

Teorema de Noether y cargas conservadas en teorías de gauge



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Iñaki Zalduendo

Director: Guillermo Silva

Co-Director: Alan Garbarz

Marzo 2025

Resumen

En esta tesis enunciamos y estudiamos los teoremas de Noether que permiten definir cargas para simetrías continuas globales y locales (gauge). Evidenciamos la necesidad de introducir un formalismo más riguroso para definir las cargas asociadas a simetrías de gauge. A partir del formalismo de espacio de fases covariante (covariant phase space formalism) derivamos las expresiones para las cargas asociadas a difeomorfismos en el contexto de relatividad general. A continuación, las aplicamos para calcular la masa, el momento angular y la entropía de agujeros negros. Asimismo, mostramos cómo pueden ser usadas para obtener la primera ley de la termodinámica de agujeros negros. Por otro lado, estudiamos las simetrías asintóticas de relatividad general para espacios-tiempos asintóticamente planos, obteniendo como resultado el grupo BMS. Mostramos la aparición de funciones arbitrarias de la esfera celestial S_∞^2 en el infinito nulo, conocidas como supertraslaciones. Posteriormente, utilizamos el formalismo descrito anteriormente para calcular las cargas asociadas.

Índice general

Agradecimientos	4
Introducción	6
1. Teoremas de Noether	9
1.1. Simetrías globales	10
1.1.1. Mecánica clásica	10
1.1.2. Teoría de campos	14
1.2. Simetrías locales	17
1.2.1. Electromagnetismo	21
1.2.2. Relatividad general	23
2. Formalismo de Espacio de Fases Covariante	27
2.1. Estructura simpléctica	28
2.2. Cargas en CPS	30
2.2.1. Hamiltoniano	30
2.2.2. Integrabilidad	31
2.2.3. Conservación de H_ξ	32
2.3. Carga de Noether+Wald	33
2.4. Hamiltoniano H_ξ vs. Carga de Noether-Wald Q_ξ	34
2.5. Aplicaciones a Relatividad General	36
2.5.1. Cargas en agujero negro Kerr-AdS	38
2.6. Entropía de un agujero negro como una carga conservada	40
2.6.1. Entropía para un agujero negro Kerr-AdS	41

2.7. Primera ley de los agujeros negros	42
2.7.1. Primera ley para el agujero negro de Kerr-Newman	45
3. Simetrías asintóticas: grupo BMS	47
3.1. Métrica asintóticamente plana	48
3.2. Fijado de gauge y Asintótica	52
3.3. Ecuaciones de Einstein	55
3.4. Simetrías asintóticas	57
3.4.1. Supertraslaciones	59
3.5. Cargas BMS	62
Conclusiones	64
A. Acción de Einstein-Hilbert	66
B. Condición de integrabilidad	69
C. Covariant Phase Space: definiciones y notación de formas	70
D. Cargas asociadas a supertraslaciones	73
Referencias	75

Agradecimientos

A Guille, el mejor director de tesis de la historia de la humanidad, por su paciencia y su buena predisposición para enseñarme física y responder mis preguntas básicas y molestas.

A Alan, Gastón, Javier Peraza y Andy Gomberoff por su tiempo para explicarnos y ayudarnos a entender muchas cosas a Guille y a mí en distintas reuniones o charlas.

Al grupo de física teórica en altas energías de la facultad, gente como David, Guille, Mauricio y Goya, por estar siempre a disposición y mostrar interés en mi trabajo. También a los alumnos del grupo, por distintas charlas y discusiones que me ayudaron a despejar dudas. Tenemos un gran grupo.

A todos los docentes que me tocó tener, tanto en el colegio como en la facultad, por formarme como profesional y, sobre todo, como persona.

A mis compañeros de la facultad, por ayudarme a estudiar y a atravesar toda la carrera.

A mis amigos, Los Titulares y la banda de la academia, por hacer que todo sea más divertido. Sus preguntas sobre física también me han ayudado a entender mejor las cosas. Así será hasta el final de nuestros días.

A mi abuela, que hoy hubiese sido su cumple.

A mis primos y tíos, por el apoyo incondicional. Ya no me van a tener que preguntar

más: “¿Y? ¿Cuánto te falta para recibirte?”

A mi vieja, por el amor, el cuidado y el apoyo que me brindó siempre y por preguntarme siempre por mi trabajo aún sin entender ni una sola palabra sobre él. Es la mejor mamá del mundo.

A mi viejo, por el amor, el cuidado y el apoyo incondicional y por mostrarme la belleza de la matemática. Si bien esta tesis se titula “Teorema de Noether y cargas conservadas en teorías de gauge”, él bien sabe que podría titularse “Física para Nacho”.

Introducción

La idea de ley de conservación tiene una larga y profunda historia, siendo un concepto transversal a todas las áreas de la física: mecánica clásica, mecánica de fluidos, mecánica cuántica, materia condensada, teoría cuántica de campos o relatividad general. Independientemente de los procesos dinámicos involucrados, la existencia de cantidades dinámicamente invariantes siempre ha constituido un ingrediente esencial para describir la evolución del sistema. La ley suprema de conservación, a saber, la constancia de la cantidad total de energía de un sistema aislado, conocida como primer principio de la termodinámica, constituye una de las leyes físicas de más amplio alcance.

A nivel matemático, las leyes de conservación están profundamente conectadas con la existencia de transformaciones de simetría en el principio variacional. Este hecho crucial fue plenamente reconocido por Emmy Noether en 1918 [1]. Su trabajo proporcionó las bases para una comprensión profunda de las leyes de conservación asociadas a transformaciones *globales continuas* en mecánica clásica y en la teoría clásica de campos. Asimismo, sentó las bases para comprender las leyes de conservación en la teoría de relatividad general, que debido al principio de equivalencia carece de una definición local para el tensor de energía-impulso gravitatorio. La definición de energía en el contexto de gravedad de Einstein fue un tema de investigación y debate muy importante a lo largo de s.XX.

En el contexto de teorías de campos, el primer teorema de Noether establece una relación uno a uno entre una simetría global continua de una teoría y una corriente conservada

$$\delta_s \phi \leftrightarrow \partial_\mu J^\mu \Big|_{on\ shell} = 0 \quad (1)$$

como sabemos de los cursos de mecánica y teoría cuántica de campos, la corriente J^μ resulta conservada al evaluarla sobre una solución de las ecuaciones de movimiento (on-shell).

Diremos que dos corrientes J_1^μ y J_2^μ , conservadas on-shell, son equivalentes si difieren en una corriente trivialmente conservada K^μ y un término t^μ que se anula on-shell

$$J_1^\mu \sim J_2^\mu \quad \text{sii} \quad J_2^\mu = J_1^\mu + \Lambda^\mu + t^\mu$$

con

$$\Lambda^\mu = \partial_\nu k^{\mu\nu}, \quad k^{\mu\nu} = -k^{\nu\mu} \quad \rightsquigarrow \quad \partial_\mu \Lambda^\mu = 0$$

y

$$t^\mu \Big|_{on \ shell} = 0$$

De manera que [2],[3]¹

$$\partial_\mu J_1^\mu \approx \partial_\mu J_2^\mu$$

Como veremos a continuación, se puede mostrar que las corrientes asociadas a transformaciones de locales, al ser evaluadas sobre las ecuaciones de movimiento, resultan derivadas totales [4]

$$J^\mu \approx \partial_\nu \bar{k}^{\mu\nu} \quad \text{con} \quad \bar{k}^{\mu\nu} = -\bar{k}^{\nu\mu}.$$

Esto se expresa tradicionalmente diciendo que las cargas asociadas a simetrías de gauge son triviales y no dan origen a cargas conservadas, pues son simples términos de borde que en principio podríamos eliminar ajustando $k^{\mu\nu}$ convenientemente. Concomitantemente, en virtud de lo discutido arriba, la construcción de cargas de gauge presenta una ambigüedad: puesto que la carga se define como el flujo de la corriente a través de una superficie de Cauchy Σ , tenemos

$$Q_\epsilon = \int_\Sigma J^\mu d\Sigma_\mu = \int_\Sigma \partial_\nu (\bar{k}^{\mu\nu} + k^{\mu\nu}) d\Sigma_\mu = \int_{\sigma=\partial\Sigma} (\bar{k}^{\mu\nu} + k^{\mu\nu}) d\sigma_{\mu\nu} \quad (2)$$

Al ser $k^{\mu\nu}$ completamente arbitrario, también lo es la carga!

