Campos cuánticos en espacio de de-Sitter y Teoría de Grupos

Manuel Mizrahi
Director: Guillermo Ariel Silva
Codirector: Pedro Jorge Martínez

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Agosto de 2025

TEMA:	Campos cuánticos en espacio de de-Sitter y Teoría de Grupos
ALUMNO:	Manuel Mizrahi
L.U. N°:	797/18
LUGAR DE TRABAJO:	Departamento de Física, FCEN, UBA
DIRECTOR DEL TRABAJO:	Guillermo Ariel Silva
CODIRECTOR o COLABORADOR:	Pedro Jorge Martínez
FECHA DE INICIACION:	Abril de 2024
FECHA DE FINALIZACION:	Agosto de 2025
FECHA DE EXAMEN:	
INFORME FINAL APROBADO POR:	

Autor	Jurado
Director	Jurado
Profesor(a) de Tesis de Licenciatura	Jurado

Índice general

1. Introducción **8**

2. Teoría de grupos **11**
2.1. Preliminares de grupos y álgebras 12
2.2. Grupo de Lorentz 15
2.3. Representaciones del grupo de Lorentz 16
2.3.1. Representaciones finito-dimensionales (no unitarias) 17
2.3.2. Representaciones infinito-dimensionales en $\mathbb{R}^{1,d}$ 19
2.4. UIRs de $SO(1,d)$ 20
2.5. Conexión de spin 21
2.5.1. Ecuaciones de estructura de Cartan 26
2.5.2. Representaciones de spin arbitrario 27
2.5.3. Resultados relevantes y más definiciones 27
2.6. Realizaciones del operador $J_{ab}^{(s)}$ y la derivada de Lie espinorial 29
2.6.1. Derivada de Lie-Lorentz 30
2.7. Operador Casimir 33
2.7.1. Operador Casimir en $SO(1,3)$ 33

3. Espacio de de Sitter **35**
3.1. Principio cosmológico y escala de de Sitter 35
3.2. Soluciones de las Ecuaciones de Einstein de vacío con $\Lambda > 0$ 35
3.3. Sistemas de coordenadas 38
3.3.1. Carta global 38
3.3.2. Poincaré patch 40
3.3.3. Static patch 41

4. Teoría de campos en de Sitter **43**
4.1. El problema de la masa en de Sitter 43
4.2. Comentario sobre las *principal series representations* π_ν en las soluciones de de Sitter 46
4.3. Cuantización del campo escalar en espacio plano 47
4.4. Cuantización del campo escalar en de Sitter 50

4.4.1. Ecuación de Klein-Gordon 52
4.4.2. Soluciones y cuantización 54
4.4.3. Un caso de estudio: de Sitter 2+1 55
4.5. Cuantización del campo espinorial en de Sitter 67
4.5.1. Comentarios sobre espinores en espacio plano 67
4.5.2. Ecuación de Dirac y Dirac-Lichnerowicz 68
4.5.3. Soluciones y cuantización 70

5. La masa como un indicador de representaciones 76
5.1. Campo escalar: Laplace-Beltrami, derivadas de Lie y Casimir cuadrático 76
5.1.1. Cálculo explícito para dS_{2+1} 77
5.2. Campo espinorial: Dirac-Lichnerowicz, derivadas de Lie-Lorentz y Casimir cuadrático 77

6. Conclusiones 80

A. Matrices de Dirac y algunas operaciones y contracciones 82
A.1. Matrices de Dirac: construcción y notación 82
A.2. Conmutador de derivadas covariantes 82
A.3. Contracción con el tensor de Riemann 83

B. Normalización de la acción 85

C. Vectores de Killing de $SO(1,3)$ 87

D. Derivada de Lie-Lorentz como representación 91

Agradecimientos

Siempre imaginé estar escribiendo esta sección y, en este momento, no puedo imaginarme el texto completo. Quiero empezar agradeciendo a mis amigos de la facu, que siempre me acompañaron en guías de ejercicios, en exámenes, en discusiones sobre conceptos filosóficos relacionados a la física y matemática. En particular, quiero agradecer a Sulei, compañero de la facu y de la vida, quien me ha acompañado en momentos buenos y malos y más de los que podría recordar. También quería agradecer a Emi y Danilo por su apertura a las opiniones y a las diversas discusiones. Sin ellos tres no hubiese podido llegar hasta acá. Quiero agradecer a Luca, Andrés, Maia y Bruno que me han acompañado durante distintas y hermosas etapas de la carrera. A Lulú y a Pedro, que han aportado al grupo otros tantos lindos y graciosos momentos, así tanto como han enriquecido la dinámica interna. Un agradecimiento especial a Nico, por todas esas sesiones de estudio de Relatividad en el altillo, por las discusiones de física en la que no entendíamos nada y por su persistente amistad.
Agradezco a mis compañeros del Charité: Croniyos, Juanchi, Chebar, Mikel, Tomi, Rada, Tito, Ale, Boris y Soto, por tanta compañía y risas a lo largo de estos años. Ellos han sido, sin lugar a dudas, mi sostén emocional.
Agradezco a Neko y Octa por estar siempre presentes y mantener una fiel amistad desde nuestra adolescencia.
Agradezco a mi familia; a Lucas, Dani y mamá por haberme bancado tanto, desde mis momentos más difíciles hasta la alegría por cada buena nota que sacaba. También a mi primo Rodri por haberme prestado el oído al hablar de física en todas las reuniones posibles. También agradezco a la vida por haberme dado la eterna compañia de Luna, la labradora más fiel y más compañera que pude tener.
Agradezco a mis directores Guille y Pedro por haberme mostrado el hermoso camino de la investigación (colaborativa) y por haberme aceptado e invitado a las discusiones de grupo, así como también por haberme acompañado en este proceso sin desmerecer ninguna de mis preguntas. Agradezco también a Mati por haberme escuchado, aconsejado y por haberme motivado a terminar esta tesis.
El camino fue arduo pero valió la pena. Espero que la vida, del lado de la gente que aprecio, me siga enseñando a disfrutarla.
A la memoria de mi padre, quien ha alimentado y forjado mi curiosidad, sensibilidad e interés por la ciencia.

Capítulo 1

Introducción

Poco antes de que, en 1915, Albert Einstein formulara una teoría completa de Relatividad General, Vesto Slipher observó que la dinámica de las galaxias se caracterizaba por un *redshift* en el espectro de emisión electromagnética, aspecto que se entendía como un alejamiento de las mismas con respecto a la Tierra [1]. Una vez publicada la teoría de Einstein, se descubrió que las ecuaciones admitían soluciones de un universo dinámico. Disatisfecho con estos resultados, Einstein incluyó el parámetro Λ, llamado "Constante Cosmológica", para obtener una solución consistente con un modelo estático del universo que tenía en mente [2]. Poco después, de Sitter encontró una solución de vacío con constante cosmológica positiva denominada "universo de de Sitter" [3]. Las evidencias de Hubble, que afirmaban que el universo se estaba expandiendo y que se cumplía la inestabilidad clásica (frente a pequeñas perturbaciones del universo estático de Einstein) le hicieron abandonar el término de Λ.

La primera estimación de los constituyentes del universo se propuso afirmando que el mismo está lleno de materia no relativista y ultrarrelativista (radiación). Resulta que si el universo estuviera compuesto de los mismos, desaceleraría [4]. Ahora bien, la adición de la constante cosmológica positiva resulta en soluciones con expansión acelerada. En los 90's, Saul Perlmutter, Brian Schmidt, Adam Riess y sus grupos demostraron efectivamente que el universo se comporta de esta manera [5, 6]. Eventualmente, dicha expansión acelerada habrá diluido la materia y la radiación lo suficiente como para que domine el término de la constante cosmológica, asociado con la energía oscura [7]. La principal contribución a la densidad de energía estará dada por este componente (el único que no se diluye por efectos de la expansión del universo) y que actualmente constituye $\Omega_\Lambda \sim 70\,\%$ de la energía presente en el universo [8].

Estas razones revivieron el interés por el estudio de teorías de campos en el espacio de de Sitter. Inicialmente en 1935, Dirac había estudiado la ecuación de onda del electrón en dicho espacio [9], pero los problemas para definir una cota inferior en el operador de energía desestimaron el camino de perseguir resultados físicos significativos en la teoría. Luego, a partir de las investigaciones de Guth y Linde en los 80's [10], se propuso la teoría de inflación como un intento de resolver

distintos problemas conceptuales del modelo cosmológico del Big Bang: el horizonte cosmológico y el problema de planaridad. La evolución exponencial del universo que plantea el modelo de de Sitter resuelve los problemas mencionados.

En la actualidad, se han realizado numerosos avances en la construcción de teorías consistentes en el espacio de de Sitter (ver [11] y referencias en el mismo). Sin embargo, algunos problemas surgen en la formulación de las teorías de campos. Uno de ellos es la incapacidad de definir una noción de energía conservada [12], debido a la ausencia de un vector de Killing temporal global en dicho espacio-tiempo.

Por otro lado, en la década de los 70's, Fronsdal ya había estudiado la relación entre los campos cuánticos libres en el espacio de de Sitter de dimensión $d+1$, i.e. dS_{d+1}, y las representaciones unitarias e irreducibles de su grupo de simetrías: $SO(1,d+1)$. Esto resultó una continuación natural del paradigma introducido por Wigner en los 40's, cuando estudió los campos en espacio plano como representaciones irreducibles del grupo de Poincaré (ver [13, 14, 15, 16, 17, 18]).

Más allá de la cuantización exitosa de las teorías de campos, surgieron otros problemas debido a la presencia de gravedad y que siguen siendo objeto de investigación aún hoy. Uno de ellos es el problema de la interpretación de la masa [15]. Resulta que la noción que le damos a la masa en espacio plano resulta confusa en espacio curvo, particularmente en de Sitter. Por ejemplo, los estados que se propagan en el cono de luz, los que presentan invariancia conforme y las soluciones de masa cero son conceptos equivalentes en espacio plano pero no así en de Sitter [19, 20]. En este trabajo, veremos cómo el estudio de Fronsdal relaja este problema dándole un carácter paramétrico de las representaciones de grupo.

Además, la cuantización en el espacio de de Sitter presenta problemas bien conocidos de espacio curvo debido a la dependencia del tiempo. En particular, la definición de estado de vacío, y por ende de partícula, es ambigüa en de Sitter [21], donde vemos que la evolución de dicho espacio crea partículas. Este aspecto también será discutido en este trabajo.

La presente tesis de grado se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 1, revisitaremos las definiciones relevantes de la teoría de grupos y estudiaremos el grupo de simetrías de de Sitter (i.e. el grupo de Lorentz) y sus representaciones (lineales) unitarias e irreducibles. En particular, formalizaremos la acción de dichas representaciones en el contexto de espacios curvos realizando los generadores como operadores en espacios de funciones. En el Capítulo 2, presentaremos el espacio de de Sitter, así como las distintos sistemas de coordenadas que pueden describirlo: carta global, *Poincaré patch* y *static patch*. Posteriormente, en el Capítulo 3 revisitaremos el problema del concepto de masa en de Sitter y cuantizaremos los campos escalar y espinorial en las distintas cartas presentadas. En particular, estudiaremos el campo escalar en dS_{2+1} en las tres cartas y el

espinorial en dS_d sobre el *Poincaré patch*, que realiza simetrías de traslación espacial. Discutiremos la cuantización y la definición de estado de vacío en el espacio de de Sitter. En el Capítulo 5, mostraremos cómo el parámetro que usualmente denominamos masa caracteriza las representaciones irreducibles. Observaremos cómo se recupera el paradigma de Wigner en el cual las partículas están asociadas a representaciones irreducibles del grupo de Lorentz. Finalmente, en el Capítulo 6 incluiremos un resumen del trabajo, discusiones de los resultados y aspectos relevantes para estudiar a futuro. Adicionalmente, se incluyen algunos apéndices con detalles sobre nomenclatura y formalismo.

Capítulo 2

Teoría de grupos

La manera de construir la física en el espacio-tiempo es realizando sus simetrías (continuas y discretas). Dichas simetrías son transformaciones que toman puntos del espacio-tiempo, los transforman y resultan en otros puntos pertenecientes al mismo. Resulta que cuando consideramos estas transformaciones se vuelve natural predecir leyes físicas y, afirmamos que, aquellas que no respeten esta característica de "mover puntos en puntos" serán físicamente irrelevantes. A la par de este principio, gran parte de la física teórica actual se desarrolla sobre el estudio de campos cuánticos [22, 23]. En consecuencia, las leyes físicas, que sean predecidas por estas teorías, estarán altamente condicionadas por las simetrías.

Las simetrías del espacio-tiempo, en particular el de de Sitter, conforman un grupo (referido como "grupo de de Sitter"). En este trabajo, nos enfocaremos en presentar y estudiar las simetrías continuas de este espacio, que son descriptas por los grupos de Lie [15, 13, 24]. En particular, las simetrías del espacio de de Sitter dan lugar a grupos de Lie no compactos [25]. Un grupo de Lie se dice no compacto si el conjunto de parámetros utilizados para caracterizar los elementos de grupo son no compactos. Las simetrías discretas, aunque no menos importantes que las continuas, no tomarán una relevancia significativa en este trabajo. Algunas referencias donde se estudian son [26, 27].

En lo concreto, la manera física de realizar un grupo es a través de la teoría de las representaciones. Todo grupo de Lie tiene asociado, en su identidad, un álgebra de Lie ([28]) y las representaciones lineales de las mismas constituyen el marco natural para formular teorías físicas a nivel cuántico. En particular, el teorema de Wigner asegura que el espacio de Hilbert debe proveer una representación lineal unitaria del grupo de simetrías de un sistema [29]. Por otro lado, el teorema de Noether nos dice que la manifestación de simetrías de sistemas físicos explica la existencia de leyes de conservación, por ejemplo, en mecánica clásica [30]. En física cuántica, describimos el estado de un sistema utilizando "etiquetas" para cada una de las partículas que lo componen (spin, momentos, etc.). En resumen, la teoría de representaciones provee etiquetas naturales para los números cuánticos de las partículas del sistema [31].

Al momento de estudiar sistemas que presentan simetrías, resulta útil caracterizar los distintos estados del espacio de Hilbert con cantidades covariantes bajo las transformaciones. Dichas cantidades emergen del estudio de representaciones irreducibles [15, 25]. Como consideración adicional, nos interesa que las representaciones sean unitarias. De esta manera, cantidades relevantes como amplitudes de transición se vuelven consistentes con las simetrías del sistema [15, 32].

En este capítulo seguiremos la bibliografía [33, 34].

2.1 Preliminares de grupos y álgebras

Dado un grupo G, cada elemento de grupo $q \in G$ en la vecindad de la identidad puede ser alcanzado por el *mapa exponencial*

$$q(t) = e^{tX}$$

para algún $X \in T_eG = \mathfrak{g}$ (un elemento del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$). El subconjunto de elementos $q(t)$ para X fijo conforman un subgrupo abeliano monoparamétrico.

Los generadores del álgebra de Lie $\{T_a\}$ conforman una base del espacio tangente en la identidad T_eG. Cualquier $X \in \mathfrak{g}$ puede escribirse como

$$X = X^a T_a \quad a = 1, ..., n.$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ contiene una operación binaria denominada "corchete de Lie" $[\,,\,]$ que satisface bilinealidad, la identidad de Jacobi y $[X, X] = 0$. Estas propiedades concluyen en que la operación es antisimétrica $[X, Y] = -[Y, X]$.

La composición de dos elementos $q_1(t) = e^{tX}$ y $q_2(t) = e^{tY}$ de dos subgrupos monoparamétricos G_1 y G_2, respectivamente, da lugar a otro subgrupo abeliano G_3 dado por

$$q_1(t)q_2(t)q_1^{-1}(t)q_2^{-1}(t) = 1 + t^2[X, Y] + ... = 1 + t^2 Z + ... = e^{t^2 Z} \tag{2.1}$$

donde $Z = [X, Y]$. Entonces, podemos afirmar que

$$[T_a, T_b] = f_a{}^c{}_b T_c.$$

Las constantes de estructura del álgebra de Lie $f_a{}^c{}_b$ caracterizan la ley de composición del grupo a nivel local. Debido a la antisimetría del conmutador, tenemos que

$$f_a{}^c{}_b = -f_b{}^c{}_a.$$

Definimos la *acción adjunta* como la acción del álgebra de Lie sobre sí misma. Para $X \in \mathfrak{g}$, se define el *mapa adjunto* $ad_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ como

$$ad_X(Y) \doteq [X, Y] \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Esencialmente, esta acción da lugar a una representación lineal que actúa sobre $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} ad_X : \quad & \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \\ & Y \to [X, Y] \end{aligned}$$

es decir que $ad_X \in gl(\mathfrak{g})$[1]. La representación adjunta resulta ser un homomorfismo

$$\begin{aligned} ad : \quad & \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g}) \\ & X \to ad_X = [X, \cdot]. \end{aligned}$$

La acción adjunta ad_X asocia a cada elemento de la base T_a del álgebra de Lie una matriz de $gl(\mathfrak{g})$ dada por

$$ad_{T_a} \to T_a^{(adj)}$$

donde

$$(T_a^{(adj)})^m{}_n = f_a{}^m{}_n.$$

Por otro lado, notemos que

$$ad_{[X,Y]}Z = [[X, Y], Z]$$

y además

$$[ad_X, ad_Y]Z = ad_X(ad_Y Z) - ad_Y(ad_X Z) = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y].$$

Por la identidad de Jacobi, resulta

$$ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]. \tag{2.2}$$

Definimos la *acción adjunta* del grupo sobre el álgebra $\mathfrak{g}$ como

$$Ad_q X \doteq qXq^{-1}. \tag{2.3}$$

Escribiendo $q(t) = e^{tX}$, se encuentra que

$$Ad_q Y = Y + t\, ad_X Y + \frac{1}{2}t^2\, ad_X(ad_X Y) + ... = e^{ad_{tX}} Y,$$

es decir que Ad es la exponenciación de ad

$$Ad_{e^X} = e^{ad_X}.$$

Podemos definir una estructura que nos permite caracterizar el carácter compacto/no compacto de los grupos de Lie finito-dimensionales. La representación (matricial) adjunta induce un producto

[1] Álgebra asociada al grupo general lineal $GL(G)$.

interno en el álgebra de Lie (finita) $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ dado por[2]

$$\langle X, Y \rangle \doteq -Tr(ad_X ad_Y). \tag{2.4}$$

A esta estructura se la conoce como *forma de Killing-Cartan*. Si el álgebra de Lie es semi-simple, la forma es no degenerada (i.e. núcleo trivial) [35]. Por linealidad, escribiendo $X = X^a T_a$ tenemos

$$\langle X, Y \rangle = X^a Y^b \langle T_a, T_b \rangle.$$

Definimos la *métrica de Killing-Cartan* en la base $\{T_a\}$ como

$$\kappa_{ab} \doteq \langle T_a, T_b \rangle.$$

Podemos escribirla en términos de las constantes de estructura como

$$\kappa_{ab} = -Tr[T_a^{(adj)} T_b^{(adj)}] = -f_a{}^m{}_n f_b{}^n{}_m. \tag{2.5}$$

Para grupos semisimples, al ser diagonalizada, la métrica tiene componentes con signos + y - dependiendo si el generador es compacto o no compacto. Considerar álgebras semisimples permite definir la métrica inversa κ^{ab} como

$$\kappa^{ac}\kappa_{cb} = \delta^a_b.$$

Asimismo, definimos

$$f_{anb} \doteq \kappa_{nm} f_a{}^m{}_b$$

que resultan totalmente antisimétricas. Esto puede probarse con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}
\langle [T_a, T_b], T_c \rangle + \langle T_b, [T_a, T_c] \rangle &= -\{Tr(ad_{[T_a,T_b]} ad_{T_c}) + Tr(ad_{T_b} ad_{[T_a,T_c]}\} \\
\text{ecuación (2.2)} &= -\{Tr([ad_{T_a}, ad_{T_b}] ad_{T_c}) + Tr(ad_{T_b}[ad_{T_a}, ad_{T_c}]\} \\
\text{conmutador de } gl(\mathfrak{g}) &= -\{Tr(ad_{T_a} ad_{T_b} ad_{T_c} - ad_{T_b} ad_{T_a} ad_{T_c}) + Tr(ad_{T_b} ad_{T_a} ad_{T_c} - ad_{T_b} ad_{T_c} ad_{T_a})\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde usamos ciclicidad de la traza. Entonces, podemos afirmar que

$$0 = \langle [T_a, T_b], T_c \rangle + \langle T_b, [T_a, T_c] \rangle = f_a{}^m{}_b \langle T_m, T_c \rangle + f_a{}^m{}_c \langle T_b, T_m \rangle = f_a{}^m{}_b \kappa_{mc} + f_a{}^m{}_c \kappa_{bm}$$

$$f_{acb} + f_{abc} = 0$$

y por la antisimetría del conmutador

$$f_{acb} = -f_{bca}$$

[2] La forma $\langle\ ,\ \rangle$ es definida positiva para álgebras de Lie compactas.

obtenemos

$$f_{abc} = -f_{cba} = -f_{acb}. \tag{2.6}$$

La propiedad (2.6) implica que la representación adjunta es de traza nula

$$Tr(T_a^{(adj)}) = f_a{}^m{}_m = f_{amn}k^{mn} = 0.$$

Es posible probar que el producto interno definido en (2.4) es invariante ante la acción Ad

$$\langle Ad_q Y, Ad_q Z\rangle = \langle Y, Z\rangle.$$

Para $q = e^{tX}$ cerca de la identidad ($t \ll 1$), tenemos a primer orden en t

$$\begin{aligned}\langle e^{ad_{tX}}Y, e^{ad_{tX}}Z\rangle - \langle Y, Z\rangle &= t(\langle ad_X Y, Z\rangle + \langle Y, ad_X Z\rangle) + O(t^2)\\ &= -t(Tr(ad_{[X,Y]}ad_Z + Tr(ad_Y ad_{[X,Z]})) + O(t^2)\\ &= 0\end{aligned}$$

usando (2.2), conmutador de $gl(\mathfrak{g})$ y linealidad y ciclicidad de la traza.

2.2 Grupo de Lorentz

El grupo de simetrías del espacio de de Sitter dS_d es el grupo de Lorentz $O(1,d)$, que corresponde a transformaciones lineales Λ que dejan invariante la métrica de Minkowski η_{ab} en $\mathbb{R}^{1,d}$. En esta sección, denotaremos las coordenadas con índices latinos

$$a, b, c = 0, 1, 2, ..., d.$$

El intervalo de Minkowski es

$$ds^2 = dX^a dX^b \eta_{ab}, \tag{2.7}$$

donde $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, ..., 1)$ y X^a son las coordenadas de $\mathbb{R}^{1,d}$. Las componentes v^a de vectores transforman de acuerdo a las transformaciones de Lorentz Λ como

$$v^a \to v'^a \doteq \Lambda^a{}_b v^b.$$

Dichas transformaciones preservan el producto interno de los mismos, dado otro vector u, tenemos

$$v'^a u'^b \eta_{ab} = v^c u^d \eta_{cd}. \tag{2.8}$$

En otras palabras, preservan la métrica

$$\Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \eta_{ab} = \eta_{cd}. \tag{2.9}$$

Las componentes de la métrica inversa se denotan η^{ab} y satisfacen

$$\eta^{ab}\eta_{bc} = \delta^a_c$$

donde δ es el símbolo de Kronecker. La métrica y su inversa se usan para "bajar" y "subir" índices. Para el caso de vectores, definimos

$$v_a \doteq \eta_{ab} v^b.$$

Luego, bajo una transformación de Lorentz

$$v_a \to v'_a \doteq \Lambda_a{}^b v_b,$$

de modo que (2.8) puede ser reescrita como

$$\Lambda^{a'}{}_a \Lambda_{a'}{}^b = \delta^b_a. \tag{2.10}$$

La dimensión del grupo $SO(1,d)$ es igual a la cantidad de componentes independientes de las matrices antisimétricas (d+1)-dimensionales, es decir $\dim SO(1,d) = \frac{d(d+1)}{2}$. Escribiendo

$$\Lambda \doteq e^{\sigma}$$

a primer orden en σ, tenemos

$$\Lambda^a{}_b = (e^{\sigma})^a{}_b \approx \delta^a_b + \sigma^a{}_b. \tag{2.11}$$

Definimos $\sigma_{ab} \doteq \eta_{ac}\sigma^c{}_b$. Si reemplazamos (2.11) en (2.9), resulta en $\sigma_{ab} = -\sigma_{ba}$ (parámetros antisimétricos).

Denotaremos los elementos base del álgebra de Lie de $so(1,d)$ como T_{ab}, luego

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma^{ab} T_{ab}.$$

Los generadores T_{ab} satisfacen las relaciones de conmutación

$$[T_{ab}, T_{cd}] = \eta_{ad}T_{bc} + T_{ad}\eta_{bc} - T_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ac}T_{bd}. \tag{2.12}$$

2.3 Representaciones del grupo de Lorentz

Denotaremos una representación (de dimensión finita) de Lorentz como

$$D^{(s)}(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^{ab} T^{(s)}_{ab}\right).$$

Aquí $T^{(s)}_{ab}$ es una representación finito-dimensional del álgebra (2.12).

2.3.1 Representaciones finito-dimensionales (no unitarias)

Para representaciones finito-dimensionales, denotamos

$$T^{(s)}_{ab} = (T^{(s)}_{ab})^I{}_L \quad I, L = 1, ..., \dim(s).$$

El grupo de Lorentz actúa sobre el espacio de representación $\mathcal{V}_s$. Consideraremos dos tipos de representación: la vectorial y la espinorial.

Representación vectorial

Este caso corresponde a la acción del grupo $SO(1,d)$ sobre el espacio de vectores v^a. Definiendo la matriz

$$(M_{ab})^c{}_d \doteq \delta^c_a \eta_{bd} - \delta^c_b \eta_{ad},$$

encontramos que satisface (2.12). Definimos la representación vectorial como

$$T^{(Vect)}_{ab} \doteq (M_{ab})^c{}_d.$$

Explícitamente

$$\frac{1}{2}\sigma^{ab}(M_{ab})^c{}_d = \frac{1}{2}(\sigma^c{}_d - \sigma_d{}^c) = \sigma^c{}_d,$$

por lo que la representación vectorial del grupo es la fundamental

$$D^{(Vect)}(\Lambda) = \Lambda. \tag{2.13}$$

Representación espinorial

Dada un álgebra de Clifford ([36]) definida sobre $\mathbb{R}^{1,d}$ (equipado con la métrica de Minkowski η), existe una representación γ que actúa sobre espacios de espinores y satisface

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}\mathbb{I}_N \quad N = 2^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}. \tag{2.14}$$

Las matrices γ se denominan "matrices de Dirac" y sus entradas son

$$\gamma_a = (\gamma_a)^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{j}} \quad \mathfrak{i}, \mathfrak{j} = 1, ..., N.$$

Podemos bajar y subir los índices de las matrices γ con la métrica de Minkowski y su inversa

$$\gamma^a = \eta^{ab}\gamma_b.$$

Las matrices de Dirac son de traza nula. Para demostrarlo, consideremos (2.14) y una matriz γ_c arbitraria

$$2\eta_{ab}Tr(\gamma_c) = Tr(\{\gamma_a, \gamma_b\}\gamma_c) = Tr(\gamma_a\gamma_b\gamma_c + \gamma_b\gamma_a\gamma_c) = 2Tr(\gamma_b)\eta_{ca},$$

por (2.14), ciclicidad y linealidad de la traza. Si tomamos $a = b \neq c$, obtenemos

$$Tr(\gamma_a) = 0.$$

A partir de las matrices γ, podemos definir una representación del álgebra de Lorentz $so(1,d)$. Definimos

$$(\gamma_{ab})^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{j}} = \frac{1}{2}[\gamma_a, \gamma_b]^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{j}}. \tag{2.15}$$

La representación espinorial se define como

$$T^{(Spin)}_{ab} \doteq \frac{1}{2}(\gamma_{ab})^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{j}}. \tag{2.16}$$

Es posible ver que (2.16) satisface (2.12). Denotamos la representación de grupo como

$$D^{(Spin)}(\Lambda) \doteq S(\Lambda).$$

Explícitamente, sobre un espinor ψ, la transformación es

$$\psi \to \psi' = S(\Lambda)\psi$$

y escribiendo los índices tenemos

$$\psi'^{\mathfrak{i}} = S(\Lambda)^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{j}}\psi^{\mathfrak{j}} = (e^{\frac{1}{4}\sigma^{ab}\gamma_{ab}})^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{j}}\psi^{\mathfrak{j}}$$

Resulta fundamental conocer la ley de transformación de las matrices γ. A tal fin, una igualdad relevante es

$$[\gamma_{ab}, \gamma_c] = 2(\gamma_a\eta_{bc} - \gamma_b\eta_{ac}). \tag{2.17}$$

En consecuencia

$$S^{-1}(\Lambda)^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{l}}(\gamma_c)^{\mathfrak{l}}{}_{\mathfrak{k}}S(\Lambda)^{\mathfrak{k}}{}_{\mathfrak{j}} \approx (\gamma_c)^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{j}} - \frac{1}{4}\sigma^{ab}[\gamma_{ab}, \gamma_c]^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{j}} + O(\sigma^2).$$

Usando (2.17), obtenemos

$$S^{-1}(\Lambda)^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{l}}(\gamma_c)^{\mathfrak{l}}{}_{\mathfrak{k}}S(\Lambda)^{\mathfrak{k}}{}_{\mathfrak{j}} = \Lambda_c{}^d(\gamma_d)^{\mathfrak{i}}{}_{\mathfrak{j}}. \tag{2.18}$$

Esta ley de transformación se interpreta diciendo que las matrices de Dirac son tensores invariantes ante la acción del grupo de $Spin(1,d)$. A nivel infinitesimal, equivale a decir

$$(M_{ab})_c{}^d\gamma_d + \frac{1}{2}[\gamma_{ab}, \gamma_c] = 0. \tag{2.19}$$

Para construir invariantes de Lorentz a partir de espinores, resulta útil definir un cambio de base entre representaciones de (2.14). En el caso de dimensión $d+1$ par, el teorema de Chevalley asegura que la representación γ es única [36, 37]. Observando que $\tilde{\gamma} = -\gamma^\dagger$ también satisface (2.14), el

teorema nos permite afirmar que existe un *intertwiner* β tal que

$$\beta\gamma_a\beta^{-1} = -\gamma_a^\dagger, \tag{2.20}$$

es decir, las representaciones γ y $-\gamma^\dagger$ son equivalentes. Con la información de (2.20), podemos dar el siguiente resultado

$$\gamma_{ab}^\dagger\beta = \frac{1}{2}(\gamma_b^\dagger\gamma_a^\dagger\beta - \gamma_a^\dagger\gamma_b^\dagger\beta) = \frac{\beta}{2}(\gamma_b\gamma_a - \gamma_a\gamma_b) = -\beta\gamma_{ab}. \tag{2.21}$$

Como definición adicional, pediremos que $\beta = \beta^\dagger$.
A efectos de constuir invariantes de Lorentz, definimos el espinor adjunto $\bar{\psi}$ como

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\beta,$$

que dado un espinor que transforma como $\psi' = S(\Lambda)\psi$, el espinor adjunto transforma como

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger\beta = \psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger\beta = \psi^\dagger\left(\beta + \frac{1}{4}\sigma^{ab}\gamma_{ab}^\dagger\beta + O(\sigma^2)\right) = \psi^\dagger\beta\left(1 - \frac{1}{4}\sigma^{ab}\gamma_{ab} + O(\sigma^2)\right) = \bar{\psi}S(\Lambda)^{-1},$$

donde usamos el resultado de (2.21). Esto nos permite afirmar que $\bar{\psi}\psi$ transforma como un escalar de Lorentz. Si además, pedimos que $\beta = \beta^\dagger$, el escalar resulta real[3]

$$(\bar{\psi}\psi)^\dagger = (\psi^\dagger\beta\psi)^\dagger = \psi^\dagger\beta^\dagger\psi = \bar{\psi}\psi.$$

Asimismo, del resultado dado en (2.18), concluimos que $\bar{\psi}\gamma^a\psi$ transforma como un vector de Lorentz (donde en este caso $S^{-1}\gamma^a S = \Lambda^a{}_b\gamma^b$). De manera análoga, podemos construir tensores antisimétricos de rangos mayores como $\bar{\psi}\gamma^{ab}\psi$, etc.

