s - \ell))}, \end{aligned}$$

donde, para que se mantenga la convergencia de las integrales

$$\ell - \beta < 2s \quad \text{y} \quad \ell < \alpha + s + \frac{1}{2} \quad (2.2.8)$$

En segundo lugar, para

$$II := \iint_B \frac{|Du(x) - Du(y)|^2}{|x - y|^{n+2(\ell-1)}} \delta(x, y)^{2\alpha} dx dy,$$

de nuevo gracias a la Observación 2.2.4 (segunda parte)

$$\begin{aligned} II &\leq C \int_{\Omega} \left(\int_{B(x, \delta(x))^c} |x - y|^{-n-2(\ell-1)} dy \right) \delta(x)^{2(\alpha+s-1)} dx \\ &\leq C \int_{\Omega} \delta(x)^{2(\alpha+s-\ell)} dx \leq \frac{C}{(1 + 2(\alpha + s - \ell))}, \end{aligned}$$

donde, para garantizar finitud de las integrales, se debe cumplir (2.2.8). Bajo estas condiciones, hemos probado que

$$|Du|_{H_{\alpha}^{\ell-1}(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{(\beta + 2s - \ell)(1 + 2(\alpha + s - \ell))}. \quad (2.2.9)$$

Dentro del rango provisto en (2.2.8) podemos demostrar algunos casos de interés. En la misma sintonía que el Teorema 2.2.6, si consideramos $\alpha = 0$ y $\ell = s + 1/2 - \varepsilon$ en (2.2.9) tenemos que:

Teorema 2.2.10. *Si $s \in (1/2, 1)$ y $f \in C^{\beta}(\Omega)$ para algún $\beta > 0$, entonces la solución u de (1.2.26) pertenece a $H^{s+\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ para todo $\varepsilon > 0$, con*

$$|Du|_{H^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)} \leq \frac{C(\Omega, s, n, \beta)}{\sqrt{\varepsilon}(2s - 1)} \|f\|_{C^{\beta}(\Omega)}.$$

En lo que sigue, tornaremos nuestra atención a los espacios pesados. Como nosotros nos restringimos a funciones peso que estén en la clase A_2 de Muckenhoupt tenemos que restringirnos a que $\alpha < 1/2$. De acuerdo con esto, tomamos $\alpha = 1/2 - \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico y tomamos $\ell = 1 + s - 2\varepsilon$ y $\beta = 1 - s$. De (2.2.9) logramos la siguiente versión pesada, donde ganamos casi una derivada de regularidad.

Teorema 2.2.11. Sea $s \in (1/2, 1)$, $f \in C^{1-s}(\Omega)$ y u es la solución de (1.2.26). Luego, dado $\varepsilon > 0$ se afirma que $u \in H_{1/2-\varepsilon}^{1+s-2\varepsilon}(\Omega)$ y

$$\|u\|_{H_{1/2-\varepsilon}^{1+s-2\varepsilon}(\Omega)} \leq \frac{C(\Omega, s, \|f\|_{1-s})}{\varepsilon}.$$

Observación 2.2.12. Las estimaciones de regularidad en esta sesión son óptimas, en el sentido que si consideramos el problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = 1 & \text{in } B(x_0, r), \\ u = 0 & \text{in } B(x_0, r)^c, \end{cases} \quad (2.2.10)$$

para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, entonces su solución esta dada por (cf. Teorema 2.1.12)

$$u(x) = \frac{2^{-2s}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+2s}{2})\Gamma(1+s)} (r^2 - |x - x_0|^2)^s \quad \text{in } B(x_0, r)$$

Es inmediato chequear que esta función pertenece a $H^{s+\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ para todo $s \in (0, 1)$, y en $H_{1/2-\varepsilon}^{1+s-2\varepsilon}(\Omega)$ si $s \in (1/2, 1)$ y que el parámetro ε no puede ser removido.

Observación 2.2.13. La técnica utilizada aquí para obtener mayor regularidad en los espacios pesados para $s \in (1/2, 1)$ no pueden ser aplicadas para el caso de $s \leq 1/2$. De hecho, de las consideraciones que hemos hecho, sabemos que no podremos tener mas regularidad que $H^{s+1/2-\varepsilon}(\Omega)$. Si $s \leq 1/2$, este exponente es menor a 1 por lo que no podemos aplicar la Proposición 1.2.13 como lo hicimos anteriormente.

2.2.3. Regularidad Global

Una consecuencia directa para regularidad global es una tarea sencilla en este contexto. Primero presentaremos el siguiente lema.

Lema 2.2.14. Para $\frac{1}{2} < s < 1, \varepsilon > 0$ y $u \in H^{s+\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)$, se sostiene

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega^c} \frac{|Du(x)|^2}{|x-y|^{n+2(s-\frac{1}{2}-\varepsilon)}} dy dx \leq \frac{C(\Omega, s, n)}{2s-1-2\varepsilon} \|Du\|_{H^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)}^2$$

Demostración. Es simplemente una consecuencia de la inclusión $\Omega^c \subset B(x, \delta(x))^c$ para todo $x \in \Omega$ y la desigualdad de Hardy (1.2.9). \square

Combinando los Lemmas 2.2.9, 2.2.14 y Teorema 2.2.10 hemos probado:

Proposición 2.2.15. *Si $1/2 < s < 1$ y $f \in C^\beta(\Omega)$ para algún $\beta > 0$, luego la solución u de (1.2.26) pertenece a $\tilde{H}^{s+\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ para todo $\varepsilon > 0$ y*

$$\|u\|_{H^{s+\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C(\Omega, s, n, \beta)}{\sqrt{\varepsilon}(2s-1)} \|f\|_{C^\beta(\Omega)}.$$

Demostración. En primer lugar, gracias al Lema 2.2.9 tenemos que u pertenece a $H^1(\mathbb{R}^n)$. Y por otro lado,

$$\begin{aligned} |Du|_{H^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|Du(x) - Du(y)|^2}{|x-y|^{n+2(s-\frac{1}{2}-\varepsilon)}} dx dy \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|Du(x) - Du(y)|^2}{|x-y|^{n+2(s-\frac{1}{2}-\varepsilon)}} dx dy + 2 \int_{\Omega} \int_{\Omega^c} \frac{|Du(x)|^2}{|x-y|^{n+2(s-\frac{1}{2}-\varepsilon)}} dy dx \\ &\leq |Du|_{H^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)}^2 + \frac{C(\Omega, s, n)}{2s-1-2\varepsilon} |Du|_{H^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{C(\Omega, s, n)}{(2s-1-2\varepsilon)(2s-1)\varepsilon} \|f\|_{C^\beta(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En la ante ultima desigualdad aplicamos Lema 2.2.14 y en la ultima Teorema 2.2.10, esto concluye la demostración. \square

De forma similar podemos probar:

Proposición 2.2.16. *Sea $1/2 < s < 1$, $f \in C^{1-s}(\Omega)$ y u una solución de nuestro problema. Luego, dado $\varepsilon > 0$, $u \in \tilde{H}_{1/2-\varepsilon}^{1+s-2\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|u\|_{H_{1/2-\varepsilon}^{1+s-2\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C(\Omega, s, \|f\|_{1-s})}{\varepsilon}$$