—

A lo largo de esta tesis discutiremos estos problemas y describiremos cómo el formalismo de espacio de fases covariante (covariant phase space formalism) da un marco para resolver las ambigüedades. En particular lo aplicaremos para describir la noción de simetría asintótica introducida en los 60 por Bondi, van der Burg, Metzner y Sachs (BMS) [5][6][7]. Estos autores buscaban recuperar el grupo de Poincaré de la relatividad

¹A lo largo de la tesis denotaremos eventualmente con $t^\mu \approx 0$ a una identidad que vale cuando hemos usado las ecuaciones de movimiento.

especial como el grupo de simetría de los espacios-tiempos asintóticamente planos en la relatividad general. En lugar de ello, en un espectacular fracaso de su programa original, descubrieron el grupo BMS, cuyas profundas implicaciones son objeto en la actualidad de una importante línea de investigación en el contexto de gravedad. Más precisamente, el grupo BMS resulta ser una extensión de dimensión infinita del grupo de Poincaré. Estas simetrías asintóticas, que se corresponden con difeomorfismos muy particulares (conocidos como difeomorfismos largos, vectores de Killing asintóticos o supertraslaciones), dan origen a simetrías globales, a pesar de estar paradójicamente construidas a partir de invarianzas locales. Veremos cómo el covariant phase space formalism conduce a cargas no nulas asociadas a estas simetrías.

Capítulo 1

Teoremas de Noether

En física, la búsqueda de cantidades conservadas resulta fundamental a la hora de resolver las ecuaciones de movimiento de un sistema. Uno de los resultados más importantes de la física moderna es el teorema de Noether, que establece una relación directa entre una cantidad conservada y una simetría continua del sistema. En particular, para toda simetría continua global, tenemos lo que se conoce como el primer teorema de Noether que será discutido más abajo. Por otro lado, el segundo teorema de Noether va a aparecer en el contexto de simetrías continuas locales. En estos resultados se basan muchos de los trabajos de la física actual. El teorema, considerado por Einstein como un “monumento al pensamiento matemático”, se puede formular de distintas maneras en distintos contextos.

En este capítulo, estudiaremos simetrías continuas globales, para lo cual introduciremos el primer teorema de Noether. Lo haremos tanto en mecánica clásica (donde pondremos el ejemplo de simetría conforme) como en teoría clásica de campos (donde pondremos el ejemplo del campo de Klein-Gordon). Además, estudiaremos el caso de simetrías locales (que caracterizan a las teorías de gauge), para lo cual introduciremos el segundo teorema de Noether. Discutiremos las ambigüedades que aparecen en este contexto a la hora de definir cargas conservadas y lo mostraremos explícitamente en los casos de electromagnetismo y relatividad general.

1.1. Simetrías globales

Si bien al primer teorema de Noether se suele enunciar explícitamente en los cursos de teoría de campos, es un resultado que se puede aplicar a cualquier sistema que pueda ser derivado a partir de una acción y que tenga una simetría continua global [8].

1.1.1. Mecánica clásica

Consideremos una acción

$$S[q^i(t)] = \int dt L(q^i, \dot{q}^i, t) \quad (1.1)$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \quad (1.2)$$

La simetrías se pueden clasificar en dos grandes clases: discretas (C, P, T) y continuas (rotaciones, boosts, traslaciones, etc). El teorema de Noether estudia el caso de simetrías continuas, esto es, simetrías que poseen uno o varios parámetros continuos ϵ que conectan la transformación con la identidad. Definimos una simetría continua como una transformación de las variables dinámicas q^i conectada con la identidad

$$q^i(t) \longrightarrow q'^i(t) = \mathcal{F}_\epsilon[q^i](t), \quad \mathcal{F}_0[q^i](t) = q^i(t) \quad (1.3)$$

tal que la acción es invariante a menos de un término de borde B

$$\text{Simetría :} \quad S[\mathcal{F}_\epsilon[q^i](t)] = S[q^i(t)] + B, \quad \forall q^i(t), \epsilon \quad (1.4)$$

En este contexto consideremos la expresión infinitesimal de (1.3),

$$q'^i(t) = q^i(t) + \delta_s q^i(t), \quad \epsilon \ll 1 \quad (1.5)$$

El subíndice s en $\delta_s q^i$ denota que la variación corresponde a una transformación de simetría. La condición de simetría (1.4) se expresa infinitesimalmente como

$$\delta S[q^i(t), \delta_s q^i(t)] := S[q^i(t) + \delta_s q^i(t)] - S[q^i(t)] = \int dt \frac{dK}{dt} \quad (1.6)$$

Naturalmente $K = K(q^i, \delta_s q^i, t)$.

—
Ejemplo. Rotaciones: analicemos las consecuencias de la invarianza de la acción frente a rotaciones para una fuerza central. Sea,

$$S[\vec{r}(t)] = \int dt \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \right) \quad (1.7)$$

con $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$ y consideramos una rotación del vector posición dada por

$$\vec{r}'(t) = R \vec{r}(t) \quad (1.8)$$

donde R es una matriz ortogonal

$$RR^T = \mathbb{I}_3 \quad \rightsquigarrow \quad = R^{-1} = R^T$$

Es fácil comprobar que

$$S[R\vec{r}(t)] = S[\vec{r}(t)]$$

La expresión infinitesimal de la transformación para ángulos pequeños $\alpha \ll 1$ a lo largo de un eje \tilde{n} es

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{\alpha} \times \vec{r}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \delta_s \vec{r}(t) = \vec{\alpha} \times \vec{r}(t) \quad (1.9)$$

aquí $\vec{\alpha} = \alpha \tilde{n}$. La variación de la acción resulta entonces

$$\delta S[\vec{r}, \delta_s \vec{r}] = m \int dt \vec{r} \cdot \delta_s \vec{r} = 0 \quad (1.10)$$

donde hemos usado que $\vec{r} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{r}) = 0$ y que $\delta_s V(|\vec{r}|) = 0$ en virtud de $\delta_s |\vec{r}| = 0$. En este ejemplo, $K = 0$.

—
 Para hallar la cantidad conservada Q_ϵ asociada a la simetría (continua) (1.3) Emmy Noether comienza analizando variaciones arbitrarias δq^i de una solución de las ecuaciones de movimiento (1.2). Denotando dicha solución como $\bar{q}^i(t)$ tenemos

$$\delta S[q^i(t), \delta q^i(t)]_{on\ shell} = \delta S[\bar{q}^i(t), \delta q^i(t)] = \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i, t)}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) \quad (1.11)$$

El término de borde en (1.6) resulta de haber evaluado δS en una transformación de simetría $\delta_s q^i$ y una trayectoria arbitraria $q^i(t)$. El término de borde en (1.11) resulta

de evaluar δS para una solución de las ecuaciones de movimiento $\bar{q}^i(t)$ y una variación arbitraria de la trayectoria $\delta q^i(t)$. De manera que si tomamos $q^i(t) = \bar{q}^i(t)$ en (1.6) y $\delta q^i(t) = \delta_s q^i(t)$ en (1.11) ambas expresiones coinciden, restándolas obtenemos

$$\int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i, t)}{\partial \dot{q}^i} \delta_s q^i - K(\bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i) \right) \rightsquigarrow \frac{d}{dt} Q]_{on\ shell} = 0 \quad (1.12)$$

con

$$\text{Carga de Noether :} \quad Q_\epsilon(q^i, \dot{q}^i) = \frac{\partial L(q^i, \dot{q}^i, t)}{\partial \dot{q}^i} \delta_s q^i - K(q^i, \dot{q}^i) \quad (1.13)$$

Toda transformación de simetría $\delta_s q^i(t)$ da origen a una carga conservada Q_ϵ al ser evaluada sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento. Este resultado se conoce como primer teorema de Noether en mecánica clásica.

Ejemplo. Simetría conforme. Consideremos la acción para una partícula de masa m bajo la influencia de un potencial cuadrático inverso

$$S(x) = \int dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) \quad (1.14)$$

La ecuación de movimiento es

$$m \ddot{x} = \frac{2\alpha}{x^3} \quad (1.15)$$

Puesto que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la energía total se conserva

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{\alpha}{x^2} \quad (1.16)$$

El potencial cuadrado inverso presenta invarianzas adicionales asociadas a la simetría conforme. Consideremos en particular la transformación de dilatación, convencionalmente dada por

$$t \rightarrow t' = \lambda t \quad , \quad x(t) \rightarrow x'(t') = \sqrt{\lambda} x(t) \quad (1.17)$$

que implica

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt'} x'(t') = \frac{d(\sqrt{\lambda} x)}{d(\lambda t)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{dx}{dt} \quad (1.18)$$

Es fácil ver que estas transformaciones dejan invariante la acción

$$S[x] \rightarrow S[x'] = \int \lambda dt \left(\frac{1}{2} m \frac{\dot{x}^2}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda x^2} \right) = S[x] \quad (1.19)$$

satisfaciendo nuestra definición (1.4).