Como se ha discutido anteriormente, las representaciones en una teoría de campos deben ser unitarias, es decir, deben realizar operadores unitarios. Luego, como el grupo de Lorentz es no compacto, las representaciones finito-dimensionales del álgebra son no unitarias. Las representaciones unitarias del grupo de Lorentz serán realizadas cuando consideremos que actúan en espacios funcionales, como explicaremos más abajo.

2.3.2 Representaciones infinito-dimensionales en $\mathbb{R}^{1,d}$

Las representaciones infinito-dimensionales del grupo de Lorentz actúan sobre campos $\Phi^I(X)$, definidos como funciones en el espacio-tiempo. Los campos serán, a su vez, tensores en representaciones finito-dimensionales. En efecto, en el contexto de representaciones infinito-dimensionales, las transformaciones afectan tanto las componentes como los puntos sobre el cual está evaluado el campo. Un tensor con índices (que denotaremos con un multi-índice I) transforma, ante la acción

[3]En este trabajo, la operación adjunta es definida incluyendo conjugación e inversión del orden, i.e. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

de Lorentz, como

$$\Phi'^I(X) \doteq D^{(s)}(\Lambda)^I{}_J \Phi^J(\Lambda^{-1}X) \tag{2.22}$$

y para funciones escalares $f(X)$

$$f'(X) \doteq f(\Lambda^{-1}X). \tag{2.23}$$

La transformación (finita) puede expresarse como la exponencial de un operador

$$F(\Lambda^{-1}X) \doteq e^{\frac{1}{2}\sigma^{ab}L_{ab}}F(X)$$

donde L_{ab} es un operador diferencial del álgebra de Lorentz definido como

$$L_{ab} \doteq -\left(X_a \frac{\partial}{\partial X^b} - X_b \frac{\partial}{\partial X^a}\right). \tag{2.24}$$

Los generadores (2.24) satisfacen (2.12) con un signo global cambiado y pueden ser entendidos como los vectores de Killing de (2.7)[4]. La razón de la definición con el signo global cambiado se debe a que la ley de composición de transformaciones orbitales invierte el orden de acción sobre el punto, como se define en (2.23)[5]. Componiendo ambas contribuciones, la transformación de un campo Φ^I resulta

$$\Phi'^I(X) = \mathcal{D}^{(s)}(\Lambda)^I{}_J \Phi^J(X),$$

donde $\mathcal{D}^{(s)}(\Lambda) = D^{(s)}(\Lambda)e^{\frac{1}{2}\sigma^{ab}L_{ab}}$. La transformación infinitesimal total se resume en una representación infinito-dimensional del álgebra que se separa en una parte "orbital" L_{ab} y representación finita de "spin" $T^{(s)}_{ab}$

$$J^{(s)}_{ab} = L_{ab} + T^{(s)}_{ab}. \tag{2.25}$$

Para más detalles, se pueden ver las notas [38].

2.4 UIRs de $SO(1,d)$

Una representación unitaria de $SO(1,d)$ requiere que el álgebra de Lie de los generadores $J^{(s)}_{ab}$ sea realizada con operadores anti-hermíticos en algún espacio de Hilbert equipado con un producto escalar definido positivo [24]

$$J^{(s)\dagger}_{ab} = -J^{(s)}_{ab}$$

[4]Sin contar las traslaciones P_μ, que no pertenecen al grupo de Lorentz.

[5]Veamos que esta definición es natural. Supongamos tres elementos del grupo q_1, q_2 y $q_3 = q_1 q_2$, entonces

$$h_3(x) = q_3 f(x) = q_1(q_2 f)(x) = q_1 h_2(x)$$

y por definición

$$q_1 h_2(x) = h_2(q_1^{-1}x) = f(q_2^{-1}q_1^{-1}x) = f((q_1q_2)^{-1}x) = f(q_3^{-1}x)$$

que por definición respeta la igualdad que ya estaba dada en la cadena

$$h_3(x) = q_3 f(x) = f(q_3^{-1}x).$$

de manera que

$$\mathcal{D}^{(s)}(\Lambda)\mathcal{D}^{(s)}(\Lambda)^\dagger = e^{\frac{1}{2}\sigma^{ab}J^{(s)}_{ab}} e^{\frac{1}{2}\sigma^{ab}J^{(s)\dagger}_{ab}} = e^{\frac{1}{2}\sigma^{ab}J^{(s)}_{ab}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^{ab}J^{(s)}_{ab}} = \mathbb{I}.$$

Una representación se dice irreducible cuando la matriz $\mathcal{D}^{(s)}(\Lambda)$ actúa sobre un espacio de representación $\mathcal{V}$ que no posee subespacios invariantes. Es decir, que no existe ningún $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ no trivial tal que para todo $x \in \mathcal{V}'$ valga que

$$\mathcal{D}^{(s)}(\Lambda)\,|x\rangle \in \mathcal{V}'.$$

Las representaciones unitarias e irreducibles (**UIRs**) de $SO(1,d)$ están etiquetadas por $(\Delta, \mathbf{s})$, donde Δ se llama dimensión de escala y $\mathbf{s}$, en general, un vector de *highest-weight* de $SO(d-1)$ (spin s en $SO(3)$) [39, 40, 41, 42, 13]. Los posibles valores de Δ, que se derivan de unitariedad, son $\Delta = \frac{d-1}{2} + i\nu$, donde $\nu \in \mathbb{R}$, asociado a la representación denominada *principal series* π_ν [18]. Otras representaciones, también unitarias, corresponden a valores reales de Δ y son denominadas *complementary series* o *discrete series representations* [15]. Para más detalles y aplicaciones, se puede visitar [24, 43, 44, 45].
Los números $(\Delta, \mathbf{s})$ se corresponden con los autovalores asociados a los Casimires de $SO(1,d)$. El Casimir es un objeto que conmuta con todos los generadores del álgebra y el lema de Schur establece que, para representaciones irreducibles, debe ser proporcional a la identidad. Un Casimir relevante para todos los grupos semisimples es el Casimir cuadrático construido con la métrica de Killing-Cartan [39]

$$\mathfrak{C} \doteq \kappa^{\alpha\beta} T_\alpha T_\beta. \tag{2.26}$$

Esta expresión será útil al estudiar, en la sección 5, la acción de este objeto sobre los espacios de funciones en de Sitter. Para ello, es necesario construir un operador acorde y se pueden tomar dos rutas: *formalismo de espacio ambiente* [19, 15, 42] o el *formalismo intrínseco/geométrico* [15, 45]. Nos enfocaremos en formular y utilizar el segundo que, en resumen, nos permite interpretar a los generadores del álgebra (2.25) como operadores diferenciales que actúan sobre espacios de funciones definidos en el espacio-tiempo de de Sitter. Como este planteo afirma, es necesario entender cómo el álgebra actúa en un espacio curvo. Veremos que esta pregunta está íntimamente relacionada con la noción de "transporte paralelo" en una variedad de spin (i.e. una variedad que admite fibrados espinoriales [46, 47]).

2.5 Conexión de spin

En esta sección revisitaremos conceptos de Relatividad General. En particular, las nociones de transporte paralelo y la conexión afín. La formulación de una teoría invariante frente a transformaciones de Lorentz locales posibilitará la descripción de los campos pertenecientes a representaciones espinoriales en el espacio-tiempo. En particular, las definiciones que daremos en esta sección serán de importancia en el estudio de espinores en la sec. 4.5 y de la representación espinorial en espacios curvos (sección 5). Mayoritariamente, seguiremos la bibliografía [48, 49, 50].

Dada una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ y el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ ($p \in \mathcal{M}$), denotamos la base local de vectores $\{E_\mu\}$. El teorema de Frobenius garantiza que podemos hallar un sistema de coordenadas x^μ donde $E_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. El espacio dual al espacio tangente se denota $T_p^*\mathcal{M}$ y es generado por una base de covectores $\{e^\mu\}$ que cumple la condición de dualidad $e^\mu(E_\nu) = \delta^\mu_\nu$. Asimismo, la base coordenada de covectores resulta $e^\mu = dx^\mu$.

El principio de equivalencia afirma que un sistema en caída libre en un campo gravitatorio es puntualmente indistinguible de un sistema de referencia inercial. Además, en cada región, podremos tomar una carta que sea localmente inercial y en la cual se anule la gravedad, resultando en una métrica η_{ab}. Sobre dicha carta, podemos apelar al denominado *formalismo de la tétrada*, que afirma que existe, en cada punto $p \in \mathcal{M}$, una base de *vielbeins* $\{\hat{e}_a\}$ que nos permite mapear la métrica curva a la métrica plana [48]. Esto se corresponde con una base $\{\hat{E}_a\}$ ortonormal

$$g(\hat{E}_a, \hat{E}_b) = \eta_{ab} \tag{2.27}$$

donde $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ es el tensor métrico definido sobre la variedad $\mathcal{M}$. Podemos expresar la nueva base en términos de la coordenada $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ por medio del cambio

$$\hat{E}_a = e^\mu_a \partial_\mu.$$

donde $e^\mu_a = e^\mu_a(x)$ es la matriz (local) de cambio de base. Análogamente, para los covectores escribimos

$$\hat{e}^a = e^a_\mu dx^\mu. \tag{2.28}$$

La condición de dualidad entre las bases de $T_p\mathcal{M}$ y $T_p^*\mathcal{M}$ implica que $e^\mu_a e^b_\mu = \delta^b_a$. Esto significa que e^μ_a es la inversa de e^a_μ, por lo que si expresamos las bases como $\partial_\mu = e^a_\mu \hat{e}_a$ y $dx^\mu = e^\mu_a \hat{e}^a$, llegamos a la otra condición de dualidad $e^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu$.

Podemos escribir un vector tangente $V \in T_p\mathcal{M}$ en términos de cualquiera de las bases definidas

$$V = V^a \hat{E}_a = V^\mu \partial_\mu$$

y las componentes de un vector se relacionan, entonces, como

$$V^a = e^a_\mu V^\mu. \tag{2.29}$$

De la misma manera, las componentes de 1-formas $\tilde{W}$ satisfacen

$$W_\mu = e^a_\mu W_a. \tag{2.30}$$

De ahora en adelante, los índices latinos corresponderán al espacio localmente inercial (referidos como "planos") y los índices griegos al espacio tangente de la variedad en un punto (referidos como "curvos").

La base de *vielbeins* $\{\hat{e}_a\}$ con la que manifestamos el principio de equivalencia no es única. Una segunda base ortonormal $\{\hat{e}'_a\}$ en el punto p difiere de la original por una transformación local de Lorentz $\Lambda = \Lambda(x)$

$$\hat{e}'_a = \Lambda_a{}^b \hat{e}_b,$$

estas transformaciones preservan el símbolo η_{ab}

$$g(\hat{e}'_a, \hat{e}'_b) = \Lambda_a{}^c(x)\Lambda_b{}^d(x) g(\hat{e}_c, \hat{e}_d) = g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = \eta_{ab}.$$

Luego $\{\hat{e}'_a\}$ y $\{\hat{e}_a\}$ resultan indistintas pues describen el mismo sistema.

Por otro lado, las transformaciones de Lorentz se realizan sobre cada punto del espacio-tiempo (son locales), lo que quiere decir que en la teoría de campos, que transformarán ante las mismas, incluiremos un campo compensador con el que será gaugeada la teoría. En resumen, la formulación de tétradas (i.e. bases ortonormales), donde gaugeamos las transformaciones de Lorentz locales (TLL), resulta fundamental para introducir fermiones y otras representaciones no triviales de Lorentz en espacio curvo.

Frente a una TLL, las componentes de los vectores transforman como

$$V'^a = \Lambda^a{}_b V^b.$$

Con estas consideraciones, los objetos e^a_μ que aparecen en (2.29) se suelen denominar *soldering forms* y permiten conectar, en cada punto $p \in \mathcal{M}$, objetos del espacio tangente con las representaciones tensoriales de Lorentz en ese mismo punto. Por ejemplo, con vectores es $V^a = e^a_\mu V^\mu$.

De forma general, tenemos dos fibrados: el tangente TM y el espinorial SM. Las secciones de los fibrados (i.e. los campos) transformarán de acuerdo a las TGC y TLL, respectivamente [51]. Nuestro objetivo estará centrado en conectar estas secciones, en todo punto, por medio del mapa de multiplicar por las *soldering forms* e^a_μ. Esencialmente, queremos que este mapa sea preservado durante el transporte paralelo por cualquiera de los dos fibrados para que no se vea modificada la naturaleza de los campos. En otras palabras, precisamos que el privilegio físico de tomar el principio de equivalencia se traduzca, de manera coherente, a todos los puntos del espacio-tiempo.

Para ello, en principio, afirmamos que tendremos tres tipos de derivadas covariantes: dos equivalentes al transporte paralelo de cada fibrado y una construida con ambos

$$\begin{aligned} &\text{Difeomorfismos (TGC)} \to D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu \\ &\text{Transf. Lorentz Locales (TLL)} \to \mathfrak{D}_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu \\ &\text{TGC+TLL} \to \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu + \omega_\mu, \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde Γ_μ es la *conexión afín* y ω_μ es la *conexión de spin*. Nuestro objetivo será, entonces, relacionar estas conexiones entre sí de manera que las *soldering forms* $e^a_\mu(x)$ sirvan como un mapa global entre

las secciones de los fibrados.

Denotaremos el transporte paralelo de un vector V a lo largo de otro vector U como $D_U V$. Los símbolos de conexión $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu}(x)$, asociados a la base $\{\partial_\mu\}$, son

$$D_{\partial_\mu}\partial_\nu \doteq \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma.$$

La conexión relevante es la de Levi Civita, donde

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\varepsilon}(g_{\mu\varepsilon,\nu} + g_{\nu\varepsilon,\mu} - g_{\mu\nu,\varepsilon}),$$

que se conocen como los símbolos de Christoffel. La derivada covariante $D_\mu \doteq D_{\partial_\mu}$ de vectores V^σ resulta

$$D_\mu V^\sigma \doteq \partial_\mu V^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}V^\nu$$

y es covariante frente a Difeomorfismos

$$D'_\mu V'^\sigma = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}D_\nu V^\rho. \tag{2.32}$$

En definitiva, la característica local de los Difeomorfismos hace que la conexión de Levi-Civita Γ_μ juegue el rol de "campo de gauge" frente a dichas transformaciones.

Como mencionamos anteriormente, el principio de equivalencia libre demanda la invarianza frente a la elección de bases locales conectadas por las TLL. De la misma manera, definimos un transporte $\mathfrak{D}_U V$ de vectores sobre el fibrado de Lorentz SM. En la base $\{\hat{E}_a\}$, los símbolos de conexión resultan

$$\mathfrak{D}_{\hat{E}_a}\hat{E}_b \doteq \omega_a{}^c{}_b\hat{E}_c.$$

Ante una transformación local de Lorentz $\Lambda = \Lambda(x)$, los símbolos de conexión $\omega_a{}^c{}_b$ transforman de la manera usual

$$\begin{aligned}\omega'{}_a{}^c{}_b &= \hat{E}'_a(\Lambda_b{}^e)\Lambda^c{}_e + \Lambda_a{}^d\Lambda_b{}^e\Lambda^c{}_f\omega_d{}^f{}_e \\ &= \Lambda_a{}^d\left(\hat{E}_d(\Lambda_b{}^e)\Lambda^c{}_e + \Lambda_b{}^e\Lambda^c{}_f\omega_d{}^f{}_e\right),\end{aligned} \tag{2.33}$$

donde $\hat{e}_d(f) = e^\mu_d\partial_\mu f$. Este resultado muestra que el primer índice de la conexión transforma como una 1-forma, por lo que podemos valernos de (2.30) para escribir

$$\omega_\mu{}^c{}_b = e^a_\mu\omega_a{}^c{}_b. \tag{2.34}$$

Usaremos esta característica por conveniencia para definir una derivada $\mathfrak{D}_\mu \doteq e^a_\mu\mathfrak{D}_{\hat{e}_a}$ covariante frente a TLL

$$\mathfrak{D}_\mu V^a \doteq \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b, \tag{2.35}$$

donde ahora ω_μ juega el rol de "campo de gauge" frente a TLL. De manera análoga a (2.32), vale

$$\mathfrak{D}'_a V'^c = \Lambda_a{}^b \Lambda^c{}_d \mathfrak{D}_b V^d.$$

La operación de "subir" y "bajar" índices planos se realiza con la métrica de Minkowski η_{ab}, dando lugar a

$$e_{a\mu} = \eta_{ab} e^b_\mu,$$

$$\omega_\mu{}^{ab} = \eta^{bc} \omega_\mu{}^a{}_c,$$

entre otras. Imponiendo la condición de "metricidad" $\mathfrak{D}\eta = 0$

$$\mathfrak{D}_\mu \eta_{ab} = \cancel{\partial_\mu \eta_{ab}} - \omega_\mu{}^e{}_a \eta_{eb} - \omega_\mu{}^e{}_b \eta_{ae} = 0,$$

resulta

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}. \tag{2.36}$$

Para relacionar las conexiones Γ_μ y ω_μ, pedimos que el transporte paralelo de un vector V^μ, por medio de la conexión D_μ, resulte equivalente al del vector de Lorentz V^a paralelo-transportado por medio de la conexión $\mathfrak{D}_\mu$

$$\mathfrak{D}_\mu V^a = e^a_\lambda D_\mu V^\lambda. \tag{2.37}$$

Esto equivale a pedir la equivalencia entre los objetos $\mathfrak{D}_U V$ y $D_U V$. Expresando las derivadas de (2.37)

$$\mathfrak{D}_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b = \partial_\mu(e^a_\lambda) V^\lambda + e^a_\lambda \partial_\mu V^\lambda + \omega_\mu{}^a{}_b e^b_\lambda V^\lambda$$

$$e^a_\lambda D_\mu V^\lambda = e^a_\lambda \partial_\mu V^\lambda + e^a_\nu \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

e igualando ambos resultados, obtenemos una relación entre Γ_μ y ω_μ

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = e^\nu_a \partial_\mu e^a_\lambda + e^\nu_a e^b_\lambda \omega_\mu{}^a{}_b,$$

equivalente a

$$\omega_\mu{}^a{}_b = e^a_\nu e^\lambda_b \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - e^\lambda_b \partial_\mu e^a_\lambda. \tag{2.38}$$

Al pedir la condición fundamental (2.37), los campos de gauge ω_μ y Γ_μ resultan ser dependientes. En consecuencia, la posibilidad de realizar transformaciones de Lorentz locales y de Difeomorfismos motiva a definir la derivada ∇_μ de (2.31) como una que resulte covariante ante las dos transformaciones. Lógicamente, pedimos recuperar la expresión habitual ante representaciones "puras" de TGC y TLL

$$\nabla_\mu X^\nu = D_\mu X^\nu \quad \nabla_\mu X^a = \mathfrak{D}_\mu X^a.$$

Esencialmente, la función de esta nueva derivada es tomar, a la vez, los índices "curvos" y "planos"

y derivarlos covariantemente.

Ahora estamos habilitados a recuperar el postulado de la tétrada en todo punto. Si escribimos

$$0 = \mathfrak{D}_\mu \eta_{ab} = \nabla_\mu (g_{\rho\sigma} e^\rho_a e^\sigma_b) = \cancel{D_\mu (g_{\rho\sigma})} e^\rho_a e^\sigma_b + 2 g_{\rho\sigma} e^\rho_a \nabla_\mu e^\sigma_b,$$

recuperamos compatibilidad con la métrica sólo si

$$\nabla_\mu e^\sigma_b = 0. \tag{2.39}$$

Podemos verificar que esto es equivalente a la imposición (2.37) que llevó a (2.38). Derivando sobre cada índice

$$\nabla_\mu e^\sigma_b = \partial_\mu e^\sigma_b + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} e^\nu_b - \omega_\mu{}^a{}_b e^\sigma_a = 0$$

usando la relación (2.38).

2.5.1 Ecuaciones de estructura de Cartan

En el formalismo de Einstein-Cartan, los objetos $\hat{e}^a$ y $\omega^a{}_b$ definen los tensores de torsión y curvatura de la variedad. La expresión que toman dichos tensores en este formalismo simplifica el estudio de representaciones de Lorentz en espacios curvos. En particular, serán útiles para resolver espinores en de Sitter en la sección 4.5. En principio, es importante partir con que las *soldering forms* e^a_μ y la conexión de spin $\omega_\mu{}^a{}_b$ son componentes de 1-formas: $\hat{e}^a = \hat{e}^a_\mu dx^\mu$ y $\omega^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b dx^\mu$. Los tensores de curvatura y torsión saldrán de aplicarles una derivada exterior covariante $(d + \omega\wedge)\cdot$ a estos objetos. En consecuencia, la torsión y la curvatura constituirán 2-formas en el espacio-tiempo.

Por un lado, podemos escribir a la torsión como la 2-forma

$$T^a \doteq d\hat{e}^a + \omega^a{}_b \wedge \hat{e}^b. \tag{2.40}$$

Es usual considerar conexiones de torsión nula $T^a = 0$. Esta condición nos permite encontrar las componentes de la conexión de spin a partir de conocer la base ortonormal de covectores.

Por otro lado, podemos escribir a la curvatura como otra 2-forma

$$R^a{}_b(\omega) \doteq d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b, \tag{2.41}$$

que en componentes resulta

$$R^a{}_{b\mu\nu}(\omega) \doteq (d\omega^a{}_b)_{\mu\nu} + (\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b)_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_b. \tag{2.42}$$

Notemos que $R^a{}_{b\mu\nu}(\omega)$ tiene una expresión similar a la del tensor de curvatura ($\partial\Gamma+\Gamma^2$). Retomando la definición del tensor de curvatura para D_μ en base coordenada tenemos

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) = R(dx^\rho, \partial_\sigma, \partial_\mu, \partial_\nu) = \langle dx^\rho, [D_{\partial_\mu}, D_{\partial_\nu}]\partial_\sigma + D_{[\partial_\mu,\partial_\nu]}\partial_\sigma\rangle$$

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\varepsilon}\Gamma^\varepsilon_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\varepsilon}\Gamma^\varepsilon_{\mu\sigma}.$$

Si saturamos las primeras dos ranuras con *vielbeins* $R(\hat{e}^a, \hat{e}_b, \partial_\mu, \partial_\nu)$, llegamos a la expresión (2.42). En consecuencia, usando las *soldering forms*, podemos afirmar

$$R^a{}_{b\mu\nu}(\omega) = e^a_\rho e_{b\sigma} R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma).$$

Así como las conexiones están relacionadas por (2.38), los tensores de curvatura también deben ser dependientes entre sí.

2.5.2 Representaciones de spin arbitrario

El formalismo de la conexión de spin nos permite crear un puente entre objetos del espacio-tiempo (índices curvos) y tensores de Lorentz (índices planos). Hasta ahora, hicimos uso de las *soldering forms* para conectar representaciones vectoriales de Lorentz, es decir vectores V^a y covectores W_a con vectores V^μ y 1-formas W_μ de la variedad (respectivamente). Es evidente que esto se generaliza para representaciones tensoriales arbitrarias $W_{ab\ldots}$ del grupo $SO(1,d)$ y tensores $W_{\mu\nu\ldots}$ de la variedad. Por ejemplo, una representación de spin 2 de Lorentz A^{ab} se podrá conectar con un tensor dos veces contravariante $A^{\mu\nu}$ usando las *soldering forms*

$$A^{ab} = e^a_\mu e^b_\nu A^{\mu\nu}. \tag{2.43}$$

La derivada covariante sobre $\mathfrak{T}$, un tensor de Lorentz que define el espacio donde actúa una representación arbitraria $\mathcal{D}^{(s)}(\Lambda)$, será

$$\mathfrak{D}_\mu\mathfrak{T} \doteq \partial_\mu\mathfrak{T} + \omega_\mu\mathfrak{T}, \tag{2.44}$$

donde ω_μ actúa sobre $\mathfrak{T}$ como

$$\omega_\mu\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}T^{(s)}_{ab}\mathfrak{T}. \tag{2.45}$$

En particular, el sistema localmente inercial permite introducir espinores de Dirac ψ en el contexto de espacios curvos. Siguiendo (2.45), definimos

$$\mathfrak{D}_\mu\psi \doteq \partial_\mu\psi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\psi.$$

2.5.3 Resultados relevantes y más definiciones

Presentamos algunos resultados que serán relevantes para este trabajo. En principio, resulta de interés conocer la derivada covariante sobre el espinor adjunto $\bar{\psi}$. Como $\bar{\psi}\psi$ es un escalar de

Lorentz, de $\nabla_\mu(\bar{\psi}\psi) = \partial_\mu(\bar{\psi}\psi)$ resulta

$$\nabla_\mu \bar{\psi} = \mathfrak{D}_\mu \bar{\psi} = \bar{\psi}\left(\overleftarrow{\partial_\mu} - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\right).$$

En el contexto de espacios curvos, definimos las matrices de Dirac "curvas" γ^μ a partir de la relación

$$\gamma_\mu(x) = e^a_\mu(x)\gamma_a,$$

de donde, usando (2.14), resulta

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}.$$

Veamos que las nuevas matrices curvas se transportan paralelamente con la conexión de spin. Para eso, como $\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$ transforma como un escalar ante transformaciones de Lorentz y vector frente a Difeomorfismos, tenemos que $\nabla_\mu(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi) = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi) + \Gamma^\nu_{\mu\sigma}(\bar{\psi}\gamma^\sigma\psi)$. Luego

$$\nabla_\mu\gamma_\nu = \partial_\mu\gamma_\nu + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}[\gamma_{ab}, \gamma_\nu] - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\gamma_\sigma.$$

Usando (2.17), tenemos

$$[\gamma_{ab}, \gamma_\nu] = e^c_\nu[\gamma_{ab}, \gamma_c] = 2e^c_\nu(2\gamma_{[a}\eta_{b]c}) = 4e^c_\nu\gamma_{[a}\eta_{b]c}$$

y que la conexión de spin es antisimétrica en los índices planos (2.36), por lo que contrae directamente con la parte antisimétrica de este objeto, es decir

$$\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{[a}\eta_{b]c} = \omega_\mu{}^{ab}\gamma_a\eta_{bc},$$

entonces

$$\nabla_\mu\gamma_\nu = \partial_\mu\gamma_\nu + \omega_\mu{}^{ab}e^c_\nu\gamma_a\eta_{bc} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\gamma_\sigma.$$

Las matrices de Dirac con índice plano no dependen del espacio-tiempo, entonces

$$\nabla_\mu\gamma_\nu = (\partial_\mu e^a_\nu + \omega_\mu{}^{ab}e_{b\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}e^a_\sigma)\gamma_a.$$

Aplicando el postulado de la tétrada (2.39) al paréntesis de esta expresión, resulta

$$\nabla_\mu\gamma_\nu = 0. \tag{2.46}$$

Además, resulta útil calcular el conmutador de las derivadas covariantes sobre una representación arbitraria de Lorentz

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\mathfrak{T} = \frac{1}{2}R^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega)d^{(s)}_{ab}\mathfrak{T}. \tag{2.47}$$

El cálculo explícito se encuentra en Ap. A.2.

2.6 Realizaciones del operador $J_{ab}^{(s)}$ y la derivada de Lie espinorial

Los problemas de la física en la teoría de campos suelen partir de la acción S, que es una funcional de las configuraciones de los campos. La imposición $\delta S = 0$, junto con las condiciones de contorno, nos proporciona la evolución real de un sistema físico. Los campos, que resuelven esa evolución, son soluciones de una ecuación de movimiento realizada con operadores diferenciales de segundo orden. Por otro lado, a partir de los resultados de Wigner, esperamos que los campos, que describen a las evoluciones de partículas en el universo, estén relacionados con representaciones del grupo de simetrías de dicho espacio.

Como mencionamos anteriormente en 2.4, el operador Casimir caracteriza las representaciones irreducibles del grupo de simetrías del espacio (vía lema de Schur). A continuación, veremos cómo relacionar el Casimir con operadores diferenciales sobre campos. Para abordar este problema, tomaremos, como motivación, las referencias [52, 53, 54].

Queremos definir un operador que represente el álgebra y actúe sobre tensores, preservando su carácter. Dicho operador es la derivada de Lie $\mathcal{L}_V$, donde V es un campo vectorial que, eventualmente, asumiremos que es un vector de Killing del espacio-tiempo. La derivada de Lie es una representación de los campos que actúa sobre tensores, es decir que satisface

$$[\mathcal{L}_{V_1}, \mathcal{L}_{V_2}] = \mathcal{L}_{[V_1,V_2]} \tag{2.48}$$

donde V_1 y V_2 son dos campos vectoriales arbitrarios. La derivada de Lie sobre funciones $f(x)$ es

$$\mathcal{L}_V f(x) \doteq V(f) = V^\mu \partial_\mu f(x). \tag{2.49}$$

Sobre vectores Y, resulta

$$\mathcal{L}_V Y^\mu \doteq V^\sigma \partial_\sigma Y^\mu - Y^\sigma \partial_\sigma V^\mu.$$

A partir de la dualidad de espacios $T_p\mathcal{M}$ y $T_p^*\mathcal{M}$ y la definición sobre escalares, la derivada de Lie se puede extender sobre 1-formas $\tilde{W}$, que resulta

$$\mathcal{L}_V W_\mu \doteq V^\sigma \partial_\sigma W_\mu + W_\sigma \partial_\mu V^\sigma.$$

Si tomamos la derivada de Lie de la métrica respecto de V tenemos

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} \doteq V^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} + g_{\sigma\nu}\partial_\mu V^\sigma + g_{\mu\sigma}\partial_\nu V^\sigma.$$

Trabajando con conexión afín $\nabla g \doteq Dg = 0$ sin torsión, podemos reemplazar ∂_μ por ∇_μ al tomar derivadas de Lie

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = V^\sigma \cancel{\nabla_\sigma g_{\mu\nu}} + \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu = 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)}. \tag{2.50}$$

Los campos vectoriales denominados vectores de Killing k son aquellos que dejan invariante la métrica

$$\mathcal{L}_k g = 0. \tag{2.51}$$

De manera equivalente, de (2.50) tenemos que los vectores de Killing satisfacen

$$\nabla_{(\mu} k_{\nu)} = 0. \tag{2.52}$$

A modo de completitud, si consideramos $\mathbb{R}^{1,d}$ podemos verificar que

$$k^a = \sigma^a{}_b X^b \quad a, b = 0, ..., d$$

son las componentes de un vector de Killing de (2.7) y $\sigma_{ab} = -\sigma_{ba}$. Esto permite conectar la derivada de Lie de una función escalar $f(X)$ con la acción orbital del grupo de Lorentz

$$\mathcal{L}_k f(X) = k^b \partial_b f(X) = \sigma^b{}_a X^a \partial_b f(X) = \sigma^{ba} X_{[a} \partial_{b]} f(X) = -\frac{1}{2} \sigma^{ab} L_{ab} f(X) \tag{2.53}$$

es decir

$$\delta f = -\mathcal{L}_k f.$$

Sin embargo, la noción de derivada de Lie sólo fue definida para tensores y escalares frente a TGC. En particular, nos interesa extender la noción de derivada de Lie de manera correspondiente con representaciones tensoriales de Lorentz, que son indiferentes frente a una derivada de Lie usual. Si queremos usar la derivada de Lie, podemos en principio aplicarla en (2.27), pero entran en conflicto las definiciones. Observemos que

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_k(g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu) = \mathcal{L}_k \eta_{ab} \\ \cancel{\mathcal{L}_k(g_{\mu\nu})} e_a^\mu e_b^\nu + 2 g_{\mu\nu} \mathcal{L}_k(e_a^\mu) e_b^\nu = k^\mu \cancel{\partial_\mu(\eta_{ab})} \\ \Rightarrow \mathcal{L}_k e_a^\mu = 0, \end{gathered}$$

pero si calculamos explícitamente

$$\mathcal{L}_k e_a^\mu = k^\sigma \partial_\sigma e_a^\mu - e_a^\sigma \partial_\sigma k^\mu \neq 0.$$

Este problema se resuelve si definimos una derivada que contenga la versión covariante frente a TLL. En principio, podríamos pensar que ∇_k, cuando garantiza (2.39), hace el truco que $\mathcal{L}_k$ no. Sin embargo, precisamos un operador que mapee soluciones de las ecuaciones de movimiento en otras soluciones y ∇_k no conmutará con las ecuaciones del campo espinorial (i.e. el operador de Dirac $\gamma^\mu \nabla_\mu$).