Demostración. En primer lugar, gracias al Lema 2.2.9 tenemos que u pertenece a $H^1(\mathbb{R}^n)$. Y por otro lado, haciendo la misma división de antes, utilizando el Teorema 2.2.11 y el hecho de que $\delta(x, y) < |x - y|$ cuando $(x, y) \in \Omega \times \Omega^c$ tenemos,

$$\begin{aligned}
|Du|_{H^{\frac{s-2\varepsilon}{\frac{1}{2}-\varepsilon}}(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|Du(x) - Du(y)|^2}{|x - y|^{n+2(s-2\varepsilon)}} \delta(x, y)^{1-2\varepsilon} dx dy \\
&= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|Du(x) - Du(y)|^2}{|x - y|^{n+2(s-2\varepsilon)}} \delta(x, y)^{1-2\varepsilon} dx dy + 2 \int_{\Omega} \int_{\Omega^c} \frac{|Du(x)|^2}{|x - y|^{n+2(s-2\varepsilon)}} \delta(x, y)^{1-2\varepsilon} dy dx \\
&\leq |Du|_{H^{\frac{s-2\varepsilon}{\frac{1}{2}-\varepsilon}}(\Omega)}^2 + 2 \int_{\Omega} \int_{\Omega^c} \frac{|Du(x)|^2}{|x - y|^{n+2(s-\frac{1}{2}-\varepsilon)}} dy dx \\
&\leq \frac{C(\Omega, s, \|f\|_{1-s})}{\varepsilon} + \frac{C(\Omega, s, n)}{2s - 1 - 2\varepsilon} \|Du\|_{H^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)}^2 \\
&\leq \frac{C(\Omega, s, \|f\|_{1-s})}{\varepsilon} + \frac{C(\Omega, s, n)}{(2s - 1 - 2\varepsilon)\varepsilon} \|f\|_{1-s},
\end{aligned}$$

donde en la ultima desigualdad usamos Teorema 2.2.10 □

2.2.4. El caso $s = 1/2$

Hasta ahora, el caso $s = 1/2$ a quedado excluido de nuestro análisis. En función de obtener estimaciones de regularidad para este caso, los argumentos para llevarlo a cavo son del mismo espíritu que antes, el único inconveniente a superar es la necesidad de $\beta > 0$ en Teorema 2.2.2. Este caso, demanda menos regularidad de la función f . En efecto, de la misma forma que probamos Lema 2.2.9 obtenemos que $u \in H^{1-\varepsilon}(\Omega)$ para todo $\varepsilon > 0$, con una cota del estilo

$$|u|_{H^{1-\varepsilon}(\Omega)} \leq \frac{C(\Omega, n)}{\varepsilon} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (2.2.11)$$

Observemos que esto no asegura la pertenencia de $u \in H^1(\Omega)$ tomando $\varepsilon \rightarrow 0$, lo cual es coherente con el ejemplo (2.2.10).

Tomando $\varepsilon > 0$, la norma energía en este caso puede ser acotada recordando (1.2.20) y la desigualdad de Hardy (1.2.4) como sigue,

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{V}}^2 &= |u|_{H^{1/2}(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |u(x)|^2 \omega_{\Omega}^s dx \\ &\leq |u|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)}^2 + C \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta(x)^{1+2\varepsilon}} \leq C \|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Capítulo 3

Aproximaciones por elementos finitos para el problema homogéneo

En este capítulo llevaremos a cabo un estudio completo de elementos finitos para el problema de Dirichlet homogéneo con el Laplaciano Fraccionario.

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Omega^c \end{cases}$$

En la Sección 3.1 introducimos el espacio discreto que utilizaremos, establecemos la formulación discreta de nuestro problema y recordamos algunas propiedades necesarias para más adelante. El enfoque que elegimos para obtener una estimación del error es considerar un interpolador adecuado en un espacio de elementos finitos \mathbb{V}_h , y estimar el error de interpolación. En la Sección 3.2 analizamos las propiedades de estabilidad y aproximación del operador de Scott-Zhang en espacios de Sobolev fraccionarios. Estas propiedades son usadas para mejorar el orden óptimo de convergencia de las aproximaciones de elementos finitos para el contexto estándar. En la Sección 3.3 deducimos el orden de convergencia del esquema discreto en la norma energía $L^2(\Omega)$. El método de elementos finitos es implementado en una dimensión, donde mallas uniformes son propuestas. Experimentos numéricos son presentados en la Sección 3.4.

3.1. Problema discreto y espacios discretos

Asumimos que $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \bar{\Omega}$ donde \mathcal{T}_h es una triangulación admisible de Ω compuesta por elementos de T de diámetro h_T y con ρ_T igual al diámetro de la bola mas grande contenida en T . Requerimos que esta familia de triangulaciones en consideración satisfaga:

$$\begin{aligned} \exists \sigma > 0 \text{ t.q. } h_T \leq \sigma \rho_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, & \quad (\text{Regularidad}) \\ \exists \kappa > 0 \text{ t.q. } h_T \leq \kappa h_{T'} \quad \forall T, T' \in \mathcal{T}_h : \bar{T} \cap \bar{T}' \neq \emptyset, & \quad (\text{Uniformidad Local}) \end{aligned}$$

Naturalmente la segunda condición es consecuencia de la primera. De esta manera κ puede ser expresado en términos de σ .

Consideraremos elementos finitos Lagrangianos de grado 1 y establecemos funciones discretas que se anulan en $\partial\Omega$. A saber,

$$\mathbb{V}_h = \{v \in C_0(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}_1 \forall T \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.1.1)$$

A lo largo de lo que queda de la tesis, denotaremos por $\{X^{(i)}\}_{i \in I}$ y $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ a los nodos y a las bases nodales de \mathbb{V}_h , respectivamente. Recordemos de la Sección 1.2.3 que el espacio varacional para el problema (3) es

$$(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}) := \left(\tilde{H}^s(\Omega), \sqrt{\frac{C(n,s)}{2}} |\cdot|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \right).$$

Naturalmente, el espacio \mathbb{V}_h esta contenido en \mathbb{V} , por esto, es claro que estamos tratando con un método conforme. Más aún, es inmediato que existe única solución para el problema discreto

$$\text{encontrar } u_h \in \mathbb{V}_h \text{ tal que } \langle u_h, v_h \rangle_{\mathbb{V}} = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \quad (3.1.2)$$

donde $\langle u_h, v_h \rangle_{\mathbb{V}}$ es la forma bilineal definida por (1.2.18) y el Lema de Céa vale en este contexto. En otras palabras, la solución de elementos finitos es la mejor aproximación en \mathbb{V}_h del problema (3):

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{V}} = \min_{v_h \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathbb{V}}. \quad (3.1.3)$$

Entonces, la convergencia de las aproximaciones de elementos finitos es equivalente a preguntarse como los espacios discretos \mathbb{V}_h aproximan soluciones de (3.1.2) en la norma energía.