En este punto es importante indicar que para hallar las transformaciones a nivel infinitesimal seguiremos el punto de vista discutido en [5]. Esto significa que debemos evaluar los campos en el mismo punto

$$\delta_s x = x'(t) - x(t).$$

De (1.17) tenemos

$$x'(t) = \sqrt{\lambda} x \left(\frac{t}{\lambda} \right)$$

escribiendo $\lambda = 1 + \epsilon + \dots$ con $\epsilon \ll 0$ resulta

$$\delta_s x(t) = x'(t) - x(t) = -\epsilon \left(t\dot{x} - \frac{1}{2}x \right) \quad (1.20)$$

donde además resulta

$$\delta_s \dot{x}(t) = -\epsilon \left(t\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} \right)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \delta S[x, \delta_s x] &= \int dt \left(m \dot{x} \delta_s \dot{x} + 2\alpha \frac{1}{x^3} \delta_s x \right) \\ &= -\epsilon \int dt \left[m \left(t\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^2 \right) + \alpha \frac{2t\dot{x} - x}{x^3} \right] \\ &= -\epsilon \int dt \frac{d}{dt} \left[m \left(\frac{t\dot{x}^2}{2} \right) - \frac{\alpha t}{x^2} \right] \\ &= -\epsilon \int dt \frac{d}{dt} [t L(x, \dot{x})]. \end{aligned}$$

El término de borde resulta $K(x, \dot{x}) = -\epsilon t L$. Luego, la carga conservada (1.13) resulta

$$Q_\epsilon = \epsilon \left[\frac{1}{2} m x \dot{x} - t \left(\frac{1}{2} m t \dot{x}^2 + \frac{\alpha}{x^2} \right) \right]. \quad (1.21)$$

Es fácil ver que, usando la ecuación de movimiento (1.15) la carga se conserva

$$\frac{dQ_\epsilon}{dt} \Big|_{on \ shell} = 0 \quad (1.22)$$

—

1.1.2. Teoría de campos

La definición de simetría en el contexto de teoría de campos es una extensión directa de la definición de mecánica clásica, es decir, una transformación que deja invariante la acción a menos de un término de borde. En otras palabras, a orden infinitesimal las simetrías continuas de una teoría de campos $\delta_s\phi(x)$ son tales que para configuraciones arbitrarias $\phi(x)$ (off-shell) la variación de la acción resulta

$$\delta_s S := S[\phi + \delta_s\phi] - S[\phi] = \int d^d x \partial_\mu K^\mu(\phi, \delta_s\phi) \quad \forall \phi \quad (1.23)$$

eventualmente denotaremos el término de borde como $K^\mu = K^\mu(\phi, \delta_s\phi)$. Aclaremos nuevamente que K^μ está evaluado para una transformación de simetría, pero la igualdad vale para toda configuración de campos $\phi(x)$ satisfaga o no las ecuaciones de movimiento.

Como discutimos en la sección anterior, la transformación de simetría se define como

$$\delta_s\phi(x) := \phi'(x) - \phi(x), \quad (1.24)$$

esto es, evaluando los campos en el mismo punto x . Enfatizamos que, siguiendo [8], aún en el caso de transformaciones asociadas a cambios de coordenadas, las transformaciones siempre se pueden pensar como transformaciones actuando en los campos sin cambio alguno de las coordenadas. Este punto de vista resulta muy útil a la hora de hacer las cuentas.

Consideremos una acción para un campo escalar

$$S[\phi] = \int d^d x L(\phi, \partial_\mu\phi) \quad (1.25)$$

donde L es una densidad lagrangiana, no un escalar. Es decir, incorporaremos el factor de volumen en la definición del lagrangiano, i.e. $L(\phi, \partial_\mu\phi) = \sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ con $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ un escalar.

Para variaciones arbitrarias $\delta\phi$, la acción cambia como

$$\begin{aligned} \delta S[\phi, \delta\phi] &= \int d^d x \left(\frac{\partial L}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) \right) \\ &= \int d^d x \left(\left[\frac{\partial L}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \delta\phi \right) + \int d^d x \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde en el segundo renglón hicimos partes en ∂_μ y usamos que $\delta\partial = \partial\delta$. El primer término de (1.26) define las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$E(\phi) := \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \quad (1.27)$$

De manera que si evaluamos (1.26) para $\bar{\phi}$ que satisface las ecuaciones de movimiento¹, para $\delta\phi$ arbitrario obtenemos

$$\delta S[\bar{\phi}, \delta\phi] = \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \quad (1.28)$$

A partir de esta expresión definimos el potencial presimpléctico

$$\text{Potencial presimpléctico : } \Theta^\mu := \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \quad (1.29)$$

aquí $\Theta^\mu = \Theta^\mu(\bar{\phi}, \delta\phi)$. Sin embargo, más generalmente podemos pensar al potencial presimpléctico Θ^μ evaluado en configuraciones arbitrarias que no sean solución de Euler-Lagrange, esto es $\Theta^\mu = \Theta^\mu(\phi, \delta\phi)$.

Evaluando (1.23) en $\bar{\phi}$, (1.28) en $\delta_s\phi$ y restando, obtenemos la corriente conservada. El primer teorema de Noether en teoría de campos resulta

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu \Big|_{on\ shell} = 0 \quad \text{donde} \quad J^\mu(\phi, \delta_s\phi) &:= \Theta^\mu(\phi, \delta_s\phi) - K^\mu(\phi, \delta_s\phi) \\ &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta_s\phi - K^\mu \end{aligned} \quad (1.30)$$

Es solo al evaluar J^μ on shell que la corriente resulta conservada. Esta es la razón por la que enfatizamos la dependencia

$$\partial_\mu J^\mu(\bar{\phi}, \delta_s\phi) = 0$$

Puesto que en componentes, la ley de conservación toma la forma

$$\partial_t J^0 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J},$$

Integrando de ambos lados en un cilindro 4-dimensional $\mathcal{M} = I \times \Sigma$ con $I = (t_i, t_f)$ un intervalo temporal, Σ la hipersuperficie $t = const.$ (ver figura 1.1) y usando el teorema de Gauss resulta

¹Coloquialmente decimos *evaluando la variación on-shell*.

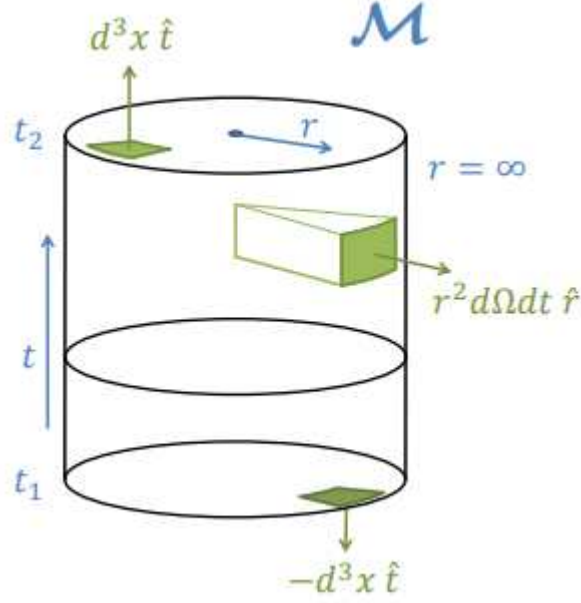


Figura 1.1: Cilindro 4-dimensional \mathcal{M}

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_t J^0 = - \int_{\mathcal{M}} d^4x \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \int_{I \times \partial\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (1.31)$$

Si asumimos que el flujo a lo largo del borde $\partial\Sigma$ es nulo, el lado derecho de la igualdad es cero. Puesto que el lado izquierdo de esta expresión nos da el flujo de la 4-corriente a través de las superficies espaciales Σ_t con $t = \text{const.}$ tenemos que

$$0 = \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_t J^0 = Q(t_f) - Q(t_i)$$

donde

$$Q(t) = \int_{\Sigma_t} d^3x J^0(t, \vec{x}) \quad (1.32)$$

Concluimos entonces que

$$\frac{d}{dt} Q(t) = 0$$

La existencia de una carga conservada depende entonces de que los campos decaigan suficientemente rápido en el borde de Σ . En el contexto BMS deberemos rever esta hipótesis.

