UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Sobre el grado del fibrado tangente de una variedad algebraica

Leonardo Lanciano

Director: Pablo Solernó

Fecha de Presentación 24/5/23

Para mi Bobe...

Agradecimientos

Estos agradecimientos están escritos con mis palabras, a fuerza de sudor, sangre y esfuerzo. En ellos se encuentra volcada la última gota de inspiración que me queda luego de semejante trabajo. Cualquier similitud entre estos y un template de agradecimientos hecho por ChatGPT resulta una mera coincidencia.

En primer lugar quiero agradecerle a Pablo Solernó, director de esta tesis y persona sin la cual no se podría haber realizado este trabajo. Pablo, gracias por abrirme las puertas a trabajar con vos desde el momento cero, por introducirme con Gabriela (quien ya tendrá su respectivo párrafo de agradecimiento), por tenerme paciencia y soportar toda mi intensidad (que para el que no me conozca, es mucha). En resumen, gracias por ayudarme a darle forma a mi matemática.

En segundo lugar, le quiero agradecer a Gabriela Jeronimo quien únicamente no aparece como directora junto a Pablo por motivos meramente burocráticos del departamento de matemática, pero lo merece y yo la considero como la codirectora de esta tesis. Gabriela, gracias por tomarte el trabajo de leer esta tesis cuantas veces fuera necesario para que la misma se encontrase presentable. Gracias a vos y Pablo por enseñarme a escribir.

Le agradezco también a Martín y Alicia, por ser jurados de esta tesis y tomarse el tiempo de leerla con tan poca antelación.

En cuanto a los agradecimientos de la índole familiar, le agradezco a mi madre, Clara, por ser un ejemplo de esfuerzo y superación para mí. Por confiar en mí desde el momento cero en mi elección de carrera, por toda su paciencia y su amor. En cuanto a mi padre, Nicolás, me temo que lo agradecido que me siento con el no puede ser puesto en simples palabras. Gracias Papá, por lo bueno, por lo malo y por sobre todo, por cultivar mi chispa. Por último, quiero agradecerle a mi abuelo Abraham, por ocuparse junto con mis padres de mi crianza, por enseñarme su picardía y por escucharme incondicionalmente siempre. Gracias Zeide. Por último dentro de este apartado, quiero agradecer a mi difunto abuelo Santiago por apoyarme económicamente en mis estudios primarios y secundarios.

Quiero agradecerle a Martina Edurne Recalde. Allá por el 2014, perdí mi camino... y ella vio algo en mí cuando **nadie** más lo veía (me incluyo a mi mismo, lo aclaro por si algún no matemático lee esto alguna vez). Sin ella, a lo mejor ni siquiera hubiera terminado el secundario. En resumen, muchísimas gracias, jamás hubiera logrado esto sin vos.

Le agradezco a Agustrulis, por su cariño y su amor. Este trabajo no se podría haber hecho sin vos, gracias por soportar mis llantos, frustraciones y caprichos. Gracias por cuidarme y siempre apoyarme en mis objetivos (por más locos que sean). Te amo y espero que sigamos eligiéndonos por mucho tiempo más.

Dejando un poco de lado la seriedad, con el fin de preservar las identidades de los siguientes agentes de las fuerzas especiales de la UBA, pasamos a agradecerles con su debida notación.

Le quiero agradecer a los Guardianes por todo su apoyo a la vía láctea. Huesos (el Monchi), Lespa, Broctor, Kvn y Number Theory Giga Chad (NTGC). Gracias por bancarme y quererme tal cual soy, por las noches en Discord, los asados y los memes. En especial le agradezco al Broctor y a NTGC por sus múltiples ayudas a lo largo de este trabajo. Casi me olvido... Monchi, entregá el tag de Licenciado en Discord. (Si estás leyendo esto dentro de 10 años y te interesa la identidad de los Guardianes, el resto del lore lo podes ir deduciendo de los agradecimientos de las tesis en el período 2022-2024).

Les quiero agradecer a los chicos de Sony por las risas, las cenas, las juntadas, el cariño y por sobre todas las cosas, por enseñarme a usar LaTeX (jajaja). Gracias Gato, Cori, Gabute, Lucas, Plop y Maty. Los quiero muchísimo e hicieron de estos años en la facultad un espacio muy ameno.

Debido a los hechos sucedidos en el año 2022 las identidad de las siguientes personas a agradecer será preservada (No hay lore de esto, disculpen). Le quiero agradecer a los chicos del Centro, JV y GS (~~Gabriel~~, el que entiende entiende y el que no a diciembre) por haberse convertido en uno de mis grupos de amigos más importantes en tan poco tiempo. El tiempo demostró que ni siquiera entidades sin nombre pero con oficina pueden separar a este grupo. Los quiero mucho.

Agradezco a Enri y a Fede, mis únicos amigos del colegio. Gracias por el aguante todos estos años, los quiero un montón. Espero que nos podamos ver pronto.

Agradezco a mis amigos de la facultad que no son del DM. Fede Szmidt, Tomi Chimenti, Mati Sandacz, Nico Seltzer, Mati Avellaneda, Aldi Holzmann, Juli Perez L y a Gilbert. Gracias por todos los buenos momentos compartidos dentro y fuera de la facu.

Agradezco a todos mis profesores y colegas docentes de los cuales aprendí y sigo aprendiendo un montón. Entre ellos destaco a: Miguel Walsh, Nico Sirolli, Mariano Merzbacher, Tico Rial, Juan Francisco Piombo, Pablo Perrella, Martín Blusftein, Dario Aza y Juan Jose Guccione. Muchas gracias.

Por último quiero agradecer a las excelentes personas que conocí en esta carrera. Compañeros para los cuales no tengo palabras para describir la admiración y el respeto como colegas que les tengo. Aprendí mucho de ustedes así que esta tesis también es gracias a vosotros. Gracias Chino Z, Gaby Sac, Nico Agote, Chino C, Zalo, Jan Lamas, Mariano De María, Nacho Córdoba, Ceci Duhau, Sofi Goy, Ian Fleschler, Manuel Robert, Zenon Mabres, Juli Feldman, Ro Bernardini (RB), Marcos Bonich, y Gran Fleco (Fran Greco).

También te agradezco a vos... lector empedernido de web.dm.uba.ar que estas leyendo esto un domingo a las 2 de la mañana horas antes de un parcial y no sabes que hacer de tu existencia. Deja tu nombre acá ______ para ser agradecido.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La *dimensión* y el *grado* de una variedad algebraica V (de manera abreviada $\dim(V)$ y $\deg(V)$) son los invariantes asociados a variedades más elementales en geometría algebraica y ambas nociones pueden considerarse como medidas de la dificultad en el tratamiento (global, no local) de una variedad V.

Geométricamente, la dimensión mide la cantidad de grados de libertad para moverse dentro de V y de manera más precisa la dimensión máxima de una variedad lineal que sea proyección de V. Desde un punto de vista algebraico es simplemente el grado de trascendencia del anillo de la variedad sobre el cuerpo de base (que para nosotros será siempre $\mathbb{C}$ o más generalmente, un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0).

Por su parte, la noción de grado intenta generalizar el grado de una ecuación, interesándose por la "sinuosidad" de la variedad V, partiendo de las variedades lineales (que tienen grado 1). Así una posible definición de $\deg(V)$ es el número de puntos que resulta al intersecar V con una variedad lineal general de dimensión complementaria a la de V. El grado también puede considerase como una estimación (a veces muy grosera) sobre la cantidad de componentes irreducibles o conexas de V. A diferencia de la dimensión, no existe una versión algebraica del grado tan simple, a pesar de que en el caso de variedades proyectivas el grado puede recuperarse por medio del polinomio de Hilbert. Ver por ejemplo [Har92, Lecture 18] para un panorama de las posibles definiciones de $\deg(V)$.

Parece natural entonces que, en general, el grado suela ser más difícil de estimar que la dimensión. La principal herramienta conocida y desarrollada es el Teorema de Bézout (originalmente en [Béz79][1]), que establece que en condiciones generales el grado de una variedad definida por ecuaciones polinomiales $f_1 = 0, \ldots, f_s = 0$ es igual al producto $\deg(f_1) \ldots \deg(f_s)$. Este teorema ha sido largamente generalizado y ampliado (ver por ejemplo [Ful98], [Hei83], [VP84] entre muchos otros). Recién en los '70 aparece una nueva herramienta, especialmente adaptada a ecuaciones con pocos coeficientes no nulos, conocida como el Teorema de Bernstein-Kushnirenko (ver [Ber75], [Kus76]) y que, teniendo en cuenta propiedades combinatorias asociadas a las ecuaciones, permite estimaciones diferentes.

En esta tesis nos ocupamos de estudiar el grado del fibrado tangente TV asociado a una variedad (por lo general suave) V. Mientras que la relación entre $\dim(V)$ y $\dim(TV)$ ha sido bien estudiada y generalizada (ver [Kun99]), no hemos encontrado ningún rastro sobre un estudio más o menos sistemático en el caso del grado del fibrado tangente. Este hecho no deja de ser sorprendente ya que la estimación del grado del fibrado tangente está íntimamnete ligado a la complejidad del método de *prolongación/proyección* introducido por Élie Cartan en [Car45] para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Al intentar estudiar este problema, nos hemos encontrado con que, más allá de las herramientas usuales provenientes del Teorema de Bézout y que dan lugar a estimaciones demasiado gruesas, la obtención de resultados generales parece bastante difícil, si es que estos resultados existen. De todos modos hemos desarrollado familias de ejemplos (principalemente para el caso de curvas y variedades que admiten cierto tipo de parametrizaciones) en las que el grado del

[1] Aunque el caso de 2 variables es posible que fuera conocido por Newton [New87]

fibrado tangente se puede estimar de manera más precisa o al menos diferente de la estimación directa por Bézout. Estos ejemplos nos han permitido incluso proponer algunos resultados conjeturales que no aparecían tan claramente expuestos cuando comenzamos a desarrollar este trabajo. En particular, nos preguntamos si la desigualdad $\deg(TV) \leqslant \deg(V)^2$ es una estimación general posible.

A continuación describimos brevemente la presentación del trabajo y sus resultados principales:

En el Capítulo 2 fijamos algunas notaciones e introducimos las herramientas de álgebra conmutativa, geometría algebraica y geometría convexa que vamos a necesitar.

En el Capítulo 3 definimos el fibrado tangente para una variedad algebraica, estudiamos algunas propiedades básicas (como irreducibilidad y dimensión, ver teorema 3.1.9) e incluso generalizamos la noción para algunos casos en que la variedad no sea suave (ver subsección 3.2). Estos resultados, si bien no son originales (ver [Kun99]), están presentados de manera completa ya que no encontramos referencias elementales.

El Capítulo 4 se ocupa del grado del fibrado tangente. Se exhibe una cota intrínseca general $\deg(TV) \leqslant (\deg(V))^{n+d+1}$, donde $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad suave y d es la dimensión de V (ver teorema 4.3.1). Demostramos además una desigualdad más precisa $\deg(TV) \leqslant \deg(V)^2$ para hipersuperficies (proposición 4.2.1) y para familias infinitas de variedades (proposición 4.3.8). Más aún, exhibimos familias infinitas para las que vale la igualdad, es decir $\deg(TV) = \deg(V)^2$ (ver proposiciones 4.2.4 y 4.3.5).

El Capítulo 5 considera curvas paramétricas. Se demuestra que en este caso vale la igualdad $\deg(TV) = 2\deg(V) - 1$ (ver teorema 5.0.9). Cuando la parametrización es racional (no polinomial) se obtiene una cota $\deg(TV) \leqslant 3\deg(V) - 1$ (corolario 5.0.17). Observar que para estas curvas las cotas son lineales en $\deg(V)$ en lugar de cuadráticas.

En el Capítulo 6 estudiamos el caso de variedades parametrizadas racionalmente con algunas propiedades adicionales y haciendo hincapié en los soportes de la parametrización (variedades *quasi-paramétricas*). Demostramos que en el caso *genérico* estas variedades cumplen que $\deg(TV) \leqslant \binom{2d}{d} 2^d \deg(V)$ (ver corolario 6.0.11). Lamentablemente la genericidad aquí debe ser considerada de manera incompleta, ya que las condiciones pedidas dependen fuertemente de los soportes y no queda claro que existan ejemplos concretos (y mucho menos densos). En particular, la suavidad (o no) de la variedad imagen de una parametrización genérica parece muy relacionada con los soportes fijados.

Finalmente, en el Capítulo 7 consideramos 2 familias clásicas de variedades: las cuádricas (subsección 7.1) y las curvas planas (subsección 7.2). En el caso de las cuádricas calculamos exactamente $\deg(TV)$ de acuerdo a su forma normal (teorema 7.1.8). Para las curvas planas, aplicando Bernstein-Kushnirenko, damos una estimación de $\deg(TV)$ en términos del volumen mixto de los polítopos generados por los soportes de la ecuación de V y de su derivada total y en particular observamos que para curvas elípticas genéricas se tiene que $\deg(TV) = 7$ (ver teorema 7.2.9).

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Generalidades

En esta sección fijaremos algunas nociones generales que serán necesarias en el trabajo.

A lo largo de este trabajo, siempre que utilicemos k nos referiremos a un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y siempre que consideremos a un anillo, éste será conmutativo y con unidad.

Ahora fijamos notación con respecto a anillos de polinomios.

Notación 2.1.1. Sean $x_1, \ldots, x_n$ variables algebraicamente independientes sobre k. Nos referiremos como $k[\overline{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$ al anillo de polinomios en n variables con coeficientes en k. Escribiremos $\deg(f)$ para referirnos al grado total de un polinomio.

Fijamos notación para referirnos a elementos de anillos con más de una coordenada.

Notación 2.1.2. Dado $l \in \mathbb{N}$ y B un anillo conmutativo, consideremos $b_1, \ldots, b_l \in B$. Notaremos $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_l) \in B^l$ al vector formado por $b_1, \ldots, b_l$.

Notación 2.1.3. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ utilizaremos $(f_1, \ldots, f_r)$ para notar al ideal generado por $f_1, \ldots, f_r$.

Lo último de notación que fijaremos será para referirnos a la unión disjunta.

Notación 2.1.4. Sean A, B conjuntos. Si A, B son disjuntos, notaremos $A \sqcup B = A \cup B$ para referirnos a que es una unión disjunta.

2.2. Variedades algebraicas afines

Nuestro objeto de estudio en la tesis serán las variedades algebraicas afines. En esta sección introduciremos una colección de resultados y definiciones clásicas de geometría algebraica afín. Las demostraciones de los resultados introducidos aquí se pueden encontrar en [Har77], [Mil12], [SR13], [CLO15], [Kun13] [Eis95], [Mat80].

2.2.1. Nociones básicas

Comenzamos la sección con una definición.

Definición 2.2.1. Un conjunto algebraico $V \subseteq k^n$ es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones de la forma $f_i(\overline{x}) = 0$ con $f_i \in k[\overline{x}]$. Es decir:

$$V = \left\{ \overline{x} \in k^n \;\middle|\; \begin{array}{c} f_1(\overline{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_m(\overline{x}) = 0 \end{array} \right\}.$$

Ahora, damos una proposición sobre los conjuntos algebraicos.

Proposición 2.2.2. *Sean $\{ V_i \}_{i \in I}$ una familia de conjuntos algebraicos en k^n. Entonces:*

1. k^n *es algebraico.*

2. *Si* $J \subseteq I$ *es tal que* $|J| < \infty$ *entonces* $\bigcup_{j \in J} V_j$ *es un conjunto algebraico.*

3. $\bigcap_{i \in I} V_i$ *es un conjunto algebraico.*

Inmediatamente sacamos un corolario de esta proposición.

Corolario 2.2.3. *Los conjuntos algebraicos forman una base de cerrados para una topología en* k^n.

A esta topología se la llama la topología Zariski y, a partir de ésta, estamos listos para definir el n espacio afín.

Definición 2.2.4. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Se define $\mathbb{A}_k^n$ como el espacio topológico (k^n, τ) donde τ es la topología Zariski. Muchas veces el cuerpo k quedará implícito y lo notaremos simplemente $\mathbb{A}^n$.

Ahora pasamos a dar la definición de variedad algebraica.

Definición 2.2.5. Una variedad algebraica $V \subseteq \mathbb{A}^n$, es un conjunto algebraico de k^n pensado como cerrado de $\mathbb{A}^n$. En particular, para una variedad V, definimos su ideal asociado $I(V)$ como:

$$I(V) = \{ f \in k[\overline{x}] \mid f(p) = 0 \; \forall \; p \; \in V \}.$$

Ahora damos una proposición que nos dice como se lleva el ideal asociado a la variedad con la unión y respecto a la inclusión.

Proposición 2.2.6. *Sean* $\{ V_i \}_{i \in I} \subseteq \mathbb{A}^n$ *variedades algebraicas. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Si* $V_i \subseteq V_j \Rightarrow I(V_i) \supseteq I(V_j)$

2. $I(\varnothing) = k[\overline{x}]$ *e* $I(\mathbb{A}^n) = \{0\}$.

3. $I\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) = \bigcap_{i \in I} I(V_i)$

La noción de asociar un ideal a una variedad tiene una recíproca. Para esto introducimos la siguiente definición.

Definición 2.2.7. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $L \subseteq [x_1, \ldots, x_n]$ un subconjunto. Definimos la variedad definida por J, $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathbb{A}^n$ dada por:

$$\mathcal{V}(L) = \{ p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0 \; \forall f \in J \}.$$

Pasamos a dar una proposición análoga a la proposición 2.2.6.

Proposición 2.2.8. *Sean* $A, B \subseteq k[\overline{x}]$ *subconjuntos. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Si* $A \subseteq B$ *entonces* $\mathcal{V}(A) \supseteq \mathcal{V}(B)$.

2. *Si* $J = (A)$ *el ideal generado por* A *entonces* $\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(A)$.

3. *Si* $J = (A)$ *e* $I = (B)$ *son los respectivos ideales generados por* A *y* B*, entonces:*

$$\mathcal{V}(I + J) = \mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J) \text{ y } \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$$

A partir de esto, tenemos uno de los teoremas mas importantes de la teoría de variedades afines.

Teorema 2.2.9. *(Hilbert's Nullstellensatz) Sea $J \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal y $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica, entonces:*

1. $\sqrt{J} = I(\mathcal{V}(J))$.
2. $\mathcal{V}(I(V)) = V$.

En otras palabras, hay una correspondencia uno a uno entre variedades algebraicas de $\mathbb{A}^n$ e ideales radicales de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definición 2.2.10. Sea X un espacio topológico y $Z \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Diremos que Z es irreducible si Z no puede ser expresado como $Z = Z_1 \cup Z_2$ con Z_1 y Z_2 cerrados propios de Z.

Observemos que la definición de irreducibilidad es una definición plenamente topológica. Sin embargo, tenemos el siguiente teorema que relaciona un invariante algebraico de la variedad con su irreducibilidad.

Proposición 2.2.11. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín. Son equivalentes:*

1. *$I(V)$ es un ideal primo.*
2. *V es irreducible.*

Lo que veremos en el siguiente resultado es que toda variedad algebraica admite una descomposición en variedades irreducibles. Para esto, primero debemos introducir a los espacios topológicos noetherianos.

Definición 2.2.12. Un espacio topológico X se dice noetheriano si satisface la condición de la cadena descendente. Es decir, dada una cadena de cerrados:

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \ldots \supseteq Z_n \supseteq \ldots$$

existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $Z_r = Z_{r+l}$ para todo $l \in \mathbb{N}$.

Ahora si, damos el teorema de descomposición.

Teorema 2.2.13. *Sea X un espacio topológico noetheriano y $V \subseteq X$ un subconjunto cerrado y no vacío. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ y $W_1, \ldots, W_r$ cerrados de X irreducibles tal que:*

$$V = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_r.$$

Si además pedimos $W_i \subsetneq W_j$ si $i \neq j$ entonces esta descomposición es única y $W_1, \ldots, W_r$ se llaman las componentes irreducibles de V.

En particular, para adaptar el resultado anterior a variedades algebraicas tenemos la siguiente observación:

Observación 2.2.14. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano.

En particular, toda variedad tiene una descomposición única en componentes irreducibles. El paso siguiente es introducir la noción de dimensión de una variedad . Para esto, utilizamos una estrategia análoga a la anterior. Lo primero que haremos será introducir la dimensión para espacios topológicos noetherianos.

Definición 2.2.15. Sea X un espacio topológico noetheriano. Definimos su dimensión, $\dim(X)$ como:

$$\dim(X) = \sup \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n \textit{ donde } Z_i \textit{ es un cerrado irreducible de } X \; \forall \; i \} .$$

Si bien la dimensión de espacios noetherianos podría ser infinita (ver [Eis95, Exercise 9.6]), eso no ocurre en el caso de variedades algebraicas (ver [Har77, Theorem 1.8A]).

Pasamos a dar un par de ejemplos de interés en cuanto a las dimensiones.

Ejemplo 2.2.16. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in k[\overline{x}]$ no constante, entonces:

- $\dim(\mathbb{A}^n) = n$.
- $\dim(\mathcal{V}(f)) = n - 1$.

Definición 2.2.17. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica y consideremos $W_1, \ldots, W_r$ sus componentes irreducibles. Diremos que V es equidimensional de dimensión d si para cada $1 \leqslant i, j \leqslant r$ se cumple:

$$\dim(W_i) = \dim(W_j) = d.$$

Lo siguiente será dar un teorema de la dimensión que nos ayudará a aproximar la dimensión de las componentes irreducibles de la intersección de dos variedades.

Teorema 2.2.18. *Sean $V, W \subseteq \mathbb{A}^n$ variedades algebraicas irreducibles de dimensión d y s respectivamente. Entonces cada componente irreducible Z de $V \cap W$ cumple que:*

$$\dim(W) \geqslant d + s - n.$$

Ahora bien, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2.19. *([Eis95, Corollary 13.11]) Sean $r, n, \in \mathbb{N}$ y S una k-álgebra de tipo finito de dimensión n que además es un dominio íntegro. Consideremos $f_1, \ldots, f_r \in S$. Entonces se tiene se tiene que:*

$$\dim_{Krull}\left(S \big/ (f_1, \ldots, f_r) \right) \geqslant n - r.$$

Lo siguiente a definir es el anillo de coordenadas de una variedad afín.

Definición 2.2.20. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica. Definimos lo siguiente:

1. $k[V]$ el **anillo de coordenadas de** V como:

   $$k[V] = k[x_1, \ldots, x_n] \big/ I(V).$$

   En particular dado $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ notamos $\overline{f}$ para referirnos a la clase de f en $k[V]$.

2. Si V es irreducible, entonces $k[V]$ es un dominio, llamamos $k(V)$ a su cuerpo de fracciones.

3. Si V es irreducible y $p = (p_1, \ldots, p_n) \in V$, consideremos $\mathfrak{m}_p = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$ el ideal maximal de p. Entonces definimos $\mathcal{O}_{V,p} \subseteq k(V)$ como la localización:

   $$\mathcal{O}_{V,p} = (k[V])_{\mathfrak{m}_p} = (k[V])_p.$$

En particular, podemos relacionar la noción de dimensión de una variedad con la de su anillo de coordenadas.

Proposición 2.2.21. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica irreducible, entonces se tiene que:*

$$\dim(V) = \dim_{krull} k[V] = \operatorname{Tr}\deg_k k(V).$$

El anillo de coordenadas se puede pensar como el conjunto de las funciones de la variedad en $\mathbb{A}^1$ y es un objeto algebraico que captura mucha de la información de la variedad. Formalizamos esta idea definiendo el concepto de función regular.

Definición 2.2.22. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica irreducible y $U \subseteq V$ un abierto. Diremos que $f : U \to k$ es regular en un punto $p \in U$ si existen polinomios $g, h \in k[\overline{x}]$ y un abierto $G \subseteq U$ tal que $p \in G$ y además:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \text{ y } h \text{ no se anula en } G.$$

Diremos que f es regular en U si es regular en p para todo $p \in U$.

A partir de esto, definimos la noción de morfismo de variedades:

Definición 2.2.23. Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas y $U \subseteq V$, $G \subseteq W$ abiertos. Diremos que una aplicación $\varphi : U \to G$ es un morfismo de variedades si es continua y para cada $A \subseteq G$ abierto y f regular en A entonces:

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(A) \to k \text{ es regular.}$$

Un isomorfismo de variedades es un morfismo inversible cuya inversa también es un morfismo, y en ese caso notamos:

$$U \cong G.$$

Algo que es claro es que aplicarle un polinomio a una función racional sigue siendo racional y en consecuencia tenemos la siguiente observación:

Observación 2.2.24. Sea $f : V \subseteq \mathbb{A}^n \to W \subseteq \mathbb{A}^m$ una aplicación polinomial. Entonces f es un morfismo de variedades.

Ahora definimos una familia especial de morfismos de variedades.

Definición 2.2.25. Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas irreducibles. Sea $U \subseteq V$ un abierto, decimos que un morfismo $\varphi : U \to W$ es **dominante** si $\overline{\varphi(U)} = W$.

Ahora bien, dejando de lado el caso general y volviendo al caso en el que $U = V$ y $G = W$ con V, W variedades algebraicas tenemos una equivalencia para los morfismos de variedades.

Proposición 2.2.26. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas. Luego existe una aplicación natural biyectiva de conjuntos*

$$\alpha : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(k[W], k[V])$$

Donde el Hom *izquierdo se refiere a morfismos de variedades y el derecho a morfismos de k-álgebras. En particular, dada $F \in Hom(V, W)$ notamos $F^* = \alpha(F)$ y son equivalentes:*

1. *F es dominante.*
2. *F^* es inyectiva.*

En particular, a partir del siguiente resultado, podemos caracterizar totalmente los morfismos de variedades.

Teorema 2.2.27. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n, W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas. Entonces $\varphi : V \to W$ es un morfismo de variedades si y solo si existen $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que:*

$$\varphi(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), \ldots, f_m(\overline{x})).$$

Recordamos el siguiente resultado, conocido como Teorema de Chevalley:

Proposición 2.2.28. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas y $\varphi : V \to W$ un morfismo dominante. Entonces existe $U \subseteq W$ abierto denso tal que:*

$$U \subseteq \varphi(V).$$

Teorema 2.2.29. *(Teorema de la dimensión de la Fibra) Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas irreducibles, $G \subseteq V$ abierto y $\varphi : G \subseteq V \to W$ un morfismo dominante de variedades. Se cumple lo siguiente:*

1. $\dim(W) \leqslant \dim(V)$
2. *Dado $p \in \varphi(W)$, entonces:*

$$\dim(\varphi^{-1}(p)) \geqslant \dim(V) - \dim(W).$$

Más aún, existe un abierto $U \subseteq W$ tal que vale la igualdad si $p \in U \cap \varphi(V)$.

Pasamos a dar la definición de sucesión regular.

Definición 2.2.30. Sea $r \leqslant n \in \mathbb{N}$. Consideramos $f_1, \ldots, f_r \in k[\overline{x}]$. Decimos que $(f_1, \ldots, f_r)$ forman una sucesión regular si:

1. $f_1 \neq 0$ y f_1 no es una unidad en $k[\overline{x}]$.
2. Para cada $i \leqslant r$ vale que f_i no es un divisor de cero ni una unidad en ${k[\overline{x}]} \diagup {(f_1, \ldots, f_{i-1})}$.

A partir de esto damos la definición de ser una intersección completa.

Definición 2.2.31. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión d. Diremos que:

- V es **ideal theoretic intersección completa** si existen $f_1, \ldots, f_{n-d} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que, $(f_1, \ldots, f_{n-d})$ forma una sucesión regular y además:

$$I(V) = (f_1, \ldots, f_{n-d}).$$

- V es **set theoretic intersección completa** si existen polinomios $f_1, \ldots, f_{n-d} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que:

$$V = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_{n-d}) \textit{ es decir si es la intersección de } n-d \textit{ hipersuperficies.}$$

- V es una **intersección completa local** si para cada punto $p \in V$ existe una sucesión regular $(f_1, \ldots, f_{n-d}) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que:

$$\mathcal{O}_{V,p} \cong \left({k[x_1, \ldots, x_n]} \diagup {(f_1, \ldots, f_{n-d})} \right)_p.$$

2.2.2. Variedades suaves

Comenzamos la sección con la siguiente definición.

Definición 2.2.32. Sea $(\mathcal{O}, \mathfrak{M})$ un anillo local noetheriano.

1. Definimos $K = {\mathcal{O}} \diagup {\mathfrak{M}}$ su cuerpo residual y su dimensión de embedding, notada $\operatorname{e\,dim}(\mathcal{O})$ como:

$$\operatorname{e\,dim}(\mathcal{O}) = \dim_K {\mathfrak{M}} \diagup {\mathfrak{M}^2}.$$

2. Diremos que $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ es un anillo local regular si:

$$\operatorname{e\,dim}(\mathcal{O}) = \dim_{krull} \mathcal{O}.$$

Damos una proposición que relaciona la dimensión de embedding con la dimensión de Krull.