Terminaremos esta sección estableciendo un poco de notación y recordando propiedades básicas. Tomando un subdominio $\Lambda = \Lambda_i \subset \bar{\Omega}$, considerar un mapa afín $F_\Lambda : \hat{\Lambda} \rightarrow \Lambda$, $F_\Lambda(\hat{x}) = B_\Lambda \hat{x} + x_0$, donde $\hat{\Lambda}$ es un conjunto referencia. Luego, se sigue inmediatamente que,

$$\begin{aligned} |\det B_\Lambda| &\leq Ch_\Lambda^{\dim(\Lambda)}, & \|B_\Lambda\| &\leq Ch_\Lambda, \\ |\det B_\Lambda^{-1}| &\leq Ch_\Lambda^{-\dim(\Lambda)}, & \|B_\Lambda^{-1}\| &\leq Ch_\Lambda^{-1}, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

donde las constantes dependen del grosor tanto de $\hat{\Lambda}$ o Λ . En el caso que Λ corresponde a un elemento de la triangulación \mathcal{T}_h , denotaremos al conjunto \hat{T} , y los definimos por

$$\hat{T} := \{ \hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \hat{x}_1 \leq 1, 0 \leq \hat{x}_2 \leq \hat{x}_1 \}. \quad (3.1.5)$$

Dada una función $v : T \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $\hat{v} = v \circ F_T$. Haciendo un cambio de variables y usando (3.1.4), se verifica inmediatamente que

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{T})} &\leq C(\sigma)h_T^{-n/2}\|v\|_{L^2(T)}, \\ \|D^\alpha \hat{v}\|_{L^2(\hat{T})} &\leq C(\sigma, k)h_T^{k-n/2}\|D^\alpha v\|_{L^2(T)} \quad \forall \alpha \text{ t.q. } |\alpha| = k, \\ \|D^\alpha \hat{v}\|_{H^{\ell-k}(\hat{T})} &\leq C(\sigma, k, \ell)h_T^{\ell-n/2}\|D^\alpha v\|_{H^{\ell-k}(T)} \quad \forall \alpha \text{ t.q. } |\alpha| = k, \ell \geq k. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Finalmente, observamos que las funciones base que estamos considerando son Lipschitz, con modulo de continuidad $\text{Lip}(\varphi_i) \leq \frac{c(\sigma)}{h_T}$ para todo i , donde T es cualquier elemento que tiene a $X^{(i)}$ como vértice.

3.2. Estimaciones de quasi-interpolación

La identidad (3.1.3) nos permite estimar la solución de elementos finitos eligiendo una buena función discreta v_h del lado derecho. Tradicionalmente, esto se hace examinando operadores de interpolación. Sin embargo, no podemos asegurar que la evaluación puntual de soluciones este bien definida, necesitamos operadores que utilicen como entrada algún tipo de integral de la función. Estos son llamados operadores de quasi-interpolación y utilizan integrales de la función a ser interpolada ya sea sobre elementos o sobre elementos del borde, siempre que la traza este bien definida. Luego, estimaciones que involucran estos operadores de quasi-interpolación típicamente acotan normas de un elemento en términos de las normas de sus alrededores.

Un aspecto complicado de trabajar con seminormas fraccionarias es que no son aditivas con respecto a la descomposición de dominios. Sumar las cotas de todos los elementos de la triangulación no conlleva a una cota global. Por lo tanto, recaemos en las técnicas de localización vistas en la Sección 1.2.4. Esto requiere entonces estimaciones no solo sobre elementos, sino también sobre cierto solapamiento. Es decir, acotaremos funciones sobre conjuntos de la forma $T \times S_T$, donde

$$S_T := \bigcup_{T': T' \cap T \neq \emptyset} T'.$$

Recordamos la formula de localización obtenida en (1.2.28) donde δ_i es remplazado por h_T gracias a la uniformalidad Local de la cuadratura.

$$|v|_{H^s(\Omega)}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\iint_{T \times S_T} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \frac{C(n, \sigma)}{sh_T^{2s}} \|v\|_{L^2(T)}^2 \right]. \quad (3.2.1)$$

Nuestro siguiente paso es conseguir un operador de quasi-interpolación adecuado. Nosotros trabajamos con el interpolador de Scott-Zhang [46]. Otras opciones que pueden derivar en similares aproximaciones son el operador de Clément [14], el operador de Bernardi-Girault [7] o la mas reciente contribución por Guermond and Ern [27].

Para el propósito de la siguiente definición y solo por esta sección, asumiremos que el espacio de elementos finitos \mathbb{V}_h es construido por elementos de Lagrange de grado arbitrario k .

Definición 3.2.1 (Interpolador de Scott-Zhang). Dado un índice $i \in I$, se define el numero a_i como sigue: para $X^{(i)} \in \overline{T}$, tomamos $\Lambda_i \subset \partial T$ t.q. $X^{(i)} \in \Lambda_i$ (si $X^{(i)} \in \partial\Omega$, entonces Λ_i debe vivir en $\partial\Omega$). Tomamos la proyección $P_{\Lambda_i} : L^1(\Lambda_i) \rightarrow \mathcal{P}_1(\Lambda_i)$, sea $\{\varphi_j^{(i)}\}_{j \in J}$ la base de funciones que no se anulan en Λ_i y $\{\psi_j^{(i)}\}$ su base dual,

$$\int_{\Lambda_i} \psi_j^{(i)} \varphi_k^{(i)} = \delta_{j,k} \quad \forall k \in J.$$

Luego, concideramos $a_i = P_{\Lambda_i} v(X^{(i)})$, y dada una función $v \in H^\ell(\Omega)$ ($\ell > 1/2$), definimos el interpolador de Scott-Zhang de v como

$$I_h v(x) = \sum_{i \in I} a_i \varphi_i(x),$$

o equivalentemente,

$$I_h v(x) = \sum_{i \in I} \left(\int_{\Lambda_i} v \psi_i^{(i)} \right) \varphi_i(x).$$

Recordamos algunas de las propiedades básicas del operador I_h .

Teorema 3.2.2. *Sea $\ell > 1/2$, luego $I_h : H^\ell(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_h$ satisface que $I_h(v_h) = v_h$ para todo $v_h \in \mathbb{V}_h$ y I_h preserva condiciones de borde, en este sentido $H_0^\ell(\Omega)$ es mapeado a $\mathbb{V}_{h,0} := \{v_h \in \mathbb{V}_h : v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$.*

Resultados de estabilidad y aproximabilidad del interpolador de Scott-Zhang en espacios fraccionarios fue estudiado en [40]. Aquí seguiremos las técnicas de ese trabajo y, en vistas de (3.2.1), adaptarlo a conjuntos de la forma $T \times S_T$.

