UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

LA PROPIEDAD DE DUNFORD-PETTIS EN EL PRODUCTO TENSORIAL PROYECTIVO

Marisol Pérez

Directora: Verónica Dimant

Mayo de 2023

Agradecimientos

A mi directora, Vero, por darme la oportunidad y dedicarme su tiempo, atención y guía en este trabajo. Por su paciencia y por estar disponible cada vez que lo necesité para allanar el camino y responder todas mis dudas. Y fundamentalmente por su confianza, aliento y calidez en el trato, que me dieron una tranquilidad muy importante para mí en el recorrido para llegar a este punto.

Al Dr. Esteban Andruchow y al Dr. Pablo Turco, por aceptar ser jurados de esta tesis.

A los profesores de la facultad que supieron transmitir las ganas para seguir buscando el encanto de estudiar matemática.

A mis compañeros de múltiples cursadas, con quienes compartimos el entusiasmo, como también los obstáculos del camino, y que brindaron apoyo y color para hacer más liviana la travesía.

A mi amiga Eugenia, sin cuya insistencia implacable y monitoreo constante, nunca habría dado el primer paso y los siguientes para llevar a buen término este trabajo. Por su tiempo y sugerencias, por su continuo interés y seguimiento hasta el final para que no colgara ¡gracias, Euge!

A toda mi familia, por ser un remanso incondicional, alegre y relajado, donde aflojarse y soltar preocupaciones.

A mis hermanas, por alentar, compartir, entender, absolver y hacer catarsis como sólo puede hacerse entre hermanas.

A mi mamá, por su acompañamiento amoroso de todos los tiempos; y a mi papá, que desde algún lugar estará viéndome contento lograr este objetivo. A los dos, por abrirme las puertas a todas las posibilidades, este trabajo es de ellos.

Y a la UBA, por la educación pública siempre.

Introducción

La Propiedad de Dunford-Pettis es una propiedad para espacios de Banach que debe su nombre a Nelson Dunford y Billy James Pettis, que en 1940 probaron [11] que todo operador lineal que sale de $L_1(\mu)$ y es débilmente compacto, resulta completamente continuo. Fue luego Grothendieck quien en 1953 nombró esta propiedad (que todo operador débilmente compacto saliendo de un espacio X resulte completamente continuo) como *Propiedad de Dunford-Pettis* y demostró en [19] que si K es un espacio compacto Hausdorff, entonces $C(K)$ cumple dicha propiedad. En el mismo trabajo Grothendieck probó una caracterización para la propiedad de Dunford-Pettis en términos de convergencia de sucesiones en el espacio y su dual y mostró además que si el dual de un espacio de Banach tiene la propiedad de Dunford-Pettis, entonces la tiene también el espacio. Por varios años quedó en estudio la validez de la implicación inversa, hasta que en 1972, C. Stegall [34] mostró un ejemplo de espacio Banach con la propiedad de Dunford-Pettis cuyo dual no la tiene. Sin embargo, pueden establecerse condiciones bajo las cuales la propiedad de Dunford-Pettis de un espacio se transfiere a su dual; esto ocurre por ejemplo si el espacio no contiene copias de ℓ_1. En general el hecho de que un espacio contenga o no copias de ℓ_1 tiene estrecha relación con la propiedad de Dunford-Pettis y en este mismo sentido aparece la interacción con la Propiedad de Schur. Veremos que todo espacio que tenga la propiedad de Schur, tiene la propiedad de Dunford-Pettis y también que un espacio tiene la propiedad de Dunford-Pettis y no contiene copias de ℓ_1 si y sólo si su dual tiene la propiedad de Schur. Esto será de particular relevancia cuando estudiemos la propiedad de Dunford-Pettis en el producto tensorial proyectivo.

Además de los espacios del tipo $C(K)$ o $L_1(\mu)$, hay varios espacios conocidos como por ejemplo c_0, ℓ_1, ℓ_∞ y H^∞ que tienen la propiedad de Dunford-Pettis. Y otros, como cualquier espacio reflexivo de dimensión infinita, que no la tienen. En particular todos los espacios ℓ_p y $L_p(\mu)$ con $1 < p < \infty$ no tienen la propiedad de Dunford-Pettis.

El producto tensorial proyectivo $X\widehat{\otimes}_\pi Y$, entre dos espacios de Banach X e Y, permite linealizar funciones bilineales definidas en esos espacios. A partir del trabajo pionero de Schatten [33] en 1943, el interés en el estudio de las propiedades y características de los productos tensoriales proyectivos se mantiene hasta nuestros días. Dado que en general el producto tensorial proyectivo entre dos espacios es más complejo que cada uno de ellos, es natural preguntarse qué propiedades de estos espacios hereda.

Nos centraremos específicamente en la propiedad de Dunford-Pettis y su relación con el tensor proyectivo. Como es una propiedad que se preserva para subespacios complementados, es condición necesaria para que $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tenga la propiedad de Dunford-Pettis, que la tengan también X e Y. La pregunta que surge a continuación es bajo qué hipótesis el hecho de que dos espacios tengan la propiedad de Dunford-Pettis implica que el tensor proyectivo entre ellos herede dicha propiedad. La primera respuesta la dio Ryan [31] en 1987, al probar que es condición necesaria y suficiente para que $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tenga la propiedad de Dunford-Pettis y no contenga copias de ℓ_1, que X e Y tengan la propiedad de Dunford-Pettis y no contengan copias de ℓ_1. En el caso particular del producto tensorial proyectivo entre dos espacios del tipo $C(K)$, Bombal y Villanueva [3] demostraron en 2001 que $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis si y sólo si K_1 y K_2 son dispersos, lo que equivale a decir que $C(K_1)$ y $C(K_2)$ no tienen copias de ℓ_1, mostrando así un interesante resultado donde la propiedad de Dunford-Pettis en el tensor proyectivo entre dos espacios es suficiente para garantizar que los mismos no contienen copias de ℓ_1.

En el presente trabajo nos proponemos dar un panorama de los resultados relativos a la existencia/no existencia de la propiedad de Dunford-Pettis en el tensor proyectivo. Comenzaremos dando una versión del resultado original de Ryan [31], y analizaremos luego el caso de $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$ estudiado por Bombal y Villanueva en [3]. A continuación exploraremos resultados de Peralta [26] que estudia el problema en presencia de la propiedad (V) de Pelczyński. Finalmente veremos algunos resultados planteados por Ghenciu en [17] y por González y Gutiérrez en [18], donde se analizan diferentes combinaciones de hipótesis bajo las cuales se prueba que en el tensor proyectivo, o en su dual, no se cumple la propiedad de Dunford-Pettis.

En el primer capítulo presentaremos resultados preliminares sobre la Propiedad de Schur, la Propiedad de Dunford-Pettis y la Propiedad (V) de Pelczyński en espacios de Banach y demostraremos aquellos que sean relevantes y resulten de interés como herramientas para abordar luego los temas centrales que nos ocupan.

En el segundo capítulo definiremos y estudiaremos los productos tensoriales entre dos espacios de Banach, en particular el tensor inyectivo y el tensor proyectivo, con mayor énfasis y detalle en este último, que es nuestro principal objeto de examen en relación con las propiedades antes mencionadas.

En el tercer capítulo analizaremos fundamentalmente la cuestión de cuándo la propiedad de Dunford-Pettis se preserva para el producto tensorial proyectivo. Veremos en principio ejemplos concretos donde esto se cumple o no, y estableceremos luego condiciones que garanticen que el tensor proyectivo entre dos espacios preserva la propiedad de Dunford-Pettis y la propiedad (V). Por último mostraremos en cambio algunos resultados y ejemplos donde la propiedad de Dunford-Pettis no se hereda para el producto tensorial proyectivo o para su dual.

Índice general

Preliminares y Notaciones

Todos los espacios de Banach del presente trabajo se consideran sobre un mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$, que puede tomarse como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ indistintamente.

Dado X un espacio de Banach, notaremos como X' al dual topológico de X. Trabajaremos en X con la topología de la norma, la topología débil que notaremos w y, cuando se trate de un dual, también con la topología débil* que notaremos w^*.

Dada una sucesión $(x_n)_n$ en X, consideraremos los siguientes tipos de convergencia:

Diremos que $(x_n)_n$ converge fuerte, si converge para la topología de la norma definida en X. En el mismo sentido usaremos la expresión *norma convergente* y la notación $\|\cdot\|$-convergente.

Diremos que $(x_n)_n$ converge débilmente, si converge para la topología débil. En el mismo sentido usaremos la expresión *débilmente convergente* o w-convergente y usaremos la notación $x_n \stackrel{w}{\to} x$. Es decir: $x_n \stackrel{w}{\to} x$ si $x'(x_n) \to x'(x)$ para todo $x' \in X'$.

Cuando una sucesión $(x_n)_n$ converja débilmente a 0 diremos que es *débilmente nula* o *débil nula*.

Diremos que una sucesión $(x'_n)_n$ en X' es débil* convergente o w^*-convergente y lo notaremos $x'_n \stackrel{w^*}{\to} x'$ cuando converja para la topología w^*. Es decir: $x'_n \stackrel{w^*}{\to} x'$ si $x'_n(x) \to x'(x)$ para todo $x \in X$. Si $x'_n \stackrel{w^*}{\to} 0$ diremos que $(x'_n)_n$ es w^*-nula.

Usaremos la notación B_X para la bola unidad cerrada de X y si $S \subset X$ es un subconjunto, notaremos como $[S]$ al subespacio vectorial de X generado por los elementos de S.

Dados X e Y espacios de Banach, escribiremos $L(X,Y)$ para notar al espacio de todos los operadores lineales y continuos de X en Y dotado, salvo que se indique lo contrario, con la norma usual de operadores.

Dentro de este espacio consideraremos diferentes ideales de operadores con los siguientes nombres y notaciones:

- $K(X,Y)$: *Operadores compactos* (es decir aquellos operadores T tales que la clausura de $T(B_X)$ es un conjunto compacto).

- $W(X,Y)$: *Operadores débilmente compactos* (es decir aquellos operadores T tales que la clausura de $T(B_X)$ es un conjunto débilmente compacto).

- $L_{cc}(X,Y)$: *Operadores completamente continuos* (también llamados de Dunford-Pettis o débilmente secuencialmente continuos)
- $U(X,Y)$: *Operadores incondicionalmente convergentes*

Los ideales $L_{cc}(X,Y)$ y $U(X,Y)$ serán definidos en detalle a lo largo del trabajo porque son parte importante de los temas que nos ocupan.

Usaremos la notación id_X para el operador identidad de X y T^* para el adjunto de un operador T.

Escribiremos $X \hookrightarrow Y$ para indicar que hay una inclusión isométrica de X en Y y escribiremos $X \cong Y$ cuando haya un isomorfismo isométrico entre ambos.

Dado un espacio vectorial X, notaremos como $X^{\#}$ al dual algebraico, para distinguirlo del dual topológico X'. Del mismo modo usaremos la notación $Bil^{\#}(X \times Y, Z)$ para las formas bilineales en el sentido algebraico y $Bil(X \times Y, Z)$ cuando sean además continuas para las normas consideradas en X,Y y Z. Cuando Z sea el cuerpo de escalares, escribiremos simplemente $Bil^{\#}(X \times Y)$ y $Bil(X \times Y)$.

Algunos teoremas de interés

Los siguientes son resultados clásicos que usaremos con frecuencia a lo largo del trabajo.

Teorema 0.1. *[1, Theorem 1.6.3]* ***Teorema de Eberlein–Šmulian***
Sea X un espacio de Banach y sea $A \subset X$ un subconjunto. Entonces A es débilmente compacto si y sólo si A es débilmente secuencialmente compacto.

Teorema 0.2. *[1, Theorem 10.2.1]* ***Teorema ℓ_1 de Rosenthal***
Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X. Entonces se da alguna de las siguiente alternativas:
$(x_n)_n$ tiene una subsucesión débilmente de Cauchy, o
$(x_n)_n$ tiene una subsucesión básica equivalente a la base canónica de ℓ_1.

Teorema 0.3. *[12, Theorem 2, p. 482]* ***Teorema de Gantmacher***
Sean X e Y espacios de Banach. Un operador $T \in L(X,Y)$ es débilmente compacto si y sólo si $T^{**}(X'') \subset J(Y)$, donde $J : Y \to Y''$ es la inclusión canónica.

El próximo teorema, cuya demostración puede encontrarse en [10], será utilizado también en varias ocasiones a lo largo del trabajo. Por este motivo, si bien no tiene nombre propio y no lo enunciamos exactamente como aparece en la mencionada fuente, lo anotamos aquí en la forma en que lo usaremos para citarlo directamente como referencia.

Teorema 0.4. *[10, Corollary 4.16]*
Si X es un espacio de Banach que tiene un subespacio isomorfo a ℓ_1, entonces existe un operador $q \in L(X, \ell_2)$ tal que q es suryectivo.

Capítulo 1

Preliminares de Espacios de Banach

En este capítulo veremos algunas propiedades de los espacios de Banach que establecen relaciones de inclusión entre sus ideales de operadores. Fundamentalmente la *Propiedad de Dunford-Pettis* y la *Propiedad (V) de Pelczyński*. Veremos la relevancia, para analizar dichas propiedades, de que los espacios tengan o no copias de c_0 y de ℓ_1. Aparecerá en este punto la relación con la *Propiedad de Schur*, por la forma en que afecta a la convergencia de sucesiones en un espacio y su dual.

1.1. Algunos resultados sobre la Propiedad de Schur

Empecemos introduciendo la *Propiedad de Schur* y recordemos algunos resultados orientados a relacionarla con la propiedad de Dunford-Pettis. Esto nos permitirá luego establecer condiciones sobre un espacio y su dual, para que el mismo tenga o no la propiedad de Dunford-Pettis. Dados dos espacios de Banach X e Y, nos interesa particularmente analizar la propiedad de Schur en el espacio de operadores $L(X, Y')$ porque es, como veremos, isométricamente isomorfo al dual del producto tensorial proyectivo $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ que nos ocupará en el Capítulo 3.

Definición 1.1. Diremos que un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Schur* (o que *X es Schur*) si en X coinciden la convergencia secuencial débil y la convergencia secuencial en norma. Es decir que para toda sucesión $(x_n)_n$ en X, $x_n \overset{w}{\to} x$ si y sólo si $\|x_n - x\| \to 0$.

Observación 1.2. La propiedad de Schur se preserva para subespacios, tal como se deduce fácilmente de la propia definición.

Por las características de su convergencia secuencial, ℓ_1 es un ejemplo paradigmático de espacio con la propiedad de Schur, que lo distingue de otros espacios clásicos de sucesiones, tal como enunciamos en las siguientes observaciones y ejemplos.

Observación 1.3. ℓ_1 tiene la propiedad de Schur [1, Lema 2.3.6].

Ejemplo 1.4.

(a) c_0 y ℓ_p, con $1 < p < \infty$, no tienen la propiedad de Schur, porque la base canónica es débilmente nula, pero no tiende a 0 en norma.

(b) ℓ_∞ no tiene la propiedad de Schur. En efecto, c_0 es un subespacio de $\ell_\infty = (c_0)''$ y la propiedad de Schur se preserva para subespacios.

(c) $L_1[0,1]$ no tiene la propiedad de Schur. Puede verse considerando la sucesión dada por $f_n(x) := \sqrt{2}sen(2\pi x)$, que es una base ortonormal de $L_2[0,1]$. Esta sucesión no converge a 0 en norma pero, por la desigualdad de Bessel, $(f_n)_n$ es débilmente nula en $L_1[0,1]$.

Veamos una observación más acerca de la estrecha relación entre la propiedad de Schur y las copias de ℓ_1 en un espacio y su dual, y una proposición con una equivalencia que nos será de utilidad para trabajar con esta propiedad.

Observación 1.5.

(a) Si X'' tiene la propiedad de Schur, entonces X tiene la propiedad de Schur, porque la propiedad de Schur se preserva para subespacios.

(b) Si X tiene una copia de ℓ_1, entonces X' no tiene la propiedad de Schur. En efecto, si X tiene una copia de ℓ_1, entonces X' tiene una copia de $L_1[0,1]$ [23, Theorem 3.4]. Por lo tanto, por el Ejemplo 1.4 **(c)**, X' no tiene la propiedad de Schur.

(c) Si X es de dimensión infinita y X tiene la propiedad de Schur, entonces X contiene una copia de ℓ_1. [9, Ejercicio 3, pág. 212]

(d) Si X es de dimensión infinita y X tiene la propiedad de Schur, entonces X' no tiene la propiedad de Schur (es consecuencia de **(b)** y **(c)**).

(e) Si X y X' tienen la propiedad de Schur, entonces X es de dimensión finita (es consecuencia de **(d)**).

Proposición 1.6. *Un espacio de Banach X no tiene la propiedad de Schur si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ en X que es débilmente nula y tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Si existe una sucesión $(x_n)_n$ en X que es débilmente nula y tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n \stackrel{w}{\to} 0$ pero $\|x_n\| \nrightarrow 0$. Por lo tanto X no es Schur.

$\Rightarrow$) Si X no es Schur, existe una sucesión $(z_n)_n$ en X tal que $x_n \stackrel{w}{\to} 0$ y $\|z_n\| \nrightarrow 0$. Entonces existen $\delta > 0$ y $(z_{n_k})_k$ subsucesión de $(z_n)_n$ tales que $\|z_{n_k}\| \geq \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos la sucesión $x_k := \dfrac{z_{n_k}}{\|z_{n_k}\|}$ $(k \in \mathbb{N})$, es claro que $\|x_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, como $z_n \stackrel{w}{\to} 0$, para todo $x' \in X'$ vale que

$$|x'(x_k)| = \frac{1}{\|z_{n_k}\|} |x'(z_{n_k})| \leq \frac{1}{\delta} |x'(z_{n_k})| \to 0$$

Es decir que $|x'(x_k)| \to 0$ para todo $x' \in X'$.

Obtuvimos por tanto $(x_k)_k$ débilmente nula tal que $\|x_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

□

En relación con la propiedad de Schur, abordamos ahora el primer resultado que será medular para responder a la pregunta inicial de este trabajo sobre condiciones bajo las cuales la propiedad de Dunford-Pettis se preserva en el tensor proyectivo. Se trata del próximo teorema, que Ryan prueba en [31] y establece la equivalencia entre la propiedad de Schur en X' e Y y la misma en $L(X, Y)$.

Veremos luego en el Capítulo 2 que podemos reformular este resultado en términos del dual del tensor proyectivo y relacionarlo con la propiedad de Dunford-Pettis en X e Y y en el producto tensorial proyectivo entre ellos.

Teorema 1.7. *[31, Theorem 3.3 (b)] Dados X e Y espacios de Banach, $L(X, Y)$ tiene la propiedad de Schur si y sólo si X' e Y tienen la propiedad de Schur.*

Demostración. Supongamos que X' e Y tienen la propiedad de Schur. Dada $(u_n)_n$ una sucesión en $L(X, Y)$ tal que $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, veamos que existe una subsucesión $(u_{n_k})_k$ que no tiende débilmente a 0.

Como $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ tal que $\|u_n(x_n)\| > \frac{1}{2}$. Dado que Y tiene la propiedad de Schur, entonces $u_n(x_n) \stackrel{w}{\nrightarrow} 0$ en Y. En consecuencia existe $y' \in Y'$ tal que $y'(u_n(x_n)) \nrightarrow 0$, por tanto existen $\delta > 0$ y una subsucesión $(u_{n_k}(x_{n_k}))_k$ tales que $|y'(u_{n_k}(x_{n_k}))| \geq \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Y esto implica que

$$\delta \leq |y'(u_{n_k}(x_{n_k}))| = \left|(u^*_{n_k}(y'))(x_{n_k})\right| \leq \left\|u^*_{n_k}(y')\right\| \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Luego $\left\|u_{n_k}^*(y')\right\| \nrightarrow 0$ en X'. Como X' tiene la propiedad de Schur, entonces $u_{n_k}^*(y') \overset{w}{\nrightarrow} 0$ en X'. Por lo tanto existe un $x'' \in X''$ tal que $x''(u_{n_k}^*(y')) \nrightarrow 0$. Con $y' \in Y'$ y $x'' \in X''$ fijos, consideramos $\psi \in (L(X,Y))'$ dada por $\psi(u) := x''(u^*(y'))$. Entonces $\psi(u_{n_k}) \nrightarrow 0$ y por lo tanto $u_{n_k} \overset{w}{\nrightarrow} 0$ en $L(X,Y)$.

Es decir que no existe una sucesión $(u_n)_n$ débilmente nula en $L(X,Y)$ con $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que prueba, usando la Proposición 1.6, que $L(X,Y)$ tiene la propiedad de Schur.

Recíprocamente, si $L(X,Y)$ tiene la propiedad de Schur, también la tienen X' e Y pues son isomorfos a subespacios de $L(X,Y)$ (y la propiedad de Schur se hereda para subespacios). □

1.2. La Propiedad de Dunford-Pettis

Para abordar la *Propiedad de Dunford-Pettis*, probaremos primero una serie de equivalencias que nos permitirán definir cuándo un operador se dice *completamente continuo*, y aplicarlo según convenga, en la forma en que transforma conjuntos o sucesiones.

Teorema 1.8. *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Son equivalentes:*

(i) *T aplica conjuntos débilmente compactos de X en conjuntos norma compactos de Y.*

(ii) *T aplica sucesiones débilmente de Cauchy de X en sucesiones norma convergentes de Y.*

(iii) *T aplica sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones norma convergentes de Y.*

Demostración.

(i)⇒(iii) Sea $T \in L(X,Y)$ que cumple **(i)**. Tomemos $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $x_n \overset{w}{\to} x$ y veamos que $\|T(x_n) - x\| \to 0$. Sea $(x_{n_k})_k$ una subsucesión de $(x_n)_n$, entonces el conjunto $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es débilmente compacto en X. Luego, por **(i)**, $\{T(x_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{T(x)\}$ es un conjunto norma compacto de Y. Por tanto, existe una subsucesión $\left(x_{n_{k_j}}\right)_j$ y existe $y \in Y$ tales que $\left\|T(x_{n_{k_j}}) - y\right\| \to 0$. Además, como $x_n \overset{w}{\to} x$, tenemos que $T(x_n) \overset{w}{\to} T(x)$. Por lo tanto $y = T(x)$ y resulta que $\left\|T(x_{n_{k_j}}) - T(x)\right\| \to 0$. Es decir que toda subsucesión de $(T(x_n))_n$ tiene a su vez una subsucesión norma convergente a $T(x)$ y por lo tanto $T(x_n)$ converge en norma a $T(x)$.