Proposición 2.2.33. *Sea $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano, entonces vale que:*

$$\dim_{krull}(\mathcal{O}) \leqslant e\dim(\mathcal{O}).$$

Una vez hecho esto, damos una definición importante que relaciona a los anillos locales regulares con las variedades.

Definición 2.2.34. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica y $p \in V$. Diremos que V es no singular en p si $\mathcal{O}_{V,p}$ es un anillo local regular. En el caso que V sea no singular en q para todo $q \in V$ diremos que V es suave.

Observemos que, dada $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica y $p \in V$, su respectivo anillo local $\mathcal{O}_{V,p}$ siempre es noetheriano puesto que la noetherianeidad se preserva por cocientes y localizaciones. De esta forma, para ver que una variedad es no singular en p alcanza con ver que:

$$\operatorname{e\,dim}(\mathcal{O}_{V,p}) \leqslant \dim_{Krull}(\mathcal{O}_{V,p}).$$

Pasamos ahora a dar una definición puramente algebraica.

Definición 2.2.35. Sea $I = (f_1, \dots, f_r) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal y sea $V = \mathcal{V}(I)$ variedad algebraica de dimensión d. Dado $p \in V$, definimos el Jacobiano de I en p como :

$$J_I(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Diremos que el ideal I es regular en p si $Rank(J_I(p)) = n - d$ y, más aún diremos que I es regular si esa igualdad vale para todo $p \in V$.

Luego, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.36. *(Criterio del Jacobiano). Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica irreducible de dimensión d y sea $I \subseteq k[\overline{x}]$ ideal regular tal que $V = \mathcal{V}(I)$. Entonces vale lo siguiente:*

1. *V es suave.*
2. *$I = I(V)$.*

Más aún, vale la recíproca: si V es suave, entonces $I(V)$ es regular.

Una vez definida la suavidad de una variedad, pasamos a definir su espacio tangente.

Definición 2.2.37. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave y $p \in V$. Consideremos $\mathfrak{M}_p \subseteq I(V)$ el ideal maximal asociado a p. Definimos el espacio tangente a V en p, notado T_pV como:

$$T_pV = \left(\mathfrak{M}_p \big/ \mathfrak{M}_p^2 \right)^*$$

donde usamos $*$ para notar al espacio dual como k-espacio vectorial.

Observar que, si $d = \dim(V)$, como V es suave se tiene que:

$$\dim_k \left(\mathfrak{M}_p \big/ \mathfrak{M}_p^2 \right) = \dim_{Krull}(\mathcal{O}_{V,p}) = d < \infty.$$

Luego, como estamos en el caso de dimensión finita, se sigue que T_pV es un k-espacio vectorial de dimensión $d = \dim(V)$. Lo siguiente, es dar una equivalencia de la definición del espacio tangente que es mucho más cómoda para trabajar.

Proposición 2.2.38. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave tal que $I(V) = (f_1, \dots, f_r)$. Entonces vale que:*

$$T_pV = Ker(J_{I(V)}(p)),$$

donde $J_{I(V)}(p)$ es la matriz jacobiana del ideal $I(V)$ en p definida en 2.2.35.

Demostración. Una demostración de esto, escrita con un lenguaje un poco distinto se puede encontrar en [Mil12, Pages 95-96]. □

Proposición 2.2.39. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas irreducibles y $U \subseteq V$ un abierto. Consideremos $F : U \subseteq \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ una aplicación racional dada por:*

$$F = \left(\frac{f_1}{g_1}, \dots, \frac{f_m}{g_m} \right),$$

que define un morfismo de variedades $F : U \subseteq V \to W$ variedades. Dado $p \in U$, se define el diferencial de F en p ,$D_pF : T_pV \to T_F(p)W$, como:

$$D_pF(q) = \left(\nabla \left(\frac{f_1}{g_1} \right)(p) \cdot q, \dots, \nabla \left(\frac{f_m}{g_m} \right)(p) \cdot q \right).$$

Entonces este mapa está bien definido y más aún, si F es un isomorfismo entonces para cada $p \in U$ se tiene que $D_pF : T_pV \to T_{F(p)}W$ también lo es.

Lo siguiente que haremos en esta sección es mostrar cómo se comporta el tangente con el producto de variedades.

Proposición 2.2.40. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas suaves, entonces $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{m+n}$ es suave y en particular dados $p_1 \in V$ y $p_2 \in W$ se tiene que:*

$$T_{(p_1,p_2)}(V \times W) = T_{p_1}V \times T_{p_2}W.$$

Demostración. Para ver que $V \times W$ es suave, sean $d = \dim(V)$ y $e = \dim(W)$. Notemos que si $I(V) = (f_1, \dots, f_r)$ e $I(W) = (g_1, \dots, g_l)$ y son suaves, entonces las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \dots \\ \nabla f_r \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \dots \\ \nabla g_l \end{pmatrix}$$

cumplen que $Rank(A) = n - d$ y $Rank(B) = m - e$ por el criterio del jacobiano 2.2.36. Observando que, $I(V \times W) = (f_1(\overline{x}), \dots, f_r(\overline{x}), g_1(\overline{y}), \dots, g_l(\overline{y}))$ y en consecuencia el jacobiano es de la forma:

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

y cumple que tiene Rango $n + m - d - e$ por lo que $V \times W$ es suave por el criterio del Jacobiano ya que $\dim(V \times W) = d + e$. La consecuencia sobre los tangentes se sigue de que $Ker(C) = Ker(A) \times Ker(B)$. □

Proposición 2.2.41. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad suave e irreducible. Entonces V es una intersección completa local (ver definición 2.2.31).*

2.2.3. Grado de una variedad

En esta sección vamos a presentar la definición de grado introducida en [Hei83] (ver también [Ful98], [VP84]).

Definición 2.2.42. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una propiedad sobre los puntos de X. Diremos que la propiedad $\mathcal{P}$ se cumple de manera genérica en X si existe $U \subseteq X$ abierto denso tal que $\mathcal{P}$ es verdadera en U.

Notación 2.2.43. (Variedad Lineal Genérica) Fijados $d \leqslant n \in \mathbb{N}$, definimos $L_1, \dots, L_{n-d} \in k[x_1, \dots, x_n]$ dados por:

$$L_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i + a_0^j.$$

Luego, podemos identificar al espacio de estos polinomios $L_1, \dots, L_{n-d}$ con $\mathbb{A}^{(n-d)(n+1)}$ y dotarlo con la topología Zariski. De esta forma, siempre que en esta tesis se refiera a una variedad lineal genérica de dimensión d nos refererimos a la variedad dada por:

$$L = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; L_j(\overline{x}) = 0 \; \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n - d \right\},$$

donde los coeficientes a_i^j de las L_j se encuentran dentro de un abierto Zariski de $\mathbb{A}^{(n-d)(n+1)}$.

En particular tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.44. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica y $d \in \mathbb{N}$ tal que $d \leqslant n$. Son equivalentes:*

1. $\dim(V) = d$
2. *La variedad lineal genérica de dimensión $n - d$ corta a V en un número finito de puntos.*

Ya sabemos que la intersección con una variedad lineal genérica de dimensión complementaria es finita. Sin embargo, aún no sabemos nada sobre el cardinal de dicha fibra. El siguiente lema responde esta cuestión:

Lema 2.2.45. *([Hei83, Proposition 1]) Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión n y sea $F : V \to \mathbb{A}^n$ un morfismo dominante, entonces:*

1. *$\#F^{-1}(p) \leqslant [k(V) : k(\mathbb{A}^n)]$ para todo $p \in \mathbb{A}^n$ tal que $F^{-1}(p)$ es finita.*

2. *Existe un abierto no vacío $U \subseteq \mathbb{A}^n$ tal que para todo $p \in U$ vale igualdad en 1.*

Pasamos ahora a la definición de grado siguiendo [Hei83].

Observación 2.2.46. ([Hei83, Page 244]) Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión d. Definimos $F : \mathbb{A}^{nd} \times V \to \mathbb{A}^{nd} \times \mathbb{A}^d$ de la siguiente forma: dada $G \in \mathbb{A}^{nd}$, donde pensamos a G como una matriz de $n \times d$ y $p \in V$, definimos $F(G, p) = (G, G(p))$. Entonces esta aplicación F es dominante.

Notar que la F definida en la observación anterior nos permite deducir que, al estar en las condiciones del lema 2.2.45, el cardinal de la fibra de F es constante genéricamente en $\mathbb{A}^{nd} \times \mathbb{A}^d$. Más aún, la fibra genérica de F se puede pensar como la intersección entre V y una variedad lineal genérica de dimensión $n - d$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.2.47. ([Hei83, Definition 1]) Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión d y sea F como en la observación 2.2.46. Definimos el grado de V como:

$$\begin{aligned} \deg(V) &= [k(\mathbb{A}^{nd} \times V) : k(\mathbb{A}^{nd} \times \mathbb{A}^d)] \\ &= \#\{\, V \cap L \mid L \text{ es una variedad lineal genérica de dimensión } n-d \text{ y } V \cap L \text{ es finito} \,\}. \end{aligned}$$

Lo siguiente que hacemos es extender esta definición para el caso de variedades algebraicas que no son irreducibles.

Definición 2.2.48. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica y sean $Z_1, \ldots, Z_r$ sus componentes irreducibles. Definimos el grado de V como:

$$\deg(V) = \sum_{i=1}^{r} \deg(V_i).$$

Ahora lo que vemos es que, para una variedad irreducible, el grado está unívocamente definido por cualquier abierto no vacío dentro de la variedad.

Lema 2.2.49. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica irreducible de dimensión r y sea $W \subsetneq V$ subvariedad irreducible. Entonces, dada L una variedad lineal genérica de dimensión $n - r$ es:*

$$\deg(V) = \#(V \cap L) = \#((V \backslash W) \cap L).$$

Demostración. Notar que como $W \subsetneq V$, necesariamente $\dim(W) < \dim(V)$. Sabemos que $\dim(W) = s$ si y solo si al intersecar W con una variedad lineal genérica de dimensión $n - s$ la intersección es finita y no vacía. De este resultado se sigue que la propiedad $W \cap L = \varnothing$ se cumple para toda variedad genérica de dimensión menor a $n - s$. Luego, la siguiente propiedad es genérica para las variedades lineales de dimensión $n - r$.

$$V \cap L = (V \backslash W) \cap L.$$

En consecuencia el resultado se sigue. ☐

Teorema 2.2.50. *([Hei83, Lemma 2]) Sea $\varphi : V \to W$ una aplicación lineal dominante. Entonces se tiene que:*

$$\deg(W) \leqslant \deg(V).$$

Ahora mencionamos la primera versión del teorema de Bezout.

Lema 2.2.51. *([Hei83, Remark 2]) Sean $V, L \subseteq \mathbb{A}^n$ variedades algebraicas donde L es lineal. Entonces:*

$$\deg(V \cap L) \leqslant \deg(V).$$

Lo siguiente será ver como se relaciona el grado con el producto de variedades.

Proposición 2.2.52. *([Hei83, Proposition 2]) Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas, entonces se tiene que:*

$$\deg(V \times W) = \deg(V) \cdot \deg(W).$$

Teorema 2.2.53. *(Teorema de Bezout) Sean $V, W \subseteq \mathbb{A}^n$ variedades algebraicas. Entonces se tiene que:*

$$\deg(V \cap W) \leqslant \deg(V) \cdot \deg(W).$$

Demostración. Consideramos $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{2n}$ y $\Delta \subseteq \mathbb{A}^{2n}$ la diagonal. Sea $\pi : (\Delta \cap (V \times W)) \to V \cap W$ la proyección a la primera coordenada. Observemos que π está bien definida y es una aplicación de grado 1. En consecuencia por el teorema 2.2.50, el lema 2.2.51 y la proposición 2.2.52 se sigue que:

$$\deg(V \cap W) \leqslant \deg(\Delta \cap (V \times W)) \leqslant \deg(V \times W) \leqslant \deg(V) \deg(W).$$

□

La siguiente observación nos dice como es el grado en el caso de una hipersuperficie.

Observación 2.2.54. Sea $f \in k[\overline{x}]$ un polinomio irreducible y $V = \{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid f(\overline{x}) = 0 \}$. Entonces se tiene que $\deg(V) = \deg(f)$.

Los siguientes resultados se tratan de extensiones o versiones más precisas de la desigualdad de Bezout.

Proposición 2.2.55. *([HS80, Proposition 2.3]) Sean $V, W \subseteq \mathbb{A}^n$ variedades algebraicas donde W está dada por:*

$$W = \{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid f_1(\overline{x}) = 0, \ldots, f_r(\overline{x}) = 0 \},$$

para ciertos polinomios $f_1, \ldots, f_r \in k[\overline{x}]$, entonces se tiene que:

$$\deg(V \cap W) \leqslant \deg(V) \cdot \text{máx} \{ \deg(f_1), \ldots, \deg(f_r) \}^{\dim(V)}.$$

Proposición 2.2.56. *(ver [Ful98]) Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica de dimensión > 0 y $f \in k[\overline{x}]$ un polinomio de grado e genérico.*

$$\deg(V \cap \{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid f(\overline{x}) = 0 \}) = \deg(V) \cdot e.$$

Finalizamos la sección con una proposición y un teorema.

Proposición 2.2.57. *([Mum69, Theorem 1]) Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave e irreducible. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_k \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que:*

$$I(V) = (f_1, \ldots, f_k) \text{ y } \deg(f_i) \leqslant \deg(V) \; \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Finalizamos la sección mencionando el teorema de Bertini

Teorema 2.2.58. *(Bertini) ([Jou83, Section 6.5, Théoreme 6.6]) Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica de dimensión d y sea L_k una variedad lineal genérica de dimensión $n - k$. Entonces:*

1. *$V \cap L_k \neq \emptyset \Leftrightarrow d \geqslant k$.*
2. *Si V es suave y $d \geqslant k$ entonces $V \cap L_k$ es una variedad suave de dimensión $d - k$.*
3. *Si $d \geqslant k$ entonces $I(V \cap L_k) = I(V) + I(L_k)$.*
4. *Si $d \geqslant k + 1$ y V es irreducible entonces $V \cap L_k$ es irreducible de dimensión $d - k$.*

2.3. Geometría convexa

Dentro de esta tesis utilizaremos herramientas de Geometría Convexa para resolver sistemas de ecuaciones polinomiales. Esta sección se tratará de dar una breve descripción de las herramientas que utlizaremos luego.

2.3.1. Polítopos

A lo largo de esta sección introduciremos una selección de resultados clásicos sobre polítopos y geometría convexa. Las demostraciones de los mismos se pueden encontrar en [Ewa12], [CLO15], [GKKZ03].

Notación 2.3.1. Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$. Notamos L_{pq} al segmento entre p y q dado por:

$$L_{pq} = \{\, tp + (1-t)q \mid t \in [0,1] \,\}$$

Definición 2.3.2. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que C es **convexo** si dados $p, q \in C$ entonces $L_{pq} \subseteq C$.

Pasamos a dar ejemplos de conjuntos convexos. Ahora damos una observación que muestra que la convexidad y las intersecciones se comportan como uno esperaría.

Observación 2.3.3. Sea I una familia de índices y $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}^n$ una familia de conjuntos convexos. conjuntos convexos. Entonces $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ es convexo.

Demostración. Sean $p, q \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Luego como $p, q \in A_i$ para todo $i \in I$, tenemos que $L_{pq} \subseteq A_i$ para todo $i \in I$. En consecuencia $L_{pq} \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ y éste resulta convexo. □

Observación 2.3.4. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces el conjunto $D = \bigcap\limits_{\substack{C\subseteq F \\ F\text{convexo}}} F$ es convexo y más aún, cumple con la propiedad de que dado F un convexo que contenga a C entonces $D \subseteq F$.

La observación anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.3.5. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos $Conv(C)$, la **cápsula convexa** de C, como el convexo más pequeño con respecto a la inclusión que contiene a C, es decir:

$$Conv(C) = \bigcap_{\substack{C\subseteq F \\ F\text{convexo}}} F.$$

Ahora introducimos una proposición que caracteriza la cápsula convexa de un conjunto.

Proposición 2.3.6. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces se tiene que:*

$$Conv(C) = \left\{ \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \lambda_i v_i \;\middle|\; m \in \mathbb{N}, v_i \in C,\ \lambda_i \geqslant 0 \text{ y } \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \lambda_i = 1. \right\}$$

Ahora definimos la noción de polítopo.

Definición 2.3.7. Un polítopo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es la cápsula convexa de un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ finito. Para un polítopo P definimos su volumen $n-dimensional$ como:

$$Vol_n(P) = \int_P 1\, dx_1 \dots dx_n.$$

En este trabajo nos interesaremos particularmente por polítopos de la forma $P = Conv(C)$ con $C \subseteq \mathbb{Z}^n$ el conjunto formado por los vectores en los exponentes en un conjunto monomios.

Ahora pasamos a ponerle nombre a un polítopo especial.

Definición 2.3.8. Sea $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ el origen y $\{\, e_1, \dots, e_n \,\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definimos el n-simplex $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^n$ como:

$$\Delta^n = Conv(\{\, \mathbf{0}, e_1, \dots, e_n \,\}) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_i \geqslant 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n a_i \leqslant 1 \right\}.$$

Proposición 2.3.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene que:*

$$Vol_n(\Delta^n) = \frac{1}{n!}.$$

Ahora pasamos a dar la definición de dimensión de un polítopo.

Definición 2.3.10. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un polítopo. Definimos $\dim(P)$ como el mínimo m tal que P puede ser embebido en $\mathbb{R}^m$.

Ahora pasamos a dar la siguiente definición, que extiende la idea intuitiva de dos y tres dimensiones de caras de un poliedro a polítopos en general.

Definición 2.3.11. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un polítopo de dimensión r y $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{ \mathbf{0} \}$.

- Notemos $m_v(P) = \text{mín}\{ m \cdot v \mid m \in P \}$. Definimos además el hiperplano de apoyo de P en v como el hiperplano afín dado por $\Pi_v = \{ m \in \mathbb{R}^n \mid m \cdot v = m_v(P) \}$.
- Llamamos a $P_v = P \cap \Pi_v$ a la cara de P determinada por v.

Teorema 2.3.12. *Sea P un polítopo de dimensión n. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *P es compacto.*
2. *P tiene una cantidad finita de caras.*
3. *Si Q es una cara de P y $Q \neq P$ entonces* $\dim(Q) < \dim(P)$.

2.3.2. Volumen mixto

Definición 2.3.13. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Definimos la **Suma de Minkowski** entre A y B, notada $A + B \subseteq \mathbb{R}^n$ como:

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A \text{ y } b \in B \}.$$

También definimos el conjunto $c \cdot A \subseteq \mathbb{R}^n$ dado por:

$$c \cdot A = \{ ca \mid a \in A \}.$$

Ahora damos una proposición que resume las buenas propiedades de la suma de Minkowski y la multiplicación por escalares a conjuntos.

Proposición 2.3.14. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *$Conv(A + B) = Conv(A) + Conv(B)$*
2. *$Conv(A) + Conv(A) = 2 \cdot Conv(A)$.*
3. *$Conv(c \cdot A) = c \cdot Conv(A)$ para $c \geqslant 0$.*

Lo que sigue será dar una proposición que relaciona la suma de Minkoswki con la suma de polítopos.

Proposición 2.3.15. *Sean $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ polítopos tal que $P = Conv(\{ p_1, \ldots, p_l \})$ y $Q = Conv(\{ q_1, \ldots, q_r \})$. Si llamamos $C = \left\{ p_i + q_j \,\middle|\, 1 \leqslant i \leqslant l,\ 1 \leqslant j \leqslant r \right\}$, entonces se tiene que:*

$$P + Q = Conv\,(C)\,.$$

Demostración. Para ver esto hacemos las dos inclusiones.

- $\supseteq$) Observemos que $A + B$ es un conjunto convexo que contiene a C. En consecuencia como la cápsula convexa es el mínimo convexo que lo contiene tenemos esta implicación.
- $\subseteq$) Notemos que necesariamente los vértices de $A + B$ han de ser suma de vértices de A y vértices de B. En consecuencia, el conjunto de sus vértices está contenido en C y se sigue el resultado.

□

Observación 2.3.16. La operación producto se lleva bien con el cálculo de volumen: del teorema de cambio de variable se sigue que si $c \in \mathbb{R}_{>0}$ y $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un polítopo, entonces:

$$Vol_n(c \cdot P) = c^n \cdot Vol_n(P).$$

Con esto estamos listos para introducir la noción de volumen mixto. En primer lugar, damos el *Teorema de Minkowski*:

Teorema 2.3.17. *Sea $n, k \in \mathbb{N}$ y $P_1, \ldots, P_k \subseteq \mathbb{R}^n$ polítopos. Entonces se tiene que:*

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = Vol_n(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k) \text{ es un polinomio homogéneo de grado } n.$$

Ahora sí, introducimos la definición de volumen mixto.

Definición 2.3.18. Sean $P_1, \ldots, P_n \subseteq \mathbb{R}^n$ polítopos. Definimos el volúmen mixto de $P_1, \ldots, P_n$ notado $MV(P_1, \ldots, P_n)$ como el coeficiente del monomio $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ en el polinomio,

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = Vol_n(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n).$$

Aunque pareciera bastante complicado por su construcción daremos un resultado que demuestra la cantidad de buenas propiedades que tiene el volumen mixto.

Teorema 2.3.19. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $P_1, \ldots, P_n \subseteq \mathbb{R}^n$ polítopos. El Volumen mixto en $\mathbb{R}^n$ cumple las siguientes propiedades:*

1. *El volumen mixto $MV(P_1, \ldots, P_n)$ es invariante vía transformaciones que preservan el volumen.*
2. *$MV(P_1, \ldots, P_n)$ es simétrico y lineal con respecto a la suma de Minkowski en cada variable.*
3. *$MV(P_1, \ldots, P_n) \geqslant 0$ y más aún, si $\dim(P_i) = 0$ para cierto i entonces $MV(P_1, \ldots, P_n) = 0$. Además, si $\dim(P_i) = n$ para todo i entonces $MV(P_1, \ldots, P_n) > 0$.*
4. *El volumen mixto es monótono respecto a la inclusión en cada coordenada, es decir, si $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n$ es un convexo que cumple $P_i \subseteq Q_i$ entonces:*

$$MV(P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n) \leqslant MV(P_1, \ldots, Q_i \ldots, P_n).$$

5. *Si $P = P_1 = P_2 = \ldots = P_n$ entonces:*

$$MV(P, \ldots, P) = n! Vol_n(P).$$

6. *Si $n = 2$ entonces:*

$$Vol_2(P_1 + P_2) - Vol_2(P_1) - Vol_2(P_2) = MV(P_1, P_2).$$

Demostración. Para una demostración de las partes 1, 2 y 3 referimos al lector al teorema 4.12 de [CLO06, Theorem 4.12, Chapter 7]. Mientras una prueba de la parte 4 se encuentra en [Ewa12, Theorem 4.12, Chapter IV]. Por último, la parte 5 se sigue de que, como por definición el volumen mixto es el coeficiente que acompaña a $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ en $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = Vol_n(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n)$ entonces si $P = P_1 = \ldots = P_n$ tenemos que:

$$Vol_n(\lambda_1 P + \ldots + \lambda_n P) = Vol_n\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) P\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^n Vol_n(P).$$

En consecuencia, el coeficiente que acompaña a $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ es $n! Vol_n(P)$ por lo que se tiene el resultado. La última parte se sigue de la segunda utlizando la multilinealidad del volumen mixto. ☐

2.3.3. El teorema de Bernstein-Kushnirenko

Lo que haremos ahora será desarrollar la teoría necesaria para introducir el teorema de Bernstein-Kushnirenko (ver [Ber75], [Kus76]). Dicho resultado, será una de las herramientas fundamentales que utilizaremos en este trabajo en los capítulos 5, 6 y la sección 7.2 del capítulo 7.

Definición 2.3.20. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio tal que $f = \sum_i a_i x^{\alpha_i}$ donde los $\alpha_i \in \mathbb{N}^n : 0$. Definimos el soporte de f, notado $\operatorname{sop}(f) \subseteq \mathbb{Z}^n$ como:

$$\operatorname{sop}(f) = \{ \alpha_i \in \mathbb{Z}^n \mid a_i \neq 0 \}.$$

Esta definición se puede dar más en general para polinomios de Laurent, es decir $f \in k[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$ pero en esta tesis trabajaremos únicamente con polinomios.

Notar que, dado $n \in \mathbb{N}$ y $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, entonces, $\operatorname{sop}(f)$ es finito.

Con esto en mente, podemos asociarle a cada polinomio un polítopo. La siguiente definición formaliza esta idea.

Definición 2.3.21. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Definimos el polítopo de Newton de f, $\mathcal{N}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ como:

$$\mathcal{N}(f) = Conv(\operatorname{sop}(f)).$$

La idea del teorema de Bernstein es que podremos controlar la cantidad de soluciones en $(\mathbb{A} \backslash 0)^n$ de un sistema de ecuaciones polinomiales en función de los polítopos de Newton de los polinomios involucrados.

Definición 2.3.22. Dado $A \subseteq \mathbb{N}_0^n$, notaremos $L_n(A) = \{ f \in k[x_1 \ldots, x_n] \mid \operatorname{sop}(f) = A \}$, es decir el conjunto de polinomios con soporte en A. En particular, si $A = \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \}$ entonces:

$$L_n(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i x^{\alpha_i} \;\middle|\; a_i \neq 0 \right\}.$$

Observar que $L_n(A)$ está identificado con $(\mathbb{A} \backslash \{0\})^r$ vía la aplicación $f = \sum_{i=1}^{r} a_i x^{\alpha_i} \rightarrow (a_1, \ldots, a_r)$ por lo que podemos inducirle la topología Zariski del subespacio.

Definición 2.3.23. Sean $A_1, \ldots, A_l \subseteq \mathbb{N}_0^n$ soportes. Dotamos a $L_n(A_i)$ con la topología Zariski asociada en la definición 2.3.22. Diremos que una propiedad se cumple de manera genérica para polinomios $(f_1, \ldots, f_l) \in L_n(A_1) \times L_n(A_2) \times \ldots \times L_n(A_l)$ si existe un polinomio no nulo P en los coeficientes de los f_i tal que la propiedad se cumple para aquellos $f_1, \ldots, f_l$ cuyos coeficientes no anulan a P.

Tenemos entonces el *Teorema de Bernstein-Kushnirenko*:

Teorema 2.3.24. *Consideremos polinomios $f_1, \ldots, f_n \in k[\overline{x}]$ tal que el sistema de ecuaciones polinomiales F dado por:*

$$F := \begin{cases} f_1 = 0 \\ \quad\vdots \\ f_n = 0 \end{cases} \quad \textit{tiene finitas soluciones en } (\mathbb{A} \backslash \{0\})^n. \tag{2.1}$$

Consideremos $P_i = \mathcal{N}(f_i)$. Entonces si $\delta(F)$ es la cantidad de soluciones del sistema en $(\mathbb{A} \backslash \{0\})^n$, vale que:

$$\delta(F) \leqslant MV(P_1, \ldots, P_n).$$

En particular, fijados $A_1 = \operatorname{sop}(f_1), \ldots, A_n = \operatorname{sop}(f_n)$ vale la igualdad de manera genérica para $(f_1, \ldots, f_n) \in L_n(A_1) \times \ldots \times L_n(A_n)$.

Demostración. Este teorema fue originalmente demostrado por Berstein en [Ber75]. Referimos a [CLO06, Theorem 5.4, Chapter 7] para una demostración. Usualmente, este teorema se encuentra demostrado para el caso en que el cuerpo de base es $\mathbb{C}$. Para una demostración donde k es un cuerpo de característica 0 arbitrario ver [Mon21, Theorem VII.5]. □

Damos una última definición para enunciar la versión mas general del teorema de Bernstein-Kushnirenko.

Definición 2.3.25. Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$ y $A \subseteq \mathbb{N}_0^n$ un conjunto finito. Consideramos $m_v(A) = \min\{ m \cdot v \mid m \in A \}$ y $A_v = \{ q \in A \mid v \cdot q = m_v(A) \}$ (ver definición 2.3.11 para darle una interpretación geométrica a esto). Dada $f(x) = \sum_{q \in A} c_q x^q$ para ciertos $c_q \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ definimos f_v como:

$$f_v = \sum_{q \in A_v} c_q x^q.$$

En particular, para cada sistema de ecuaciones $F = \begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_n = 0 \end{cases}$, definimos el sistema restringido F_v como:

$$F_v = \begin{cases} f_{1v} = 0 \\ \vdots \\ f_{nv} = 0 \end{cases}.$$

Para nuestro trabajo necesitaremos también un resultado que nos de condiciones suficientes para obtener la igualdad en el teorema de Bernstein-Kushnirenko, en el resultado anterior, al menos en el caso particular de que todos los soportes coincidan.