2.6.1 Derivada de Lie-Lorentz

Para tratar con representaciones de spin arbitrario, es necesario definir una derivada de Lie que respete la covariancia ante TLL. Tal objeto es la *derivada de Lie-Lorentz* o *derivada de Lie*

espinorial [55]. Definimos la *derivada de Lie-Lorentz*, respecto de un vector de Killing k, de un tensor arbitrario (n,m) del fibrado tangente, denotado $\mathfrak{H}_{\mu_1,\ldots,\mu_m}{}^{\nu_1,\ldots,\nu_n}(x)$, y que, a su vez, transforma frente a una representación arbitraria $\mathcal{D}^{(s)}(\Lambda)$ de Lorentz como

$$\begin{aligned}\pounds_k \mathfrak{H}_{\mu_1\ldots\mu_m}{}^{\nu_1\ldots\nu_n} = \\ k^\rho \nabla_\rho \mathfrak{H}_{\mu_1\ldots\mu_m}{}^{\nu_1\ldots\nu_n} - \nabla_\rho(k^{v_1})\mathfrak{H}_{\mu_1\ldots\mu_m}{}^{\rho\nu_2\ldots\nu_n} - \{\text{contravariantes}\} \\ + \nabla_{\mu_1}(k^\rho)\mathfrak{H}_{\rho\mu_2\ldots\mu_m}{}^{\nu_1\ldots\nu_n} + \{\text{covariantes}\} + \frac{1}{2}\nabla_{[a}k_{b]}\left(T^{(s)ab}\,\mathfrak{H}_{\mu_1\ldots\mu_m}{}^{\nu_1\ldots\nu_n}\right).\end{aligned} \tag{2.54}$$

Esta definición satisface linealidad y regla de Leibniz. Al derivar escalares de Lorentz, las distintas nociones de derivada de Lie resultan equivalentes. Dado un vector $V^\mu(x)$, su carácter escalar de Lorentz hace que, sobre el mismo, actúe la representación trivial ($s=0$)

$$\pounds_k V^\mu = k^\rho \nabla_\rho V^\mu - V^\rho \nabla_\rho k^\mu = \mathcal{L}_k V^\mu.$$

Una propiedad que precisamos de esta derivada es que constituya una representación como en (2.48). Es sabido que satisface [55]

$$[\pounds_{k_1}, \pounds_{k_2}] = \pounds_{[k_1,k_2]} \tag{2.55}$$

si al menos uno de los dos es un vector de Killing conforme (Ap. D, para la demostración). Podemos decir, entonces, que la derivada de Lie-Lorentz respecto a un vector de Killing conforme constituye una representación del álgebra de Lie de isometrías conformes del espacio-tiempo. Este resultado es relevante para contextos de supergravedad [56, 51], aunque, para este trabajo, consideraremos el subconjunto que satisface (2.51).

A partir de ahora, trabajaremos exclusivamente con vectores de Killing k (i.e. (2.51)). Tomando (2.54), podemos definir la derivada de Lie-Lorentz sobre un escalar ante TGC y tensor arbitrario de Lorentz, denotado previamente $\mathfrak{T}(x)$, como

$$\pounds_k \mathfrak{T} = k^\mu \nabla_\mu \mathfrak{T} + \frac{1}{2}\nabla_{[a}k_{b]}(T^{(s)ab})\mathfrak{T}. \tag{2.56}$$

En particular, resulta fundamental definir la derivada de Lie sobre un espinor $\psi(x)$

$$\pounds_k \psi = k^\mu \nabla_\mu \psi + \frac{1}{4}\nabla_{[a}k_{b]}\gamma^{ab}\psi, \tag{2.57}$$

que coincide con la expresión dada por A. Lichnerowicz [57]. Como aspecto interesante, si tomamos $\mathbb{R}^{1,d}$, donde $\psi = \psi(X)$, y k vector de Killing de (2.7), recuperamos la acción espinorial estándar $J_{ab}^{(Spin)}$

$$\pounds_k \psi(X) = k^a\partial_a\psi + \frac{1}{8}(\partial_a(\sigma_b{}^c X_c) - \partial_b(\sigma_a{}^c X_c))\gamma^{ab}\psi = k^a\partial_a\psi + \frac{1}{4}\sigma^{ba}\gamma_{ab}\psi,$$

donde vemos que, si usamos (2.53) y (2.15), obtenemos

$$\pounds_k\psi(X) = -\frac{1}{2}\sigma^{ab}(L_{ab} + \frac{1}{2}\gamma_{ab})\psi = -\frac{1}{2}\sigma^{ab}J_{ab}^{(Spin)}\psi$$

es decir

$$\delta\psi = -\pounds_k\psi.$$

De manera general, esperamos que las ecuaciones formuladas en el espacio-tiempo sean invariantes respecto a las isometrías. Por ejemplo, si usamos la derivada de Lie respecto de un vector de Killing, las soluciones a las ecuaciones de Maxwell son mapeadas en otras soluciones. Esto sucede porque la derivada de Lie conmuta con los operadores que definen las ecuaciones [58]. De la misma manera, necesitamos un objeto, como (2.57), que conmute con los operadores involucrados en la ecuación de movimiento del espinor. De hecho, para espacios homogéneos como de Sitter, la característica más importante de (2.57) es que conmuta con el operador de Dirac $\not{\nabla} \doteq \gamma^\mu\nabla_\mu$

$$\begin{aligned}
[\not{\nabla}, \pounds_k]\psi &= \gamma^\mu\nabla_\mu(k^\rho)\nabla_\rho\psi + \frac{1}{4}k^\rho\cancel{(R_{ab\mu\rho} + R_{ba\mu\rho})}\gamma^\mu\gamma^{ab}\psi + \frac{1}{4}\nabla_{[a}k_{b]}[\gamma^\mu, \gamma^{ab}]\psi \\
&= \gamma^\mu\nabla_\mu(k_\rho)\nabla^\rho\psi - \gamma^\mu\nabla_{[\mu}k_{\rho]}\nabla^\rho\psi \\
&= \gamma^\mu\nabla_{(\mu}k_{\rho)}\nabla^\rho\psi = 0,
\end{aligned}$$

donde usamos una propiedad de vectores de Killing [50]

$$\nabla_\mu\nabla_\nu k^\rho = R^\rho{}_{\nu\mu\epsilon}k^\epsilon \tag{2.58}$$

en la primera igualdad, (2.17) en la segunda y (2.51) en la última.

Por otro lado, calculando la derivada de Lie-Lorentz sobre los *vielbeins*, debemos tener en cuenta su carácter doble: son vectores de Lorentz y 1-formas en el espacio-tiempo, por lo que

$$\pounds_k e_\mu^a = k^\lambda\cancel{\nabla_\lambda e_\mu^a} + e_\lambda^a\nabla_\mu k^\lambda + \frac{1}{2}\nabla_{[c}k_{d]}(M^{cd})^a{}_b e_\mu^b,$$

donde el primer término se anula por el postulado de la tétrada (2.39). Además,

$$\begin{aligned}
\pounds_k e_\mu^a &= e_\lambda^a\nabla_\mu k^\lambda + \frac{1}{2}\nabla_{[c}k_{d]}(M^{cd})^a{}_b e_\mu^b \\
&= e_\lambda^a g^{\lambda\sigma}\nabla_\mu k_\sigma + \frac{1}{2}e_c^\rho e_d^\sigma\nabla_{[\rho}k_{\sigma]}(\eta^{ca}e_\mu^d - e_\mu^c\eta^{da}) \\
&= (\nabla_\mu k_\sigma - \nabla_{[\mu}k_{\sigma]})e^{\sigma a} \\
&= \nabla_{(\mu}k_{\sigma)}e^{\sigma a} = 0.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Este resultado nos asegura que se cumple la propiedad deseada

$$\pounds_k V^a = e_\mu^a\mathcal{L}_k V^\mu$$

para k vector de Killing. Además de los *vielbeins*, las matrices de Dirac son Lie-Lorentz dragueadas a lo largo de isometrías

$$\pounds_k \gamma_a = k^\mu \nabla_\mu \gamma_a + \frac{1}{2}\nabla^{[c}k^{d]}T^{(s)}_{cd}\gamma_a = 0$$

por los resultados en (2.19) y (2.46). Esto recupera, concretamente, el carácter invariante de γ en el grupo.

2.7 Operador Casimir

Siguiendo el razonamiento de [52], el álgebra de Lorentz puede ser realizada sobre campos en términos de la derivada de Lie-Lorentz a través de (2.55). Lo natural es, entonces, redefinir el Casimir cuadrático (2.26) como derivadas de Lie-Lorentz en la dirección de los vectores de Killing

$$\mathfrak{C} = \kappa^{\alpha\beta}\pounds_{k_\alpha}\pounds_{k_\beta}. \tag{2.60}$$

Para campos escalares $\phi(x)$, la acción de este Casimir es

$$\mathfrak{C}^{(0)}\phi = \kappa^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta \phi, \tag{2.61}$$

donde $k_\alpha = k^\mu_\alpha \partial_\mu$.

Para espacios maximalmente simétricos, los vectores de Killing expanden completamente dicho espacio [59]

$$g^{\mu\nu} = \kappa^{\alpha\beta}k^\mu_\alpha k^\nu_\beta. \tag{2.62}$$

2.7.1 Operador Casimir en $SO(1,3)$

A modo de ejemplo, calcularemos el Casimir de $so(1,3)$. Primero, debemos computar la métrica de Killing-Cartan[6]. Tomando un espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, una colección de coordenadas X^0, X^1, X^2, X^3 nos permite escribir los vectores de Killing (2.24) como

$$L_{ab} = X_a\partial_{X^b} - X_b\partial_{X^a} \quad a,b = 0,1,2,3.$$

En esta dimensión particular, podemos reescribirlos como

$$J_i \doteq \epsilon_{ijk}L_{jk} \quad K_i \doteq L_{i0} \quad i,j,k = 1,2,3. \tag{2.63}$$

Los vectores J_i son las rotaciones de $SO(3)$ y K_i los boosts. Las relaciones de conmutación se resumen en

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, K_j] &= \epsilon_{ijk}K_k \\ [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk}J_k.\end{aligned} \tag{2.64}$$

[6]En general, el cálculo de $\kappa_{\alpha\beta}$ para cualquier dimensión se sigue de la misma forma.

Etiquetando los 6 vectores $\{J_1, J_2, J_3, K_1, K_2, K_3\}$ como $\{k_1, ..., k_6\}$ y de acuerdo a (2.5), obtenemos que las componentes de $\kappa_{\alpha\beta}$ del sector compacto (J_i) dan signo opuesto en relación con las componentes del bloque no compacto (K_i). Podemos normalizar la métrica para llegar a

$$\kappa_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, +1, +1, -1, -1, -1), \tag{2.65}$$

es decir, signatura + en el bloque compacto y − en el no compacto. El operador Casimir para el campo escalar (2.61) en las coordenadas del espacio ambiente para dS_{2+1} resulta

$$\mathfrak{C}^{(0)}\phi = \left[(J_1)^2 + (J_2)^2 + (J_3)^2 - (K_1)^2 - (K_2)^2 - (K_3)^2\right]\phi. \tag{2.66}$$

En los capítulos siguientes, veremos cómo esta expresión se relaciona con las ecuaciones de movimiento de los campos libres. Esto nos permitirá reconocer que el parámetro que llamamos "masa" determina el valor del Casimir cuadrático de una representación del grupo de Lorentz.

Capítulo 3

Espacio de de Sitter

3.1 Principio cosmológico y escala de de Sitter

En este capítulo, presentaremos las características básicas del espacio de de Sitter y los sistemas de coordenadas que vamos a utilizar para estudiar las teorías de campos. Seguiremos mayoritariamente la bibliografía [60].

El estudio del universo en Relatividad General comienza con el Principio Cosmológico, que postula que el mismo está regido por una cosmología que satisface homogeneidad e isotropía. Dichas propiedades se realizan afirmando que el espacio-tiempo admite una foliación de hipersuperficies espaciales, isótropas y homogéneas. A partir de este principio, el universo puede ser modelado con los modelos de Robertson-Walker con la implementación de una "carta comóvil" [4].

El espacio de de Sitter es un caso especial de un universo de Robertson-Walker sin materia en presencia de una constante cosmológica $\Lambda > 0$ ($T_{00} > 0$). El parámetro de Hubble H es constante y positivo y nos permite definir una escala en de Sitter denominada *radio de de Sitter* l_{dS}, dada por

$$l_{dS}^2 = \frac{1}{H^2} = \frac{(d-2)(d-1)}{2\Lambda}. \tag{3.1}$$

3.2 Soluciones de las Ecuaciones de Einstein de vacío con $\Lambda > 0$

El espacio-tiempo de de Sitter dS_d es la solución maximalmente simétrica a las ecuaciones de Einstein en vacío con constante cosmológica $\Lambda > 0$. En dimensión d general, la Relatividad General sin materia es descripta por la acción de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \tag{3.2}$$

donde $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$, R es el escalar de Ricci, Λ la constante cosmológica y $g = \det(g_{\mu\nu})$. El problema de Euler-Lagrange da las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \tag{3.3}$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein. Si tomamos la traza de la ecuación (multiplicando por $g^{\mu\nu}$)

$$R - \frac{1}{2}Rd = -\Lambda d,$$

obtenemos que

$$R = \frac{2d}{d-2}\Lambda. \tag{3.4}$$

Es decir que, la solución de un espacio vacío con constante cosmológica positiva es equivalente a una de curvatura R constante y positiva (si asumimos $\Lambda > 0$).

La característica más importante del espacio de de Sitter es que constituye un espacio maximalmente simétrico [61]. La definición formal de este tipo de espacios es la siguiente:

Un espacio maximalmente simétrico es un espacio que posee el mayor número posible de vectores de Killing, donde para una variedad de d dimensiones es $d(d+1)/2$.

Además, puede demostrarse el siguiente teorema: dadas dos métricas maximalmente simétricas con el mismo tensor de Ricci R y la misma signatura, siempre es posible encontrar una transformación de coordenadas que lleva una métrica a la otra [60]. Como la signatura es invariante, se concluye que la solución maximalmente simétrica a las ecuaciones de vacío con constante cosmológica positiva ($\Lambda > 0$) es única y la denominamos *espacio de de Sitter*.

Combinando ecuaciones (3.4) y (3.1), obtenemos

$$R = \frac{d(d-1)}{l_{dS}^2}. \tag{3.5}$$

Otra ventaja de que el espacio de de Sitter dS_d sea maximalmente simétrico es que podemos visualizarlo como un subespacio inmerso en Minkowski $\mathbb{R}^{1,d}$ con un vínculo. La métrica del espacio ambiente es

$$ds^2 = \eta_{AB}dX^A dX^B \quad A, B = \{0, 1, 2, ..., d\}, \tag{3.6}$$

donde $\{X^A\}$ son las coordenadas del espacio ambiente $\mathbb{R}^{1,d}$ y $\eta_{AB} = \text{diag}(-1, +1, +1, ..., +1)$ las componentes de la métrica de Minkowski. El espacio de de Sitter puede pensarse como los puntos del espacio ambiente que satisfacen el vínculo

$$\eta_{AB}X^A X^B = l_{dS}^2. \tag{3.7}$$

Es decir, el espacio dS_d es un hiperboloide embebido en $\mathbb{R}^{1,d}$ (ver Fig. 3.1). Es evidente que la topología de dicho espacio es $\mathbb{R} \times S^{d-1}$, donde S^{d-1} es la esfera $(d-1)-$dimensional.

La ecuación (3.7) puede ser rescrita como

$$\eta_{AB}X^A X^B = \eta_{ab}X^a X^b + (X^d)^2 = l_{dS}^2 \quad a, b = \{0, 1, ..., d-1\},$$

donde la variación lleva a

$$2\eta_{ab}(dX^a)X^b + 2(dX^d)X^d = 0$$

de donde se obtiene

$$dX^d = -\frac{\eta_{ab}(dX^a)X^b}{\sqrt{l_{dS}^2 - \eta_{cd}X^c X^d}}.$$

Reemplazando esta expresión en (3.6), tenemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ab}dX^a dX^b + (dX^d)^2 \\ &= \eta_{ab}dX^a dX^b + \frac{\eta_{ab}\eta_{cd}X^b X^d dX^a dX^c}{l_{dS}^2 - \eta_{ef}X^e X^f} \\ &= \left(\eta_{ab} + \frac{X_a X_b}{l_{dS}^2 - \eta_{cd}X^c X^d}\right) dX^a dX^b \\ &= g_{ab}dX^a dX^b, \end{aligned}$$

donde g_{ab} es la métrica inducida en de Sitter dS_d

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \frac{X_a X_b}{l_{dS}^2 - \eta_{cd}X^c X^d}.$$

Dicho hiperboloide será invariante ante la acción del grupo de Lorentz $O(1, d)$. La cantidad de vectores de Killing de dicho espacio es $\frac{d(d+1)}{2}$. El número de isometrías es el mismo que las que posee el espacio Minkowski $\mathbb{R}^{1,d-1}$ y AdS_d, los otros dos espacios maximalmente simétricos de curvatura cero y negativa, respectivamente. Las isometrías que el hiperboloide hereda de Minkowski son las rotaciones L_{jk} y los boosts L_{i0}. En coordenadas del espacio ambiente toman la forma

$$\begin{aligned} L_{jk} &= X_j\partial_{X^k} - X_k\partial_{X^j} \\ L_{i0} &= X_i\partial_{X^0} - X_0\partial_{X^i}, \end{aligned}$$

donde $i, j, k = 1, ..., d$ y distintos. Podemos expresar los vectores en términos de las coordenadas X^μ

$$\begin{aligned} L_{jk} &= X^j\partial_{X^k} - X^k\partial_{X^j} \\ L_{i0} &= X^i\partial_{X^0} + X^0\partial_{X^i}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Este sistema de coordenadas hace evidente que las simetrías continuas de de Sitter dS_d conforman el grupo $SO(1, d)$. A continuación, presentaremos distintas foliaciones que admite el espacio de de Sitter. Sobre las mismas, estudiaremos las soluciones de los campos escalares y espinoriales y la

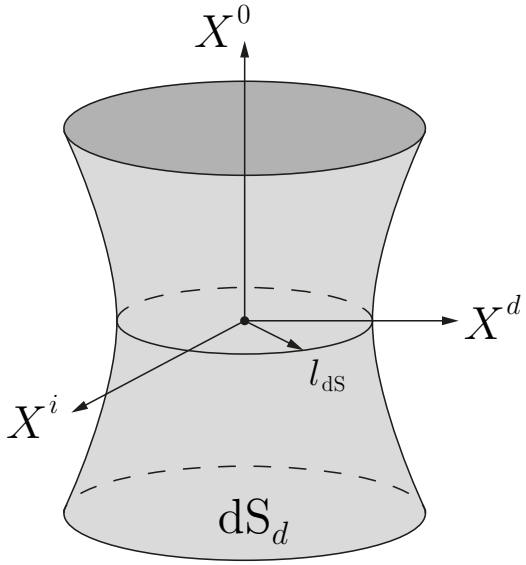


Figura 3.1: Espacio de de Sitter dS_d como un hiperboloide embebido en $\mathbb{R}^{1,d}$ y orientado en X^0. La etiqueta X^i representa $i = 1, ..., d-1$.

cuantización de sus teorías.

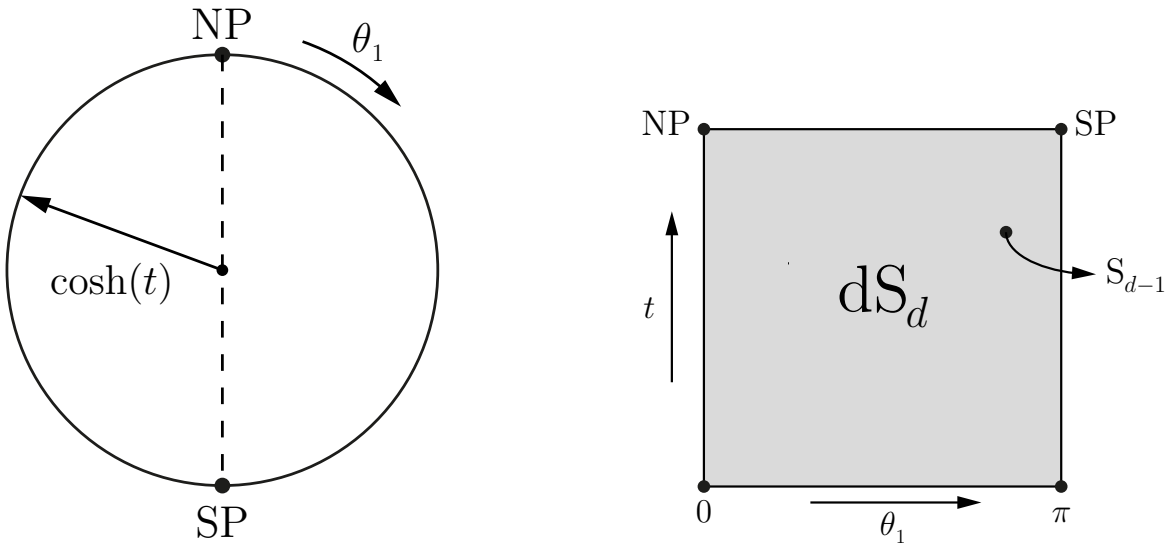
3.3 Sistemas de coordenadas

Distintos sistemas de coordenadas pueden ser utilizados para estudiar el espacio de de Sitter. En este trabajo nos centraremos en tres: carta global, *Poincaré patch* y *static patch*. El uso de distintas foliaciones para cubrir el espacio de de Sitter resulta de interés, dado que podemos explotar distintas simetrías que nos permiten estudiar diferentes aspectos del espacio y, a su vez, realizar, de varias maneras, las simetrías de las soluciones. En la sección 4, resolveremos los campos escalar y espinorial en estos sistemas de coordenadas.

3.3.1 Carta global

El hiperboloide, dado en la ecuación (3.7), puede ser parametrizado como

$$X^0 = l_{dS} \sinh(\mathbf{t}/l_{dS})$$
$$X^i = l_{dS} \cosh(\mathbf{t}/l_{dS})\Omega^i \quad (\Omega^i\Omega_i = 1),$$



(a) (b)

Figura 3.2: Espacio-tiempo de de Sitter dS_d según el cubrimiento global. En (a), el espacio visualizado como una esfera S^{d-1} de radio dependiente del tiempo. El ángulo azimutal θ_1 recorre del polo norte (NP) al polo sur (SP) de la esfera.

donde $\mathbf{t} \in (-\infty, \infty)$ y Ω^i es la parametrización de la esfera S^{d-1}. En coordenadas esféricas, la parametrización se expresa como

$$\begin{aligned}
&\Omega^1 = \cos\theta_1 \\
&\Omega^2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\
&... \\
&\Omega^{d-1} = \sin\theta_1 ... \sin\theta_{d-2} \cos\varphi \\
&\Omega^d = \sin\theta_1 ... \sin\theta_{d-2} \sin\varphi
\end{aligned}$$

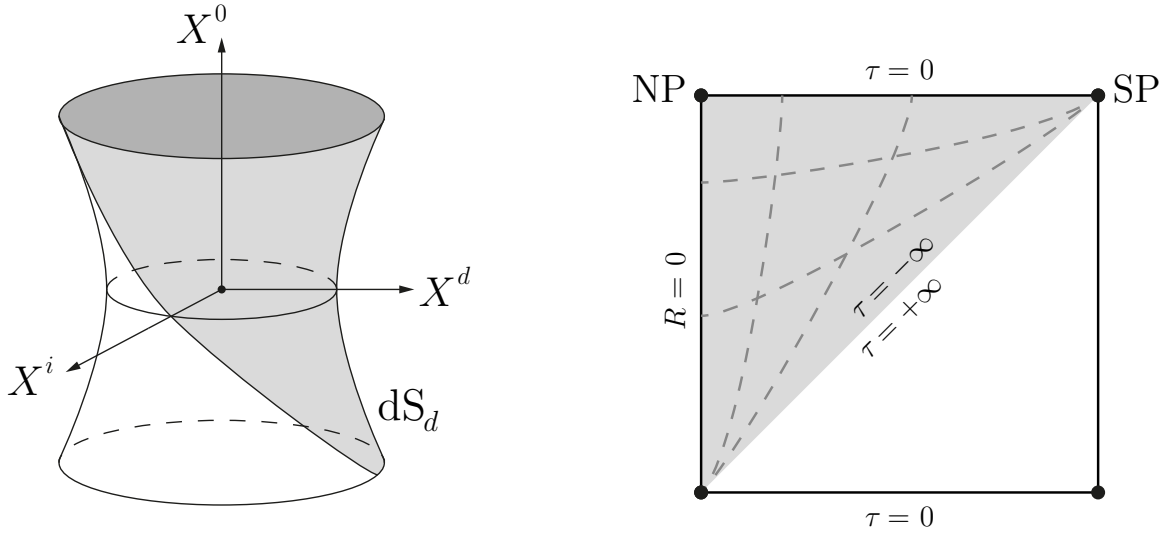
con $\theta_a \in [0, \pi)$ para $a = 1, ..., d-2$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$. La métrica inducida toma la forma

$$ds^2 = -d\mathbf{t}^2 + l_{dS}^2 \cosh^2(\mathbf{t}/l_{dS}) d\Omega_{d-1}^2 \tag{3.9}$$

donde

$$d\Omega_{d-1}^2 = \sum_{j=1}^{d-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2\theta_i \right) d\theta_j^2$$

es el elemento de línea de la S^{d-1} (identificando $\theta_{d-1} \doteq \varphi$). Las singularidades de esta métrica son simplemente las singularidades de las coordenadas: $\theta_a = \{0, \pi\}$ para todo $a = 1, ..., d-2$. Este sistema de coordenadas cubre todo el espacio-tiempo de de Sitter dS_d y, por lo tanto, es el que hace explícita su topología con simetría esférica de $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ (ver Fig. 3.2). La métrica (3.9) no tiene vectores de Killing temporales globales, lo que indica que de Sitter es un espacio-tiempo no



(a) (b)

Figura 3.3: *Poincaré patch* visualizado en el espacio de de Sitter dS_d. En (a), se muestra al parche como una rebanada del hiperboloide. En (b), se visualiza el diagrama de Penrose dividido por las singularidades de la carta, donde $R = \sqrt{x_i x^i}$. La parte sombreada corresponde a una elección del parche, donde $\tau = 0$ es el *late-time* y $\tau = -\infty$ el infinito pasado del parche.

estacionario que está en expansión/contracción acelerada, como muestra el factor $\cosh^2(\mathbf{t}/l_{dS})$ de dicha métrica. Resulta que $\mathbf{t}$, denominado *tiempo cósmico*, es el tiempo que miden los observadores que acompañan la expansión.

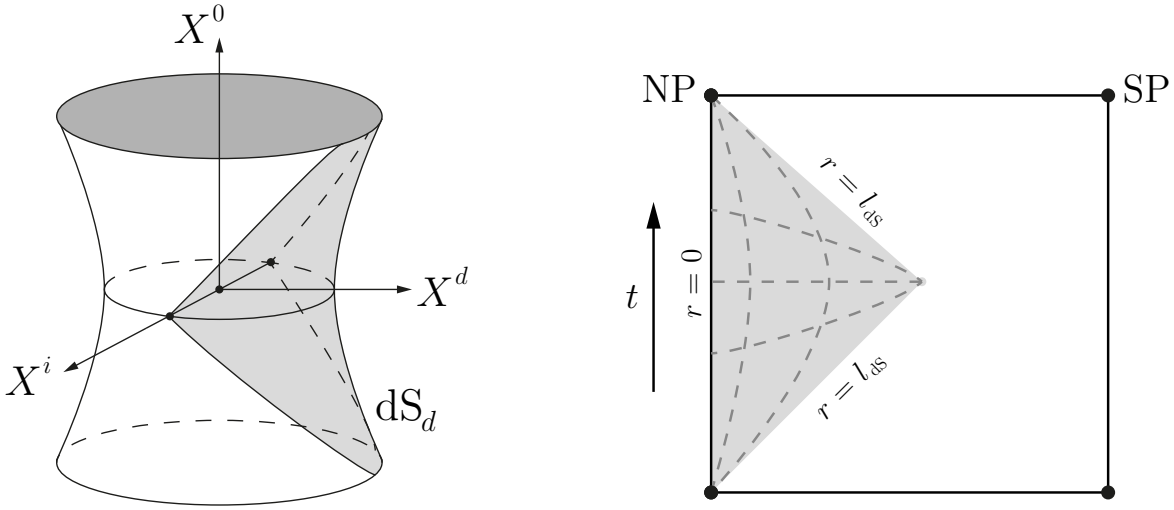
3.3.2 Poincaré patch

Una alternativa para parametrizar el espacio de de Sitter es con el *Poincaré patch*. El cambio de coordenadas que se impone es el siguiente

$$\begin{aligned} X^0 &= \frac{l_{dS}^2 + \eta_{ab} x^a x^b}{2\tau} \\ X^i &= \frac{x^i}{\tau} \quad i = 1, ..., d-1 \\ X^d &= \frac{-l_{dS}^2 + \eta_{ab} x^a x^b}{2\tau}, \end{aligned}$$

donde $a, b = 0, ..., d-1$ y $\tau \doteq x^0$. El rango de las coordenadas es $x^i \in (-\infty, +\infty)$ y $\tau \in (-\infty, +\infty)$ y la singularidad en $\tau = 0$ divide el espacio de de Sitter en dos de estos parches. Para describirlo sin singularidades, debemos tomar como dominio uno de ellos. En particular, consideraremos el que contiene a los puntos $x^i \in (-\infty, \infty)$ y $\tau \in (-\infty, 0)$ (ver Fig. 3.3).
La métrica inducida toma la forma

$$ds^2 = l_{dS}^2 \frac{-d\tau^2 + dx^i dx_i}{\tau^2}. \tag{3.10}$$



(a) (b)

Figura 3.4: *Static patch* visualizado en el espacio de de Sitter dS_d. En (a), se muestra al parche como una rebanada del hiperboloide. En (b), se visualiza el diagrama de Penrose para un observador inercial posado en el polo norte (NP). El horizonte cosmológico está delimitado por las líneas de $r = l_{dS}$.

Vemos que posee una simetría en las traslaciones espaciales. Esto permite describir los modos como ondas planas que se propagan en el parche. Esta simetría resulta útil para simplificar el estudio de campos en representaciones más complicadas como la espinorial, dado que los modos resultan más sencillos de normalizar (ver Sec. 4.5)[1].