(iii)⇒(i) Sea $T \in L(X,Y)$ que cumple **(iii)**. Sea K un conjunto débilmente compacto en X. Queremos ver que $T(K)$ es un conjunto norma compacto en Y. Tomemos una sucesión $\{T(x_n)\}_n \subset T(K)$, con $\{x_n\}_n \subset K$. Como K es débilmente compacto, entonces por el Teorema de Eberlein–Šmulian, K es secuencialemente débilmente compacto. Por lo tanto existe $(x_{n_k})_k$ subsucesión de $(x_n)_n$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{w} x \in K$. Dado que $(x_{n_k})_k$ es débilmente convergente en X, entonces por **(iii)**, $(T(x_{n_k}))_k$ es norma convergente en Y. Como además $x_{n_k} \xrightarrow{w} x \in K$, debe ser $\|T(x_{n_k}) - T(x)\| \to 0$. Encontramos por lo tanto una subsucesión $(T(x_{n_k}))_k$ que converge en norma a $T(x) \in T(K)$. Lo que prueba que $T(K)$ es un conjunto norma compacto en Y.

(ii)⇒(iii) es evidente.

(iii)⇒(ii) Sea $(x_n)_n$ una sucesión débilmente de Cauchy en X. Entonces para cualquier par de sucesiones crecientes de números naturales $(m_k)_k$ y $(n_k)_k$, vale que $(x_{m_k} - x_{n_k}) \xrightarrow{w} 0$. Por **(iii)** tenemos que $\|T(x_{m_k}) - T(x_{n_k})\| \to 0$. Por lo tanto $(T(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy en norma de Y. Luego, como Y es Banach, $(T(x_n))_n$ es una sucesión norma convergente de Y.

□

Definición 1.9. Dados X e Y espacios de Banach, $T \in L(X, Y)$, diremos que T es un *operador completamente continuo* si cumple las equivalencias del Teorema 1.8.

Observación 1.10. El subconjunto formado por los operadores *completamente continuos* (también llamados *débilmente secuencialmente continuos* u *operadores de Dunford-Pettis*), que notaremos $L_{cc}(X, Y)$, es un ideal de $L(X, Y)$ completo con la norma usual de operadores.

Nos proponemos ahora definir la *Propiedad de Dunford-Pettis* de manera similar a como lo hicimos con los operadores completamente continuos. Es decir estableciendo condiciones equivalentes que caracterizan a esta propiedad actuando sobre los operadores, en la transformación de conjuntos y sucesiones, y la relación con la convergecia de sucesiones en el espacio y su dual.

Teorema 1.11. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *Para cada espacio de Banach Y y para todo operador $T \in L(X, Y)$ débilmente compacto, T aplica conjuntos débilmente compactos de X en conjuntos norma compactos de Y.*

(ii) *Para cada espacio de Banach Y y para todo operador $T \in L(X, Y)$ débilmente compacto, T aplica sucesiones débilmente de Cauchy de X en sucesiones norma convergentes de Y.*

(iii) *Para cada espacio de Banach Y y para todo operador $T \in L(X,Y)$ débilmente compacto, T aplica sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones norma convergentes de Y.*

(iv) *Para cualquier par de sucesiones $(x_n)_n$ débilmente de Cauchy en X e $(y'_n)_n$ débilmente nula en X', se cumple que $\lim_{n\to\infty} y'_n(x_n) = 0$.*

(v) *Para cualquier par de sucesiones $(x_n)_n$ en X e $(y'_n)_n$ en X', ambas débilmente nulas, se cumple que $\lim_{n\to\infty} y'_n(x_n) = 0$.*

Demostración.
(i)⇔(ii)⇔(iii) resulta del Teorema 1.8.

(iv)⇒(v) es evidente.

(v)⇒(iv) Sean $(x_n)_n$ débilmente de Cauchy en X e $(y'_n)_n$ débilmente nula en X'. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} y'_n(x_n) \neq 0$, entonces existen $\delta > 0$ e $\left(y'_{n_k}(x_{n_k})\right)_k$ subsucesión de $(y'_n(x_n))_n$ tales que $\left|y'_{n_k}(x_{n_k})\right| \geq \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para simplificar, escribimos como $(y'_k)_k$ y $(x_k)_k$ a las subsucesiones correspondientes, y queda $|y'_k(x_k)| \geq \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $(y'_k)_k$ es débilmente nula, tenemos que $\lim_{k\to\infty} y'_k(x_m) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $k_m \geq m$ tal que $\left|y'_{k_m}(x_m)\right| < \frac{\delta}{2}$.

Por otro lado $(x_n)_n$ es débilmente de Cauchy, en consecuencia $(x_{k_m} - x_m)_m$ es débilmente nula y esto implica, por **(v)**, que $\lim_{m\to\infty} y'_{k_m}(x_{k_m} - x_m) = 0$.

Luego, para m suficientemente grande, vale que $\left|y'_{k_m}(x_{k_m} - x_m)\right| < \frac{\delta}{4}$, y por tanto

$$\delta \leq \left|y'_{k_m}(x_{k_m})\right| \leq \left|y'_{k_m}(x_{k_m} - x_m)\right| + \left|y'_{k_m}(x_m)\right| < \frac{3\delta}{4}.$$

Lo cual es absurdo y proviene de suponer que $\lim_{n\to\infty} y'_n(x_n) \neq 0$.

(iii)⇒(v) Sean $(x_n)_n$ en X e $(y'_n)_n$ en X', ambas débilmente nulas. Consideramos el operador $T : X \to c_0$ dado por $T(x) := (y'_k(x))_k$. Resulta entonces que $T^*(e_k) = y'_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (donde $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de ℓ_1).

Por ser $(y'_n)_n$ es débilmente nula, el conjunto $C := \{y'_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es débilmente compacto. Entonces la cápsula cerrada convexa y balanceada de C es un conjunto débilmente compacto [32, Corollary pág. 50]. Como $T^*(e_k) = y'_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\overline{T^*(B_{l_1})}$ es la envolvente convexa y balanceada de C y resulta un conjunto débilmente compacto. En consecuencia T^*, y por lo tanto T, son operadores débilmente compactos. Luego, por **(iii)** y por ser $(x_n)_n$ débilmente nula, vale que $\|T(x_n)\|_\infty \to 0$. Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |y'_n(x_n)| \leq \sup_k |y'_k(x_n)| = \|T(x_n)\|_\infty \to 0,$$

se obtiene que $y_n'(x_n) \to 0$.

(v)⇒(iii) Sean Y un espacio de Banach y $T \in L(X, Y)$ débilmente compacto.

Supongamos que T no cumple lo descripto en **(iii)**. Entonces existen $(x_n)_n$ sucesión débilmente nula en X y $\delta > 0$ tales que $\|T(x_n)\| \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n' \in X'$, con $\|y_n'\| = 1$, tal que $y_n'(T(x_n)) = \|T(x_n)\|$.

Como T es débilmente compacto, también lo es T^* y por tanto $\overline{T^*(B_{Y'})}$ es un conjunto débilmente compacto. Luego (por el Teorema de Eberlein–Šmulian) pasando por una subsucesión, podemos asumir que existe un $x' \in X'$ tal que $T^*(y_k') \overset{w}{\to} x'$. Es decir que $(T^*(y_k') - x')_k$ es débilmente nula. Entonces, por **(v)**, $\lim_{k\to\infty} (T^*(y_k') - x')(x_k) = 0$.

Además (por ser $(x_k)_k$ débilmente nula) $\lim_{k\to\infty} x'(x_k) = 0$, y en consecuencia $T^*(y_k')(x_k) \to 0$. Pero $T^*(y_k')(x_k) = y_k'(T(x_k)) = \|T(x_k)\| \geq \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Y esto es un absurdo que proviene de suponer que T no cumple lo descripto en **(iii)**.

□

Definición 1.12. Diremos que un espacio de Banach X tiene la <u>*Propiedad de Dunford-Pettis*</u> (que abreviaremos DPP) si cumple las equivalencias del Teorema 1.11.

Observación 1.13. Tomando las equivalencias **(i)**, **(ii)** y **(iii)** del Teorema 1.11, podemos reformular esta definición de la siguiente manera: un espacio de Banach X *tiene la Propiedad de Dunford-Pettis*, si para cada espacio de Banach Y se cumple que todo operador de X en Y que sea débilmente compacto, resulta completamente continuo.

Un ejemplo significativo en relación con la propiedad de Dunford-Pettis es el caso de los espacios $C(K)$. Grothendieck probó en [19] que estos espacios, al igual que los del tipo $L_1(\mu)$, tienen la DPP.

En particular esto vale para ℓ_∞, como lo anotamos en la siguiente observación para utilizarlo en general cuando sea necesario aplicar a ℓ_∞ propiedades de los espacios $C(K)$.

Observación 1.14. $\ell_\infty \cong C(\beta\mathbb{N})$ donde $K = \beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-Čech de los números naturales [6, pág. 152].

Mostramos en lo que sigue algunos resultados y ejemplos iniciales de la propiedad de Dunford-Pettis.

Lema 1.15. *[2, Proposición I.10]*

(a) *La DPP se preserva para subespacios complementados.*

(b) *Todo espacio de Banach reflexivo que tiene la DPP es de dimensión finita.*

(c) *Si X' tiene la DPP, entonces X tiene la DPP.*

(d) *Todo espacio de Schur tiene la DPP.*

Demostración.

(a) Sea X un espacio de Banach con la DPP y sea $S \overset{\imath}{\hookrightarrow} X$ un subespacio complementado, con $p \in L(X, S)$ tal que $p \circ \imath = id_S$ (donde $\imath \in L(S, X)$ es la inclusión). Veamos que S también tiene la DPP. Sean Y un espacio de Banach y $T \in L(S, Y)$ un operador débilmente compacto. Entonces $T \circ p \in L(X, Y)$ es débilmente compacto y en consecuencia, por tener X la DPP, $T \circ p$ es completamente continuo. Por lo tanto, $T = T \circ p \circ \imath$ es completamente continuo. Luego, S tiene la DPP.

(b) Si X es reflexivo, su bola unitaria B_X es un conjunto débilmente compacto y por lo tanto la id_X es un operador débilmente compacto. Como además X tiene la DPP, resulta id_X completamente continuo. Entonces $id_X(B_X) = B_X$ es un conjunto compacto en norma y por lo tanto X tiene dimensión finita.

(c) Es consecuencia de la equivalencia **(v)** del Teorema 1.11.

(d) Si X es Schur, toda sucesión débilmente nula converge a 0 en norma. Luego, por el Teorema 1.11 **(iii)**, X tiene la DPP.

□

Ejemplo 1.16. [2, Proposición I.11]

(a) Todos los espacios del tipo $C(K)$ y $L_1(\mu)$ tienen la DPP [19, Theoreme 1].

(b) ℓ_∞ tiene la DPP.
Por la Observación 1.14, es un caso particular de **(a)** con $K = \beta\mathbb{N}$.

(c) ℓ_1 tiene la DPP.
Como ℓ_1 es un espacio de Schur, puede aplicarse el Lema 1.15 **(d)**.

(d) c_0 tiene la DPP.
Se aplica el Lema 1.15 **(c)** dado que $(c_0)' \cong \ell_1$ tiene la DPP.

(e) ℓ_2 (y en general ℓ_p con $1 < p < \infty$) no tiene la DPP.
Por ser reflexivo de dimensión infinita y el Lema 1.15 **(b)**.

Observación 1.17. [2, Proposición I.11 e)]

La DPP no se preserva en general para cocientes.
Puede verse a partir de los ejemplos **(c)** y **(e)** de la Observación 1.16 que ℓ_1 (Schur) tiene la DPP y ℓ_2 (reflexivo de dimensión infinita) no tiene la DPP. Sin embargo ℓ_2, por ser separable, es isomorfo a un cociente de ℓ_1 [16, Theorem 5.9].

Veremos a continuación algunas precisiones sobre la relación entre la propiedad de Schur y la propiedad de Dunford-Pettis. Notaremos cómo aparece naturalmente con la propiedad de Schur, la relevancia de que un espacio no contenga copias de ℓ_1.

Ya vimos en el Teorema 1.7 que $L(X, Y')$ tiene la propiedad de Schur si y sólo si X' e Y' la tienen. Ahora surge, a partir del Teorema ℓ_1 de Rosenthal, la equivalencia entre la DPP en un espacio que no contiene copias de ℓ_1 y la propiedad de Schur en su dual. Considerando (como demostraremos en el Capítulo 2) que $L(X, Y')$ es isométricamente isomorfo a $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$, tendremos todos los resultados necesarios para probar en el Capítulo 3 la equivalencia que cita Peralta en [26, Teorema 0.1] a partir de lo desarrollado por Ryan en [31].

Teorema 1.18. *[8, Theorem 3] Sea X un espacio de Banach tal que X no contiene copias de ℓ_1 y X' no tiene la propiedad de Schur. Entonces X no tiene la DPP.*

Demostración. Dado que X' no tiene la propiedad de Schur, existe $(x'_n)_n$ sucesión en X' tal que $\|x'_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x'_n \xrightarrow{w} 0$ (Proposición 1.6). Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $x_n \in X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $|x'_n(x_n)| > \frac{1}{2}$.

Como X no contiene copias de ℓ_1, por el Teorema ℓ_1 de Rosenthal, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ débilmente de Cauchy.

Tenemos entonces una sucesión $(x_{n_k})_k$ débilmente de Cauchy en X y una sucesión $\left(x'_{n_k}\right)_k$ débilmente nula en X' tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x'_{n_k}(x_{n_k}) \neq 0$. Luego, por la equivalencia **(iv)** del Teorema 1.11, X no tiene la DPP. □

Teorema 1.19. *Dado X un espacio de Banach, X tiene la DPP y X no contiene copias de ℓ_1 si y sólo si X' tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. El Teorema 1.18 demuestra que si X tiene la DPP y X no contiene copias de ℓ_1, entonces X' tiene la propiedad de Schur.

Recíprocamente: si X' tiene la propiedad de Schur, entonces X' tiene la DPP y por lo tanto X tiene la DPP (Lema 1.15 **(d)** y **(c)**). Supongamos que X contiene una copia de ℓ_1, entonces, por la Observación 1.5 **(b)**, X' no tiene la propiedad de Schur. □

Nos interesará más adelante estudiar cuándo la DPP de $C(K_1)$ y $C(K_2)$ se preserva en el tensor proyectivo $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$. Para esto analizamos algunos resultados sobre los espacios $C(K)$ con K compacto, particularmente en el caso de ciertos compactos, lo que motiva a introducir antes la siguiente definición.

Definición 1.20. Sean X un espacio topológico y $S \subseteq X$. Diremos que S es *disperso* si todo subconjunto no vacío $A \subseteq S$ tiene un punto aislado en A.

Estudiamos en lo que sigue algunas propiedades que relacionan los diferentes ideales de operadores (compactos, débilmente compactos y completamente continuos) sobre $C(K)$ para K compacto Hausdorff y disperso. En este caso contamos con una equivalencia que enunciamos a continuación (cuya demostración puede verse en [24]) que pondrá una vez más de relieve la estrecha relación entre el hecho de que los espacios contengan o no copias de ℓ_1 y que la DPP se herede para el tensor proyectivo.

Teorema 1.21. *[24] Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Entonces K es disperso si y sólo si $C(K)$ no contiene copias de ℓ_1.*

Corolario 1.22. *Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff y disperso. Entonces $C(K)'$ tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. Dado que K es disperso, $C(K)$ no contiene copias de ℓ_1 (Teorema 1.21). Como además, por ser K compacto, $C(K)$ tiene la DPP, entonces $C(K)'$ tiene la propiedad de Schur (Teorema 1.19). □

Queremos probar que si K_1 es disperso, entonces

$$L(C(K_1), C(K_2)') = K(C(K_1), C(K_2)').$$

Esto será consecuencia de un lema y una observación. El lema se refiere a operadores completamente continuos cuando el espacio de salida no contiene copias de ℓ_1. La observación describe operadores de un espacio $C(K)$ a un dual de otro espacio de este tipo.

Lema 1.23. *Sea X un espacio de Banach tal que X no contiene copias de ℓ_1. Entonces $L_{cc}(X, Y) = K(X, Y)$ para todo Y Banach.*

Demostración. Es claro que $K(X, Y) \subset L_{cc}(X, Y)$. Veamos que $L_{cc}(X, Y) \subset K(X, Y)$. Tomemos $T \in L_{cc}(X, Y)$, y probemos que T es compacto. Sea $(x_n)_n$ sucesión acotada en X, debemos ver que existe una subsucesión $(x_{n_j})_j$ tal que $T(x_{n_j})$ es $\|\cdot\|$-convergente en Y. En efecto, dado que X no contiene copias de ℓ_1, por el Teorema ℓ_1 de Rosenthal, existe una subsucesión $(x_{n_j})_j$ que es débilmente de Cauchy en X. Como T es completamente continuo, entonces $T(x_{n_j})$ es $\|\cdot\|$-convergente en Y. Por lo tanto T es compacto. □

Observación 1.24. Si K_1 y K_2 son compactos, entonces

$$L(C(K_1), C(K_2)') = W(C(K_1), C(K_2)') = L_{cc}(C(K_1), C(K_2)').$$

Como K_1 y K_2 son compactos, todo operador en $L(C(K_1), C(K_2)')$ puede factorizarse a través de un espacio reflexivo [27, Remark (Theorem 5.5) p. 56]. Por lo tanto $L(C(K_1), C(K_2)') = W(C(K_1), C(K_2)')$. Como además $C(K_1)$ tiene la DPP, (es decir $W(C(K_1), C(K_2)') \subset L_{cc}(C(K_1), C(K_2)')$ entonces $L(C(K_1), C(K_2)') = L_{cc}(C(K_1), C(K_2)')$.

Proposición 1.25. *Sean K_1 y K_2 dos espacios topológicos compactos Hausdorff. Si K_1 es disperso, entonces $L(C(K_1), C(K_2)') = K(C(K_1), C(K_2)')$.*

Demostración. Como K_1 y K_2 son compactos, por la Observación 1.24 tenemos que $L(C(K_1), C(K_2)') = L_{cc}(C(K_1), C(K_2)')$. Por otro lado, como K_1 es disperso, entonces $C(K_1)$ no contiene copias de ℓ_1 (Teorema 1.21). Luego, por el Lema 1.23, $L_{cc}(C(K_1), C(K_2)') = K(C(K_1), C(K_2)')$ y por tanto $L(C(K_1), C(K_2)') = K(C(K_1), C(K_2)')$. □

1.3. La Propiedad (V) de Pelczyński

En esta sección incorporaremos la *Propiedad (V) de Pelczyński* que aportará elementos de interés para el estudio de la DPP en el tensor proyectivo. Usaremos algunos resultados cuyas demostraciones omitiremos por no tratarse especificamente del objeto de estudio de este trabajo, y que pueden encontrarse como indicaremos según el caso, en [1], [20], [22] y [28]. Incluiremos en cambio las demostraciones que aporten elemenetos de interés por su interacción con los temas centrales que nos ocupan.

Lo primero que necesitamos para abordar la propiedad (V) es definir *operadores incondicionalmente convergentes*. Recordaremos antes algunas definiciones y resultados sobre series en espacios de Banach, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [1].

Definición 1.26. Diremos que una serie $\sum_n x_n$ en un espacio de Banach X es <u>*incondicionalmente convergente*</u> si $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge para toda permutación π de $\mathbb{N}$.

Lema 1.27. *[1, Lemma 2.4.2] Sea $\sum_n x_n$ una serie en un espacio de Banach X. Son equivalentes:*

(i) $\sum\limits_n x_n$ *es incondicionalmente convergente.*

(ii) *La serie* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ *converge para toda* $(n_k)_k$ *sucesión creciente en* $\mathbb{N}$.

(iii) *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ *converge para toda elección de signos* $(\varepsilon_n)_n$.

(iv) *Para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que para cualquier subconjunto finito* $F \subset \{n+1, n+2, ...\}$ *se cumple que* $\left\| \sum\limits_{j \in F} x_j \right\| < \varepsilon$.

Definición 1.28. Diremos que una serie $\sum\limits_n x_n$ en un espacio de Banach X es *débilmente incondicionalmente de Cauchy* (y lo abreviaremos *wuC*) si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)| < \infty$ para todo $x' \in X'$.

Observación 1.29. *[1, Example 2.4.5]*
Un ejemplo interesante es la serie formada a partir de la base canónica de c_0, que es una serie *wuC* que no converge débilmente (y por tanto tampoco incondicionalmente) en c_0.

La transformación de series *wuC* en series incondicionalmente convergentes motiva precisamente la siguiente definición que, relacionada después con los operadores débilmente compactos, dará lugar al estudio de la Propiedad (V) de Pelczyński.

Definición 1.30. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$. Diremos que T es un *operador incondicionalmente convergente* si aplica series *wuC* de X en series incondicionalmente convergentes de Y.

Observación 1.31. El subconjunto formado por los operadores *incondicionalmente convergentes*, que notaremos $U(X, Y)$, es un ideal en $L(X, Y)$ completo con la norma usual de operadores.

El espacio c_0, cuya id_{c_0} no es un operador incondicionalmente convergente (porque su base canónica forma una serie *wuC* que no es incondicionalmente convergente), está estrechamente relacionado con este tipo de operadores. Más concretamente, las copias de c_0 permiten determinar cuándo un operador es incondicionalmente convergente, tal como lo muestra el siguiente lema cuya demostración puede encontrarse en [28].

Lema 1.32. *[20, Lemma 3.3.A] Sean X e Y espacios de Banach.*

(a) *Para todo $T \in L(X,Y)$ vale que:*

T no es incondicionalmente convergente si y sólo si existe un subespacio $X_0 \subset X$ tal que X_0 es isomorfo a c_0 y $T|_{X_0}$ es un isomorfismo.