Proposición 3.2.3. *Sea $T \in \mathcal{T}_h$. Si $s \in (0, 1)$ y $\ell > \max\{1/2, s\}$, escribimos $\ell = k + \ell'$, con $k \in \mathbb{N}$ y $\ell' \in (0, 1]$. Si $v \in H^\ell(\Omega)$, entonces*

$$\int_T \int_{S_T} \frac{|I_h v(x) - I_h v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \leq \frac{C(n, \sigma, \ell)}{1 - s} \left[\sum_{j=0}^k h_T^{2j-2s} \|D^j v\|_{L^2(S_T)}^2 + h_T^{2\ell-2s} |v|_{H^\ell(S_T)}^2 \right]. \quad (3.2.2)$$

Demostración. Sea $T \in \mathcal{T}_h$, $x \in T$ y $y \in S_T$, de la definición del interpolador de Scott-Zhang es claro que

$$I_h v(x) - I_h v(y) = \sum_{i: X^{(i)} \in S_T} \left(\int_{\Lambda_i} v \psi_i \right) (\varphi_i(x) - \varphi_i(y)).$$

Por lo tanto, aplicando la desigualdad de Hölder y recordando que el número de términos en la suma está acotado por alguna constante dependiendo de la regularidad de la malla, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_T \int_{S_T} \frac{|I_h v(x) - I_h v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx &\leq \\ &C(\sigma) \sum_{i: X^{(i)} \in S_T} \|\psi_i\|_{L^\infty(\Lambda_i)}^2 \|v\|_{L^1(\Lambda_i)}^2 \int_T \int_{S_T} \frac{|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Estimaremos los términos del lado derecho de la desigualdad previa separadamente. Con la notación de la Definición 3.2.1, sea T' un elemento tal que

$T' = \Lambda_i$ (en este caso, esto es $T' = T$) o $\Lambda_i \subset \partial T'$ (en este caso, T' es o bien T o uno de los vecinos que estan en S_T).

Por [46, Lemma 3.1], se tiene que

$$\|\psi_i\|_{L^\infty(\Lambda_i)} \leq C(\sigma) h_{T'}^{-\dim(\Lambda_i)}. \quad (3.2.4)$$

Lo siguiente sera estimar $\|v\|_{L^1(\Lambda_i)}$ en términos de $\|v\|_{L^2(T')}$. Por un lado, si Λ_i es n -dimensional, entonces $\Lambda_i = T'$ y por la desigualdad de Hölder se obtiene que

$$\|v\|_{L^1(\Lambda_i)} \leq h_{T'}^{n/2} \|v\|_{L^2(T')}. \quad (3.2.5)$$

Por otro lado, si $\Lambda_i \subset \partial T'$ es $(n-1)$ -dimensional, consideramos un mapa afin $F_{\Lambda_i} : \hat{\Lambda}_i \rightarrow \Lambda_i$, donde $\hat{\Lambda}_i \subset \partial \hat{T}$, y \hat{T} es el conjunto de referencia definido en (3.1.5). Luego, aplicando el teorema de la traza $H^\ell(\hat{T}) \hookrightarrow L^1(\hat{\Lambda}_i)$, tenemos

$$\|v\|_{L^1(\Lambda_i)} \leq C(\ell) h_{T'}^{n-1} \|\hat{v}\|_{H^\ell(\hat{T})},$$

donde $\hat{v} = v \circ F$. Combinando esta desigualdad con (3.1.6), deducimos

$$\|v\|_{L^1(\Lambda_i)} \leq C(\ell, \sigma) h_{T'}^{n/2-1} \left[\sum_{j=0}^k h_{T'}^j \|D^j v\|_{L^2(T')} + h_{T'}^\ell |v|_{H^\ell(T')} \right]. \quad (3.2.6)$$

En cuanto a los términos que involucran a las funciones base, asumimos que T es un elemento tal que $X^{(i)} \in S_T$. Recordemos que la regularidad de la malla implica que $\text{Lip}(\varphi_i) \leq \frac{C(\sigma)}{h_T}$, y que existe una constante $C(\sigma)$ tal que para todo $x \in T$ se tiene que

$$\alpha(x) := \max_{z \in \partial S_T} d(x, z) \leq C(\sigma) h_T. \quad (3.2.7)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_T \int_{S_T} \frac{|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx &\leq \frac{C(\sigma)}{h^2} \int_T \int_{S_T} |x - y|^{2-n-2s} dy dx \\ &\leq \frac{C(n, \sigma)}{h^2} \int_T \int_0^{\alpha(x)} \rho^{1-2s} d\rho dx \leq \frac{C(n, \sigma)}{1-s} h_T^{n-2s}. \end{aligned}$$

Combinando estas estimaciones con (3.2.4) y ya sea (3.2.5) o (3.2.6), y tomando en consideración que $h_{T'}$ es comparable con h_T para toda $T' \subset S_T$, deducimos

- si $\Lambda_i = T$, entonces

$$\|\psi_i\|_{L^\infty(\Lambda_i)}^2 \|v\|_{L^1(\Lambda_i)}^2 \int_T \int_{S_T} \frac{|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \leq \frac{C(n, \sigma)}{1 - s} h_T^{-2s} \|v\|_{L^2(T)}^2;$$

- si $\Lambda_i \subset \partial T$, entonces

$$\begin{aligned} \|\psi_i\|_{L^\infty(\Lambda_i)}^2 \|v\|_{L^1(\Lambda_i)}^2 \int_T \int_{S_T} \frac{|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \leq \\ \frac{C(n, \sigma, \ell)}{1 - s} h_T^{-2s} \left[\sum_{j=0}^k h_{T'}^j \|D^j v\|_{L^2(T')} + h_{T'}^\ell |v|_{H^\ell(T')} \right]^2. \end{aligned}$$

Como $\#\{i/X^{(i)} \in \bar{T}\} \leq C(\sigma)$, la identidad (3.2.2) se sigue combinando las últimas dos estimaciones con (3.2.3) \square

Antes de obtener estimaciones de la aproximación del operador de Scott-Zhang, recordaremos algunos hechos clave bien conocidos. Sea S un dominio estrellado con respecto a una bola B . Introducimos el polinomio $P_k v$ de grado k con la propiedad

$$\int_S \partial^\alpha (v - P_k v) = 0$$

para todo multi-índice α de orden $|\alpha| \leq k$. En nuestro contexto necesitamos focalizarnos en los casos $k = 0, 1$. Por ejemplo, la Proposición 1.2.6 nos dice que

$$\|v - P_0 v\|_{L^2(S_T)} \leq C h^\ell |v|_{H^\ell(S_T)},$$

para $0 < \ell < 1$ y con una constante dependiendo del grosor de S_T . En este contexto, gracias a las propiedades de la malla (Regularidad) y (uniformidad local), dicha constante puede ser expresada en términos de σ .

Como $|v - P_0 v|_{H^\ell(S_T)} = |v|_{H^\ell(S_T)}$, por medio de interpolación y estimaciones L^2 obtenemos

$$|v - P_0 v|_{H^s(S_T)} \leq C h^{\ell-s} |v|_{H^\ell(S_T)}, \quad (3.2.8)$$

para cualquier $0 \leq s \leq \ell < 1$, con una constante $C = C(\sigma)$.