Ejemplo. Campo de Klein-Gordon. Consideremos el lagrangiano de Klein-Gordon para un campo escalar complejo en espacio plano²

$$L(\phi, \partial\phi) = -\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \quad (1.33)$$

Es fácil ver que el lagrangiano es invariante frente a transformaciones del grupo U(1) actuando sobre ϕ como un cambio de fase global

$$\phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \approx (1 + i\alpha)\phi(x) \rightsquigarrow \delta_s\phi = i\alpha\phi, \quad \alpha \ll 1$$

asimismo

$$\phi^{*'}(x) = \phi^*(x)e^{-i\alpha} \approx \phi^*(x)(1 - i\alpha) \rightsquigarrow \delta_s\phi^* = -i\alpha\phi^* \quad (1.34)$$

En este caso, $K^\mu = 0$, por lo tanto, de (1.30) tenemos fijando $\alpha = 1$,

$$J_{KG}^\mu := \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_s\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta_s\phi^* \quad (1.35)$$

$$= \partial^\mu\phi^*(i\phi) + \partial^\mu\phi(-i\phi^*) \quad (1.36)$$

$$= i(\partial^\mu\phi^*\phi - \phi^*\partial^\mu\phi) \quad (1.37)$$

Es fácil ver que usando las ecuaciones de movimiento de los campos

$$(\square - m^2)\phi = 0, \quad (\square - m^2)\phi^* = 0$$

la corriente (1.37) se conserva

$$\partial_\mu J_{KG}^\mu \approx 0 \quad (1.38)$$

1.2. Simetrías locales

Las simetrías de gauge tienen un rol fundamental en la formulación de las teorías de la física fundamental. Todas las interacciones fundamentales de la física están descritas por lagrangianos que poseen invarianza de gauge. Las teorías de gauge están caracterizadas

²A lo largo de la tesis nuestra convención para la signatura de la métrica es mostly plus, i.e. $(-+++)$

por poseer simetrías locales, esto significa que son invariantes frente a transformaciones que dependen de funciones arbitrarias de las coordenadas del espacio-tiempo. Por ejemplo, cambios de gauge en electromagnetismo

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \quad \forall \alpha(x) \quad (1.39)$$

o difeomorfismos en relatividad general

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad \forall x'(x) \quad (1.40)$$

Es en este contexto que discutiremos cómo asociar una cantidad conservada a estas invarianzas [4].

Supongamos que tenemos una transformación de nuestros campos dinámicos dependiente de un parámetro arbitrario ϵ , la denotaremos $\delta_\epsilon \phi$. Si esta transformación deja la acción invariante a menos de un término de borde, decimos que tenemos una simetría local. A nivel infinitesimal escribimos

$$\delta S[\phi, \delta_\epsilon \phi] = B, \quad \forall \epsilon = \epsilon(x) \quad (1.41)$$

donde B es un término de borde. El segundo teorema de Noether consiste en estudiar las consecuencias de esta hipótesis.

Evaluando la variación de la acción para $\delta_\epsilon \phi$ tenemos

$$\delta S[\phi, \delta_\epsilon \phi] = \int d^4x [E(\phi) \delta_\epsilon \phi + \partial_\mu \Theta^\mu(\phi, \delta_\epsilon \phi)] = B, \quad \forall \epsilon = \epsilon(x) \quad (1.42)$$

Aquí $E(\phi)$ son las ecuaciones de movimiento (1.27) y la aparición de una derivada parcial en el segundo término se debe a que hemos considerado a $L(\phi, \partial\phi)$ como una densidad (ver comentario debajo de (1.25)).

El análisis de Emmy que conduce al segundo teorema de Noether comienza suponiendo que $\epsilon(x)$ tiene soporte compacto, esto significa en primera instancia que vamos a descartar todos los términos de borde, por ejemplo el segundo término de (1.42). Además, por simplicidad, vamos a asumir que la variación de los campos no contiene términos de orden mayor o igual a dos en las derivadas de $\epsilon(x)$, es decir, asumimos que

$$\delta_\epsilon \phi = f(\phi) \epsilon(x) + f^\mu \partial_\mu \epsilon(x), \quad \forall \epsilon(x) \quad (1.43)$$

Reemplazando esta expresión en (1.42), resulta

$$\begin{aligned}
0 \doteq \delta S[\phi, \delta_\epsilon \phi] &\doteq \int d^4x E(\phi) (f(\phi)\epsilon(x) + f^\mu \partial_\mu \epsilon(x)) \\
&= \int d^4x \left\{ E(\phi) f(\phi) \epsilon(x) + \partial_\mu [\epsilon(x) f^\mu E(\phi)] - \epsilon(x) \partial_\mu (f^\mu E(\phi)) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ E(\phi) f(\phi) - \partial_\mu (f^\mu E(\phi)) \right\} \epsilon(x), \quad \forall \epsilon(x)
\end{aligned} \tag{1.44}$$

donde usamos partes para obtener la segunda línea y descartamos el término de borde para llegar a la tercera. Asimismo el cero del lado izquierdo se sigue de asumir que la acción es invariante frente a la transformación local (1.43) a menos de términos de borde (denotamos este hecho con $\dots \doteq 0$). Como $\epsilon(x)$ es arbitrario, concluimos que las ecuaciones de movimiento satisfacen relaciones no triviales

$$\text{Identidades de Noether : } \quad E(\phi) f(\phi) - \partial_\mu (f^\mu E(\phi)) = 0 \tag{1.45}$$

Estas relaciones se conocen como identidades de Noether y nos dicen que para toda teoría que admita simetrías locales, las ecuaciones de movimiento no son todas independientes entre sí. Es importante enfatizar que este resultado vale *off shell*.

Dado que el primer término de (1.42) tiene que coincidir con (1.44) a menos de términos de borde (que no estuvimos considerando), tenemos que

$$E(\phi) \delta_\epsilon \phi = \epsilon(x) (E(\phi) f(\phi) - \partial_\mu (f^\mu E(\phi))) + \partial_\mu S^\mu, \quad \forall \epsilon(x) \tag{1.46}$$

Aquí $S^\mu(\phi, \delta_\epsilon \phi)$ da cuenta de los términos de borde. Por otra parte, esta identidad también nos dice que S^μ es proporcional a las ecuaciones de movimiento $E(\phi)$ y a sus derivadas. Es decir, que la corriente S^μ se anula on shell,

$$S^\mu \approx 0.$$

Usando las identidades de Noether (1.45) en (1.46) obtenemos el segundo teorema de Noether, que toma la forma

$$2^{\text{do}} \text{ teorema de Noether : } \quad E(\phi) \delta_\epsilon \phi = \partial_\mu S^\mu, \quad \forall \epsilon(x) \tag{1.47}$$

Consideramos a continuación las consecuencias del 2^{do} teorema de Noether para la corriente J^μ definida en (1.30). Para ello, notemos que (1.26) evaluada en la simetría local $\delta_\epsilon \phi$ coincide con (1.23). Igualando ambas expresiones obtenemos (off shell)

$$E(\phi) \delta_\epsilon \phi = -\partial_\mu J^\mu, \quad \forall \phi(x), \epsilon(x) \tag{1.48}$$

Es importante volver a enfatizar que $J^\mu = J^\mu(\phi, \delta_\epsilon \phi)$, o sea, evaluada en la simetría local, pero para configuraciones arbitrarias, esto es, *off-shell*. Esta es la razón por la cual la corriente parece no conservarse. Naturalmente si hacemos $\phi \rightarrow \bar{\phi}$ en (1.48), satisfaremos las ecuaciones de movimiento, el lado izquierdo se anulará y la corriente se conservará.