(dicho de otro modo: $T \notin U(X,Y) \Longleftrightarrow T$ fija una copia de c_0)

(b) *Para todo $T \in L(Y,X)$ vale que:*

T^* no es incondicionalmente convergente si y sólo si existe un subespacio $Y_0 \subset Y$ tal que Y_0 es isomorfo a ℓ_1, $T|_{Y_0}$ es un isomorfismo y $T(Y_0)$ es complementado en X.

(dicho de otro modo: $T^* \notin U(X',Y') \Longleftrightarrow T$ fija una copia complementada de ℓ_1)

Como consecuencia del Lema 1.32, podemos enunciar explícitamente las siguientes equivalencias de uso frecuente y gran importancia para relacionar, en X y su dual, las propiedades que analizamos en este capítulo.

Corolario 1.33. *(Bessaga-Pelczyński)*

(a) *Un espacio de Banach X no contiene una copia de c_0 si y sólo si cada serie wuC en X es una serie incondicionalmente convergente.*

(b) *Un espacio de Banach X contiene una copia complementada de ℓ_1 si y sólo si X' contiene una copia de c_0.*

Demostración. Es consecuencia de aplicar el Lema 1.32 para $X = Y$ y $T = id_X$. □

Veremos ahora un lema que relaciona la propiedad de Schur con los operadores incondicionalmente convergentes, y tendrá relevancia luego para la propiedad (V) de Pelczyński.

Lema 1.34. *Sea X un espacio de Banach que tiene la Propiedad de Schur. Entonces para todo espacio de Banach Y y para todo $T \in L(X,Y)$, T resulta un operador incondicionalmente convergente.*

En particular, $U(\ell_1, Y) = L(\ell_1, Y)$ para todo espacio de Banach Y.

Demostración. Si X tienen la propiedad de Schur, entonces X es débilmente secuencialmente completo [1, Proposition 2.3.12]. Por lo tanto id_X es un operador incondicionalmente convergente [1, Corollary 2.4.15]. Luego, como el conjunto de operadores incondicionalmente convergentes $U(X,Y)$ forman un ideal de operadores, entonces T es incondicionalmente convergente, para todo $T \in L(X,Y)$.

El caso particular $U(\ell_1, Y) = L(\ell_1, Y)$ resulta de aplicar lo anterior a $X = \ell_1$, que tiene la propiedad de Schur. □

Lema 1.35. *Un espacio de Banach X no contiene copias complementadas de ℓ_1 si y sólo si todo operador en $L(X, \ell_1)$ resulta compacto.*

Demostración. Por el Corolario 1.33, X no contiene una copia complementada de ℓ_1 si y sólo si X' no contiene una copia de c_0, que a su vez equivale (por la parte **(a)** del mismo Corolario 1.33) a que toda serie *wuC* en X' sea incondicionalmente convergente. Es decir, X no contiene una copia complementada de ℓ_1 si y sólo si toda serie *wuC* en X' es norma subserie convergente (en el sentido establecido por el Lema 1.27 **(ii)**) y esto es equivalente a que todo operador $T : X \to \ell_1$ sea compacto [9, Ej. VII.3]. □

Como herramienta previa a la Propiedad (V) de Pelczyński, necesitamos definir un tipo de conjuntos acotados en un dual y analizar un caso particular de estos conjuntos.

Definición 1.36. Sea X un espacio de Banach, sea $K \subset X'$ un subconjunto acotado. Diremos que K es un <u>*V-conjunto*</u> si $\lim_n \sup_{x' \in K} |x'(x_n)| = 0$ para toda serie $\sum x_n$ *wuC* en X.

En el caso particular de que el conjnto acotado $K \subset X'$ sea una sucesión, se obtiene el siguiente resultado que facilitará después algunas demostraciones.

Lema 1.37. *Sea X un espacio de Banach, y sea $K = \{x'_k : k \in \mathbb{N}\} \subset X'$ un subconjunto acotado. Son equivalentes:*

(i) $\lim_n \sup_k |x'_k(x_n)| = 0$ *para toda serie* $\sum_n x_n$ *wuC en* X.

(ii) $\lim_n |x'_n(x_n)| = 0$ *para toda serie* $\sum_n x_n$ *wuC en* X.

Demostración.

(i)⇒(ii) es evidente.

(ii)⇒(i) Sea $\sum_n x_n$ una serie *wuC* en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $S_n := \sup_k |x'_k(x_n)|$ y queremos ver que $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$. Por definición, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$S_n - \frac{1}{n} < \left|x'_{k_n}(x_n)\right| \leq S_n.$$

Entonces

$$0 \leq S_n < \left|x'_{k_n}(x_n)\right| + \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Luego: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|x'_{k_n}(x_n)\right| = 0$.

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|x'_{k_n}(x_n)\right| \neq 0$. Entonces existen un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión (que notaremos igual) tales que $\left|x'_{k_n}(x_n)\right| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notar que los $(k_n)_n$ no pueden tener ningún número natural $j \in \mathbb{N}$ repetido infinitas veces, pues para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $\left|x'_j(x_n)\right| \underset{n}{\longrightarrow} 0$ (por ser $\sum\limits_n x_n$ wuC en X y en consecuencia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)| < \infty$ para todo $x' \in X'$).

Por lo tanto existe $\left(x'_{k_{n_j}}\right)_j$ subsucesión de $(x'_n)_n$ $(k_{n_j} \geq j)$ tal que $\left|x'_{k_{n_j}}(x_{n_j})\right| \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Definimos una sucesión $(y_n)_n$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} y_{k_{n_j}} := x_{n_j} & \text{para todo } j \in \mathbb{N} \\ \\ y_n := 0 & \text{para todo } n \neq k_{n_j} \end{cases}$$

Entonces $\left|x'_{k_{n_j}}(y_{k_{n_j}})\right| \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} |x'_n(y_n)| \neq 0$, contradiciendo **(ii)**, por ser $\sum\limits_n y_n$ una serie wuC en X.

El absurdo proviene de suponer que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|x'_{k_n}(x_n)\right| \neq 0$. Luego $\lim\limits_{n\to\infty} \left|x'_{k_n}(x_n)\right| = 0$ y esto demuestra **(i)**.

□

Llegamos en este punto al teorema que nos permitirá, del mismo modo en que lo hicimos con la propiedad de Dunford-Pettis, establecer condiciones equivalentes para definir cuándo un espacio tiene la *Propiedad (V) de Pelczyński*. La demostración, como está indicado en [20], puede encontrarse en [22].

Teorema 1.38. *[20, Theorem 3.3.B] Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *Todo subconjunto acotado $K \subset X'$ tal que $\lim\limits_n \sup\limits_{x' \in K} |x'(x_n)| = 0$ para toda serie $\sum x_n$ wuC en X, es un conjunto relativamente débilmente compacto.*

(Es decir que todo V-conjunto en X' es relativamente débilmente compacto).

(ii) *Para cada espacio de Banach Y se cumple que todo operador en $L(X,Y)$ que es incondicionalmente convergente, resulta débilmente compacto.*

(Es decir que $U(X,Y) \subset W(X,Y)$ para todo espacio de Banach Y).

(iii) *Para todo espacio de Banach Y y para todo $T : X \to Y$ que no es débilmente compacto, existe un subespacio $X_0 \subset X$ tal que X_0 es isomorfo a c_0 y $T|_{X_0}$ es un isomorfismo.*

Definición 1.39. Diremos que un espacio de Banach X tiene la *Propiedad (V) de Pelczyński* (o simplemente Propiedad (V)) si cumple las equivalencias del Teorema 1.38.

Enunciamos a continuación algunos resultados necesarios para trabajar con la propiedad (V) de Pelczyński, que no demostraremos y pueden encontrarse en [20].

Proposición 1.40.

(a) *[20, Corollary 3.3.E]*

Sea X un espacio de Banach y sea $Y \subset X$ un subespacio. Si X tiene la Propiedad (V), entonces X/Y tiene la Propiedad (V).

(b) *[20, Corollary 3.3.D y 3.3.F]*

Si X tiene la Propiedad (V), entonces X' es débilmente secuencialmente completo.

Observación 1.41.

(a) Si X es un espacio de Banach reflexivo, entonces X tiene la Propiedad (V).

En efecto, el operador id_X es débilmente compacto y por lo tanto todos los operadores $T \in L(X, Y)$ los son.

(b) Como ejemplos de espacios no reflexivos que tengan la Propiedad (V) podemos mencionar los espacios $C(K)$ [22], en particular ℓ_∞ (Observación 1.14), y también c_0, como mostraremos en el lema que sigue.

Lema 1.42.

(a) *c_0 tiene la Propiedad (V).*

(b) *ℓ_1 no tiene la Propiedad (V).*

Demostración.

(a) Sea Y Banach y sea $T \in L(c_0, Y)$ tal que T es incondicionalmente convergente. Queremos probar que T es débilmente compacto. Sea $(e_n)_n$ la base canónica de c_0, entonces $\sum_n e_n$ es una serie wuC en c_0. Como T es incondicionalmente convergente, $\sum_n T(e_n)$ resulta una serie incondicionalmente convergente. Esto implica que T es compacto [1, Proposition 2.4.8] y por lo tanto T es débilmente compacto. Luego, por la equivalencia **(ii)** del Teorema 1.38, c_0 tiene la Propiedad (V).

(b) El operador id_{ℓ_1} es incondicionalmente convergente (pues ℓ_1 tiene la Propiedad de Schur y se aplica el Corolario 1.34) pero id_{ℓ_1} no es un operador débilmente compacto (porque ℓ_1 no es reflexivo). □

Vemos claramente con estos ejemplos (c_0 y ℓ_∞ tienen la propiedad (V) pero ℓ_1 no) que no hay implicaciones, en ninguno de los dos sentidos, que relacionen en general esta propiedad en un espacio y su dual. Recordemos que para la propiedad de Dunford-Pettis vale que si X' tiene la DPP, entonces también la tiene X (Lema 1.15). Al final de este trabajo veremos, con el caso de $(c_0 \widehat{\otimes}_\pi c_0)'$, que la implicación inversa no vale en general.

La propiedad (V) de Pelczyński resulta de interés, para estudiarla interactuando con la propiedad de Dunford-Pettis en el tensor proyectivo. Además de la estrecha relación entre las copias de c_0 y los operadores incondicionalmente convergentes (Lema 1.32), veremos en los siguientes resultados, las implicaciones que esto tiene en relación con la propiedad de Schur, la DPP y las distintas clases de operadores en espacios con estas propiedades.

Lema 1.43. *Si X es un espacio de Banach que tiene la propiedad (V), entonces X' no tiene copias de c_0.*

Demostración. Si X' tiene un copia de c_0, entonces por el Corolario 1.33, X tiene una copia complementada de ℓ_1. En tal caso, X no tiene la Propiedad (V), porque la misma se mantiene para subespacios complementados (Proposición 1.40) y ℓ_1 no la tiene (Lema 1.42). □

Proposición 1.44. *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita que tiene la DPP y la propiedad (V), entonces X contiene una copia de c_0.*

Demostración. Supongamos que X no tiene copia de c_0, entonces id_X no fija copias de c_0, y en consecuencia, por el Teorema 1.32, el operador id_X es incondicionalmente convergente. Dado que X tiene la Propiedad (V), resulta que id_X es débilmente compacto. Como además X tiene la DPP, entonces B_X es compacta, lo cual es absurdo para X de dimensión infinita. □

Lema 1.45. *Si X e Y son espacios de Banach tales que Y' no contiene copias de c_0 y X tiene la Propiedad (V), entonces todo operador en $L(X, Y')$ es débilmente compacto.*

Demostración. Sea $T \in L(X, Y')$. Como Y' no contiene copias de c_0, entonces T no fija una copia de c_0. Luego, por el Lema 1.32 **(a)**, T es incondicionalmente convergente. Por lo tanto, como X tiene la Propiedad (V), T es débilmente compacto. □

Corolario 1.46. *Si X e Y son espacios de Banach tales que Y' no contiene copias de c_0 y X tiene la DPP y la Propiedad (V), entonces todo operador en $L(X, Y')$ es completamente continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.45, todos los operadores en $L(X, Y')$ son débilmente compactos, y en consecuencia, como X tiene la DPP, resultan también todos completamente continuos. □

Corolario 1.47. *[26, Lema 1.1] Si X e Y son espacios de Banach tales que ambos tienen la Propiedad (V) y X tiene además la DPP, entonces todo operador en $L(X, Y')$ es completamente continuo.*

Demostración. Es consecuencia del Lema 1.43 y el Corolario 1.46 □

Finalizamos esta sección con un teorema que será importante cuando analicemos en el Capítulo 3 condiciones suficientes para que la Propiedad (V) se preserve en el tensor proyectivo.

Lema 1.48. *Sean X e Y espacios de Banach. Si X' e Y' son débilmente secuencialmente completos y $L(X, Y') = K(X, Y')$, entonces $L(X, Y')$ es débilmente secuencialmente completo.*

Demostración. Sea $(T_n)_n$ una sucesión débilmente de Cauchy en $L(X, Y') = K(X, Y')$. Queremos ver que $(T_n)_n$ converge débilmente.

Notar que, como todos los operadores son compactos, entonces $T^{**}(x'') \in Y'$ y vale que $y''(T^{**}(x'')) = x''(T^*(y''))$ para todo $y'' \in Y''$, $x'' \in X''$ y para todo $T \in L(X, Y')$.

Tomamos una sucesión $(T_n)_n$ débilmente de Cauchy en $L(X, Y') = K(X, Y')$, entonces para todo $y'' \in Y''$ resulta que $T_n^*(y'')$ es débilmente de Cauchy en X', que es (por hipótesis) débilmente secuencialmente completo. Por lo tanto $(T_n^*(y''))_n$ converge débilmente en X'.

Es decir que para cada $y'' \in Y''$, existe $x'_{y''} \in X'$ tal que $T_n^*(y'') \xrightarrow{w} x'_{y''}$. Sea $S : Y'' \to X'$ la aplicación dada por $S(y'') := x'_{y''}$. Es fácil ver que S resulta lineal y continua, luego $S \in L(Y'', X')$. Además $T_n^*(y'') \xrightarrow{w} S(y'')$ para todo todo $y'' \in Y''$.

También resulta que para todo $x'' \in X''$, $T_n^{**}(x'')$ es débilmente de Cauchy en Y' (aquí nuevamente usamos que, por ser todos los los T_n compactos, $T_n^{**}(x'') \in Y'$ y vale que $y''(T_n^{**}(x'')) = x''(T_n^*(y''))$ para todo $x'' \in X''$ y todo $y'' \in Y''$). Como Y' es (por hipótesis) débilmente secuencialmente completo, entonces $(T_n^{**}(x''))_n$ converge débilmente para todo $x'' \in X''$. En particular tenemos que $(T_n(x))_n$ converge débilmente en Y' para todo $x \in X$.

Es decir que para cada $x \in X$, existe $y'_x \in Y'$ tal que $T_n(x) \xrightarrow{w} y'_x$. Definimos $T : X \to Y'$ como $T(x) := y'_x$, que resulta un operador lineal y continuo. Entonces $T \in L(X, Y') = K(X, Y')$ y además $T_n(x) \xrightarrow{w} T(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto $y''(T_n(x)) \to y''(T(x))$, es decir $(T_n^*(y''))(x) \to (T^*(y''))(x)$ para todo $x \in X$. Con esto obtenemos que $T_n^*(y'') \xrightarrow{w^*} T^*(y'')$ para todo $y'' \in Y''$.

Como ya teníamos además que $T_n^*(y'') \xrightarrow{w} S(y'')$ para todo todo $y'' \in Y''$, entonces resulta (por la unicidad del límite) que $S(y'') = T^*(y'')$ para todo $y'' \in Y''$. Por lo tanto $T_n^*(y'') \xrightarrow{w} T^*(y'')$ en X' para todo $y'' \in Y''$, y en consecuencia $x''(T_n^*(y'')) \to x''(T^*(y''))$ para todo $x'' \in X''$ y para todo $y'' \in Y''$.

Definimos ahora para cada $x'' \in X''$ y cada $y'' \in Y''$, la aplicación $(x'' \otimes y'') \in L(X, Y')'$ de la siguiente forma: $(x'' \otimes y'')(T) := x''(T^*(y''))$.

Lo que obtuvimos entonces es que $(x'' \otimes y'')(T_n) \to (x'' \otimes y'')(T)$ para todo $x'' \in X''$ y para todo $y'' \in Y''$. Como $ext\left(B_{(K(X,Y'))'}\right) = ext(B_{X''}) \otimes ext(B_{Y''})$ [29, Theorem 1.3], tenemos que $z'(T_n) \to z'(T)$ para todo $z' \in ext\left(B_{(K(X,Y'))'}\right)$.

Aplicando el Teorema de Rainwater [16, Corollary 3.61], que establece que para ver que una sucesión acotada $(z_n)_n$ converge débilmente a z en un espacio de Banach Z, es suficiente probar que $z'(z_n) \to z'(z)$ para todo $z' \in ext\,(B_{Z'})$, podemos concluir que $T_n \xrightarrow{w} T$ en $K(X, Y') = L(X, Y')$. $\square$

Capítulo 2

Productos Tensoriales Proyectivo e Inyectivo

En este capítulo vamos a definir el *Producto Tensorial Proyectivo* $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ y el *Producto Tensorial Inyectivo* $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ entre dos espacios de Banach X e Y, y veremos algunas de sus propiedades.

Para esto, primero definiremos el *producto tensorial algebraico* $X \otimes Y$ como un subespacio vectorial del dual algebraico (sin estructura topológica) de las formas bilineales de $X \times Y$ en el cuerpo $\mathbb{K}$ (la idea es que $X \otimes Y$ *'linealice'* dichas formas bilineales).

Luego dotaremos a este espacio con una norma π (la mayor norma *'natural'* en $X \otimes Y$) que llamaremos *norma proyectiva*, para tener el espacio normado $X \otimes_\pi Y$. Y lo completaremos para obtener el espacio de Banach $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ al que llemaremos *Producto Tensorial Proyectivo de X e Y*.

De manera análoga definiremos otra norma en $X \otimes Y$ (la inducida por la inclusión $X \otimes Y \hookrightarrow Bil(X' \times Y')$) que notaremos ε y llamaremos *norma inyectiva*. Y completando el espacio normado $X \otimes_\varepsilon Y := (X \otimes Y, \varepsilon)$, obtendremos el espacio de Banach $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ al que llamaremos *Producto Tensorial Inyectivo de X e Y*.

Mostraremos además algunos resultados sobre la Propiedad de Aproximación, que nos servirá como herramienta para analizar $\ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1$ y relacionarlo con $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)'$.

Nos centraremos fundamentalmente en los contenidos relacionados con el Tensor Proyectivo, que es tema principal de este trabajo. En cuanto al Tensor Inyectivo y la Propiedad de Aproximación, si bien probaremos algunos teoremas que sean de interés, vamos a enunciar y utilizar resultados cuyas demostraciones no incluiremos y pueden encontrarse en [30].

2.1. Productos tensoriales algebraicos

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Notaremos como $X^{\#}$ al dual algebraico de X (para distinguirlo del dual topológico cuando tengamos definida una norma). Y lo mismo con las formas bilineales. Es decir,

$X^{\#} := \{f : E \to \mathbb{K} \ / \ f \text{ es lineal}\}$

$Bil^{\#}(X \times Y) := \{\varphi : X \times Y \to \mathbb{K} \ / \ \varphi \text{ es bilineal}\}$

Usaremos además, cuando sea conveniente, la notación: $< u, \varphi >:= u(\varphi)$.

Queremos definir un espacio que permita *'linealizar'* las formas bilineales. Para ello definiremos primero los tensores elementales.

Definición 2.1. Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Dado $(x, y) \in X \times Y$ definimos el <u>tensor elemental</u> $x \otimes y$ como el elemento de $(Bil^{\#}(X \times Y))^{\#}$ tal que $(x \otimes y)(\varphi) := \varphi(x, y)$ para toda $\varphi \in Bil^{\#}(X \times Y)$.

Definición 2.2. El <u>Producto Tensorial</u> $X \otimes Y$ se define como el subespacio de $Bil^{\#}(X \times Y)^{\#}$ generado por los tensores elementales $x \otimes y$, con $x \in X$ e $y \in Y$. Es decir,

$$X \otimes Y = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i \otimes y_i : \lambda_i \in \mathbb{K},\, x_i \in X,\, y_i \in Y,\, 1 \leq i \leq n,\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Observación 2.3. La representación de $u \in X \otimes Y$ como combinación lineal de tensores elementales no es única. Pues $u = v$ en $X \otimes Y$ si y sólo si $< u, \varphi >=< v, \varphi >$ para toda $\varphi \in Bil^{\#}(X \times Y)$. Entonces, tomando por ejemplo $u = x \otimes y + x \otimes (-y)$, resulta $< u, \varphi >= \varphi(x, 0) = 0$ para toda $\varphi \in Bil^{\#}(X \times Y)$. Y esto significa que $x \otimes y + x \otimes (-y) = 0$ para todo $x \in X$, $y \in Y$.

Análogamente puede verse que:

(a) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$ para todo $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$.

(b) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$ para todo $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$.

(c) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$, $y \in Y$.

Es decir que la aplicación canónica $\tau : X \times Y \to X \otimes Y$ dada por $\tau(x, y) := x \otimes y$ resulta una aplicación bilineal.

Notar que **(c)** dice que todo $u \in X \otimes Y$ puede escribirse como: $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ (con $x_i \in X$; $y_i \in Y$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$).

La siguiente proposición, que permite caracterizar cuándo $u = 0$ en $X \otimes Y$, será de gran utilidad para obtener la buena definición de aplicaciones sobre elementos de $X \otimes Y$.