3.3.3 Static patch

Otra manera de resolver el embedding de (3.7) es con el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}
\frac{X^0}{l_{dS}} &= -\sqrt{1-(r/l_{dS})^2}\,\sinh(t/l_{dS}) \\
\frac{X^d}{l_{dS}} &= -\sqrt{1-(r/l_{dS})^2}\,\cosh(t/l_{dS}) \\
\frac{X^\alpha}{l_{dS}} &= (r/l_{dS})\Omega^i \quad i = 1, ..., d-1,
\end{aligned}$$

donde $r \in [0, l_{dS})$ y $t \in (-\infty, \infty)$. Esta foliación se denomina *static patch* y conforma el sistema de coordenadas accesible por un observador en caída libre en de Sitter.

Este sistema no cubre todo el espacio-tiempo. Notemos que aún cubriendo todo el dominio de las coordenadas, se tiene que $X^d \leq X^0 \leq -X^d$, por lo que solo cubre un cuarto de dicho espacio (ver

[1]Por ejemplo, la solución de campos de spin $\frac{1}{2}$ en coordenadas globales fue realizado en [62].

Fig. 3.4). La métrica, para esta carta, toma la forma

$$ds^2 = -(1 - \left(r/l_{dS}\right)^2)\, dt^2 + \frac{dr^2}{1 - (r/l_{dS})^2} + r^2 d\Omega_{d-2}^2. \tag{3.11}$$

El borde de la esfera espacial se encuentra en la singularidad de la métrica $r = l_{dS}$ y consiste en el *horizonte cosmológico* de un observador inercial ubicado en $r = 0$. Esta métrica presenta un Killing temporal ∂_t en todo el interior $r < l_{dS}$, por lo que se presenta una conservación en la que los modos realizan una evolución simétrica en el tiempo a través del parche completo.

Capítulo 4

Teoría de campos en de Sitter

En este capítulo, estudiaremos las soluciones de los campos escalares (spin $s = 0$) y espinoriales (spin $s = \frac{1}{2}$) en el espacio-tiempo de de Sitter. Para el caso escalar, revisitaremos el estudio en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d-1}$, así como su cuantización. Luego, repetiremos el análisis de la ecuación de movimiento en el espacio de de Sitter dS_d y lo resolveremos explícitamente, para $d = 2 + 1$, en los tres sistemas de coordenadas introducidos anteriormente: carta global, *static patch* y *Poincaré patch*. Observaremos las particularidades que aparecen en la cuantización del campo en el espacio curvo con respecto a lo que se conoce en espacio plano. Por otro lado, resolveremos el espinor en dimensión d general en el *Poincaré patch* y lo cuantizaremos.

Las soluciones a la ecuación de movimiento constituirán el espacio de representación sobre el que actuará una **UIR** de $SO(1, d)$. Este aspecto será estudiado en la sección 5. La manera de caracterizar la representación estará dada por la relación entre el operador Casimir $\mathfrak{C}$ de la teoría y el d'Alambertiano $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$. Al relacionar las soluciones de este operador bajo diferentes condiciones de contorno con las representaciones del grupo de simetrías del espacio, se espera abordar el problema de la interpretación de la noción de masa en el espacio de de Sitter apelando a la teoría de grupos.

A continuación, discutiremos la noción de masa en la teoría de campos convencional, que motivará el posterior desarrollo centrado en de Sitter. A modo de ejemplo, plantearemos el campo escalar.

4.1 El problema de la masa en de Sitter

En espacio plano, la forma más general de la densidad lagrangiana de un campo escalar ϕ es

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \tag{4.1}$$

donde el primer término corresponde con la energía cinética del campo[1] y V es un potencial escalar que admite un desarrollo de Taylor en potencias de ϕ. La teoría más general que se puede resolver

[1] El factor $\frac{1}{2}$ es puramente convencional.

de manera exacta es cuadrática (ϕ^2). Si consideramos mayores factores de ϕ, los mismos aportarán a la solución de un campo provisto de interacciones, aspecto que suele abordarse con teoría de perturbaciones [22, 63]. La expansión que consideramos para un campo libre es

$$V(\phi) = V_0 + \mu^3\phi + \frac{1}{2}\lambda^2\phi^2. \tag{4.2}$$

El término de orden cero (V_0) no cambia las ecuaciones de movimiento ni aporta a las condiciones de contorno. Por otro lado, el término de primer orden puede ser removido realizando una redefinición del campo $\phi \to \phi - \frac{\mu^3}{\lambda^2}$. Esto deja al término cuadrático como el único relevante.

La acción S de una teoría de campos en un espacio de d dimensiones es la integral de la densidad Lagrangiana

$$S = \int d^d x \, \mathrm{L}(\phi, \partial_\mu\phi).$$

Esta funcional describe todas las configuraciones posibles de la evolución de un campo. Aquellas que son clásicamente relevantes son las que satisfacen el *Principio de mínima acción* [50]. Dichas configuraciones requieren que la acción sea estacionaria $\delta S = 0$ ante variaciones arbitrarias de ϕ y sus derivadas $\partial_\mu\phi$. Imponiendo condiciones de contorno apropiadas, se llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right). \tag{4.3}$$

En unidades naturales, la acción S es adimensional y la unidad de masa M corresponde con la inversa de longitud L^{-1}. El Lagrangiano resultante $\mathrm{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\lambda^2\phi^2$ debe tener unidades de L^{-d}. La energía cinética tiene dos derivadas y $\left[\frac{\partial}{\partial x}\right] = L^{-1}$, entonces $[\phi] = L^{-(d-1)/2}$. Esto concluye en que $[\lambda] = M = L^{-1}$, por lo que dicho parámetro se lo asocia con una masa. Para más referencia sobre este sistema de unidades, ver [64].
La ecuación de movimiento del campo (4.3) planteará una igualdad entre el d'Alambertiano $\Box_M = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ y λ^2. En resumen

$$\Box_M\phi = \lambda^2\phi. \tag{4.4}$$

En la teoría de grupos, el grupo de simetrías del espacio plano $\mathbb{R}^{1,d-1}$ es el grupo de Poincaré $ISO(1, d-1)$, que corresponde a $SO(1, d-1)$ más las traslaciones $\{\hat{P}^\mu = i\partial_\mu\}$. Es posible ver que $C_1 = -\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu$ constituye un Casimir (i.e. conmuta con el álgebra $iso(1, d-1)$) y coincide con $\Box_M$ (ver 4.3). Si actúa una representación irreducible de $ISO(1, d-1)$, el lema de Schur garantiza que la acción de C_1 sobre un campo resulta en un autovalor. Debido a la equivalencia $C_1 = \Box_M$, podemos asegurar que las soluciones de (4.4) definen espacios de representación irreducibles, caracterizados por λ.

En 4.3, veremos cómo la solución del campo ϕ en ondas planas e^{ipx} se corresponde con la propagación libre de una partícula de masa λ, que a partir de ahora denotaremos m, y momento $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$ (siendo $p^0 > 0$ la energía y $\mathbf{p}$ el vector espacial). La propagación de este tipo de partícula se

realizará dentro del cono de luz ($p_\mu p^\mu = -m^2 < 0$). La solución general de (4.4) se podrá expresar como una suma de autofunciones de las traslaciones temporales $\hat{P}^0$ [2]. Dichas funciones son las denominadas "modos de energía positiva" $u(x)$, donde $\hat{P}^0 u(x) = p^0 u(x)$, y "modos de energía negativa" $v(x)$, donde $\hat{P}^0 v(x) = -p^0 v(x)$. En resumen, la base completa y ortogonal de soluciones en ondas planas de (4.4) define dos representaciones: energía positiva $\mathcal{P}^+$, y energía negativa $\mathcal{P}^-$ de la parte conexa de $ISO(1, d-1)$. De acuerdo a las definiciones dadas en la sección 2.4, la transformación de traslación temporal $e^{i\hat{P}^0 a}$ ($x^0 \to x^0 + a$) actúa sobre $\mathcal{P}^+$ y sobre $\mathcal{P}^-$ de forma cerrada [15, 65].

La asociación de **UIRs** con soluciones de campos libres se conoce desde el trabajo de Wigner en el espacio-tiempo de Minkowski [15]. Es sabido que las **UIRs** del grupo de Poincaré $ISO(1, d-1)$ están relacionadas a las partículas elementales representadas como campos cuánticos libres. En el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d-1}$, las etiquetas de las **UIRs** son la masa m y el spin s del campo correspondiente [22]. Estos números son los autovalores de los Casimires del grupo y resultan invariantes en la representación.

La correspondencia campo-partícula se hará manifiesta una vez cuantizados los campos. En este contexto, podremos tratar al campo como un operador $\hat{\phi}$ que actúa sobre un estado de vacío $|0\rangle$ [3] definiendo estados de una partícula $|p\rangle$ que corresponderán con vectores de un espacio de Hilbert equipado con un producto interno definido positivo[4]. Las etiquetas m y s corresponderán con la masa y el spin de la partícula asociada al campo. Las etiquetas $(\mathbf{p}, s_z)$, i.e. el momento espacial y la proyección de spin, caracterizarán cada elemento de la base $|\mathbf{p}, s_z\rangle$.

Sin embargo, la intuición de espacio plano que tenemos para la definición de masa es confusa en espacio curvo, en particular para de Sitter [15]. Si bien no proviene de (4.1), la ecuación de movimiento para un campo escalar en de Sitter será equivalente a (4.4)[5]

$$\Box_{dS}\phi = \lambda^2 l_{dS}^2 \phi,$$

donde $\Box_{dS} = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ es el d'Alambertiano de de Sitter y λ^2 sigue siendo el coeficiente de expansión cuadrático de (4.2). Aún así, mientras que la solución de masa nula $\lambda = m = 0$ en Minkowski $\mathbb{R}^{1,d-1}$, es decir ϕ tal que $\Box_M \phi = 0$, equivale al de una partícula que se propaga sobre el cono de luz ($p_\mu p^\mu = 0$), esto no sucede en el espacio de de Sitter. En este espacio, los campos asociados a la ecuación de ondas sin masa, es decir ϕ tal que $\Box_{dS}\phi = 0$, tienen soporte dentro del cono de luz [66]. Una referencia donde se discuten cómo se podrían recuperar las representaciones de Poincaré desde de Sitter al tomar el límite de curvatura cero ($l_{dS} \to \infty$) es [20]. Lejos de resolver el problema, esta idea, que llevaría a una posterior noción minkowskiana de la partícula en de

[2] Este operador corresponde con el Hamiltoniano $\hat{H}$ de la teoría.

[3] El estado vacío de excitaciones/partículas.

[4] Tomando las soluciones de energía positiva como las que son físicamente relevantes

[5] En el caso del espinor, veremos que se agrega un offset que depende del escalar de Ricci R, producto del acoplamiento del spin s con la curvatura de de Sitter.

Sitter, se vuelve incompleta. En [15], la clasificación de las representaciones de $SO(1,4)$ revela que, además de recuperar las representaciones asociadas a una partícula de $m > 0$ a partir de las *principal series*, recuperamos las de $m = 0$ en Poincaré desde una *complementary series* (spin $s = 0$) y desde una clase de *discrete series* (spin $s \neq 0$). Sin embargo, el resto de las representaciones, conocidas como *partially massless*, no tienen una conexión con el grupo de Poincaré en el límite $l_{dS} \to \infty$.

Esto invita a descartar los intentos de darle una interpretación a la masa. La nueva propuesta sería, entonces, abandonar la idea tradicional y trabajar con los autovalores que provee la teoría de grupos, bajo la acción del Casimir $\mathfrak{C}$ definido en (2.26). Para ello, es necesario proponer alguna relevancia física al operador. En la sección 5, lo relacionaremos con la ecuación de movimiento de los campos escalares y espinoriales, que definiremos en las Secs. 4.4 y 4.5. La "masa" tomará, eventualmente, la propiedad de ser una etiqueta de las **UIRs** del grupo de Lorentz y la volveremos a denotar m.

4.2 Comentario sobre las *principal series representations* π_ν en las soluciones de de Sitter

En las soluciones de los campos escalar y espinorial en el espacio de de Sitter, en particular aquellas que estén resueltas sobre la carta global o el *Poincaré patch*, tomaremos una reparametrización de la masa.

Campo escalar $\phi(x)$

Para un campo escalar con $V''(\phi) = m^2_{(0)}$, podemos escribir

$$m^2_{(0)} l^2_{dS} = \Delta(d - 1 - \Delta),$$

donde Δ es la dimensión de escala definida en (2.4). Invirtiendo la ecuación, hallamos

$$\Delta_\pm = \frac{d-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(d-1)^2}{4} - m^2_{(0)} l^2_{dS}}.$$

Si queremos estar en las *principal series* tenemos que pedir $\Delta \in \mathbb{C}$, es decir $\Delta = \frac{d-1}{2} + i\nu$ con $\nu \in \mathbb{R}$. En consecuencia, debemos imponer la condición de *campos pesados*[6]

$$m^2_{(0)} > \frac{(d-1)^2}{4 l^2_{dS}}, \tag{4.5}$$

o sea que

$$\nu_{(0)} = \sqrt{m^2_{(0)} l^2_{dS} - \frac{(d-1)^2}{4}}.$$

[6]La escala de de Sitter l_{dS} impone una condición sobre la masividad de los campos.

Campo espinorial $\psi(x)$

Para una solución de la ecuación de Dirac (ver 4.5) de masa $m_{(\frac{1}{2})}$, podemos escribir

$$\Delta_{\pm} = \frac{(d-1)}{2} \pm i m_{(\frac{1}{2})} l_{dS}$$

o sea

$$\nu_{(\frac{1}{2})} = m_{(\frac{1}{2})} l_{dS}.$$

Exploraremos las consecuencias de estas reparametrizaciones. Más detalles sobre el significado físico de las mismas y sus usos se pueden encontrar en [67, 18, 25, 68, 69, 45].

4.3 Cuantización del campo escalar en espacio plano

Comenzamos con una breve recapitulación de la cuantización de un campo escalar en el espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d-1}$. Para revisar los detalles en el desarrollo, visitar [22].
Partimos de la acción

$$S = -\frac{1}{2} \int d^d x \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2 \right).$$

Los detalles sobre la normalización se hallan en el apéndice B. Las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan en la denominada ecuación de Klein-Gordon [22]

$$(\Box_M - m^2)\phi = 0, \tag{4.6}$$

donde $\Box_M = \partial_\mu \partial^\mu$ es el d'Alambertiano de Minkowski. Tal como mencionamos, notemos que m^2 caracteriza la representación irreducible

$$C_1 \phi = -\hat{P}_\mu \hat{P}^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi = \Box_M \phi = m^2 \phi.$$

Como se ha dicho anteriormente, un conjunto de soluciones a la ecuación está dado por las soluciones de ondas planas o modos

$$u_{\mathbf{p}}(x) \sim e^{ipx}. \tag{4.7}$$

Imponiendo la solución en (4.6), obtenemos la relación de dispersión

$$p_\mu p^\mu = -m^2. \tag{4.8}$$

Esto equivale a decir que las soluciones de ondas planas diagonalizan $\hat{P}^\mu$, con el cuadrimomento p^μ como autovalor, y el Casimir resulta $C_1 = -p_\mu p^\mu = m^2$, lo que pone de manifiesto que una solución a la ecuación de movimiento es una representación irreducible acorde al lema de Schur. Escribiendo $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$, y tomando $p^0 > 0$, se sigue que $p = (\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \mathbf{p})$ es el cuadrimomento de una partícula de masa m y, por la norma negativa de (4.8), sabemos que la propagación se da dentro del cono de luz. Por ende, la solución (4.7) constituye el espacio sobre el que actúa la **UIR**

de $m > 0$.

Exploremos estas representaciones. Las soluciones (4.7) se denominan modos de "energía positiva", dado que son autofunciones del operador $\hat{P^0} = i\partial_0$

$$i\partial_0 u_{\mathbf{p}}(x) = p^0 u_{\mathbf{p}}(x), \tag{4.9}$$

donde $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}} > 0$. Los modos de "energía negativa" $v_{\mathbf{p}}$ también son solución de la ecuación y son las funciones complejas conjugadas de los de energía positiva $v_{\mathbf{p}}(x) = u^*_{\mathbf{p}}(x)$. Las mismas satisfacen

$$i\partial_0 u^*_{\mathbf{p}}(x) = -p^0 u^*_{\mathbf{p}}(x).$$

La cuantización del campo $\phi(x)$ nos permitirá escribir los estados de una partícula como combinaciones de una base del espacio que satisfaga ortogonalidad y completitud respecto de algún producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ conservado. Para motivar su definición, planteamos la integral

$$\int_\Omega d^{d-1}x\, dt \left(f_1(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) f_2^\dagger - ((\partial_\mu \partial^\mu - m^2) f_1) f_2^\dagger \right),$$

donde Ω es una región cilíndrica cerrada de $\mathbb{R}^{1,d-1}$. La integral se anula si f_1 y f_2 son soluciones de (4.6), puesto que el integrando se anula punto a punto en tal caso. Los términos de masa m se cancelan entre sí y, realizando integración por partes, llegamos a

$$\int_\Omega d^{d-1}x\, dt\, \partial_\mu \left(f_1 \partial^\mu f_2^\dagger - (\partial^\mu f_1) f_2^\dagger \right) = 0.$$

Aplicando el teorema de Stokes, podemos relacionar la integral en Ω con la integral sobre el borde $\partial\Omega$ de normal n_μ

$$\int_{\partial\Omega} d^{d-1}x\, n_\mu \left(f_1 \partial^\mu f_2^\dagger - (\partial^\mu f_1) f_2^\dagger \right) = 0. \tag{4.10}$$

Asumimos que Ω está delimitada por un borde temporal $\mathfrak{B}$ y dos hipersuperficies espaciales (o "tapas") Σ_1 y Σ_2 evaluadas en dos tiempos t_1 y t_2 con normales n iguales en norma $n_\mu n^\mu = -1$ y opuestas en signo (ver Fig. 4.1). De esta manera, obtenemos

$$\int_{\Sigma_2} - \int_{\Sigma_1} = - \int_{\mathfrak{B}} d^{d-1}x\, n_\mu \left(f_1 \partial^\mu f_2^\dagger - (\partial^\mu f_1) f_2^\dagger \right).$$

Para tener un producto interno bien definido, tomamos el subconjunto de funciones que hagan que $\int_{\mathfrak{B}} \to 0$. Esto se puede lograr extendiendo el borde de Ω hacia el infinito espacial y usando funciones que decaigan suficientemente rápido.

Este resultado nos permite afirmar que la integral sobre hipersuperficies espaciales Σ de $t = cte$ se conserva. Además, estas hipersuperficies tienen una normal con componentes $n^0 = \pm 1$ y $n^i = 0$,

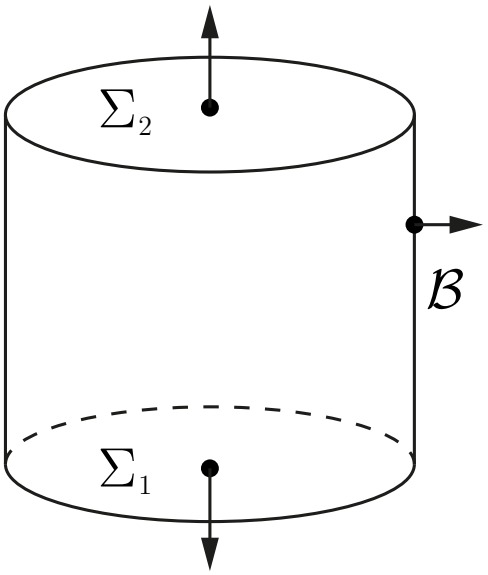


Figura 4.1: Cilindro en $\mathbb{R}^{1,d-1}$ con sus bordes temporal $\mathcal{B}$ y espaciales Σ_1 y Σ_2 junto con los vectores normales.

por lo que llegamos al producto interno de Klein-Gordon[7,8]

$$\langle f_1, f_2\rangle = -i\int_\Sigma d\Sigma(f_1\partial_0 f_2^* - (\partial_0 f_1)f_2^*) \tag{4.11}$$

Bajo una normalización apropiada, los modos satisfacen

$$(u_{\mathbf{p}}, u_{\mathbf{p}'}) = \delta^{(d-1)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \quad (u^*_{\mathbf{p}}, u^*_{\mathbf{p}'}) = -\delta^{(d-1)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \quad (u_{\mathbf{p}}, u^*_{\mathbf{p}'}) = 0. \tag{4.12}$$

Podemos cuantizar la teoría clásica interpretando el campo $\phi(x)$ y su conjugado $\partial_0\phi(x)$ como operadores e imponiendo relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$[\hat\phi(x), \hat\phi(y)]_{x^0=y^0} = 0 \quad [\partial_0\hat\phi(x), \partial_0\hat\phi(y)]_{x^0=y^0} = 0 \quad [\hat\phi(x), \partial_0\hat\phi(y)]_{x^0=y^0} = i\delta^{(d-1)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Como el conjunto de modos de energía positiva y negativa forman una base ortonormal completa con respecto al producto interno definido anteriormente, podemos expandir el operador en una combinación lineal de los modos

$$\hat\phi(x) = \sum_{\mathbf{p}}(\hat a_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(x) + \hat a^\dagger_{\mathbf{p}} u^*_{\mathbf{p}}(x)). \tag{4.13}$$

[7]El factor i se coloca para asegurar que $\langle f_1, f_2\rangle = \overline{\langle f_2, f_1\rangle}$.
[8]El reemplazo de $f^\dagger$ por f^* se hace porque tratamos con funciones escalares.

Las relaciones de conmutación a tiempos iguales para los coeficientes se reducen a

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] = 0 \quad [\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'}] = 0 \quad [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'}] = \delta^{(d-1)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

Podemos construir el espacio de Hilbert de estados partiendo desde el estado de vacío $|0\rangle_{Mink}$ que satisface

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} |0\rangle_{Mink} = 0 \quad \forall \mathbf{p},$$

donde $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ es denominado el operador de "aniquilación". Actuando con el operador de "creación" sobre el estado de vacío obtenemos los estados de una partícula de momento definido[9]

$$|\mathbf{p}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} |0\rangle_{Mink} \tag{4.14}$$

que definen los espacios de representación sobre los que actúan las **UIRs** de $ISO(1, d-1)$.
A nivel cuántico, la asignación de operadores escalera en (4.13), en conjunto con la evolución unitaria de un modo de energía positiva, nos permite afirmar que los observadores, ubicados a distintos tiempos, podrán elegir un estado de vacío $|0\rangle_{Mink}$ como aquel que es aniquilado por el operador que acompaña dicho modo. Esto nos permite definir observables, como el número de partículas $\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}$ que son invariantes ante la acción de $ISO(1, d-1)$ por la existencia del estado de vacío global $|0\rangle_{Mink}$ [22]. Veremos que esto no será posible para el espacio de de Sitter, dado que el mismo no contiene vectores de Killing temporales globales. Si bien la evolución será unitaria, la misma mezclará los modos asociados con $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ y la ausencia de un vector de Killing temporal global llevará a ambigüedades en la noción de estado de vacío.

4.4 Cuantización del campo escalar en de Sitter

Estudiaremos la propagación de un campo escalar ϕ en dS_d, hallando las soluciones a la ecuación de movimiento y la cuantización. Para eso, primero revisitaremos algunos conceptos de acciones en espacios curvos. En lo que resta del trabajo, tomaremos la convención $l_{dS} = 1$. Para más detalles sobre los temas discutidos aquí, visitar [50, 48].

Contexto de gravedad: caso mínimamente acoplado

En este trabajo, estudiaremos campos de materia (escalares y espinoriales) propagándose en el espacio dS_d. Lo natural es considerar una acción de Einstein-Hilbert S_{EH} con materia

$$S[g, \phi] = \int d^d x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\kappa^2}(R - 2\Lambda) + L_M(\phi) \right) = S_{EH} + S_M$$

donde $L_M(\phi)$ es el lagrangiano del campo de materia (masivo) ϕ, cuya acción es S_M. Esta acción agrega interacciones entre la métrica $g_{\mu\nu}$ y ϕ, por lo que agregaría una dinámica al espacio que puede ser tratado con teoría de perturbaciones. Sin embargo, en este trabajo vamos a considerar que

[9] Asumiremos siempre que $\langle 0|0\rangle = 1$.

dicho acoplamiento es despreciable (orden "cero" en perturbaciones) y estudiaremos la propagación de los campos en una variedad de fondo con una métrica fija. A este espacio nos referiremos como *background* y el campo, único en la teoría, será "libre".
Vale destacar que en la bibliografía se estudian diversos acoplamientos [15]. El principio de variaciones aplicado a la acción de materia acoplada con gravedad da con ecuaciones de movimiento del tipo

$$(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - m^2 - \xi R)\phi = 0,$$

donde, para este trabajo, tomaremos el caso *mínimamente acoplado* $\xi = 0$. Como trabajamos en un espacio de curvatura R constante (3.5), el término con esa constante agrega una componente de masa. Esto evidencia la dificultad de definir la masa puramente en términos de la ecuación de movimiento, puesto que sobre la misma no hay manera de distinguir el efecto de m^2 de componentes constantes de R.

Acción escalar y tensor de Energía-momento $T_{\mu\nu}$

La acción S_M aporta una configuración de materia y energía al espacio-tiempo. Definimos el tensor de Energía-momento como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}},$$

que satisface $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. De esta manera

$$\delta S_M = -\frac{1}{2}\int d^dx\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

La acción es construida para ser invariante ante Difeomorfismos. La variación de la métrica por un Difeomorfismo es $\delta g_{\mu\nu} = (\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu}X_{\nu)}$. Entonces,

$$\delta S_M = -2\int d^dx\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\nabla_\mu X_\nu = 0 \quad \forall X^\mu.$$

Integrando por partes y tomando la configuración de materia a cero en el borde (localizada), llegamos a la conservación de $T_{\mu\nu}$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Si el espacio-tiempo posee un vector de Killing k podemos construir una corriente conservada a partir de la contracción

$$\mathcal{J}^\nu = k_\mu T^{\mu\nu}. \tag{4.15}$$

En efecto, tomando la derivada covariante, llegamos a

$$-\nabla_\nu\mathcal{J}^\nu = T^{\mu\nu}\nabla_\nu k_\mu + k_\mu\cancel{\nabla_\nu T^{\mu\nu}} = \cancel{\nabla_{(\nu}k_{\mu)}}T^{\mu\nu} = 0,$$

donde en la última igualdad usamos la condición de Killing para k_μ (ver (2.50)). Con esta conservación podemos construir cargas

$$Q = \int_\Sigma d^{d-1}x\,\sqrt{-\bar{g}}\,n_\mu \mathcal{J}^\mu, \tag{4.16}$$

donde Σ es una hipersuperficie espacial de dimensión $d-1$ y normal n^μ y $\bar{g}$ es la métrica inducida sobre Σ. La interpretación de las cargas dependerá estrictamente de la propiedad del vector de Killing k. Si el vector es temporal para todos los puntos de la variedad ($k\cdot k < 0\ \forall x \in \mathcal{M}$) Q se asocia a la energía de la materia. Si, por lo contrario, el vector de Killing k es espacial ($k\cdot k > 0\ \forall x \in \mathcal{M}$) Q es asociado con el momento de la misma.

El campo escalar libre $\phi(x)$ en d dimensiones sigue la acción[10,11]

$$S = -\frac{1}{2}\int d^dx\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\right). \tag{4.17}$$

Para hallar el tensor $T_{\mu\nu}$ variamos la acción respecto de la métrica $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$. Recordando que $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$, obtenemos[50]

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d^dx\,\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi + m^2\phi^2) + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right)\delta g^{\mu\nu}.$$

En consecuencia, obtenemos el tensor de Energía-momento $T_{\mu\nu}$ del espacio dS_d

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi + m^2\phi^2). \tag{4.18}$$

Estudiar la corriente conservada $\mathcal{J}^\mu$ nos será útil para comprender las cargas conservadas que proporcionan las simetrías en el espacio de de Sitter. Dichas simetrías podrán ser interpretadas de manera diferente y dependerán del sistema de coordenadas en el que estudiemos las soluciones.

4.4.1 Ecuación de Klein-Gordon

Variando la acción (4.17) respecto de ϕ tenemos

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d^dx\sqrt{-g}\delta\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\right).$$

Las variaciones conmutan con las derivadas y la métrica

$$\delta S = -\int d^dx\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\delta\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\partial_\nu\delta\phi) + m^2\phi\delta\phi\right).$$

[10]El parámetro λ, de orden cuadrado en la expansión de $V(\phi)$, es nombrado m en referencia al sentido que se le da a la masa en espacio plano.

[11]Las derivadas $\partial_\mu\phi$ se promueven a $\nabla_\mu\phi$, pero es redundante, dado que al actuar sobre escalares son equivalentes.

La métrica es un tensor simétrico y las derivadas conmutan

$$\delta S = -\int d^d x \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu \delta\phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi \delta\phi\right).$$

Haciendo integración por partes

$$\delta S = -\int d^d x \left(\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\phi\partial_\nu\phi) - \partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)\delta\phi + \sqrt{-g}m^2\phi\delta\phi\right).$$

Por teorema de la divergencia, la función sobre la que actúa ∂_μ en el primer término es una contribución al borde. Imponiendo condiciones de Dirichlet ($\phi \to 0$) en el mismo, concluimos que ese término se anula, resultando en

$$\delta S = -\int d^d x \left(-\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \sqrt{-g}m^2\phi\right)\delta\phi.$$

Encontramos las ecuaciones de movimiento pidiendo que $\delta S = 0$. Esto sucede si

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) - \sqrt{-g}m^2\phi = 0.$$

Dividiendo por la raíz del determinante de la métrica $\sqrt{-g}$, llegamos a la ecuación de movimiento para el campo

$$(\Box^{(0)}_{dS} - m^2)\phi = 0,$$

donde $\Box^{(0)}_{dS} \doteq \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\cdot)$ es el d'Alambertiano u *operador de Laplace-Beltrami* $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ de espacios curvos actuando sobre escalares $\phi(x)$ (campo de spin 0). Este operador también lleva el nombre de operador de Klein-Gordon en espacios curvos y permite escribir una ecuación de movimiento como una de autovalores

$$\Box^{(0)}_{dS}\phi = m^2\phi. \tag{4.19}$$

Como habíamos mencionado, estamos obteniendo (4.1), donde ahora la "masa" del campo de spin 0 en de Sitter es denotada m. En la sección 5, mostraremos que dicho parámetro caracteriza la representación que definen los estados de una partícula a través de la relación entre la ecuación (4.19) con el Casimir cuadrático $\mathfrak{C}$ de la teoría. En la interpretación dada en [20], podríamos asociar dichos estados con aquellos que proporcionan representaciones masivas del grupo de Poincaré en el límite de curvatura cero. En la sección 4.5, repetiremos el estudio para la representación espinorial $s = \frac{1}{2}$.