Ahora bien, insertando el segundo teorema de Noether (1.47) en (1.48) obtenemos un resultado sorprendente para la corriente de Noether definida en (1.30)

$$\partial_\mu(J^\mu + S^\mu) = 0, \quad \forall \phi(x), \epsilon(x) \quad (1.49)$$

Esto es una corriente conservada off shell! En virtud del lema de Poincaré resulta que podemos escribir

$$J^\mu + S^\mu = \partial_\nu k_\epsilon^{\mu\nu} \quad (1.50)$$

con $k_\epsilon^{\mu\nu} = -k_\epsilon^{\nu\mu}$ un tensor antisimétrico, en principio *arbitrario*. El tensor $k^{\mu\nu}$ se conoce como superpotencial. Evaluando (1.50) on shell, encontramos el resultado esperado

$$\text{Corriente de Noether para simetrías locales : } J^\mu \approx \partial_\nu k_\epsilon^{\mu\nu}. \quad (1.51)$$

La corriente de Noether J^μ asociada a simetrías locales al ser evaluada on shell resulta ser una derivada total! Alternativamente solemos decir que la corriente de gauge on shell se expresa en términos de un superpotencial. Sin embargo, de la deducción de (1.51) observamos que el superpotencial $k_\epsilon^{\mu\nu}$ está totalmente indeterminado, esta ambigüedad será discutida en el próximo capítulo usando el formalismo de espacio de fase covariante.

Concluimos esta sección analizando la construcción de la carga asociada a J^μ . Definiendo la carga de la manera usual, es decir, integrando el flujo de la 4-corriente en una superficie de Cauchy, tenemos

$$Q_\epsilon := \int_\Sigma J^\mu d\Sigma_\mu = \int_\Sigma \partial_\nu k_\epsilon^{\mu\nu} d\Sigma_\mu = \oint_{\partial\Sigma} k_\epsilon^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} \quad (1.52)$$

aquí $d\Sigma_\mu = (d^{n-1}x)_\mu$ y $d\sigma_{\mu\nu} = (d^{n-1}x)_{\mu\nu}$ son los elementos de volumen sobre la hipersuperficie espacial Σ y su borde $\sigma = \partial\Sigma$ respectivamente. La expresión para la carga es ambigua pues a la 2-forma $k_\epsilon^{\mu\nu}$ siempre podemos sumarle una forma cerrada $k^{\mu\nu}$ (cf.(2)). Por lo tanto, si queremos definir unívocamente una carga Q_ξ asociada a una simetría local $\xi(x)$, necesitamos desarrollar más formalismo. EL formalismo CPS que discutiremos en el próximo capítulo definirá unívocamente la cantidad $k_\xi^{\mu\nu}$ a partir de una dada simetría. De esta manera, la carga Q_ξ quedará completamente determinada.

A continuación discutiremos dos ejemplos paradigmáticos donde mostraremos de forma concreta lo discutido en esta sección.

1.2.1. Electromagnetismo

La acción de Maxwell se escribe como

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^n x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.53)$$

La transformación de gauge está dada por (1.39) que a nivel infinitesimal toma la forma

$$\delta_\epsilon A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x), \quad \forall \epsilon(x) \quad (1.54)$$

Al variar la acción obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S[A_\mu, \delta_\epsilon A_\mu] &= -\frac{1}{2} \int d^n x F^{\mu\nu} \delta_\epsilon F_{\mu\nu} = - \int d^n x F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta_\epsilon A_\nu \\ &= - \int d^n x F^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \epsilon = 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

donde en la última igualdad usamos que $F^{\mu\nu}$ es antisimétrico.

Por otra parte, para variaciones arbitrarias δA_μ , del último término de la primera línea tenemos, haciendo partes en ∂_μ y usando las ecuaciones de movimiento

$$\partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = 0$$

tenemos que

$$\delta S[\bar{A}_\mu, \delta A_\mu] = - \int d^n x \partial_\mu (\bar{F}^{\mu\nu} \delta A_\nu). \quad (1.56)$$

De donde reconocemos que

$$\Theta^\mu := -F^{\mu\nu} \delta A_\nu \quad (1.57)$$

Podemos verificar ahora las distintas afirmaciones discutidas arriba:

- 2do teorema de Noether: puesto que $\delta_\epsilon A_\mu = \partial_\mu \epsilon$

$$E^\nu(A) \delta_\epsilon A_\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} \partial_\nu \epsilon = \partial_\nu (\epsilon(x) \partial_\mu F^{\mu\nu}) - \epsilon(x) \partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu}) = \partial_\nu (\epsilon(x) \partial_\mu F^{\mu\nu}) \quad \forall \epsilon(x) \quad (1.58)$$

Aquí $E^\mu(A)$ denota la ecuación de movimiento para A_ν . De (1.58) vemos que se verifica (1.47) donde la corriente S^μ es

$$S^\mu = \epsilon(x)\partial_\nu F^{\mu\nu} \approx 0 \quad (1.59)$$

y vemos que efectivamente es proporcional a las ecuaciones de movimiento, por lo que on shell se anula. Además, comparando (1.58) con (1.46), obtenemos las identidades de Noether para electromagnetismo, que son

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.60)$$

que es cero off shell por contracción de índices de Lorentz.

- **Corriente de Noether:** como el lagrangiano es invariante de gauge no tenemos término de borde y $K^\mu = 0$. Luego, de (1.57) tenemos

$$J^\mu(\bar{A}_\mu, \delta_\epsilon A_\mu) = \Theta^\mu = -\bar{F}^{\mu\nu} \partial_\nu \epsilon = -\partial_\nu(\epsilon \bar{F}^{\mu\nu}), \quad \text{con } \epsilon = \epsilon(x) \quad (1.61)$$

verificando (1.51). Mas aún,

$$\bar{k}_\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon(x) \bar{F}^{\mu\nu}(x) \quad (1.62)$$

Aquí denotamos con una barra al superpotencial para manifestar que depende de una solución de las ecuaciones de movimiento. Naturalmente siempre se le puede sumar una 2-forma arbitraria!

- **Carga de Noether:** a partir de (1.52) tenemos

$$Q_\epsilon = - \oint_{\partial\Sigma} \bar{k}_\epsilon^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} = - \oint_{\partial\Sigma} \epsilon(x) \bar{F}^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu}, \quad \forall \epsilon(x) \quad (1.63)$$

que en principio da origen a un número infinito de cargas debido a que $\epsilon(x)$ es arbitrario. Este problema es analizado en profundidad en [9]. Además, notemos que el valor de la carga depende de cómo decae $\epsilon(x)$ en el infinito. Como comentario final, notemos que para $\epsilon = \text{const.}$ en $\mathbb{R}^{1,3}$ obtenemos

$$Q_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x J^0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \partial_i(\epsilon \bar{F}^{i0}) = \epsilon \oint_{S_\infty^2} \bar{F}^{i0} dS_i = \epsilon \oint_{S_\infty^2} \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (1.64)$$

Esto es la carga eléctrica usual donde \vec{E} denota el campo eléctrico. De manera que recuperamos la ley de Gauss, donde el flujo de campo eléctrico a través de la superficie S_∞^2 es proporcional a la carga encerrada.

1.2.2. Relatividad general

La acción de Einstein-Hilbert se escribe como [4]

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} R[g_{\mu\nu}] \quad (1.65)$$

Variando (1.65) con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ obtenemos (a menos de un término de borde que discutiremos más adelante)

$$\frac{\delta S[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} G^{\mu\nu}[g] \quad (1.66)$$

De donde obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\text{Ecuaciones de Einstein : } E(g_{\mu\nu}) := -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} G^{\mu\nu}[g] := -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0$$

donde $G^{\mu\nu}[g]$ se llama tensor de Einstein.