Proposición 2.4. *[30, Proposition 1.2] Sea $u=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\in X\otimes Y$. Son equivalentes:*

(i) $u=0$

(ii) $\sum_{i=1}^n x'(x_i)\cdot y'(y_i)=0$ *para todo $x'\in X^{\#}$, $y'\in Y^{\#}$.*

(iii) $\sum_{i=1}^n x'(x_i)\cdot y_i=0$ *para todo $x'\in X^{\#}$.*

(iv) $\sum_{i=1}^n y'(y_i)\cdot x_i=0$ *para todo $y'\in Y^{\#}$.*

Demostración.
(i)⇒(ii) Como $(x\otimes y)(\varphi):=\varphi(x,y)$ para toda $\varphi\in Bil^{\#}(X\times Y)$, **(i)** dice que $\sum_{i=1}^n\varphi(x_i,y_i)=0$ para toda $\varphi\in Bil^{\#}(X\times Y)$.

Por otro lado, dados $x'\in X^{\#}$ e $y'\in Y^{\#}$, la función dada por $\varphi(x,y):=x'(x)\cdot y'(y)$, resulta bilineal. Luego se obtiene **(ii)**.

(ii)⇒(i) Para ver que $u=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i=0$, debemos ver que $\sum_{i=1}^n\varphi(x_i,y_i)=0$ para toda $\varphi\in Bil^{\#}(X\times Y)$. Sea $\varphi\in Bil^{\#}(X\times Y)$.

Consideramos $X_1:=[x_1,...,x_n]$ e $Y_1:=[y_1,...,y_n]$. Como son subespacios de dimensión finita, X_1 e Y_1 están complementados en X e Y respectivamente y tenemos $P:X\to X_1$ y $Q:Y\to Y_1$ sus proyecciones.

También por ser X_1 e Y_1 de dimensión finita, podemos expresar $\varphi|_{X_1\times Y_1}=\sum_{j=1}^m z'_j\cdot w'_j$ con $z'_j\in X_1^{\#}$ y $w'_j\in Y_1^{\#}$ para $1\le j\le m$. Sean $x'_j:=z'_j\circ P$ e $y'_j:=w'_j\circ Q$, entonces $x'_j\in X^{\#}$ y $y'_j\in Y^{\#}$ para $1\le j\le m$. Luego, por **(ii)**, $\sum_{i=1}^n x'_j(x_i)\cdot y'_j(y_i)=0$ para $1\le j\le m$. Sea $\psi:=\sum_{j=1}^m x'_j\cdot y'_j$, entonces $\psi\in Bil^{\#}(X\times Y)$ y $\psi|_{X_1\times Y_1}=\varphi|_{X_1\times Y_1}$.

Por lo tanto:

$$<u,\varphi>=\sum_{i=1}^n\varphi(x_i,y_i)=\sum_{i=1}^n\psi(x_i,y_i)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m x'_j(x_i)\cdot y'_j(y_i)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n x'_j(x_i)\cdot y'_j(y_i)=0.$$

Luego $<u,\varphi>=0$ para toda $\varphi\in Bil^{\#}(X\times Y)$. Es decir $u=0$ en $X\otimes Y$.

(iv)⇒(ii) Sean $x'\in X^{\#}$; $y'\in Y^{\#}$. Por **(iv)**, $\sum_{i=1}^n y'(y_i)\cdot x_i=0$ y en consecuencia

$$\sum_{i=1}^n x'(x_i)\cdot y'(y_i)=x'\left(\sum_{i=1}^n y'(y_i)\cdot x_i\right)=x'(0)=0.$$

Análogamente se obtiene **(iii)⇒(ii)**.

(ii)⇒(iv) Dado $y' \in Y^{\#}$, por **(ii)** tenemos que $\sum_{i=1}^{n} x'(x_i) \cdot y'(y_i) = 0$ para todo $x' \in X^{\#}$. Entonces, $x'\left(\sum_{i=1}^{n} y'(y_i) \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x'(x_i) \cdot y'(y_i) = 0$ para todo $x' \in X^{\#}$. Y por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} y'(y_i) \cdot x_i = 0$.

Análogamente se obtiene **(ii)⇒(iii)**.

□

Observación 2.5. En la Proposición 2.4 basta tomar conjuntos separantes en $X^{\#}$ e $Y^{\#}$ ($S \subset X^{\#}$ es *separante* si vale la siguiente implicación: Si $f(x) = 0$ para toda $f \in S$, entonces $x = 0$). Por ejemplo, por el Teorema de Hahn-Banach, $X' \subset X^{\#}$ es separante.

Hasta aquí tenemos definido el producto tensorial $X \otimes Y$ que cumple las propiedades que detallamos a continuación.

Observación 2.6.

(a) Cada $\varphi \in Bil^{\#}(X \times Y)$ tiene asociada una aplicación lineal $\widetilde{\varphi} : X \otimes Y \to \mathbb{K}$ dada por $\widetilde{\varphi}(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i)$ tal que $\widetilde{\varphi}(x \otimes y) = \varphi(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Podemos ilustrar esta caracterización con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathbb{K} \\ X \otimes Y \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir que cada forma bilineal φ se factoriza vía un operador canónico $\tau : X \times Y \to X \otimes Y$ dado por $\tau(x, y) := x \otimes y$ y una forma lineal $\widetilde{\varphi}$ que preserva la información de φ.

Recíprocamente, cada $g \in (X \otimes Y)^{\#}$ tiene asociada $\widehat{g} : X \times Y \to \mathbb{K}$ dada por $\widehat{g}(x, y) := g(x \otimes y)$ tal que $\widehat{g}$ es bilineal y $g(u) = u(\widehat{g})$ para toda $u \in X \otimes Y$.

Es decir que tenemos la identidad algebraica: $Bil^{\#}(X \times Y) \cong (X \otimes Y)^{\#}$.

(b) Esta factorización vale también para operadores lineales y la identidad algebraica que se obtiene en consecuencia es: $Bil^{\#}(X \times Y, Z) \cong \{T : X \otimes Y \to Z \ / \ T \text{ es lineal}\}$, como lo muestra el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\tau"'] & Z \\ X \otimes Y \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

(Recordemos que en estas identificaciones no estamos considerando aún estructuras topológicas ni condiciones de continuidad).

Además, el producto tensorial con esta propiedad de factorización es único salvo isomorfismos algebraicos, como lo establece la siguiente proposición:

Proposición 2.7. *[30, Proposition 1.5] Sean X e Y espacios vectoriales. Sean W un espacio vectorial y $\Psi : X \times Y \to W$ bilineal tal que para todo espacio vectorial Z y para toda $\phi : X \times Y \to Z$ bilineal, existe una única $\overline{\phi} : W \to Z$ lineal tal que $\phi = \overline{\phi} \circ \Psi$. Entonces, existe un isomorfismo $\mathcal{J} : X \otimes Y \to W$ tal que $\mathcal{J}(x \otimes y) = \Psi(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.*

Demostración. Observemos primero que la unicidad de $\overline{\phi}$ para cada ϕ implica que el conjunto $\{\Psi(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$ genera W.

Sea $\tau : X \times Y \to X \otimes Y$ el operador canónico dado por $\tau(x, y) := x \otimes y$ que resulta bilineal. Entonces por hipótesis, existe una única $\overline{\tau} : W \to X \otimes Y$ lineal tal que $\tau = \overline{\tau} \circ \Psi$.

Por otro lado, como $\Psi : X \times Y \to W$ es bilineal, por la propiedad de $X \otimes Y$ (Observación 2.6), existe una única $\widetilde{\Psi} : X \otimes Y \to W$ lineal tal que $\widetilde{\Psi} \circ \tau = \Psi$. Es decir $\widetilde{\Psi}(x \otimes y) = \Psi(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Entonces $\widetilde{\Psi} \circ (\overline{\tau} \circ \Psi) = \widetilde{\Psi} \circ \tau = \Psi$. Por lo tanto $\widetilde{\Psi} \circ \overline{\tau}(\Psi(x, y)) = \Psi(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. De lo cual resulta, por lo observado al principio, que $\widetilde{\Psi} \circ \overline{\tau}(w) = w$ para todo $w \in W$. Es decir que $\widetilde{\Psi} \circ \overline{\tau} = id_W$.

También tenemos que $\overline{\tau} \circ (\widetilde{\Psi} \circ \tau) = \overline{\tau} \circ \Psi = \tau$. Entonces $\overline{\tau} \circ \widetilde{\Psi}(\tau(x, y)) = \tau(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Es decir que $\overline{\tau} \circ \widetilde{\Psi}(x \otimes y) = x \otimes y$ para todo $x \in X$, $y \in Y$. De lo cual resulta que $\overline{\tau} \circ \widetilde{\Psi} = id_{X \otimes Y}$.

Luego existe $\mathcal{J} = \widetilde{\Psi} : X \otimes Y \to W$ isomorfismo lineal tal que $\mathcal{J}(x \otimes y) = \widetilde{\Psi}(x \otimes y) = \Psi(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.

$\square$

2.2. Producto Tensorial Proyectivo

Tenemos el producto tensorial algebraico $X \otimes Y$ caracterizado salvo isomorfismos. Queremos ahora definir una norma en $X \otimes Y$. Es natural pedir que

$$\|x \otimes y\| \leq \|x\| \, . \, \|y\| \text{ para todo } (x, y) \in X \times Y.$$

En tal caso, dado $u \in X \otimes Y$, para cualquier representación $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, debe cumplirse que

$$\|u\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i \otimes y_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, . \, \|y_i\| \, .$$

Por lo tanto, $\|u\| \leq ínf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, . \, \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}$

Este ínfimo define una norma en $X \otimes Y$, como lo establece la siguiente proposición:

Proposición 2.8. *[30, Proposition 2.1] Sean X e Y dos espacios vectoriales. Para cada $u \in X \otimes Y$ definimos $\pi(u) := ínf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, . \, \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}$. Entonces π es una norma en $X \otimes Y$ y cumple que $\pi(x \otimes y) = \|x\| \, . \, \|y\|$ para todo $x \in X$, $y \in Y$.*

Demostración. Claramente $\pi(u) \geq 0$ para todo $u \in X \otimes Y$.

Veamos la desigualdad triangular:

Sean $u, v \in X \otimes Y$. Dado $\varepsilon > 0$ existen representaciones $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$; $v = \sum_{j=1}^{m} z_j \otimes w_j$ tales que: $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, . \, \|y_i\| < \pi(u) + \frac{\varepsilon}{2}$ y $\sum_{j=1}^{m} \|z_j\| \, . \, \|w_j\| < \pi(v) + \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces tenemos una representación de $u + v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \sum_{j=1}^{m} z_j \otimes w_j$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, . \, \|y_i\| + \sum_{j=1}^{m} \|z_j\| \, . \, \|w_j\| < \pi(u) + \pi(v) + \varepsilon$. Por lo tanto: $\pi(u + v) < \pi(u) + \pi(v) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego $\pi(u + v) \leq \pi(u) + \pi(v)$.

Veamos que $\pi(\lambda u) = |\lambda| \, \pi(u)$ para todo $u \in X \otimes Y$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Es claro para el caso $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$, para cada representación de $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, tenemos la correspondiente representación de $\lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) \otimes y_i$. Entonces

$$\pi(\lambda u) \leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda x_i\| \, . \, \|y_i\| \leq |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, . \, \|y_i\|$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{|\lambda|} \pi(\lambda u) \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, . \, \|y_i\|$$

para toda representación de $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. Luego $\frac{1}{|\lambda|}\pi(\lambda u) \leq \pi(u)$ y en consecuencia $\pi(\lambda u) \leq |\lambda|\, \pi(u)$ para todo $u \in X \otimes Y$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Para la otra desigualdad usamos que $\pi\left(\frac{1}{\lambda} v\right) \leq \frac{1}{|\lambda|}\pi(v)$ para todo $v \in X \otimes Y$ y para todo $\lambda \neq 0$. Entonces

$$\pi(u) = \pi(\frac{1}{\lambda}\lambda u) \leq \frac{1}{|\lambda|}\pi(\lambda u)$$

y por lo tanto

$$|\lambda|\, \pi(u) \leq \pi(\lambda u)$$

para todo $u \in X \otimes Y$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Veamos que si $\pi(u) = 0$, entonces $u = 0$.

Sea $u \in X \otimes Y$ tal que $\pi(u) = 0$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe una representación de $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \,.\, \|y_i\| < \varepsilon$. Sean $x' \in X'$ e $y' \in Y'$, entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x'(x_i).y'(y_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x'(x_i)| \,.\, |y'(y_i)| \leq \|x'\| \,.\, \|y'\| \,.\varepsilon.$$

Es decir que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x'(x_i).y'(y_i)\right| \leq \|x'\| \,.\, \|y'\| \,.\varepsilon.$$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} x'(x_i).y'(y_i) = 0$ para todo $x' \in X'$, $y' \in Y'$.

Por el Teorema de Hahn-Banach, X' e Y' son conjuntos separantes (en $X^{\#}$ e $Y^{\#}$ respectivamente). Luego, por la Observación 2.5 y la Proposición 2.4, resulta $u = 0$.

Hasta aquí tenemos que π es una norma en $X \otimes Y$.

Probemos finalmente que $\pi(x \otimes y) = \|x\| \,.\, \|y\|$ para todo $x \in X$, $y \in Y$.

Por la propia definición, es claro que $\pi(x \otimes y) \leq \|x\| \,.\, \|y\|$.

Veamos que $\|x\| \,.\, \|y\| \leq \pi(x \otimes y)$. Dados $x \in X$, $y \in Y$, tomamos $x' \in B_{X'}$, $y' \in B_{Y'}$ tales que $x'(x) = \|x\|$ e $y'(y) = \|y\|$. Sea $\varphi : X \times Y \to \mathbb{K}$ dada por $\varphi(s,t) := x'(s).y'(t)$, que resulta bilineal. Por la Observación 2.6, existe $\widetilde{\varphi} : X \otimes Y \to \mathbb{K}$ lineal tal que $\widetilde{\varphi}(s \otimes t) = x'(s).y'(t)$ para todo $s \in X$, $t \in Y$. Entonces, para $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$,

$$|\, \widetilde{\varphi}(u)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\ \widetilde{\varphi}(\ x_i \otimes y_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x'(x_i).y'(y_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x'(x_i).y'(y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\, \|y_i\|\,,$$

pues $x' \in B_{X'}$, $y' \in B_{Y'}$. Es decir que $|\, \widetilde{\varphi}(u)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\, \|y_i\|$ para toda representación de $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. Por lo tanto $|\, \widetilde{\varphi}(u)| \leq \pi(u)$ para todo $u \in X \otimes Y$ y en particular $|\, \widetilde{\varphi}(x \otimes y)| \leq \pi(x \otimes y)$ para todo $x \in X$, $y \in Y$. Luego

$$\|x\| . \|y\| = |x'(x).y'(y)| = |\ \widetilde{\varphi}(x \otimes y)| \leq \pi(x \otimes y) \text{ para todo } x \in X,\ y \in Y.$$

□

A esta norma π, que es la mayor norma *'natural'* en $X \otimes Y$, la llamaremos norma proyectiva.

Definición 2.9. Sean X e Y dos espacios vectoriales, dado $u \in X \otimes Y$ se define su *norma proyectiva* como $\pi(u) := \acute{\imath}nf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| . \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}$.

Notamos $X \otimes_\pi Y := (X \otimes Y, \pi)$ al espacio normado $X \otimes Y$ con la norma proyectiva.

Salvo en el caso de que X e Y sean de dimensión finita, este espacio $X \otimes_\pi Y$ no es completo.

Definición 2.10. Llamaremos *Producto Tensorial Proyectivo* (o *Tensor Proyectivo*) de X e Y, y lo notaremos $X\widehat{\otimes}_\pi Y$, a la completación de $X \otimes_\pi Y$.

Observación 2.11. Notemos que al completar ya no tenemos para los elementos de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ la representación $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

Habíamos visto en la Observación 2.6 las siguientes identificaciones algebraicas:

(a) $Bil^{\#}(X \times Y) \cong (X \otimes Y)^{\#}$

(b) $Bil^{\#}(X \times Y, Z) \cong \{T : X \otimes Y \to Z \ / \ T \text{ es lineal}\}$

En el próximo teorema se prueba que estas identificaciones resultan isomorfismos topológicos considerando en $X \otimes Y$ la norma proyectiva. Esto muestra que el producto tensorial es el espacio indicado y π la norma adecuada para obtener el espacio de Banach $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ que permite *linealizar*, de manera continua, las funciones bilineales que salen de $X \times Y$.

Teorema 2.12. *[30, Theorem 2.9] Sean X, Y y Z espacios de Banach. Entonces, para cada $\phi \in Bil(X \times Y, Z)$ existe una única $\widetilde{\phi} \in L(X\widehat{\otimes}_\pi Y, Z)$ tal que $\widetilde{\phi}(x \otimes y) = \phi(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Además la correspondencia $\phi \leftrightarrow \widetilde{\phi}$ es un isomorfismo isométrico entre $Bil(X \times Y, Z)$ y $L(X\widehat{\otimes}_\pi Y, Z)$.*

En particular, para el caso $Z = \mathbb{K}$, resulta la identificación isométrica:

$$Bil(X \times Y) \cong (X\widehat{\otimes}_\pi Y)'.$$

Demostración. Sea $\phi \in Bil(X \times Y, Z)$. Por la Observación 2.6, existe una única $\widetilde{\phi}$: $X \otimes Y \to Z$ lineal tal que $\widetilde{\phi}(x \otimes y) = \phi(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Queremos ver ahora que además $\widetilde{\phi}$ es continua (tomando en $X \otimes Y$ la norma π).
Sea $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. Entonces, por ser $\widetilde{\phi}$ lineal, vale que

$$\left\|\widetilde{\phi}(u)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left\|\widetilde{\phi}(x_i \otimes y_i)\right\| = \sum_{i=1}^{n} \|\phi(x_i, y_i)\| \leq \|\phi\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\|$$

y esto vale para toda representación de $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. Por lo tanto $\left\|\widetilde{\phi}(u)\right\| \leq \|\phi\| \,.\pi(u)$ y en consecuencia $\widetilde{\phi} \in L\left(X \otimes_\pi Y, Z\right)$ con $\left\|\widetilde{\phi}\right\| \leq \|\phi\|$.

Además $\|\phi(x, y)\| = \left\|\widetilde{\phi}(x \otimes y)\right\| \leq \|\phi\| \,.\pi(x \otimes y) = \|\phi\| \,. \|x\| \, \|y\|$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Luego $\|\phi\| \leq \left\|\widetilde{\phi}\right\|$ y por lo tanto $\left\|\widetilde{\phi}\right\| = \|\phi\|$.

Finalmente, por un argumento de densidad, $\widetilde{\phi}$ se extiende a $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ de forma única y con la misma norma.

Tenemos hasta acá una aplicación que manda $\phi \to \widetilde{\phi}$ y es una isometría. Veamos que también es suryectiva. Dada $T \in L(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z)$ definimos $\varphi_T : X \times Y \to Z$ dada por $\varphi_T(x, y) := T(x \otimes y)$. Como T es lineal y $\otimes$ es bilineal, $\varphi_T \in Bil(X \times Y, Z)$ y $\widetilde{\varphi_T} = T$ (pues $\widetilde{\varphi_T}(x \otimes y) = \phi(x, y) = T(x \otimes y)$).

Luego tenemos un isomorfismo isométrico que identifica $Bil(X \times Y, Z)$ con $L(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Bil(X \times Y, Z) &\longrightarrow L(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z) \\ \phi &\longmapsto \widetilde{\phi}(x \otimes y) = \phi(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z) &\longrightarrow Bil(X \times Y, Z) \\ T &\longmapsto \varphi_T(x, y) := T(x \otimes y) \end{aligned}$$

□

Una consecuencia sustancial del Teorema 2.12 es el próximo corolario, donde se obtiene una caracterización del dual del tensor proyectivo, que será de fundamental importancia para estudiar la DPP en dicho espacio.

Corolario 2.13. *Dados X e Y espacios de Banach, $(X \widehat{\otimes}_\pi Y)'$ es isométricamente isomorfo a $L(X, Y')$.*

Demostración. Es consecuencia de aplicar el Teorema 2.12 para $Z = \mathbb{K}$ y la identificación isométrica entre $Bil(X \times Y)$ y $L(X, Y')$. □

Y ahora podemos, en virtud de este isomorfismo isométrico, reformular el Teorema 1.7 en términos del tensor proyectivo. Como ya mencionamos, la equivalencia que resulta entre la propiedad de Schur en X' e Y' y la misma en $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ resultará esencial cuando analicemos en el Capítulo 3 condiciones para que la DPP se preserve en dicho producto tensorial.

Corolario 2.14. *[31, Corollary 3.4] Dados X e Y espacios de Banach, $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ tiene la propiedad de Schur si y sólo si X' e Y' tienen la propiedad de Schur.*

Demostración. Por el Corolario 2.13, $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ es isomorfo a $L(X,Y')$, luego se aplica el Teorema 1.7. □

Ejemplo 2.15.

(a) $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)'$ tiene la propiedad de Schur.

Es consecuencia del Corolario 2.14 y de que $c_0' = \ell_1$ que es Schur.

(b) Sean K_1 y K_2 dos espacios topológicos compactos Hausdorff. Si K_1 y K_2 son dispersos, entonces $\big(C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)\big)'$ tiene la propiedad de Schur.

Por el Corolario 1.22, como K_1 y K_2 son dispersos, entonces $C(K_1)'$ y $C(K_2)'$ tienen la propiedad de Schur. Luego se aplica el Corolario 2.14.

Una observación válida en este punto, relacionada con las propiedades de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ que deben tener necesariamente X e Y, es preguntarse si el tensor proyectivo entre dos espacios contiene subespacios complementados isomorfos a cada uno de ellos. El siguiente lema nos muestra que sí.

Lema 2.16. *Sean X e Y espacios de Banach y sea $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ su producto tensorial proyectivo. Entonces X e Y son subespacios complementados en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.*

Demostración. Basta probarlo para X. Definamos primero una aplicación lineal e inyectiva $i : X \to X\widehat{\otimes}_\pi Y$ que nos permita ver a X como un subespacio de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$. Para esto fijamos un $y_0 \in Y$ tal que $\|y_0\| = 1$ y definimos $i(x) := x \otimes y_0$. Es claro que i es lineal (pues $\otimes$ es bilineal). Recordemos además que $\pi(x\otimes y) = \|x\|\cdot\|y\|$ y esto implica que $\pi(i(x)) = \|x\|\cdot\|y_0\| = \|x\|$. Luego i resulta una isometría (y por lo tanto inyectiva).