Teorema 2.3.26. *(ver [Ber75]) Consideremos $f_1, \ldots, f_n \in k[\overline{x}]$, con soportes $A_1 = \operatorname{sop}(f_1), \ldots, A_n = \operatorname{sop}(f_n)$ y el sistema de ecuaciones F definido por $f_1, \ldots, f_n$ como en (2.1). Si para todo $v \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$ el sistema F_v (ver definición 2.3.25) no tiene soluciones en $(\mathbb{A} \setminus \{0\})^n$, entonces se tiene que:*

$$\delta(F) = MV(P_1, \ldots, P_n).$$

Capítulo 3

El fibrado tangente

En este capítulo se definirá el objeto de estudio de esta tesis, el fibrado tangente de una variedad algebraica, y se estudiarán sus propiedades básicas. Si bien esta noción se introduce de manera natural en un contexto diferencial, lo estudiaremos aquí desde un punto de vista puramente algebraico.

3.1. Caso suave

Recordemos informalmente la definición 2.2.37. Dada una variedad $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $p \in V$, se puede definir su espacio tangente $T_pV = \left(\mathfrak{M}_p \big/ \mathfrak{M}_p^2 \right)^*$ donde $\mathfrak{M}_p$ es el ideal maximal del anillo local $k[V]_p$. Sin embargo, dentro de esta sección, utilizaremos la definición equivalente dada en 2.2.38, que es: si $I(V) = (f_1, \ldots, f_r)$ entonces:

$$T_pV = Ker \begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \cdots \\ \nabla f_r(p) \end{pmatrix}.$$

Donde, vale la pena aclarar que la definición equivalente anterior, no depende de quiénes sean los generadores para $I(V)$.

Definición 3.1.1. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave. Se define su **fibrado tangente** como:

$$TV = \left\{ (p,q) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; p \in V \text{ y } q \in T_pV \right\} = \bigsqcup_{p \in V} T_pV.$$

De esta forma, al haber definido un objeto nuevo nos preguntamos por sus propiedades como por ejemplo, ¿es el fibrado tangente de una variedad irreducible, irreducible como variedad? ¿cuál es su dimensión como variedad? Para llegar a responder estas primeras preguntas elementales primero deberemos hacer un poco de trabajo. Para empezar observamos que el fibrado tangente es una variedad algebraica.

Observación 3.1.2. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave. Entonces su fibrado tangente es un fibrado vectorial que además es la variedad algebraica dada por:

$$TV = \left\{ (p,q) \;\middle|\; \begin{array}{ll} f_i(p) = 0 & \forall 1 \leqslant i \leqslant r \\ \nabla f_i(p) \cdot \overline{q} = 0 & \forall 1 \leqslant i \leqslant r \end{array} \right\} \text{ donde } I(V) = (f_1, \ldots, f_r).$$

En particular, como T_pV no depende de los generadores elegidos, es claro que TV tampoco depende de ellos.

Ahora damos un ejemplo típico de cómo se ve el fibrado tangente para el caso de una hipersuperficie.

Ejemplo 3.1.3. (Fibrado Tangente de una Hipersuperficie) Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio libre de cuadrados tal que f y ∇f no tienen ceros comunes. Consideremos V la variedad algebraica definida por f. Entonces, observar que por el criterio del jacobiano 2.2.36, V es suave y en consecuencia se tiene que:

$$TV = \left\{ (p,q) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} f(p) = 0 \\ \nabla f(p) \cdot q = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) q_j = 0 \end{array} \right\}.$$

Comentario 3.1.4. A partir de este ejemplo se puede llegar a conjeturar cuál debería ser la dimensión del fibrado tangente de una variedad ya que intuitivamente esas dos ecuaciones al no depender la primera de q_j deberían bajar la dimensión en 2 y en consecuencia tener TV dimensión $2n - 2 = 2\dim(V)$. Probaremos un resultado de este tipo más adelante (Teorema 3.1.9).

Ahora pasamos a fijar un poco de notación.

Notación 3.1.5. De aquí en adelante en caso de no aclararlo, llamaremos π a la proyección natural $\pi : TV \to V$ dada por $(p,q) \to p$. También de aquí en adelante notaremos $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ para ahorrar notación.

Procedemos a dar una definición ahora para ponerle nombre a nuestros objetos de estudio.

Definición 3.1.6. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave con $I(V) = (f_1, \ldots, f_r) \subseteq k[\overline{x}]$ y sea $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ nuevas variables . Definimos el **ideal tangente** a $I(V)$ llamado $I_T(V) \subseteq k[\overline{x}, \overline{y}]$ como:

$$I_T(V) = (\nabla f_1 \cdot \overline{y}, \ldots, \nabla f_r \cdot \overline{y}).$$

Observar que en esta definición estamos haciendo un abuso de notación puesto que este ideal no depende únicamente de la variedad, sino de los generadores con los que vemos al ideal de la misma.

Ahora damos un lema clásico sobre variedades suaves que nos ayudará para demostrar el teorema principal de esta sección.

Lema 3.1.7. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave y conexa. Entonces V es irreducible.*

Demostración. Supongamos que V no es irreducible. Sean $C_1, \ldots, C_r$ las componentes irreducibles de V. Luego, sabemos que dado $i \in \{1, \ldots, r\}$ necesariamente es $C_i \cap \bigcup_{i \neq j} C_j \neq \varnothing$ ya que V es conexo. Entonces existe j tal que $C_i \cap C_j \neq \varnothing$. Sin pérdida de generalidad asumimos que son C_1 y C_2, si no hacemos un renombramiento. Ahora sea $x_0 \in C_1 \cap C_2$. Veamos que necesariamente $\mathcal{O}_{V,x_0}$ no es un dominio íntegro y lleguemos a una contradicción.

Para esto, notemos que el anillo de coordenadas $k[V]$ no es un dominio íntegro ya que V no es irreducible. En particular podemos considerar $f \in I(C_1) \backslash I(C_2)$ y $g \in I(\bigcup_{i \geq 2} C_i) \backslash I(C_1)$. Luego las clases $\overline{f}$ y $\overline{g}$ de f y g en $k[V]$ cumplen que $f \cdot g = 0$. Más aún, si ahora las miramos dentro de la localización en x_0, es claro que tanto f como g son distintas del cero de la localización ya que, si existiese un polinomio p tal que $p(x_0) \neq 0$ que cumpliera que $\overline{f}\overline{p} = 0$ entonces tendríamos que ese tal polinomio p no se anularía en la componente C_2 llevándonos a una contradicción. Luego tenemos que el anillo local $\mathcal{O}_{V,x_0}$ no es un dominio íntegro. Esto es una contradicción que se sigue de que como V es suave $\mathcal{O}_{V,x_0}$ es un anillo local regular y en consecuencia es un dominio íntegro. Luego V es irreducible y tenemos el resultado deseado. □

Damos un corolario inmediato de este lema que usaremos más adelante.

Corolario 3.1.8. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave. Entonces sus componentes irreducibles son exactamente sus componentes conexas.*

Demostración. Observar que siempre un conjunto irreducible es conexo. Ahora cada componente conexa por el lema 3.1.7 es irreducible y por la unicidad de la descomposición se sigue el resultado. □

El siguiente teorema viene a responder las preguntas iniciales que nos habíamos hecho sobre nuestro objeto de estudio.

Teorema 3.1.9. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica irreducible y suave de dimensión d. Entonces:*

1. *TV es una variedad suave e irreducible de dimensión $2d$ y si $F := f_1, \dots, f_r$ es un sistema de generadores de $I(V)$, entonces:*

$$I(TV) = (f_1, \dots, f_r)k[\overline{x}, \overline{y}] + I_T(V).$$

2. *Si V es ideal theoretic intersección completa, entonces TV también lo es.*

Demostración. Demostremos item por item.

1. Probemos primero que TV es una variedad conexa equidimensional de dimensión $2d$. Sea $\dim(V) = d$ y sean $C_1, \dots, C_l$ las componentes conexas de TV. Luego tenemos que:

$$TV = \bigsqcup_{j=1}^{l} C_j.$$

Ahora bien, sea π la proyección natural a las primeras n coordenadas y $x_0 \in V$. Notar que $\pi^{-1}(x_0) = x_0 \times L$ con L un subespacio lineal de dimensión d ya que la variedad es **suave**. Por otra parte, tenemos que:

$$x_0 \times L = \pi^{-1}(x_0) = \bigsqcup_{j=1}^{l} (x_0 \times L) \cap C_j.$$

Como esta unión es disjunta y $x_0 \times L$ es irreducible existe un único C_i tal que $C_i \cap (x_0 \times L) \neq \emptyset$. En consecuencia necesariamente $x_0 \times L \subseteq C_i$.

Fijado $i \in \{1, \dots, l\}$ sean, $Z_1^i, \dots, Z_s^i$ las componentes irreducibles de C_i.

Para cada $1 \leqslant j \leqslant s$ sea $x_j \in \pi(Z_j^i)$. Observar que $x_j \times L_j \subseteq C_i$ para todo j por lo comentado en el párrafo anterior, y más aún, ha de ser que $x_j \times L_j \subseteq Z_j^i$ ya que $x_j \times L_j$ es irreducible, en particular, esto nos dice que la fibra genérica tiene dimensión d.

Luego, por el teorema de la dimensión de la fibra 2.2.29 aplicado a $\pi|_{Z_j^i}$ se sigue que :

$$\dim(Z_j^i) - \dim(\overline{\pi(Z_j^i)}) = d. \tag{3.1}$$

Ahora bien, supongamos que $\dim(Z_j^i) > 2d$. Luego $\dim(Z_j^i) = 2d + \ell$ con $\ell \in \mathbb{N}$. En consecuencia $\dim(\overline{\pi(Z_j^i)}) = d + \ell$ llevándonos a una contradicción si $\ell > 0$, pues $\dim(V) = d$.

Luego tenemos que $\dim(Z_j^i) \leqslant 2d$ para todo i, j.

Ahora bien, sea $(p, q) \in Z_j^i$ luego observemos que tenemos lo siguiente:

$$\dim(Z_j^i) = \dim k[Z_j^i] = \dim(k[TV])_{(p,q)} = \dim\left(\left(k[\overline{x}, \overline{y}] \big/ (I(V) + I_T(V))\right)_{(p,q)}\right).$$

Veamos que:

$$\dim\left(\left(k[\overline{x}, \overline{y}] \big/ (I(V) + I_T(V))\right)_{(p,q)}\right) \geqslant 2d.$$

En efecto, utilizando que la localización se distribuye en el cociente y el tercer teorema del isomorfismo tenemos lo siguiente:

$$\left(k[\overline{x}, \overline{y}] \big/ (I(V) + I_T(V))\right)_{(p,q)} \cong (k[V \times \mathbb{A}^n])_{(p,q)} \big/ \left(\frac{I_T(V)}{I(V)}\right)_{(p,q)}.$$

En particular, como V es suave, necesariamente es una intersección completa local por la proposición 2.2.41. En consecuencia tenemos que $(I(V))_{p,q} = (g_1, \ldots, g_{n-d})$ por lo que $(I_T(V))_{(p,q)} = (\nabla g_1 \cdot \overline{y}, \ldots, \nabla g_{n-d} \cdot \overline{y})$. Por la proposición 2.2.19 (localizando en el ideal maximal definido por el punto (p,q)) tenemos la siguiente condición:

$$\begin{aligned}\dim\left((K[V \times \mathbb{A}^n])_{(p,q)} \Big/ \left(\frac{I_T(V)}{I(V)}\right)_{(p,q)} \right) &\geqslant \dim(k[V \times \mathbb{A}^n]) - (n-d) \\ &= n + d - (n-d) = 2d.\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\dim(Z_j^i) = 2d$ y por lo tanto TV es una variedad equidimensional de dimensión $2d$.

Ahora bien, notar que tenemos que:

$$V = \bigsqcup_{i=1}^{l} \pi(C_i). \tag{3.2}$$

Recordemos que $\dim(\pi(C_i)) = \dim(\overline{\pi(C_i)})$, por lo tanto la ecuación (3.1) nos dice que $\dim(\overline{\pi(C_i)}) = d$. Entonces, como V es **irreducible**, por la proposición 2.2.28, $\pi(C_i)$ contiene un abierto denso en V. Esto seria una contradicción si $l > 1$ pues la unión en (3.2) es disjunta y son abiertos densos.

Luego tenemos que TV es una variedad equidimensional conexa de dimensión $2d$. Si vemos que TV es suave tendremos nuestro resultado por el lema 3.1.7. Sin embargo ver que es suave resulta elemental, pues sabemos que TV es una variedad algebraica dada por :

$$TV = \left\{ (p,q) \;\middle|\; \begin{array}{ll} f_i(p) = 0 & \forall 1 \leqslant i \leqslant r \\ \nabla f_i(p) \cdot \overline{q} = 0 & \forall 1 \leqslant i \leqslant r \end{array} \right\}.$$

Sea $I = (f_1, \ldots, f_r)k[\overline{x}, \overline{y}] + I_T(V)$. Veamos que I es un ideal regular. Para esto consideramos J la matriz jacobiana de los generadores naturales de I con respecto a las variables $\overline{x}, \overline{y}$:

$$J = \begin{pmatrix} \nabla F & 0 \\ * & \nabla F \end{pmatrix}.$$

Notar que J tiene rango máximo igual a $2n - 2d = 2n - \dim(TV)$ ya que cada bloque ∇F tiene rango $n - d$. De esta manera, por el criterio del Jacobiano I es un ideal regular y TV resulta suave. En consecuencia, por el lema 3.1.7, TV es irreducible. Por otra parte, se sigue del criterio del Jacobiano 2.2.36 que $I = I(TV)$ y con esto tenemos demostrado 1.

2. Esta parte se sigue rápidamente de la primera. Si V es ideal theoretic intersección completa, luego tenemos que $I(V) = (f_1, \ldots, f_{n-d})$. En consecuencia por el inciso anterior tenemos lo siguiente:
$$I(TV) = (f_1, \ldots, f_{n-d}, \nabla f_1 \cdot \overline{y}, \ldots, \nabla f_{n-d} \cdot \overline{y}).$$
Luego esta generado por $2n - 2d$ elementos y al tener dimensión $2d$, tenemos que TV es ideal theoretic intersección completa.

□

A partir de esto damos un corolario totalmente algebraico que caracteriza la primalidad de ciertos ideales.

Corolario 3.1.10. *Sea $I \subseteq k[\overline{x}]$ un ideal primo tal que $I = (f_1, \ldots, f_r)$ y la variedad $\mathcal{V}(I)$ es suave. Entonces el ideal $J \subseteq k[\overline{x}, \overline{y}]$ definido por: $J = (f_1, \ldots, f_r)k[\overline{x}, \overline{y}] + (\nabla f_1 \cdot \overline{y}, \ldots, \nabla f_r \cdot \overline{y})$ es primo.*

Demostración. Se sigue trivialmente del teorema 3.1.9 ya que podemos pensar que $I = I(V)$ y en consecuencia $J = I(TV)$ que ya probamos que es una variedad irreducible. □

Antes de seguir hacemos un comentario con respecto al teorema 3.1.9.

Comentario 3.1.11. Si bien nosotros dimos una demostración elemental del teorema, este resultado vale de manera más general en el contexto de esquemas y fibrados tangentes sobre variedades. Referimos al lector al artículo, [Kun99] en donde se dan una variedad de resultados y equivalencias de la misma índole del teorema anterior.

Ahora damos una proposición sobre cómo es el fibrado tangente para variedades suaves equidimensionales.

Proposición 3.1.12. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad equidimensional suave de dimensión d. Sean $V_1, \ldots, V_r$ las componentes irreducibles de V. Entonces TV es una variedad equidimensional suave de dimensión $2d$ y además:*

$$TV = \bigsqcup_{i=1}^{r} TV_i.$$

Demostración. Notemos que como V es suave, necesariamente por el corolario 3.1.8 sus componentes irreducibles son sus componentes conexas. Luego $V = \bigsqcup_{i=1}^{r} V_i$. Sin embargo, por definición, tenemos lo siguiente:

$$TV = \bigsqcup_{p \in V} T_pV = \bigsqcup_{i=1}^{r} \bigsqcup_{p \in V_i} T_pV_i = \bigsqcup_{i=1}^{r} TV_i.$$

Pero ahora como las componentes V_i son suaves e irreducibles, necesariamente TV_i es irreducible y tiene dimensión $2d$ por el teorema 3.1.9 . En consecuencia el resultado se sigue. □

Ahora damos una definición que utilizaremos luego.

Definición 3.1.13. Sea $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ una aplicación polinomial dada por:

$$\varphi(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), \ldots, f_m(\overline{x})) \text{ donde } f_i \in K[\overline{x}] \ \forall 1 \leqslant i \leqslant m..$$

Definimos la **graduación** de φ y, la notamos $\lambda(\varphi)$ como:

$$\lambda(\varphi) = \max \{ deg(f_i) \mid i \in \{1, \ldots, m\} \}$$

Diremos que tal morfismo φ es **lineal** si $\lambda(\varphi) = 1$.

Comentario 3.1.14. Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas. Muchas veces dentro de esta tesis consideraremos la graduación de morfismos de variedades $\varphi : V \to W$. Esto no se encuentra perfectamente definido ya que, por ejemplo si $Z = \{ (x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid x = 0 \}$ entonces el morfismo $\varphi : Z \to \mathbb{A}^1$ dado por $\varphi(x, y) = x$ es el mismo que el morfismo cero por lo que su graduación no estaría bien definida. Cuando nos refiramos a la graduación de este morfismo nos referiremos a la graduación de un representante fijado visto como aplicación polinomial de $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$.

A raíz del comentario anterior damos la siguiente definición.

Definición 3.1.15. Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas. Diremos que V y W son **congruentes** si, existen morfismos $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $\psi : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$ tal que:

1. $\lambda(\varphi) = 1$ y $\lambda(\psi) = 1$.
2. $\varphi(V) = W$ y $\psi(W) = V$.
3. Dado $x \in V$ es $\psi(\varphi(x)) = x$.
4. Dado $z \in W$ es $\varphi(\psi(z)) = z$.

En tal caso, lo notaremos :

$$V \equiv W.$$

y diremos que φ y ψ son los **morfismos de congruencia**.

Damos una observación sobre una familia grande de variedades congruentes entre sí.

Observación 3.1.16. Sea $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ una transformación lineal afín inversible. Entonces dada $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica es:
$$V \equiv F(V).$$

Demostración. Para demostrar esto, basta con ver que $F(V)$ es una variedad algebraica. Luego, el resultado se seguirá de la definición. Observemos que si $V = \mathcal{V}((f_1, \dots, f_r))$ entonces $F(V) = \mathcal{V}((f_1(F^{-1}), \dots, f_r(F^{-1})))$ por lo que se sigue el resultado. □

Ahora que ya sabemos que tomar fibrado tangente es una operación razonable, en el sentido de que duplica la dimensión y preserva la suavidad, nos podemos ocupar en entender como se comporta con otro tipo de operaciones entre las variedades, por ejemplo con el producto.

Proposición 3.1.17. *(Fibrado Tangente de un Producto). Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas irreducibles suaves. Entonces,*
$$T(V \times W) \equiv TV \times TW.$$

Demostración. Observemos que, por la proposición 2.2.40, $V \times W$ es suave por lo que tiene sentido considerar su fibrado tangente. Ahora entendamos quien es $T(V \times W)$ como conjunto.
$$T(V \times W) = \left\{ (p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{A}^{2(n+m)} \;\middle|\; p_1 \in V, p_2 \in W, (q_1, q_2) \in T_{(p_1,p_2)}(V \times W) \right\}.$$
Sin embargo notar, que por la segunda parte de la proposición 2.2.40 tenemos que:
$$T_{(p_1,p_2)}(V \times W) = T_{p_1}V \times T_{p_2}W.$$
En consecuencia se tiene lo siguiente:
$$T(V \times W) = \left\{ (p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{A}^{2(n+m)} \;\middle|\; p_1 \in V, p_2 \in W, q_1 \in T_{p_1}V, q_2 \in T_{p_2}W \right\}.$$
Es claro que el morfismo $\varphi : \mathbb{A}^{2(n+m)} \to \mathbb{A}^{2(n+m)}$ dado por $\varphi(p_1, p_2, q_1, q_2) = (p_1, q_1, p_2, q_2)$ manda $T(V \times W)$ en $TV \times TW$. Por la observación 3.1.16 el resultado se sigue. □

Otra cosa que podría preguntarse uno es, ¿qué sucede si dos variedades son congruentes? ¿Será cierto que los fibrados tangentes también lo son? En efecto la siguiente proposición nos responde eso.

Proposición 3.1.18. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades suaves e irreducibles tal que $V \equiv W$. Entonces:*
$$TV \equiv TW.$$

Demostración. Sean $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ y $\psi : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$ los morfismos de congruencia entre V y W donde:
$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \text{ y } \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n).$$
Luego podemos definir morfismos de congruencia $\overline{\varphi} : \mathbb{A}^{2n} \to \mathbb{A}^{2m}$ y $\overline{\psi} : \mathbb{A}^{2m} \to \mathbb{A}^{2n}$entre TV y TW dados por:
$$\overline{\varphi}(\overline{x}, \overline{y}) = (\varphi(\overline{x}), \nabla\varphi_1 \cdot \overline{y}, \dots, \nabla\varphi_m \cdot \overline{y}) \text{ y } \overline{\psi}(\overline{u}, \overline{v}) = (\psi(\overline{u}), \nabla\psi_1 \cdot \overline{v}, \dots, \nabla\psi_n \cdot \overline{v}).$$
Es claro que como $\lambda(\varphi) = \lambda(\psi) = 1$ es $\lambda(\overline{\varphi}) = \lambda(\overline{\psi}) = 1$. Más aún, observar que $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ induce un isomorfismo de variedades $\varphi : V \to W$. En consecuencia este isomorfismo, induce un isomorfismo entre sus tangentes, el cual está dado por:
$$\overline{y} \in T_{\overline{x}}V \to (\nabla\varphi_1(\overline{x}) \cdot \overline{y}, \dots, \nabla\varphi_m(\overline{x}) \cdot \overline{y}) \text{ es decir } \overline{y} \to D_{\overline{x}}\varphi(\overline{y}),$$
donde $D_{\overline{x}}\varphi$ es el mapa inducido por φ entre los tangentes que vimos en la proposición 2.2.39. En consecuencia el resultado se sigue. □

La proposición anterior nos da una manera de construir un morfismo entre fibrados tangentes a partir de un morfismo de variedades. Esta idea puede ser formalizada en general, mas allá del caso de isomorfismos lineales.

Proposición 3.1.19. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas suaves y sea $\varphi : V \to W$ un morfismo. Entonces existe un único morfismo $\overline{\varphi} : TV \to TW$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} TV \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "\pi_n"] & TW \arrow[d, "\pi_m"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & W \end{tikzcd}$$

y además cumple que $\overline{\varphi}(x_0, -) : T_{x_0}V \to T_{\varphi(x_0)}W$ es el diferencial de φ en x_0.

Demostración. Probemos existencia. Para esto notar que como φ es un morfismo regular entre dos variedades afines está dado por polinomios es decir $\varphi : V \to W$ está dado por:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \text{ para } (x_1, \dots, x_n) \in V.$$

Luego podemos construir la diferencial de φ como en la proposición 2.2.39. Definimos $D_{\overline{x}}\varphi : T_pV \to T_{\varphi(p)}W$ como:

$$D_{\overline{x}}\varphi(y) = (\nabla f_1(\overline{x}) \cdot \overline{y}, \dots, \nabla f_m(\overline{x}) \cdot \overline{y})$$

Es claro que este es un morfismo entre variedades ya que está dado por polinomios. Luego, definimos $\overline{\varphi} : TV \to TW$ como:

$$\overline{\varphi}(\overline{x}, \overline{y}) = (\varphi(\overline{x}), D_{\overline{x}}\varphi(\overline{y}))$$

Es claro que $\overline{\varphi}$ es morfismo y que hace conmutar el diagrama. La unicidad se sigue de la unicidad del mapa diferencial. □

Lo siguiente será estudiar cómo las propiedades del morfismo se trasladan al morfismo entre fibrados tangentes. Recordamos una definición clásica de geometría diferencial y la extendemos al caso de geometría algebraica.

Definición 3.1.20. Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades suaves y $\varphi : V \to W$ un morfismo. Diremos que:

- φ es una **inmersión** si $D_{\overline{x}}\varphi$ es inyectivo $\forall\ \overline{x} \in V$.
- φ es una **submersión** si $D_{\overline{x}}\varphi$ es sobreyectivo $\forall\ \overline{x} \in V$.

Proposición 3.1.21. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas suaves y $\varphi : V \to W$ un morfismo. Consideremos $\overline{\varphi}$ el morfismo definido en la proposición 3.1.19. Entonces las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si φ es una inmersión inyectiva, entonces $\overline{\varphi}$ es inyectiva.*
2. *Si φ es una submersión sobreyectiva (resp. dominante) entonces $\overline{\varphi}$ es sobreyectiva (resp. dominante).*
3. *$\lambda(\varphi) = \lambda(\overline{\varphi})$.*

Demostración. Demostremos item por item.

1. Queremos ver que $\overline{\varphi}$ es inyectiva. Sean $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w}$ tal que:

$$\overline{\varphi}(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{\varphi}(\overline{z}, \overline{w}) \Leftrightarrow (\varphi(\overline{x}), D_{\overline{x}}\varphi(\overline{y})) = (\varphi(\overline{z}), D_{\overline{z}}\varphi(\overline{w})).$$

   Veamos que $\overline{x} = \overline{z}$ y que $\overline{y} = \overline{w}$. Es claro que como φ es inyectiva necesariamente es $\overline{x} = \overline{z}$. Luego en consecuencia como φ es inmersión, se tiene que $\overline{y} = \overline{w}$.

2. Ahora queremos ver que $\overline{\varphi}$ es sobreyectiva. Para esto sea $(p, q) \in TW$. Notar que como φ es sobreyectiva se tiene que existe $\overline{x} \in V$ tal que $p = \varphi(\overline{x})$. Ahora como φ es submersión y $q \in T_pW$ tenemos que existe $\overline{y} \in T_{\overline{x}}V$ tal que $D_{\overline{x}}\varphi(\overline{y}) = q$. En consecuencia φ es sobreyectiva. Si no fuera sobreyectiva pero sí dominante, sabemos por la proposición 2.2.28 que φ tiene un abierto denso U contenido en su imagen. Es claro por lo demostrado en el párrafo anterior que $\overline{\varphi}$ es sobreyectiva si su codominio fuera el conjunto:

$$TU = \{\, (\overline{x}, \overline{y}) \subseteq \mathbb{A}^{2n} \mid \overline{x} \in U, \overline{y} \in T_{\overline{x}}W \,\}.$$

   Este conjunto es denso en TW y en consecuencia el resultado se sigue.

3. Observar que, dados dos morfismos polinomiales F, G es $\lambda(F,G) = \text{máx}\{\lambda(F), \lambda(G)\}$. Luego notando que $\lambda(D_{\overline{x}}\varphi(\overline{y})) = \lambda(\varphi)$ ya que $char(k) = 0$ el resultado se sigue

Para este punto, hemos dicho casi todo lo elemental que se puede decir para el fibrado tangente de una variedad suave. Sin embargo, hay una operación que estudiaremos más adelante que vale la pena definir.

Definición 3.1.22. (Fibrados Sucesivos) Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica irreducible suave de dimensión d. Definimos el k-ésimo fibrado tangente de V notado T^nV como la variedad definida recursivamente por la sucesión de variedades:

$$T^1V = TV \qquad\qquad T^kV = T(T^{k-1}V)$$

$\square$

Comentario 3.1.23. La sucesión de fibrados sucesivos introducida en la definición 3.1.22 está bien definida ya que por el teorema 3.1.9 tomar fibrado tangente es una operación que preserva tanto la irreducibilidad como la suavidad.

Pasamos a dar un ejemplo de cómo se verían algunos términos del fibrado sucesivo de una curva plana específica.