Analizaremos a continuación el segundo teorema de Noether en el contexto de gravedad pura. La acción (1.65) es invariante frente a cambios generales de coordenadas o difeomorfismos (1.40) que a nivel infinitesimal, se escriben como

$$\begin{aligned} \delta_\xi g_{\mu\nu} &= \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \\ &= \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \quad \forall \xi_\mu = \xi_\mu(x) \end{aligned} \quad (1.67)$$

con $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ el campo vectorial generador del difeomorfismo. A fin de verificar el segundo teorema de Noether computamos

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} (\nabla_\mu \xi_\nu) G^{\mu\nu} = \partial_\mu \left(-\frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \xi_\nu G^{\mu\nu} \right) + \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \xi_\nu \nabla_\mu G^{\mu\nu}, \quad \forall \xi_\mu(x) \quad (1.68)$$

que, comparado con (1.46) permite identificar la identidad de Noether como

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (1.69)$$

que, como mencionamos, es una identidad que vale off-shell. A esta identidad se la conoce como identidad de Bianchi. Asimismo, esta expresión nos permite identificar a la corriente S^μ de (1.46) como

$$S^\mu = -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \xi_\nu G^{\mu\nu} \quad (1.70)$$

que, efectivamente, es proporcional a las ecuaciones de movimiento, por lo tanto

$$S^\mu \approx 0.$$

Resta calcular la corriente de Noether J^μ definida en (1.30). Para ello, es necesario hallar Θ^μ que requiere considerar variaciones arbitrarias de la métrica (ver apéndice A para los detalles), el resultado es [10],[11]

$$\delta S[g_{\mu\nu}, \delta g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^n x \sqrt{-g} [G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu ((g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta})] \quad (1.71)$$

El primer término de la derecha de (1.71) contiene las ecuaciones de movimiento y por lo tanto on shell se anula. Por otro parte, el segundo término es una derivada total que nos permite identificar

$$\Theta^\mu(g, \delta g) = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta} \quad (1.72)$$

Evaluando Θ para la transformación local (1.67) y teniendo en cuenta la simetría en $(\alpha\beta)$ obtenemos

$$\Theta^\mu(g, \delta_\xi g) := \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (\nabla_\nu (\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu) + 2R^{\sigma\mu} \xi_\sigma) \quad (1.73)$$

Por otro parte, el término de borde K^μ al variar acción frente a la simetría es (cf. (A.10))

$$\delta S[g_{\mu\nu}, \delta_\xi g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} \nabla_\mu (\xi^\mu R)$$

de donde obtenemos

$$K^\mu(g_{\mu\nu}, \delta_\xi g_{\mu\nu}) = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \xi^\mu R \quad (1.74)$$

Insertando (1.73) y (1.74) en la corriente de Noether (1.30) resulta³

$$J^\mu(g_{\mu\nu}, \delta_\xi g_{\mu\nu}) = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \nabla_\nu (\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu) + \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} G^{\mu\nu} \xi_\nu \quad (1.75)$$

que gratamente satisface (1.50)

$$J^\mu + S^\mu = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \nabla_\nu (\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu) \quad (1.76)$$

³Notar que la expresión (1.75) está definida para configuraciones *off shell*.

Evaluando esta expresión on shell nos permite reconocer el término superpotencial como

$$\text{2-forma de Komar : } \quad \bar{k}_\xi^{\mu\nu} := \frac{\sqrt{-\bar{g}}}{16\pi G} (\bar{\nabla}^\mu \xi^\nu - \bar{\nabla}^\nu \xi^\mu) \quad (1.77)$$

Esta expresión se conoce como la carga de Komar. La carga asociada resulta

$$Q_\xi = -\frac{\sqrt{-\bar{g}}}{16\pi G} \oint_{\partial\Sigma} (\bar{\nabla}^\mu \xi^\nu - \bar{\nabla}^\nu \xi^\mu) d\sigma_{\mu\nu} \quad (1.78)$$

En el último capítulo discutiremos el concepto de vectores de Killing asintóticos, estos serán los difeomorfismos que naturalmente darán origen a cargas conservadas no triviales.

GLOSARIO Y FÓRMULAS IMPORTANTES

- . $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$: lagrangiano usual, es un escalar.
- . $L(\phi, \partial\phi) = \sqrt{-g}\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$: es una densidad.
- Da origen a expresiones variacionales con derivadas parciales.
- . $\phi, g_{\mu\nu}$: configuraciones arbitrarias *off shell*.
- . $\bar{\phi}, \bar{g}_{\mu\nu}$: configuraciones *on shell*.
- . $\delta\phi, \delta g_{\mu\nu}$: variaciones arbitrarias de la configuración del sistema.
- . $\delta_s\phi, \delta_s g_{\mu\nu}$: variaciones correspondientes a una simetría global.
- . $\delta_\epsilon\phi, \delta_\epsilon g_{\mu\nu}$: variaciones correspondientes a una simetría local, i.e. $\epsilon = \epsilon(x)$.
- . $K^\mu(\phi, \delta_s\phi)$: término de borde asociado a una simetría (ver (1.23)).
- . $A \doteq B$: A y B difieren por un término de borde
- . $A \approx B$: A y B coinciden on shell.
- . Q_ϵ : carga de Noether conservada asociada a $\delta_\epsilon\phi$.

. Primer Teorema de Noether

$$\text{Corriente de Noether : } J^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_s\phi(x) - K^\mu \rightsquigarrow \boxed{\partial_\mu J^\mu \approx 0}$$

. Segundo Teorema de Noether

$$E(\phi)\delta_\epsilon\phi = \partial_\mu S^\mu(E(\phi), \phi)$$

. Teorema de Noether 1.5 (simetrías locales):

$$J^\mu = \partial_\nu k_\epsilon^{\mu\nu}, \quad k_\epsilon^{\mu\nu} = -k_\epsilon^{\nu\mu} \rightsquigarrow Q_\epsilon \approx \oint_{\partial\Sigma} k_\epsilon^{\mu\nu}(d^{m-2}x)_{\mu\nu}$$

. Corrientes de Noether:

$$\text{Electromagnetismo : } J^\mu \approx \partial_\nu(\epsilon F^{\mu\nu}) \quad \text{donde } \epsilon = \epsilon(x)$$

$$\text{Relatividad general : } J^\mu \approx \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \nabla_\nu(\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu)$$

El slogan es:

“Global symmetries lead to codimension-1 (volume) charges, whereas gauge symmetries lead to codimension-2 (surface) charges.”

Capítulo 2

Formalismo de Espacio de Fases Covariante

La gravitación tiene un carácter distinto al de los campos de materia usuales. Los campos de materia normalmente tienen un tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ simétrico y (covariantemente) conservado que permite dar una noción de energía local. Esto se debe a que se formulan sobre un fondo geométrico fijo. En presencia de un vector de Killing k^μ para la métrica de fondo, es fácil mostrar que la corriente

$$J^\mu = T^\mu{}_\nu k^\nu$$

está conservada. Asumiendo las condiciones usuales de ausencia de flujo en el borde de Σ , una superficie de Cauchy, la expresión

$$Q_k = \int_\Sigma J^\mu d\Sigma_\mu \tag{2.1}$$

define una cantidad conservada asociada al vector Killing k^μ .

Sin embargo, el principio de equivalencia impide una noción local de energía para la gravedad. Esto se manifiesta explícitamente al no existir un tensor de energía momento bien definido para la métrica [10] [12] [13]. Por lo tanto, el método descrito arriba no se puede usar para calcular cantidades conservadas a configuraciones puramente gravitatorias. [14]

En este capítulo estudiaremos el formalismo de espacio de fases covariante (covariant phase space formalism, CPS). Este formalismo resulta extremadamente útil en teorías relativistas invariantes bajo difeomorfismos, porque preserva manifiestamente la covarianza

dentro de un enfoque canónico. Como veremos, el formalismo permite definir expresiones para las variaciones de las cargas asociadas a simetrías de gauge. En el caso de que estas variaciones resulten integrables, obtendremos una expresión no ambigua para las cargas asociadas a simetrías locales.

2.1. Estructura simpléctica

A continuación presentaremos un método general y sistemático para calcular cargas asociadas a simetrías locales basado en la construcción de un espacio de fases covariante para teorías de campos relativistas [15] [16]. La construcción de la estructura simpléctica en el espacio de fases covariante hace uso del lagrangiano que define el contenido de campo y la dinámica de la teoría. Esta construcción no guarda relación con el enfoque canónico tradicional y, por lo tanto, produce resultados covariantes.

Denotamos con \mathcal{F} al espacio de configuraciones de campos $\Phi(x)$ que satisfacen condiciones de contorno dadas en el borde del espacio tiempo \mathcal{M} . Cada configuración de campos $\Phi(x)$ en \mathcal{M} corresponde a un punto en el espacio \mathcal{F} . Una configuración arbitraria Φ en principio no satisface las ecuaciones de movimiento. Las configuraciones que satisfagan las ecuaciones de movimiento, $\bar{\Phi}$, formarán un subespacio que, atendiendo a la notación del capítulo anterior, denotaremos como $\bar{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$.