Veamos ahora que tenemos una proyección $p : X\widehat{\otimes}_\pi Y \to X$ tal que $p\circ i = id_X$. Para esto fijamos un $y_0' \in Y'$ tal que $\|y_0'\| = 1$ e $y_0'(y_0) = 1$ (tal y_0' existe por el Teorema de Hahn-Banach).

Definimos primero $T : X\times Y \to X$ dada por $T(x,y) := y_0'(y)\cdot x$. Como T es bilineal, en virtud de la propiedad que caracteriza al tensor proyectivo, existe una única $p : X\widehat{\otimes}_\pi Y \to X$ lineal tal que $p(x\otimes y) = T(x,y)$. Es decir $p(x\otimes y) = y_0'(y)\cdot x$. Por lo tanto, para todo $x\in X$, resulta que $p\circ i(x) = p(x\otimes y_0) = y_0'(y_0)\cdot x = x$. □

Con el objetivo de analizar en el próximo capítulo la DPP en $\ell_1\widehat{\otimes}_\pi\ell_1$, veremos a continuación una proposición que caracteriza el tensor proyectivo de ℓ_1 con otro espacio de Banach.

Para ello, dado un espacio de Banach X, definimos

$$\ell_1(X) := \left\{(x_n)_n : x_n \in X \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty\right\}.$$

Proposición 2.17. *[30, Example 2.6] Sea X un espacio de Banach, entonces $\ell_1\widehat{\otimes}_\pi X$ es isométricamente isomorfo a $\ell_1(X)$.*

Demostración. Comenzamos trabajando con el tensor $\ell_1 \otimes X$ sin completar.

Sea $J : \ell_1 \otimes X \to \ell_1(X)$ el único operador lineal tal que $J((\alpha_n)_n \otimes x) = (\alpha_n x)_n$. Veamos que J es continuo, considerando en $\ell_1 \otimes X$ la norma π. Sea $u \in \ell_1 \otimes X$, $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \otimes x_i$. Entonces $\|J(u)\|_{\ell_1(X)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha^i x_i\right\|_X \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha^i| \, \|x_i\| = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\| \, \|\alpha^i\|_{\ell_1}$ y esto vale para toda representación de $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \otimes x_i$. Por lo tanto $\|J(u)\|_{\ell_1(X)} \leq \pi(u)$ para todo $u \in \ell_1 \otimes X$. Es decir $J \in L(\ell_1 \otimes_\pi X, \ell_1(X))$. Veamos que J es una isometría.

Dado $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \otimes x_i$, llamamos $u_n := \sum_{i=1}^{m} \alpha_n^i x_i$, y entonces $J(u) = (u_n)_n$.

Afirmamos que $\sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes u_n$ converge a u en $\ell_1 \otimes_\pi X$. En efecto,

$$u - \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes u_n = u - \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} e_n \otimes \alpha_n^i x_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \otimes x_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^i e_n \otimes x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha^i \otimes x_i - \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^i e_n\right) \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha^i - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^i e_n\right) \otimes x_i.$$

Entonces

$$\pi\left(u - \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes u_n\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \left\|\alpha^i - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^i e_n\right\|_{\ell_1} \cdot \|x_i\|_X \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ pues } \alpha^i = (\alpha_n^i)_n \in \ell_1.$$

Luego $u = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes u_n$ en $\ell_1 \otimes_\pi X$, y en consecuencia

$$\pi(u) = \lim_{N\to\infty} \pi\left(\sum_{n=1}^{N} e_n \otimes u_n\right) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \|u_n\|_X = \|J(u)\|_{\ell_1(X)}.$$

Es decir que $\pi(u) \leq \|J(u)\|_{\ell_1(X)}$ y por tanto $\pi(u) = \|J(u)\|_{\ell_1(X)}$ para todo $u \in \ell_1 \otimes X$. Tenemos entonces que $J : \ell_1 \otimes_\pi X \to \ell_1(X)$ es una isometría. Como $\ell_1(X)$ es completo, podemos extender $J : \ell_1 \widehat{\otimes}_\pi X \to \ell_1(X)$ y sigue siendo una isometría.

Veamos finalmente que $J : \ell_1 \widehat{\otimes}_\pi X \to \ell_1(X)$ es suryectiva. Sea $x = (x_n)_n \in \ell_1(X)$ (es decir $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$), entonces $\left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|\right)_N$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\pi(e_n \otimes x_n) = \|x_n\|$, la sucesión $\left(\sum_{n=1}^{N} e_n \otimes x_n\right)_N$ es de Cauchy en $\ell_1 \widehat{\otimes}_\pi X$, que es un espacio completo. Por lo tanto existe $u = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes x_n \in \ell_1 \widehat{\otimes}_\pi X$, y resulta que $J(u) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = x$. □

Corolario 2.18. $\ell_1 \widehat{\otimes}_\pi \ell_1 \cong \ell_1$.

Demostración. Si aplicamos la Proposición 2.17 para $X = \ell_1$ obtenemos que $\ell_1 \widehat{\otimes}_\pi \ell_1 \cong \ell_1(\ell_1)$. Veamos entonces que $\ell_1(\ell_1) \cong \ell_1$.

Escribimos los elementos de $\ell_1(\ell_1)$ como $(\alpha^n)_n$ donde $\alpha^n = (\alpha^n_k)_k \in \ell_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tomamos $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección y definimos $\Psi : \ell_1 \to \ell_1(\ell_1)$ de la siguiente manera: $\Psi(\alpha) = (\alpha^n)_n$ donde $\alpha^n_k := \alpha_{\phi(n,k)}$. La buena definición resulta de que, por ser ϕ una biyección, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\alpha_{\phi(n,k)}\right| = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|$.

Por lo tanto, para cada $\alpha = (\alpha_i)_i \in \ell_1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha^n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha^n_k| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\alpha_{\phi(n,k)}\right| = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty.$$

Es decir que $\|\Psi(\alpha)\|_{\ell_1(\ell_1)} = \|\alpha\|_{\ell_1}$. Tenemos entonces que $\Psi \in L(\ell_1, \ell_1(\ell_1))$ es una isometría.

Además Ψ es biyectiva (porque ϕ lo es) con $\Psi^{-1}((\alpha^n)_n) = \alpha$, siendo $\alpha_i := \alpha^{\varphi_1(i)}_{\varphi_2(i)}$, donde $\phi^{-1} = (\varphi_1, \varphi_1) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. □

Observación 2.19. De manera análoga se prueba que $\ell_1(I) \widehat{\otimes}_\pi X \cong \ell_1(I, X)$ para cualquier conjunto de índices I.

Una consecuencia importante de la Observación 2.19 es el próximo lema, que nos da una representación para los elementos del tensor proyectivo como sumas infinitas de tensores elementales.

Y además resulta que $\pi(u) = \acute{\imath}nf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \right\}$.

Proposición 2.20. *[30, Proposition 2.8] Dados X e Y espacios de Banach, sean $u \in X\widehat{\otimes}_\pi Y$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existen $(x_n)_n$ sucesión en X e $(y_n)_n$ sucesión en Y, tales que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$ converge a u y además $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|y_n\| < \pi(u) + \varepsilon$.*

Demostración. Tomemos I un conjunto de índices y $Q : \ell_1(I) \to X$ un operador cociente, entonces por la proyectividad de la norma π [30, Proposition 2.5], $Q \otimes_\pi id_Y : \ell_1(I)\widehat{\otimes}_\pi Y \to X\widehat{\otimes}_\pi Y$ es también un cociente. Es decir que es suryectivo y para todo $u \in X\widehat{\otimes}_\pi Y$, $\pi(u) = ínf\,\{\pi(w) : (Q \otimes_\pi id_Y)(w) = u\}$. Por lo tanto, dados $u \in X\widehat{\otimes}_\pi Y$ y $\varepsilon > 0$, existe $v \in \ell_1(I)\widehat{\otimes}_\pi Y$ tal que $(Q \otimes_\pi id_Y)(v) = u$ y $\pi(v) < \pi(u) + \varepsilon$. Como $\ell_1(I)\widehat{\otimes}_\pi Y \cong \ell_1(I, Y)$ (Observación 2.19), podemos identificar v con $(v_i)_{i\in I}$ familia absolutamente sumable en Y. Entonces existe un subconjunto numerable $I_0 = \{i_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ tal que $v_i = 0$ para todo $i \notin I_0$ y podemos escribir $v = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e_{i_n} \otimes v_{i_n}$ con $\pi(v) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|v_{i_n}\|$. Sean $x_n := Q(e_{i_n}) \in X$ e $y_n := v_{i_n} \in Y$, entonces $u = (Q \otimes_\pi id_Y)(v) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$. Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \cdot \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|Q(e_{i_n})\| \cdot \|v_{i_n}\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|v_{i_n}\| = \pi(v) < \pi(u) + \varepsilon.$$

$\square$

Nos resultará de utilidad en el Capítulo 3 construir sucesiones débilmente nulas en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$. En virtud de la identificación entre $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ y $L(X, Y')$, el siguiente lema muestra condiciones que garantizan convergencia débil en el tensor proyectivo a partir de ciertas sucesiones en cada uno de los espacios.

Lema 2.21. *[18, Lemma 2] Sean X e Y espacios de Banach tales que $L(X, Y') = L_{cc}(X, Y')$ (es decir todo operador en $L(X, Y')$ es completamente continuo). Sea $(x_n)_n$ una sucesión débilmente nula en X y sea $(y_n)_n$ una sucesión acotada en Y. Entonces $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.*

Demostración. Para ver que $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$, tomemos $\phi \in (X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$. El isomorfismo isométrico $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)' \cong L(X, Y')$ (Corolario 2.13) nos asegura que existe $T \in L(X, Y')$ tal que $T(x)(y) = \phi\,(x \otimes y)$. Entonces $|\phi\,(x_n \otimes y_n)| = |T(x_n)(y_n)| \le \|T(x_n)\| \, . \, \|y_n\|$.

Como T es completamente continuo (por hipótesis) y $(x_n)_n$ es débilmente nula en X, entonces $\|T(x_n)\| \to 0$.

Además $(y_n)_n$ es una sucesión acotada en Y. Luego

$$|\phi\,(x_n \otimes y_n)| = |T(x_n)(y_n)| \le \|T(x_n)\| \, . \, \|y_n\| \to 0$$

para todo $\phi \in (X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$. Es decir, $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$. $\square$

Corolario 2.22. *[3, Lemma 2.1] Sean K_1 y K_2 dos espacios topológicos compactos Hausdorff. Sea $(f_n)_n$ una sucesión débilmente nula en $C(K_1)$ y sea $(g_n)_n$ una sucesión acotada en $C(K_2)$. Entonces $(f_n \otimes g_n)_n$ resulta una sucesión débilmente nula en $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$.*

Demostración. Por ser K_1 y K_2 compactos, $L(C(K_1), C(K_2)') = W(C(K_1), C(K_2)')$ (Observación 1.24) y por lo tanto, como todo $C(K)$ tiene la DPP, $L(C(K_1), C(K_2)') = L_{cc}(C(K_1), C(K_2)')$. Luego se aplica el Lema 2.21. □

Los próximos corolarios nos dan variantes en las hipótesis que implican que $L(X, Y') = L_{cc}(X, Y')$ para obtener la misma conclusión del Lema 2.21.

Corolario 2.23. *Sean X e Y espacios de Banach tales que Y' no contiene copias de c_0 y X tiene la DPP y la Propiedad (V). Sea $(x_n)_n$ una sucesión débilmente nula en X y sea $(y_n)_n$ una sucesión acotada en Y. Entonces $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.*

Demostración. Por el Corolario 1.46 tenemos que $L(X, Y') = L_{cc}(X, Y')$ (es decir todo operador en $L(X, Y')$ es completamente continuo). Luego se aplica el Lema 2.21. □

Corolario 2.24. *[26, Lema 1.2] Sean X e Y espacios de Banach tales que Y tiene la Propiedad (V) y X tiene la DPP y la Propiedad (V). Sea $(x_n)_n$ una sucesión débilmente nula en X y sea $(y_n)_n$ una sucesión acotada en Y. Entonces $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.*

Demostración. Como Y tiene la Propiedad (V), por el Lema 1.43, Y' no contiene copias de c_0. Luego se aplica el Corolario 2.23. □

Damos a continuación una variante más, usando en este caso copias de c_0 y de ℓ_1, para obtener también una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.

Lema 2.25. *[18, Lema 8] Sean X e Y espacios de Banach tales que X no contiene una copia complementada de ℓ_1 e Y contiene una sucesión $(y_n)_n$ equivalente a una base de c_0. Entonces, para toda sucesión $(x_n)_n$ acotada en X, $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.*

Demostración. Sea M el subespacio cerrado de Y generado por $(y_n)_n$ (sucesión equivalente a una base de c_0). Entonces $M' \cong \ell_1$ y como X no contiene una copia complementada de ℓ_1, por el Lema 1.35, resulta que $L(X, M') = K(X, M')$. Tenemos además que $(y_n)_n$ es equivalente a una base de c_0, entonces $(y_n)_n$ es débilmente nula en $M \cong c_0$. Sea

$(x_n)_n$ una sucesión acotada en X. Para cada $T \in L(X, M') = K(X, M')$, como T es compacto, entonces $(T(x_n)(y_n)) \to 0$ (pues toda subsucesión de $(T(x_n)(y_n))_n$ tiene a su vez una subsucesión que tiende a cero). Usando la equivalencia $L(X, M') \cong \left(X \widehat{\otimes}_\pi M\right)'$, tenemos que $(x_n \otimes y_n)_n$ es débilmente nula en $X \widehat{\otimes}_\pi M$ y por lo tanto $\widetilde{T}(x_n \otimes y_n) \to 0$ para cada $\widetilde{T} \in \left(X \widehat{\otimes}_\pi M\right)'$. Finalmente, como la aplicación de $X \widehat{\otimes}_\pi M$ en $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ que manda $x \otimes y \to x \otimes y$ ($x \in X$, $y \in M$) es continua (pues M es un subespacio cerrado de Y), resulta $(x_n \otimes y_n)_n$ débilmente nula en $X \widehat{\otimes}_\pi Y$. $\square$

2.3. Producto Tensorial Inyectivo

Así como definimos el *Producto Tensorial Proyectivo* dotando con la mayor norma 'natural' π al *producto tensorial algebraico* $X \otimes Y$, ahora presentaremos el *Producto Tensorial Inyectivo* dotándolo con la menor norma 'natural' ε, que llamaremos *norma inyectiva.*

Para esto recordemos que los elementos de $X \otimes Y$ pueden verse como aplicaciones bilineales en $X' \times Y'$. Es decir $X \otimes Y \hookrightarrow Bil(X' \times Y')$ si consideramos $(x \otimes y)(x', y') = x'(x)y'(y)$. La *norma inyectiva* es la norma inducida por esta inclusión.

Definición 2.26. Dado $u \in X \otimes Y$, definimos la <u>*norma inyectiva*</u> como:
$\varepsilon(u) := \sup \left\{ \left| \sum\limits_{i=1}^{n} x'(x_i).y'(y_i) \right| : x' \in B_{X'},\ y' \in B_{Y'} \right\}$ donde $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ es una representación de u. La propia definición algebraica del producto tensorial nos dice que este supremo no depende de la representación elegida.

Notamos como $X \otimes_\varepsilon Y := (X \otimes Y, \varepsilon)$ al espacio normado $X \otimes Y$ con la norma inyectiva.

Definición 2.27. Llamaremos <u>*Producto Tensorial Inyectivo*</u> de X *e* Y y lo notaremos $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ a la completación de $X \otimes_\varepsilon Y$.

Una dificultad en el producto tensorial inyectivo es que no tenemos (como en el caso proyectivo) una escritura para representar a los elementos de $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$. Hay que pensarlos como formas bilineales en $Bil(X' \times Y')$ que se aproximan por sumas finitas de la forma $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

Observación 2.28. Se tienen las siguientes inclusiones isométricas:
$X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \hookrightarrow Bil(X' \times Y')$ o equivalentemente $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \hookrightarrow L(X', Y)$.
$X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \hookrightarrow Bil(X \times Y')$ o equivalentemente $X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \hookrightarrow L(X, Y)$.
$X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y' \hookrightarrow Bil(X \times Y)$ o equivalentemente $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \hookrightarrow L(X, Y')$.

Observación 2.29. Recordando que $Bil(X \times Y) \cong (X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$, podemos traducir las isometrías anteriores como:

$$X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \hookrightarrow (X'\widehat{\otimes}_\pi Y')'$$

$$X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \hookrightarrow (X\widehat{\otimes}_\pi Y')'$$

$$X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y' \hookrightarrow (X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$$

Ejemplo 2.30.

(a) $\ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1$ tiene la propiedad de Schur.

(b) Si K_1 y K_2 son dos espacios topológicos compactos Hausdorff y dispersos, entonces $(C(K_1))'\widehat{\otimes}_\varepsilon(C(K_2))'$ tiene la propiedad de Schur.

Ambos resultados se deducen de la Observación 2.29 y el Ejemplo 2.15.

Definición 2.31. Llamamos formas bilineales aproximables y las notamos $Bil_A(X \times Y)$ a los elementos de la imagen de $X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y' \hookrightarrow Bil(X \times Y)$. Son precisamente las formas bilineales de $Bil(X \times Y)$ que se aproximan por sumas del tipo $\sum_{i=1}^{n} x'_i \otimes y'_i$.

Luego $X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y' \cong Bil_A(X \times Y)$.

Definición 2.32. Análogamente llamamos operadores aproximables y los notamos $A(X, Y)$ a los elementos de la imagen de $X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \hookrightarrow L(X, Y)$. Son los operadores de $L(X, Y)$ que se aproximan por operadores de rango finito.

Luego $X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \cong A(X, Y)$, donde la identificación para los tensores elementales es $(x' \otimes y)(x) = x'(x) \cdot y$.

Observación 2.33. Las siguientes propiedades, cuyas demostraciones pueden verse en [30, Proposition 3.1, 3.2 y 3.3], serán necesarias para trabajar con el producto tensorial inyectivo:

(a) $\varepsilon(u) \leq \pi(u)$ para todo $u \in X \otimes Y$.

(b) $\varepsilon(x \otimes y) = \|x\| \cdot \|y\|$ para todo $x \otimes y \in X \otimes Y$.

(c) La aplicación $x' \otimes y' : X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \to \mathbb{C}$ que manda $x \otimes y \to x'(x)y'(y)$ es lineal, continua, y cumple que: $\|x' \otimes y'\|_{(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y)'} = \|x'\| \cdot \|y'\|$.

(d) Si $S \in L(X_1, X_2)$ y $T \in L(Y_1, Y_2)$, entonces $S \otimes_\varepsilon T \in L(X_1\widehat{\otimes}_\varepsilon Y_1, X_2\widehat{\otimes}_\varepsilon Y_2)$ y vale que $\|S \otimes_\varepsilon S\| = \|S\| \cdot \|T\|$.

(e) Si X_1 es un subespacio (cerrado) de X_2 e Y_1 es un subespacio (cerrado) de Y_2, entonces $X_1\widehat{\otimes}_\varepsilon Y_1$ es un subespacio (cerrado) de $X_2\widehat{\otimes}_\varepsilon Y_2$.

Observación 2.34. Es útil para obtener resultados sobre $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ observar la siguiente inclusión isómetrica: $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \hookrightarrow C(B_{X'} \times B_{Y'})$.

En principio, podemos pensar cada $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ como una función sobre $B_{X'} \times B_{Y'}$ del siguiente modo: $u(x', y') = \sum_{i=1}^{n} x'(x_i)y'(y_i)$.

Si consideramos en $B_{X'} \times B_{Y'}$ la topología producto (tomando en cada uno la topología ω^*), u resulta una función continua sobre $B_{X'} \times B_{Y'}$ (que es un compacto).

Recordemos además que $\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} x'(x_i) \cdot y'(y_i) \right| : x' \in B_{X'}; y' \in B_{Y'} \right\}$, con lo cual esta inclusión de $X \otimes_\varepsilon Y$ en $C(B_{X'} \times B_{Y'})$ resulta una isometría. Y extendiendo a la clausura, obtenemos la inclusión isométrica $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y \hookrightarrow C(B_{X'} \times B_{Y'})$.

Valiéndonos de la Observación 2.34 veremos en el próximo lema, bajo qué condiciones podemos obtener una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$. Notemos que para la norma inyectiva ya no es necesario, como ocurría con el tensor proyectivo (Lema 2.21), tener la hipótesis adicional de que $L(X, Y') = L_{cc}(X, Y')$.

Lema 2.35. *[17, Lemma 2] Sean X e Y espacios de Banach. Sea $(x_n)_n$ una sucesión débilmente nula en X y sea $(y_n)_n$ una sucesión acotada en Y. Entonces $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$.*

Demostración. Recordemos primero que podemos pensar $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ como un subespacio cerrado de $C(B_{X'} \times B_{Y'})$ (Observación 2.34).

Veamos entonces que, con las hipótesis dadas, $(x_n \otimes y_n)_n$ resulta una sucesión débilmente nula en $C(B_{X'} \times B_{Y'})$. Recordemos que (por la caracterización del dual de $C(K)$) para cada $\psi \in (C(B_{X'} \times B_{Y'}))'$ existe una única μ medida regular de Borel tal que $\psi(f) = \int_{B_{X'} \times B_{Y'}} f d\mu$ para toda $f \in C(B_{X'} \times B_{Y'})$.