Ejemplo 3.1.24. Sea $V = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Es claro que V es irreducible pues el polinomio $x^2 + y^2 - 1$ es irreducible. Más aún, por el criterio del jacobiano, V resulta suave ya que :

$$J(x,y) = (2x, 2y),$$

que tiene rango 1 siempre salvo que $(x,y) = (0,0)$. Pero $(0,0) \notin V$, en consecuencia tenemos la conclusión deseada. Entonces, el fibrado tangente de V será una variedad irreducible de dimensión 2. ¿Qué forma tendrá el mismo? Bueno, por el ejemplo 3.1.3 tenemos que:

$$TV = \left\{ (x,y,u,v) \in \mathbb{A}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xu + 2yv = 0 \end{array} \right\} \tag{3.3}$$

Observemos que las ecuaciones dadas de TV en (3.3) generan $I(TV)$ por el teorema 3.1.9. De esta manera, procedemos a calcular T^2V

$$T^2V = \left\{ (x,y,u,v,a,b,c,d) \in \mathbb{A}^8 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xu + 2yv = 0 \\ 2xa + 2yb = 0 \\ 2ua + 2vb + 2xc + 2yd = 0 \end{array} \right\}$$

Se ve en este caso que realizar cálculos explícitos sobre estos objetos puede resultar, cuanto menos, tedioso y que si no fuera por el teorema 3.1.9 ni siquiera resultaría evidente que la variedad T^2V es irreducible.

Ahora damos una proposición que extiende todo lo que demostramos anteriormente a la teoría de fibrados sucesivos.

Proposición 3.1.25. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas suaves e irreducibles de dimensión d. Entonces valen las siguientes propiedades:*

1. *T^kV es una variedad algebraica suave e irreducible y vale que:*

$$\dim(T^kV) = 2^k d$$

2. *Si $V \equiv W$ entonces $T^kV \equiv T^kW$ $\forall k \in \mathbb{N}$*

3. *$T^n(V \times W) \equiv T^kV \times T^kW$*

4. *Sea $\varphi : V \to W$ un morfismo de variedades. Entonces existe una única sucesión de morfismos de variedades $\overline{\varphi}_n : T^k V \to T^k W$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} T^k V & \xrightarrow{\overline{\varphi}_n} & T^k W \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_m} \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

y además cumple que $\overline{\varphi}_k(x_0, -) : T^k_{x_0} V \to T^k_{\overline{\varphi}_{n-1}(x_0)} W$ es el diferencial de $\overline{\varphi_{n-1}}$ en x_0, donde $\overline{\varphi}_0 = \varphi$.

Demostración. La demostración de esta proposición se sigue utilizando inducción y los resultados de las proposiciones 3.1.9, 3.1.19, 3.1.17 y 3.1.18. □

Comentario 3.1.26. El estudio de los fibrados sucesivos presenta interés por ejemplo en el contexto del método de prolongación/proyección de Cartan-Kuranishi para la resolución de ecuaciones diferenciales algebraicas (cf. [Car45]).

3.2. Caso singular

Esta sección se tratará de estudiar el fibrado tangente de variedades con singularidades. Notar que hasta ahora toda la teoría que desarrollamos se trató de variedades suaves e irreducibles. Luego, es natural preguntarse qué sucede si nos alejamos de esas hipótesis. Sin embargo, ni siquiera tenemos una definición apropiada para el fibrado tangente en el caso de variedades con singularidades. Pese a esto, algo que sí podemos hacer es extender la noción para variedades algo más generales y a partir de esto utilizar que el conjunto de singularidades es un cerrado. Con esto en mente, recordamos la definición de variedad quasi afín.

Definición 3.2.1. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$. Diremos que V es una variedad algebraica quasi afín si existen $Z, W \subseteq \mathbb{A}^n$ variedades algebraicas tal que $V = W \backslash Z$. Es decir, V es un abierto dentro de una variedad.

Recordamos la siguiente proposición.

Proposición 3.2.2. *([Har77, Example I.1.1.4, Proposition I.1.10]) Sea V una variedad quasi afín. Entonces:*

1. *V es irreducible $\Leftrightarrow$ $\overline{V}$ es irreducible.*
2. *$\dim(V) = \dim(\overline{V})$.*

A raíz de esta proposición y bajo la observación de que la demostración de la irreducibilidad y la dimensión es meramente topológica en el teorema 3.1.9, se obtiene el siguiente resultado más general para variedades quasi afines.

Proposición 3.2.3. *Sea V una variedad quasi afín suave e irreducible de dimensión d. Entonces: TV es una variedad quasi afín suave e irreducible de dimensión $2d$.*

Demostración. Se sigue de usar la proposición 3.2.2 y de replicar la demostración del teorema 3.1.9. □

A partir de esta proposición tenemos un camino claro en el cual generalizar la construcción del fibrado tangente. Lo que haremos será extenderlo de manera natural como conjunto.

Fijemos un poco de notación.

Notación 3.2.4. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín. Notamos $Sing(V) = \{ p \in V \mid p \text{ es singular} \}$ y llamaremos a $W = V \backslash Sing(V)$ la parte regular de V.

Ahora recordaremos una proposición clásica y ya estaremos listos para definir el fibrado tangente en el caso general.

Proposición 3.2.5. *([Har77, Theorem I.5.3]) Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión d y consideremos $Sing(V)$ el conjunto de puntos singulares de V. Entonces $Sing(V)$ es un cerrado propio de V. En particular, los puntos regulares son densos y* $\dim(Sing(V)) < d$.

Definición 3.2.6. Sea V una variedad algebraica irreducible de dimensión d no necesariamente suave. Supongamos que $I(V) = (f_1, \ldots, f_r)$. Definimos su fibrado tangente:

$$TV = \left\{ (p,q) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{cc} f_i(p) = 0 & 1 \leqslant i \leqslant r \\ \nabla f_i \cdot q = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) q_j = 0 & 1 \leqslant i \leqslant r \end{array} \right\}.$$

Observar que dicha definición coincide con la definición 3.1.1 en el caso de que V sea una variedad suave.

Por lo visto en la proposición 3.2.3, resultaría esperable conjeturar que dada $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica de dimensión d, todas sus componentes irreducibles de TV tengan dimensión menor o igual a $2d$. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto:

Ejemplo 3.2.7. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^3$ la curva dada paramétricamente como $\mathcal{C} = \{ (t^3, t^4, t^5) \in \mathbb{A}^3 \mid t \in \mathbb{A}^1 \}$. Una cuenta que no vamos a hacer pero se puede ver de manera relativamente sencilla es que:

$$I(\mathcal{C}) = (xz - y^2, yz - x^3, z^2 - x^2 y).$$

Luego, si calculamos el Jacobiano de $I(\mathcal{C})$ en el origen tenemos que:

$$J_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que, podemos concluir que $T_{\overline{0}}\mathcal{C} = \mathbb{A}^3$. Observando que este es el único punto singular de esta curva, tenemos que, por la proposición anterior hay exactamente dos componentes irreducibles de $T\mathcal{C}$. Una es su componente regular, y la otra es su componente singular. Su componente regular tiene dimensión $2d = 2$ por el teorema 3.2.3 mientras que su otra componente contiene a $\{ (0,0,0) \} \times \mathbb{A}^3$ por lo que su dimensión es mayor o igual a tres, que es mayor o igual a dos veces la dimensión de $\mathcal{C}$.

Terminamos el capítulo dando una proposición y un corolario de la misma sobre hipersuperficies singulares que utilizaremos luego.

Proposición 3.2.8. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una hipersuperficie irreducible no necesariamente suave con $I(V) = (f)$. Sean $Z_1, \ldots, Z_r$ las componentes irreducibles de Sing(V) y sea $W = V \backslash Sing(V)$. Entonces:*

$$TV = TW \cup \left(\bigcup_{i=1}^{r} Z_i \times \mathbb{A}^n \right)$$

y $\overline{TW}$ es una componente irreducible de TV.

Demostración. Por la definición 3.2.6 tenemos que :

$$TV = \left\{ (p,q) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} f(p) = 0 \\ \nabla f(p) \cdot q = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) q_j = 0 \end{array} \right\}.$$

Observar que, como V es una hipersuperficie, siempre que estemos en un punto singular, entonces en el fibrado tangente habrá una copia de $\mathbb{A}^n$, es decir vale la siguiente fórmula:

$$TV = TW \cup (Sing(V) \times \mathbb{A}^n) = TW \cup \left(\bigcup_{i=1}^{r} Z_i \times \mathbb{A}^n \right). \tag{3.4}$$

Observar que ya sabemos que $\overline{TW}$ es irreducible por la proposición 3.2.3 y tiene dimensión $2n-2$. Más aún, como $Z_i \subseteq Sing(V)$ necesariamente $\dim(Z_i) \leqslant n-2$. En consecuencia es $\dim(Z_i \times \mathbb{A}^n) \leqslant 2n-2$. Así, tenemos una descomposición de TV como unión de variedades irreducibles todas de dimensión menor o igual que $2n-2$. Luego, se afirma lo siguiente:

1. En dicha descomposición se encuentran las componentes irreducibles de TV.

2. $\overline{TW}$ es una de las componentes irreducibles de TV.

La primera afirmación se sigue por la unicidad de la descomposición en irreducibles. Para la segunda, observar que por lo dicho en la primera podría pasar que eventualmente $\overline{TW}$ fuera redundante, pero $\overline{TW}$ tiene la máxima dimensión posible, luego, de serlo, debe de haber otra entre las componentes que sea igual y con esto $\overline{TW}$ es una componente. □

Se sigue el siguiente corolario.

Corolario 3.2.9. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una hipersuperficie irreducible no necesariamente suave, $Sing(V)$ el conjunto de singularidades de V y $W = V \backslash Sing(V)$. Consideremos $Z_1, \ldots, Z_r$ las componentes irreducibles de $Sing(V)$ y supongamos que:*

$$\dim(Z_i) = n-2 \;\forall i \in \{1, \ldots, r\},$$

entonces, TV es una variedad equidimensional de dimensión $2n-2$ y tiene exactamente $r+1$ componentes irreducibles $\overline{TW}, Z_1 \times \mathbb{A}^n, \ldots, Z_r \times \mathbb{A}^n$.

Demostración. Observar que por la proposición 3.2.8 tenemos que:

$$TV = \overline{TW} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{r} Z_i \times \mathbb{A}^n \right).$$

Ahora bien, como $\dim(Z_i) = n-2$ necesariamente cada elemento de esa unión tiene dimensión $2n-2$. Más aún, estos son irreducibles pues los Z_i lo son.

Luego, observando que $\overline{TW} \subsetneq \left(\bigcup_{i=1}^{r} Z_i \times \mathbb{A}^n \right)$ y utilizando la irredundancia de la descomposición de $Sing(V)$ se sigue que ésta es la descomposición en componentes irreducibles de TV. □

Capítulo 4

Cotas intrínsecas para el grado del fibrado tangente

Este capítulo se tratará de explorar la relación entre el grado del fibrado tangente y el grado de la variedad. El objetivo del mismo consistirá en demostrar resultados intrínsecos lo más generales posibles.

4.1. Resultados básicos

Para comenzar esta sección recordemos el siguiente resultado que enunciamos en preliminares (Teorema 2.2.50).

Teorema 4.1.1. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas y $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ morfismo lineal que define un morfismo de variedades dominante $\varphi : V \to W$. Entonces:*

$$\deg(W) \leqslant \deg(V).$$

El siguiente corolario es un resultado fundamental que muestra que el grado es un invariante bajo la relación $\equiv$.

Corolario 4.1.2. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas que cumplen $V \equiv W$. Entonces,*

$$\deg(W) = \deg(V).$$

Demostración. Sea φ el isomorfismo lineal entre V y W. Luego por el teorema 4.1.1 tenemos que:

$$\deg(\varphi(V)) = \deg(W) \leqslant \deg(V).$$

Si ahora consideramos φ^{-1} y replicamos la misma técnica, llegamos al resultado deseado. □

Ahora, a partir del teorema 4.1.1, derivamos el siguiente corolario para los fibrados tangentes.

Corolario 4.1.3. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades suaves y $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ una aplicación polinomial con $\lambda(\varphi) = 1$ que define un morfismo dominante de variedades $\varphi : V \to W$ y además es una submersión. Entonces:*

$$\deg(TW) \leqslant \deg(TV).$$

Demostración. Sea $\overline{\varphi}$ el morfismo inducido en el fibrado tangente dado por la proposición 3.1.21. Observemos que como φ es una submersión dominante y $\lambda(\varphi) = 1$, se sigue que $\overline{\varphi}$ es un morfismo dominante con $\lambda(\overline{\varphi}) = 1$. En consecuencia por el teorema 4.1.1, tenemos el resultado. □

Luego, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.1.4. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas suaves tales que $V \equiv W$. Entonces:*

$$\deg(TV) = \deg(TW).$$

Demostración. Como $V \equiv W$ por la proposición 3.1.18 tenemos que $TV \equiv TW$. Entonces por el corolario 4.1.2 aplicado a TV y TW se sigue el resultado. □

Por último damos un corolario que nos da la primera desigualdad de grado entre el fibrado tangente y la variedad.

Corolario 4.1.5. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave e irreducible. Entonces:*

$$\deg(V) \leqslant \deg(TV).$$

Demostración. Sea π la proyección de TV en V. Luego observar que $\lambda(\pi) = 1$. En consecuencia por el teorema 4.1.1 tenemos que:

$$\deg(V) = \deg(\pi(TV)) \leqslant \deg(TV).$$

□

Ahora damos un ejemplo para discutir la optimalidad de esta cota.

Ejemplo 4.1.6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad lineal. Notemos que TV es lineal y en consecuencia:

$$\deg(V) = \deg(TV) = 1.$$

El ejemplo 4.1.6 muestra que la cota introducida en el corolario 4.1.5 es óptima en el sentido de que la igualdad se realiza para al menos un valor del grado. Sin embargo, más adelante veremos que en una gran cantidad de casos, esta desigualdad es estricta.

A partir de esto surgen varias preguntas. La primera es: ¿es posible conseguir una cota superior que relacione V con TV? De ser posible, ¿qué orden tiene esta cota? Esto es algo en lo que nos concentraremos en el resto del trabajo, comenzando con el caso en que $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una hipersuperficie.

4.2. Caso de hipersuperficies

Proposición 4.2.1. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una hipersuperficie, no necesariamente suave. Entonces:*

$$\deg(TV) \leqslant \deg(V)^2.$$

Demostración. Observar que como V es una hipersuperficie irreducible, entonces existe $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ irreducible tal que:

$$\deg(f) = \deg(V) \text{ y } V = \{\overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid f(\overline{x}) = 0\}.$$

En consecuencia sabemos por la definición 3.2.6 que:

$$TV = \left\{ (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(\overline{x}) = 0 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}) y_j = 0 \end{array} \right\}.$$

Luego, TV es la intersección de dos hipersuperficies de grado $\deg(V)$. Por el teorema de Bezout 2.2.53 se sigue que:

$$\deg(TV) \leqslant \deg(V)^2.$$

□

Veremos que este resultado es óptimo para hipersuperficies. Es decir que para todo $r, n \in \mathbb{N}$ existe una hipersuperficie $V \subseteq \mathbb{A}^n$ tal que $\deg(V) = r$. Primero, daremos ejemplos para el caso $n = 2$.

Ejemplo 4.2.2. Sea $r \in \mathbb{N}$. Dados $a, b \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ consideramos la variedad genérica $V(a,b) = \{ax^r + by^r - 1 = 0\}$. Entonces existe un abierto no vacío $U \subseteq \mathbb{A}^2$ tal que si $(a,b) \in U$ se tiene que:

$$\deg(TV(a,b)) = \deg^2(V(a,b)).$$

Llamemos $V = V(a,b)$ para ahorrar notación. Observemos que V es suave, puesto que su único posible punto singular es el $(0,0)$ y $(0,0) \notin V$. Notemos que, el polítopo de Newton del polinomio que la define es el triángulo de vértices $(0,0)$ $(r,0)$ y $(0,r)$ que es $r\Delta^2$, donde Δ^2 es el 2-simplex con vértices $(1,0), (0,1)$ y $(0,0)$ (ver definición 2.3.8).

Como buscamos probar una igualdad para el grado de TV debemos considerar una variedad lineal genérica de dimensión complementaria al mismo (en este caso 2) y calcular efectivamente la cantidad de soluciones. Notar que haciendo despejes y asumiendo por genericidad eventualmente que algún coeficiente sea no nulo, podemos asumir que nuestra variedad lineal genérica es de la forma:

$$\Pi = \left\{ (x,y,u,v) \in \mathbb{A}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} u = a_1x + b_1y + c_1 \\ v = a_2x + b_2y + c_2 \end{array} \right\}.$$

Recordemos que:

$$TV = \left\{ (x,y,u,v) \in \mathbb{A}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} f(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)u + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)v = 0 \end{array} \right\},$$

donde $f(x,y) = ax^r + by^r - 1$. En consecuencia si intersecamos a ambos, llegamos a la siguiente igualdad de cardinales:

$$\#(\Pi \cap TV) = \# \left\{ (x,y) \in \mathbb{A}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} f(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)(a_1x + b_1y + c_1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \end{array} \right\}.$$

Es decir, haciendo un reemplazo, tenemos que :

$$\#(\Pi \cap TV) = \# \left\{ (x,y) \in \mathbb{A}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} ax^r + by^r = 1 \\ rax^{r-1}(a_1x + b_1y + c_1) + rby^{r-1}(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \end{array} \right\}.$$

En consecuencia haciendo la distributiva y multiplicamos por $\frac{1}{r}$ se tiene que:

$$\#(\Pi \cap TV) = \# \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{c} ax^r + by^r = 1 \\ a_1ax^r + b_1ayx^{r-1} + c_1ax^{r-1} + ba_2y^{r-1}x + bb_2y^r + bc_2y^{r-1} = 0 \end{array} \right\}.$$

Ahora bien, notemos que como $a, b, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ son genéricos, eventualmente pidiendo que todos sean no nulos a la vez, podemos garantizar que los soportes de nuestro sistema están fijos. Además, fijados estos soportes, los coeficientes del sistema resultan genéricos allí, ya que tenemos una variable libre para elegir por cada monomio que aparece en ambos polinomios.

Más aún, el polítopo de Newton de nuestro segundo polinomio tiene como cápsula convexa al trapecio T de vértices $(r-1,0), (r,0), (0,r)$ y $(0,r-1)$. Recordando que la cápsula convexa del polítopo de Newton de f es $r\Delta^2$, como estamos calculando un grado, ya sabemos que el sistema tiene finitas soluciones. Luego, por el teorema de Bernstein-Kushnirenko 2.3.24, la cantidad de soluciones del sistema en $(\mathbb{A} \setminus \{0\})^2$ es:

$$MV(r\Delta^2, T) = rMV(\Delta^2, T).$$

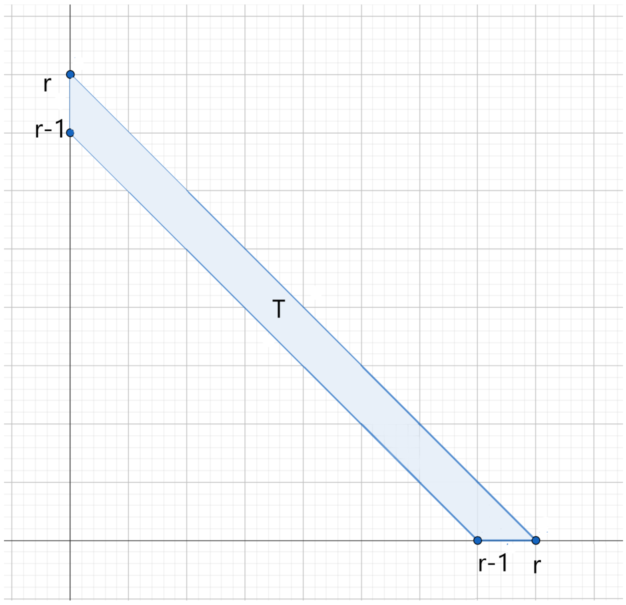
Resta con calcular $MV(\Delta^2, T)$. Para esto, recordemos que por el teorema 2.3.19, tenemos que:

$$MV(\Delta^2, T) = Vol_2(\Delta^2 + T) - Vol_2(\Delta^2) - Vol_2(T). \tag{4.1}$$

Ahora bien, calculamos cada volumen por separado.

1. Por la proposición 2.3.9 tenemos que $Vol_2(\Delta^2) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$.

2. Para calcular $Vol_2(T)$ primero hagamos la siguiente observación gráfica:



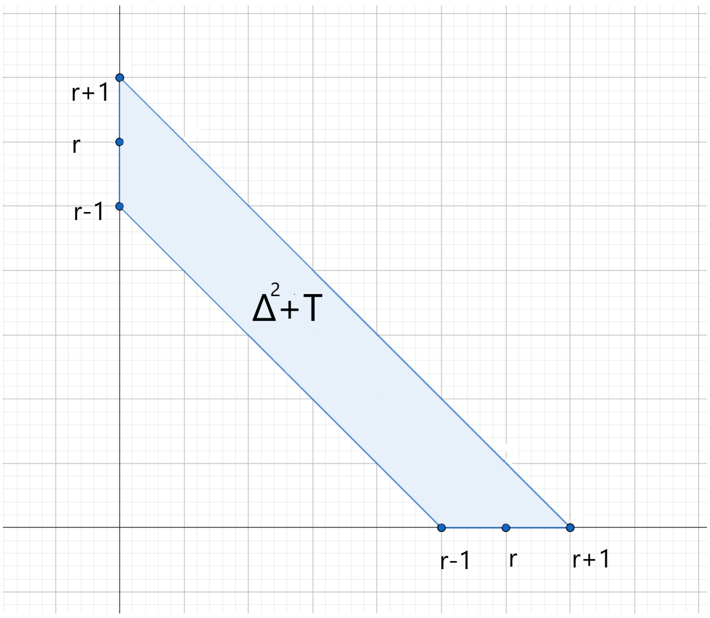
Se puede ver que el volumen de T se puede calcular como la resta entre los volúmenes de $r\Delta^2$ y $(r-1)\Delta^2$. De esta manera, por la proposición 2.3.9 y la observación 2.3.16 se tiene que:

$$Vol_2(T) = Vol_2(r\Delta^2) - Vol_2((r-1)\Delta^2) = (r^2 - (r-1)^2)Vol_2(\Delta^2) = \frac{2r-1}{2} = r - \frac{1}{2}.$$

3. Para calcular $Vol_2(\Delta^2 + T)$ primero debemos calcular $\Delta^2 + T$. Notemos que por la proposición 2.3.15 tenemos que:

$$\Delta^2 + T = Conv\left(\left\{\begin{array}{c} (r-1,0),(r,0),(0,r),(0,r-1) \\ (r,0),(r+1,0),(1,r),(1,r-1) \\ (r-1,1),(r,1),(0,r+1),(0,r) \end{array}\right\}\right).$$

Lo cual podemos interpretar gráficamente de la siguiente forma:



Ahora bien, aplicando un razonamiento análogo al utilizado para lo anterior se puede ver que:
$$Vol_2(\Delta^2 + T) = Vol_2((r+1)\Delta^2) - Vol_2((r-1)\Delta^2) = 4rVol_2(\Delta^2) = 2r$$

Ahora bien, por la ecuación (4.1) tenemos que:

$$MV(\Delta^2, T) = 2r - (r - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = r,$$

En resumen, el sistema tiene r^2 soluciones en $(\mathbb{A}\setminus\{0\})^2$. Sin embargo, por la proposición 4.2.1, sabemos que el sistema puede tener a lo sumo r^2 soluciones en $\mathbb{A}^2$ y hemos hallado r^2 soluciones en $(\mathbb{A}\setminus\{0\})^2$. En consecuencia:
$$\#(\Pi \cap V) = r^2.$$

Lo cual finaliza el ejemplo.

Utilizando la invarianza del grado del fibrado tangente por cambios de variables lineales, tenemos como observación lo siguiente:

Observación 4.2.3. Sea $\mathcal{C} = \{ (x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^r + y^r = 1 \}$ entonces se tiene que:

$$\deg(T\mathcal{C}) = r^2$$

Demostración. Se sigue aplicando el cambio de variables $x \to \frac{x}{a^{\frac{1}{r}}}$ e $y \to \frac{y}{b^{\frac{1}{r}}}$ y utilizando el corolario 4.1.2. $\square$

Este ejemplo anterior es sumamente importante porque nos dará una primera proposición que ampliará la familia de ejemplos donde se produce este fenómeno.

Proposición 4.2.4. *Sea $n, r \in \mathbb{N}$. Entonces existe una hipersuperficie suave e irreducible $V \subseteq \mathbb{A}^n$ de grado r tal que:*
$$\deg(TV) = \deg(V)^2.$$

Demostración. Observar que el caso $n = 2$ fue lo que resolvimos en el ejemplo 4.2.2. Ahora, para $n \geqslant 3$ vamos a demostrar la proposición utilizando un pequeño truco. En primer lugar, consideremos la siguiente hipersuperficie suave:

$$V = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^r - 1 = 0 \right\}.$$

Notemos que $\deg(V) = r$ y más aún, tenemos que:

$$TV = \left\{ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} x_i^r = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} r x_i^{r-1} y_i = 0 \end{array} \right\}.$$

Lo primero que observamos es que por el teorema de Bezout, tenemos que:

$$\deg(TV) \leqslant r^2.$$

Ahora consideremos L la variedad lineal definida por:

$$L = \left\{ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_j = 0 \; j \geqslant 3 \\ y_j = 0 \; j \geqslant 3 \end{array} \right\}.$$

Intersecando a TV con L llegamos a lo siguiente:

$$TV \cap L = \left\{ (x_1, x_2, 0, \ldots, 0, y_1, y_2, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1^r + x_2^r = 1 \\ r x_1^{r-1} y_1 + r x_2^{r-1} y_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Claramente notamos que $TV \cap L \equiv T\mathcal{C}$ donde $\mathcal{C}$ es la curva:

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \;\middle|\; x_1^r + x_2^r = 1 \right\}.$$

Por la observación 4.2.3 sabemos que $\deg(T\mathcal{C}) = r^2$. De esta manera se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$r^2 = \deg(T\mathcal{C}) = \deg(TV \cap L) \leqslant \deg(TV) \cdot \deg(L) \leqslant r^2.$$

Luego se sigue la igualdad deseada y en consecuencia el resultado. □

De esta manera, hemos demostrado que la proposición 4.2.1 nos da una cota óptima.

4.3. Caso general de variedades suaves e irreducibles

El siguiente teorema representa el mejor resultado general intrínseco que conocemos hasta ahora. Sin embargo, más allá del grado 1, está lejos de ser óptimo.

Teorema 4.3.1. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave e irreducible de dimensión d, entonces:*

$$\deg(TV) \leqslant (\deg(V))^{n+d+1},$$

En particular se tiene que:

$$\deg(T^k V) \leqslant (\deg(V))^{\prod_{j=0}^{k-1}(2^j n + 2^j d + 1)}.$$

Demostración. Observemos que por la proposición 2.2.57 tenemos que existe $r \in \mathbb{N}$ y polinomios $f_1, \ldots, f_r \in k[\overline{x}]$ tal que:

$$I(V) = (f_1, \ldots, f_r) \text{ y } \deg(f_i) \leqslant \deg(V) \;\forall\; 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Luego, por el teorema 3.1.9 tenemos que:

$$I(TV) = I(V)k[\overline{x}, \overline{y}] + I_T(V).$$

En particular se tiene que:

$$TV = (V \times \mathbb{A}^n) \cap \mathcal{V}(I_T(V)).$$

Observando que el grado de los generadores de $I_T(V)$ es menor o igual a $\text{máx}\,\{\deg(f_1), \ldots, \deg(f_r)\}$ que es menor o igual al grado de V, por la versión refinada de Bézout 2.2.55 se tiene que:

$$\deg(TV) \leqslant (\deg(V \times \mathbb{A}^n))(\text{máx}\,\{\deg(f_1), \ldots, \deg(f_r)\})^{n+d} \leqslant \deg(V)^{n+d+1}.$$

La segunda parte del teorema se sigue por el teorema 3.1.9 e iterar esta desigualdad. □

Notemos que este resultado es trivialmente óptimo cuando V es lineal por las mismas razones que en el ejemplo 4.1.6.

Sin embargo, a partir de la proposición 4.2.1, y de los ejemplos que conocemos (muchos de estos incluidos en este trabajo), se puede conjeturar lo siguiente.

Conjetura 4.3.2. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave e irreducible. Entonces se tiene que:*

$$\deg(TV) \leqslant \deg(V)^2,$$

y en consecuencia:

$$\deg(T^k V) \leqslant (\deg(V))^{2^k}.$$

En ese sentido, conjeturaremos este resultado más fuerte:

Conjetura 4.3.3. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica suave e irreducible. Existe L un hiperplano afín tal que:*

1. $\deg(V \cap L) = \deg(V)$.
2. $\dim(V \cap L) = d - 1$.
3. $I(V) + I(L) = I(V \cap L)$.
4. $\deg(TV \cap L \cap L_{\overline{y}}) = \deg(TV)$.

Donde si $L = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \varepsilon \right\}$ *definimos* $L_{\overline{y}} = \left\{ (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{A}^{2n} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0 \right\}$.