El operador δ con el que solemos representar las variaciones de un campo puede considerarse una derivada exterior en \mathcal{F} . La identificación es la siguiente: dado que una dada configuración Φ es un punto en \mathcal{F} , una pequeña variación $\delta\Phi$ es un vector en el espacio tangente $T_{\Phi}\mathcal{F}$. Entenderemos los símbolos $\Phi(x)$ y $\delta\Phi(x)$ como denotando los valores numéricos del campo y su variación en $x \in \mathcal{M}$ respectivamente. Una 1-forma sobre \mathcal{F} es una funcional lineal de $T_{\Phi}\mathcal{F}$ a \mathbb{R} o \mathbb{C} , por lo tanto, es una transformación de $\delta\Phi$ al número $\delta\Phi(x)$, con $x \in \mathcal{M}$. Abusando la notación, decimos que $\delta\Phi(x)$ es una 1-forma sobre \mathcal{F} . De esta manera, δ actúa sobre una 0-forma F para dar una 1-forma δF sobre \mathcal{F} que podemos representar como

$$(\delta F)(\Phi) := \int_{\mathcal{M}} d^n x \delta\Phi(x) \frac{\delta F}{\delta\Phi(x)}$$

Resulta entonces que δ es una derivada exterior sobre \mathcal{F} pues es posible mostrar con un

tratamiento más riguroso, que [17]

- i.* $\delta^2 = 0$
- ii.* δ satisface Leibniz.
- iii.* δ mapea k -formas en $(k + 1)$ -formas. (2.2)

Resultará útil la siguiente prescripción para relacionar a δ vista como una derivada exterior en \mathcal{F} y a δ vista como una variación sobre \mathcal{M}

$$\delta(F(\Phi, \delta\Phi)) := \delta_1(F(\Phi, \delta_2\Phi)) - \delta_2(F(\Phi, \delta_1\Phi)) \quad (2.3)$$

La acción de δ en el lado izquierdo corresponde a la derivada exterior en \mathcal{F} , mientras que en el lado derecho δ_i representan variaciones independientes del campo $\delta_1\Phi(x), \delta_2\Phi(x)$ que naturalmente satisfacen $(\delta_i)^2 \neq 0$ y conmutan entre sí. Es inmediato verificar que esta regla implica

$$\delta^2\Phi = \delta_1\delta_2\Phi - \delta_2\delta_1\Phi = 0 \quad (2.4)$$

Asimismo, denotaremos con d a la derivada exterior usual en \mathcal{M} . Las derivadas exteriores δ y d conmutan entre sí.

Comenzamos asumiendo que tenemos una densidad lagrangiana $L(\Phi, \partial\Phi)$ de una teoría de campos que presenta simetrías locales. Definimos el potencial presimpléctico $\Theta(\Phi, \delta\Phi)$ a través de la variación del lagrangiano

$$\delta L(\Phi, \partial\Phi) = E(\Phi)\delta\Phi + d\Theta(\Phi, \delta\Phi) \quad (2.5)$$

donde $E(\Phi)$ son las ecuaciones de movimiento

$$E(\Phi) \approx 0 \quad (2.6)$$

A partir del potencial presimpléctico definimos formalmente la corriente simpléctica como $\omega = \delta\Theta$. En la representación espaciotemporal ω toma la forma

$$\text{Corriente simpléctica : } \omega(\delta_1\Phi, \delta_2\Phi, \Phi) = \delta_1(\Theta(\Phi, \delta_2\Phi)) - \delta_2(\Theta(\Phi, \delta_1\Phi)) \quad (2.7)$$

La corriente simpléctica satisface una propiedad muy importante: si Φ es solución de las ecuaciones de movimiento y $\delta_1\Phi, \delta_2\Phi$ son variaciones que satisfacen las ecuaciones de movimientos linealizadas alrededor de $\bar{\Phi}$, entonces ω es cerrada en \mathcal{M} , sobre configuraciones y variaciones on shell

$$d\omega(\delta_1\Phi, \delta_2\Phi, \Phi) \approx 0, \quad \Phi, \delta_i\Phi \in \bar{\mathcal{F}}$$

Efectivamente, usando (2.5) y el hecho de que las variaciones δ_1, δ_2 conmutan, tenemos

$$\begin{aligned}
d\omega(\delta_1\bar{\Phi}, \delta_2\bar{\Phi}, \bar{\Phi}) &= \delta_1(d\Theta(\bar{\Phi}, \delta_2\bar{\Phi})) - \delta_2(d\Theta(\bar{\Phi}, \delta_1\bar{\Phi})) \\
&= \delta_1(\delta_2 L(\bar{\Phi}, \partial\bar{\Phi}) - \underline{E}(\bar{\Phi})\delta_2\bar{\Phi}) - \delta_2(\delta_1 L(\bar{\Phi}, \partial\bar{\Phi}) - \underline{E}(\bar{\Phi})\delta_1\bar{\Phi}) \\
&\approx \delta_1\delta_2 L(\bar{\Phi}, \partial\bar{\Phi}) - \delta_2\delta_1 L(\bar{\Phi}, \partial\bar{\Phi}) = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

A partir de la corriente simpléctica definimos la forma simpléctica de Lee+Wald (LW)

$$\text{Lee+Wald symplectic form : } \Omega(\delta_1\Phi, \delta_2\Phi, \Phi) := \int_{\Sigma} \omega(\delta_1\Phi, \delta_2\Phi, \Phi), \quad \forall \Phi, \delta_i\Phi \in \bar{\mathcal{F}} \tag{2.9}$$

donde Σ es una superficie de Cauchy. La forma simpléctica (2.9) no dependerá de Σ si asumimos que se cumple (2.8) y que no hay flujo de ω a través de $\partial\Sigma$ [18]. Resumiendo, la forma LW evaluada sobre soluciones de las ecuaciones de movimiento, o sea el par $(\bar{\mathcal{F}}, \Omega)$, constituye un buen espacio de fases, este es el CPS. Concomitantemente, las variaciones $\delta\bar{\Phi}$ que satisfacen (2.6) a orden lineal, describen el espacio tangente $T_{\bar{\mathcal{F}}}$.

2.2. Cargas en CPS

A continuación analizaremos la posibilidad de construir una carga (o hamiltoniano H_ϵ en la jerga simpléctica) que genere una transformación dada $\delta_\epsilon\Phi$. Es decir, nos gustaría encontrar en CPS el análogo del generador Q_ξ , que en el formalismo hamiltoniano usual realiza la transformación a través del corchete de Poisson (forma simpléctica)

$$\delta_\epsilon\Phi = \{\Phi, Q_\xi\}$$

2.2.1. Hamiltoniano

Para fijar ideas consideremos la transformación de simetría sobre los campos de la teoría asociada a un difeomorfismo ξ^μ

$$\delta_\xi\Phi = \mathcal{L}_\xi\Phi.$$

A esta transformación podemos asociarle una cantidad

$$\begin{aligned}
\delta H_\xi &:= \Omega(\delta\Phi, \delta_\xi\Phi, \Phi) \\
&= \int_{\Sigma} \omega(\delta\Phi, \delta_\xi\Phi, \Phi) \\
&= \int_{\Sigma} [\delta(\Theta(\Phi, \mathcal{L}_\xi\Phi)) - \mathcal{L}_\xi(\Theta(\Phi, \delta\Phi))] .
\end{aligned} \tag{2.10}$$

La notación \oint quedará clara más adelante, pero, así como en termodinámica, manifiesta la posibilidad de que la variación no sea exacta. Aquí H_ξ , de ser integrable/exacto, corresponderá al generador hamiltoniano de la transformación de simetría $\delta_\xi \bar{\Phi}$.

Si para la transformación de simetría la forma Ω se anula idénticamente para toda configuración $\bar{\Phi} \in \bar{\mathcal{F}}$, diremos que la transformación $\delta_\xi \bar{\Phi}$ es una transformación de gauge pura (o corta)

$$\delta_\xi \bar{\Phi} \text{ puro gauge} \quad \leftrightarrow \quad \Omega(\delta \bar{\Phi}, \delta_\xi \bar{\Phi}, \bar{\Phi}) = 0, \quad \forall \bar{\Phi}, \delta_\xi \bar{\Phi} \in \bar{\mathcal{F}}$$

Esto significa que las soluciones conectadas por $\delta_\xi \bar{\Phi}$ son físicamente equivalentes. Sin embargo, como veremos en el siguiente capítulo, en presencia de bordes existen transformaciones de gauge impuras (o largas) que actúan no trivialmente sobre el espacio de soluciones físicas.