Queremos ver entonces que $\lim\limits_n \int\limits_{B_{X'}\times B_{Y'}} x_n \otimes y_n d\mu = 0$ para toda μ medida regular de Borel. Usaremos para esto el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Como $(x_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en X e $(y_n)_n$ es una sucesión acotada en Y, entonces $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión acotada en $C(B_{X'} \times B_{Y'})$. Por tanto existe $M > 0$ tal que $|x_n \otimes y_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $B_{X'} \times B_{Y'}$ es compacto, entonces $g = M$ es una función integrable. Además para cada $(x', y') \in B_{X'} \times B_{Y'}$: $\lim\limits_n (x_n \otimes y_n)(x', y') = \lim\limits_n x'(x_n) \cdot y'(y_n) = 0$ (por ser $(x_n)_n$ débilmente nula e $(y_n)_n$ acotada). Luego, por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, vale que:

$$\lim_n \int\limits_{B_{X'}\times B_{Y'}} x_n \otimes y_n d\mu = \int\limits_{B_{X'}\times B_{Y'}} 0 d\mu = 0.$$

Es decir que $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $C(B_{X'} \times B_{Y'})$ y por lo tanto en $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$. □

Veremos ahora un resultado que Lust demostró en [21] y establece que la propiedad de Schur se preserva para el tensor inyectivo.

Necesitamos considerar antes, para dos espacios de Banach X e Y, el siguiente subespacio cerrado de $L(X', Y)$:

$$\begin{aligned} L_{w^*}(X', Y) &= \{T \in L(X', Y)/\ T \text{ es } w^* - w \text{ continuo}\} \\ &= \{T \in L(X', Y)/\ T^*(Y') \subset J(X)\} \end{aligned}$$

donde $J : X \to X''$ es la inclusión canónica.

Observación 2.36. El espacio $L_{w*}(X', Y)$ contiene subespacios isomorfos a X e Y.

En efecto, si fijamos un $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| = 1$, podemos considerar, para cada $y \in Y$, el operador $\phi_y : X' \to Y$ dado por $\phi_y(x') := x'(x_0) \cdot y$. Es fácil ver que ϕ_y es lineal y continuo, es decir que $\phi_y \in L(X', Y)$. Además resulta que $\phi_y^*(y') = J(y'(y) \cdot x_0)$ para todo $y' \in Y'$, y por tanto $\phi_y \in L_{w*}(X', Y)$. Por otro lado, como $\|x_0\| = 1$, se obtiene que $\|\phi_y\| = \|y\|$ para todo $y \in Y$. Luego, la aplicación que manda $y \longrightarrow \phi_y$ resulta una isometría lineal y en consecuencia $Y \hookrightarrow L_{w*}(X', Y)$.

Análogamente, fijando un $y_0 \in Y$ tal que $\|y_0\| = 1$ y considerando para cada $x \in X$ el operador $\varphi_x : X' \to Y$ dado por $\varphi_x(x') := x'(x) \cdot y_0$, resulta que $\varphi_x^*(y') = J(y'(y_0) \cdot x)$ para todo $y' \in Y'$. Como además $\|\varphi_x\| = \|x\|$ para todo $x \in X$, se obtiene que $X \hookrightarrow L_{w*}(X', Y)$.

Probaremos, como lo hace Ryan en [31], la equivalencia entre la propiedad de Schur en $L_{w^*}(X', Y)$ y la misma en X e Y. Luego obtendremos, como corolario, que esta propiedad se preserva para el tensor inyectivo, por ser $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ un subespacio cerrado de $L_{w^*}(X', Y)$.

Teorema 2.37. *[31, Theorem 3.3 (a)] Dados X e Y espacios Banach, $L_{w^*}(X',Y)$ tiene la propiedad de Schur si y sólo si X e Y tienen la propiedad de Schur.*

Demostración. Supongamos que X e Y tienen la propiedad de Schur. Sea $(u_n)_n$ una sucesión en $L_{w^*}(X',Y)$ tal que $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veremos que existe una subsucesión $(u_{n_k})_k$ que no tiende débilmente a 0. Como $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x'_n \in X$ con $\|x'_n\| = 1$ tal que $\|u_n(x'_n)\| \geq \frac{1}{2}$.

Como Y tiene la propiedad de Schur, $u_n(x'_n) \overset{w}{\nrightarrow} 0$ en Y. Por lo tanto existe $y' \in Y'$ tal que $y'(u_n(x_n)) \nrightarrow 0$. Es decir, existen $\delta > 0$ y una subsucesión $(u_{n_k}(x'_{n_k}))_k$ tales que $\left|y'(u_{n_k}(x'_{n_k}))\right| \geq \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego

$$\delta \leq \left|y'(u_{n_k}(x'_{n_k}))\right| = \left|(u^*_{n_k}(y'))(x'_{n_k}))\right| \leq \left\|u^*_{n_k}(y')\right\|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\left\|u^*_{n_k}(y')\right\| \underset{k\to\infty}{\nrightarrow} 0$ en X'.

Como X' tiene la propiedad de Schur, entonces $u^*_{n_k}(y') \overset{w}{\nrightarrow} 0$ en X'. Esto nos dice que existe $x' \in X'$ tal que $x'(u^*_{n_k}(y')) \nrightarrow 0$.

Para $x' \in X'$ e $y' \in Y'$ fijos, consideramos $\Psi \in (L_{w^*}(X',Y))'$ dada por $\Psi(u) := x'(u^*(y'))$. Entonces $\Psi(u_{n_k}) \nrightarrow 0$ y por lo tanto $u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\overset{w}{\nrightarrow}} 0$ en $L_{w^*}(X',Y)$.

Es decir que para toda sucesión $(u_n)_n$ en $L_{w^*}(X',Y)$ tal que $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión $(u_{n_k})_k$ que no tiende débilmente a 0.

Luego, no existe una sucesión $(u_n)_n$ débilmente nula en $L_{w^*}(X',Y)$ con $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que prueba que $L_{w^*}(X',Y)$ tiene la propiedad de Schur.

Recíprocamente, si $L_{w^*}(X',Y)$ tiene la propiedad de Schur, también la tienen X e Y porque son isomorfos a subespacios de $L_{w^*}(X',Y)$ (Observación 2.36). □

Corolario 2.38. *Sean X e Y espacios Banach tales que ambos tienen la propiedad de Schur, entonces $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. Dado que X e Y tienen la propiedad de Schur, entonces (por el Teorema 2.37) $L_{w^*}(X',Y)$ tiene la propiedad de Schur. Como además $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ es un subespacio cerrado de $L_{w^*}(X',Y)$ (porque los tensores elementales $x \otimes y \in L_{w^*}(X',Y)$ y la norma inyectiva es la inducida por la norma de los operadores en $L(X',Y)$) entonces $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene y la propiedad de Schur, que se hereda para subespacios. □

2.4. La Propiedad de Aproximación

En esta sección vamos a introducir la *Propiedad de Aproximación* con el objetivo de caracterizar el tensor inyectivo $\ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon X$ y relacionarlo (para el caso $X = \ell_1$) con $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)'$.

Usaremos algunos resultados que no demostraremos y pueden encontrarse en [30].

Recordemos (Proposición 2.4) que si $u = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j \in X \otimes_\pi Y$ (sin completar) vale que:

$$u = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{m} x'(x_j) \cdot y'(y_j) \text{ para todo } x' \in X' \text{ , } y' \in Y'.$$

Pero al completar, para $u \in X\widehat{\otimes}_\pi Y$, si bien tenemos representación $u = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j$ (Proposición 2.20), no hay una equivalencia similar a la anterior.

Usando la identificación $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)' \cong L(X, Y')$ sabemos que

$$u = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} T(x_j)(y_j) = 0 \quad \text{para todo } T \in L(X, Y').$$

La idea es analizar condiciones que permitan caracterizar (de manera similar a $X \otimes_\pi Y$) cuándo $u = 0$ en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$. Para eso hace falta aproximar los operadores $T \in L(X, Y')$ por operadores de rango finito. Como podemos representar a u con $x_j \to 0$ (y por lo tanto $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ es relativamente compacto), basta aproximar T por operadores de rango finito sobre compactos.

La siguiente proposición muestra que es equivalente poder aproximar cualquier operador que sale de X o que llega a X, y poder aproximar la identidad de X.

Proposición 2.39. *[30, Proposition 4.1] Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *Para todo conjunto compacto $K \subset X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un operador $S \in L(X)$ de rango finito tal que $\|x - Sx\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$.*

(ii) *Para todo Y Banach, para todo $T \in L(X, Y)$, para todo compacto $K \subset X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $S \in L(X, Y)$ de rango finito tal que $\|Tx - Sx\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$.*

(iii) *Para todo Y Banach, para todo $T \in L(Y, X)$, para todo compacto $K \subset Y$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $S \in L(Y, X)$ de rango finito tal que $\|Ty - Sy\| \leq \varepsilon$ para todo $y \in K$.*

Definición 2.40. Diremos que un espacio de Banach X tiene la *Propiedad de Aproximación* (que abreviaremos PA) si cumple las equivalencias de la Proposición 2.39.

Ejemplo 2.41. [30, Example 4.2] $C(K)$ tiene la Propiedad de Aproximación.

El siguiente resultado da una condición suficiente para que X tenga la propiedad de Aproximación y será utilidad para aplicarlo en espacios clásicos de sucesiones.

Proposición 2.42. *[30, Proposition 4.3]*
Sea X un espacio de Banach. Si existe una red acotada $(T_\alpha)_\alpha$ de operadores de rango finito $T_\alpha \in L(X)$ tales que $T_\alpha x \to x$ para todo $x \in X$, entonces X tiene la Propiedad de Aproximación.

Demostración. Como $(T_\alpha)_\alpha$ es acotada, tenemos $C := \sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$. Sean $K \subset X$ un compacto y $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta := \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3C}\}$ y $\{x_1, ..., x_n\} \subset K$ una δ-red. Sea α_0 tal que si $\alpha \geq \alpha_0$, $\|x_i - T_\alpha x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Dado $x \in K$, tomamos i tal que $\|x - x_i\| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x - T_{\alpha_0} x\| &\leq \|x - x_i\| + \|x_i - T_{\alpha_0} x_i\| + \|T_{\alpha_0} x_i - T_{\alpha_0} x\| \\ &< \delta + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_\alpha\| \cdot \delta \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + C \cdot \frac{\varepsilon}{3C} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir que encontramos T_{α_0}, operador de rango finito, tal que $\|x - T_{\alpha_0} x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$. Luego, como $K \subset X$ compacto y $\varepsilon > 0$ son arbitrarios, resulta de la equivalencia **(i)** de la Proposición 2.39 que X tiene la PA. □

Corolario 2.43. *[30, Example 4.4] Todo espacio de Banach con una base de Schauder tiene la Propiedad de Aproximación.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X y $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sus funcionales asociados. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $P_n \in L(X)$ dado por $P_n(x) := \sum_{i=1}^{n} x_n'(x) x_n$. Entonces $P_n(x) \to x$ para cada $x \in X$ y los operadores $\{P_n\}_n$ están uniformemente acotados. En consecuencia, por la Proposición 2.42, X tiene la PA. □

Ejemplo 2.44. Los espacios c_0 y ℓ_p con $1 \leq p < \infty$, tienen la Propiedad de Aproximación.

Presentamos ahora la proposición que muestra que la propiedad de Aproximación se relaciona con una buena caracterización de cuándo $u = 0$ en $X \widehat{\otimes}_\pi Y$. La demostración puede encontrarse en [30].

Proposición 2.45. *[30, Proposition 4.6] Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la Propiedad de Aproximación.*

(ii) *Si $u = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes x_n \in X'\widehat{\otimes}_\pi X$, donde $(x'_n)_n$ y $(x_n)_n$ son sucesiones acotadas en X' y X (respectivamente) tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| \cdot \|x_n\| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) \cdot x_n = 0$ para todo $x \in X$, entonces $u = 0$.*

(iii) *Si $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \in X\widehat{\otimes}_\pi Y$, donde $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ son sucesiones acotadas en X e Y (respectivamente) tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \cdot \|y_n\| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x'(x_n) \cdot y_n = 0$ para todo $x' \in X'$, entonces $u = 0$.*

(iv) *Si $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \in X\widehat{\otimes}_\pi Y$, donde $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ son sucesiones acotadas en X e Y (respectivamente) tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \cdot \|y_n\| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n) \cdot x_n = 0$ para todo $y' \in Y'$, entonces $u = 0$.*

Corolario 2.46. *[30, Corollary 4.7]*
Sea X un espacio de Banach. Si X' tiene la PA, entonces X tiene la PA.

Observación 2.47. La implicación inversa del Corolario 2.46 no vale. Enflo mostró en [15] un primer ejemplo de espacio de Banach que no tiene la Propiedad de Aproximación. Siguiendo este trabajo se demuestra específicamente que si H es un espacio de Hilbert, entonces $L(H)$ no tiene la PA [35]. En particular $(\ell_2\widehat{\otimes}_\pi\ell_2)' \cong L(\ell_2)$ no tiene la Propiedad de Aproximación y sin embargo sí la tiene $\ell_2\widehat{\otimes}_\pi\ell_2$ [30, Exercise 4.5].

Nos interesa analizar la relación entre $\ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon\ell_1$ y $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)'$. Lo haremos usando una equivalencia clásica, que podría tomarse como definición de que X tiene la PA y es que todos los operadores compactos saliendo de cualquier espacio de Banach Y y llegando a X son aproximables. En el próximo teorema se prueba esta equivalencia en la primera parte y luego, en virtud de lo anterior, se demuestra que X' tiene la PA si y sólo si todos los operadores compactos de X en cualquier espacio de Banach Y son aproximables. A partir de esta segunda caracterización y usando que $A(X,Y) \cong X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$, es que podremos dar la equivalencia que queríamos sobre $\ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon\ell_1$.

Necesitamos antes algunas definiciones y un Lema cuya demostración puede encontrarse en [30].

Definición 2.48. Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto $K \subset X$ se dice balanceado si para todo $x \in K$ y para todo escalar α tal que $|\alpha| \leq 1$, se cumple que $\alpha x \in K$.

Definición 2.49. Sea X un espacio de Banach y sea $K \subset X$ un subconjunto compacto, balanceado y convexo. Notamos X_K al subespacio de X generado por K y consideramos en X_K el *Funcional de Minkowski* dado por $\|x\|_K := \text{ínf}\,\{\lambda > 0 : x \in \lambda x\}$.

Observación 2.50. $(X_K, \|\cdot\|_K)$ resulta un espacio normado tal que $B_{(X_K,\|\cdot\|_K)} = K$.

Lema 2.51. *[30, Lemma 4.11] Sea X un espacio de Banach y sea $K \subset X$ un subconjunto compacto, balanceado y convexo. Entonces:*

(a) *El espacio normado $(X_K, \|\cdot\|_K)$ es completo.*

(b) *Existe un subconjunto $L \subset X$ compacto, balanceado y convexo tal que $K \subset L$ y K es compacto en X_L.*

Y ahora veremos el teorema que establece, en relación con sus operadores compactos y aproximables, nuevas equivalencias para la Propiedad de Aproximación en X y en X'.

Teorema 2.52. *[30, Proposition 4.12] Sea X un espacio de Banach.*

(a) *X tiene la Propiedad de Aproximación si y sólo si $K(Y, X) = A(Y, X)$ para todo espacio de Banach Y.*

(b) *X' tiene la Propiedad de Aproximación si y sólo si $K(X, Y) = A(X, Y)$ para todo espacio de Banach Y.*

Demostración.

(a) $\Longrightarrow$) Sea $T \in K(Y, X)$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\overline{T(B_Y)}$ es compacto en X, que por hipótesis tiene la PA, entonces existe un operador de rango finito $R \in L(X)$ tal que $\|Rx - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in \overline{T(B_Y)}$ y por tanto $\|RTy - Ty\| < \varepsilon$ para todo $y \in B_Y$. Luego tenemos $S := RT \in L(Y, X)$ de rango finito tal que $\|S - T\| \leq \varepsilon$. Esto prueba que $T \in A(Y, X)$.

$\Longleftarrow$) Sea $K \subset X$ un conjunto compacto y sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 2.51 existe $L \subset X$ compacto, balanceado y convexo tal que $K \subset L$ y K es compacto en X_L. Como $B_{X_L} = L$, la inclusión $i : X_L \to X$ resulta un operador compacto y en consecuencia, por hipótesis, i es aproximable. Por esto, existe $R \in L(X_L, X)$ de rango finito tal que $\|i - R\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Podemos escribir $R = \sum_{j=1}^{n} z'_j \otimes x_j$ con $z'_j \in (X_L)'$ y $x_j \in X$ para todo j. Como $i : X_L \to X$ es inyectivo, $i^*(X')$ es denso en $(X_L)'$ para la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de X_L. Luego, tomando $0 < \eta < \dfrac{\varepsilon}{2\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|}$, para cada z'_j existe $x'_j \in X'$ tal que $\left|x'_j(x) - z'_j(x)\right| < \eta$ para todo $x \in K$ y para todo j.

Sea $S := \sum_{j=1}^{n} x'_j \otimes x_j \in L(X)$, entonces S es de rango finito y cumple que para todo $x \in K$:

$$\|Rx - Sx\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|x'_j(x) - z'_j(x)\right| \|x_j\| < \eta \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego $\|x - Sx\| \leq \|x - Rx\| + \|Rx - Sx\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

Aplicando la equivalencia **(i)** de la Proposición 2.39, resulta que X tiene la PA.

(b) $\Longrightarrow$) Siempre vale que $A(X,Y) \subset K(X,Y)$. Veamos que si X' tiene la PA, $K(X,Y) \subset \overline{A(X,Y)}$. Sea $T \in K(X,Y)$ y sea $\varepsilon > 0$. Dado que $T^* \in K(Y', X')$, tenemos que $\overline{T^*(B_{Y'})}$ es un conjunto compacto de X' y por lo tanto (por hipótesis, X' tiene la PA) existe $R \in L(X')$ de rango finito tal que $\|x' - Rx'\| < \varepsilon$ para todo $x' \in T^*(B_{Y'})$. Como T es compacto, $T^{**}(X'') \subset Y$ y en consecuencia $T^{**}R^* \in L(X'', Y)$ y es de rango finito.

Sea $S := T^{**}R^*J_X \in L(X,Y)$ (donde $J_X : X \to X''$ es la inclusión canónica), entonces S también es de rango finito y vale que $\|Tx - Sx\| < \varepsilon$ para todo $x \in B_X$. En efecto, dado $y' \in B_{Y'}$:

$$\begin{aligned} |y'(Tx) - y'(Sx)| &= |y'(Tx) - (T^{**}R^*J_X(x))(y'))| = |T^*y'(x) - R(T^*y'))(x))| \\ &\leq \|T^*y' - R(T^*y')\| < \varepsilon \text{ pues } T^*y' \in T^*(B_{Y'}). \end{aligned}$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, encontramos S de rango finito tal que $\|T - S\| < \varepsilon$. Por lo tanto $T \in A(X,Y)$.

$\Longleftarrow$) Dado Y un espacio de Banach, veamos que $K(Y,X') = A(Y,X')$. Sea $T \in K(Y,X')$, entonces $T^*J_X \in K(X,Y')$. En consecuencia (por hipótesis) $T^*J_X \in A(X,Y')$ y por tanto $(T^*J_X)^* \in A(Y'', X')$. Luego, como $T = (T^*J_X)^*J_{Y'}$, resulta que $T \in A(Y,X')$. Probamos entonces que $K(Y,X') = A(Y,X')$ para todo espacio de Banach Y. Finalmente, aplicando **(a)** se obtiene que X' tiene la Propiedad de Aproximación.

$\square$

Recordando que (por su propia definición 2.32) $A(X,Y) \cong X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$, podemos reformular el Teorema 2.52 **(b)** con el siguiente corolario.

Corolario 2.53. *Dado X un espacio de Banach, X' tiene la Propiedad de Aproximación si y sólo si $K(X,Y) = X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ para todo espacio de Banach Y.*

Obtenemos finalmente un corolario sobre $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)'$ que nos permitirá analizar en el Capítulo 3 la DPP en $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)''$.

Corolario 2.54. $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)' \cong \ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1$.

Demostración. En virtud del Lema 1.35 para $X = c_0$, tenemos que $L(c_0, \ell_1) = K(c_0, \ell_1)$. Por otra parte, dado que $c_0' = \ell_1$ tiene la PA, podemos aplicar el Corolario 2.53 y resulta que $K(c_0, \ell_1) \cong \ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1$. Usando por último la identificación $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)' \cong L(c_0, \ell_1)$ (Corolario 2.13) se obtiene que $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)' \cong \ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1$. $\square$

Capítulo 3

La DPP y la Propiedad (V) en el Tensor Proyectivo

En este capítulo nos proponemos finalmente, con todas las herramientas de los capítulos anteriores, estudiar la propiedad de *Dunford-Pettis* en el tensor proyectivo.

La pregunta más natural es plantearse qué relación hay entre el hecho de que X e Y tengan la DPP y que la tenga $X\widehat{\otimes}_\pi Y$. Ya anticipamos, y es en parte la motivación de este trabajo, que no es suficiente que X e Y tengan la DPP para asegurar que la tenga en general $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.

Veremos en principio que si agregamos la hipótesis de que los espacios no contengan copias de ℓ_1, esta pregunta puede responderse pasando por la propiedad de Schur en los duales. Recordemos que Ryan prueba en [31, Corollary 3.4] que $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ tiene la propiedad de Schur si y sólo si la tienen X' e Y'. Con esto y la equivalencia entre la DPP de un espacio que no contiene copias de ℓ_1 y la propiedad de Schur en su dual (Teorema 1.19), obtendremos la equivalencia entre la DPP en X e Y y en el tensor proyectivo $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)$, con la condición de que los espacios no contengan copias de ℓ_1.

Luego incorporaremos la Propiedad (V) de Pelczyński interactuando con la DPP y obtendremos una equivalencia similar pero con una variante respecto a la necesidad de que el tensor proyectivo no contenga copias de ℓ_1. Y terminaremos mostrando algunos resultados con hipótesis bajo las cuales la propiedad de Dunford-Pettis no se cumple en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ o en su dual.

3.1. La DPP en el Tensor Proyectivo

Empezaremos analizando algunos casos particulares, con espacios que sabemos que tienen la DPP, en los que esta propiedad sí se preserva para el producto tensorial proyectivo.

Veamos antes un lema que podremos aplicar en varios ejemplos.