Similarmente, usando la desigualdad estándar de Poincaré para funciones con promedio cero junto con la Proposición 1.2.6, obtenemos para cualquier $1 < \ell < 2$

$$\|v - P_1 v\|_{L^2(S_T)} + h_T |v - P_1 v|_{H^1(S_T)} \leq C h_T^\ell |v|_{H^\ell(S_T)}, \quad (3.2.9)$$

con C uniformemente acotada por σ .

Ahora estamos listos para probar, por medio de argumentos estándar, una aproximación para el operador de Scott-Zhang sobre $T \times S_T$.

Proposición 3.2.4. *Sea o bien $0 < s < \ell < 1$ y $\ell > 1/2$ ó $1/2 < s < 1$ y $1 < \ell < 2$, y sea I_h el operador de Scott-Zhang. Entonces, para todo $T \in \mathcal{T}_h$,*

$$\int_T \int_{S_T} \frac{|(v - I_h v)(x) - (v - I_h v)(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \leq \frac{C(n, \sigma, \ell)}{1 - s} h_T^{2\ell-2s} |v|_{H^\ell(S_T)}^2.$$

Demostración. Asumamos $0 < s < \ell < 1$ y $\ell > 1/2$. Como I_h es una proyección sobre \mathbb{V} , se tiene que $v - I_h v = v - I_h P_0 + I_h(P_0 - v)$.

Más aún, combinando la estabilidad de la proposición 3.2.2 con la estimación (3.2.8), deducimos

$$\begin{aligned} & \int_T \int_{S_T} \frac{|I_h(P_0 v - v)(x) - I_h(P_0 v - v)(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \leq \\ & \frac{C(n, \sigma, \ell)}{1 - s} \left[h_T^{-2s} \|P_0 v - v\|_{L^2(S_T)}^2 + h_T^{2\ell-2s} |P_0 v - v|_{H^\ell(S_T)}^2 \right] \leq \frac{C(n, \sigma, \ell)}{1 - s} h_T^{2\ell-2s} |v|_{H^\ell(S_T)}^2. \end{aligned}$$

La prueba para el caso $1/2 < s < 1$ y $1 < \ell < 2$ se sigue en el mismo sentido, usando el polinomio $P_1 v$ y la desigualdad (3.2.9), respectivamente. \square

Observación 3.2.5. Siguiendo en la misma línea que en las demostraciones de las proposiciones (3.2.3) y (3.2.4) es posible obtener estabilidad L^2 y estimaciones de aproximabilidad validas para todo $T \in \mathcal{T}_h, v \in H^\ell(\Omega), \ell \in (1/2, 2)$:

$$\begin{aligned} \|I_h v\|_{L^2(T)}^2 & \leq C(n, \sigma, \ell) \left[\sum_{j=0}^k h_T^{2j} \|D^j v\|_{L^2(S_T)}^2 + h_T^{2\ell} |v|_{H^\ell(S_T)}^2 \right], \\ \|v - I_h v\|_{L^2(T)}^2 & \leq C(n, \sigma, \ell) h_T^{2\ell} |v|_{H^\ell(S_T)}^2. \end{aligned}$$

3.3. Mallas uniformes

Teniendo a mano las estimaciones de los quasi-interpoladores, estamos listos para calcular el orden de convergencia del esquema de elementos finitos para (2.0.1). A partir de ahora, asumiremos que la familia de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}$ es óptimamente regular y localmente quasi-uniforme: existe alguna constante κ tal que

$$h_T \leq \kappa h_{T'} \quad \forall T, T' \in \mathcal{T}_h : \bar{T} \cap \bar{T}' \neq \emptyset.$$

En esta sección obtendremos estimaciones de convergencia en la norma energía y $L^2(\Omega)$ sin asumir ninguna otra condición en la familia de mallas.

3.3.1. Convergencia en la norma energía

Para obtener estimaciones de la norma energía, gracias a la identidad (3.1.3), simplemente debemos acotar $\|u - I_h u\|_{\mathbb{V}}$ adecuadamente, donde u es solución de (2.0.1). En primer lugar, llamaremos $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ a la medida de la malla, combinando la estimación de la aproximación de la Proposición 3.2.4 con la propiedad de localización (1.2.28) obtenemos

$$|u - I_h u|_{H^s(\Omega)}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{C(n, \sigma, \ell)}{1-s} h^{2\ell-2s} |u|_{H^\ell(S_T)}^2 + \frac{C(n, \sigma)}{sh^{2s}} \|u - I_h u\|_{L^2(T)}^2 \right].$$

Más aún, por la Observación 3.2.5, la norma L^2 de $\|u - I_h u\|_{L^2(T)}$ está acotada en términos de $|u|_{H^\ell(S_T)}$. Notando que la regularidad de la malla implica que, dado un elemento T el número de estrellas S'_T tal que $T \subset S'_T$ está acotado por $C(\sigma)$, deducimos

$$|u - I_h u|_{H^s(\Omega)} \leq \frac{C(n, \sigma, \ell)}{\sqrt{s(1-s)}} h^{\ell-s} |u|_{H^\ell(\Omega)}. \quad (3.3.1)$$

Es de suma importancia notar que la constante obtenida arriba tiene el escale «correcto» para $s \rightarrow 0$ y $s \rightarrow 1$, i.e., $C \sim \sqrt{s(1-s)}^{-1}$. Luego, recordando que $\|\cdot\|_{\mathbb{V}} = \sqrt{\frac{C(n,s)}{2}} |\cdot|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$, donde la constante $C(n, s)$ está dada por (1.1.3), y en vistas del Corolario 1.2.10 la seminorma $H^s(\mathbb{R}^n)$ es equivalente a la norma $H^s(\Omega)$ si $s < 1/2$ (o solo a la seminorma $H^s(\Omega)$ si $s > 1/2$), y concluimos

$$\|u - I_h u\|_{\mathbb{V}} \leq C(n, s, \sigma, \ell) h^{\ell-s} |u|_{H^\ell(\Omega)}. \quad (3.3.2)$$

La constante de arriba esta uniformemente acotada para todo $s \in (0, 1)$. Invocando la identidad (3.1.3), y combinándola respectivamente con el Teorema 2.2.6, estimación (2.2.11) y Teorema 2.2.10, hemos probado el orden de convergencia de las aproximaciones por elementos finitos en la norma energía.

Teorema 3.3.1. *Sea Ω un dominio acotado, Lipschitz y que satisface la condición de la bola exterior. Para soluciones u de (2.0.1) y su aproximación*

por elementos finitos u_h dada por (3.1.2) tenemos las siguientes estimaciones a priori .