Como en espacio plano, es imperante construir un producto interno que sea conservado. Para motivar su definición, consideremos una región Ω de dS_d

$$\Omega = \{x \in dS_d |\, t_1 < t < t_2\},$$

donde t es la coordenada temporal. Para el caso de coordenadas globales, la región Ω no tiene bordes temporales y resulta estar delimitada por dos hipersuperficies espaciales Σ_1 y Σ_2 a tiempos

delimitantes t_1 y t_2, respectivamente. Realizamos el mismo desarrollo que antes: planteamos la integral con la ecuación (4.19) con el producto de dos soluciones f_1 y f_2, integramos por partes y usamos el teorema de Stokes generalizado. Con esto llegamos a una ecuación similar a (4.10)

$$\int_{\partial\Omega} d^{d-1}x\,\sqrt{-\bar{g}}\,g^{\mu\nu}n_\mu\left(f_1\nabla_\nu f_2^\dagger-(\nabla_\nu f_1)f_2^\dagger\right)=0.$$

Este resultado nos dice que la integral se conserva al realizarla sobre diferentes superficies de coordenada temporal constante. Tomando la medida $d\Sigma^\mu = n^\mu\sqrt{-\bar{g}}\,d^{d-1}x$ y recordando que estamos trabajando con funciones escalares ($\nabla_\mu f=\partial_\mu f$ y $f^\dagger=f^*$), obtenemos el producto interno de Klein-Gordon

$$\langle f_1,f_2\rangle=-i\int_\Sigma d\Sigma^\mu\left(f_1\partial_\mu f_2^*-f_2^*\partial_\mu f_1\right). \tag{4.20}$$

4.4.2 Soluciones y cuantización

Supongamos una solución $u_n(x)$ al problema de autovalores (4.19), donde la etiqueta n puede ser de espectro discreto o continuo[12,13]. Así como encontramos soluciones en espacio plano, nos interesa hallar una solución general como una composición de modos

$$\phi(x)=\sum_n(a_nu_n(x)+a_n^\dagger u_n^*(x)). \tag{4.21}$$

Las soluciones u_n deben conformar una base que satisfaga las condiciones ortogonalidad y completitud respecto de (4.20). Dichas condiciones son

$$\langle u_n,u_m\rangle=\delta_{nm}\quad\langle u_n^*,u_m^*\rangle=-\delta_{nm}\quad\langle u_n,u_m^*\rangle=0 \tag{4.22}$$

en el caso de que n sea discreto. Si es continuo, obtendremos deltas de Dirac en el lado derecho como en (4.12). Cuantizamos la teoría promoviendo los coeficientes en (4.21) a operadores de creación y destrucción e imponiendo las relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$[\hat{a}_n,\hat{a}_m]=0\quad[\hat{a}_n^\dagger,\hat{a}_m^\dagger]=0\quad[\hat{a}_n,\hat{a}_m^\dagger]=\delta_{nm}.$$

Los estados se definirán, nuevamente, a partir de un vacío $|0\rangle$ (tal que $\hat{a}_n|0\rangle=0$ para todo n). Actuando con el operador de creación $\hat{a}_n^\dagger$, definiremos estados de una partícula

$$|1_n\rangle=\hat{a}_n^\dagger|0\rangle.$$

Si bien con estas imposiciones completamos la cuantización del campo a un instante de tiempo fijo dado, la ausencia de un vector de Killing temporal global inducirán ambigüedades en la elección de los modos en (4.22) que se harán explícitas al resolver los campos.

[12] Por ejemplo, en espacio plano, $n=\mathbf{p}$ y $u_n(x)=e^{ip_0x^0}e^{-i\mathbf{px}}$ con $p^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m}$.
[13] Incluso puede ser un multi-índice si las soluciones contienen más de un número cuántico.

4.4.3 Un caso de estudio: de Sitter 2+1

Analizaremos las soluciones del campo escalar para tres foliaciones de de Sitter: carta global, *static patch* y *Poincaré patch*. Las soluciones del campo escalar manifestarán, en cada caso, diferentes simetrías de la métrica. A nivel de grupos, la elección de un sistema de coordenadas corresponderá con la diagonalización de distintos operadores y hará manifiestas sus acciones sobre la solución, lo que facilitará la expresión de las mismas.

Para todos los casos, el producto interno se tomará respecto de hipersuperficies 2-dimensionales Σ de dS_{2+1} evaluadas a coordenada temporal constante. El diferencial de superficie tomará la forma $d\Sigma^\mu = n^\mu\sqrt{-\bar{g}}d^2y$ con y_i coordenadas en la subvariedad Σ.

Retomamos la expresión del espacio de de Sitter dS_{2+1} como un hiperboloide embebido en el espacio ambiente de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Dadas X^0, X^1, X^2, X^3 coordenadas de dicho espacio, de acuerdo a (3.7), tenemos que dS_{2+1} sigue la ecuación

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 1$$

con $l_{dS} = 1$. Los vectores de Killing (3.8) están calculados explícitamente, en cada uno de los sistemas de coordenadas, en Ap. C y serán referenciados continuamente a lo largo de esta sección.

Carta global

La métrica inducida de dS_{2+1} en la carta global es

$$ds^2 = -d\mathbf{t}^2 + \cosh^2(\mathbf{t})(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

donde $\mathbf{t} \in (-\infty, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi)$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$. La simetría evidente que presenta este sistema de coordenadas es la esférica (ver Ap. C y (2.63)). La simetría esférica se realizará a través de las autofunciones del Casimir de $so(3)$, que definimos como $\mathcal{C}_{so(3)} = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2$ [14]. Dichas funciones serán las de los armónicos esféricos $Y_l^n(\theta, \varphi)$, donde l es el número cuántico asociado al momento angular en θ y n el asociado a $J^3 = \partial_\varphi$. En coordenadas globales, el Casimir cuadrático de $so(3) \subset so(1,3)$ resulta

$$\mathcal{C}_{so(3)} = \partial_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + \cot\theta\,\partial_\theta. \tag{4.23}$$

La ecuación (4.19) para el campo escalar en la carta global resulta

$$\Box_{dS}^{(0)}\phi = -2\tanh(\mathbf{t})\partial_{\mathbf{t}}\phi - \partial_{\mathbf{t}}^2\phi + \frac{\cot\theta}{\cosh^2(\mathbf{t})}\partial_\theta\phi + \frac{1}{\cosh^2(\mathbf{t})}\partial_\theta^2\phi + \frac{1}{\cosh^2(\mathbf{t})\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\phi = m^2\phi. \tag{4.24}$$

donde $\sqrt{-g} = \cosh^2(\mathbf{t})\sin\theta$. Como comentario adicional, vemos que podemos escribir la ecuación

[14] Siguiendo la lógica de (2.26), la métrica de Killing-Cartan es la identidad y corresponde al bloque compacto de (2.65).

(4.24) como

$$\Box_{dS}^{(0)} = -2\tanh(\mathbf{t})\partial_{\mathbf{t}} - \partial_{\mathbf{t}}^2 + \frac{1}{\cosh^2(\mathbf{t})}\mathcal{C}_{so(3)}.$$

Esta descomposición natural del operador de Klein-Gordon nos permite comprender cómo la inclusión de armónicos esféricos es natural en la solución del campo escalar.

Resolvamos la ecuación diferencial (4.24) por medio de separación de variables. Planteamos que el campo escalar es un producto de funciones

$$\phi = f(\mathbf{t})g(\theta)h(\varphi).$$

Aplicando el *ansatz* en la ecuación de movimiento y dividiendo por ϕ obtenemos

$$-2\tanh(\mathbf{t})\frac{f'(\mathbf{t})}{f(\mathbf{t})} - \frac{f''(\mathbf{t})}{f(\mathbf{t})} + \frac{\cot\theta}{\cosh^2(\mathbf{t})}\frac{g'(\theta)}{g(\theta)} + \frac{1}{\cosh^2(\mathbf{t})\sin^2\theta}\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)} - m^2 = 0.$$

Despejando el término que depende de φ, queda igualado a términos que dependen de t y θ. Como representan funciones de distintas variables, ambos lados son iguales a una constante. Resolvemos la ecuación diferencial para φ

$$\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)} = -n^2.$$

Podemos plantear una solución de exponenciales imaginarias

$$h_n(\varphi) = A_1 e^{in\varphi} + A_2 e^{-in\varphi}.$$

Como tenemos un intervalo acotado y periódico en φ, pedimos que las soluciones sean periódicas en φ (univaluadas)

$$e^{in(\varphi+2\pi)} = e^{in\varphi}.$$

Esto cuantiza el espectro en φ. La condición

$$e^{i2\pi n} = 1$$

es posible sólo si $n \in \mathbb{Z}$. La ecuación diferencial queda separada para t y φ

$$2\sinh(\mathbf{t})\cosh(\mathbf{t})\frac{f_n'(\mathbf{t})}{f_n(\mathbf{t})} + \cosh^2(\mathbf{t})\frac{f_n''(\mathbf{t})}{f_n(\mathbf{t})} + m^2\cosh^2(\mathbf{t}) = \cot\theta\frac{g_n'(\theta)}{g_n(\theta)} + \frac{g_n''(\theta)}{g_n(\theta)} - \frac{n^2}{\sin^2\theta}.$$

Nuevamente, como son dos funciones de distintas variables, la igualdad se mantiene si ambas valen una constante $-\lambda$. Resolvemos la ecuación para θ

$$g_n''(\theta) + \cot\theta g_n'(\theta) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\right)g_n(\theta) = 0.$$

La solución son polinomios de Legendre P y Q

$$g_{n,F(\lambda)}(\theta) = B_1 P^n_{F(\lambda)}(\cos\theta) + B_2 Q^n_{F(\lambda)}(\cos\theta) \quad F(\lambda) = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4\lambda})$$

La solución debe ser regular en toda la variedad. Las singularidades dentro de la variedad que acarrea esta solución se encuentran en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Expandiendo en $\theta = 0$ a primer orden y buscando cancelar los términos que divergen ($\theta^{-|n|}$) llegamos a la condición

$$B_2 = \frac{-2}{\pi\cot(n\pi)} B_1.$$

Tenemos que $\cot(n\pi) = \infty\ \forall n \in \mathbb{Z}$, por lo que $B_2 = 0$. Si expandimos en $\theta = \pi$ a primer orden y pedimos la ausencia de singularidades, tenemos que la regularidad de la solución se cumple siempre que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+4\lambda}\right) = 0.$$

Los términos divergentes se anulan a todo orden con esta condición. La segunda ecuación nos lleva a la última condición para λ

$$\lambda = l(l+1) \quad l \in \mathbb{Z}.$$

La solución resultante para la parte de θ es

$$g_{n,l}(\theta) = B_1 P^n_l(\cos\theta).$$

Tomando la solución $h_n(\varphi) = Ae^{in\varphi}$, las funciones angulares componen los armónicos esféricos $Y^n_l(\theta,\varphi) = P^n_l(\cos\theta)e^{in\varphi}$. Para cada valor de l, existen $2l+1$ soluciones independientes, una por cada entero n tal que $-l \leq n \leq l$.[15]

La ecuación diferencial para la parte temporal queda

$$\cosh^2(\mathbf{t}) f''_{n,l} + 2\sinh(\mathbf{t})\cosh(\mathbf{t}) f'_{n,l} + (m^2\cosh^2(\mathbf{t}) + l(l+1)) f_{nl} = 0$$

y la solución son los polinomios de Legendre

$$f(\mathbf{t})_{n,l} = \frac{c_1^{n,l} P_l^{1-\Delta}(\tanh(\mathbf{t})) + c_2^{n,l} Q_l^{1-\Delta}(\tanh(\mathbf{t}))}{\cosh(\mathbf{t})}.$$

donde definimos Δ, el factor de escala presentado en 2.4, tal que

$$m^2 = \Delta(2-\Delta). \tag{4.25}$$

[15]La dependencia en n^2 de la ecuación diferencial indica que la solución $f(\mathbf{t})^n_l$ depende de $|n|$.

La solución final es[16]

$$\phi(\mathbf{t},\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}\frac{c_1^{n,l}P_l^{1-\Delta}(\tanh(\mathbf{t}))+c_2^{n,l}Q_l^{1-\Delta}(\tanh(\mathbf{t}))}{\cosh(\mathbf{t})}Y_l^n(\theta,\varphi) \tag{4.26}$$

donde

$$Y_l^n(\theta,\varphi)=P_l^n(\cos\theta)e^{in\varphi}$$

Expandiendo en el límite *late-time* $\mathbf{t}\to\infty$, las soluciones se simplifican

$$f_l^n\sim((c_1-c_2)e^{-\Delta\mathbf{t}}-c_2e^{-\Delta_s\mathbf{t}})\quad\Delta_s=2-\Delta.$$

Vamos a estudiar el caso más sencillo: *campos pesados*, introducida en (4.5)

$$m^2>1,$$

donde el factor de escala Δ resulta

$$\Delta=1+i\nu\quad\nu=\sqrt{m^2-1}. \tag{4.27}$$

Para normalizar, tomamos la condición $c_2=0$. De esta manera, los modos resultan en funciones "pura onda" con frecuencia $\nu\in\mathbb{R}$ positiva en $\mathbf{t}\to\infty$ y que decaen a cero

$$\phi_{n,l}\sim\frac{2c_1}{\Gamma(1+i\nu)}e^{-\mathbf{t}}e^{-i\nu\mathbf{t}}Y_l^n(\theta,\varphi). \tag{4.28}$$

Esto demuestra cómo se simplifican los modos en *late-time*. El campo (4.28) es análogo a la propagación libre de un modo de energía/frecuencia ν positiva en espacio plano. En la cuantización, siguiendo con lo presentado en espacio plano (4.13), podremos asociar este modo con el operador de aniquilación $\hat{a}_{n,l}$.

Calculando el producto interno de Klein-Gordon (4.20) y normalizando resulta[17]

$$\langle\phi_{nl},\phi_{n'l'}\rangle=\delta_{nn'}\delta_{ll'}.$$

La 3-forma de volumen en de Sitter es

$$\tilde{\Omega}=\cosh^2(\mathbf{t})\sin\theta d\tilde{\mathbf{t}}\wedge d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi}=\tilde{n}\wedge\tilde{\alpha},$$

donde $\tilde{n}$ es una 1-forma normal a la superficie $\mathbf{t}=cte$, por lo que es proporcional a $d\tilde{\mathbf{t}}$. Como $g(d\tilde{\mathbf{t}},d\tilde{\mathbf{t}})=g^{\mathbf{tt}}=-1$, basta con pedir $\tilde{n}=d\tilde{\mathbf{t}}$. En consecuencia, la 2-forma inducida sobre la

[16] Las constantes A_1 y B_1 fueron absorbidas en c_1 y c_2.
[17] Es necesario imponer deltas de Kronecker pues n y l toman valores en un espectro discreto.

superficie de $\mathbf{t}$ constante es $\tilde{\alpha} = \cosh^2(\mathbf{t}) \sin\theta \, d\tilde{\theta} \wedge d\tilde{\varphi}$. El diferencial de hipersuperficie a $\mathbf{t} = cte$ es

$$d\Sigma^\mu = \delta^\mu_{\mathbf{t}} \tilde{\alpha}(d\theta, d\varphi) = \delta^\mu_{\mathbf{t}} \cosh^2(\mathbf{t}) \sin\theta d\theta d\varphi.$$

El producto interno (4.20), resulta

$$\langle \phi_{nl}, \phi_{n'l'} \rangle = -i \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta d\varphi \, \cosh^2(\mathbf{t}) \sin\theta \frac{4|c_1|^2 e^{-2\mathbf{t}}(-\Delta_s + \Delta)}{\Gamma(1+i\nu)\Gamma(1-i\nu)} Y^{n'*}_{l'}(\theta,\varphi) Y^n_l(\theta,\varphi),$$

donde $(-\Delta_s + \Delta) = 2i\nu$.
La normalización de los armónicos es $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta d\varphi \, \sin\theta Y^{n'*}_{l'}(\theta,\varphi) Y^n_l(\theta,\varphi) = \delta_{nn'}\delta_{ll'}$. A *late-time*, $\cosh^2(\mathbf{t}) \sim \frac{e^{2\mathbf{t}}}{4}$, entonces

$$-i \frac{2i\nu|c_1|^2}{|\Gamma(1+i\nu)|^2} = 1.$$

La ecuación para el módulo de la constante nos permite elegir el valor de la misma a menos de una fase. En particular, elegimos

$$c_1 = \frac{\Gamma(1+i\nu)}{\sqrt{2\nu}}.$$

Los modos *out* (*late-time*), apropiadamente normalizados a *late-time*, toman la forma

$$\phi^{out}_{n,l} = \frac{\Gamma(1+i\nu)}{\sqrt{2\nu}} P_l^{-i\nu}(\tanh(\mathbf{t})) \operatorname{sech}(\mathbf{t}) \, Y^n_l(\theta,\varphi). \tag{4.29}$$

En virtud de (4.21), el campo (real) canónicamente cuantizado adquiere la expresión

$$\hat{\phi}(\mathbf{t},\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^{l} (\hat{a}_{n,l} \phi^{out}_{n,l} + \hat{a}^\dagger_{n,l} \phi^{out*}_{n,l}),$$

donde $\hat{a}_{n,l}$ es el operador aniquilación que define el vacío *out*

$$\hat{a}_{n,l} \left|0\right\rangle_{out} = 0 \qquad \forall n, l.$$

La acción del operador creación sobre el vacío crea los estados de una partícula

$$\left|n,l\right\rangle = \hat{a}^\dagger_{n,l} \left|0\right\rangle_{out} \quad \forall n, l.$$

Los números cuánticos n, l pueden ser interpretados como autovalores de

$$iJ^3 \left|n,l\right\rangle = i\partial_\varphi \left|n,l\right\rangle = n \left|n,l\right\rangle.$$
$$\mathcal{C}_{so(3)} \left|n,l\right\rangle = -l(l+1) \left|n,l\right\rangle.$$

La elección de normalización en (4.28) nos permitió asociar el operador de aniquilación $\hat{a}_{n,l}$ a los modos $e^{-i\nu\mathbf{t}}$ en *late-time*. Esta asignación arbitraria fija el estado de vacío de la teoría $\left|0\right\rangle_{out}$ como aquel que es aniquilado por $\hat{a}_{n,l}$. Si tomamos la solución (4.29) y expandimos en el límite *early-time*

$\mathbf{t} \to -\infty$, la función temporal toma la forma

$$f_l^n \sim e^{\mathbf{t}}(e^{-i\nu\mathbf{t}} + e^{i\nu\mathbf{t}}).$$

Obtenemos una combinación de términos "pura onda" de frecuencia positiva y negativa. Este resultado demuestra que un modo de energía positiva $e^{-i\nu\mathbf{t}}$ a *late-time* corresponde con la evolución de una mezcla de modos de energía negativa y positiva en *early-time*. Esto es diferente a lo que sucede en espacio plano, donde la evolución de un modo de energía positiva (de $\mathcal{P}^+$) evoluciona cerradamente, sin mezclarse con uno de energía negativa (de $\mathcal{P}^-$). Esto quiere decir que los estados son invariantes ante el operador de traslaciones temporales de Poincaré $\hat{P}^0$. Dicho resultado de invariancia temporal está asociado con una noción de energía conservada debido a que la separación $\mathcal{P}^+ \oplus \mathcal{P}^-$ garantiza que $\hat{P}^0$ esté acotado inferiormente. Por otro lado, el espacio de de Sitter no tiene un vector de Killing temporal global que manifieste esta simetría y por eso su grupo de simetrías $SO(1,d)$ no contiene un operador como $\hat{P}^0$ acotado inferiormente [65, 25]. Esto lleva a un conflicto de interpretaciones a la hora de asignar energía y dar una interpretación de partícula en el espacio [63].

Existe una elección de vacío alternativa. Si volvemos a (4.26), es posible elegir otro par de constantes $\tilde{c_1}$ y $\tilde{c_2}$ tal que la expansión a *early-time* $\mathbf{t} \to -\infty$ de la función temporal resulte

$$\tilde{f}_l^n \sim e^{\mathbf{t}} e^{i\nu\mathbf{t}}.$$

Por ser un modo de energía negativa, lo asociaremos con algún operador de creación $b_{n,l}^\dagger$. El campo (real) canónicamente cuantizado con los modos *in*, normalizados a *early-time* $\mathbf{t} \to -\infty$, toma la forma

$$\hat{\phi}(\mathbf{t}, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^{l} \hat{b}_{n,l}\phi_{n,l}^{in} + \hat{b}_{n,l}^\dagger \phi_{n,l}^{in*} \tag{4.30}$$

El conjugado hermítico de $\hat{b}_{n,l}^\dagger$ (i.e. $\hat{b}_{n,l}$) es el operador de aniquilación de un nuevo estado de vacío que llamaremos $|0\rangle_{in}$

$$\hat{b}_{n,l} |0\rangle_{in} = 0 \quad \forall n, l.$$

Es evidente que este vacío será diferente a $|0\rangle_{out}$. Si expandimos (4.30) a *late-time* $\mathbf{t} \to \infty$, la función temporal resulta

$$\tilde{f}_l^n \sim e^{\mathbf{t}}(e^{-i\nu\mathbf{t}} + e^{i\nu\mathbf{t}}).$$

La aparición de un término con $e^{-i\nu\mathbf{t}}$ afirma que la evolución creó partículas al mezclar modos que, originalmente, eran "pura onda" en *early-time*.

Exploremos esta última afirmación. Podemos relacionar los operadores escalera $\hat{a}$ y $\hat{b}$ por medio de

una transformación de Bogoliubov

$$\hat{b}^{\dagger}_{n,l} = \sum_{n',l'} \left[-\beta_{n,l;n',l'} \hat{a}_{n',l'} + \alpha_{n,l;n',l'} \hat{a}^{\dagger}_{n',l'} \right], \tag{4.31}$$

con $\beta_{n,l;n',l'} = -\langle \phi^{in}_{n,l}, \phi^{out*}_{n',l'} \rangle$ y $\alpha_{n,l;n',l'} = \langle \phi^{in}_{n,l}, \phi^{out}_{n',l'} \rangle$. Definiendo el observable número de partículas $\hat{N}$ en *late-time* y *early-time*

$$\hat{N}_{out} = \hat{a}^{\dagger}_{n,l} \hat{a}_{n,l}$$
$$\hat{N}_{in} = \hat{b}^{\dagger}_{n,l} \hat{b}_{n,l},$$

respectivamente, obtenemos un valor de expectación no nulo sobre el estado de vacío a *late-time* para el operador número de partículas definido a *early-time*

$$\begin{aligned}
&{}_{out}\langle 0| \hat{N}_{in} |0\rangle_{out} = {}_{out}\langle 0| \hat{b}^{\dagger}_{n,l} \hat{b}_{n,l} |0\rangle_{out} = \\
&= \sum_{n',l'} \sum_{n'',l''} {}_{out}\langle 0| \left(-\beta_{n,l;n',l'} \hat{a}_{n',l'} + \alpha_{n,l;n',l'} \hat{a}_{n',l'} \right) \left(\alpha^{*}_{n,l;n'',l''} \hat{a}^{\dagger}_{n'',l''} - \beta^{*}_{n,l;n'',l''} \hat{a}^{\dagger}_{n'',l''} \right) |0\rangle_{out} = \\
&= \sum_{n',l'} \sum_{n'',l''} \beta_{n,l;n',l'} \beta^{*}_{n,l;n'',l''} \, {}_{out}\langle 0| \hat{a}_{n,l} \hat{a}^{\dagger}_{n,l} |0\rangle_{out} \\
&= \sum_{n',l'} \sum_{n'',l''} \beta_{n,l;n',l'} \beta^{*}_{n,l;n'',l''} \delta_{n',n''} \delta_{l',l''}.
\end{aligned}$$

Entonces

$${}_{out}\langle 0| \hat{N}_{in} |0\rangle_{out} = \sum_{n',l'} |\beta_{n,l;n',l'}|^2.$$

Si pedimos $\beta_{n,l;n',l'} = 0$, recuperamos el resultado en espacio plano y los estados de vacío resultan todos equivalentes. En de Sitter, el observador a *early-time* mide que hay partículas en el estado de vacío del observador a *late-time*. Esto significa que la noción de vacío, y por ende de partícula, definidas por distintos observadores es ambigüa en este espacio. Para más detalles, visitar [63].

Poincaré patch

La métrica de dS_{2+1} en el *Poincaré patch* es

$$ds^2 = \frac{-d\tau^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2}{\tau^2},$$

donde $\tau \in (-\infty, 0)$ y $x^1, x^2 \in (-\infty, +\infty)$. La ecuación (4.19) para el campo escalar resulta

$$\Box^{(0)}_{dS} \phi = \tau \partial_\tau \phi + \tau^2 (-\partial^2_\tau \phi + \partial^2_{x^1} \phi + \partial^2_{x^2} \phi) = m^2 \phi, \tag{4.32}$$

donde $\sqrt{-g} = 1/\tau^3$. Nuevamente, resolvemos la ecuación diferencial planteando separación de variables

$$\phi = f(\tau)g(x^1)h(x^2).$$

Aplicando el *ansatz* en la ecuación de movimiento y dividiendo por ϕ obtenemos

$$\tau\frac{f'(\tau)}{f(\tau)} + \tau^2\left(-\frac{f''(\tau)}{f(\tau)} + \frac{g''(x^1)}{g(x^1)} + \frac{h''(x^2)}{h(x^2)}\right) - m^2 = 0.$$

Bajo los mismos argumentos de soluciones anteriores, pedimos que $g''(x^1) = -p_1^2 g(x^1)$ y $h''(x^2) = -p_2^2 h(x^2)$. Esto nos permite expandir el campo en ondas planas con $p_i \in \mathbb{R}$.

La ecuación diferencial para la parte temporal queda

$$f''(\tau) - \frac{f'(\tau)}{\tau} + \left(\frac{m^2}{\tau^2} + p_1^2 + p_2^2\right) f(\tau) = 0$$

y las soluciones son las funciones de Bessel J e Y

$$f_{\mathbf{p}} = (-\tau)\left[c_1 J_{i\sqrt{m^2-1}}(-p\tau) + c_2 Y_{i\sqrt{m^2-1}}(-p\tau)\right],$$

donde $p = \sqrt{\mathbf{p}^2} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$. Estas funciones descomponen el comportamiento asintótico de las soluciones en $\tau = 0$ de la forma

$$J \sim \tau^{i\nu} \quad Y \sim \tau^{-i\nu}. \tag{4.33}$$

Eligiendo la constante $c_2 = 0$, obtenemos modos que decaen y son "pura onda" en $\tau = 0$

$$f(\tau) \sim (c_1 - c_2)\tau^{1+i\nu} - c_2\tau^{1-i\nu}.$$

y buscamos la otra constante por normalización tomando el producto de Klein-Gordon (4.20) e imponiendo

$$\langle \phi_{\mathbf{p}}, \phi_{\mathbf{p}'} \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

La 3-forma de volumen se separa como

$$\tilde{\Omega} = \frac{1}{\tau^3} d\tilde{\tau} \wedge d\tilde{x^1} \wedge d\tilde{x^2} = \tilde{n} \wedge \tilde{\alpha}$$

donde $\tilde{n}$ es una 1-forma normal a la superficie $\tau = cte$, por lo que es proporcional a $d\tilde{\tau}$. La norma es

$$g(d\tilde{\tau}, d\tilde{\tau}) = g^{\tau\tau} = -\tau^2$$

entonces $\tilde{n} = \frac{d\tilde{\tau}}{\tau}$ y el volumen métrico queda

$$\tilde{\Omega} = \tilde{n} \wedge \frac{d\tilde{x^1} \wedge d\tilde{x^2}}{\tau^2}.$$

La forma de volumen inducida en la superficie es $\tilde{\alpha} = \frac{d\tilde{x^1} \wedge d\tilde{x^2}}{\tau^2}$. La normal resulta $n^\tau = g^{\tau\tau} n_\tau = \tau$ y $n^{x^i} = 0$. El diferencial de hipersuperficie a $\tau = cte$ es

$$d\Sigma^\mu = \delta^\mu_\tau \tilde{\alpha}(dx^1, dx^2) = \frac{n^\mu}{\tau^2} dx^1 dx^2 = \frac{\delta^\mu_\tau}{\tau} dx^1 dx^2.$$

El producto de Klein-Gordon resulta

$$\langle \phi_{\mathbf{p}}, \phi_{\mathbf{p}'} \rangle = i \int \frac{1}{\tau} d^2x \, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{x}} p^{i\nu} p'^{-i\nu} \frac{-2i\nu\tau}{|\Gamma(1+i\nu)|^2} |c_1|^2.$$

Tenemos que $\int d^2x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ y, entonces, la constante c_1 puede ser elegida como

$$c_1 = \frac{\Gamma(1+i\nu)}{2\pi\sqrt{\nu}}.$$

Los modos *out*, normalizados a $\tau = 0$, resultan

$$\phi^{out}_{\mathbf{p}} = \frac{\Gamma(1+i\nu)\tau}{2\pi\sqrt{\nu}} \, J_{i\sqrt{m^2-1}}(-p\tau) \, e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}.$$

Finalmente, el campo (real) canónicamente cuantizado en $\tau = 0$ es

$$\hat{\phi}(\tau, \mathbf{x}) = \int d^2\mathbf{p} \, (\phi^{out}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \phi^{out*}_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}).$$

El operador de aniquilación $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ fue impuesto por asociación con el modo asintótico de "energía positiva" $\tau^{i\nu} = e^{i\nu \ln(|\tau|)}$ [18] y aniquila el vacío $|0\rangle_{out}$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} |0\rangle_{out} = 0 \quad \forall \mathbf{p}.$$

Los estados de una partícula serán

$$|\mathbf{p}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} |0\rangle_{out}.$$

Los números cuánticos $\mathbf{p} = (p_{x^1}, p_{x^2})$ pueden ser interpretados como autovalores de las traslaciones espaciales en el *Poincaré patch*. Es decir,

$$-i(K^1 - J^2) |\mathbf{p}\rangle = -i\partial_{x^1} |\mathbf{p}\rangle = p_1 |\mathbf{p}\rangle$$
$$-i(K^2 + J^1) |\mathbf{p}\rangle = -i\partial_{x^2} |\mathbf{p}\rangle = p_2 |\mathbf{p}\rangle.$$

Static patch

La métrica de dS_{2+1} en el *static patch* es

$$ds^2 = -(1-r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2,$$

[18] Notemos que, para $\tau > -1$, $T = \ln(|\tau|) < 0$. Entonces $\tau^{i\nu} = \exp(-i\nu|T|)$.

donde $t \in (-\infty, +\infty)$, $r \in [0, 1)$, $\varphi = [0, 2\pi)$. El valor $r = 1$ es el radio del horizonte cosmológico del *static patch*. Las simetrías evidentes que presenta este intervalo son las dadas por los vectores de Killing ∂_t y ∂_φ. Esto adelanta que las soluciones serán autofunciones (exponenciales) de t y φ.

Notemos que el tiempo t recupera una noción Minkowskiana, puesto que la métrica no depende del mismo y ∂_t es un vector de Killing temporal para esta carta ($\partial_t \cdot \partial_t < 0 \ \forall r < 1$). El boost K^3, generador de $SO(1,1)$, se corresponde con ∂_t (ver Ap. C). El operador genera traslaciones temporales en el *static patch* y su diagonalización asocia un número cuántico que resulta ser de espectro continuo (la dirección de $SO(1,1)$ es no compacta) y es la energía de los estados en el *static patch*. El otro operador diagonalizado, que pertenece al subgrupo compacto $SO(2)$, es J^3 y corresponde con ∂_φ [25]. Estos operadores clasificarán los estados de la **UIR** una vez cuantizada la teoría.