Lema 3.1. *Sean X e Y espacios Banach tales que X' e Y' tienen la propiedad de Schur, entonces $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la DPP.*

Demostración. Si X' e Y' tienen la propiedad de Schur, entonces, por el Corolario 2.14, la tiene $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$. Luego $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ tiene la DPP y en consecuencia $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la DPP (Lema 1.15). □

Recordemos que tienen la DPP: c_0; ℓ_1 y todos los espacios con la propiedad de Schur (o cuyos duales tengan la propiedad de Schur); $C(K)$ para todo K compacto; y en particular ℓ_∞.

Ejemplo 3.2. Ejemplos de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ que preservan la DPP

(a) $\ell_1\widehat{\otimes}_\pi\ell_1$ tiene la DPP.

Por el Corolario 2.18, $\ell_1\widehat{\otimes}_\pi\ell_1 \cong \ell_1$ que tiene la DPP.

(b) $c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0$ tiene la DPP.

Considerando que $(c_0)' = \ell_1$ es un espacio de Schur, puede aplicarse el Lema 3.1.

(c) $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$, con K_1 y K_2 compactos Hausdorff y dispersos, tiene la DPP.

En efecto, por el Corolario 1.22 tenemos que si Si K_1 y K_2 son dispersos, entonces $C(K_1)'$ y $C(K_2)'$ tienen la propiedad de Schur. Luego se aplica el Lema 3.1.

Para el caso de $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$ podemos decir aún más. Bombal y Villanueva probaron en [3] la siguiente equivalencia, que luego nos permitirá analizar un ejemplo donde la DPP no se preserva para el tensor proyectivo.

Teorema 3.3. *[3, Theorem 2.2] Sean K_1 y K_2 dos espacios topológicos compactos Hausdorff e infinitos. Entonces $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$ tiene la DPP si y sólo si K_1 y K_2 son dispersos.*

Demostración. Si K_1 y K_2 son ambos dispersos, entonces $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$ tiene la DPP (Ejemplo 3.2**(c)**).

Supongamos ahora que alguno de los compactos, digamos K_2, no es disperso. Y veamos que en tal caso $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$ no tiene la DPP.

Como K_1 es infinito, $C(K_1)$ no es Schur. Entonces existe una sucesión $(f_n)_n$ en $C(K_1)$ con $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que es débilmente nula en $C(K_1)$. Sea $(\xi_n)_n$ una sucesión en $C(K_1)'$ tal que $\|\xi_n\| = 1$ y $\xi_n(f_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como K_2 no es disperso, entonces (por el Teorema 1.21) $C(K_2)$ contiene una copia de ℓ_1. Por lo tanto existe $q \in L(C(K_2), \ell_2)$ tal que q es suryectivo (Teorema 0.4).

Consideremos el operador trilineal $T : C(K_1) \times C(K_2) \times C(K_2) \to \mathbb{R}$ dado por $T(f, g, h) := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(f)(q(g))_n(q(h))_n$.

Sea $T^1 : C(K_1) \times C(K_2) \to C(K_2)'$ dado por $T^1(f, g)(h) := T(f, g, h)$. Como T^1 es bilineal, existe un único $\widehat{T^1} \in L(C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2), C(K_2)')$ tal que $\widehat{T^1}(f \otimes g) = T^1(f, g)$. Es decir $\widehat{T^1}(f \otimes g)(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(f)(q(g))_n(q(h))_n$.

Si llamamos ψ a la isometría canónica entre ℓ_2 y ℓ_2' y tomamos $\phi \in L(C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2), \ell_2)$ el único tal que $\phi(f \otimes g) = (\xi_n(f)(q(g))_n)_n$ entonces $\widehat{T^1}(f \otimes g)(h) = (\psi(\phi(f \otimes g)))(q(h))$. Es decir: $\widehat{T^1} = q^* \circ \psi \circ \phi$. Por lo tanto $\widehat{T^1}$ resulta un operador débilmente compacto.

Veamos finalmente que $\widehat{T^1}$ no es completamente continuo. Tenemos $q \in L(C(K_2), \ell_2)$ suryectivo y por lo tanto abierto. Existe entonces $(g_n)_n$ sucesión acotada en $C(K_2)$ tal que $q(g_n) = e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $(e_n)_n$ es la base canónica de ℓ_2.

Como $(f_n)_n$ en débilmente nula en $C(K_1)$, entonces (por el Corolario 2.22) $(f_n \otimes g_n)_n$ es débilmente nula en $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$. Pero, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$1 = \left|\widehat{T^1}(f_n \otimes g_n)(g_n)\right| \leq \left\|\widehat{T^1}(f_n \otimes g_n)\right\| \sup_n \|g_n\|$$

Luego $\widehat{T^1}$ no es completamente continuo y por lo tanto $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$ no tiene la DPP. □

Ejemplo 3.4. $\ell_\infty\widehat{\otimes}_\pi\ell_\infty$ no tiene la DPP.

En efecto, recordemos que $\ell_\infty \cong C(K)$, donde $K = \beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-Čech de los números naturales (Observación 1.14). Además por ser ℓ_1 separable, resulta ℓ_1 isométricamente isomorfo a un subespacio de ℓ_∞. Por lo tanto $\ell_\infty \cong C(\beta\mathbb{N})$ contiene una copia de ℓ_1 y en conscuencia (Teorema 1.21) $K = \beta\mathbb{N}$ no es disperso. Luego, por el Teorema 3.3, $\ell_\infty\widehat{\otimes}_\pi\ell_\infty$ no tiene la DPP.

Podemos ver con los ejemplos analizados hasta acá, que el producto tensorial proyectivo entre dos espacios que tienen la DPP puede preservar esta propiedad (como en el caso de $\ell_1\widehat{\otimes}_\pi\ell_1$ y $c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0$) o no (como $\ell_\infty\widehat{\otimes}_\pi\ell_\infty$).

Vamos a presentar ahora resultados que establecen en general (más allá de los ejemplos particulares) condiciones específicas para que la propiedad de Dunford-Pettis se preserve en el tensor proyectivo.

Empezamos dando una primera caracterización que incorpora la hipótesis de que los espacios no contengan copias de ℓ_1. Recordemos que esta condición es la que permite relacionar la DPP en un espacio con la propiedad de Schur en su dual (Teorema 1.19).

Como hemos mencionado, Ryan prueba en [31] la equivalencia entre el hecho de que $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ tenga la propiedad de Schur y que la tengan X' e Y', y establece luego como consecuencia el siguiente teorema que Peralta cita en [26, Teorema 0.1].

Teorema 3.5. *[31, Ryan] Sean X e Y espacios de Banach. Son equivalentes:*

(i) *$X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la DPP y no contiene copias de ℓ_1.*

(ii) *X e Y tienen la DPP y no contienen copias de ℓ_1.*

Demostración. Por el Teorema 1.19, $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)$ tiene la DPP y no contiene copias de ℓ_1 si y sólo si $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ tiene la propiedad de Schur, lo cual es equivalente a que X' e Y' tengan la propiedad de Schur (Corolario 2.14). Y esto, nuevamente en virtud del Teorema 1.19, se cumple si y sólo si X e Y tienen la DPP y no contienen copias de ℓ_1. $\square$

3.2. La DPP y la Propiedad (V) en el Tensor Proyectivo

Hemos probado que con la hipótesis adicional de no tener copias de ℓ_1, el producto tensorial proyectivo entre dos espacios que tienen la DPP, hereda dicha propiedad. Pero también ocurre bajo ciertas condiciones, que el solo hecho de tener $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)$ la DPP, implica que los espacios X e Y no tienen copias de ℓ_1, como ya vimos por ejemplo en el Teorema 3.3: Si $C(K_1)\widehat{\otimes}_\pi C(K_2)$ tiene la DPP, entonces K_1 y K_2 son dispersos y por lo tanto $C(K_1)$ y $C(K_2)$ no contienen copias de ℓ_1 (Teorema 1.21). Es evidente que esto no sucede en general porque ya vimos en el Ejemplo 3.2 **(a)** que $\ell_1\widehat{\otimes}_\pi\ell_1$ tiene la DPP.

Siguiendo la línea desarrollada por Peralta en [26] nos proponemos ahora introducir la propiedad (V) de Pelczyński interactuando con la DPP en el tensor proyectivo. En el siguiente teorema se demuestra (para espacios de dimensión infinita) que si $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la DPP y además X e Y tienen la propiedad (V), entonces ni X ni Y contienen copias de ℓ_1. Y veremos después que esto se relaciona con el Teorema 3.5 combinando la DPP y la propiedad (V).

Teorema 3.6. *[26, Teorema 1.3] Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita tales que ambos tienen la DPP y la Propiedad (V). Si X o Y contiene una copia de ℓ_1, entonces $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tiene la DPP.*

Demostración. Como X es de dimensión infinita y tiene la DPP y la Propiedad (V), entonces X contiene una copia de c_0 (Proposición 1.44). Esto dice que existen sucesiones $(x_n)_n$ en X y $(\mu'_n)_n$ en X' tales que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$; $(x_n)_n$ es débilmente nula en X; $(\mu'_n)_n$ es acotada en X' y $\mu'_i(y_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que Y contiene una copia de ℓ_1. En consecuencia existe $T \in L(Y, \ell_2)$ tal que T es sobreyectivo (Teorema 0.4) y por lo tanto T es abierto. Podemos tomar entonces $(y_n)_n$ una sucesión acotada en Y tal que $T(y_n) = e_n$, donde $(e_n)_n$ es la base canónca de ℓ_2. Luego, por el Lema 2.24, $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.

Definimos ahora $\psi : X \times Y \to \ell_2$ dada por $\psi(x, y) := (\mu'_k(x)(T(y))_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Como ψ es bilineal y continua, existe un único $\Psi \in L(X\widehat{\otimes}_\pi Y, \ell_2)$ tal que $\Psi(x \otimes y) = \psi(x, y)$ para todo $x \in X$, $y \in Y$. Dado que ℓ_2 es reflexivo, Ψ resulta un operador débilmente compacto. Además $\Psi\,(x_n \otimes y_n) = \psi(x_n, y_n) = (\mu'_k(x_n)(T(y_n))_k)_{k\in\mathbb{N}} = e_n$, que no converge a 0 con la norma de ℓ_2. Por lo tanto $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tiene la DPP. □

Del mismo modo en que lo hicimos con la DPP, cabe preguntarse si hay condiciones necesarias y suficientes para que el tensor proyectivo tenga la propiedad (V). Es fácil ver que si $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la propiedad (V), necesariamente la tienen X e Y (por ser una propiedad que se preserva para subespacios complementados). El siguiente teorema, demostrado por Emmanuele y Hensgen en [14], muestra que si agregamos como hipótesis que $W(X, Y') = K(X, Y')$, es suficiente que X e Y tengan la propiedad (V) para que la herede el tensor proyectivo $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.

Veamos antes un par de resultados técnicos preliminares que necesitaremos en el desarrollo de la demostración.

Proposición 3.7. *Sean X e Y espacios Banach y sea $(h_n)_n$ una sucesión en $K(X, Y)$ tal que $(h_n^{**}(x''))_n$ es débilmente de Cauchy para todo $x'' \in X''$. Entonces $(h_n)_n$ es débilmente de Cauchy en $K(X, Y)$.*

Demostración. Para ver que $(h_n)_n$ es débilmente de Cauchy en $K(X, Y)$, es equivalente probar que $\lim_{n\to\infty} T'(h_n)$ existe para todo $T' \in ext(B_{K(X;Y)'})$ [9, Corollary p. 156].

Como además $ext\left(B_{(K(X,Y'))'}\right) = ext(B_{X''}) \otimes ext(B_{Y'})$ [29, Theorem 1.3], basta ver que $\lim_{n\to\infty} x''(h_n^*(y'))$ existe para todo $x'' \in B_{X''}$, $y' \in B_{Y'}$.

Efectivamente, dado que todos los h_n son operadores compactos,

$$\lim_{n\to\infty} x''(h_n^*(y')) = \lim_{n\to\infty} h_n^{**}(x'')(y') = \lim_{n\to\infty} y'(h_n^{**}(x''))$$

y este límite existe para todo $y' \in B_{Y'}$ por ser $(h_n^{**}(x''))_n$ débilmente de Cauchy para todo $x'' \in B_{X''}$. □

Observación 3.8. Si $\sum\limits_n x_n$ y $\sum\limits_n y_n$ son series wuC (débilmente incondicionalmente de Cauchy) en X e Y respectivamente, entonces $\sum\limits_n x_n \otimes y_n$ es una serie wuC en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.

En efecto, como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)| < \infty$ para todo $x' \in X'$, resulta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y'(T(x_n))| < \infty$ para todo $T \in L(X, Y')$ y para todo $y' \in Y'$, es decir que $\sum\limits_n T(x_n)$ es wuC en Y' para todo $T \in L(X, Y')$. Esto implica [25, Corollaire 2] que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(T(x_n))(y_n)| < \infty$ para todo $T \in L(X, Y')$, o equivalentemente que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\widetilde{T}(x_n \otimes y_n)\right| < \infty$ para todo $\widetilde{T} \in (X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$.

Teorema 3.9. *[14, Theorem 2] Sean X e Y espacios de Banach tales que ambos tienen la propiedad (V) y $W(X, Y') = K(X, Y')$. Entonces $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la propiedad (V).*

Demostración. En principio observemos que, por tener Y la propiedad (V), Y' no tiene copias de c_0 (Lema 1.43). Como además X tiene la propiedad (V), resulta que $L(X, Y') = W(X, Y')$ (Lema 1.45) y en consecuencia (por hipótesis) $L(X, Y') = K(X, Y')$.

Sean $M \subset K(X, Y')$ un V-conjunto y $\{h_n\}_n \subset M$ una sucesión. Entonces $\{h_n\}_n$ también es un V-conjunto. Sea $H = \overline{[h_n(x) : x \in X; n \in \mathbb{N}]} \subset Y'$. Entonces H es un subespacio cerrado separable de Y'.

Queremos ver que $\{h_n^{**}(x'')\}_n$ es un V-conjunto en $Y' \hookrightarrow Y'''$ para todo $x'' \in X''$. Por el Lema 1.37, basta probar que para cada $x'' \in X''$: $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{**}(x'')(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x''(h_n^*(y_n)) = 0$ para toda $\sum\limits_n y_n$ serie wuC en Y. Es decir, queremos ver que $(h_n^*(y_n))_n$ es débilmente nula en X', para cada $\sum\limits_n y_n$ serie wuC en Y. Para esto veremos que $\{h_n^*(y_n)\}_n$ es un conjunto relativamente débilmente compacto y que $(h_n^*(y_n))_n$ es una sucesión w^*-nula en X'.

(1) Veamos que $\{h_n^*(y_n)\}_n$ es relativamente débilmente compacto en X'.
Sea $\sum\limits_n x_n$ una serie wuC en X, entonces $\sum\limits_n x_n \otimes y_n$ es una serie wuC en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ (Observación 3.8). Como $\{h_n\}_n \subset M \subset K(X, Y') \subset L(X, Y') \cong (X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ y M es un V-conjunto, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x_n \otimes y_n) = 0$. Y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^*(y_n)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x_n)(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x_n \otimes y_n) = 0$. Luego $\{h_n^*(y_n)\}_n$ es un V-conjunto en X' (Lema 1.37) y en consecuencia, como X tiene la propiedad (V), $\{h_n^*(y_n)\}_n$ es relativamente débilmente compacto en X'.

(2) Veamos que $(h_n^*(y_n))_n$ es w^*-nula en X'.
Sea $x \in X$, entonces $\sum\limits_n x \otimes y_n$ es una serie wuC en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$. Luego $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x \otimes y_n) = 0$, lo que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^*(y_n)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x \otimes y_n) = 0$.

Entonces $(h_n^*(y_n))_n$ es débilmente nula en X' y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{**}(x'')(y_n) = 0$ para toda $\sum\limits_n y_n$ serie wuC en Y y para cada $x'' \in X''$. Luego $\{h_n^{**}(x'')\}_n$ es un V-conjunto en Y', para cada $x'' \in X''$. Como Y tiene la propiedad (V), resulta que $\{h_n^{**}(x'')\}_n$ es relativamente débilmente compacto, para cada $x'' \in X''$.

Ahora, sea $A \subset Y$ un conjunto numerable que separa H. Entonces, para todo $y \in A$, $\{h_n^*(y)\}_n \subset X'$ es un V-conjunto (aquí identificamos $y \in Y$ con su correspondiente elemento en Y''). En efecto, sea $\sum_n x_n$ una serie wuC en X, entonces $\sum_n x_n \otimes y$ es una serie wuC en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ y en consecuencia, por ser $\{h_n\}_n$ un V-conjunto,

$$0 = \lim_{n\to\infty} h_n(x_n \otimes y) = \lim_{n\to\infty} h_n(x_n)(y) = \lim_{n\to\infty} (h_n^*(y))(x_n).$$

Como X tiene la propiedad (V) resulta $\{h_n^*(y)\}_n$ un conjunto relativamente débilmente compacto. Pasando a subsucesiones, podemos asumir que $\{h_k^*(y)\}_k$ es débilmente de Cauchy en X' para todo $y \in A$.

Veamos que para todo $x'' \in X''$, existe (eventualmente pasando a subsucesiones) el límite débil de $h_k^{**}(x'')$. Es decir que para todo $x'' \in X''$, existe $\widetilde{h}(x'') \in H \subset Y'$, tal que $h_k^{**}(x'') \overset{w}{\to} \widetilde{h}(x'')$. En efecto, dado $x'' \in X''$, supongamos que tenemos $z_1, z_2 \in Y'$ y dos subsucesiones $k(n)$ y $p(n)$ tales que $h_{k(n)}^{**}(x'') \overset{w}{\to} z_1$ y $h_{p(n)}^{**}(x'') \overset{w}{\to} z_2$. Entonces $z_1 \in H$ y $z_2 \in H$, pues los operadoes $h_n : X \to H$ son compactos. Además, dado que $\{h_n^*(y)\}_n$ es de Cauchy, tenemos que

$$\begin{aligned} z_1(y) &= \lim_{n\to\infty} h_{k(n)}^{**}(x'')(y) = \lim_{n\to\infty} x''(h_{k(n)}^*(y)) = \lim_{n\to\infty} x''(h_n^*(y)) \\ &= \lim_{n\to\infty} x''(h_{p(n)}^*(y)) = \lim_{n\to\infty} h_{p(n)}^{**}(x'')(y) = z_2(y) \end{aligned}$$

para todo $y \in A$ (que separa H). Resulta entonces $z_1 = z_2$.

Por lo tanto $(h_k^{**}(x''))_k$ es débilmente de Cauchy para todo $x'' \in X''$ y en consecuencia, por la Proposición 3.7, $(h_k)_k$ es débilmente de Cauchy en $K(X,H) \subset K(X,Y') = L(X,Y')$.

Por el Lema 1.48, $L(X,Y')$ es débilmente secuencialmente completo, dado que X' e Y' lo son por tener X e Y la propiedad (V) (Proposición 1.40).

Por lo tanto $(h_k)_k$ es débilmente convergente. Como esto vale para toda sucesión $\{h_n\}_n \subset M$, entonces M es relativamente débilmente compacto. Y esto vale para todo V-conjunto $M \subset K(X,Y') = L(X,Y') \cong (X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$.

Luego $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la propiedad (V). $\square$

Estamos ahora en condiciones de abordar un teorema similar al Teorema 3.5 donde veremos cómo, a partir del Teorema 3.6, la propiedad (V) interactuando con la DPP impacta en la forma en que estas propiedades se relacionan con el tensor proyectivo y la condición de que los espacios no contengan copias de ℓ_1.

Teorema 3.10. *[26, Teorema 1.5] Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita. Son equivalentes:*

(i) *$X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la DPP y la Propiedad (V).*

(ii) *$X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la DPP y la Propiedad (V) y no contiene copias de ℓ_1.*

(iii) *X e Y tienen la DPP y la Propiedad (V) y no contienen copias de ℓ_1.*

Demostración.
(ii) $\Longrightarrow$ **(i)** es evidente.
(i) $\Longrightarrow$ **(iii)** Como la DPP y la propiedad (V) se heredan para subespacios complementados, X e Y tienen la DPP y la Propiedad (V). Luego, por el Teorema 3.6, X e Y no contienen copias de ℓ_1.
(iii) $\Longrightarrow$ **(ii)** Por el Teorema 3.5, $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la DPP y no contiene copias de ℓ_1.
Además, por el Corolario 1.47, todo operador $T \in L(X, Y')$ es completamente continuo. Luego, como X no contiene copias de ℓ_1, por el Teorema ℓ_1 de Rosenthal, $L(X, Y') = K(X, Y')$. Finalmente, por el Teorema 3.9 resulta que $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la Propiedad (V). □

Hasta aquí hemos probado dos teoremas que establecen en general condiciones necesarias y suficientes para que la Propiedad de Dunford-Pettis primero, y luego la misma combinada con la propiedad (V) de Pelczyński, se presrven en el tensor proyectivo. A continuación mostramos en cambio una serie de resultados, que se plantean en [17] y [18], con diferentes combinaciones de hipótesis bajo las cuales podemos asegurar que $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ o su dual no tienen la DPP.

Teorema 3.11. *[18, Theorem 3] Sean X e Y espacios de Banach tales que X no tiene la propiedad de Schur, Y contiene una copia de ℓ_1 y $L(X, Y') = L_{cc}(X, Y')$. Entonces $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tiene la DPP.*

Demostración. Como X no tiene la propiedad de Schur, existe una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x'_n \xrightarrow{w} 0$. Podemos asumir que $(x_n)_n$ es (admite) una sucesión básica [9, Bessaga-Pelczynski Selection Principle, pág. 42].
Además, por el Teorema de Hahn-Banach, existe $(\phi_n)_n$ sucesión acotada en X' tal que $\phi_n(x_k) = \delta_{nk}$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$. Como Y contiene una copia de ℓ_1, tenemos un operador suryectivo $q \in L(Y, \ell_2)$ (Teorema 0.4) y por lo tanto abierto. Entonces existe $(y_n)_n$ sucesión acotada en Y tal que $T(y_n) = e_n$, donde $(e_n)_n$ es la base canónica de ℓ_2. Sea $T : X\widehat{\otimes}_\pi Y \to \ell_2$ dada por $T(x \otimes y) := (\phi_k(x) \cdot (q(y))_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Entonces $\|T(x \otimes y)\|_2 \leq \left(\sup\limits_k \|\phi_k\|\right) \|x\| \|q\| \|y\|$. Es decir que $T \in L(X\widehat{\otimes}_\pi Y, \ell_2)$ y

$$T(x_n \otimes y_n) := (\phi_k(x_n)(q(y_n))_k)_k = (\phi_k(x_n)((e_n))_k)_k = (\phi_k(x_n)\delta_{nk})_k = e_n$$

Además, como ℓ_2 es reflexivo, T resulta un operador débilmente compacto.