Lo primero que hay que observar es que esta conjetura parece más tangible que la conjetura 4.3.2, puesto que se trata de encontrar para cada variedad, un hiperplano que cumpla ciertas propiedades razonables.

Observación 4.3.4. La conjetura 4.3.3 implica la conjetura 4.3.2.

Demostración. Sea $d \in \mathbb{N}_0$ y V una variedad algebraica de dimensión d. Veremos la demostración por inducción.

El caso base $d = 0$ se sigue trivialmente pues toda variedad de dimensión 0 es un conjunto finito de puntos y en consecuencia el fibrado tangente será un conjunto finito de hiperplanos lineales, en particular uno por cada punto de la variedad. Como cada hiperplano tiene grado 1 y cada punto tiene grado 1 se sigue el resultado.

Pasamos al paso inductivo. Consideremos L un hiperplano tal que $\deg(V \cap L) = \deg(V)$ y $L_{\overline{y}}$ como en punto 4. Observemos que, tenemos lo siguiente:

$$\deg(TV) = \deg(TV \cap L \cap L_{\overline{y}}) = \deg(T(V \cap L)).$$

Donde la última igualdad se sigue de que $TV \cap L \cap L_{\overline{y}} = T(V \cap L)$ por la condición 3 de la conjetura 4.3.3. Pero ahora $V \cap L$ tiene dimensión $d - 1$ y luego por hipótesis inductiva se tiene que:

$$\deg(V) = \deg(T(V \cap L)) \leqslant \deg(V \cap L)^2 = \deg(V)^2.$$

□

Dejamos para un trabajo futuro el estudio del grado de variedades de la forma $TV \cap L \cap L_{\overline{y}}$, con el objetivo de entender y demostrar las conjeturas 4.3.3 y 4.3.2.

En la proposición siguiente construimos una nueva familia de variedades tales que, como en 4.2.4, se cumple que $\deg(TV) = \deg(V)^2$. En particular exhibimos una nueva familia que cumple con la conjetura 4.3.2.

Proposición 4.3.5. *Sean $d, n, r \in \mathbb{N}$ donde $n \geqslant 2$. Entonces para cada d, r existe una variedad suave e irreducible $V(d, r) \subseteq \mathbb{A}^n$ dimensión d y grado r tal que :*

$$deg(TV(d,r)) = (deg(V(d,r)))^2 = r^2.$$

Demostración. Consideremos $V(r) \subseteq \mathbb{A}^2$ dada por:

$$V(r) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \,\middle|\, x_1^r + x_2^r = 1 \right\}.$$

Notemos que $V(r)$ es suave e irreducible. Luego, definimos la variedad suave e irreducible $V(d, r)$ dada por $V(d, r) = V(r) \times \mathbb{A}^{d-1}$. Veamos que esta variedad cumple con lo necesario. En primer lugar, es claro que $\dim(V(d, r)) = 1 + d - 1 = d$. Ahora, calculemos su grado. Para esto, notemos que por la proposición 3.1.17 vale que:

$$TV(d,r) \equiv TV(d) \times \mathbb{A}^{2d-2}.$$

Tomando grado y utilizando el corolario 4.1.2 se tiene que:

$$\deg(TV(d,r)) = \deg(TV(r) \times \mathbb{A}^{2r}) = \deg(TV(r)) = r^2.$$

Donde la última igualdad se sigue de la observación 4.2.3. Por lo que se obtiene el resultado. □

La última proposición nos dice que, en caso de comprobarse la conjetura 4.3.2, esta última es óptima en en el sentido de que la cota superior es realizada por variedades de cualquier dimensión y cualquier grado.

Daremos ahora otra familia de ejemplos de variedades que cumplen la conjetura 4.3.2. Para esto recordamos la siguiente notación.

Definición 4.3.6. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos L_j es decir los polinomios de grado exactamente j en n variables.

El siguiente lema es un resultado folklórico, a falta de una referencia precisa daremos una idea de su demostración:

Lema 4.3.7. *Sean $n, d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{N}$ con $r \leqslant n$ y $f_1, \ldots, f_r \in K[\overline{x}]$ tal que $f_i \in L_{d_i}$. Entonces existe $U \subseteq L_{d_1} \times L_{d_2} \times \ldots \times L_{d_r}$, un abierto denso con la topología Zariski, tal que si $f_1, \ldots, f_r$ tienen coeficientes en U y llamamos $V = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r)$ entonces:*

1. *$I(V) = (f_1, \ldots, f_r)$.*
2. *V es suave.*
3. *$\deg(V) = \prod_{i=1}^{r} \deg(f_i) = \prod_{i=1}^{r} d_i$.*

Demostración. Lo primero que hay que observar es que el caso $n = 1$, se trata de polinomios en una variable por lo que el lema es trivialmente cierto. Ahora, lo que haremos sera notar que la variedad V definida por polinomios genéricos de esa forma tiene dimensión $n - r$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que todos los polinomios en U irreducibles ya que ser irreducible es una propiedad genérica en L_{d_i} si $n \geqslant 2$. Más aún, si consideramos para cada $f_1, \ldots, f_r$ su respectiva parte de grado $\leqslant 1$ y las llamamos $l_1, \ldots, l_r$ tenemos que :

$$J(f_1, \ldots, f_r) = J(l_1, \ldots, l_r).$$

Donde esta última igualdad se sigue de considerar el desarrollo de Taylor de f_i alrededor de un punto cualquiera. Pidiendo que los determinantes de las respectivas submatrices sean no nulos, podemos dar condiciones de genericidad tal que la variedad V definida por $f_1, \ldots, f_r$ sea suave, en particular esto implicará que el ideal $(f_1, \ldots, f_r)$ será regular (en particular primo) y en consecuencia por el criterio del jacobiano 2.2.36 $I(V) = (f_1, \ldots, f_r)$.

Resumiendo lo dicho en el párrafo anterior, podemos construir un abierto U tal que toda variedad V definida por polinomios en U sea suave de dimensión $n - r$ y su ideal sea definido por dichos polinomios. Más aún, por [MW83] o [HJSS05, Theorem 3], esta variedad V cumple que:

$$\deg(V) = \prod_{i=1}^{r} d_i.$$

□

La siguiente proposición se desprende del lema anterior:

Proposición 4.3.8. *Sean $r \leqslant n \in \mathbb{N}$ y $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{N}$. Sean además, polinomios $f_1, \ldots, f_r$ tal que $f_i \in L_{d_i}$. Entonces existe un abierto Zariski denso $U \subseteq L_{d_1} \times \ldots \times L_{d_r}$ tal que si $f_1, \ldots, f_r$ tienen coeficientes en U entonces la variedad V definida por $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r)$ cumple que:*

$$\deg(TV) \leqslant \deg(V)^2.$$

Demostración. Consideremos $U \subseteq L_{d_1} \times L_{d_2} \times \ldots \times L_{d_r}$ el abierto dado por el lema 4.3.7. Sean $f_1, \ldots, f_r$ con coeficientes en U y $V = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r)$. Entonces $I(V) = (f_1, \ldots, f_r)$ y

$$\deg(V) = \prod_{i=1}^{r} d_i.$$

Luego, notemos que para dicha variedad V su fibrado tangente queda definido por $(f_1, \ldots, f_r, \nabla f_1 \cdot \overline{y}, \ldots, \nabla f_r \cdot \overline{y})$. Recordando que $I_T(V) = (\nabla f_1 \cdot \overline{y}, \ldots, \nabla f_r \cdot \overline{y})$ y que $\deg(\nabla f_i \cdot \overline{y}) = \deg(f_i)$ tenemos por la desigualdad de bezout que, como $TV = (V \times \mathbb{A}^n) \cap \mathcal{V}(I_T(V))$, entonces:

$$\begin{aligned}\deg(TV) = \deg((V \times \mathbb{A}^n) \cap \mathcal{V}(I_T(V))) &\leqslant \deg(V \times \mathbb{A}^n) \deg(\mathcal{V}(I_T(V))) \\ &\leqslant \deg(V) \prod_{i=1}^{r} d_i = \deg(V)^2.\end{aligned}$$

$\square$

Lo que haremos ahora será dar un Lema que nos permite construir ejemplos de variedades que cumplen con la conjetura 4.3.2 (ver observación 4.3.10).

Lema 4.3.9. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica suave e irreducible de dimensión d que cumple la conjetura 4.3.2, es decir que :*

$$\deg(TV) \leqslant \deg(V)^2,$$

y $L \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad lineal tal que $\dim(L) \geqslant n - d$. Llamemos $W = V \cap L$ y supongamos que esta nueva variedad cumple las siguientes propiedades:

1. $\deg(W) = \deg(V)$.
2. $I(W) = I(V) + I(L)$.

Entonces vale que:

$$\deg(TW) \leqslant \deg(W)^2.$$

Demostración. Supongamos que $I(V) = (f_1, \ldots, f_r)$. Observar que sin pérdida de generalidad bajo un eventual cambio de coordenadas lineal, mediante el cual sabemos que los grados son invariantes, podemos asumir que:

$$L = \{\, \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid x_1 = 0, \ldots, x_l = 0 \,\} \text{ donde } l \leqslant d.$$

De esta forma por la segunda condición se tiene que:

$$I(W) = I(V) + I(L) = (f_1(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_r(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_l).$$

En particular observar que si llamamos $\hat{L} \subseteq \mathbb{A}^{2n}$ a la variedad lineal definida por:

$$\hat{L} = \left\{ (\overline{x}, \overline{y}) \subseteq \mathbb{A}^{2n} \,\middle|\, x_1 = 0, \ldots, x_l = 0, y_1 = 0, \ldots, y_l = 0 \right\},$$

por la condición 2 nuevamente, tenemos que $TW = TV \cap \hat{L}$ y en consecuencia por la desigualdad de Bezout 2.2.53 se tiene que:

$$\deg(TW) \leqslant \deg(TV) \leqslant \deg(V)^2 = (\deg(W))^2,$$

donde la última desigualdad se sigue de que V cumple con la conjetura 4.3.2. $\square$

Observación 4.3.10. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad que cumple las hipótesis del lema 4.3.9. Como V es suave, las condiciones 1 y 2 se cumplen siempre si L es genérica de dimensión mayor o igual que $n - d$. En efecto, si V es suave y L es genérica, la condición 1 se cumple por la proposición 2.2.56 mientras que la condición 2 se sigue de aplicar el teorema de Bertini 2.2.58.

Hemos visto en esta sección, que existen ejemplos de variedades para las cuales se cumple la conjetura 4.3.2. Un camino que no exploraremos en esta tesis, pero queda pendiente para un trabajo futuro es intentar demostrar una desigualdad más débil, del tipo $\deg(TV) \leqslant C(n, d) \deg(V)^2$ con $C(n, d)$ una constante que solo depende de la dimensión de la variedad y la del espacio ambiente (una cota en este espíritu aparece en el Corolario 6.0.11). Una idea para desarrollar estos resultados es adaptar las técnicas y los resultados en [Wal18, Section 5].

Capítulo 5

Curvas paramétricas

En este capítulo estudiaremos el caso particular de la relación entre el grado del fibrado tangente y el grado de la variedad para variedades racionales. En primer lugar recordamos la definición clásica de equivalencia birracional.

Definición 5.0.1. Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas irreducibles. Diremos que V es **birracionalmente** equivalente a W si existen abiertos no vacíos $U \subseteq V$ y $G \subseteq W$ tal que: $U \cong G$. Donde la notación $\cong$ es la definida en 2.2.23.

Una vez hecho esto estamos listos para definir el objeto de estudio de esta subsección.

Definición 5.0.2. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión d.

1. Diremos que V es **racional** si es birracionalmente equivalente a $\mathbb{A}^d$.

2. Llamaremos a V **paramétrica** si V es suave y existen $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in k[\overline{x}]$ polinomios, un abierto Zariski no vacío $U \subseteq \mathbb{A}^d$ y una aplicación racional $F : U \subseteq \mathbb{A}^d \to \mathbb{A}^n$ dada por $F(\overline{x}) = \left(\frac{f_1}{g_1}(\overline{x}), \ldots, \frac{f_n}{g_n}(\overline{x})\right)$ que define una submersión inyectiva $F : U \to V$ dominante. Si $U = \mathbb{A}^d$ entonces $F = (f_1, \ldots, f_n)$ y V se llamará **puramente paramétrica**. A dicha aplicación F se la llamará su **parametrización**.

Observar que si $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica suave y racional , entonces V es paramétrica.

Ahora citemos una proposición que nos ayudará a entender mejor cuáles son las variedades racionales.

Proposición 5.0.3. *([Har77, Corollary I.4.5]) Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión d. Son equivalentes:*

1. *V es racional*

2. *$k(V)$ es puramente trascendente sobre k*

Procedemos a dar un ejemplo de variedades paramétricas y racionales.

Ejemplo 5.0.4. Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, entonces:

1. $V = \{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid f(x_1, \ldots, x_{n-1}) - x_n = 0 \}$ es una variedad puramente paramétrica.

2. $V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid y^2 - x^3 = 0 \right\}$ es racional.

A lo que pasaremos ahora será a estudiar el caso de variedades paramétricas de dimensión 1. Estudiaremos esto con un enfoque clásico, entenderemos cuáles son las ventajas y complicaciones de este enfoque para saltar luego al caso general.

Para agilizar notación y facilitarle el trabajo al lector, en esta sección toda curva algebraica $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^n$ será una variedad algebraica paramétrica o puramente paramétrica de dimensión 1. Primero daremos un lema algebraico técnico que usaremos más adelante.

Lema 5.0.5. *Sea $f \in k[t]$. Entonces existe $c \in k$ tal que $f + c$ es libre de cuadrados. Más aún, existe un abierto Zariski $U \subseteq \mathbb{A}^1$ tal que si $c \in U$ entonces $f + c$ es libre de cuadrados.*

Demostración. Sea $c \in k$. Llamemos $g = f + c$, luego $g' = f'$. Observar que f' tiene finitas raices $r_1, \ldots, r_{n-1}$. Luego basta con elegir c tal que:

$$f(r_i) + c \neq 0 \ \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n - 1$$

Se sigue que como $char(k) \neq 0$ entonces k es infinito y en consecuencia existe tal c. En particular el abierto definido por:

$$U = \left\{ c \in \mathbb{A}^1 \;\middle|\; \prod_{i=1}^{n-1} (f(r_i) + c) \neq 0 \right\},$$

es el que brinda la condición de genericidad dada en el teorema.

□

Ahora lo que haremos será dar un lema que relacionará la noción de graduación de un morfismo que introdujimos en la definición 3.1.13, con el grado de una curva puramente paramétrica.

Proposición 5.0.6. *Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^n$ una curva algebraica suave puramente paramétrica con parametrización F. Entonces:*

$$\deg(\mathcal{C}) = \lambda(F).$$

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es puramente parametrica de dimensión 1, ha de ser irreducible (por definición). Para calcular su grado trabajamos de forma puramente geométrica, es decir cortamos a $\mathcal{C}$ con una variedad lineal genérica de dimensión complementaria.

Ahora bien, una variedad lineal genérica de dimensión complementaria a $\mathcal{C}$ es de la forma:

$$\Pi = \Pi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \beta \right\}.$$

Luego, debemos estudiar cardinal de $\mathcal{C} \cap \Pi$. Sea $F : \mathbb{A}^1 \to \mathcal{C}$ la parametrización de $\mathcal{C}$. Observar que sin pérdida de generalidad podemos asumir que F es sobreyectiva ya que, como es dominante, por la proposición 2.2.28 tiene un abierto U metido en su imagen y en consecuencia, U es una variedad quasi afín tal que $\deg(U) = \deg(\mathcal{C})$.

Luego, como F es biyectiva tenemos la siguiente relación entre cardinales.

$$\#(\Pi \cap \mathcal{C}) = \#\left(\left\{ t \in k \mid \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_i = \beta \right\}\right) = \#(\{t \in k \mid G(t) = 0\}), \tag{5.1}$$

donde el polinomio G está dado por:

$$G = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_i - \beta.$$

Luego hemos probado lo siguiente: para cada $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \overline{\alpha}, \beta$ existe un polinomio $G(\overline{\alpha}, \beta)(t)$ que notaremos $G(t)$, puesto que lo pensaremos como polinomio en t, tal que el cardinal de la intersección de $\mathcal{C}$ con Π son los ceros de G. Luego lo siguiente será ver cuántos ceros tiene este polinomio, para esto calcularemos su grado. Rápidamente se ve que que este polinomio cumple la condición:

$$\deg(G) \leqslant \lambda(F).$$

Lo siguiente que haremos será demostrar que genéricamente vale la igualdad. Para esto usaremos la genericidad. Sean $\{j_1, \ldots, j_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $\deg(f_{j_k}) = \lambda(F)\ \forall\ 1 \leqslant k \leqslant l$ todos los componentes de F que realizan su grado.

Ahora para cada $1 \leqslant k \leqslant l$ consideremos c_{j_k} el coeficiente principal de f_{j_k}. Luego definimos el siguiente conjunto abierto:

$$D = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) \in \mathbb{A}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{r} c_{j_k}\alpha_{j_k} \neq 0 \right\}.$$

Notar que, puesto que lo que estamos pidiendo es que no haya cancelación entre los coeficientes principales , si tomamos una variedad lineal con coeficientes en D, podemos afirmar que:

$$\deg(G) = \lambda(F).$$

De esta manera, la propiedad $\deg(G) = \lambda(F)$ es genérica y en consecuencia se sigue la siguiente desigualdad:

$$\deg(\mathcal{C}) = \#(\Pi(\overline{\alpha}, \beta) \cap C) \leqslant \lambda(F),$$

por lo que restará ver que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in U$ tal que :

$$\#(\Pi(\overline{\alpha}, \beta) \cap C) = \lambda(F).$$

Notar que pedir que se cumpla esa condición es equivalente a pedir que el polinomio G sea libre de cuadrados. Por lo que haremos un truco utilizando el lema 5.0.5 para encontrar tales $\overline{\alpha}, \beta$. Para esto, observemos que el abierto D tiene a la variable β desacoplada. Es decir que se lo puede pensar como el producto de dos abiertos de topologías Zariski en espacios afines de menor dimensión. Para esto consideremos el siguiente abierto:

$$\hat{D} = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{r} c_{j_k} \alpha_{j_k} \neq 0 \right\}$$

En consecuencia resulta que $D = \hat{D} \times \mathbb{A}^1$. Luego fijemos $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \hat{D}$. Observar que, por el lema 5.0.5 existe $\beta \in k$ tal que el polinomio $G(\overline{\alpha}, \beta)$ es libre de cuadrados. En consecuencia todas sus raíces son simples y como $(\overline{\alpha}, \beta) \in D$ necesariamente es $\deg(G) = \lambda(F)$. Como G es libre de cuadrados se sigue que:

$$\#(\Pi(\overline{\alpha}, \beta) \cap C) = \lambda(F),$$

por lo que concluimos el resultado. □

Una vez hecho esto, probaremos el siguiente lema.

Lema 5.0.7. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica suave puramente paramétrica tal que está parametrizada por $F : \mathbb{A}^d \to \mathbb{A}^n$. Entonces su fibrado tangente TV es una variedad puramente paramétrica con parametrización $\overline{F}$ donde $\overline{F}$ es la dada por la proposición 3.1.19.*

Demostración. Observemos que como V es paramétrica, entonces F es una aplicación polinomial que induce una submersión inyectiva y dominante. Luego por la proposición 3.1.21 tenemos que $\overline{F} : \mathbb{A}^{2d} \to TV$ es una aplicación inyectiva y dominante. Resta ver que es una submersión. Para esto, debemos ver que $D_{\overline{x},\overline{y}}\overline{F}$ es sobreyectivo para todo $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{A}^{2d}$. Sin embargo, observar que, como F es una submersión, necesariamente la matriz:

$$D_{\overline{x}}F = (\nabla F(\overline{x})),$$

tiene rango máximo. En consecuencia la aplicación:

$$D_{\overline{x},\overline{y}}\overline{F}(\overline{u}, \overline{v}) = \begin{pmatrix} \nabla F(\overline{x}) & 0 \\ * & \nabla F(\overline{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{pmatrix},$$

resulta sobreyectiva por lo que tenemos que $\overline{F}$ es submersión. En consecuencia $T\mathcal{C}$ es una variedad puramente paramétrica que es lo que queríamos probar. □

Introducimos notación para la resultante.

Notación 5.0.8. Sean $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Notamos $Res_{x_n}(f, g)$ a la resultante entre f y g con respecto a la variable x_n.

A raíz del lema 5.0.7 probaremos el primer teorema de la sección el cual nos ayudará a calcular de manera **exacta** el grado del fibrado tangente en función del grado de la variedad para el caso de una curva puramente paramétrica. La idea de fondo, es aprovechar que las variedades puramente paramétricas poseen cierto tipo de estructura analítica.

Teorema 5.0.9. *Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^n$ una curva algebraica suave puramente paramétrica y sea $F : \mathbb{A}^1 \to \mathcal{C}$ su parametrización. Entonces vale que:*

$$\deg(T\mathcal{C}) = 2\lambda(F) - 1 = 2\deg(\mathcal{C}) - 1$$

Demostración. Notar que como $\dim(\mathcal{C}) = 1$ y es irreducible tenemos por el teorema 3.1.9 que, $T\mathcal{C}$ es irreducible y $\dim(T\mathcal{C}) = 2$. Luego, debemos estimar $\deg(T\mathcal{C})$. Para esto notar que una variedad lineal genérica de dimensión complementaria, es decir $2n-2$, es de la forma:

$$\Pi := \left\{ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i = \gamma \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i = \epsilon \end{array} \right\}.$$

Por el lema 5.0.7, tenemos una parametrización para $T\mathcal{C}$ de la forma $\overline{F} : \mathbb{A}^2 \to T\mathcal{C}$ dada por $\overline{F}(t,s) = (F(t), D_tF(s)) = (F(t), s \cdot F'(t))$. Si computamos esto en la ecuación anterior, tenemos lo siguiente:

$$\Pi \cap T\mathcal{C} = \left\{ (F(t), s \cdot F'(t)) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) + s \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i'(t) = \gamma \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t) + s \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i'(t) = \epsilon \end{array} \right\}.$$

Observar que tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas en dos variables. Nuestra intención es demostrar la igualdad del enunciado del a partir del Teorema de Bernstein, utilizaremos esta técnica puesto que la prueba resulta mucho más elegante, pero vale la pena aclarar que, replicando las técnicas que utilizaremos en el teorema 5.0.16 se puede dar una demostración a este resultado.

Observar que para efectivamente utilizar el Teorema de Bernstein, debemos pedir que no haya soluciones donde t o s sean cero. Sin embargo, para esto simplemente evaluando $t = 0$, tenemos dos ecuaciones lineales en s con coeficientes genéricos por lo que, podemos pedir en las condiciones de genericidad que dicho sistema no tenga solución. Si $s = 0$, podemos garantizar que el sistema no tiene soluciones en t pidiendo que:

$$Res_t\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) - \gamma, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t) - \epsilon \right) \neq 0.$$

Podría pasar que esa resultante como polinomio en t fuera nula, sin embargo, tomando la elección $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_i = 0$ para todo $i > 1$, $\gamma = 0$, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_i = 0$ para todo $i > 1$ y $\epsilon \neq 0$, es claro que esos polinomios no comparten raíces por lo que dicha resultante ha de ser no nula pues lo es para una elección de coeficientes. Así, podemos asumir que todas las soluciones de nuestro sistema están en $(\mathbb{A} \backslash \{0\})^2$. Técnicas de este tipo se pueden encontrar en [DHM22] y serán discutidas en la siguiente sección de este trabajo.

Volviendo a la demostración, Sean G_1, G_2 los siguientes polinomios:

1. $G_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) + s \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i'(t) - \gamma.$
2. $G_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t) + s \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i'(t) - \epsilon.$

Observar que eventualmente agregando condiciones de genericidad sobre los coeficientes $\overline{\lambda}, \overline{\mu}, \gamma, \varepsilon, \overline{\alpha}$

y $\overline{\beta}$ se tiene la siguiente condición sobre los soportes:

$$\begin{aligned} Conv(\text{sop}\,(G_1)) &= Conv(\text{sop}\,(G_2)) \\ &= Conv\left((0,0),(\lambda(F),0),(\text{mín}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\text{sop}\,(f_i)\cap\mathbb{N}\right)-1,1),(\lambda(F)-1,1)\right) = T. \end{aligned}$$

En particular, se tiene que:

$$Conv(\text{sop}\,(G_i)) \subseteq Conv((0,0),(0,1),(\lambda(F)-1,1),(\lambda(F),0)) = Q.$$

Luego, tenemos que por el Teorema de Bernstein tenemos que:

$$\#(\Pi \cap T\mathcal{C}) \leqslant 2!Vol_2(T) \leqslant 2!Vol_2(Q).$$

Observar que Q es el trapecio rectángulo definido unívocamente por los vértices:

$$(0,0),(0,1),(\lambda(F),0) \ y \ (\lambda(F)-1,1).$$

En particular este cumple que :

$$Vol_2(Q) = \left(\frac{\lambda(F)+\lambda(F)-1}{2}\right)\cdot 1 = \lambda(F)+\frac{1}{2}.$$

En consecuencia tenemos que:

$$\deg(T\mathcal{C}) \leqslant 2!\left(\lambda(F)+\frac{1}{2}\right) = 2\lambda(F)-1 = 2\deg(\mathcal{C})-1.$$

Con esto tenemos probada la desigualdad. Ahora bien, demostremos primero que $T = Q$. Para ver esto basta con ver que:

$$\text{mín}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\text{sop}\,(F_i)\cap\mathbb{N}\right) = 1.$$

Sin embargo, si fuera mayor a 1, significaría que ninguna de las f_i tendrían monomios lineales y en consecuencia no sería una submersión en $t = 0$, lo cual lleva a una contradicción.

Luego para verificar la igualdad debemos utilizar la formulación fuerte del Teorema de Bernstein 2.3.24. Esta dice que, si al considerar el sistema asociado a cada cara del poliedro, este último no tiene soluciones entonces vale la igualdad en la cota del teorema de Bernstein. Luego observamos que nuestro poliedro es un trapecio por lo que tiene 4 caras, pasamos a listarlas:

1. $C_1 = Conv((0,0),(0,1))$
2. $C_2 = Conv((0,0),(\lambda(F),0))$
3. $C_3 = Conv((0,1),(\lambda(F)-1,1))$
4. $C_4 = Conv((\lambda(F)-1,1),(\lambda(F),0))$

Luego nuestro sistema es $G_1 = G_2 = 0$, por lo que pasamos a considerar los respectivos sistemas restringidos.

1. $\left\{ (s,t)\in(\mathbb{A}\backslash\{0\})^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} G_1^{C_1}(s,t)=0 \\ G_2^{C_1}(s,t)=0 \end{array} \right\}$. Es claro que este sistema no tiene soluciones en $(\mathbb{A}\backslash\{0\})^2$ puesto que solo aparecen los términos independientes de las f_i y una combinación lineal (con coeficientes en $\overline{\beta},\overline{\mu}$) de los términos de grado 1 de las f_i multiplicados por s . En particular, podemos despejar s ya que tiene grado 1 y pedir condiciones en los otros coeficientes para que la ecuación segunda no se cumpla por lo que esta cara no tiene soluciones.

2. $\left\{ (s,t) \in (\mathbb{A}\setminus\{0\})^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} G_1^{C_2}(s,t) = 0 \\ G_2^{C_2}(s,t) = 0 \end{array} \right\} = \left\{ (s,t) \in (\mathbb{A}\setminus\{0\})^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(t) = 0 \end{array} \right\}.$

   Observar que este sistema no tendrá soluciones si tomamos coeficientes $(\overline{\alpha}, \overline{\lambda})$ tales que $Res_t(G_1^{C_2}, G_2^{C_2}) \neq 0$. Sin embargo hay que chequear que esta resultante es no nula. Para esto simplemente vemos que existe una elección de $\overline{\alpha}$ y $\overline{\lambda}$ tal que esta resultante es no nula. Esto último se sigue de fijar $\overline{\alpha}$ y para esa elección fija de $\overline{\alpha}$ calcular las finitas raíces de la primer ecuación. Con esto ultimo podemos insertarlas en la segunda ecuación y pedir condiciones en $\overline{\lambda}$ para que sea no nula. Luego esa resultante es no nula y por lo tanto el sistema no tiene soluciones en esta cara.