La simetría temporal nos permite calcular la energía conservada en la carta. Partimos de (4.16) y la corriente (4.15) en cuestión toma la expresión

$$\mathcal{J}_\nu = k^\mu T_{\mu\nu} = T_{t\nu},$$

donde $k = \partial_t$. La 3-forma de volumen se descompone como

$$\tilde{\Omega} = r\tilde{dt} \wedge \tilde{dr} \wedge \tilde{d\varphi} = \tilde{n} \wedge \tilde{\alpha},$$

donde $\tilde{\alpha}$ es la 2-forma de volumen de la variedad de integración y $\tilde{n}$ es una 1-forma normal a la superficie $t = cte$, por lo que es proporcional a $\tilde{dt}$. Como $g(\tilde{dt}, \tilde{dt}) = g^{tt} = -(1-r^2)^{-1}$, debemos pedir $\tilde{n} = \sqrt{1-r^2}\tilde{dt}$. En consecuencia, la 2-forma inducida sobre la superficie de t constante es $\tilde{\alpha} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\tilde{dr} \wedge \tilde{d\varphi}$. El diferencial de hipersuperficie toma la expresión

$$d\Sigma^\mu = \delta^\mu_t \tilde{\alpha}(dr, d\varphi) = \delta^\mu_t \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\varphi.$$

Tomando la expresión (4.18), la carga conservada H frente a traslaciones temporales en el *static patch* es

$$H = \int_0^1 \int_0^{2\pi} dr d\varphi \frac{r}{2\sqrt{1-r^2}} \left[(2-(1-r^2)^2)(\partial_t\phi)^2 + (\partial_r\phi)^2 + r^2(1-r^2)(\partial_\varphi\phi)^2 + m^2(1-r^2)\phi^2\right]. \tag{4.34}$$

La ecuación (4.19) para el campo escalar en *static patch* resulta

$$\Box^{(0)}_{dS}\phi = -\frac{1}{1-r^2}\partial_t^2\phi + \frac{1-3r^2}{r}\partial_r\phi + (1-r^2)\partial_r^2\phi + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\phi = m^2\phi, \tag{4.35}$$

donde $\sqrt{-g} = r$. Resolvemos planteando separación de variables

$$\phi = f(t)g(r)h(\varphi).$$

Aplicando el *ansatz* en la ecuación de movimiento y dividiendo por ϕ obtenemos

$$-\frac{1}{1-r^2}\frac{f''(t)}{f(t)}+\frac{1-3r^2}{r}\frac{g'(r)}{g(r)}+(1-r^2)\frac{g''(r)}{g(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)}-m^2=0$$

Podemos despejar sin problema el término que depende de φ e igualarlo a los términos que dependen de t y r. Como representan funciones de distintas variables, ambos lados son iguales a una constante $-n^2$. Resolvemos la ecuación diferencial para φ, i.e. $h''(\varphi)=-n^2h(\varphi)$, con exponenciales imaginarias $h_n(\varphi)=e^{\pm in\varphi}$. Como tenemos un intervalo acotado y periódico en φ, pedimos que las soluciones sean periódicas en φ (univaluadas)

$$e^{in(\varphi+2\pi)}=e^{in\varphi}.$$

Esto discretiza el espectro en φ: la condición $e^{i2\pi n}=1$ es posible sólo si $n\in\mathbb{Z}$. La ecuación diferencial queda separada para t y φ

$$\frac{f''(t)}{f(t)}=\frac{(1-r^2)(1-3r^2)}{r}\frac{g'(r)}{g(r)}+(1-r^2)^2\frac{g''(r)}{g(r)}-n^2\frac{1-r^2}{r^2}-m^2(1-r^2).$$

Nuevamente, como son dos funciones de distintas variables, la igualdad se mantiene si ambas valen una constante $-\omega^2$. La ecuación para t resulta $f''(t)=-\omega^2f(t)$ y se resuelve planteando $f_\omega(t)=e^{\pm i\omega t}$. Como queremos que sean soluciones oscilatorias en el infinito, necesitamos que $\omega\in\mathbb{R}$. Como mencionamos anteriormente, la orientación de ∂_t en la dirección $SO(1,1)$ (no acotada) vuelve al espectro continuo. Este valor estará asociado a la energía de los modos. Esto quiere decir que, en el espacio de Fourier, los modos tendrán una energía definida ω que los distinguirá y serán autoestados del Hamiltoniano (4.34). Esta simetría es imposible de realizar en todo el espacio de de Sitter, dado que la foliación global no admite un vector de Killing temporal global.

La ecuación diferencial para la parte radial queda

$$(1-r^2)^2g''_{n,\omega}+\frac{(1-r^2)(1-3r^2)}{r}g'_{n,\omega}+\left(\omega^2-n^2\frac{1-r^2}{r^2}-m^2(1-r^2)\right)g_{n,\omega}=0$$

y las soluciones son funciones hipergeométricas

$$({}_2F_1)_{|n|,\omega}(r)\doteq{}_2F_1\left[\frac{1}{2}(2+|n|-\Delta+i\omega),\frac{1}{2}(|n|+\Delta+i\omega),1+|n|,r^2\right].$$

Concretamente, la función radial resulta

$$g_{|n|,\omega}(r)=(1-r^2)^{\frac{i\omega}{2}}\left(A_{|n|,\omega}r^{|n|}({}_2F_1)_{|n|,\omega}+B_{|n|,\omega}r^{-|n|}({}_2F_1)_{-|n|,\omega}\right).$$

La solución debe ser regular en toda la variedad. Las singularidades dentro de la variedad que

puede traer esta solución son en $r = 0$ y $r = 1$. Expandiendo en $r = 0$, a primer orden, resulta

$$g_{|n|,\omega}(r) \sim r^{|n|} A_{|n|,\omega} + r^{-|n|} B_{|n|,\omega}$$

y, buscando cancelar los términos que divergen ($r^{-|n|}$), pedimos que se cumpla la condición $B_{|n|,\omega} = 0$. La función radial relevante resulta

$$\mathcal{G}_{|n|,\omega}(r) \doteq A_{|n|,\omega}(1 - r^2)^{\frac{i\omega}{2}} r^{|n|}.$$

Expandiendo en $r \sim 1^-$, obtenemos

$$\mathcal{G}_{n,\omega}(r) \sim \left((1 - r^2)^{\frac{i\omega}{2}} A_{n,\omega} + (1 - r^2)^{-\frac{i\omega}{2}} A^*_{n,\omega}\right),$$

que nos muestra la expresión de los modos en el horizonte del *static patch*. Podemos reescribir

$$(1 - r^2)^{\frac{i\omega}{2}} = e^{\ln((1-r^2)^{\frac{i\omega}{2}})} = e^{i\omega \ln\sqrt{1-r^2}}.$$

Entonces, la solución del campo *near horizon* $r \sim 1^-$ resulta

$$\phi_{n,\omega} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega t + n\varphi)} \left(e^{i\omega \ln\sqrt{1-r^2}} A_{n,\omega} + e^{-i\omega \ln\sqrt{1-r^2}} A^*_{n,\omega}\right) d\omega.$$

El campo queda descompuesto en la suma de modos que entran y salen del horizonte del *static patch*. La igualdad del módulo de las constantes indica que la radiación de modos que salen del y entran al horizonte al mismo tiempo es la misma.

Omitiremos el trabajo de normalizar los modos en estas coordenadas. El campo canónicamente cuantizado, de acuerdo a (4.21), tomará la expresión

$$\phi_{n,\omega}(t, r, \varphi) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\hat{a}_{n,\omega} e^{-i(\omega t + n\varphi)} \mathcal{G}_{n,\omega} + \hat{a}^\dagger_{n,\omega} e^{i(\omega t + n\varphi)} \mathcal{G}^*_{n,\omega}\right) d\omega,$$

que consiste en una descomposición en modos de "energía positiva" y "energía negativa" a todo tiempo t. Podemos definir un vacío invariante $|0\rangle$ que satisface

$$\hat{a}_{n,\omega} |0\rangle = 0 \quad \forall n, \omega.$$

Los estados de una partícula serán

$$|n, \omega\rangle = \hat{a}^\dagger_{n,\omega} |0\rangle$$

Como hemos estudiado, la carta del *static patch* realiza, explícitamente, los dos vectores de Killing conmutantes J^3 y K^3 (ver (2.64)) correspondientes a los dos *Cartanes* de $SO(1,1)_t \times SO(2)_\varphi \subset$

$SO(1,3)$. En efecto, los números cuánticos n y ω corresponden a

$$iJ^3 |n,\omega\rangle = i\partial_\varphi |n,\omega\rangle = n |n,\omega\rangle$$
$$iK^3 |n,\omega\rangle = i\partial_t |n,\omega\rangle = \omega |n,\omega\rangle .$$

4.5 Cuantización del campo espinorial en de Sitter

Otra de las representaciones relevantes a estudiar para conseguir un panorama más completo sobre la naturaleza de las partículas en el espacio de de Sitter es la espinorial. Los espinores han sido estudiados extensamente en el marco de la teoría de campos en Minkowski con interacciones. En este formalismo, se logró formular la teoría de Electrodinámica cuántica que describe cómo la materia cargada eléctricamente interactúa con la luz, así como proporcionar una contraparte cuántica al Electromagnetismo clásico [22]. Muchas otras teorías que involucran espinores han sido formuladas posteriormente en el contexto de relatividad especial [70]. Por estos resultados, resulta imperante conocer la teoría de campos que los rige en el contexto de gravedad para comprender cómo aporta el spin a la discusión de partículas propagándose en un *background* curvo; especialmente, en un universo en expansión como modela de Sitter.

En esta sección, repetiremos el estudio, que hicimos para el campo escalar, para un espinor propagándose en el espacio de de Sitter dS_d. Resolveremos la ecuación de movimiento en el *Poincaré patch* así como una cuantización con el vacío $|0\rangle_{in}$ del parche.

4.5.1 Comentarios sobre espinores en espacio plano

En espacio plano $\mathbb{R}^{1,d-1}$ con signatura $\{-,+,...,+\}$, un espinor de Dirac sigue la ecuación

$$(\not{\partial} - m)\psi = 0, \tag{4.36}$$

donde $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. Multiplicando por $(\not{\partial} + m)$ obtenemos

$$(\not{\partial} + m)(\not{\partial} - m)\psi = (g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\psi = 0 \tag{4.37}$$

que es la ecuación de Klein-Gordon (4.6). El espinor, solución de esta ecuación, se puede expresar como una onda plana

$$\psi_{\mathbf{p}} = \psi_0 e^{ipx},$$

donde ψ_0 es una representación espinorial finita. La ecuación de Klein-Gordon impone la relación de dispersión (4.8) y, en consecuencia, $p^0 = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Para la solución en reposo ($\mathbf{p} = 0$), tenemos

$$\mp im\gamma_0\psi_0 = m\psi_0 \Rightarrow \gamma_0\psi_0 = \pm i\psi_0.$$

Un espinor $\psi_{\mathbf{p}}$ con $\mathbf{p}$ arbitrario resultará de aplicar un boost a la solución en reposo. Dichas soluciones seguirán siendo autoestados de γ_0 y dividirán el espacio de representación en dos

autoespacios de γ_0: ψ^+ y ψ^- (con autovalores $+i$ y $-i$ respectivamente). Además, por la propiedad (2.3.1), ambos espacios de representación deben tener misma dimensión, dado que la traza de una matriz cuadrada es igual a la suma de sus autovalores y, como $Tr(\gamma^\mu) = 0$ (ver (2.3.1)), entonces debemos tener la misma dimensión en ambos autoespacios, cada uno de $2^{\left[\frac{d}{2}\right]}/2$ [19]

$$\psi_0^\pm = \sum_\alpha^{N/2} \mathfrak{n}_\alpha (\psi_0^\pm)_\alpha \quad N = 2^{\left[\frac{d}{2}\right]},$$

donde $\mathfrak{n}_\alpha$ son coeficientes de $\mathbf{s}$. Al resolver el campo en dS_d, explotaremos esta división para desacoplar las ecuaciones de movimiento y resolver la teoría con

$$\psi_0 = c^+ \psi_0^+ + c^- \psi_0^-.$$

4.5.2 Ecuación de Dirac y Dirac-Lichnerowicz

La acción para un espinor $\psi(x)$ en espacios curvos es

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} (\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi),$$

donde ∇_μ es la conexión de spin, $\gamma^\mu = \gamma^a e_a^\mu$ son las matrices de Dirac definidas sobre el espacio curvo y m es la *masa* del campo ψ[20]. Detalles sobre su normalización se encuentran en Ap. B.

Dada una transformación de los campos $\bar{\psi} \to \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}$, la variación de la acción es

$$\delta S = \int d^d x \sqrt{-g} \delta\bar{\psi} (\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m\psi).$$

Imponiendo condiciones de borde de Dirichlet y denotando $\not{\nabla} = \gamma^\mu \nabla_\mu$, la variación nula de la acción resulta en la ecuación de movimiento

$$\not{\nabla} \psi = m\psi, \tag{4.38}$$

que es la ecuación de Dirac covariante en espacios curvos.

Al estilo de (4.20), construimos un producto interno de Dirac a través de la conservación de la corriente de Dirac. Expresamos una integral sobre un volumen Ω contenido por dos superficies espaciales Σ_{τ_1} y Σ_{τ_2}

$$-i \int_\Omega d^{d-1} x dx^0 \sqrt{-g} \left(\bar{f}_1 (\not{\nabla} - m) f_2 - \bar{f}_1 (-\overleftarrow{\not{\nabla}} - m) f_2 \right),$$

donde $\bar{f} = f^\dagger \beta$. Consideraremos que f_1 y f_2 son soluciones a la ecuación (4.38), por lo que la

[19] Estas son todas las componentes del vector $\mathbf{s}$ de *highest-weight*. En $d = 3$, $\mathbf{s}$ es el spin y tiene dos proyecciones: *up* y *down* [22].

[20] Nuevamente, hacemos énfasis en la característica paramétrica de m, que elegimos denominarlo como la *masa*.

integral se anula. Luego, los términos de masa se cancelan y obtenemos $\nabla\!\!\!/(\bar{f}_1 f_2)$. Entonces

$$-i\int_\Omega d^{d-1}xdx^0\nabla_\mu\left(\sqrt{-g}\,\bar{f}_1\gamma^\mu f_2\right)=0$$

y si usamos el teorema de Stokes, llegamos a la definición de un producto interno conservado

$$\langle f_1,f_2\rangle=-i\int_\Sigma d^{d-1}x\,\sqrt{-\overline{g}}\,n_\mu\bar{f}_1\gamma^\mu f_2, \tag{4.39}$$

donde $\bar{f}=f^\dagger i\gamma_0$. Chequeemos que esta elección del *intertwiner* β es consistente. Primero, en 2.3.1, β fue construida hermítica y γ_0 antihermítica (ver Ap. A.1), por lo que $\beta=i\gamma_0=\beta^\dagger$. Además, si tomamos $\gamma_a\neq\gamma_0$ ($\gamma_a=\gamma_a^\dagger$) y (2.21) con $\beta=i\gamma^0$, obtenemos

$$\beta\gamma_a\beta^{-1}=(i\gamma_0)\gamma_a(i\gamma_0)=\gamma_a\gamma_0\gamma_0=-\gamma_a=-\gamma_a^\dagger,$$

donde usamos que $(i\gamma_0)^{-1}=i\gamma_0$. Por otro lado, si tomamos $\gamma_a=\gamma_0$

$$(i\gamma_0)\gamma_0(i\gamma_0)=\gamma_0=-\gamma_0^\dagger.$$

En el espacio de Minkowski, el espinor de Dirac es solución de la ecuación de Klein-Gordon, que resulta ser el cuadrado de la ecuación de Dirac (ver (4.37)). Un resultado análogo también es válido en espacios curvos. Esto se corresponde con que el espinor define naturalmente el espacio de representación del grupo $Spin(1,d)$, el cual constituye el *double cover* del grupo de Lorentz $SO(1,d)$. Si realizamos la operación

$$(\gamma^\mu\nabla_\mu+m)(\gamma^\nu\nabla_\nu-m)\psi=0$$

llegamos a que

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu\nabla_\mu\nabla_\nu-m^2)\psi=0.$$

Descomponemos el producto de matrices de Dirac en simétrico y antisimétrico

$$\begin{aligned}0=&\left(\frac{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}}{2}+\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}{2}\right)\nabla_\mu\nabla_\nu-m^2\psi\\=&(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu+\gamma^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu-m^2)\psi\\=&(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu+\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}[\nabla_\mu,\nabla_\nu]-m^2)\psi\\=&(\Box_{dS}^{(\frac{1}{2})}-m^2)\psi+\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\psi.\end{aligned}$$

Particularizando (2.47) a espinores

$$[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\psi=\frac{1}{4}R^{ab}{}_{\mu\nu}\gamma_{ab}\psi.$$

Por lo tanto, la ecuación de Dirac "al cuadrado" resulta

$$(\Box_{dS}^{(\frac{1}{2})} - m^2)\psi + \frac{1}{8}R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu}\psi = 0.$$

Además, tenemos la siguiente identidad (ver A.3 para la demostración)

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} = -2R. \tag{4.40}$$

Se define el operador de Dirac-Lichnerowicz como

$$D^2 \doteq \Box_{dS}^{(\frac{1}{2})} - \frac{R}{4}, \tag{4.41}$$

luego

$$D^2\psi = m^2\psi. \tag{4.42}$$

Nuevamente, el parámetro m^2 se entiende como el autovalor de un operador diferencial de segundo orden actuando sobre el campo (en este caso, espinorial). En la sección 5, conectaremos dicho parámetro con el Casimir de la representación que definen los estados de una partícula generados por el espinor $\hat{\psi}$ (cuantizado).

4.5.3 Soluciones y cuantización

Consideramos soluciones a la ecuación (4.38) en el *Poincaré patch* (3.10). La base ortonormal de covectores se resume en

$$\hat{e}^0 = \frac{\tilde{d\tau}}{\tau} \quad \hat{e}^I = \frac{\tilde{dx^i}}{\tau}. \tag{4.43}$$

Calculamos las componentes de la conexión de spin de (3.10) imponiendo torsión nula sobre las ecuaciones de estructura de Cartan y

$$d\hat{e}^a + \omega^a{}_b \wedge \hat{e}^b = 0 \quad a, b = 0, I. \tag{4.44}$$

Nuevamente, a y b denotan índices planos y

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}.$$

Las derivadas exteriores resultan

$$d\hat{e}^0 = 0 \quad d\hat{e}^I = -\frac{1}{\tau^2}\tilde{d\tau} \wedge \tilde{dx^i}.$$

Tomando que $\omega^a{}_a = 0$ por antisimetría, la ecuación (4.44) para $a = 0$ es

$$\omega^0{}_i \wedge \frac{1}{\tau}\tilde{dx^i} = 0,$$

es decir que $\omega_\mu{}^0{}_I = 0$ para $\mu \neq i$. Por otro lado, la ecuación para $a = I$ resulta

$$-\frac{1}{\tau^2}\tilde{d\tau} \wedge \tilde{dx^i} + \frac{1}{\tau}\omega^i{}_0 \wedge \tilde{d\tau} + \frac{1}{\tau}\omega^i{}_j \wedge \tilde{dx^j} = 0.$$

Tenemos que $\omega^0{}_i = \omega^i{}_0$ y $\omega^i{}_j = \omega_\tau{}^i{}_j\tilde{d\tau} + \omega_k{}^i{}_j\tilde{dx^k}$, entonces

$$-\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau}\omega_i{}^0{}_i\right)\tilde{d\tau} \wedge \tilde{dx^i} + \frac{1}{\tau}\omega_\tau{}^i{}_j\tilde{d\tau} \wedge \tilde{dx^j} - \frac{1}{\tau}\omega_k{}^i{}_j\tilde{dx^j} \wedge \tilde{dx^k} = 0.$$

La 2-forma nula resultante debe tener todas sus componentes igual a cero. Eso implica que

$$\omega_i{}^0{}_i = -\frac{1}{\tau} = \omega_{ii0} = -\omega_{i0i}$$
$$\omega_i{}^j{}_k = \omega_\tau{}^a{}_b = 0.$$

La derivada covariante del espinor toma una expresión simple

$$\gamma^\mu\nabla_\mu = \gamma^\mu\partial_\mu + \frac{d-1}{4}e^i_I\gamma^I\left(\omega_{i0i}\gamma^{0I} + \omega_{ii0}\gamma^{I0}\right) = \gamma^\mu\partial_\mu + \frac{d-1}{2}\gamma^I\gamma^{0I}.$$

De acuerdo a la elección de matrices de Dirac para la signatura $\{-,+,...,+\}$, tenemos que $\gamma^I\gamma^{0I} = -\gamma^0 = \gamma_0$. La ecuación de Dirac para la carta de Poincaré en dS_d es

$$\left(\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{d-1}{2}\gamma_0 - m\right)\psi = 0.$$

Considerando que $e^\mu_a = \tau\delta^\mu_a$, podemos escribir

$$\gamma^\mu\partial_\mu = \tau\gamma^a\delta^\mu_a\partial_\mu = \tau\left(\gamma^0\partial_\tau + \gamma^I\partial_i\right) = \tau(-\gamma_0\partial_\tau + \gamma^I\partial_i).$$

Si multiplicamos la ecuación por γ_0 a izquierda, obtenemos

$$\left(\tau\partial_\tau - \frac{d-1}{2} - m\gamma_0\right)\psi = \tau\gamma^I\gamma_0\partial_i\psi.$$

Para encontrar la solución, descomponemos a ψ en una base de autoespinores $\chi^\pm$ de γ_0 [21]

$$\gamma_0\chi^\pm = \pm i\chi^\pm \quad \left(\chi^\pm = \sum_\alpha^{N/2}\mathfrak{n}_\alpha\chi^\pm_\alpha\right). \tag{4.45}$$

Separando variables

$$\psi(\tau,\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{kx}}\left(\zeta^+_\mathbf{k}(\tau)\chi^+ + \zeta^-_\mathbf{k}(\tau)\chi^-\right). \tag{4.46}$$

[21] χ es el objeto que le otorga el carácter espinorial a ψ.

La ecuación de Dirac resulta

$$\left(\tau\partial_\tau - \frac{d-1}{2} - m\gamma_0\right)\psi = i\tau \not{k}\gamma_0\psi, \tag{4.47}$$

donde $\not{k} = \gamma^I k_i \delta^i_I$. Proyectamos (4.47) en los subespacios dados por $\chi^\pm$ con el operador $P^\pm = \frac{1}{2}(1 \mp i\gamma_0)$, que satisface $P^\pm\gamma^I = \gamma^I P^\mp$. Obtenemos

$$\left(\tau\partial_\tau - \frac{d-1}{2} - m\gamma_0\right)\zeta^\pm_{\mathbf{k}}\chi^\pm = i\tau\gamma^I k_i\gamma_0\zeta^\mp_{\mathbf{k}}\chi^\mp.$$

Aplicando γ_0 a los espinores, resulta

$$\left(\tau\partial_\tau - \frac{d-1}{2} \mp im\right)\zeta^\pm_{\mathbf{k}}\chi^\pm = \pm\tau\not{k}\zeta^\mp_{\mathbf{k}}\chi^\mp.$$

Si definimos $\Delta_\pm = \frac{d-1}{2} \pm im$ obtenemos las dos ecuaciones acopladas para la parte temporal

$$(\tau\partial_\tau - \Delta_\pm)\,\zeta^\pm_{\mathbf{k}}\chi^\pm = \pm\tau\not{k}\zeta^\mp_{\mathbf{k}}\chi^\mp. \tag{4.48}$$

Podemos desacoplar el sistema de ecuaciones aplicando el operador del sector conjugado $\tau\partial_\tau - \Delta_\mp$ a izquierda

$$\left[\tau^2\partial_\tau^2 + \tau\partial_\tau - (\Delta_\pm + \Delta_\mp)\tau\partial_\tau + \Delta_\pm\Delta_\mp\right]\zeta^\pm_{\mathbf{k}}\chi^\pm = \pm(\tau\not{k})\zeta^\mp_{\mathbf{k}}\chi^\mp \pm \tau\not{k}(\tau\partial_\tau - \Delta_\mp)\zeta^\mp_{\mathbf{k}}\chi^\mp.$$

Primero, notemos que $\Delta_+ + \Delta_- = d-1$. Luego, usando (4.48), obtenemos un sistema desacoplado para $\chi^\pm$

$$\left[\tau^2\partial_\tau^2 - (d-2)\tau\partial_\tau + \Delta_\pm\Delta_\mp\right]\zeta^\pm_{\mathbf{k}} = (\tau\partial_\tau - \Delta_\pm)\zeta^\pm_{\mathbf{k}} - \tau^2k^2\zeta^\pm_{\mathbf{k}},$$

donde $k = \sqrt{|\mathbf{k}|^2}$. Obtenemos una ecuación de segundo orden para cada sector

$$\left[\tau^2(\partial_\tau^2 + k^2) - (d-1)\tau\partial_\tau + \Delta_\pm(1+\Delta_\mp)\right]\zeta^\pm_{\mathbf{k}} = 0. \tag{4.49}$$

La solución a esta ecuación son las funciones de Bessel de primera y segunda especie J e Y. Con una redefinición de las constantes, podemos expresarlas en términos de las funciones de Hankel $H^{(1)} = J + iY$ y $H^{(2)} = J - iY$

$$\zeta^\pm_{\mathbf{k}}(\tau) = (-\tau)^{\frac{d}{2}}\left(c_1^\pm H^{(1)}_{\mp\frac{1}{2}+im}(-k\tau) + c_2^\pm H^{(2)}_{\mp\frac{1}{2}+im}(-k\tau)\right). \tag{4.50}$$

Estas funciones descomponen el comportamiento asintótico de las soluciones en $\tau \to -\infty$ de la forma

$$H^{(1)}_\nu \sim e^{-ik\tau} \quad H^{(2)}_\nu \sim e^{ik\tau}. \tag{4.51}$$

Esta descomposición es diferente a la realizada para el campo escalar (ver (4.33)). Notar que el comportamiento para $\tau \to \infty$ no es independiente del índice ν de la Bessel. El *ansatz* (4.46) con

(4.50) debe ser solución de (4.47). Explícitamente,

$$\psi_{\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{kx}}(-\tau)^{\frac{d}{2}}\left(\left[c_1^+ H^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + c_2^+ H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}\right]\chi^+ + \left[c_1^- H^{(1)}_{+\frac{1}{2}} + c_2^- H^{(2)}_{+\frac{1}{2}}\right]\chi^-\right), \tag{4.52}$$

donde el subíndice "$\pm\frac{1}{2}$" denota "$\pm\frac{1}{2} + im$". Al imponer este *ansatz* como solución de (4.47), encontraremos las relaciones entre las constantes c^- y c^+. Por esta razón, reescribimos (4.52) como

$$\psi_{\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{kx}}(-\tau)^{\frac{d}{2}}\left(\left[c_1^+ H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}\chi^+ + c_1^- H^{(1)}_{+\frac{1}{2}}\chi^-\right] + \left[c_2^+ H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}\chi^+ + c_2^- H^{(2)}_{+\frac{1}{2}}\chi^-\right]\right). \tag{4.53}$$

Por simplicidad, omitiremos los espinores a lo largo del desarrollo, dado que su información es contenida con el índice $\pm$ de la Bessel. Nos enfocamos en la términos de $H^{(1)}$

$$\left(\tau\partial_\tau - \frac{d-1}{2}\right)(-\tau)^{\frac{d}{2}}\left[c_1^+ H^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + c_1^- H^{(1)}_{+\frac{1}{2}}\right] - i(m + i\not{k}\tau)(-\tau)^{\frac{d}{2}}\left[c_1^+ H^{(1)}_{-\frac{1}{2}} - c_1^- H^{(1)}_{+\frac{1}{2}}\right] = 0, \tag{4.54}$$

donde hicimos uso de (4.45). El término del primer paréntesis resulta

$$(-\tau)^{\frac{d}{2}}\left(\frac{1}{2}\left[c_1^+ H^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + c_1^- H^{(1)}_{+\frac{1}{2}}\right] + (-\tau)\frac{k}{2}\left(c_1^+ H^{(1)}_{-\frac{3}{2}} - c_1^+ H^{(1)}_{+\frac{1}{2}} + c_1^- H^{(1)}_{-\frac{1}{2}} - c_1^- H^{(1)}_{+\frac{3}{2}}\right)\right).$$

La función que acompaña c_1^+ resulta

$$\left(\frac{1}{2} - im + \not{k}\tau\right)H^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + \frac{k\tau}{2}\left(H^{(1)}_{+\frac{1}{2}} - H^{(1)}_{-\frac{3}{2}}\right). \tag{4.55}$$

Análogamente, para c_1^- tenemos

$$\left(\frac{1}{2} + im - \not{k}\tau\right)H^{(1)}_{+\frac{1}{2}} + \frac{k\tau}{2}\left(-H^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + H^{(1)}_{+\frac{3}{2}}\right). \tag{4.56}$$

Explotando la relación de recurrencia de las funciones de Bessel [71]

$$Z_{n+1} + Z_{n-1} = \frac{2n}{x}Z_n, \tag{4.57}$$

obtenemos

$$H^{(1)}_{-\frac{3}{2}} = \frac{1-2im}{k\tau}H^{(1)}_{-\frac{1}{2}} - H^{(1)}_{+\frac{1}{2}} \tag{4.58}$$

y

$$H^{(1)}_{+\frac{3}{2}} = -\frac{1+2im}{k\tau}H^{(1)}_{+\frac{1}{2}} - H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}. \tag{4.59}$$

Tomando (4.54) con los cálculos explícitos y las relaciones de recurrencia (4.58) y (4.59), llegamos a

$$c_1^+\left(\not{k}H^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + kH^{(1)}_{+\frac{1}{2}}\right) - c_1^-\left(kH^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + \not{k}H^{(1)}_{+\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

Reinsertando los espinores $\chi^{\pm}$, la ecuación se reduce a

$$c_1^- \chi^- = \frac{\not{k}}{k} c_1^+ \chi^+,$$

pues $(\not{k})^2 = k^2$ dado que $(\gamma^I)^2 = \mathbb{I}$. Las relaciones para las constantes $c_2^{\pm}$ en (4.53) resultan idénticas. De esta manera, de (4.53) se obtiene

$$\psi_{\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{kx}}(-\tau)^{\frac{d}{2}} \left(c_1 \left[H^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + \frac{\not{k}}{k} H^{(1)}_{+\frac{1}{2}} \right] + c_2 \left[H^{(2)}_{-\frac{1}{2}} + \frac{\not{k}}{k} H^{(2)}_{+\frac{1}{2}} \right] \right) \chi^+. \tag{4.60}$$

La elección de constantes c_1 y c_2 impone una condición de contorno que equivale a elegir un vacío en la cuantización. La elección que se denomina *vacío de Bunch-Davies* [15, 68] es equivalente a pedir modos de "energía positiva" en el infinito pasado ($\tau \to -\infty$) del *Poincaré patch*. Siguiendo con el razonamiento de 4.4.3, dicho modo corresponde a tomar $c_2 = 0$ (ver (4.51)), quedando simplemente en función de $H^{(1)}$. Es sabido que este vacío cumple el privilegio de ser invariante ante el grupo de de Sitter cuando $m^2 > 0$ y cumple otra propiedad importante: la condición de Hadamard [21, 72]. Explícitamente, el comportamiento asintótico de (4.60) en $\tau \to -\infty$ con $c_2 = 0$ nos da

$$\psi_{\mathbf{k}} \sim e^{i\mathbf{kx}}(-\tau)^{\frac{d-1}{2}} e^{-ik\tau} e^{\frac{1}{4}(3i+2m)\pi} \left(\frac{c_1(1-i)(k-i\not{k})}{k^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} \right) \chi^+.$$

Normalizando en $\tau = -\infty$ usando el producto interno (4.39)

$$\langle \psi^+_{\mathbf{k}'}, \psi^+_{\mathbf{k}} \rangle = \left[\left(\frac{2e^{m\pi}}{\sqrt{k^3 k'^3}\pi} |c_1|^2 \right) e^{-i(k-k')\tau} \int d^{d-1}x\, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} \right] (\chi^+)^\dagger \gamma_0 \gamma^0 \chi^+ = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Tenemos que $(\chi^+)^\dagger \gamma_0 \gamma^0 \chi^+ = 1$. Por otro lado, $\int d^{d-1}x\, e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} = (2\pi)^{d-1}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$, entonces, la constante c_1 puede ser elegida como

$$c_1 = \sqrt{\frac{k\pi^2}{2}} \frac{e^{\frac{-m\pi}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}.$$

Los modos *Bunch-Davies*, toman la forma

$$\psi^{in}_{\mathbf{k}} = (-\tau)^{\frac{d}{2}} \sqrt{\frac{k\pi^2}{2}} \frac{e^{\frac{-m\pi}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(H^{(1)}_{-\frac{1}{2}+im}(-k\tau) + \frac{\not{k}}{k} H^{(1)}_{\frac{1}{2}+im}(-k\tau) \right) e^{i\mathbf{kx}}.$$

El campo (Majorana) canónicamente cuantizado adquiere la expresión

$$\hat{\psi}(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N/2} \int d^{d-1}\mathbf{k} \, (\psi^{in}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\alpha,\mathbf{k}} \chi^+_\alpha + \psi^{in\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{\alpha,\mathbf{k}} (\chi^+_\alpha)^\dagger),$$

donde $\hat{a}_{\alpha,\mathbf{k}}$ son los operadores de destrucción que aniquilan el vacío de *Bunch-Davies* $|0\rangle_{BD}$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle_{BD} = 0 \quad \forall\, \alpha \in N/2.$$

Los estados (fermiónicos) de una partícula serán

$$\hat{a}^{\dagger}_{\alpha,\mathbf{k}} |0\rangle_{BD} = |\mathbf{k}, \alpha\rangle$$

Nuevamente, como en 4.4.3, el número cuántico $\mathbf{k}$, de espectro continuo, puede ser interpretado como el autovalor de las traslaciones espaciales en el *Poincaré patch*. Es decir,

$$-i\partial_i |\mathbf{k}\rangle = k_i |\mathbf{k}\rangle .$$

Capítulo 5

La masa como un indicador de representaciones

En la sección 2.7, hemos definido el operador Casimir como un operador diferencial de segundo orden en el álgebra que permite clasificar representaciones irreducibles del grupo. La imposibilidad para definir una buena noción para la masa de los campos que se propagan sobre de Sitter nos sugiere trabajar con invariantes en la teoría de grupos, como los autovalores del Casimir. A continuación, veremos que las simetrías del espacio nos permiten recuperar las ecuaciones que rigen la dinámica de los campos.