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\mathbb{V}} &\leq \frac{C(n, s, \sigma)}{\varepsilon} h^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \|f\|_{C^{\frac{1}{2}-s}(\Omega)} & \forall \varepsilon > 0, \text{ si } s < 1/2, \\ \|u - u_h\|_{\mathbb{V}} &\leq \frac{C(n, \sigma)}{\varepsilon} h^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} & \forall \varepsilon > 0, \text{ si } s = 1/2, \\ \|u - u_h\|_{\mathbb{V}} &\leq \frac{C(n, s, \beta, \sigma)}{\sqrt{\varepsilon}(2s-1)} h^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \|f\|_{C^\beta(\Omega)} & \forall \varepsilon > 0, \text{ si } s > 1/2. \end{aligned}$$

Entonces, si h es suficientemente chico, tomando $\varepsilon = |\ln h|^{-1}$ obtenemos la estimación quasi-óptima

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\mathbb{V}} &\leq C(n, s, \sigma) h^{\frac{1}{2}} |\ln h| \|f\|_{C^{\frac{1}{2}-s}}, & \text{si } s < 1/2, \\ \|u - u_h\|_{\mathbb{V}} &\leq C(n, \sigma) h^{\frac{1}{2}} |\ln h| \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si } s = 1/2, \\ \|u - u_h\|_{\mathbb{V}} &\leq \frac{C(n, s, \beta, \sigma)}{2s-1} h^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\ln h|} \|f\|_{C^\beta(\Omega)}, & \text{si } s > 1/2. \end{aligned}$$

3.3.2. Convergencia en $L^2(\Omega)$

Después de obtener estimaciones para la norma energía, es natural preguntarse cuanto mejora el orden de convergencia si la norma en la que se mide el error es más débil. Aquí seguiremos los, bien conocidos, argumentos de dualidad de Aubin-Nitsche para obtener estimaciones de error en la norma $L^2(\Omega)$.

Para llevar a cabo esta tarea, necesitaremos de estimaciones de la norma Sobolev, la siguiente proposición nos brinda esta herramienta. El siguiente resultado se desprende de [26, Theorem 7.1].

Proposición 3.3.2. *Sea $f \in H^r(\Omega)$ para $r \geq -s$, $u \in \tilde{H}^s(\Omega)$ una solución del problema Dirichlet (2.0.1) y sea $\alpha = s + r$ si $s + r < 1/2$ o $\alpha = 1/2 - \varepsilon$ si $s + r \geq 1/2$, con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente chico. Luego, $u \in \tilde{H}^{s+\alpha}(\Omega)$ y se tiene que*

$$|u|_{H^{s+\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, s, \Omega, \alpha) \|f\|_{H^r(\Omega)}.$$

Estimaciones del error en términos de las normas de Sobolev de la función del lado derecho se siguen de (3.3.2) y de la Proposición 3.3.2. Es decir, si $f \in H^r(\Omega)$ para alguna $r \geq -s$, entonces

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{V}} \leq C(n, s, \sigma, \alpha) h^\alpha \|f\|_{H^r(\Omega)}, \quad (3.3.3)$$

donde $\alpha = \min\{s + r, 1/2 - \varepsilon\}$.

Proposición 3.3.3. *Sea Ω un dominio suave, $s \in (0, 1)$, $f \in H^r(\Omega)$ para algun $r \geq -s$ y u solución de (2.0.1). Dada una malla uniforme \mathcal{T}_h de tamaño h , y el espacio \mathbb{V}_h definido como en (3.1.1), sea u_h la solución de elementos finitos para el problema discreto (3.1.2). Entonces se tiene que*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C(n, s, \sigma, \alpha) h^{\alpha+\beta} \|f\|_{H^r(\Omega)}, \quad (3.3.4)$$

donde $\alpha = \min\{s + r, 1/2 - \varepsilon\}$ y $\beta = \min\{s, 1/2 - \varepsilon\}$

Demostración. Sea $w \in \mathbb{V}$ una solución débil del problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s w = u - u_h & \text{en } \Omega, \\ w = 0 & \text{en } \Omega^c \end{cases}$$

Luego, utilizando la ortogonalidad, obtenemos

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle w, u - u_h \rangle_{\mathbb{V}} \leq \|w - I_h w\|_{\mathbb{V}} \|u - u_h\|_{\mathbb{V}},$$

Donde $I_h w \in \mathbb{V}_h$ es el interpolador de Scott-Zhang de w . Tomando en cuenta la regularidad dada por la Proposición 3.3.2 con $r = 0$, la estimación del interpolador (3.3.2) toma la forma

$$\|w - I_h w\|_{\mathbb{V}} \leq C(n, s, \sigma) h^\beta |w|_{H^{s+\beta}(\Omega)} \leq C(n, s, \sigma, \beta) h^\beta \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)},$$

donde $\beta = \min\{s, 1/2 - \varepsilon\}$. Finalmente, usando la estimación de (3.3.3) obtenemos

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(n, s, \sigma, \alpha, \beta) h^{\alpha+\beta} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{H^r(\Omega)},$$

y la estimación (3.3.4) se sigue fácilmente. \square

3.4. Experimentos Numéricos

En esta subsección haremos aproximaciones del problema 3 para el caso $\Omega = (-1, 1)$. La dificultad principal de los experimentos numéricos, radica en el hecho de que estamos trabajando con un núcleo singular no local y que integrales en todo \mathbb{R}^n deben ser calculadas. Por culpa de esta no localidad, las integrales que involucran funciones nodales con soporte disjuntos no son nulas, por lo tanto, las matrices de rigidez comprendidas en estos experimentos estarán llenas en todos sus coeficientes. Estos problemas afectan tanto a la parte computacional como a el orden de los algoritmos.

Nuestras estimaciones acotan el error tanto de la norma L^2 y de la norma energía (cf. Proposición 3.3.3 y Teorema 3.3.1). Si la solución exacta de nuestro problema es viable, el error de la norma L^2 es fácilmente calculable vía cuadraturas estándar. Sin embargo, como la norma energía es de naturaleza fraccionaria, calcularla para una función arbitraria es una tarea delicada.

El siguiente lema nos muestra que, en efecto, la norma energía del error es igual a una cantidad que no involucra núcleos singulares.

Lema 3.4.1. *Se tiene que*

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{V}} = \left(\int_{\Omega} f(x)(u(x) - u_h(x))dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Esto es inmediato consecuencia de la condición de ortogonalidad.

$$\langle v_h, u - u_h \rangle_{\mathbb{V}} = 0 \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h.$$

En efecto, de esto obtenemos que

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{V}}^2 = \langle u - u_h, u - u_h \rangle_{\mathbb{V}} = \langle u, u - u_h \rangle_{\mathbb{V}},$$

y la igualdad se sigue de (1.2.26). \square

Por otro lado, es necesario calcular la matriz de rigidez asociada a la aproximación de elementos finitos. Para esto utilizaremos los resultados obtenidos en [53]. Los cuales son: para $s \neq 1/2$

$$a_{i,j} = -h^{1-2s} \begin{cases} \frac{4(k+1)^{3-2s} + 4(k-1)^{3-2s} - 6k^{3-2s} - (k+2)^{3-2s} - (k-2)^{3-2s}}{2s(1-2s)(1-2)(3-2s)}, & k = j - i, k \geq 2 \\ \frac{3^{3-2s} - 2^{5-2s} + 7}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)}, & j = i + 1 \\ \frac{2^{3-2s} - 4}{s(1-2s)(1-s)(3-2s)}, & j = i, \end{cases}$$

y para $s = 1/2$, tenemos

$$a_{i,j} = \begin{cases} -4(k+1)^2 \log(k+1) - 4(k-1)^2 \log(k-1) \\ \quad + 6k^2 \log(k) - (k+2)^2 \log(k+2) + (k-2)^2 \log(k-2), & k = j-i, k > 2 \\ 56 \ln(2) - 36 \ln(3), & j = i+2 \\ 9 \ln(3) - 16 \ln(2), & j = i+1 \\ 8 \ln(2), & j = i. \end{cases}$$