3. Este caso es totalmente análogo al caso 2.

4. $\left\{ (s,t) \in (\mathbb{A}\setminus\{0\})^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} G_1^{C_4}(s,t) = 0 \\ G_2^{C_4}(s,t) = 0 \end{array} \right\}$. Por como están dados los soportes, este sistema tiene la forma:

$$\left\{ (s,t) \in (\mathbb{A}\setminus\{0\})^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi(\overline{\alpha}) t^{\lambda(F)} + s\chi(\overline{\beta}) t^{\lambda(F)-1} = 0 \\ \xi(\overline{\lambda}) t^{\lambda(F)} + s\chi(\overline{\mu}) t^{\lambda(F)-1} = 0 \end{array} \right\}.$$

   Donde $\xi, \chi \in k[\overline{x}]$ son polinomios de grado uno en los coeficientes, que se obtienen de juntar los términos del respectivo grado.

Sacando de factor comun $t^{\lambda(F)-1}$ y replicando las técnicas utilizadas en 1 y 2 se sigue que no tiene soluciones en esta cara. En consecuencia por el teorema de Bernstein se tiene que:

$$\deg(T\mathcal{C}) = 2\deg(\mathcal{C}) - 1.$$

□

Ejemplo 5.0.10. Sea $V_k = \left\{ (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{A}^2 \;\middle|\; x_1 = x_2^k \right\}$. Esta es una curva suave y parametrizable de grado k. De esta manera, por el teorema 5.0.9, tenemos que $\deg(TV_k) = 2k - 1$.

Ahora vamos a tratar de extender estas ideas un poco más allá, resolviendo el problema para curvas paramétricas. Para esto, primero probamos un lema puramente algebraico similar al lema 5.0.5.

Lema 5.0.11. *Sean $f_1, \ldots f_n \in k[t]$ polinomios tal que $mcd(f_1, \ldots, f_n) = 1$. Entonces existen $c_1, \ldots, c_n \in k$ tal que el polinomio F definido por:*

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \text{ es libre de cuadrados.}$$

Más aún, existe $U \subseteq \mathbb{A}^n$ un abierto tal que si $(c_1, \ldots, c_n) \in U$ entonces F es libre de cuadrados.

Demostración. Si f_1 fuera constante, entonces definiendo $\hat{F} = \sum_{i=2}^{n} f_i + c \cdot f_1$ sabemos que por el lema 5.0.5 existe c tal que $\hat{F}$ es libre de cuadrados, con eso tenemos la existencia. Ahora para ver que la condición vale genéricamente, basta con considerar $F = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ y observar que el polinomio $Res_t(F, F') \neq 0$ pues $Res_t(F, F')(c, 1, \ldots, 1) \neq 0$. Por lo que podemos asumir que f_1 no es constante.

Ahora, sea $S = k[t]$. Consideremos ahora el anillo de polinomios $S[x_1, \ldots, x_n]$. Luego definamos el polinomio $F = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$. Observemos que F cumple las siguientes propiedades:

- Es irreducible en $k(t)[x_1, \ldots, x_n]$ ya que tiene grado 1 en $x_1, \ldots, x_n$.
- Es primitivo. Esto último se sigue de que $mcd(f_1, \ldots, f_n) = 1$.

En consecuencia por el lema de Gauss, F es irreducible en $S[x_1,\ldots,x_n]$. Ahora bien, sea $R = Res_t(F,F') \in k[x_1,\ldots,x_n]$ donde $F' = \sum_{i=1}^n x_i f_i'$. Basta ver que R no es el polinomio nulo. Procedamos por contradicción, es decir supongamos que $R = 0$. Observar que existen polinomios $C, D \in k[x_1,\ldots,x_n][t]$ tal que:

$$R = CF + DF',$$

donde $\deg_t(C) \leqslant \deg_t(F) - 2$ y $\deg_t(D) \leqslant \deg_t(F) - 1$. En consecuencia como supusimos que $R = 0$, tenemos que :

$$CF = -DF'$$

Ahora bien, notemos que F y F' son coprimos en $S[x_1,\ldots,x_n]$ puesto que como F es irreducible, el único caso que podría pasar para que no fueran coprimos es que $F \mid F'$. Sin embargo esto querría decir que existe $Q \in S[x_1,\ldots,x_n]$ tal que:

$$F(t,x)Q(t,x) = F'(t,x)$$

Si especializamos en $x_1 = 1, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, tendríamos que $f_1(t) \mid f_1'(t)$ lo cual es una contradicción porque $char(k) = 0$ y f_1 no es constante. En consecuencia tenemos que $F \nmid F'$ y $F \mid DF'$. Entonces, necesariamente $F \mid D$ Pero esto no puede pasar puesto que $\deg_t(D) \leqslant \deg(F) - 1 < \deg_t(F)$ por lo que llegamos a un absurdo. $\square$

Lo que sigue será demostrar una proposición análoga a la proposición 5.0.6 para el caso de curvas paramétricas suaves. Sin embargo, sucede que los denominadores no están fijos y esto puede resultar un poco molesto a la hora de estimar los grados luego.

Definición 5.0.12. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad paramétrica de dimensión d y $F : U \subseteq \mathbb{A}^d \to V$ una parametrización de V dada por $F = \left(\frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_n}{g_n}\right)$. Diremos que F está en forma **normal** si:

sucede que, $g = g_1 = g_2 = \ldots = g_n$ *y además* $mcd(f_1,\ldots,f_n,g) = 1$.

Lema 5.0.13. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad paramétrica de dimensión d. Entonces V admite una parametrización normal.*

Demostración. Sea $F : U \subseteq \mathbb{A}^d \to V$ la parametrización de V. Recordar que por definición F es racional por lo que está dada por:

$$F = \left(\frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_n}{g_n}\right) \text{ donde } mcd(f_i, g_i) = 1 \ \forall 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Consideremos $g = [g_1 : \ldots : g_n]$ el mínimo común múltiplo de las g_i. Observar que $g_i \mid g \ \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ en consecuencia podemos escribir a F de la siguiente forma:

$$F = \left(\frac{f_1 \cdot \frac{g}{g_1}}{g}, \ldots, \frac{f_n \cdot \frac{g}{g_n}}{g}\right) = \left(\frac{p_1}{g}, \ldots, \frac{p_n}{g}\right),$$

donde, para cada $1 \leqslant k \leqslant n$ definimos $h_k = \dfrac{g}{g_k}$ y $p_k = f_k \cdot h_k$. Ahora bien, para tener el resultado deseado bastará con ver que :

$$mcd(p_1, p_2, \ldots, p_n, g) = 1.$$

Supongamos que existe q primo factor común a $p_1, \ldots, p_n$ y g. Sea $r = \text{máx}\{\, l \mid q^l \mid g \,\}$ Entonces, existe g_i tal que $q^r \mid g_i$. De esta forma, $q \nmid \frac{g}{g_i}$ pero divide a p_i. Ahora bien, puesto que $f_i \frac{g}{g_i} = p_i$, deducimos que $q \mid f_i$ pero esto es una contradicción pues $mcd(f_i, g_i) = 1$. En consecuencia, el resultado se sigue.

$\square$

Lema 5.0.14. *Sea $\mathcal{C}$ una curva paramétrica suave y sea $F : U \subseteq \mathbb{A}^1 \to \mathcal{C}$ su parametrización. Supongamos que F está en forma normal, es decir: $F = \left(\frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g}\right)$ con $mcd(g : f_1 : f_2 : \ldots : f_n) = 1$. Luego vale lo siguiente:*

$$\deg(\mathcal{C}) = \text{máx}\{\deg(f_1), \ldots, \deg(f_n), \deg(g)\}$$

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es irreducible, nuestra intención será calcular la intersección entre $\mathcal{C}$ y un hiperplano genérico. Sea Π un hiperplano genérico,

$$\Pi := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \beta \right\}.$$

Luego podemos afirmar lo siguiente:

$$\#(\Pi \cap \mathcal{C}) = \# \{ t \in U \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) = \beta \cdot g(t) \}.$$

Ahora bien, podríamos proceder como en la proposición 5.0.6 y hacer cuentas con los grados y buscar coeficientes para que ese polinomio resulte separable. Sin embargo, hay un pequeño detalle que vale la pena discutir. Si replicáramos lo anterior, es en efecto posible dar la cota superior, pero podría eventualmente pasar que los t que salgan como raíces no estén en U. Notando que U es un abierto de $\mathbb{A}^1$ hacemos una estrategia con genericidad para asegurarnos que todas las raíces del polinomio $H = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) - \beta \cdot g(t)$ estén en U. Notar que $\mathbb{A}^1 \backslash U = \{l_1, \ldots, l_c\}$ para cierto $c \in \mathbb{N}_0$. Para cada $0 \leqslant j \leqslant c$ sea

$$W_j := \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) \in \mathbb{A}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(l_j) - \beta \cdot g(l_j) \neq 0 \right\}.$$

Notemos que $W_j \neq \varnothing$, puesto que, $W_j = \varnothing$ si y solo si $f_i(l_j) = g(l_j) = 0$ para todo j. Sin embargo, esto no puede pasar ya que $mcd(f_1, \ldots, f_n, g) = 1$. Así, si llamamos $W = \bigcap_{j=1}^{c} W_j$ y tomamos una variedad lineal genérica con coeficientes en W entonces podemos asegurar que las raíces de H están en U.

Si procedemos replicando parte de la demostración de la proposición 5.0.6 se puede encontrar un abierto $\hat{U}$ tal que si consideramos Π una variedad lineal con coeficientes en ese abierto, suceda que:

- $\deg(H) = \max\{\deg(f_1), \ldots, \deg(f_n), \deg(g)\}$.
- Las raíces de H están en U.

Por lo que tenemos la cota:

$$\deg(\mathcal{C}) \leqslant \max \{ \deg(f_1), \ldots, \deg(f_n), \deg(g) \}.$$

Resta ver que existe una elección de α_i, β tal que H sea separable como polinomio en t. Luego, recordemos que $H = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) - \beta g(t)$. Observemos que, por el lema 5.0.11 existe un abierto genérico A en los coeficientes tal que si tomamos coeficientes en ese abierto, H resulta libre de cuadrados. Luego si H toma coeficientes en $A \cap \hat{U}$ tenemos que :

$$\deg(\mathcal{C}) = \#(\Pi \cap \mathcal{C}) = \# \{ t \in U \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) = \beta \cdot g(t) \} = \max\{\deg(f_1), \ldots, \deg(f_n), \deg(g)\}.$$

□

Observar que, si g es constante, el lema anterior nos dice lo mismo que el lema 5.0.6. El siguiente lema es una versión análoga un poco más general del lema 5.0.7

Lema 5.0.15. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad paramétrica suave de dimensión d y sea $F : U \subseteq \mathbb{A}^d \to \mathcal{C}$ su parametrización donde F es de la forma: $F = \left(\frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g} \right)$ y está en forma normal. Entonces $T\mathcal{C}$ es una variedad paramétrica con parametrización $\overline{F}$ donde $\overline{F}$ es la dada por la proposición 3.1.19.*

Demostración. Se sigue replicando la demostración del lema 5.0.7 □

Ahora probaremos un teorema análogo a 5.0.9 para el caso de variedades paramétricas de dimensión 1.

Teorema 5.0.16. *Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^n$ una curva paramétrica suave y sea $F : U \subseteq \mathbb{A}^1 \to \mathcal{C}$ su parametrización. Supongamos que F es de la forma: $F = \left(\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g}\right)$ y está en forma normal. Sea $\zeta = \text{máx}\{deg(f_1), \dots, deg(f_n)\}$. Luego vale lo siguiente:*

$$\deg(T\mathcal{C}) \leqslant 2\deg(\mathcal{C}) - 1 + \text{mín}\{\deg(g), \zeta\}.$$

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es irreducible, por el teorema 3.1.9 tenemos que $T\mathcal{C}$ es irreducible y de dimensión 2. Luego procedemos como siempre considerando una variedad lineal genérica de dimensión complementaria, es decir de dimensión $2n-2$,

$$\Pi := \left\{ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_i y_i = \gamma \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n \mu_i y_i = \epsilon \end{array} \right\}.$$

Por el lema 5.0.15 tenemos que la función $\overline{F} : U \times \mathbb{A}^1 \to T\mathcal{C}$ parametriza $T\mathcal{C}$. Ahora, sabemos que $\overline{F}$ es dominante y en consecuencia posee un abierto en su imagen. Haciendo uso del lema 2.2.49 podemos asegurarnos que las intersecciones caigan dentro de ese abierto y en consecuencia afirmar lo siguiente:

$$\#(T\mathcal{C} \cap \Pi) = \# \left\{ (t,s) \in U \times \mathbb{A}^1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{f_i(t)}{g(t)} + s \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t)}{g^2(t)} = \gamma \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{f_i(t)}{g(t)} + s \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t)}{g^2(t)} = \epsilon \end{array} \right\}.$$

Lo que haremos ahora será despejar despejar la variable s en función de t a partir de la primera ecuación teniendo el debido cuidado al operar. Esta técnica es la que comentamos en la demostración del teorema 5.0.9. En particular, poniendo $g = 1$ en esta demostración, recuperamos dicho resultado.

Luego, procedemos intentando despejar s de la primera ecuación. Para hacer esto, notemos que como estamos en una parametrización, la misma necesariamente ha de ser una submersión y en consecuencia existirá un $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que $f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t) \neq 0$ por lo que podremos pasar dividiendo. Luego, tras hacer algunas operaciones, se tiene que :

$$s = \frac{\gamma - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{f_i(t)}{g(t)}}{\sum_{i=1}^n \beta_i \frac{f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t)}{g^2(t)}} = \frac{\gamma g^2(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i g(t) f_i(t)}{\sum_{i=1}^n \beta_i (f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t))}.$$

Para asegurarnos que los t en donde el denominador se anula no formen parte de nuestro conjunto de soluciones al sistema, elegimos nuestros coeficientes genéricos de manera tal que $Res_t \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) - \gamma g(t), \sum_{i=1}^n \beta_i (f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t)) \right) \neq 0$. Veamos que esta resultante es no nula. Para esto, sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $\deg(f_j' g(t) - g'(t)f_j(t)) = \deg \left(\sum_{i=1}^n \beta_i (f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t)) \right)$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $j = 1$, sino el argumento será análogo. De esta manera, si tomamos $\beta_1 = 1$ y $\beta_i = 0 \; \forall \; 2 \leqslant i \leqslant n$. Consideramos $r_1, \dots, r_l$ las raíces de

$f_1'g - g'f_1$. Para cada $1 \leqslant k \leqslant l$ como $mcd(f_1, \ldots, f_n, g) = 1$, entonces no se anulan todos al mismo tiempo en ninguna de las r_k. En consecuencia, si le pedimos a los α_i, γ que cumplan que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(r_k) - \gamma g(r_k) \neq 0$ para todo k, tenemos que esa resultante necesariamente es no nula puesto que ambos polinomios no tienen raíces en común y tienen el mismo grado que los involucrados en la resultante. Así, la resultante forma un polinomio no nulo en $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \gamma$.

Una vez hecho esto, podemos asegurar que cualquier solución del sistema (t, s) cumple que s es de la forma anterior.

Ahora reemplazamos s en la segunda ecuación y vemos que nos queda:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{f_i(t)}{g(t)} + \frac{\gamma g^2(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i g(t) f_i(t)}{\sum_{i=1}^n \beta_i (f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t))} \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t)}{g^2(t)} = \epsilon.$$

Luego, hacemos algunas cancelaciones

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{f_i(t)}{g(t)} + \frac{\gamma g(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)}{\sum_{i=1}^n \beta_i (f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t))} \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t)}{g(t)} = \epsilon.$$

Limpiando denominadores y pasando restando:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t) - \epsilon \cdot g(t)\right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i (f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t))\right) \\ &+ \left(\gamma g(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)\right) \left(\sum_{i=1}^n \mu_i (f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t))\right) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, llamemos $\Delta_i(t) = f_i'(t)g(t) - g'(t)f_i(t)$ para simplificar la cuenta.. Reemplazando y llamando G al polinomio que nos queda igualado a cero, tenemos lo siguiente:

$$G(t) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t) - \epsilon \cdot g(t)\right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i(t)\right) + \left(\gamma g(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)\right) \sum_{i=1}^n \mu_i \Delta_i(t) = 0.$$

Lo primero que vemos contando los grados más grandes es la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \deg(G) &\leqslant \max\{\deg(f_1), \ldots, \deg(f_n), \deg(g)\} + \max\{\deg(\Delta_1), \ldots, \deg(\Delta_n)\} \\ &\leqslant \max\{\deg(f_1), \ldots, \deg(f_n), \deg(g)\} + \zeta + \deg(g) - 1. \end{aligned}$$

Luego, por el lema 5.0.14 se tiene que $\deg(\mathcal{C}) = \max\{\deg(f_1), \ldots, \deg(f_n), \deg(g)\}$. De esta forma, siguiendo con la desigualdad anterior:

$$\deg(G) \leqslant \deg(\mathcal{C}) + \zeta + \deg(g) - 1 = 2\deg(\mathcal{C}) + \min\{\zeta, \deg(g)\} - 1.$$

Lo cual finaliza la demostración.

□

Ahora lo que haremos será a partir del teorema que probamos recién, dar un corolario con una cota intrínseca sobre la variedad.

Corolario 5.0.17. *Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^n$ una curva paramétrica suave. Entonces:*

$$\deg(T\mathcal{C}) \leqslant 3\deg(\mathcal{C}) - 1.$$

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es una curva paramétrica suave, admite una parametrización de la forma $F = \left(\frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g}\right)$. En consecuencia, sabemos por el lema 5.0.14 que:

$$\deg(\mathcal{C}) = \text{máx}\,\{\,\deg(f_1), \ldots, \deg(f_n), \deg(g)\,\}\,.$$

Luego por el teorema 5.0.16 sabemos lo siguiente:

$$\deg(T\mathcal{C}) \leqslant 2\deg(\mathcal{C}) + \text{mín}\,\{\,\text{máx}\,\{\,\deg(f_1), \ldots, \deg(f_n)\,\}\,, \deg(g)\,\} - 1 \leqslant 3\deg(\mathcal{C}) - 1.$$

Por lo que el resultado se sigue. □

Es claro que si queremos avanzar hacia demostrar cotas o desigualdades de este estilo para variedades de mayor dimensión, debemos en primer lugar intentar explotar otros métodos, puesto que hacer eliminación en varias variables como hicimos en el teorema 5.0.16 se torna sustancialmente más complicado. De hecho, la demostración que utilizamos explota fuertemente que solo contamos con dos incógnitas y una de ellas tiene grado uno. Bajo el uso de herramientas de geometría convexa resolveremos esto para una familia importante de variedades.

Capítulo 6

Variedades quasi-paramétricas

La idea de este capítulo es dar una noción similar a la de variedades paramétricas y encontrar cotas de grado para el fibrado tangente en el caso de esta amplia familia de variedades. Esta nueva definición, será mas laxa en algunos aspectos pero mucho más restrictiva en otros.

Lo primero que haremos será recordar la definición/notación 2.3.22 del capítulo 2. Esta dice lo siguiente:

Dado $A \subseteq \mathbb{N}_0^d$ finito, notaremos $L_d(A) = \{ f \in k[x_1 \ldots, x_d] \mid \operatorname{sop}(f) = A \}$, es decir el conjunto de polinomios con soporte en A. En particular, si $A = \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \}$ entonces:

$$L_d(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i x^{\alpha_i} \;\middle|\; a_i \neq 0 \right\}.$$

Ahora, recordemos que por la definición 2.3.23, podremos ver a los espacios $L_d(A)$ como espacios dotados con topología Zariski. Antes de definir el objeto de estudio de esta sección damos una definición.

Definición 6.0.1. Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas irreducibles y $F : U \subseteq V \to W$ un morfismo. Diremos que F es genéricamente finito si existe $G \subseteq W$ abierto tal que $\forall \eta \in G$, se tiene que:

$$\# F^{-1}(\eta) < \infty.$$

Con esto en mente pasamos a definir la familia de variedades que estudiaremos.

Definición 6.0.2. Sean $d \leqslant n \in \mathbb{N}$. Diremos que una variedad $V \subseteq \mathbb{A}^n$ suave es **quasi-paramétrica** (QP) si es la clausura Zariski de la imagen de una aplicación racional genéricamente finita $F : U \subseteq (\mathbb{A} \backslash \{ 0 \})^d \to (\mathbb{A} \backslash \{ 0 \})^n$ que además es una submersión (ver definición 3.1.20). En este caso, llamaremos a F una **quasi-parametrización** de V.

Nuestra intención en esta subsección será intentar probar un teorema similar al teorema 5.0.9 para variedades QP. Recordemos que para este resultado se necesitó fuertemente de la proposición 5.0.6. La idea será replicar las técnicas pero utilizar algún tipo de genericidad dentro de la parametrización para poder aplicar el Teorema de Bernstein 2.3.24. Sin embargo la aplicación será distinta a la que utilizamos en el teorema 5.0.9 puesto que allí, vimos que los sistemas asociados a las caras del poliedro no tenían soluciones, mientras que aquí consideraremos variedades que provengan de parametrizaciones con coeficientes genéricos, explotando esta última propiedad.

Lo que haremos ahora será probar una proposición que caracteriza la dimensión de las variedades QP.

Proposición 6.0.3. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad suave quasi-paramétrica y sea $F : U \subseteq (\mathbb{A} \backslash \{ 0 \})^d \to (\mathbb{A} \backslash \{ 0 \})^n$ quasi-parametrización de V. Entonces, V es irreducible y además* $\dim(V) = d$.

Demostración. Observar que V es irreducible puesto que $U \subseteq (\mathbb{A}\backslash\{0\})^d$ lo es. Notemos que, como F es genéricamente finita, tenemos que existe $G \subseteq V$ abierto tal que para todo $p \in G$, es $\#F^{-1}(p) < \infty$. De esta manera, al ser un conjunto finito de puntos, se tiene que,

$$\dim(F^{-1}(p)) = 0 \ \forall p \in G.$$

Luego, aplicando el teorema de la dimensión de la fibra, tenemos que para un p lo suficientemente genérico, es:

$$0 = \dim(F^{-1}(p)) = \dim(U) - \dim(V) = d - \dim(V) \Rightarrow \dim(V) = d.$$

$\square$

Definición 6.0.4. Sean $d \leqslant n \in \mathbb{N}$. Consideremos $F : U \subseteq (\mathbb{A}\backslash\{0\})^d \to (\mathbb{A}\backslash\{0\})^n$ una aplicación racional genéricamente finita. Sea $V = \overline{Im(F)}$. Definimos el **grado** de F como:

$$\deg(F) = [k(x_1, \ldots, x_d) : k(V)].$$

Vale la pena observar que como el grado de una extensión de cuerpos depende del morfismo con el que un cuerpo se mete en el otro, la definición anterior depende de F y no puramente de V. En particular tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.0.5. *([SR13, Theorems 2.28 & 2.29]) Sean $d \leqslant n \in \mathbb{N}$. Consideremos $F : U \subseteq (\mathbb{A}\backslash\{0\})^d \to (\mathbb{A}\backslash\{0\})^n$ una aplicación racional genéricamente finita. Sea $V = \overline{Im(F)}$, y supongamos que V es suave. Entonces, existe un abierto $\mathcal{U} \subseteq V$ no vacío tal que si $p \in \mathcal{U}$, vale la fórmula:*

$$\#F^{-1}(p) = \deg(F).$$

Ahora pasamos a introducir una definición que será necesaria para lo que haremos luego.

Definición 6.0.6. ([DHM22, Definition 3.1]) Dado $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ y $k \in \mathbb{N}$ definimos $A^k \subseteq \mathbb{Z}^{d+k}$ como:

$$A^k = \{(\alpha, 0) \subseteq \mathbb{Z}^{d+k} \mid \alpha \in A\} \cup \{e_{d+1}, \ldots, e_{d+k}\} = A \times \{0\}^k \cup \{e_{d+1}, \ldots, e_{d+k}\},$$

donde para $1 \leqslant i \leqslant d+k$ se tiene que e_i es i-ésimo vector canónico en $\mathbb{R}^{d+k}$.

Con estas definiciones en [DHM22] se demuestra el siguiente teorema que, en particular acota el grado de una variedad quasi-paramétrica en función de un volumen mixto que depende únicamente de los soportes de la parametrización.

Teorema 6.0.7. *([DHM22, Theorem 3.3]) Sean $f_0 \ldots, f_n \subseteq k[x_1, \ldots, x_d]$ polinomios con respectivos soportes $A_0, A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{N}_0^d$. Sea $F : U \subseteq (\mathbb{A}\backslash\{0\})^d \to (\mathbb{A}\backslash\{0\})^n$ la aplicación racional definida por:*

$$F = \left(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}\right).$$

Supongamos que F es genéricamente finita y sea $\delta = \deg(F)$. Si $V = \overline{Im(F)}$ y $B = Conv\left(\bigcup_{j=0}^{n} A_j\right)$, entonces:

$$\delta \cdot \deg(V) \leqslant MV(A_0^{n+1-d}, \ldots, A_n^{n+1-d}) \leqslant d!Vol_d(B).$$

Más aún, existe un abierto Zariski $\mathcal{U} \subseteq L_d(A_0) \times \ldots \times L_d(A_n)$ (ver definición 2.3.22) tal que si $(f_0, \ldots, f_n) \in \mathcal{U}$ y la aplicación F es genéricamente finita, entonces la primera desigualdad es una igualdad. En ese caso, si además $A_0 = A_1 = \ldots = A_n$, entonces son todas igualdades.

A continuación vamos a aplicar este resultado para estimar el grado del fibrado tangente de variedades quasi-paramétricas. La estrategia general será probar una proposición auxiliar que, dada F una quasi-parametrización de nuestra variedad V relacione los volúmenes mixtos de las capsulas convexas de los soportes de F y los de $\overline{F}$ donde $\overline{F}$ es la inducida vía el lema 3.1.19.

Para efectuar el plan que esbozamos en el párrafo anterior, primero debemos dar algo de notación para el soporte de la derivada parcial de un polinomio.

Definición 6.0.8. Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_d]$ y consideremos $C = \text{sop}\,(f)$. Definimos $\dfrac{\partial C}{\partial x_j}$ como el soporte de la derivada parcial con respecto a x_j de f, es decir :

$$\frac{\partial C}{\partial x_j} = \text{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

También notaremos $C' = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{d} \frac{\partial C}{\partial x_j}$ a la unión de los soportes de las derivadas parciales y lo llamaremos el soporte **derivado** de C.

Observar que la definición solo depende de C como conjunto finito y no del polinomio f. Primero damos una proposición sobre cómo se lleva la operación derivar con las operaciones básicas de conjuntos como la suma y la unión.

Proposición 6.0.9. *Sean $f, g \in k[x_1, \ldots, x_d]$ y $1 \leqslant j \leqslant d$, entonces:*

1. $\dfrac{\partial\,(\text{sop}\,(f+g))}{\partial x_j} \subseteq \dfrac{\partial\,\text{sop}\,(f)}{\partial x_j} \cup \dfrac{\partial\,\text{sop}\,(g)}{\partial x_j}$.
2. $\dfrac{\partial\,(\text{sop}\,(fg))}{\partial x_j} \subseteq \left(\dfrac{\partial\,\text{sop}\,(f)}{\partial x_j} + \text{sop}\,(g)\right) \cup \left(\dfrac{\partial\,\text{sop}\,(g)}{\partial x_j} + \text{sop}\,(f)\right)$.
3. $(\text{sop}\,(f+g))' \subseteq (\text{sop}\,(f))' \cup (\text{sop}\,(g))'$.

Demostración.

1. Sea $(v_1, \ldots, v_d) \in \dfrac{\partial\,(\text{sop}\,(f+g))}{\partial x_j}$. Luego sabemos que $(v_1, \ldots, v_d) \in \text{sop}\left(\dfrac{\partial (f+g)}{\partial x_j}\right)$, en consecuencia se tiene que $(v_1, \ldots, v_j + 1, \ldots, v_d) \in \text{sop}\,(f+g)$. Es decir que $(v_1, \ldots, v_j + 1, \ldots, v_d)$ está en el soporte de f o en el soporte de g. Sin pérdida de generalidad supongamos que está en el soporte de f. Luego, al derivar se tiene que $(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_d) \in \text{sop}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$.
2. Aplicando el mismo razonamiento que hicimos en el inciso anterior ahora a fg se sigue el resultado.
3. Se sigue trivialmente del inciso 1.

□

Ahora pasamos a dar un teorema que lo que hace es relacionar los soportes de la parametrización del fibrado tangente con los de la parametrización de la variedad.

Teorema 6.0.10. *Sean $A_0, A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{N}_0^d$ y sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ suave variedad quasi-paramétrica con quasi-parametrización $F : U \subseteq (\mathbb{A}\backslash\{0\})^d \to (\mathbb{A}\backslash\{0\})^n$ de la forma:*

$$F = \left(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}\right), \text{ donde } \text{sop}\,(f_i) = A_i \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Entonces TV es una variedad quasi-paramétrica con quasi-parametrización $\overline{F}$ (ver proposición 3.1.19) dada por :

$$\overline{F}(\overline{x}, \overline{y}) = (F(\overline{x}), D_{\overline{x}}F(\overline{y})) = \left(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}, \nabla\left(\frac{f_1}{f_0}\right) \cdot \overline{y}, \ldots, \nabla\left(\frac{f_n}{f_0}\right) \cdot \overline{y}\right) = \left(\frac{h_1}{f_0^2}, \ldots, \frac{h_{2n}}{f_0^2}\right),$$

y $\deg(\overline{F}) = \deg(F)$.