5.1 Campo escalar: Laplace-Beltrami, derivadas de Lie y Casimir cuadrático

Tomando la definición del operador Casimir en (2.60), revisamos la acción sobre el campo escalar ϕ

$$\mathfrak{C}^{(0)}\phi = \kappa^{\alpha\beta}k^{\mu}_{\alpha}\nabla_{\mu}(k^{\nu}_{\beta}\nabla_{\nu}\phi) = \kappa^{\alpha\beta}k^{\mu}_{\alpha}k^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi + \kappa^{\alpha\beta}k^{\mu}_{\alpha}\nabla_{\mu}k^{\nu}_{\beta}\nabla_{\nu}\phi.$$

El segundo término se anula

$$\kappa^{\alpha\beta}k^{\mu}_{\alpha}\nabla_{\mu}k^{\nu}_{\beta} = \nabla_{\mu}(\kappa^{\alpha\beta}k^{\mu}_{\alpha}k^{\nu}_{\beta}) - \kappa^{\alpha\beta}k^{\nu}_{\beta}\nabla_{\mu}k^{\mu}_{\alpha} = 0$$

debido a (2.62), conexión métrica ($\nabla g = 0$) y $\nabla_{\mu}k^{\mu} = 0$ para un vector de Killing. Entonces, el operador Casimir coincide con el d'Alambertiano de campos escalares

$$\mathfrak{C}^{(0)}\phi = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi = \Box^{(0)}_{dS}\phi = m^2\phi. \tag{5.1}$$

La equivalencia entre $\mathfrak{C}^{(0)}$ y $\Box^{(0)}_{dS}$ nos dice que el parámetro m, asociado al potencial de la teoría, caracteriza la representación que proporciona ϕ sobre los estados de una partícula. Es más, el problema de autovalores de (4.19) nos permite afirmar, vía lema de Schur, que las partículas asociadas a sus soluciones son las representaciones irreducibles del grupo de de Sitter $SO(1,d)$.

5.1.1 Cálculo explícito para dS_{2+1}

Revisitaremos la igualdad en (5.1), calculando explícitamente el operador Casimir en las tres cartas presentadas sobre dS_{2+1}: carta global (GC), *Poincaré patch* (PP) y *static patch* (SP). Para calcularlos, tomamos la expresión (2.66) que corresponde con tomar (2.61) y la base de vectores que diagonaliza la métrica de Killing-Cartan (ver (2.65)). Los vectores de Killing en cada una de las cartas se encuentran en Ap. C.
Los cálculos explícitos muestran

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}^{(0)}_{GC} &= -2\tanh(\mathbf{t})\partial_{\mathbf{t}} - \partial^2_{\mathbf{t}} + \frac{\cot\theta}{\cosh^2(\mathbf{t})}\partial_\theta + \frac{1}{\cosh^2(\mathbf{t})}\partial^2_\theta + \frac{1}{\cosh^2(\mathbf{t})\sin^2\theta}\,\partial^2_\varphi \\
\mathfrak{C}^{(0)}_{PP} &= \tau\partial_\tau + \tau^2(-\partial^2_\tau + \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2}) \\
\mathfrak{C}^{(0)}_{SP} &= -\frac{1}{1-r^2}\partial^2_t + \frac{1-3r^2}{r}\partial_r + (1-r^2)\partial^2_r + \frac{1}{r^2}\partial^2_\varphi.
\end{aligned}$$

Observando los resultados para el operador $\Box^{(0)}_{dS}$ en (4.24), (4.32) y (4.35), vemos que coinciden con cada una de las expresiones para el Casimir (2.66).

5.2 Campo espinorial: Dirac-Lichnerowicz, derivadas de Lie-Lorentz y Casimir cuadrático

Revisamos la acción del operador Casimir (2.60) sobre el espinor ψ de la representación $s = \frac{1}{2}$ de Lorentz. A lo largo de la cuenta, usaremos la propiedad (2.62), que nos servirá para corresponder la métrica κ del grupo con la métrica g del espacio. Explícitamente

$$\mathfrak{C}^{(\frac{1}{2})}\psi = \kappa^{\alpha\beta}\pounds_{k_\alpha}\pounds_{k_\beta}\psi = \kappa^{\alpha\beta}\left(k^\mu_\alpha\nabla_\mu(\pounds_{k_\beta}\psi) + \frac{1}{4}\nabla_{[a}k_{b]\alpha}\gamma^{ab}\pounds_{k_\beta}\psi\right). \tag{5.2}$$

Tomamos el primer término

$$\kappa^{\alpha\beta}k^\mu_\alpha\left[\nabla_\mu(k^\nu_\beta)\nabla_\nu\psi + k^\nu_\beta\nabla_\mu\nabla_\nu\psi + \frac{1}{4}\nabla_\mu(\nabla_{[c}k_{d]\beta})\gamma^{cd}\psi + \frac{1}{4}\nabla_{[c}k_{d]\beta}\gamma^{cd}\nabla_\mu\psi\right]. \tag{5.3}$$

El primer término de (5.3) es nulo

$$\kappa^{\alpha\beta}k^\mu_\alpha\nabla_\mu(k^\nu_\beta) = \cancel{\nabla_\mu(g^{\mu\nu})} - \kappa^{\alpha\beta}\cancel{\nabla_\mu(k^\mu_\alpha)}k^\nu_\beta = 0,$$

pues (2.62) y $\nabla_\mu k^\mu = 0$ para k vector de Killing. El tercer término de (5.3) también es nulo: usando la propiedad (2.58) y que $\nabla_{[c}k_{d]}\gamma^{cd} = \nabla_{[\mu}k_{\nu]}\gamma^{\mu\nu}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\kappa^{\alpha\beta}k^\mu_\alpha\nabla_\mu(\nabla_{[\nu}k_{\rho]\beta}) &= \frac{1}{2}\kappa^{\alpha\beta}k^\mu_\alpha(g_{\rho\epsilon}\nabla_\mu\nabla_\nu k^\epsilon_\beta - g_{\nu\epsilon}\nabla_\mu\nabla_\rho k^\epsilon_\beta) \\
&= \frac{1}{2}\kappa^{\alpha\beta}k^\mu_\alpha(R_{\rho\nu\mu\sigma} - R_{\nu\rho\mu\sigma})k^\sigma_\beta \\
&= \kappa^{\alpha\beta}k^\mu_\alpha k^\sigma_\beta R_{\rho\nu\mu\sigma} = g^{\mu\sigma}R_{\rho\nu\mu\sigma} = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, el segundo término de (5.3) es $\Box_{dS}^{(\frac{1}{2})}\psi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi$ por definición del *lift* (2.62).

Ahora, tomamos el segundo término de (5.2)

$$\frac{1}{4}\kappa^{\alpha\beta}\left[\nabla_{[a}k_{b]\alpha}\gamma^{ab}k_\beta^\nu\nabla_\nu\psi + \frac{1}{4}\nabla_{[a}k_{b]\alpha}\nabla_{[c}k_{d]\beta}\gamma^{ab}\gamma^{cd}\psi\right]. \tag{5.4}$$

Como κ es simétrica, el cuarto término de (5.3) y el primero de (5.4) son iguales. Sumando todo, obtenemos

$$\mathfrak{C}^{(\frac{1}{2})}\psi = \Box_{dS}^{(\frac{1}{2})}\psi + \frac{1}{2}\kappa^{\alpha\beta}(\nabla_{[c}k_{d]\alpha}\gamma^{cd})(k_\beta^\mu\nabla_\mu)\psi + \frac{1}{16}\kappa^{\alpha\beta}(\nabla_{[a}k_{b]\alpha}\nabla_{[c}k_{d]\beta}\gamma^{ab}\gamma^{cd})\psi. \tag{5.5}$$

El primer y el tercer término reflejan la acción "cuadrada" de la parte orbital y la representación que actúa sobre los índices, respectivamente, mientras que el segundo término se compone de una acción "cruzada" de la descomposición de (2.25).

Trabajando con el último término de (5.5)

$$\begin{aligned} * &= \frac{1}{16}\kappa^{\alpha\beta}\left[\nabla_a(k_{b\alpha}\nabla_c k_{d\beta}) - k_{b\alpha}(\nabla_a\nabla_c k_{d\beta})\right]\gamma^{ab}\gamma^{cd}\psi \\ &= \frac{1}{16}\kappa^{\alpha\beta}\left[\nabla_a(k_{b\alpha}\nabla_c k_{d\beta}) - k_{b\alpha}k_{e\beta}R_{dca}{}^{e}\right]\gamma^{ab}\gamma^{cd}\psi \\ &= \frac{1}{16}\kappa^{\alpha\beta}\nabla_a(k_{b\alpha}\nabla_c k_{d\beta})\gamma^{ab}\gamma^{cd}\psi + \frac{1}{16}R_{abcd}\gamma^{ab}\gamma^{cd}\psi, \end{aligned}$$

donde el último término es $-\frac{R}{8}$ por (4.40). La fórmula resulta

$$\mathfrak{C}^{(\frac{1}{2})}\psi = \left(\Box_{dS}^{(\frac{1}{2})} - \frac{R}{8}\right)\psi + \frac{1}{2}(\kappa^{\alpha\beta}k_\alpha^\mu\nabla_{[c}k_{d]\alpha})\gamma^{cd}\nabla_\mu\psi + \frac{1}{16}\gamma^{\mu\nu}\nabla_\mu(\kappa^{\alpha\beta}k_{\nu\alpha}\nabla_{[c}k_{d]\beta})\gamma^{cd}\psi.$$

Los términos en el primer paréntesis son invariantes ante la acción del grupo de Lorentz $O(1,d)$. Los otros términos involucran una 3-forma $\mathcal{Z}_{\mu ab} \doteq \kappa^{\alpha\beta}k_{\mu\alpha}\nabla_{[a}k_{b]\beta}$. Hemos demostrado que dicho objeto se anula para dimensiones bajas $d = 2, 3, 4$ por cálculo explícito. Asímismo, se anula para dimensión general, debido a que no existen tensores antisimétricos invariantes en dS_d frente a su grupo de isotropía $SO(1, d-1)$[1]. Agradecemos al Dr. Edward Witten por proveer el argumento.

Podemos afirmar que el Casimir aplicado a espinores de Dirac coincide con la fórmula de Parthasarathy para el Casimir espinorial en espacios simétricos [73]. Tomando (4.41), obtenemos

$$\mathfrak{C}^{(\frac{1}{2})}\psi = \left(D^2 + \frac{R}{8}\right)\psi = \left(m^2 + \frac{R}{8}\right)\psi. \tag{5.6}$$

[1]En casos especiales, como $d = 3$, es necesario considerar el grupo completo $O(1,d)$ para contar con reflexiones. Un tensor antisimétrico creado a partir del símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ no es invariante ante dichas transformaciones ($\det(\Lambda) = -1$), pero si lo es ante la parte conexa de $SO(1, d-1)$.

Haciendo uso de (3.5) con $l_{dS} = 1$, podemos escribir

$$\mathfrak{C}^{(\frac{1}{2})} = m^2 + \frac{d(d-1)}{8}. \tag{5.7}$$

Nuevamente, la masa del campo clasifica la representación y las partículas, asociadas a los campos que resuelven la ecuación de Dirac (4.38), definen espacios de representación irreducibles del grupo $SO(1,d)$.

Resulta interesante destacar que en la bibliografía [68] se parametriza el Casimir a partir del grupo conforme $\mathbb{R}^{d-1}$ isomorfo a dS_d

$$\mathfrak{C}^{(\frac{1}{2})}\psi = \left(\Delta(d-1-\Delta) - \frac{(d-1)(d-2)}{8}\right)\psi$$

que coincide con (5.7) pidiendo estar en la representación π_v, es decir $\Delta = \frac{(d-1)}{2} + im$. Además de lograr corresponder las definiciones, la formulación que hicimos del Casimir, a partir del *formalismo geométrico* (2.60), nos permite interpretar el *offset* $\frac{d(d-1)}{8}$ de (5.7) como una expresión de acoplamiento spin-gravedad a través del escalar de Ricci R.

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de este trabajo, estudiamos las principales características del espacio de de Sitter dS_d, un modelo de universo en d dimensiones con curvatura positiva y que da origen a una expansión acelerada. Su atributo de ser un espacio maximalmente simétrico nos permitió comprender que puede ser visualizado como un hiperboloide embebido en el espacio ambiente de $\mathbb{R}^{1,d}$ y el grupo de simetrías que hereda de dicho espacio es $SO(1,d)$.

Por otro lado, estudiamos y revisitamos algunos aspectos importantes de los grupos de Lie y sus representaciones. En particular, estudiamos el grupo de Lorentz $SO(1,d)$ de $\mathbb{R}^{1,d}$, discutimos las representaciones unitarias e irreducibles y vimos, siguiendo [15], que las que satisfacen dichas propiedades son las infinito-dimensionales. La acción de los generadores sobre los campos se dividen en una acción tensorial de dimensión finita (spin) y otra que actúa sobre el objeto como función del espacio-tiempo. Estudiamos cómo definir apropiadamente la acción de estos generadores en un espacio con curvatura. Para ello, estudiamos cómo tratar con espinores en espacio curvo a través del formalismo de la conexión de spin e introdujimos la derivada de Lie espinorial. Con estas definiciones hemos podido dar, de manera satisfactoria, con un operador Casimir cuadrático que actúa sobre representaciones tensoriales en espacio curvo. Además, se presentaron las clasificaciones de las representaciones unitarias e irreducibles (**UIRs**) de de Sitter. Las mismas están etiquetadas por un factor conforme Δ y un vector $\mathbf{s}$ de *highest-weight* y se dividen en tres clases: *principal series*, *discrete series* y *complementary series*. Nos enfocamos en estudiar la primera, que está asociada a los campos "pesados" en de Sitter.

Discutimos el problema de definir la noción de masa en de Sitter y las posibles interpretaciones que fueron postuladas hasta el momento. Además, estudiamos la acción de los campos escalar y espinorial en dS_d, así como las soluciones a las ecuaciones de movimiento y la cuantización. Para el caso escalar, estudiamos las soluciones en $d = 2 + 1$ y en tres distintos sistemas de coordenadas de de Sitter: coordenadas globales, *Poincaré patch* y *static patch* y vimos cómo se realizaban, de manera diferente, las simetrías del espacio. En particular, para las *principal series representations* π_ν, vimos que las soluciones decaían y oscilaban en el *early* y *late-time* de de Sitter a una frecuencia

ν. Esto se asemeja a la descomposición de modos de energía "positiva" y "negativa" de Minkowski, correspondiente a las partículas masivas. Para el caso espinorial, resolvimos el espinor en dS_d en el *Poincaré patch* y lo cuantizamos en un vacío invariante de de Sitter denominado "vacío de *Bunch-Davies*".

Discutimos la imposibilidad de definir una noción de energía conservada en el espacio de de Sitter debido a la ausencia de un vector de Killing temporal global. Esto se veía presente en los primeros dos sistemas de coordenadas, que presentaban semejanzas a pesar de realizar diferentes estructuras en la distribución espacial. Sin embargo, hemos podido dar con una noción de energía conservada en el tiempo para la región del *static patch*. Esto se logró debido a la presencia de un vector temporal orientado en la dirección no compacta de de Sitter (i.e. $SO(1,1)$ para dS_{2+1}).

Para darle una solución al problema de la interpretación de la masa en de Sitter, postulamos que su carácter es puramente paramétrico y sirve para clasificar representaciones irreducibles. Para ello, probamos que las ecuaciones de movimiento de los campos coinciden con la acción del Casimir cuadrático y, vía lema de Schur, asociamos el autovalor m^2 (asociado a la derivada segunda del potencial de las teorías "libres") con el Casimir cuadrático de las **UIRs** de dS_d ($SO(1,d)$). En otras palabras, concluimos que las soluciones de los campos escalar y espinorial en de Sitter definen espacios de representación irreducible. Esto está en sintonía con el paradigma de Wigner realizado para espacio plano y sirve como ancla para caracterizar a los campos cuando las intuiciones de espacio plano (por ejemplo, el concepto de "masa") se vuelven confusas en de Sitter.

Como trabajo a futuro, se espera continuar explorando la ambigüedad en la definición de vacío, estudiándola desde la teoría de grupos y entendiendo cómo contestar preguntas sobre la cuantización realizando el espacio-tiempo a partir de sus simetrías [74, 75]. Además, resulta interesante repetir el estudio de campos masivos para partículas de spin arbitrario en de Sitter. Particularmente, se podrían estudiar las representaciones de los campos *partially massless*, que no presentan un análogo a espacio plano en el límite de curvatura cero ($l_{dS} \to \infty$) [15, 19, 20]. Esto ayudará a explorar y revisitar la pregunta de si es posible construir supergravedad en de Sitter (al menos en su horizonte intrínseco) [76].

Apéndice A

Matrices de Dirac y algunas operaciones y contracciones

A.1 Matrices de Dirac: construcción y notación

Definimos las matrices γ de Dirac de $\mathbb{R}^{1,d}$ siguiendo [46]. Tenemos las siguientes propiedades

$$\gamma^i = (\gamma^i)^\dagger \quad (\gamma^i)^2 = \mathbb{I} \quad i = 1, ..., d$$
$$\gamma^0 = -(\gamma^0)^\dagger \quad (\gamma^0)^2 = -\mathbb{I}.$$

Por ejemplo, para el caso $d = 3$, definimos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A.2 Conmutador de derivadas covariantes

Dado un tensor de Lorentz $\mathfrak{T}$ que define el espacio de representación donde actúa $\mathcal{D}^{(s)}(\Lambda)$, el conmutador de dos derivadas ∇_μ resulta

$$\begin{aligned}[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\mathfrak{T} &= \nabla_\mu(\nabla_\nu\mathfrak{T}) - \nabla_\nu(\nabla_\mu\mathfrak{T}) \\ &= \partial_\mu(\nabla_\nu\mathfrak{T}) + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}T^{(s)}_{ab}\nabla_\nu\mathfrak{T} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\nabla_\lambda\mathfrak{T} - \partial_\nu(\nabla_\mu\mathfrak{T}) - \frac{1}{2}\omega_\nu{}^{ab}T^{(s)}_{ab}\nabla_\nu\mathfrak{T} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\nabla_\lambda\mathfrak{T}.\end{aligned}$$

Los términos de derivadas cruzadas y derivadas de $\mathfrak{T}$ se anulan. Además, por torsión nula $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, entonces

$$\begin{aligned}[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\mathfrak{T} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab}\right) T^{(s)}_{ab}\mathfrak{T} + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\omega_\nu{}^{cd}[T^{(s)}_{ab}, T^{(s)}_{cd}]\mathfrak{T} \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab}\right) T^{(s)}_{ab}\mathfrak{T} + \frac{1}{4}\left(\omega_{\mu c}{}^{a}\omega_\nu{}^{bc} + \omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\nu{}^{cb} + \omega_{\mu c}{}^{a}\omega_\nu{}^{cb} + \omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\nu{}^{bc}\right) T^{(s)}_{ab}\mathfrak{T}.\end{aligned}$$

Valiéndonos de antisimetría de la conexión de spin $\omega_{\mu c}{}^{a} = -\omega_\mu{}^{a}{}_{c}$ y $\omega_\mu{}^{cb} = -\omega_\mu{}^{bc}$ llegamos a que todos los términos son iguales

$$\frac{1}{4}\left(4\omega_{\mu c}{}^{a}\omega_v{}^{bc}\right) T^{(s)}_{ab} = \omega_{\mu c}{}^{a}\omega_v{}^{bc}T^{(s)}_{ab},$$

y como $T^{(s)}_{ab} = -T^{(s)}_{ba}$, es equivalente escribir

$$\omega_{\mu c}{}^{[a}\omega_v{}^{b]c}T^{(s)}_{ab} = \frac{1}{2}(\omega_{\mu c}{}^{a}\omega_v{}^{bc} - \omega_{\mu c}{}^{b}\omega_v{}^{ac})T^{(s)}_{ab}.$$

Entonces,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} + \omega_{\mu c}{}^{a}\omega_v{}^{bc} - \omega_{\mu c}{}^{b}\omega_v{}^{ac}\right) T^{(s)}_{ab}\mathfrak{T}.$$

Concluimos en que

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\mathfrak{T} = \frac{1}{2}R^{ab}{}_{\mu\nu}d^{(s)}_{ab}\mathfrak{T}.$$

A.3 Contracción con el tensor de Riemann

Por las propiedades de simetría del tensor de Riemann, tenemos que $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$ y la contracción resulta

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\gamma^{[\rho}\gamma^{\sigma]} = R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} \quad \text{si } \mu \neq \nu \text{ y } \rho \neq \sigma.$$

En el caso en que $\nu \neq \rho \neq \sigma$, obtenemos

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} &= \frac{1}{3}R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}(\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} + \gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}) \\ &= \frac{1}{3}(R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho})\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} = 0\end{aligned}$$

por la primera identidad de Bianchi [49]. En el caso en que $\nu = \rho$

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}g^{\nu\rho} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}g^{\nu\rho} &= -R_{\nu\mu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}g^{\nu\rho} \\ &= -R^{\nu}{}_{\mu\nu\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma} = -R_{\mu\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma} = -R_{\mu\sigma}g^{\mu\sigma} = -R.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\nu = \sigma$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = -R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho &= -R_{\nu\mu\sigma\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho \\ &= -R_{\nu\mu\sigma\rho}\gamma^\mu\gamma^\rho g^{\nu\sigma} = -R_{\mu\rho}\gamma^\mu\gamma^\rho = -R. \end{aligned}$$

Sumando todos los casos para ν obtenemos que

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = -2R.$$

Apéndice B

Normalización de la acción

Estas normalizaciones se hacen bajo la signatura $\{-,+,...,+\}$.

Acción escalar

La acción escalar definida

$$S = -\frac{1}{2}\int d^d x(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2)$$

garantiza que el término cinético $(\partial_0\phi)^2$ quede positivo

$$\frac{1}{2}\int d^d x[(\partial_0\phi)^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2]$$

donde $\nabla\phi$ es el término que se agrega para obtener una teoría invariante ante transformaciones de Lorentz y $m^2\phi^2$ es el término del potencial $V(\phi)$. De esta manera,

$$S = \int d^d x\ \mathrm{L}(\phi, \dot{\phi})$$

con

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2] = T - V.$$

Acción espinorial

La acción espinorial definida

$$S = \int d^d x\ \sqrt{-g}(\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi)$$

debe satisfacer hermiticidad $S = S^\dagger$. Conjugando

$$S^\dagger = \int d^d x\sqrt{-g}(\nabla_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\beta^\dagger\psi - m\psi^\dagger\beta^\dagger\psi).$$

Usando (2.20) y $\beta^\dagger = \beta$

$$S^\dagger = \int d^d x \sqrt{-g}(-\nabla_\mu \psi^\dagger \beta \gamma^\mu \psi - m\psi^\dagger \beta \psi)$$

y tomando integral por partes, recordando que $\nabla\gamma = 0$, obtenemos el resultado deseado $S^\dagger = S$.

Apéndice C

Vectores de Killing de $SO(1,3)$

Para calcular los vectores de Killing en las distintas foliaciones del espacio, proponemos la existencia de una coordenada auxiliar l que modifique el vínculo del hiperboloide de manera acorde. Una manera sencilla es proponer las coordenadas $X'^i = lX^i$, que vuelven inversible al embedding (4 a 4 coordenadas). El vínculo queda igual al caso l general (y en este caso, variable). Las isometrías van a ser independientes de l, dado que son vectores que preservan el radio de de Sitter l_{dS}.
En espacio ambiente, los seis vectores de Killing se pueden escribir de acuerdo a (2.63). Vimos que esta base de vectores diagonaliza la métrica de Killing-Cartan (2.65). Sobre esta base, escribiremos los vectores en las coordenadas inducidas en las distintas foliaciones de de Sitter definidas en 3.3.

Carta global

A continuación, demostramos el procedimiento para hallar los vectores de Killing en la carta global. La manera más sencilla de invertir el sistema de coordenadas es plantear el mapeo

$$\begin{aligned}
\sinh(\mathbf{t}) &= \frac{X^0}{l} \\
\tan\varphi &= \frac{X^2}{X^1} \\
\cos\theta &= \frac{X^3}{l\sqrt{1+\sinh^2(\mathbf{t})}} \\
l &= \sqrt{-(X^0)^2+(X^1)^2+(X^2)^2+(X^3)^2}
\end{aligned}$$

Para escribir los vectores, tenemos que transformar las derivadas escritas en las coordenadas del espacio ambiente. En general

$$\begin{aligned}
\partial_{X^\mu} &= \partial_{X^\mu}(l)\partial_l + \partial_{X^\mu}(\mathbf{t})\partial_{\mathbf{t}} + \partial_{X^\mu}(\varphi)\,\partial_\varphi + \partial_{X^\mu}(\theta)\partial_\theta \\
\partial_{X^\mu}(\mathbf{t}) &= \partial_{X^\mu}(\sinh(\mathbf{t}))\partial_{\sinh(\mathbf{t})}(\mathbf{t}) \\
\partial_{X^\mu}(\varphi) &= \partial_{X^\mu}(\tan\varphi)\partial_{\tan\varphi}\varphi \\
\partial_{X^\mu}(\theta) &= \partial_{X^\mu}(\cos\theta)\partial_{\cos\theta}\theta
\end{aligned}$$

Las derivadas que aparecen constantemente valen

$$\begin{aligned}
&\partial_{\sinh(\mathbf{t})}(\mathbf{t}) = 1/\cosh(\mathbf{t}) \\
&\partial_{\tan\varphi}\varphi = \cos^2\varphi \\
&\partial_{\cos\theta}\theta = -1/\sin\theta.
\end{aligned}$$

Las derivadas en las coordenadas del espacio ambiente escritas en función de las del embedding quedan

$$\begin{aligned}
\partial_{X^0} &= -\sinh(\mathbf{t})\,\partial_l + \frac{\cosh(\mathbf{t})}{l}\partial_{\mathbf{t}} \\
\partial_{X^1} &= \cosh(\mathbf{t})\cos\varphi\,\sin\theta\,\partial_l - \frac{\sinh(\mathbf{t})\cos\varphi\,\sin\theta}{l}\partial_{\mathbf{t}} + \frac{\cos\varphi\,\cos\theta}{l\cosh(\mathbf{t})}\partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{l\cosh(\mathbf{t})\sin\theta}\partial_\varphi \\
\partial_{X^2} &= \cosh(\mathbf{t})\sin\varphi\,\sin\theta\,\partial_l - \frac{\sinh(\mathbf{t})\sin\varphi\,\sin\theta}{l}\partial_{\mathbf{t}} + \frac{\sin\varphi\,\cos\theta}{l\cosh(\mathbf{t})}\partial_\theta + \frac{\cos\varphi}{l\cosh(\mathbf{t})\,\sin\theta}\partial_\varphi \\
\partial_{X^3} &= \cosh(\mathbf{t})\,\cos\theta\,\partial_l - \frac{\sinh(\mathbf{t})\,\cos\theta}{l}\partial_{\mathbf{t}} - \frac{\sin\theta}{l\cosh(\mathbf{t})}\partial_\theta.
\end{aligned}$$

Los vectores de Killing para la carta global en dS_{2+1} quedan

$$\boxed{\begin{aligned}
K^1 &= \cos\varphi\,\sin\theta\,\partial_{\mathbf{t}} - \frac{\tanh(\mathbf{t})\sin\varphi}{\sin\theta}\partial_\varphi + \tanh(\mathbf{t})\cos\varphi\cos\theta\,\partial_\theta \\
K^2 &= \sin\varphi\,\sin\theta\,\partial_{\mathbf{t}} - \frac{\tanh(\mathbf{t})\cos\varphi}{\sin\theta}\partial_\varphi + \tanh(\mathbf{t})\cos\varphi\,\cos\theta\,\partial_\theta \\
K^3 &= \cos\theta\,\partial_{\mathbf{t}} - \tanh(\mathbf{t})\sin\theta\,\partial_\theta \\
J^1 &= -\sin\varphi\,\partial_\theta - \cos\varphi\,\cot\theta\,\partial_\varphi \\
J^2 &= \cos\varphi\,\partial_\theta - \sin\varphi\,\cot\theta\,\partial_\varphi \\
J^3 &= \partial_\varphi
\end{aligned}}$$

Poincaré patch

Repetimos el procedimiento planteando el mapeo

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{X^0 - X^3} \\
l &= \sqrt{-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2} \\
x_1 &= \frac{X^1}{X^0 - X^3} \\
x_2 &= \frac{X^2}{X^0 - X^3}
\end{aligned}$$

Para escribir los vectores, transformamos las derivadas escritas en las coordenadas del espacio ambiente. En general

$$\partial_{X^\mu} = \partial_{X^\mu}(l)\partial_l + \partial_{X^\mu}(\tau)\partial_\tau + \partial_{X^\mu}(r)\partial_r + \partial_{X^\mu}(\varphi)\,\partial_\varphi.$$

Las derivadas en las coordenadas del espacio ambiente escritas en función de las del embedding quedan

$$\begin{aligned}
\partial_{X^0} &= -\frac{1+x_1^2+x_2^2-\tau^2}{2l\tau}\partial_l - \tau^2\partial_\tau - x_1 t\partial_{x_1} - x_2\tau\partial_{x_2} \\
\partial_{X^1} &= \frac{x_1}{l\tau}\partial_l + \tau\partial_{x_1} \\
\partial_{X^2} &= \frac{x_2}{l\tau}\partial_l + \tau\partial_{x_2} \\
\partial_{X^3} &= \frac{-1+x_1^2+x_2^2-\tau^2}{2l\tau}\partial_l + \tau^2\partial_\tau + x_1\tau\partial_{x_1} + x_2\tau\partial_{x_2}.
\end{aligned}$$

Los vectores de Killing para el Poincaré patch de dS_{2+1} quedan

$$\boxed{\begin{aligned}
K^1 &= -x_1\tau\partial_\tau + \frac{1-x_1^2+x_2^2-\tau^2}{2}\partial_{x_1} - x_1x_2\partial_{x_2} \\
K^2 &= -x_2\tau\partial_\tau - x_1x_2\partial_{x_1} + \frac{1+x_1^2-x_2^2-\tau^2}{2}\partial_{x_2} \\
K^3 &= \tau\partial_\tau + x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} \\
J^1 &= x_2\tau\partial_\tau + x_1x_2\partial_{x_1} + \frac{-1+x_1^2-x_2^2-\tau^2}{2}\partial_{x_2} \\
J^2 &= -x_1\tau\partial_\tau + \frac{-1-x_1^2+x_2^2-\tau^2}{2}\partial_{x_1} - x_1x_2\partial_{x_2} \\
J^3 &= x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}
\end{aligned}}$$