Tenemos $(x_n)_n$ sucesión débilmente nula en X e $(y_n)_n$ sucesión acotada en Y, entonces $(x_n \otimes y_n)_n$ es débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ (Lema 2.21) y cumple que $T(x_n \otimes y_n) = e_n \in \ell_2$. Luego T no es completamente continuo.

Es decir que encontramos un operador $T \in L(X\widehat{\otimes}_\pi Y, \ell_2)$ débilmente compacto que no es completamente continuo. Por lo tanto $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tiene la DPP. □

Ejemplo 3.12. $c_0\widehat{\otimes}_\pi \ell_\infty$ no tiene la DPP.

Como c_0 y ℓ_∞ tienen ambos la Propiedad (V) y la DPP, resulta (por el Corolario 1.47) que $L(c_0, (\ell_\infty)') = L_{cc}(c_0, (\ell_\infty)')$. Además c_0 no tiene la propiedad de Schur y ℓ_∞ contiene una copia de ℓ_1, podemos entonces aplicar el Teorema 3.11 para concluir que $c_0\widehat{\otimes}_\pi \ell_\infty$ no tiene la DPP.

Corolario 3.13. *[18, Corollary 5] Sean X e Y dos espacios Banach de dimensión infinita tales que $L(X, Y') = L_{cc}(X, Y')$, $L(Y, X') = L_{cc}(Y, X')$ y $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la DPP. Entonces: o bien X e Y tienen la propiedad de Schur, o bien X' e Y' tienen la propiedad de Schur.*

Demostración. 1º) Veamos que si X no tiene la propiedad de Schur, entonces X' e Y' deben tener la propiedad de Schur. Como X no tiene la propiedad de Schur, dado que $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la DPP resulta (por el Teorema 3.11) que Y no contiene una copia de ℓ_1. Además, como X e Y son complementados en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ (Lema 2.16), también tienen la DPP. Entonces (por el Teorema 1.19) Y' tiene la propiedad de Schur y en consecuencia (por ser de dimensión infinita) Y no tiene la propiedad de Schur. Repitiendo entonces el mismo razonamiento, obtenemos que X' también tiene la propiedad de Schur.

2º) Veamos que si X tiene la propiedad de Schur, entonces Y también. En efecto, en ese caso, por ser de dimensión infinita, X contiene una copia de ℓ_1. Podemos aplicar entonces el Teorema 3.11 para concluir que Y tiene la propiedad de Schur. □

Teorema 3.14. *[18, Theorem 9] Sean X e Y espacios de Banach tales que X contiene una copia de ℓ_1 pero X no contiene copias complementadas de ℓ_1 e Y contiene una copia de c_0. Entonces $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tiene la DPP.*

Demostración. Dado que X contiene una copia de ℓ_1, existe $q \in L(X, \ell_2)$ tal que q es sobreyectivo (Teorema 0.4) y por lo tanto q es abierto. Podemos tomar entonces una sucesión acotada $\{x_n\}_n \subset X$ tal que $q(x_n) = e_n$, donde $(e_n)_n$ es la base canónca de ℓ_2.

Como Y contiene una copia de de c_0, tenemos $(y_n)_n$ una sucesión en Y equivalente a la base canónica de c_0. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe $(\psi_n)_n$ sucesión acotada en Y' tal que $\psi_i(y_j) = \delta_{ij}$. Definimos $T : X\widehat{\otimes}_\pi Y \to \ell_2$ dada por $T(x \otimes y) := (\psi_k(y) \cdot (q(x))_k)_k$. Entonces $T(x_n \otimes y_n) = (\psi_k(y_n) \cdot (q(x_n))_k)_k = (\delta_{kn} \cdot (e_n)_k)_k = e_n$.

Por otro lado, como X no contiene una copia complementada de ℓ_1, $(y_n)_n$ es equivalente a una base de c_0 y $(x_n)_n$ es una sucesión acotada en X, aplicando el Lema 2.25 obtenemos que $(x_n \otimes y_n)_n$ es débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$. Además (por ser ℓ_2 reflexivo) T es débilmente compacto. Tenemos entonces $T \in W((X\widehat{\otimes}_\pi Y, \ell_2)$ y $(x_n \otimes y_n)_n$ es débilmente nula tales que $T(x_n \otimes y_n) = e_n \nrightarrow 0$. Luego $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tiene la DPP. □

Observación 3.15. Para ejemplificar algunos de estos resultados, Ghenciu propone en [17] el espacio H^∞ de funciones analíticas acotadas en el disco, que aunque no es del tipo $C(K)$, tiene algunas propiedades similares: H^∞ tiene la DPP y la propiedad (V) y contiene copia de ℓ_∞ y de ℓ_1. Además $(H^\infty)'$ tiene la DPP y $(H^\infty)''$ tiene la DPP y la propiedad (V) [4], [5] y [7].

Ejemplo 3.16. $H^\infty\widehat{\otimes}_\pi c_0$ no tiene la DPP.

Como $X = H^\infty$ tiene una copia de ℓ_1 (Observación 3.15) pero no contiene una copia complementada de ℓ_1 (porque H^∞ tiene la propiedad (V) que se preserva para subespacios complementados y ℓ_1 no la tiene), podemos aplicar el Teorema 3.14 para concluir que $H^\infty\widehat{\otimes}_\pi c_0$ no tiene la DPP.

Ejemplo 3.17. Con los mismos argumentos del Ejemplo 3.16 para $X = H^\infty$ o $X = (H^\infty)''$ y considerando que $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty \hookrightarrow H^\infty \hookrightarrow (H^\infty)''$, también puede aplicarse el Teorema 3.14 y resulta que $H^\infty\widehat{\otimes}_\pi Y$ y $(H^\infty)''\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tienen la DPP para $Y = c_0, \ell_\infty, H^\infty, H^{\infty\prime\prime}$.

Observación 3.18. El Ejemplo 3.12 de que $c_0\widehat{\otimes}_\pi \ell_\infty$ no tiene la DPP también puede obtenerse como consecuencia del Teorema 3.14.

Teorema 3.19. *[17, Theorem 3] Sean X e Y espacios de Banach tales que X e Y' no tienen la propiedad de Schur y $L(X, Y') = L_{cc}(X, Y')$. Entonces $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tiene la DPP.*

Demostración. Dado que X no tiene la propiedad de Schur, entonces existen sucesiones $(x_n)_n$ débilmente nula en X y $(x'_n)_n$ acotada en X' tales que $x'_n(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A su vez, como Y' no tiene la propiedad de Schur, también existen sucesiones $(y'_n)_n$ débilmente nula en Y' e $(y_n)_n$ acotada en Y tales que $y'_n(y_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicamos el Lema 2.21 a $(x_n)_n$ débilmente nula en X e $(y_n)_n$ acotada en Y, y obtenemos que $(x_n \otimes y_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.

Por otro lado si aplicamos el Lema 2.35 a $(y'_n)_n$ débilmente nula en Y' y $(x'_n)_n$ acotada en X', tenemos que $(x'_n \otimes y'_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y'$.

Además $(x'_n \otimes y'_n)(x_n \otimes y_n) = x'_n(x_n).y'_n(y_n) = 1$.

Recordemos (Observación 2.29) que podemos ver $X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y' \hookrightarrow (X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$.

Por lo tanto tenemos $(x_n \otimes y_n)_n$ sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ y $(x'_n \otimes y'_n)_n$ sucesión débilmente nula en $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ tales que $(x'_n \otimes y'_n)(x_n \otimes y_n) = 1 \nrightarrow 0$. Luego, por el Teorema 1.11 (iv), $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tiene la DPP. □

Ejemplo 3.20. Dado K compacto Hausdorff y disperso, $C(K)\widehat{\otimes}_\pi H^\infty$ no tiene la DPP.

Si consideramos $X = C(K)$ (K disperso) e $Y = H^\infty$, entonces $X' = C(K)'$ es Schur (Corolario 1.22) e $Y = H^\infty$ tiene copia de ℓ_1 (Observación 3.15). Por lo tanto, dado que ambos son de dimensión infinita, X e Y' no tienen la propiedad de Schur (Observación 1.5). Además X e Y tienen la DPP y la propiedad (V) y en consecuencia, por el Corolario 1.47, $L(X, Y') = L_{cc}(X, Y')$. Luego, aplicando el Teorema 3.19, obtenemos que $C(K)\widehat{\otimes}_\pi H^\infty$ no tiene la DPP.

Una aplicación interesante del Teorema 3.19 es que podemos hacer una demostración aternativa del Teorema 3.11.

Otra demostración del Teorema 3.11. Si Y contiene una copia de ℓ_1, entonces Y' no tiene la Propiedad de Schur (Observación 1.5 (b)). Por lo tanto se cumplen las hipótesis para aplicar el Teorema 3.19 y concluir que $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tiene la DPP. □

Recordemos que si el dual de un espacio tiene la DPP, el espacio también. Entonces la afirmación "$(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ no tiene la DPP" es más débil que "$X\widehat{\otimes}_\pi Y$ no tiene la DPP". Veremos a continuación algunas condiciones que aseguran que $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ no tiene la DPP.

Teorema 3.21. *[17, Theorem 13] Sean X e Y espacios de Banach tales que X' e Y'' no tienen la propiedad de Schur y $L(Y'', X') = L_{cc}(Y'', X')$. Entonces $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ no tiene la DPP.*

Demostración. Como Y'' no tiene la propiedad de Schur, entonces existen sucesiones $(y''_n)_n$ débilmente nula en Y'' e $(y'_n)_n$ acotada en Y' tales que $y''_n(y'_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como X' tampoco tiene la propiedad de Schur, entonces existen sucesiones $(x'_n)_n$ débilmente nula en X' y $(x_n)_n$ acotada en X tales que $x'_n(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $L(Y'', X') = L_{cc}(Y'', X')$ podemos aplicar el Lema 2.21 a $(y''_n)_n$ débilmente nula en Y'' y $(x_n)_n$ acotada en X y obtenemos que $(x_n \otimes y''_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y''$. Por otro lado si aplicamos el Lema 2.35 a $(x'_n)_n$ débilmente nula en X' e $(y'_n)_n$ acotada en Y', resulta que $(x'_n \otimes y'_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y' \hookrightarrow L(X, Y')$. Además, para cada $y \in Y$: $((x'_n \otimes y'_n)(x_n))(y) = (x'_n(x_n))(y'_n(y)) = y'_n(y)$. Es decir: $(x'_n \otimes y'_n)(x_n) = y'_n$ en Y'.

Definimos ahora $S : X\widehat{\otimes}_\pi Y'' \to (L(X, Y'))'$ dado por $(S(x \otimes y''))(T) := (T^*(y''))(x)$ para todo $T \in L(X, Y')$, $x \in X$, $y'' \in Y''$.

Como S es continuo, entonces $(S(x_n \otimes y''_n))_n$ es débilmente nula en $(L(X, Y'))'$. Además

$$(S(x_n \otimes y''_n))(x'_n \otimes y'_n) = ((x'_n \otimes y'_n)^* (y''_n))(x_n) = y''_n((x'_n \otimes y'_n)(x_n)) = y''_n(y'_n) = 1.$$

Luego, por el Teorema 1.11 (iv), $L(X, Y') \cong (X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ no tiene la DPP. □

Si bien podemos mostrar ejemplos de espacios que se ajusten a las hipótesis del Teorema 3.21 y por lo tanto $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ no tiene la DPP, serían casos en que esto puede deducirse del hecho de que $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tampoco la tiene. No hemos podido encontrar ejemplos de espacios clásicos tales que $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tenga la DPP y además se cumplan las hipótesis de Teorema 3.21 para concluir que su dual $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ no la tiene.

No obstante, presentamos algunos corolarios interesantes de este teorema con la esperanza de que a futuro sirvan para construir ejemplos novedosos.

Corolario 3.22. *Sea X un espacio de Banach tal que X' no tiene la propiedad de Schur y X no contiene copias complementadas de ℓ_1. Entonces $L(X, \ell_1)$ no tiene la DPP.*

Demostración. Como X no contiene copias complementadas de ℓ_1, entonces X' no contiene copias de c_0 (Corolario 1.33). Además ℓ_∞ tiene la DPP y la Propiedad (V) (Observación 1.14). Luego, por el Corolario 1.46, $L(\ell_\infty, X') = L_{cc}(\ell_\infty, X')$. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 3.21 para $Y = c_0$ y obtenemos que $L(X, \ell_1)$ no tiene la DPP. $\square$

Corolario 3.23. *[17, Corollary 14 (i)] Sean X e Y espacios de Banach tales que X' no tiene la propiedad de Schur, X no contiene copias complementadas de ℓ_1 e Y' contiene una copia complementada de ℓ_1, entonces $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ no tiene la DPP.*

Demostración. Como Y' contiene una copia complementada de ℓ_1, existe $P : Y' \to \ell_1$ proyección. Sea $Q : L(X, Y') \to L(X, \ell_1)$ dado por $Q(T) := P \circ T$. Entonces Q es una proyección, es decir que $L(X, \ell_1)$ es un subespacio complementado de $L(X, Y')$. Por el Corolario 3.22, $L(X, \ell_1)$ no tiene la DPP, luego $L(X, Y')$ no tiene la DPP (pues la DPP se preserva para subespacios complementados). $\square$

Corolario 3.24. *[18, Theorem 15] Sean X e Y espacios de Banach tales que X' no tiene la propiedad de Schur, X'' no contiene copias complementadas de ℓ_1 e Y' contiene una copia complementada de ℓ_1, entonces $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ no tiene la DPP.*

Demostración. Para poder usar el corolario anterior, veamos que X no contiene copias complementadas de ℓ_1. Supongamos por el contrario que sí, entonces X' contiene una copia de c_0 (Corolario 1.33) y por lo tanto existe $T : X'' \to \ell_1$ que es un cociente. Esto implica que X'' contiene una copia complementada de ℓ_1 [9, Theorem 5] lo cual contradice la hipótesis. Luego X no tiene copias complementadas de ℓ_1 y se aplica el Corolario 3.23 para concluir que $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)'$ no tiene la DPP. $\square$

Terminaremos este capítulo y el trabajo con un resultado sobre el tensor inyectivo. El siguiente teorema establece condiciones suficientes sobre X e Y para que $(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y)'$ no tenga la DPP. Una consecuencia interesante de este teorema es que permite ver con $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)'$ un ejemplo de espacio que por ser Schur (Ejemplo 2.15) tiene la DPP, pero su dual $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)''$, como mostraremos luego a partir del teorema, no la tiene.

Teorema 3.25. *[17, Theorem 10] Sean X e Y espacios Banach tales que X' e Y'' no tienen la propiedad de Schur y $L(X', Y'') = L_{cc}(X', Y'')$. Entonces $(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y)'$ no tiene la DPP.*

Demostración. Como X' no es Schur, existen sucesiones $(x_n')_n$ débilmente nula en X' y $(x_n)_n$ acotada en X tales que $x_n'(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente, dado que Y'' tampoco es Schur, existen sucesiones $(y_n'')_n$ débilmente nula en Y'' e $(y_n')_n$ acotada en Y tales que $y_n''(y_n') = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En virtud del Lema 2.21, $(x_n' \otimes y_n')_n$ es débilmente nula en $X'\widehat{\otimes}_\pi Y'$ y por lo tanto en $(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y)'$. Por otro lado, aplicando el Lema 2.35 obtenemos que $(x_n \otimes y_n'')_n$ es débilmente nula en $X\widehat{\otimes}_\pi Y''$ que es un subespacio cerrado de $(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y)''$ [13, Lemma 1]. Luego, $(x_n \otimes y_n'')_n$ es débilmente nula en $(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y)''$.

Sin embargo $< x_n \otimes y_n'', x_n' \otimes y_n' >= x_n'(x_n) \cdot y_n''(y_n') = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y esto implica, por la equivalencia (**v**) del Teorema 1.11, que $(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y)'$ no tiene la DPP. $\square$

Como aplicación del Teorema 3.25 mostraremos finalmente que $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)''$ no tiene la DPP, lo cual nos permite hacer dos consideraciones interesantes. La primera, que ya mencionamos, es que tenemos $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)'$ como ejemplo de espacio que por ser Schur (Ejemplo 2.15) tiene la DPP, pero su dual $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)''$ no. Y la segunda es que podemos ver en $c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0$ un ejemplo de tensor proyectivo que tiene la DPP (Ejemplo 3.2) y tal que su bidual $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)''$ no la tiene.

Corolario 3.26. *$(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)''$ no tiene la DPP.*

Demostración. Por el Corolario 2.54, $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)' \cong \ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1$. Basta probar entonces que podemos aplicar el Teorema 3.25 para $X = Y = \ell_1$. En efecto, $\ell_1' \cong \ell_\infty$ y $\ell_1'' \cong \ell_\infty'$ no tienen la propiedad de Schur y además, por tener ℓ_∞ la DPP y la propiedad (V), $L(\ell_\infty, \ell_\infty') = L_{cc}(\ell_\infty, \ell_\infty')$ (Corolario 1.47). Luego se aplica el Teorema 3.25 para concluir que $(c_0\widehat{\otimes}_\pi c_0)'' \cong (\ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1)'$ no tiene la DPP. $\square$

Bibliografía

[1] F. Albiac y N. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer, New York, 2006.

[2] F. Bombal, *Sobre algunas propiedades de espacios de Banach*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.) **84** , no. 1 (1990), p. 990.

[3] F. Bombal e I. Villanueva, *On the Dunford-Pettis property of the tensor product of C(K) spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **129**, no. 5 (2001), 1359-1363.

[4] J. Bourgain, *New Banach space properties of the disc algebra and* H^∞, Acta Math. **152**, no. 1-2 (1984), 1-148.

[5] J. Bourgain, H^∞ *is a Grothendieck space*, Studia Math. **75** (1983), 193-216.

[6] N. L. Carothers, *A short course on Banach space theory*, London Math. Soc. Stud. Texts, Vol. 64, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[7] M. D. Contreras y S. Díaz, *Some Banach space properties of the duals of the disk algebra and* H^∞, Michigan Math. J. **46** (1999), 123-141.

[8] J. Diestel, *A survey of results related to the Dunford-Pettis property*, Contemp. Math. **2** (1980), 15-60.

[9] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[10] J. Diestel, H. Jarchow y A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[11] N. Dunford y B. J. Pettis, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 323-392.

[12] N. Dunford y J. T. Schwartz, *Linear operators, part 1: general theory*, Vol. 10, John & Wiley Sons, 1988.

[13] G. Emmanuele, *Remarks on weak compactness of operators defined on certain injective tensor products*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 473-476.

[14] G. Emmanuele y W. Hensgen, *Property (V) of Pelczyński in projective tensor products*, Math. Proc. R. Ir. Acad. Sect. A **95**, no. 2 (1995), 227-231.

[15] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309-317.

[16] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. M. Santalucía, J. Pelant y V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, Vol. 8, Springer, New York, 2001.

[17] I. Ghenciu, *On the Dunford-Pettis Property of Tensor Product Spaces*, Colloq. Math. **125** (2011), 221-231.

[18] M. González y J. Gutiérrez, *The Dunford-Pettis property on tensor products*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **131**, no. 1 (2001), 185-192.

[19] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)*, Canad. J. Math. **5** (1953), 129-173.

[20] P. Harmand, D. Werner y W. Werner, *M-ideals in Banach Spaces and Banach Algebras*, Lecture notes in Math., Vol. 1547, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[21] F. Lust, *Produits tensoriels injectifs d'espaces de Sidon*, Colloq. Math. **32** (1975), 286-289.

[22] A. Pelczyński, *Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact*, Bull. Acad. Polon. Sci. **10** (1962), 641-648.

[23] A. Pelczyński, *On Banach spaces containing* $L_1(\mu)$, Studia Math. **30** (1968), 231-246.

[24] A. Pelczyński y Z. Semadeni, *Spaces of continuous functions (III) (Spaces C(Ω) for Ω without perfect subsets)*, Studia Math. **18** (1959), 211-222.

[25] A. Pelczyński y W. Szlenk, *Sur l'injection naturelle de l'espace ℓ dans l'espace ℓ_p*, Colloq. Math. **10** (1963), 313-323.

[26] A. M. Peralta, *Una revisión de la propiedad de Dunford-Pettis en productos tensoriales proyectivos de espacios de Banach*, https://www.ugr.es/~aperalta/oldweb/documentos/papers/DPPTensorTriples.pdf

[27] G. Pisier, *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., Vol. 60, Providence, R.I, 1986.

[28] D. Przeworska-Rolewicz y S. Rolewicz. *Equations in Linear Spaces*, PWN, Warszawa, 1968.

[29] W. M. Ruess y C.P. Stegall, *Extreme points in duals of operator spaces*, Math. Ann. **261** , no. 4 (1982), 535-546.

[30] R. A. Ryan, *Introduction to tensor products of Banach spaces*, Vol. 73, Springer, London, 2002.

[31] R. A. Ryan, *The Dunford-Pettis property and projective tensor products*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **35**, no. 11-12 (1987), 785-792.

[32] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, 1971.

[33] R. Schatten, *On the Direct Product of Banach Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 195-217.

[34] C. Stegall, *Duals of certain spaces with the Dunford-Pettis property*, Notices Amer. Math.Soc. **19** (1972), A-799.

[35] A. Szankowski, *$B(H)$ does not have the approximation property*, Acta Math. **147** (1981), 89-108.