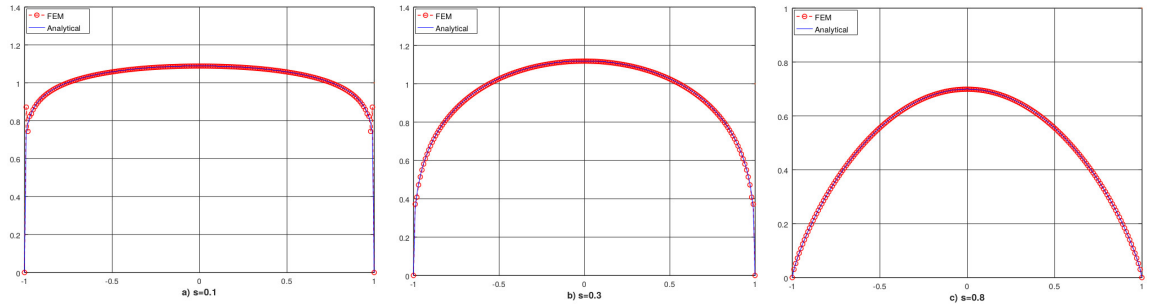
Ejemplo: En nuestro ejemplo vamos a calcular numérica y explícitamente soluciones de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = 1 & x \in (-1, 1), \\ u = 0 & x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Si siguiendo la misma línea que en [4, Remark 3.13] tenemos que la solución exacta viene dada por

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(2s+1)} (1-x^2)^s \cdot \mathbf{1}_{(-1,1)} \quad (3.4.2)$$

En la siguiente figura, comparamos para diferentes valores de s la solución exacta (3.4.2) y la aproximación numérica. Aquí consideramos $N = 200$.



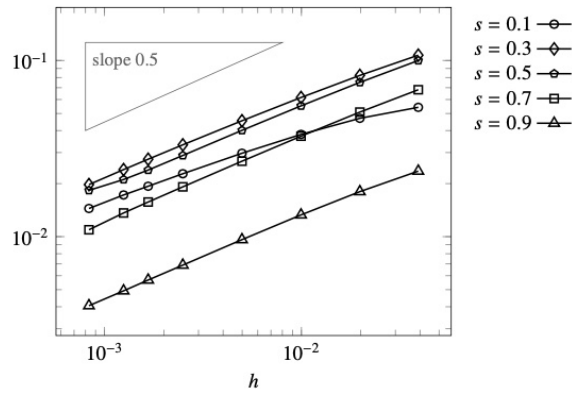
El computo del error en la norma energía, puede ser llevado a cabo gracias al Lema 3.4.1 y se obtiene la siguiente expresión

$$\|u - u_h\|_{\mathbb{V}} = \left(\int_{-1}^1 u(x) - u_h(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donde el lado derecho puede ser fácilmente calculado, ya que tenemos la formula cerrada

$$\int_{-1}^1 u dx = \frac{\pi}{2^{2s}\Gamma(s + \frac{1}{2})\Gamma(s + \frac{2}{3})}$$

y el termino correspondiente a $\int_{-1}^1 u_h$ se puede obtener numéricamente. En la siguiente figura, presentamos los errores computacionales evaluados para diferentes valores de s y h . La tasa de convergencia muestra que son del orden (en h) de $1/2$. Esto esta en completa concordancia con (3.3.1).



Bibliografía

- [1] B. Coll A. Buades y J. M. Morel. «Image denoising methods. A new nonlocal principle.» En: *SIAM Rev.* (2010), 52(1):113-147.
- [2] A. Rosso A. Zoia y M. Kardar. «Fractional Laplacian in bounded domains.» En: *Phys. Rev. E (3)* (2007), 6(2):021116, 11.
- [3] M. Abramowitz e I. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Reprint of the 1972 ed.* English. A Wiley-Interscience Publication. Selected Government Publications. New York: John Wiley & Sons, Inc; Washington, D.C.: National Bureau of Standards. xiv, 1046 pp.; \$ 44.95 (1984). 1984.
- [4] G. Acosta y J. P. Borthagaray. «A fractional Laplace equation: Regularity of solutions and finite element approximations.» En: *SIAM J.* (2017), 55(2):472-495.
- [5] G. Acosta y col. «Regularity theory and high order numerical methods for one-dimensional fractional-Laplacian equations.» En: *Math. Comp.* (2017).
- [6] R. Adams y J. Fournier. «Sobolev spaces.» En: *Academic press* volume 140 (2003).
- [7] C. Bernardi y V. Girault. «A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements.» En: *SIAM J. Numer. Anal.* (1998), 35(5):1893-1916.
- [8] J. Bertoin. «Lévy processes, volume 121 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press». En: *Cambridge* (1996).
- [9] A. Bonito y J. Pasciak. «Numerical approximation of fractional powers of elliptic operators.» En: *Math. Comp.* (2015), 84(295):2083-2110.

- [10] J. Bourgain, H. Brezis y P. Mironescu. «Another look at Sobolev spaces. In *Optimal Control and Partial Differential Equations*». En: (2001), págs. 439-455.
- [11] C. Bucur y E. Valdinoci. *Nonlocal diffusion and applications*. English. Vol. 20. Cham: Springer; Bologna: UMI, 2016, págs. xii + 155. ISBN: 978-3-319-28738-6. DOI: 10.1007/978-3-319-28739-3.
- [12] A. de Pablo C. Brandle E. Colorado y U. Sánchez. «A concave-convex elliptic problem involving the fractional Laplacian.» En: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* (2013), 143:39-71, 2.
- [13] L. Caffarelli y L. Silvestre. «An extension problem related to the fractional Laplacian.» En: *Comm. Partial Differential Equations* (2007), 32(7-9):1245-1260.
- [14] Ph Clément. «Approximation by finite elements functions using local regularization.» En: *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. RAIRO Analyse Numérique* (1975), 9(R-2):77 -84.
- [15] R. Cont y P. Tankov. «Financial modelling with jump processes. Chapman Hall/CRC Financial Mathematics Series.» En: *Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL* (2004).
- [16] J. H. Cushman y T.R. Ginn. «Nonlocal dispersion in media with continuously evolving scales of heterogeneity.» En: *Transport in Porous Media* (1993), 13(1):123-138.
- [17] S. W. Wheatcraft D. A. Benson y M. M. Meerschaert. «application of a fractional advection-dispersion equation.» En: *Water Resources Research* (2000), 36(6):1403-1412.
- [18] M. D’Elia y M. Gunzburger. «The fractional Laplacian operator on bounded domains as a special case of the nonlocal diffusion operator.» En: *Comput. Math. Appl.* (2013), 66(7):1245-1260.
- [19] E. Di Nezza, G. Palatucci y E. Valdinoci. «Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces». En: *Bull. Sci. Math* (2011). DOI: <http://arxiv.org/abs/1104.4345v1>.
- [20] I. Drelichman y R. G. Durán. «Improved Poincaré inequalities in fractional Sobolev spaces.» En: *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 43 volume 140 (2018), págs. 885-903.