Static patch

Nuevamente, planteamos

$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \frac{X^2}{X^1} \\
l &= \sqrt{-(X^0)^2+(X^1)^2+(X^2)^2+(X^3)^2} \\
r &= \sqrt{1+\frac{(X^0)^2-(X^3)^2}{l^2}} \\
\sinh(t) &= \frac{X^0}{l\sqrt{1-r^2}}
\end{aligned}$$

Para escribir los vectores, transformamos las derivadas escritas en las coordenadas del espacio ambiente. En general

$$\begin{aligned}
&\partial_{X^\mu} = \partial_{X^\mu}(l)\partial_l + \partial_{X^\mu}(t)\partial_t + \partial_{X^\mu}(r)\partial_r + \partial_{X^\mu}\varphi\,\partial_\varphi \\
&\partial_{X^\mu} t = \partial_{X^\mu}(\sinh(t))\partial_{\sinh(t)}(t) \\
&\partial_{X^\mu}\varphi = \partial_{X^\mu}(\tan\varphi)\partial_{\tan\varphi}\varphi.
\end{aligned}$$

Las derivadas en las coordenadas del espacio ambiente escritas en función de las del embedding quedan

$$\begin{aligned}
\partial_{X^0} &= -\sqrt{1-r^2}\sinh(t)\partial_l + \frac{\cosh(t)}{l\sqrt{1-r^2}}\partial_t + \frac{r\sinh(t)\sqrt{1-r^2}}{l}\partial_r \\
\partial_{X^1} &= r\cos\varphi\,\partial_l + \frac{(1-r^2)\cos\varphi}{l}\partial_r - \frac{\sin\varphi}{lr}\partial_\varphi \\
\partial_{X^2} &= r\sin\varphi\,\partial_l + \frac{(1-r^2)\sin\varphi}{l}\partial_r + \frac{\cos\varphi}{lr}\partial_\varphi \\
\partial_{X^3} &= \sqrt{1-r^2}\cosh(t)\partial_l - \frac{\sinh(t)}{l\sqrt{1-r^2}}\partial_t - \frac{r\sqrt{1-r^2}\cosh(t)}{l}\partial_r.
\end{aligned}$$

Los vectores de Killing para el static patch de dS_{2+1} quedan

$$\boxed{\begin{aligned}
K^1 &= \frac{r\cosh(t)\cos\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\partial_t + \sqrt{1-r^2}\sinh(t)\cos\varphi\,\partial_r - \frac{\sqrt{1-r^2}\sinh(t)\sin\varphi}{r}\partial_\varphi \\
K^2 &= \frac{r\cosh(t)\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\partial_t + \sqrt{1-r^2}\sinh(t)\sin\varphi\,\partial_r + \frac{\sqrt{1-r^2}\sinh(t)\cos\varphi}{r}\partial_\varphi \\
K^3 &= \partial_t \\
K^1 &= -\frac{r\sinh(t)\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\partial_t - \sqrt{1-r^2}\cosh(t)\cos\varphi\,\partial_r - \frac{\sqrt{1-r^2}\cosh(t)\cos\varphi}{r}\partial_\varphi \\
K^2 &= \frac{r\sinh(t)\cos\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\partial_t + \sqrt{1-r^2}\cosh(t)\cos\varphi\,\partial_r - \frac{\sqrt{1-r^2}\cosh(t)\sin\varphi}{r}\partial_\varphi \\
K^3 &= \partial_\varphi
\end{aligned}}$$

Apéndice D

Derivada de Lie-Lorentz como representación

Argumentaremos por qué la derivada de Lie Lorentz es un buen representante del álgebra de isometrías, es decir

$$[\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}]\psi = \pounds_{[V_1,V_2]}\psi$$

con V_1 y V_2 vectores de Killing. Para simplificar los cálculos, definimos

$$\Upsilon_V = \frac{1}{4}\nabla_{[\mu}V_{\nu]}\gamma^{\mu\nu}.$$

Primero, es fácil de ver que

$$[\nabla_{V_1}, \Upsilon_{V_2}]\psi + [\Upsilon_{V_1}, \nabla_{V_2}]\psi = (\nabla_{V_1}\Upsilon_{V_2} - \nabla_{V_2}\Upsilon_{V_1})\psi$$

luego

$$[\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}]\psi = [\nabla_{V_1}, \nabla_{V_2}]\psi + [\Upsilon_{V_1}, \Upsilon_{V_2}]\psi + (\nabla_{V_1}\Upsilon_{V_2} - \nabla_{V_2}\Upsilon_{V_1})\psi.$$

Como es usual, tenemos un conmutador orbital puro, uno de spin puro y uno mixto. Explorando la parte orbital

$$[\nabla_{V_1}, \nabla_{V_2}]\psi = (V_1^\mu\nabla_\mu V_2^\rho - V_2^\mu\nabla_\mu V_1^\rho)\nabla_\rho\psi + V_1^\mu V_2^\rho[\nabla_\mu, \nabla_\rho]\psi.$$

El primer término está compuesto por la derivada de Lie de V_2 a lo largo de V_1

$$\nabla_{[V_1,V_2]}\psi = (\mathcal{L}_{V_1}V_2)^\rho\nabla_\rho\psi = (V_1^\mu\nabla_\mu V_2^\rho - V_2^\mu\nabla_\mu V_1^\rho)\nabla_\rho\psi.$$

El segundo término es el tensor de curvatura, entonces

$$[\nabla_{V_1}, \nabla_{V_2}]\psi = \boxed{\nabla_{[V_1,V_2]}\psi} + \frac{1}{4}R_{\mu\rho\gamma\beta}V_1^\mu V_2^\rho\gamma^{\alpha\beta}\psi.$$

Ahora, la parte mixta

$$(\nabla_{V_1}\Upsilon_{V_2} - \nabla_{V_2}\Upsilon_{V_1}) = \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\left(V_1^\rho\nabla_\rho\nabla_\mu V_{2\nu} - V_2^\rho\nabla_\rho\nabla_\mu V_{1\nu}\right) = \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}Z_{\mu\nu}.$$

Trayendo ∇_μ adelante de ∇_ρ para cada término obtenemos

$$Z_{\mu\nu} = V_1^\rho\nabla_\mu\nabla_\rho V_{2\nu} - V_2^\rho\nabla_\mu\nabla_\rho V_{1\nu} + (-V_1^\rho V_2^\lambda + V_2^\rho V_1^\lambda)R_{\lambda\nu\rho\mu}$$

y tomando partes en los primeros dos términos

$$Z_{\mu\nu} = \nabla_\mu(V_1^\rho\nabla_\rho V_{2\nu} - V_2^\rho\nabla_\rho V_{1\nu}) - (\nabla_\mu V_1^\rho\nabla_\rho V_{2\nu}) + (\nabla_\mu V_2^\rho\nabla_\rho V_{1\nu}) + (-V_1^\rho V_2^\lambda + V_2^\rho V_1^\lambda)R_{\lambda\nu\rho\mu}.$$

El primer término contiene la derivada de Lie de V_2 a lo largo de V_1 dentro de la derivada covariante, entonces

$$Z_{\mu\nu} = \nabla_\mu([V_1, V_2]_\nu) - (\nabla_\mu V_1^\rho\nabla_\rho V_{2\nu}) + (\nabla_\mu V_2^\rho\nabla_\rho V_{1\nu}) + (-V_1^\rho V_2^\lambda + V_2^\rho V_1^\lambda)R_{\lambda\nu\rho\mu}.$$

Cuando contraemos $Z_{\mu\nu}$ con $\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}$ obtenemos un resultado expandido para la parte mixta, donde el primer término actuando sobre espinores es el de rotación

$$\boxed{\Upsilon_{[V_1,V_2]} = \frac{1}{4}\nabla_\mu([V_1, V_2]_\nu)\gamma^{\mu\nu}}.$$

La suma de los términos encuadrados provenientes de la parte orbital y mixta conforman la derivada de Lie espinorial a lo largo de $[V_1, V_2]$

$$\pounds_{[V_1,V_2]}\psi = \nabla_{[V_1,V_2]}\psi + \frac{1}{4}\nabla_\mu([V_1, V_2]_\nu)\gamma^{\mu\nu}\psi.$$

Ahora, aislando cada término de curvatura proveniente de la parte orbital y mixta llegamos a que

$$\frac{1}{4}V_1^\rho V_2^\lambda(R_{\rho\lambda\mu\nu} + R_{\rho\nu\lambda\mu} - R_{\lambda\nu\rho\mu})\gamma^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}V_1^\rho V_2^\lambda(R_{\lambda\rho\mu\nu} + R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\lambda\nu\rho\mu})\gamma^{\mu\nu} = 0$$

por la identidad de Bianchi. El resto de los cálculos involucran la parte residual del sector mixto y la parte de puro spin

$$([\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}] - \pounds_{[V_1,V_2]})\psi = -\frac{1}{4}(\nabla_\mu V_1^\rho\nabla_\rho V_{2\nu} - \nabla_\mu V_2^\rho\nabla_\rho V_{1\nu})\psi + [\Upsilon_{V_1}, \Upsilon_{V_2}]\psi. \tag{D.1}$$

Ahora, definimos la matriz

$$M(V_i)_\mu{}^\rho = \nabla_\mu V_i^\rho,$$

que puede ser descompuesta en parte simétrica y antisimétrica

$$M(V_i) = S(V_i) + A(V_i)$$

donde

$$S(V_i)_\mu{}^\rho = \nabla_{(\mu}V^{\rho)} \quad A(V_i)_\mu{}^\rho = \nabla_{[\mu}V^{\rho]}.$$

El primer término del lado derecho de (D.1) es un conmutador de matrices

$$[M(V_1), M(V_2)]_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_1^\rho \nabla_\rho V_{2\nu} - \nabla_\mu V_2^\rho \nabla_\rho V_{1\nu}.$$

Expandiendo M en su parte simétrica y antisimétrica y contrayendo con la matriz $\gamma^{\mu\nu}$, sobreviven únicamente los términos cuyo conmutador produce una matriz antisimétrica. Estos son los que provienen de matrices de misma simetría

$$-\frac{1}{4}[M(V_1), M(V_2)]_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\left([S(V_1), S(V_2)]_{\mu\nu} + [A(V_1), A(V_2)]_{\mu\nu}\right)\gamma^{\mu\nu}.$$

La parte de puro spin es

$$[\Upsilon_{V_1}, \Upsilon_{V_2}]\psi = \frac{1}{16}[\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^{\rho\sigma}]A(V_1)_{\alpha\beta}A(V_2)_{\rho\sigma}\psi$$

y el conmutador resulta en

$$[\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^{\rho\sigma}]A(V_1)_{\alpha\beta}A(V_2)_{\rho\sigma} = 8\gamma^{\alpha\sigma}A(V_1)_{\alpha\rho}A(V_2)^\rho{}_\sigma = 4\gamma^{\alpha\sigma}[A(V_1), A(V_2)]_{\alpha\sigma}$$

donde en el paso final explotamos la contracción con $\gamma^{\alpha\beta}$. El resultado es

$$[\Upsilon_{V_1}, \Upsilon_{V_2}]\psi = \frac{1}{4}[A(V_1), A(V_2)]_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\psi.$$

Juntando todo, obtenemos

$$([\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}] - \pounds_{[V_1,V_2]})\psi = -\frac{1}{4}\left([S(V_1), S(V_2)]_{\mu\nu} + \cancel{[A(V_1), A(V_2)]_{\mu\nu}}\right)\gamma^{\mu\nu}\psi + \frac{1}{4}\cancel{[A(V_1), A(V_2)]_{\mu\nu}}\gamma^{\mu\nu}\psi$$

entonces

$$([\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}] - \pounds_{[V_1,V_2]})\psi = -\frac{1}{4}[S(V_1), S(V_2)]_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\psi.$$

Es claro que el término del lado derecho no es cero para cualquier par de vectores V_1 y V_2. Sin embargo, podemos encontrar un subconjunto que cumpla la propiedad deseada. Explorando el término anómalo

$$[S(V_1), S(V_2)]_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}(\nabla_{(\mu}V_{1\sigma)}\nabla_{(\rho}V_{2\nu)} - \nabla_{(\mu}V_{2\sigma)}\nabla_{(\rho}V_{1\nu)}).$$

Si V_1 es un vector de Killing conforme tenemos

$$[S(V_1), S(V_2)]_{\mu\nu} = \Omega g^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma}\nabla_{(\rho}V_{2\nu)} - \nabla_{(\mu}V_{2\sigma)}g_{\rho\nu}) = \Omega(\nabla_{(\mu}V_{2\nu)} - \nabla_{(\mu}V_{2\nu)}) = 0$$

y lo mismo sucede si V_2 es un vector de Killing conforme. Podemos concluir que

$$[\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}]\psi = \pounds_{[V_1,V_2]}\psi$$

si V_1 o V_2 es un vector de Killing conforme.

También podemos chequear esta condición para la derivada de Lie espinorial de representaciones de Lorentz de spin entero

$$[\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}]V^a = ([\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}]e^a_\mu)V^\mu + e^a_\mu([\mathcal{L}_{V_1}, \mathcal{L}_{V_2}]V^\mu)$$

y la derivada de Lie espinorial del conmutador es

$$\pounds_{[V_1,V_2]}V^a = (\pounds_{[V_1,V_2]}e^a_\mu)V^\mu + e^a_\mu(\mathcal{L}_{[V_1,V_2]}V^\mu) = (\pounds_{[V_1,V_2]}e^a_\mu)V^\mu + e^a_\mu([\mathcal{L}_{V_1}, \mathcal{L}_{V_2}]V^\mu)$$

entonces

$$([\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}] - \pounds_{[V_1,V_2]})V^a = ([\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}]e^a_\mu - \pounds_{[V_1,V_2]}e^a_\mu)V^\mu. \tag{D.2}$$

Expresamos el segundo término del lado derecho de (D.2)

$$\begin{aligned}\pounds_{[V_1,V_2]}(e^a_\mu)V^\mu &= \frac{e^{\sigma a}}{2}\mathcal{L}_{[V_1,V_2]}(g_{\mu\sigma})V^\mu \\ &= \frac{e^{\sigma a}}{2}(\mathcal{L}_{V_1}\mathcal{L}_{V_2}(g_{\mu\sigma}) - \mathcal{L}_{V_2}\mathcal{L}_{V_1}(g_{\mu\sigma}))V^\mu\end{aligned}$$

pero como la métrica $g_{\mu\sigma}$ es un escalar bajo TLL $\pounds_V g_{\mu\sigma} = \mathcal{L}_V g_{\mu\sigma}$, entonces

$$\pounds_{[V_1,V_2]}(e^a_\mu)V^\mu = \frac{e^{\sigma a}}{2}(\pounds_{V_1}\pounds_{V_2}(g_{\mu\sigma}) - \pounds_{V_2}\pounds_{V_1}(g_{\mu\sigma}))V^\mu.$$

Tomando partes con las *soldering forms* obtenemos

$$\pounds_{[V_1,V_2]}e^a_\mu = \pounds_{V_1}\left(\frac{e^{\sigma a}}{2}\pounds_{V_2}g_{\mu\sigma}\right) - \pounds_{V_1}\left(\frac{e^{\sigma a}}{2}\right)\pounds_{V_2}g_{\mu\sigma} - \pounds_{V_2}\left(\frac{e^{\sigma a}}{2}\pounds_{V_1}g_{\mu\sigma}\right) + \pounds_{V_2}\left(\frac{e^{\sigma a}}{2}\right)\pounds_{V_1}g_{\mu\sigma}.$$

El primer y tercer término resultan en el conmutador

$$\pounds_{[V_1,V_2]}e^a_\mu = \pounds_{V_1}\left(\frac{e^{\sigma a}}{2}\mathcal{L}_{V_2}g_{\mu\sigma}\right) - \pounds_{V_2}\left(\frac{e^{\sigma a}}{2}\mathcal{L}_{V_1}g_{\mu\sigma}\right) = \pounds_{V_1}\left(\frac{e^{\sigma a}}{2}\pounds_{V_2}g_{\mu\sigma}\right) - \pounds_{V_2}\left(\frac{e^{\sigma a}}{2}\pounds_{V_1}g_{\mu\sigma}\right)$$

lo cual es exactamente el primer término del lado derecho de (D.2). La resta total da

$$([\pounds_{V_1}, \pounds_{V_2}] - \pounds_{[V_1,V_2]})V^a = \frac{1}{2}[\pounds_{V_1}(e^{\sigma a})\mathcal{L}_{V_2}(g_{\mu\sigma}) - (\pounds_{V_2}(e^{\sigma a})\pounds_{V_1}(g_{\mu\sigma})]V^\mu. \tag{D.3}$$

Expresando las derivadas de Lie espinoriales

$$\pounds_V e^{\sigma a} = \pounds_V(e^a_\rho g^{\sigma\rho}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_V(g_{\rho\nu})e^{\nu a}g^{\sigma\rho} + e^a_\rho\mathcal{L}_V(g^{\sigma\rho})$$

luego, el lado derecho de (D.3) es una suma de derivadas de Lie estándar de la métrica

$$\frac{1}{4}e^{\nu a}g^{\sigma\rho}(\mathcal{L}_{V_1}g_{\rho\nu}\mathcal{L}_{V_2}g_{\mu\sigma}-\mathcal{L}_{V_2}g_{\rho\nu}\mathcal{L}_{V_1}g_{\mu\sigma})+\frac{1}{2}e^a_\rho(\mathcal{L}_{V_1}g^{\sigma\rho}\mathcal{L}_{V_2}g_{\mu\sigma}-\mathcal{L}_{V_2}g^{\sigma\rho}\mathcal{L}_{V_1}g_{\mu\sigma}).$$

Si V_1 es un vector de Killing conforme, la suma resulta en

$$\frac{\Omega}{4}e^{\nu a}(\delta^\sigma_\nu\mathcal{L}_{V_2}g_{\mu\sigma}-\delta^\rho_\mu\mathcal{L}_{V_2}g_{\rho\nu})+\frac{\Omega}{2}e^a_\rho(-g^{\sigma\rho}\mathcal{L}_{V_2}g_{\mu\sigma}-g_{\mu\sigma}\mathcal{L}_{V_2}g^{\sigma\rho})$$

donde todo se cancela, dado que

$$\frac{\Omega}{4}e^{\nu a}(\mathcal{L}_{V_2}g_{\mu\nu}-\mathcal{L}_{V_2}g_{\mu\nu})=0$$

y

$$-\frac{\Omega}{2}e^a_\rho(g^{\sigma\rho}\mathcal{L}_{V_2}g_{\mu\sigma}+g_{\mu\sigma}\mathcal{L}_{V_2}g^{\sigma\rho})=-\frac{\Omega}{2}e^a_\rho\mathcal{L}_{V_2}(g^{\sigma\rho}g_{\mu\sigma})=-\frac{\Omega}{2}e^a_\rho\mathcal{L}_{V_2}\delta^\rho_\mu=0.$$

Lo mismo sucede si V_2 es un vector de Killing conforme. Podemos confirmar, entonces, que

$$[\pounds_{V_1},\pounds_{V_2}]V^a=\pounds_{[V_1,V_2]}V^a$$

si V_1 o V_2 es un vector de Killing conforme. En conclusión, la derivada de Lie espinorial es una representación

$$[\pounds_{V_1},\pounds_{V_2}]=\pounds_{[V_1,V_2]}$$

si alguno de los dos vectores es de Killing conforme. En esos casos y en casos más restringidos, por ejemplo siendo ambos de Killing, llegamos al resultado deseado.

Bibliografía

[1] J. A. Peacock, "Slipher, galaxies, and cosmological velocity fields," ASP Conf. Ser. **471** (2013) 3, arXiv:1301.7286 [physics.hist-ph].

[2] C. O'Raifeartaigh, M. O'Keeffe, W. Nahm, and S. Mitton, "Einstein's 1917 static model of the universe: A centennial review," (2017) –. Author for correspondence: coraifeartaigh@wit.ie.

[3] C. O'Raifeartaigh, M. O'Keeffe, and S. Mitton, "Historical and philosophical reflections on the einstein-de sitter model," (2017) –. Author for correspondence: coraifeartaigh@wit.ie.

[4] R. Ferraro, "Notas para un curso de relatividad general." Lecture notes, facultad de ciencias exactas y naturales, universidad de buenos aires, 2020–2021. https://materias.df.uba.ar/rga2021c2/files/2020/08/Notas-de-Relatividad-General.pdf. Relatividad General, 2° cuatrimestre, curso completo (versión en PDF disponible en UBA).

[5] **Supernova Search Team** Collaboration, A. G. Riess et al., "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant," Astron. J. **116** (1998) 1009–1038, arXiv:astro-ph/9805201.

[6] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, S. Perlmutter et al., "Measurements of Ω and Λ from 42 High Redshift Supernovae," Astrophys. J. **517** (1999) 565–586, arXiv:astro-ph/9812133.

[7] M. Li, X.-D. Li, S. Wang, and Y. Wang, "Dark Energy: A Brief Review," Front. Phys. (Beijing) **8** (2013) 828–846, arXiv:1209.0922 [astro-ph.CO].

[8] R. Bousso, "TASI Lectures on the Cosmological Constant," Gen. Rel. Grav. **40** (2008) 607–637, arXiv:0708.4231 [hep-th].

[9] P. A. M. Dirac, "The Electron Wave Equation in De-Sitter Space," Annals Math. **36** (1935) 657–669.

[10] A. H. Guth, "The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems," Phys. Rev. D **23** (1981) 347–356.

[11] S. Singh, C. Ganguly, and T. Padmanabhan, "Quantum field theory in de Sitter and quasi–de Sitter spacetimes revisited," Phys. Rev. D **87** no.˜10, (2013) 104004, arXiv:1302.7177 [gr-qc].

[12] E. Witten, "Quantum gravity in de Sitter space," in Strings 2001: International Conference. 6, 2001. arXiv:hep-th/0106109.

[13] T. Basile, X. Bekaert, and N. Boulanger, "Mixed-symmetry fields in de Sitter space: a group theoretical glance," JHEP **05** (2017) 081, arXiv:1612.08166 [hep-th].

[14] G. Sengör and C. Skordis, "Unitarity at the Late time Boundary of de Sitter," JHEP **06** (2020) 041, arXiv:1912.09885 [hep-th].

[15] M. Boers, "Group theory and de Sitter QFT: The concept of mass," Master's thesis, Groningen U., 2013.

[16] D. Anninos, T. Anous, D. Z. Freedman, and G. Konstantinidis, "Late-time Structure of the Bunch-Davies De Sitter Wavefunction," JCAP **11** (2015) 048, arXiv:1406.5490 [hep-th].

[17] D. Anninos, T. Anous, B. Pethybridge, and G. Şengör, "The discrete charm of the discrete series in dS_2," J. Phys. A **57** no.˜2, (2024) 025401, arXiv:2307.15832 [hep-th].

[18] T. Anous and J. Skulte, "An invitation to the principal series," SciPost Phys. **9** no.˜3, (2020) 028, arXiv:2007.04975 [hep-th].

[19] T. Garidi, E. Huguet, and J. Renaud, "DeSitter waves and the zero curvature limit," Phys. Rev. D **67** (2003) 124028, arXiv:gr-qc/0304031.

[20] T. Garidi, "What is mass in de Sitterian physics?," arXiv:hep-th/0309104.

[21] B. Allen, "Vacuum States in de Sitter Space," Phys. Rev. D **32** (1985) 3136.

[22] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to quantum field theory. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

[23] A. Cohen, "Field theory," in 1994 European School of High-energy Physics, pp. 1–42. 8, 1994.

[24] Z. Sun, "A note on the representations of SO(1,d + 1)," Rev. Math. Phys. **37** no.˜01, (2025) 2430007, arXiv:2111.04591 [hep-th].

[25] A. Rios Fukelman, M. Sempé, and G. A. Silva, "Notes on gauge fields and discrete series representations in de Sitter spacetimes," JHEP **01** (2024) 011, arXiv:2310.14955 [hep-th].

[26] I. I. Cotaescu and G. Pascu, "Discrete symmetries determining scalar quantum modes on the de Sitter spacetime," arXiv:1305.6027 [gr-qc].

[27] I. I. Cotaescu and I. Cotaescu, "Discrete symmetries of Dirac's theory in the de Sitter manifold," Eur. Phys. J. C **83** no.˜10, (2023) 888, arXiv:2212.13435 [gr-qc].

[28] B. C. Hall, "An Elementary introduction to groups and representations," arXiv:math-ph/0005032.

[29] D. D. Spiegel, "A simple constructive proof of wigner's theorem," 2018. https://arxiv.org/abs/1810.10111v2.

[30] R. de Melo Marinho Jr., "Noether's theorem in classical mechanics revisited," European Journal of Physics **28** no.˜1, (2007) 37–43.

[31] S. Wadsley, "An introduction to representation theory." Lecture notes, university of cambridge, n.d. Unpublished manuscript.

[32] D. Gomez Vergel and E. J. S. Villasenor, "Unitary evolution of free massless fields in de Sitter space-time," Class. Quant. Grav. **25** (2008) 145008, arXiv:0712.1421 [gr-qc].

[33] M. Stone and P. Goldbart, Mathematics for Physics: A Guided Tour for Graduate Students. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[34] G. A. Silva, "Geometry on group manifolds, free motion and qm spectrum." Lecture notes, departamento de física, universidad nacional de la plata, n.d. Unpublished manuscript.

[35] P.-E. Paradan, "Symmetric spaces of the non-compact type: Lie groups," Séminaires et Congrès **18** (2009) 39–76, hal-00773255. Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités.

[36] A. Jadczyk, "On the bundle of clifford algebras over the space of quadratic forms," Dec, 2023.

[37] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, Supergravity. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 5, 2012.

[38] J. Maciejko, "Representations of lorentz and poincaré groups." Lecture notes. Unpublished, ca. mid-2010s.

[39] J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. (3rd Print., Rev.). -, 1980.

[40] V. A. Letsios, "(Non-)unitarity of strictly and partially massless fermions on de Sitter space II: an explanation based on the group-theoretic properties of the spin-3/2 and spin-5/2 eigenmodes," J. Phys. A **57** no.˜13, (2024) 135401, arXiv:2206.09851 [hep-th].

[41] V. A. Letsios, On representation-theoretic properties of fermionic fields in de Sitter spacetime and symmetries underlying PhD thesis, York U., England, Dept. Math., York U., England, 8, 2023.

[42] B. Pethybridge and V. Schaub, "Tensors and spinors in de Sitter space," JHEP **06** (2022) 123, arXiv:2111.14899 [hep-th].

[43] M. Enayati, J.-P. Gazeau, H. Pejhan, and A. Wang, The de Sitter (dS) Group and its Representations. An Introduction to Elementary Systems and Modeling Synthesis Lectures on Mathematics & Statistics. Springer, 2023. arXiv:2201.11457 [math-ph].

[44] D. Anninos, P. Benetti Genolini, and B. Mühlmann, "dS_2 supergravity," JHEP **11** (2023) 145, arXiv:2309.02480 [hep-th].

[45] V. A. Letsios, B. Pethybridge, and A. Rios Fukelman, "Quite Discrete for a fermion," arXiv:2501.03724 [hep-th].

[46] A. Tomasiello, Geometry of String Theory Compactifications. Cambridge University Press, 1, 2022.

[47] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2nd ed., 2003.

[48] S. M. Carroll, "Lecture notes on general relativity," arXiv:gr-qc/9712019.

[49] S. M. Carroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Cambridge University Press, 7, 2019.

[50] D. Tong, "Lectures on general relativity." http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr.html, 2019. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos, Michaelmas Term.

[51] M. Godina and P. Matteucci, "The lie derivative of spinor fields: theory and applications," 2005. https://arxiv.org/abs/math/0504366.

[52] V. D. Gladush and R. A. Konoplya, "The generalized Casimir operator and tensor representations of groups," J. Math. Phys. **41** (2000) 2299–2309, arXiv:math-ph/9909026.

[53] A. O. Barut and R. Raczka, THEORY OF GROUP REPRESENTATIONS AND APPLICATIONS. -, 1986.

[54] F. Gursey, "Introduction to group theory," in Les Houches Summer Shcool of Theoretical Physics: Relativity, Groups and Topology, pp. 91–164. 1964.

[55] T. Ortin, "A Note on Lie-Lorentz derivatives," Class. Quant. Grav. **19** (2002) L143–L150, arXiv:hep-th/0206159.

[56] J. M. Figueroa-O'Farrill, "On the supersymmetries of Anti-de Sitter vacua," Class. Quant. Grav. **16** (1999) 2043–2055, arXiv:hep-th/9902066.

[57] R. F. Leão, W. A. Rodrigues, and S. A. Wainer, "Concept of Lie Derivative of Spinor Fields A Geometric Motivated Approach," Adv. Appl. Clifford Algebras **27** no.˜1, (2017) 209–227. [Erratum: Adv.Appl.Clifford Algebras 27, 229–230 (2017)].

[58] I. M. Benn and R. W. Tucker, AN INTRODUCTION TO SPINORS AND GEOMETRY WITH APPLICATIONS IN PHYSICS. -, 1987.

[59] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Volume II. Interscience Publishers, New York, 1969.

[60] J. Hartong, "On problems in de Sitter spacetime physics: scalar fields, black holes and stability," Master's thesis, Groningen U., 2004.

[61] A. Zee, Einstein Gravity in a Nutshell. Princeton University Press, New Jersey, 5, 2013.

[62] J. Jiang, "Scalar and Spinor Effective Actions in Global de Sitter," JHEP **06** (2020) 037, arXiv:2004.06251 [hep-th].

[63] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, Quantum Fields in Curved Space. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982.

[64] F. Pisano and N. O. Reis, "Natural units, numbers and numerical clusters," arXiv:hep-ph/0112097.

[65] A. Mostafazadeh and F. Zamani, "Quantum mechanics of Klein-Gordon fields. I. Hilbert space, localized states, and chiral symmetry," Annals Phys. **321** (2006) 2183–2209, arXiv:quant-ph/0602151.

[66] B. S. DeWitt and R. W. Brehme, "Radiation damping in a gravitational field," Annals Phys. **9** (1960) 220–259.

[67] D. Simmons-Duffin, "The Conformal Bootstrap," in Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings, pp. 1–74. 2017. arXiv:1602.07982 [hep-th].

[68] V. Schaub, "Spinors in (Anti-)de Sitter Space," JHEP **09** (2023) 142, arXiv:2302.08535 [hep-th].

[69] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity," Phys. Rept. **323** (2000) 183–386, arXiv:hep-th/9905111.

[70] A. Pich, "Quantum chromodynamics," in 1994 European School of High-energy Physics, pp. 157–207. 5, 1995. arXiv:hep-ph/9505231.

[71] A. Gray and G. B. Mathews, A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics. Macmillan and Co., London and New York, 1895.

[72] M. Wrochna, "Conformal extension of the Bunch-Davies state across the de Sitter boundary," arXiv:1711.04011 [math-ph].

[73] I. Agricola, "Connections on naturally reductive spaces, their dirac operator and homogeneous models in string theory," Communications in Mathematical Physics **232** no.˜3, (2003) 535–563.

[74] E. Joung, J. Mourad, and R. Parentani, "Group theoretical approach to quantum fields in de Sitter space. I. The Principle series," JHEP **08** (2006) 082, arXiv:hep-th/0606119.

[75] E. Joung, J. Mourad, and R. Parentani, "Group theoretical approach to quantum fields in de Sitter space. II. The complementary and discrete series," JHEP **09** (2007) 030, arXiv:0707.2907 [hep-th].

[76] S. Deser and A. Waldron, "Arbitrary spin representations in de Sitter from dS / CFT with applications to dS supergravity," Nucl. Phys. B **662** (2003) 379–392, arXiv:hep-th/0301068.