Más aún, si $C_0, C_1, \ldots, C_{2n} \subseteq \mathbb{N}_0^{2d}$ *son los soportes de* $f_0^2, h_1, \ldots, h_{2n}$ *se tiene que:*

1. *Para* $0 \leqslant j \leqslant n$*:*
$$C_j \subseteq (A_0 + A_j) \times \{\, \overline{0} \,\}.$$

2. *Para* $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$*:*
$$C_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{d} \left(\left(A_0 + \frac{\partial A_{j-n}}{\partial x_i} \right) \cup \left(A_{j-n} + \frac{\partial A_0}{\partial x_i} \right) \right) \times \{\, e_i \,\},$$

   donde $e_1, \ldots, e_d$ *son los vectores canónicos de* $\mathbb{R}^d$.

Demostración. Recordar que, por el teorema 3.1.9, TV resulta una variedad suave por lo que estamos en el contexto de la definición 3.1.20.

Sea $\overline{F}$ la inducida por F vía la proposición 3.1.19. Notar que por la proposición 3.1.21, como F es una submersión y es dominante, entonces $\overline{F}$ es dominante. En particular, veamos que $\overline{F}$ es una submersión. Notemos que podemos dar la siguiente escritura matricial al diferencial de $\overline{F}$.

$$D_{\overline{x},\overline{y}}\overline{F}(\overline{z}, \overline{w}) = \begin{pmatrix} \nabla F & 0 \\ * & \nabla F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z} \\ \overline{w} \end{pmatrix}.$$

Observando que F es submersión se tiene que esta aplicación tiene rango máximo y en consecuencia $\overline{F}$ es una submersión.

De esta manera, restaría ver que $\overline{F}$ es genéricamente finita para que TV sea una variedad quasi paramétrica. Sea $\deg(F) = \delta$ observemos que como V es suave, por la proposición 6.0.5, se tiene que existe $\mathcal{U} \subseteq V$ tal que, para todo $p \in \mathcal{U}$ es:

$$\delta = \deg(F) = \#F^{-1}(p).$$

Ahora bien, veamos que $\overline{F}$ tiene grado δ también. Para esto, nuevamente por la proposición 6.0.5 basta con hallar un abierto en TV en el cual la fibra de cada punto tenga cardinal exactamente δ. Consideramos $G = \mathcal{U} \times \mathbb{A}^d$. Notemos que $G \cap TV$ es abierto en TV y además dados $(p, q) \in G \cap TV$ se tiene que:

$$\#\overline{F}^{-1}(p, q) = \#\{\, (\overline{x}, \overline{y}) \in TU \mid F(\overline{x}) = p,\ D_{\overline{x}}F(\overline{y}) = q \,\}.$$

De esta manera, sabemos que hay δ posibles valores de $\overline{x}$ tal que $F(\overline{x}) = p$. En particular,como F es quasi-parametrización de V sabemos que F es una submersión y fijado p, como V es suave y $\dim(U) = \dim(V)$, se sigue que también es inmersión, y luego el diferencial es un isomorfismo fijado p. En consecuencia para cada $\overline{x}$ tal que $F(\overline{x}) = p$ hay un único $\overline{y}$ tal que $D_{\overline{x}}F(\overline{y}) = q$ por lo que $\deg(\overline{F}) = \delta$. Ahora pasamos a demostrar el resto de las afirmaciones.

1. Observar que $C_0, \ldots, C_n \subseteq \mathbb{N}_0^d \times \{\, \overline{0} \,\}$. En particular, para $0 \leqslant j \leqslant n$ tenemos que $h_j = f_j f_0$ y, por la proposición 6.0.9 se tiene que:
$$C_j \subseteq A_0 \times \{\, \overline{0} \,\} + A_j \times \{\, \overline{0} \,\} = (A_0 + A_j) \times \{\, \overline{0} \,\}.$$

2. Si $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$ entonces observar que:
$$h_j = f_0(\nabla f_{j-n} \cdot \overline{y}) - f_{j-n}(\nabla f_0 \cdot \overline{y}) = (f_0 \nabla f_{j-n} - f_{j-n} \nabla f_0) \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{d} \left(f_0 \frac{\partial f_{j-n}}{\partial x_i} - f_{j-n} \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \right) y_i.$$

   Luego, utilizando la proposición 6.0.9, tenemos que:
$$C_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{d} \left(\left(A_0 + \frac{\partial A_{j-n}}{\partial x_i} \right) \cup \left(A_{j-n} + \frac{\partial A_0}{\partial x_i} \right) \right) \times \{\, e_i \,\}.$$

   Esto finaliza la demostración del segundo inciso. $\square$

A partir de esto, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.0.11. *Sea $A \subseteq \mathbb{N}_0^d$ tal que $Conv(A') \subseteq Conv(A)$. Existe $\mathcal{U} \subseteq L_d(A) \times \ldots \times L_d(A)$ abierto Zariski tal que si $(f_0, \ldots, f_n) \in \mathcal{U}$ y la aplicación racional $F : U \subseteq (\mathbb{A}\backslash\{0\})^d \to (\mathbb{A}\backslash\{0\})^n$ definida por $F = \left(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}\right)$ cumple:*

1. *$V = \overline{Im(F)}$ es suave,*
2. *F es genéricamente finita,*
3. *F es submersión,*

entonces vale la siguiente desigualdad:

$$\deg(TV) \leqslant \binom{2d}{d} 2^d \deg(V).$$

Demostración. Notar que, por el teorema 6.0.7 sabemos que existe $\mathcal{U} \subseteq L_d(A) \times \ldots \times L_d(A)$ abierto Zariski tal que, si $(f_0, \ldots, f_n) \in \mathcal{U}$ entonces:

$$\delta \cdot \deg(V) = d! Vol_d(Conv(A)).$$

De esta manera, fijemos $(f_0, \ldots, f_n) \in \mathcal{U}$ y supongamos que se cumplen las condiciones 1, 2 y 3. Debido a estas, V resulta una variedad quasi-paramétrica con quasi-parametrización F. Sea $\delta = \deg(F)$, entonces por el teorema 6.0.10 tenemos que $\overline{F}$ es una quasi-parametrización de TV que cumple $\deg(\overline{F}) = \delta$. Ahora bien, sean $C_0 \ldots, C_{2n}$ los soportes asociados a $\overline{F}$ de acuerdo al teorema 6.0.10. En particular, por el teorema 6.0.7 pero ahora aplicado a $\overline{F}$ y usando solamente la desigualdad del mismo, tenemos que si $D = \bigcup_{j=0}^{2n} C_j$:

$$\delta \cdot \deg(TV) \leqslant (2d)! \cdot Vol_{2d}\left(Conv(D)\right).$$

Ahora bien, observemos que para obtener nuestro resultado, bastará con acotar $Vol_{2d}(Conv(D))$ en función de $Vol_d(Conv(A))$. Por el teorema 6.0.10 tenemos lo siguiente:

- Para $0 \leqslant j \leqslant n$:
$$C_j \subseteq (A + A) \times \{\overline{0}\}.$$
- Notar que si $e_1, \ldots, e_d$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^d$ tenemos que, para $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$:
$$\begin{aligned} C_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{d} \left(\left(A + \frac{\partial A}{\partial x_i} \right) \times \{e_i\} \right) &\subseteq \bigcup_{i=1}^{d} \left(\left(A + \frac{\partial A}{\partial x_i} \right) \times \{e_1, \ldots, e_d\} \right) \\ &= (A + A') \times \{e_1, \ldots, e_d\}. \end{aligned}$$

Luego sea Δ^d el d-simplex estándar con vértices $0, e_1, \ldots, e_d$. Notemos que:

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=0}^{2n} C_j &\subseteq ((A + A) \times \{\overline{0}\}) \cup (A + A') \times \{e_1, \ldots, e_d\} \\ &\subseteq ((A + A) \cup (A + A')) \times \{e_1, \ldots, e_d\} \end{aligned}$$

Así, como $A' \subseteq Conv(A)$ resulta que:

$$(A + A) \cup (A + A') \subseteq Conv(A) + Conv(A).$$

Teniendo en cuenta ambas inclusiones, concluimos que:

$$Conv\,(D) \subseteq Conv(A + A) \times \Delta^d.$$

En consecuencia, tenemos que:

$$Vol_{2d}\,(Conv\,(D)) \leqslant Vol_{2d}\left(Conv(A+A)\times\Delta^d\right) = Vol_d(Conv(A+A))\cdot Vol_d(\Delta^d).$$

Recordando que $Vol_d(\Delta^d) = \dfrac{1}{d!}$ se tiene que:

$$Vol_{2d}\,(Conv(D)) \leqslant \frac{Vol_d(Conv(A+A))}{d!} = \frac{Vol_d(2Conv(A))}{d!} = \frac{2^d}{d!}Vol_d(Conv(A)).$$

En consecuencia, si juntamos todo lo que hicimos obtenemos lo siguiente:

$$\deg(TV) \leqslant \frac{(2d)!}{\delta}\cdot\frac{2^d}{d!}Vol_d(Conv(A)) = \binom{2d}{d}2^d\deg(V).$$

□

A continuación daremos una proposición que caracterizará el soporte derivado en función del soporte de un polinomio en el caso más simple que es $d = 2$. Esto es interesante puesto que si bien no tenemos ejemplos que se encuentren en las hipótesis del corolario 6.0.11, tener una caracterización sobre los soportes a considerar simplifica la tarea.

Proposición 6.0.12. *Sea $f \in k[x,y]$. Consideremos $C = \operatorname{sop}(f)$ y $C' \subseteq \mathbb{N}_0^2$ su soporte derivado. Sean $\lambda_1 = \max\{\,x \mid (x,y)\in C\,\}$ y $\lambda_2 = \max\{\,y \mid (x,y)\in C\,\}$. Supongamos que $\lambda_1,\lambda_2 > 0$, entonces son equivalentes:*

1. *$Conv(\{\,(0,0)\,\}\cup C') \subseteq Conv(\{\,(0,0)\,\}\cup C)$.*
2. *$(\lambda_1,0)$ y $(0,\lambda_2)\in C$.*
3. *$Conv((\lambda_1,0),(0,\lambda_2),(0,0)) \subseteq Conv(\{\,(0,0)\,\}\cup C)$.*

Demostración. Demostraremos esto viendo cada implicación por separado.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $(\lambda_1,0)\notin C$. Luego, existe $j \geqslant 1$ mínimo tal que $(\lambda_1,j)\in C$. Entonces, $(\lambda_1,j-1)\in C'$ está en $Conv(\{0,0\}\cup C)$.

  Veamos que $Conv(\{(0,0)\}\cup C)\cap\{x=\lambda_1\} = Conv(C\cap\{x=\lambda_1\})$.

  Es claro que vale la inclusión $\supseteq$. Para ver la otra inclusión, consideremos $p\in Conv(\{(0,0)\}\cup C)\cap\{x=\lambda_1\}$. Supongamos que $C=\{v_1,\dots,v_m\}$ con $v_i=(v_{i1},v_{i2})$ para todo i y sea $v_0=(0,0)$. Entonces $p=\sum_{0\leqslant i\leqslant m}\mu_i v_i$ con $\mu_i\geqslant 0$ para todo i y $\sum_{0\leqslant i\leqslant m}\mu_i = 1$. Considerando la primera coordenada,

  $$\lambda_1 = \sum_{0\leqslant i\leqslant m}\mu_i v_{i1} = \sum_{0\leqslant i\leqslant m,\mu_i>0}\mu_i v_{i1} \leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant m,\mu_i>0}\mu_i\lambda_1 = \lambda_1,$$

  con lo cual la desigualdad debe ser una igualdad y $v_{i1}=\lambda_1$ para todo i tal que $\mu_i>0$. Luego, $p\in Conv(C\cap\{x=\lambda_1\})$.

  Ahora, $Conv(C\cap\{x=\lambda_1\})$ es un segmento (o un punto) con vértices (λ_1,j) y (λ_1,j') con $j'\geqslant j$, el cual no contiene al punto $(\lambda_1,j-1)$. Esto da lugar a un absurdo, que provino de suponer que $(\lambda_1,0)\notin C$. Replicando esto con λ_2 tenemos el resultado deseado.

- (2) $\Rightarrow$ (3) Se sigue trivialmente ya que estamos considerando la cápsula convexa de menos puntos.

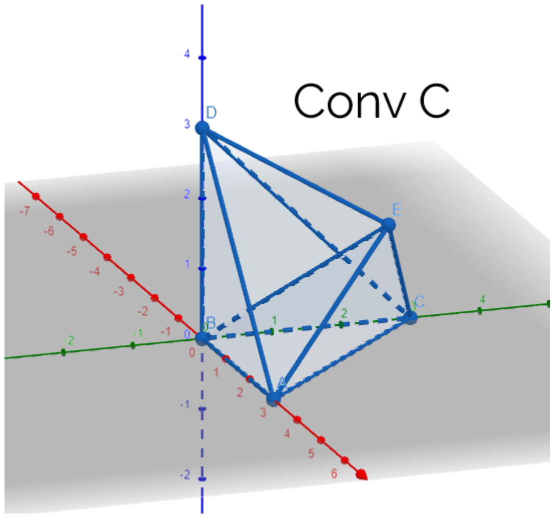
- (3) $\Rightarrow$ (1) Veremos que dado $(x,y)\in C'$ entonces $(x,y)\in Conv(\{\,(0,0)\,\}\cup C)$. Observemos que si $(x,y)\in C'$, luego sucede que $(x+1,y)\in C$ o $(x,y+1)\in C$. Sin pérdida de generalidad supongamos que es la primera. Luego, por hipótesis tenemos que:

  $$Conv((\lambda_1,0),(0,\lambda_2),(0,0),(x+1,y)) \subseteq Conv(\{\,(0,0)\,\}\cup C).$$

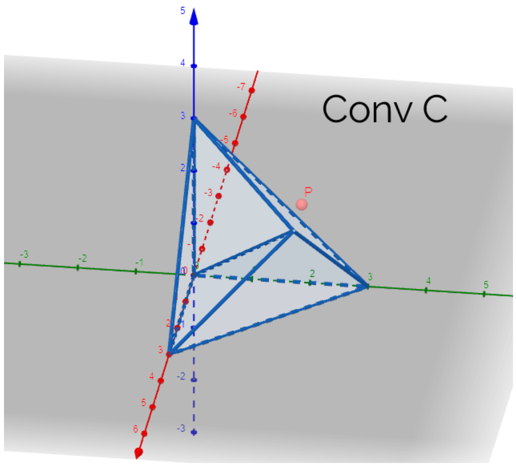
  Observando que $(x,y)\in Conv((\lambda_1,0),(0,\lambda_2),(0,0),(x+1,y))$ se sigue el resultado. □

Si bien la proposición anterior caracteriza de alguna forma la geometría que debe tener un soporte para que su derivado esté contenido en él, esta proposición no se generaliza bien a varias variables, como ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.0.13. Consideramos $C \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por: $C = \{(3,0,0),(0,0,3),(0,3,0),(2,2,2),(0,0,0)\}$. Observemos que nuestro conjunto C se encuentra dentro de las hipótesis que generalizarían el inciso 3 de la proposición 6.0.12. Ahora bien, utilizando algún software gráfico, en nuestro caso Geogebra, podemos ver que $Conv(C)$ tiene la forma:



Ahora bien, notemos que $(1,2,2) \in C'$ puesto que $P = (1,2,2) \in \dfrac{\partial C}{\partial x_1}$ pero sin embargo, se ve gráficamente que:



Notar que dicho punto P está afuera de $Conv(C)$ por lo que el resultado deja de ser válido en $n = 3$.

Lo último que haremos en esta sección será dejar un corolario de nuestro teorema que permitirá estimar el grado del fibrado tangente en función de los soportes de la parametrización de la variedad.

Corolario 6.0.14. *Sean $A_0, A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{N}_0^d$ y sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad quasi-paramétrica suave con quasi-parametrización $F : U \subseteq (\mathbb{A}\backslash\{0\})^d \to (\mathbb{A}\backslash\{0\})^n$ de la forma:*

$$F = \left(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}\right), \text{ donde } \operatorname{sop}(f_i) = A_i \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Sea $\delta = \deg(F)$, entonces se tiene que:

$$\delta \cdot \deg(TV) \leqslant MV(E_0^{2n+1-2d}, \dots, E_{2n}^{2n+1-2d}),$$

donde,

- *para $0 \leqslant j \leqslant n$:*
$$E_j = (A_0 + A_j) \times \{\, \overline{0} \,\};$$

- *para $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$:*
$$E_j = \bigcup_{i=1}^{d} \left(\left(A_0 + \frac{\partial A_{j-n}}{\partial x_i} \right) \cup \left(A_{j-n} + \frac{\partial A_0}{\partial x_i} \right) \right) \times \{\, e_i \,\}.$$

Demostración. Sea $\overline{F}$ la función inducida en TV por la proposición 3.1.19. Notar que por el teorema 6.0.10 ésta es una quasi parametrización de TV de grado δ. Consideremos $C_0, \dots, C_{2n}$ los soportes de los polinomios que definen $\overline{F}$ como en el teorema 6.0.10. Por el teorema 6.0.7 tenemos que:

$$\delta \cdot \deg(TV) \leqslant MV(C_0^{2n+1-2d}, \dots, C_{2n}^{2n+1-2d}) \leqslant MV(E_0^{2n+1-2d}, \dots, E_{2n}^{2n+1-2d}),$$

donde la última desigualdad se sigue del teorema 6.0.10 y la monotonía del volumen mixto. □

Observación 6.0.15. Cuando la quasi-parametrización es polinomial (y no racional), en el teorema anterior se obtiene algo bastante más simplificado dado que $A_0 = \{\overline{0}\}$ y por lo tanto queda que:

- para $0 \leqslant j \leqslant n$:
$$E_j = A_j \times \{\, \overline{0} \,\};$$

- para $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$:
$$E_j = \bigcup_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial A_{j-n}}{\partial x_i} \right) \times \{\, e_i \,\}.$$

Capítulo 7

Cuádricas y curvas planas

7.1. Cuádricas

Esta sección se tratará de resolver completamente el problema de estimar el grado del fibrado tangente para el caso en el que V sea una hipersuperficie de grado 2. Recordemos que por la observación 3.1.16, tenemos que el grado de una variedad es invariante bajo isomorfismos lineales. En consecuencia, el grado es un invariante bajo el grupo afín. Luego, de existir una clasificación afín general de variedades podríamos reducir considerablemente el problema. Lo que haremos a continuación es utilizar el hecho de que esta clasificación existe para el caso de cuádricas y calcular los respectivos grados de cada clase.

Primero recordaremos qué es una cuádrica.

Notación 7.1.1. Diremos que $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es una cuádrica, si existe $f \in k[\overline{x}]$ tal que $\deg(f) = 2$ y además:

$$V = \{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid f(\overline{x}) = 0 \}.$$

En el caso de que $n = 2$ diremos que V es una cónica.

Definición 7.1.2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leqslant m \leqslant n$. Definimos las cuádricas elementales de $\mathbb{A}^n$ como las siguiente familia de cuádricas:

1. $W_{(1,m)} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 0 \right\}.$
2. $W_{(2,m)} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 1 \right\}.$
3. $W_{(3,m)} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 = x_m \right\}$ donde $m > 1$.

En tal caso las llamaremos de tipo 1, 2 o 3 respectivamente.

A partir de la definición de estas cuádricas, damos un teorema de clasificación que nos será util para calcular el grado del fibrado tangente.

Teorema 7.1.3. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una cuádrica. Entonces existen únicos $i \in \{1, 2, 3\}$ y $1 \leqslant m \leqslant n$ tal que:*

$$V \equiv W_{(i,m)}.$$

En ese caso diremos que V es de tipo (i, m).

Demostración. Ver por ejemplo [Cuk00, Teorema 2.7, Observación 2.8]. □

Damos un corolario que relaciona el teorema anterior con el fibrado tangente.

Corolario 7.1.4. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una cuádrica. Entonces, si V es de tipo (i,m) se tiene que:*

$$TV \equiv TW_{(i,m)}.$$

Demostración. Para las cuádricas que son $(2,m)$ y $(3,m)$ que son suaves, el resultado se sigue del teorema 7.1.3 y la proposición 3.1.18. Las cuádricas de tipo $(1,m)$ no son suaves y por lo tanto no se pueden aplicar dichos resultados directamente. Sin embargo, usando la noción extendida de fibrado tangente (ver Definición 3.2.6), como el morfismo de congruencia se trata de una transformación lineal afín globalmente inversible, se puede demostrar un equivalente a la proposición 3.1.18 directamente en este caso, y en consecuencia se tiene el resultado. □

Luego para estimar el grado de una cuádrica basta con estimar los grados de los fibrados tangentes de $W_{(1,m)}, W_{(2,m)}, W_{(3,m)}$ para todo $m \leqslant n$. Eso es lo que haremos a continuación. Notar que si tuviéramos una clasificación afín de variedades de otro grado, podríamos proceder en igual medida que como lo haremos ahora. A sabiendas de la existencia de la clasificación para cúbicas, queda para un trabajo futuro utilizarla para obtener resultados del mismo tipo.

Ejemplo 7.1.5. Consideremos $W_{(2,m)} \subseteq \mathbb{A}^n$. Este ejemplo se tratará de calcular efectivamente el grado del fibrado tangente de esta familia. El primer caso es distinto al resto. Observar que $W_{(2,1)}$ se trata de dos hiperplanos paralelos, es decir que no se cortan. En consecuencia simplemente por la proposición 3.1.12 se sigue que:

$$\deg(TW_{(2,1)}) = 2.$$

Ahora, para el caso general consideremos la hipersuperficie definida por $r = 2$ en la proposición 4.2.4. La misma nos diría que, $W_{(2,n)} \subseteq \mathbb{A}^n$ cumple que:

$$\deg(TW_{(2,n)}) = 4.$$

Ahora bien, si $1 < m < n$, notamos $W_{(2,m)} \subseteq \mathbb{A}^n$ y $W^m_{(2,m)} \subseteq \mathbb{A}^m$ a la variedad definida por las mismas ecuaciones pero pensada en $\mathbb{A}^m$, observar que vale lo siguiente:

$$W_{(2,m)} = W^m_{(2,m)} \times \mathbb{A}^{m-n}.$$

Y luego, se sigue de la proposiciones 3.1.17, 3.1.18 y 2.2.52 que:

$$\deg(TW_{(2,m)}) = \deg(TW^m_{(2,m)}) \deg(T\mathbb{A}^{m-n}) = 4.$$

A partir de las variedades $W_{(2,m)}$ podremos calcular efectivamente los otros casos, vamos con el siguiente.

Ejemplo 7.1.6. Sea $n \in \mathbb{N}$. Este ejemplo se tratará de calcular el grado del fibrado tangente de la familia $W_{(3,m)}$. Para esto utilizaremos un resultado que demostramos en la sección anterior. Observemos que, como en el ejemplo anterior, el primer caso será distinto al resto. Este caso es el de una parábola eventualmente multiplicada por espacios afines dependiendo de n, es decir $W_{(3,2)}$. Observar que sin perdida de generalidad por las proposiciones 3.1.17, 2.2.52 y 3.1.18, podemos asumir que $W_{(3,2)} \subseteq \mathbb{A}^2$ puesto que su grado dará lo mismo. Luego para ese caso, observemos que, por el teorema 5.0.9, se tiene que:

$$\deg(TW_{(3,2)}) = 3.$$

Consideremos $m > 2$. Lo que haremos será reducirnos al caso del ejemplo 7.1.5. Recordemos lo siguiente:

$$W_{(3,m)} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 = x_m \right\}.$$

Observemos que:

$$W_{(3,m)} \cap \{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid x_m = 1 \} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{A}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 = x_m,\ x_m = 1 \right\} \equiv \left\{ \overline{x} \in \mathbb{A}^{n-1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 = 1 \right\},$$

donde la congruencia entre las variedades está dada por la inclusión. Luego observemos que, como ambas variedades son suaves, por la proposición 3.1.18 vale que:

$$T(W_{(3,m)} \cap \{\, \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid x_m = 1 \,\}) \equiv TW_{(2,m-1)}.$$

Y en particular, por el corolario 4.1.2, tenemos que el grado es un invariante bajo congruencia. En consecuencia:

$$\deg(T(W_{(3,m)} \cap \{\, \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid x_m = 1 \,\})) = \deg(TW_{(2,m-1)}) = 4,$$

donde la última igualdad se sigue del ejemplo 7.1.5. Sin embargo, observemos que:

$$\begin{aligned} T(W_{(3,m)} \cap \{\, \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid x_m = 1 \,\}) &= \left\{ (\overline{x},\overline{y}) \subseteq \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 = x_m \\ x_m = 1 \\ \sum_{i=1}^{m-1} 2x_iy_i = y_m \\ y_m = 0 \end{array} \right\} \\ &= TW_{(3,m)} \cap \left\{ (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; x_m = 1,\ y_m = 0 \right\}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue de que $\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 - x_m$ y $x_m - 1$ generan el ideal de $W_{(3,m)} \cap \{\, \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid x_m = 1 \,\}$. Luego por Bezout 2.2.53 tenemos que:

$$4 = \deg(T(W_{(3,m)} \cap \{\, \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid x_m = 1 \,\})) \leqslant \deg(TW_{(3,m)}) \leqslant 4,$$

donde la última desigualdad se sigue de la proposición 4.2.1. En consecuencia hemos finalizado de caracterizar el grado del fibrado tangente de las cuádricas en este caso.

Ahora pasaremos a calcular el grado para la última las tres familias.

Ejemplo 7.1.7. Calcularemos el grado del fibrado tangente para la familia $W_{(1,m)}$. Primero observemos que el caso $W_{(1,1)}$ es distinto a los demás puesto que realmente es una variedad lineal. En cuyo caso sabemos que, $\deg(W_{(1,1)}) = \deg(TW_{(1,1)}) = 1$ y si bien nosotros lo incluimos en nuestra definición, normalmente ni siquiera es considerado una cuádrica. Más aún el caso $m = 2$ también es distinto al resto puesto que el polinomio $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 - i \cdot x_2)(x_1 + i \cdot x_2)$ resulta reducible. En este caso tenemos que $W_{(1,2)}$ es una unión de dos hiperplanos. En particular:

$$\begin{aligned} TW_{(1,2)} &= \left\{ (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_1y_1 + x_2y_2 = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 = ix_2 \\ ix_2y_1 + x_2y_2 = 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 = -ix_2 \\ ix_2y_1 - x_2y_2 = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 = ix_2 \\ y_2 = -iy_1 \end{array} \right\} \cup \left\{ (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 = -ix_2 \\ y_2 = iy_1 \end{array} \right\} \\ &= Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3. \end{aligned}$$

Es claro que cada Z_i tiene grado 1 al ser lineal. En consecuencia, tenemos que $\deg(TW_{(1,2)}) = 3$.

Ahora bien, sea $m \geqslant 3$. Observemos que, con una técnica similar a la utilizada en el ejemplo 7.1.6, se tiene que:

$$W_{(1,m)} \cap \{\, \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid x_m = i \,\} \equiv W_{(2,m-1)}.$$

Luego, considerando el fibrado tangente a ambos lados de la congruencia y utilizando que el ideal de $W_{(1,m)} \cap \{\, \overline{x} \in \mathbb{A}^n \mid x_m = i \,\}$ está generado por $\sum_{i=1}^{m} x_i^2$ y $x_m - i$, se tiene que:

$$TW_{(2,m-1)} \equiv TW_{(1,m)} \cap \left\{ (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{A}^{2n} \;\middle|\; x_m = i, y_m = 1 \right\}.$$

Notar que aquí si podemos utilizar la proposición 3.1.18 ya que $W_{(2,1)}$ es suave y aplicar morfismos lineales preserva la suavidad. En consecuencia por el teorema de Bezout 2.2.53, se tiene que:

$$4 = \deg(TW_{(2,m-1)}) \leqslant \deg(TW_{(1,m)}) \leqslant 4,$$

donde la ultima desigualdad se sigue de la proposición 4.2.1.

Damos el teorema principal de esta sección, que resume los tres ejemplos.