- [21] S. Duo e Y. Zhang. «Computing the ground and first excited states of the fractional Schrödinger equation in an infinite potential well.» En: *Commun. Comput. Phys.* (2015), 18(2):321-350.
- [22] B. Dyda, A. Kuznetsov y M. Kwaśnicki. «Fractional Laplace operator and Meijer G-function.» En: *Constr. Approx.* (2016), págs. 1-22.
- [23] P. Gatto y J. S. Hesthaven. «Numerical approximation of the fractional Laplacian via hp-finite elements, with an application to image denoising.» En: *J. Sci. Comput.* (2014).
- [24] G. Gilboa y S. Osher. «Nonlocal operators with applications to image processing.» En: *Multiscale Model. Simul.* (2008), 7(3):1005-1028.
- [25] P. Grisvard. «Elliptic problems in nonsmooth domains.» En: *Monographs and Studies in Mathematics* volumen 24 (1985).
- [26] G. Grubb. «Fractional laplacians on domains, a development of Hörmander's theory of μ -transmission pseudodifferential operators.» En: *Adv. Math.* (2015), 268:478-528.
- [27] J.-L. Guermond y A. Ern. «Finite element quasi-interpolation and best approximation.» En: *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* (2017).
- [28] Y. Huang y A. M. Oberman. «Numerical methods for the fractional Laplacian: A finite difference-quadrature approach.» En: *SIAM J. Numer. Anal.* (2014), 52(6):3056-3084.
- [29] R. Hurri-Syrjänen y A. V. Vähäkangas. «On fractional Poincaré inequalities.» En: *J. Anal. Math.* (2013), 120(1):85-104.
- [30] T. Kilpeläinen. «Weighted Sobolev spaces and capacity.» En: *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math* (1994), 19(1):95-113.
- [31] J. Klafter e I. M. Sokolov. «Anomalous diffusion spreads its wings.» En: *Physics world* (2005), 18(8):29.
- [32] M. Belkin L. Rosasco y E. De Vito. «On learning with integral operators.» En: *J. Mach. Learn. Res.* (2010), 11:905-934.
- [33] I. Turner M. Ilic F. Liu y V. Anh. «Numerical approximation of a fractional- in-space diffusion equation, I.» En: *Fract. Calc. Appl. Anal.* (2005), 8(3):323-341.
- [34] I. Turner M. Ilic F. Liu y V. Anh. «Numerical approximation of a fractional-in- space diffusion equation (II)—with nonhomogeneous boundary conditions.» En: *I. Fract. Calc. Appl. Anal.* (2006), 9(4):333-349.

- [35] V. Maz'ya y T. Shaposhnikova. «On the Bourgain, Brezis and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces». En: *J. Funct. Anal.* (2002), 195(2):230-238.
- [36] B. M. McCay y M. N. L. Narasimhan. «Theory of nonlocal electromagnetic fluids.» En: *Arch. Mech. (Arch. Mech. Stos.)* (1981), 33(3):365-384.
- [37] R. Metzler y J. Klafter. «The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach.» En: *Physics Reports* (2000), 339(1):1-77.
- [38] R. Metzler y J. Klafter. «The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics.» En: *J. Phys. A* (2004), 37(31):R161-R208.
- [39] F. Oberhettinger. *Tabellen zur Fourier-Transformation*. German. Vol. 90. Springer, Cham, 1957.
- [40] Jr P. Ciarlet. «Analysis of the Scott-Zhang interpolation in the fractional order Sobolev spaces.» En: *J. Numer. Math.* (2013), 21(3):173-180.
- [41] D. B. Madan P. Carr H. Geman y M. Yor. «The fine structure of asset returns: An empirical investigation.» En: (2002).
- [42] E. Ota rola R. H. Nochetto y A. J. Salgado. «A PDE approach to fractional diffusion in general domains: A priori error analysis.» En: *Found. Comput. Math.* (2014), págs. 1-59.
- [43] X. Ros-Oton y J. Serra. «The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary.» En: *J. Math. Pures Appl.* (2014), 101(3):275-302.
- [44] T. Kolokolnikov S. Chaturapruek D. Yazdi y S.G. McCalla. «Crime modeling with Lévy and flights.» En: *SIAM J. Appl. Math.* (2013), 73(4):1703-1720.
- [45] S. A. Sauter y C. Schwab. «Boundary element methods, volume 39 of Springer Series in Computational Mathematics.» En: *Springer-Verlag, Berlin*, (2004).
- [46] L. R. Scott y S. Zhang. «Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions.» En: *Math. Comp.* (1990), 54(190):483-493.
- [47] S. A. Silling. «Reformulation of elasticity Iory for discontinuities and long-range forces.» En: *J. Mech. Phys. Solids* (2000), 48(1):175-209.

- [48] Elias M. Stein y Rami Shakarchi. *Functional analysis. Introduction to further topics in analysis*. English. Vol. 4. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2011, pág. 423. ISBN: 978-0-691-11387-6.
- [49] Elias M. Stein y Rami Shakarchi. *Real analysis. Measure theory, integration and Hilbert spaces*. English. Vol. 3. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005, pág. 402. ISBN: 0-691-11386-6.
- [50] P. R. Stinga y J. L. Torrea. «Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators.» En: *Comm. Partial Differential Equations* (2010), 35(11):2092-2122.
- [51] Pablo Stinga. *Fractional Powers of Second Order Partial Differential Operators: Extension Problem and Regularity Theory*. Ph.D. Thesis, UAM, 2010.
- [52] B. I. Henry T. A. M. Langlands y S. L. Wearne. «Fractional cable equation models for anomalous electrodiffusion in nerve cells: finite domain solutions.» En: *SIAM J. Appl. Math.* (2011), 71(4):1168-1203.
- [53] Víctor Hernández-Santamaría Umberto Biccari. «Controllability of a one-dimensional fractional heat equation: theoretical and numerical aspects.» En: *hal-01562358v2*. (2017), págs. 10-15.
- [54] E. Valdinoci. «From the long jump random walk to the fractional Laplacian.» En: *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SEMA* (2009), 49:33-44.
- [55] M. I. Visik y G. I. Eskin. «Convolution equations in a bounded region.» En: *Us- pehi Mat. Nauk* (1965), 20(3 (123)):89-152.
- [56] S. Osher Y. Lou X. Zhang y A. Bertozzi. «Image recovery via nonlocal operators.» En: *J. Sci. Comput.* (2010), 42(2):185-197.