Teorema 7.1.8. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una cuádrica que no es de tipo $(1,1)$. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si V es de tipo $(2,1)$ entonces:*
$$\deg(TV) = 2.$$
2. *Si V es de tipo $(3,2)$ o $(1,2)$ entonces:*
$$\deg(TV) = 3.$$
3. *En otro caso:*
$$\deg(TV) = 4.$$

Demostración. Se sigue del corolario 7.1.4 y los ejemplos 7.1.6 , 7.1.7 y 7.1.5. □

Ahora que dimos el teorema principal de la sección queda discutir algunas consecuencias y conjeturas que surgen a partir del teorema anterior. Para esto hacemos el siguiente comentario del orden informal.

Comentario 7.1.9. Para el caso de cónicas, definamos los siguientes invariantes. Sea $f \in k[x,y]$ dado por:

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + h.$$

Definimos los discriminantes asociados a f :

1. $\Delta_1(f) = b^2 - ac$.
2. $\Delta_2(f) = \det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & h \end{pmatrix}$.

Se puede ver que:

1. Si $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 \neq 0$ entonces la cónica es de tipo 3.
2. Si $\Delta_1 \neq 0$ y $\Delta_2 \neq 0$ entonces la cónica es de tipo 2.
3. Si $\Delta_1 \neq 0$ y $\Delta_2 = 0$ entonces la cónica es de tipo 1
4. Si $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = 0$ entonces la cónica es de tipo $(1,1)$.

Demostración. Ver por ejemplo [Bôc15, Section 78, Pag 180-181]. □

Recordemos que, fijado $n \in \mathbb{N}$, L_k es el espacio de polinomios de grado exactamente k en n variables, definido en 4.3.6. En particular, si $n = k = 2$ el comentario 7.1.9 nos dice que toda cónica genérica es de tipo 2, de lo que deducimos el siguiente corolario:

Corolario 7.1.10. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^2$ una cónica genérica en L_2. Entonces:*

$$\deg(TV) = 4 = 2^2.$$

Demostración. Se sigue del comentario 7.1.9. □

Es claro que extendiendo la noción de discriminante a más variables se puede obtener un resultado similar al corolario anterior para cuádricas. Sin embargo, los resultados de esta sección nos permiten conjeturar conjeturar que existe algún tipo de continuidad con respecto a la aplicación $\deg(T-)$ en el espacio de hipersuperficies de $\mathbb{A}^n$. Observar que las proposiciones 4.1.5 y 4.2.1 nos dicen que en el caso de cuádricas el grado de V se mueve entre 2 y 4. En particular hemos visto que hay ejemplos en los que vale 2 , 3 y 4. Luego tenemos la siguiente conjetura.

Conjetura 7.1.11. *Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Entonces existen hipersuperficies $V_0, \ldots, V_{k^2-k}$ de grado k en $\mathbb{A}^n$ tales que:*

$$\deg(TV_i) = \deg(V_i) + i \quad \forall i \in \{0, \ldots, k^2 - k\}.$$

7.2. Curvas planas

Comenzamos la sección enunciando una conjetura que surge a partir del corolario 7.1.10,

Conjetura 7.2.1. *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una hipersuperficie genérica en L_k. Entonces vale que:*

$$\deg(TV) = k^2.$$

Con el afán de encarar las conjeturas 7.1.11 y 7.2.1, nos reduciremos a estudiar un caso simplificado. El caso de curvas planas.

Notación 7.2.2. Dada $V \subseteq \mathbb{A}^2$ una variedad irreducible de dimensión 1, la llamaremos una curva plana.

La siguiente observación nos caracteriza como es el ideal de una curva plana.

Observación 7.2.3. Dada $V \subseteq \mathbb{A}^2$ curva plana, tenemos que existe un único $f \in k[x, y]$ mónico e irreducible tal que $I(V) = (f)$.

La idea detrás de restringirnos al caso de curvas planas para estudiar la conjetura 7.1.11 es la naturalidad que tienen las herramientas de volumen mixto en la misma. Al ser el ideal de la curva principal, es claro que podemos asociarle un soporte $C \subseteq \mathbb{A}^2$ a una curva plana.

La siguiente definición viene a formalizar la idea del comentario anterior.

Definición 7.2.4. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^2$ curva plana tal que $I(V) = (f)$. Definimos el **soporte** de V, $\text{sop}\,(V) \subseteq \mathbb{A}^2$ como:

$$\text{sop}\,(V) = \text{sop}\,(f).$$

Observar que este soporte está bien definido puesto que dado $g \in k[x, y]$ tal que $(g) = I(V)$ entonces $g = \mu f$ con $\mu \in k$ lo cual no cambia el soporte.

Observar que para una curva plana, como su conjunto de singularidades se encuentra dentro de las hipótesis del corolario 3.2.9 y en consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Proposición 7.2.5. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^2$ una curva plana, y sea $W = V \backslash Sing(V)$. Entonces se cumple la siguiente fórmula:*

$$\deg(TV) = \deg(TW) + \deg(Sing(V)).$$

Demostración. Observar que, por el corolario 3.2.9 tenemos que, si $p_1, \ldots, p_r$ son los puntos singulares de V entonces se tiene que:

$$TV = \overline{TW} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{r} \{p_i\} \times \mathbb{A}^2 \right).$$

Donde en particular, esta es su descomposición en irreducibles. En consecuencia, aplicando grado, se tiene que:

$$\deg(TV) = \deg(\overline{TW}) + \sum_{i=1}^{r} \deg(\{p_i\} \times \mathbb{A}^2) = \deg(\overline{TW}) + r = \deg(TW) + \deg(Sing(V)).$$

□

Observar que, la misma demostración vale para el caso en el que $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es una hipersuperficie no necesariamente suave y $Sing(V)$ es una variedad equidimensional de dimensión $n-2$.

De esta forma, la proposición 7.2.5 nos dice que el grado de su fibrado tangente será el grado del fibrado de la parte regular más la cantidad de puntos singulares y en particular, como este fibrado resulta equidimensional de dimensión 2, será la intersección con una variedad lineal genérica Π de dimensión 2 en $\mathbb{A}^4$. Más aún, bajo ciertas condiciones genéricas podemos asumir que Π es de la siguiente forma:

$$\Pi = \left\{ (x, y, u, v) \in \mathbb{A}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} u = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ v = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{array} \right\}$$

En particular, tenemos que dada V una curva plana con $I(V) = (f)$ se tiene que:

$$\#(TV \cap \Pi) = \# \left\{ (x, y) \in \mathbb{A}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot (a_1 x + b_1 y + c_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0 \end{array} \right\}$$

Observar que, bajo condiciones genéricas en $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ haciendo un trabajo similar al hecho en 5.0.9 podemos asumir que todas las soluciones están en $(\mathbb{A} \setminus \{0\})^2$. De esta manera, llamando $g_V(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot (a_1 x + b_1 y + c_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot (a_2 x + b_2 y + c_2)$, por el teorema de Bernstein-Kushnirenko 2.3.24, tenemos lo siguiente:

$$\deg(TV) \leqslant MV(\text{sop}\,(V), \text{sop}\,(g_V)).$$

Lo que veremos es que existen condiciones tales que vale la igualdad. Por ejemplo, para el caso de un polinomio f de la forma:

$$f = \alpha x^k + \beta y^j + \gamma x + \delta.$$

Con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbb{A} \setminus \{0\})^4$ coeficientes genéricos, y $k > j > 1$. Observar que por dicha genericidad f resulta irreducible. De esta manera, calculemos g_V para V tal que $I(V) = (f)$. Para esto computamos las siguientes derivadas:

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \alpha 3 x^{k-1} + \gamma.$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \beta j y^{j-1}.$

De esta forma, operando en la definición de g_V llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned} g_V(x, y) &= (\alpha k x^{k-1} + \gamma)(a_1 x + b_1 y + c_1) + \beta j y^{j-1}(a_2 x + b_2 y + c_2) \\ &= \alpha k x^k a_1 + \alpha k x^{k-1} y b_1 + \alpha k x^{k-1} c_1 + \gamma l x^1 a_1 + \gamma y b_1 + \gamma c_1 \\ &+ \beta j y^{j-1} x a_2 + \beta j y^j b_2 + \beta j y^{j-1} c_2. \end{aligned}$$

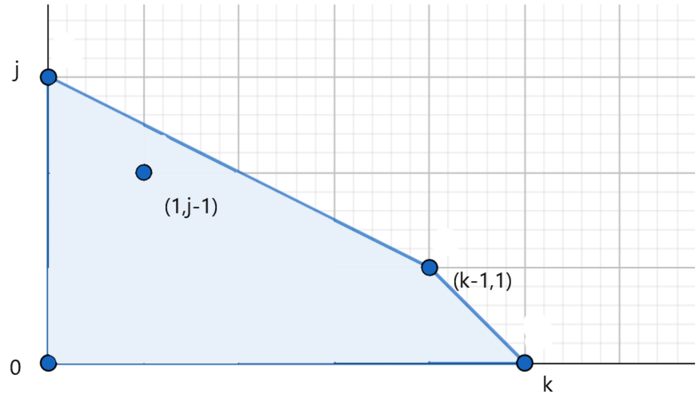
Lo que haremos será utilizar la segunda parte del teorema de Bernstein 2.3.24 para garantizar que vale dicha igualdad. Para esto, debemos mirar nuestro sistema restringido a las caras de las cápsulas convexas soportes de los polinomios involucrados. Sin embargo, notemos que en este caso al tener genericidad en los coeficientes $(\alpha, \beta, \gamma, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ tenemos que:

$$\text{sop}\,(g_V) = \{ (k, 0), (k-1, 1), (k-1, 0), (1, 0), (0, 1), (0, 0), (0, j), (1, j-1), (0, j-1) \}.$$

Los cuales son puntos que podemos entender muy bien como es dicha cápsula convexa. Ya que como $k > j > 1$ tenemos que:

$$Conv(\text{sop}\,(g_V)) = Conv(\{ (k, 0), (k-1, 1), (0, 0), (0, j), (1, j-1) \}).$$

Que se puede interpretar gráficamente de la siguiente manera:



Por otra parte, la cápsula convexa de $\text{sop}\,(f)$ es el triángulo de vértices $(0,0),(k,0),(0,j)$. Luego, debemos ver que el sistema restringido a los monomios que aparecen en cada una de las caras de $Conv(\text{sop}\,(g_V))$ y $Conv(\text{sop}\,(f))$ no tiene soluciones en $(\mathbb{A}\backslash\{0\})^2$. Sin embargo notemos que $Conv(\text{sop}\,(g)_V)$ y $Conv(\text{sop}\,(f))$ comparten dos caras, luego debemos ver 5 sistemas en total.

Llamemos C_1 al segmento que une al $(0,0)$ y al $(0,k)$, C_2 al segmento que une al $(0,0)$ y $(0,j)$, C_3 al segmento que une $(0,j)$ y $(k,0)$, C_4 al segmento que une $(k-1,1)$ con $(k,0)$ y C_5 al segmento que une $(0,j)$ con $(k-1,1)$. También notemos F a nuestro sistema dado por:

$$F := \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g_V(x,y) = 0 \end{cases}$$

Y $F_1, F_2, \dots, F_5$ a los respectivos sistemas restringidos. Notar que se tiene lo siguiente:

1. $F_1 = \begin{cases} \alpha x^k + \gamma x + \delta = 0 \\ \alpha k a_1 x^k + \alpha k x^{k-1} c_1 + \gamma x a_1 + \gamma c_1 = 0 \end{cases}$ Observar que la primera ecuación tiene finitas soluciones y podemos evaluar la segunda y pedir condiciones en a_1, c_1 para que no de cero en ninguna de ellas por lo que este caso está resuelto.

2. El caso de F_2 es totalmente análogo al anterior.

3. $F_3 = \begin{cases} \alpha x^k + \beta y^j = 0 \\ \alpha k x^k a_1 + \beta j y^j b_2 = 0 \end{cases}$ Notando que tenemos que $\alpha x^k = \beta y^j$ podemos reemplazar y sacar de factor común y^j. En particular, al ser todas las soluciones no nulas, si pedimos que $ka_1 - jb_2 \neq 0$ este sistema no tendrá soluciones.

4. $F_4 = \begin{cases} \alpha x^k = 0 \\ \alpha k x^k a_1 + \alpha c_1 k x^{k-1} = 0 \end{cases}$ Notando que la primera condición no se puede cumplir en $\mathbb{A}\backslash\{0\}$ se tiene que no hay soluciones en esta cara.

5. El caso $F5$ es análogo a $F4$.

De esta manera, tenemos por la parte 2 del teorema de Bernstein 2.3.24 que en este caso:

$$\deg(TV) = MV(\text{sop}\,(V), \text{sop}\,(g_V)).$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 7.2.6. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^2$ una curva plana. Definimos el soporte **tangente** de V, $\text{sop}\,(V_T) \subseteq \mathbb{A}^2$ como:

$$\text{sop}\,(V_T) = \text{sop}\,(g_V)\,.$$

Observar que ahora que nombramos los objetos podemos resumir el comentario anterior en el siguiente corolario:

Corolario 7.2.7. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^2$ una curva plana, entonces:*

$$\deg(TV) \leqslant MV(\text{sop}\,(V)\,,\text{sop}\,(V_T)).$$

En particular, si $I(V) = (\alpha x^k + \beta y^j + \gamma x + \delta)$ para $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ coeficientes genéricos y $k > j > 1$ vale la igualdad.

Pasamos a dar un ejemplo del corolario anterior

Ejemplo 7.2.8. Recordemos que una curva elíptica genérica $\mathcal{C}$ es esta definida por una ecuación de la forma $I(\mathcal{C}) = (\alpha x^3 + \beta y^2 + \gamma x + \delta)$ por lo que por el corolario 7.2.7 tenemos que vale la igualdad:

$$\deg(T\mathcal{C}) = MV(\text{sop}\,(\mathcal{C})\,,\text{sop}\,(\mathcal{C}_T)).$$

Calculemos exactamente sop $(\mathcal{C}_T)$ en este caso. Observar que:

$$\text{sop}\,(\mathcal{C}) = \{\,(0,0),(0,2),(3,0),(1,0)\,\}\,. \tag{7.1}$$

Por otra parte calculemos $g_{\mathcal{C}}$.

$$\begin{aligned}
g_{\mathcal{C}}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(a_1x + b_1y + c_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(a_2x + b_2y + c_2) \\
&= (3\alpha x^2 + \gamma)(a_1x + b_1y + c_1) + (2\beta y)(a_2x + b_2y + c_2) \\
&= 3\alpha a_1x^3 + 3\alpha b_1x^2y + 3\alpha c_1x^2 + \gamma a_1x + \gamma b_1y + \gamma c_1 + 2\beta a_2xy + 2\beta b_2y^2 + 2\beta c_2y \\
&= 3\alpha a_1x^3 + 3\alpha b_1x^2y + 3\alpha c_1x^2 + \gamma a_1x + (\gamma b_1 + 2\beta c_2)y + 2\beta a_2xy + 2\beta b_2y^2 + \gamma c_1.
\end{aligned}$$

En consecuencia tenemos lo siguiente:

$$\text{sop}\,(g_{\mathcal{C}}) = \{\,(3,0),(2,1),(2,0),(1,0),(0,1),(0,0),(1,1),(0,2)\,\}\,. \tag{7.2}$$

Ahora bien, se tiene que:

$$\text{sop}\,(\mathcal{C}) \subseteq \text{sop}\,(\mathcal{C}_T)\,. \tag{7.3}$$

Luego, para calcular el grado de $T\mathcal{C}$ debemos calcular $MV(\text{sop}\,(C)\,,\text{sop}\,(\mathcal{C}_T))$. Entonces hacemos lo siguiente, sean $A = Conv(\text{sop}\,(\mathcal{C}))$ y $B = Conv(\text{sop}\,(\mathcal{C}_T))$, por teorema 2.3.19 se tiene que:

$$Vol_2(A + B) - Vol_2(A) - Vol_2(B) = MV(A, B). \tag{7.4}$$

Luego, para esto debemos calcular tres volúmenes.

1. $Vol_2(A)$.
2. $Vol_2(B)$.
3. $Vol_2(A + B)$.

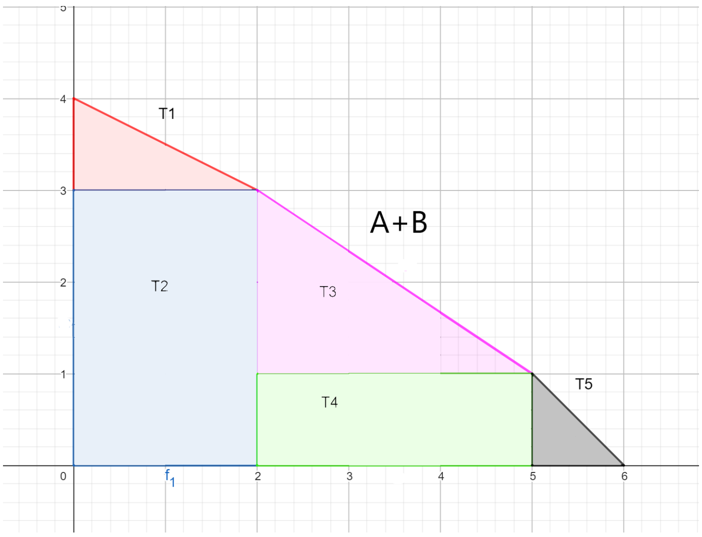
Así, calculamos caso por caso.

1. Por la ecuación (7.1), necesariamente $Conv(\text{sop}\,(\mathcal{C}))$ es un triángulo de vértices $(0,0),(3,0)$ y $(0,2)$. En consecuencia tenemos que $Vol_2(A) = 3$.
2. Por la ecuación (7.2) tenemos que B se puede escribir como la unión disjunta de un trapecio rectángulo de vértices $(0,0),(0,2)$ $(2,1),(2,0)$ y el triangulo rectángulo de vértices $(2,1),(2,0),(3,0)$ por lo que $Vol_2(B) = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$.
3. Para esto último nos basamos en la proposición 2.3.15 que nos dice que los vértices de $A + B$ están entre los que se obtienen de sumar los vértices de A y los vértices de B. Luego calculamos:

$$\text{sop}\,(C) + \text{sop}\,(C_T) = \left\{\begin{array}{c}
(3,0),(2,1),(2,0),(1,0),(0,1),(0,0),(1,1),(0,2) \\
(3,2),(2,3),(2,2),(1,2),(0,3),(0,2),(1,3),(0,4) \\
(6,0),(5,1),(5,0),(4,0),(3,1),(3,0),(4,1),(3,2) \\
(4,0),(3,1),(3,0),(2,0),(1,1),(1,0),(2,1),(1,2)
\end{array}\right\}.$$

En particular, graficando estos puntos en el plano se puede ver que:

$$A + B = Conv(\text{sop}\,(C) + \text{sop}\,(C_T)) = Conv((0,0),(0,4),(2,3),(5,1),(6,0)).$$



De esta manera, basta con calcular las áreas de $T1, T2, T3, T4$ y $T5$. Se tiene que:

a) $Vol_2(T_1) = 1$.

b) $Vol_2(T_2) = 6$.

c) $Vol_2(T_3) = 3$.

d) $Vol_2(T_4) = 3$.

e) $Vol_2(T_5) = \frac{1}{2}$.

En consecuencia, tenemos que: $Vol_2(A+B) = 13 + \frac{1}{2}$.

Luego, de la ecuación (7.4) se tiene que:

$$MV(A,B) = 13 + \frac{1}{2} - 3 - \frac{7}{2} = 7.$$

En consecuencia como ese volumen mixto es igual al grado del nuestro fibrado tangente, se sigue que:

$$\deg(T\mathcal{C}) = 7.$$

Lo cual finaliza el ejemplo.

Resumiendo, hemos obtenido el siguiente teorema.

Teorema 7.2.9. *Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$ una curva elíptica genérica. Entonces se tiene que:*

$$\deg(T\mathcal{C}) = 7.$$

La importancia del ejemplo anterior radica no solo en calcular explícitamente el grado del fibrado tangente para una familia muy grande de curvas de grado 3, sino que, en línea con la conjetura 7.1.11 conseguimos una familia explícita de curvas para las cuales el grado del fibrado tangente es estrictamente más grande que el grado de la variedad y estrictamente más chico que su cuadrado. En función de esto, por lo notado en la ecuación (7.3) lo que haremos será dar una proposición que relacione $\operatorname{sop}(V_T)$ y $\operatorname{sop}(V)$.

Proposición 7.2.10. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^2$ curva plana, tal que $I(V) = (f)$ con $f \in k[x,y]$ entonces:*

$$\operatorname{sop}(V_T) \setminus \{(0,0)\} = (\operatorname{sop}(V) \setminus \{(0,0)\}) \cup (\operatorname{sop}(V))' \cup \left(\frac{\partial \operatorname{sop}(V)}{\partial x} + e_2\right) \cup \left(\frac{\partial \operatorname{sop}(V)}{\partial y} + e_1\right).$$

Donde recordamos que $(\operatorname{sop}(V))'$, $\frac{\partial \operatorname{sop}(V)}{\partial x}$, $\frac{\partial \operatorname{sop}(V)}{\partial y}$ son los definidos en 6.0.8.

Demostración. Observar que por definición se tiene que:

$$\operatorname{sop}(V_T) = \operatorname{sop}(g_V) = \operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(a_1x+b_1y+c_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(a_2x+b_2y+c_2)\right)$$

Donde, como los a_i, b_i, c_i son coeficientes genéricos, podemos dar condiciones genéricas de manera tal que al realizar la distributiva en g_V no se cancele ningún monomio. En consecuencia, se tiene que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sop}(V_T)\setminus\{(0,0)\} &= \operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x\right)\cup\operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot y\right)\cup\operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cup\operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y\right)\cup\operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot x\right)\\ &\quad\cup\operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\setminus\{(0,0)\}\\ &= \left(\operatorname{sop}(V)\cup(\operatorname{sop}(V))'\cup\left(\frac{\partial\operatorname{sop}(V)}{\partial x}+e_2\right)\cup\left(\frac{\partial\operatorname{sop}(V)}{\partial y}+e_1\right)\right)\setminus\{(0,0)\}.\end{aligned}$$

Donde para la segunda igualdad, usamos las siguientes identidades:

1. $\operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x\right)\cup\operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y\right)\setminus\{(0,0)\} = \operatorname{sop}(V)\setminus\{(0,0)\}$. Esta identidad se sigue de 6.0.9.
2. $(\operatorname{sop}(V))' = \operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cup\operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Esta identidad es por la definición 6.0.8.
3. $\operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot x\right) = \left(\frac{\partial\operatorname{sop}(V)}{\partial y}+e_1\right)$ y $\operatorname{sop}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot y\right) = \left(\frac{\partial\operatorname{sop}(V)}{\partial x}+e_2\right)$. Esta identidad se sigue también de 6.0.9.

□

En particular, notemos que si $(0,0)\in\operatorname{sop}(V)\cap\operatorname{sop}(V_T)$, sucede que $\operatorname{sop}(V)\subseteq\operatorname{sop}(V_T)$. Ahora damos un corolario de esto.

Corolario 7.2.11. *Sea $V\subseteq\mathbb{A}^2$ curva plana, entonces:*

$$\deg(TV)\leqslant 2\cdot Vol_2(Conv(\{(0,0)\}\cup\operatorname{sop}(V_T))).$$

Demostración. La demostración de este hecho se sigue del corolario 7.2.7, la monotonía del volumen mixto enunciada en el teorema 2.3.19 y que por la proposición 7.2.10 es $\operatorname{sop}(V)\setminus(0,0)\subseteq\operatorname{sop}(V_T)\setminus(0,0)$. □

En particular, por lo visto en 7.2.8 esta cota puede ser óptima. Allí vimos que:

$$Vol_2(\operatorname{sop}(V_T)) = \frac{7}{2},$$

y por otra parte, probamos que $\deg(T\mathcal{C}) = 7$. Vale la pena aclarar, que si bien este corolario introduce una cota eventualmente peor que la del corolario 7.2.7, lo que el mismo aporta es que estima el grado en función de un volumen y no de un volumen mixto, cosa que resulta es mucho mas fácil de calcular como bien vimos en el 7.2.8.

Algo que no hicimos es intentar acotar el volumen mixto de los soportes de una curva plana tanto por arriba como por abajo, con el fin de dar estimaciones mas precisas. Es decir, el corolario 7.2.7 nos dice que, bajo ciertas condiciones sobre los soportes, $\deg(TV) = MV(\operatorname{sop}(V),\operatorname{sop}(V_T))$ y en particular si pedimos que ambos soportes contengan al origen, se tiene por la proposición 7.2.10 que:

$$2Vol_2(\operatorname{sop}(V))\leqslant\deg(TV) = MV(\operatorname{sop}(V),\operatorname{sop}(V_T))\leqslant 2Vol_2(\operatorname{sop}(V_T)).$$

Esta estimación, puede llegar a ser muy precisa dependiendo de la geometría de $\operatorname{sop}(V)$ y V_T. En los artículos [BS17] y [DHM22] se discuten condiciones necesarias y suficientes sobre cuando la monotonía del volumen mixto es estricta. Queda pendiente para un trabajo futuro intentar utilizar los resultados de dichos artículos con los de este trabajo para intentar obtener estimaciones inferiores del grado. Una posible aplicación de estos métodos podría aplicarse por ejemplo para resolver la siguiente conjetura.

Conjetura 7.2.12. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^2$ curva plana. Son equivalentes:*

1. $\deg(V) = \deg(TV)$.
2. *V es lineal.*

Bibliografía

[Ber75] D.N. Bernstein. The number of roots of a system of equations. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 9(3), 1975.

[Béz79] E. Bézout. *Théorie générale des équations algébriques*. De l' Imprimerie de Ph.-D. Pierres, 1779.

[Bôc15] M. Bôcher. *Plane Analytic Geometry: With Introductory Chapters on the Differential Calculus*. H. Holt, 1915.

[BS17] F. Bihan and I. Soprunov. Criteria for strict monotonicity of the mixed volume of convex polytopes, 2017.

[Car45] E. Cartan. *Les systèmes différentiels extérieurs et leur applications géométriques*. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann & cie, 1945.

[CLO06] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Using algebraic geometry*, volume 185. Springer Science & Business Media, 2006.

[CLO15] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, New York, NY, 4th edition, 2015.

[Cuk00] F. Cukierman. *Cuádricas y Cúbicas*. Universidad de Buenos Aires, 2000.

[DHM22] A. Dickenstein, M.I. Herrero, and B. Mourrain. Curve valuations and mixed volumes in the implicitization of rational varieties, 2022.

[Eis95] D. Eisenbud. *Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.

[Ewa12] G. Ewald. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.

[Ful98] W. Fulton. *Intersection Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer New York, 1998.

[GKKZ03] B. Grünbaum, V. Kaibel, V. Klee, and G.M. Ziegler. *Convex Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[Har92] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1992.

[Hei83] J. Heintz. Definability and fast quantifier elimination in algebraically closed fields. *Theoretical Computer Science*, 24(3):239–277, 1983.

[HJSS05] J. Heintz, G. Jeronimo, J. Sabia, and P. Solernó. Intersection theory and deformation algorithms: the multi-homogeneous case. Draft, 2005.

[HS80] J. Heintz and C. P. Schnorr. Testing polynomials which are easy to compute (extended abstract). In *Proceedings of the Twelfth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '80, page 262–272, New York, NY, USA, 1980. Association for Computing Machinery.

[Jou83] J.P. Jouanolou. *Théorèmes de Bertini et applications*. Progress in mathematics (Birkhäuser) 42. Birkhäuser, 1983.

[Kun99] E. Kunz. *On the Tangent Bundle of a Scheme*. Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. Universitatis Iagellonicae, 1999.

[Kun13] E. Kunz. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, 1 edition, 2013.

[Kus76] A. G. Kushnirenko. Polyèdres de newton et nombres de milnor. *Inventiones Mathematicae*, 32(1):1–31, 1976.

[Mat80] H. Matsumura. *Commutative Algebra*. Math Lecture Notes Series. Benjamin/Cummings Publishing Company, 1980.

[Mil12] J.S. Milne. *Algebraic Geometry*. Allied Publishers, 2012.

[Mon21] P. Mondal. *How Many Zeroes?* Springer International Publishing, 2021.

[Mum69] D. Mumford. *A Varieties defined by quadratic equations. C. Marchionna (ed.)*. Proc. of Questions in Algebraic Geometry. Cremonese, 1969.

[MW83] D.W. Masser and G. Wüstholz. Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions. *Inventiones mathematicae*, 72:407–464, 1983.

[New87] I. Newton. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Pepys, Samuel, London, 1687.

[SR13] I.R. Shafarevich and M. Reid. *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*. SpringerLink : Bücher. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[VP84] W. Vogel and D.P. Patil. *Lectures on Results on Bezout's Theorem*. Lectures on mathematics and physics. Tata Institute of Fundamental Research, 1984.

[Wal18] M. Walsh. The polynomial method over varieties, 2018.