Un resultado importante para todo el desarrollo que sigue es observar que la relación (2.8) implica que sobre el espacio de soluciones existe una cantidad k_ξ tal que

$$d\omega(\delta \bar{\Phi}, \delta_\xi \bar{\Phi}, \bar{\Phi}) \approx 0 \quad \rightsquigarrow \quad \omega(\delta \bar{\Phi}, \delta_\xi \bar{\Phi}, \bar{\Phi}) \approx dk_\xi(\delta \bar{\Phi}, \bar{\Phi}) \quad (2.11)$$

Esta es la relación fundamental del formalismo, insertándola en (2.10) obtenemos

$$\oint_{\partial\Sigma} \delta H_\xi = \oint_{\partial\Sigma} k_\xi(\delta \bar{\Phi}, \bar{\Phi}) \quad (2.12)$$

2.2.2. Integrabilidad

Asumiendo invarianza bajo difeomorfismos, hemos mostrado que todo campo vectorial ξ tiene asociado una variación δH_ξ . Estudiaremos ahora las condiciones de compatibilidad para la existencia de H_ξ .

Decimos que la carga δH_ξ es integrable, si existe H_ξ tal que $\delta H_\xi = \delta H_\xi$. La condición que garantiza que (2.10) resulte integrable es

$$\delta H_\xi \text{ es integrable ssi } \delta \delta H_\xi = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) H_\xi = 0 \quad \forall \delta_1 \bar{\Phi}, \delta_2 \bar{\Phi} \in \bar{\mathcal{F}} \quad (2.13)$$

Se puede mostrar que la condición de integrabilidad (2.13) es equivalente a (ver app. B)

$$\oint_{\partial\Sigma} \xi \cdot \omega(\delta_1 \bar{\Phi}, \delta_2 \bar{\Phi}, \bar{\Phi}) \approx 0 \quad (2.14)$$

Si se satisface esta condición, entonces la variación es integrable y existe H_ξ

$$H_\xi(\Phi) = \int_{\Phi_0}^{\Phi} \delta H_\xi + H_\xi(\Phi_0) = \int_{\Phi_0}^{\Phi} \oint_{\partial\Sigma} k_\xi(\delta\Phi, \Phi) + H_\xi(\Phi_0) \quad (2.15)$$

La integrabilidad implica que el resultado será independiente del camino que elijamos para conectar $\Phi_0 \rightarrow \Phi$ en el espacio de fases. El término $H_\xi(\Phi_0)$ es una constante de integración que deberemos fijar convenientemente con una solución de referencia.

2.2.3. Conservación de H_ξ

Consideremos el cilindro sólido que conecta las superficies de Cauchy Σ_1 y Σ_2 de bordes $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$ en la fig.1.1. Topológicamente la superficie lateral del cilindro tiene la forma $\mathcal{B} = I \times \partial\Sigma$, donde I representa el intervalo temporal.

Asumamos que se cumple la condición de integrabilidad (2.13). Es evidente que la carga H_ξ estará conservada bajo deformaciones continuas de $\partial\Sigma$ si y solo si las condiciones de contorno garantizan que

$$\text{Conservación : } dk_\xi(\delta\Phi, \Phi)|_{\mathcal{B}} \approx 0$$

es decir, si

$$\omega(\delta\Phi, \delta_\xi\Phi, \Phi)|_{\mathcal{B}} \approx 0 \quad (2.16)$$

La interpretación de esta ecuación es inmediata, la carga se conservará si no se pierde flujo de ω a través de \mathcal{B} .

—
Demostración: impongamos la condición de conservación (2.16) para la carga H_ξ calculada, a tiempos distintos, en dos superficies de Cauchy $\partial_1\Sigma$ y $\partial_2\Sigma$

$$0 = H_\xi|_{\partial_1\Sigma} - H_\xi|_{\partial_2\Sigma} = \int_{\Phi_0}^{\Phi} \oint_{\partial_1\Sigma} k_\xi - \int_{\Phi_0}^{\Phi} \oint_{\partial_2\Sigma} k_\xi = \int_{\Phi_0}^{\Phi} \int_{\mathcal{B}} dk_\xi \approx \int_{\Phi_0}^{\Phi} \int_{\mathcal{B}} \omega \quad (2.17)$$

donde usamos el teorema de Stokes en el borde del cilindro \mathcal{B} . De manera que la condición suficiente para la conservación es (2.16).

Notemos que para vectores de Killing, tenemos que

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{M} \quad (2.18)$$

y por lo tanto $\omega(\delta\Phi, \delta_\xi\Phi, \Phi) = 0$ idénticamente en toda la variedad y las cargas asociadas a dichos vectores de Killing resultarán automáticamente conservadas.

Para el caso de vectores de Killing asintóticos, la expresión (2.18) solo vale en el régimen asintótico, es decir, cuando $r \rightarrow \infty$ que es precisamente lo que necesitamos en (2.16).

Concluimos entonces que la condición (2.16) es suficiente para garantizar la conservación de las cargas asociadas a Killings y Killings asintóticos.

Caveat: para el caso de vectores de Killing asintóticos es necesario un análisis detallado de la forma precisa de los decaimiento a fin de garantizar la ausencia de flujos.

—

2.3. Carga de Noether+Wald

En esta sección haremos contacto con lo discutido en el capítulo anterior. Definiremos la corriente de Noether+Wald en (2.22) que será una re expresión de la corriente de Noether definida en (1.30). A partir de ella definiremos la carga de Noether+Wald en (2.25) que coincidirá con (1.52).

Consideremos la variación (2.5) para un difeomorfismo ξ^μ

$$\delta_\xi L(\Phi, \partial\Phi) = E(\Phi)\delta_\xi\Phi + d\Theta(\Phi, \delta_\xi\Phi) \quad (2.19)$$

Puesto que L es una densidad escalar, tenemos que $\delta_\xi L = \mathcal{L}_\xi L$. Usando la fórmula mágica de Cartan para la derivada de Lie sobre formas

$$\mathcal{L}_\xi\omega = d(i_\xi\omega) + i_\xi(d\omega)$$

obtenemos, denotando $i_\xi\omega = \xi \cdot \omega$

$$\delta_\xi L = \mathcal{L}_\xi L = d(\xi \cdot L) + \xi \cdot dL = d(\xi \cdot L) \quad (2.20)$$

donde $dL = 0$ por ser L una forma de rango máximo (ver app.C). Reemplazando (2.20) en (2.19), obtenemos

$$d\Theta(\Phi, \delta_\xi\Phi) - d(\xi \cdot L) = -E(\Phi)\delta_\xi\Phi \quad (2.21)$$

Esta expresión es una reescritura de (1.48) en notación de formas diferenciales. Una observación importante es que el lado izquierdo resulta conservado on shell

$$E(\Phi) \approx 0 \quad \rightsquigarrow \quad d(\Theta(\Phi, \delta_\xi\Phi) - \xi \cdot L) \approx 0.$$

De manera que (2.21) sugiere definir la corriente de Noether+Wald asociada a difeomorfismos como

$$\text{Corriente de Noether+Wald :} \quad J_\xi := \Theta(\Phi, \delta_\xi\Phi) - \xi \cdot L \quad (2.22)$$

Puesto que para configuraciones on shell tenemos

$$dJ_\xi \approx 0 \quad (2.23)$$

concluimos por el lema de Poincaré que existe una densidad de carga \mathfrak{K}_ξ tal que

$$J_\xi \approx d\mathfrak{K}_\xi \quad (2.24)$$

Esta es una relación que solo vale on shell y representa una generalización a formas de la expresión (1.51). La carga de Noether+Wald se define integrando la corriente J_ξ sobre Σ

$$Q_\xi = \int_\Sigma J_\xi = \oint_{\partial\Sigma} \mathfrak{K}_\xi \quad (2.25)$$

Esta carga coincide con la definida en (1.52).

—
Nota: es posible obtener un resultado off shell. El segundo teorema de Noether en lenguaje de formas establece que para un difeomorfismo infinitesimal arbitrario ξ^μ (cf. (1.47))

$$E(\Phi)\delta_\xi\Phi = dS_\xi(\Phi) \quad (2.26)$$

donde $S_\xi \approx 0$. Usando este resultado en la ecuación (2.23) obtenemos

$$d(J_\xi + S_\xi) = 0 \quad (2.27)$$

que vale off shell. Concluimos entonces que podemos escribir la corriente de Noether como

$$J_\xi = d\mathfrak{K}_\xi - S_\xi \quad (2.28)$$

—

2.4. Hamiltoniano H_ξ vs. Carga de Noether-Wald Q_ξ

Hemos introducido entonces dos objetos:

(i) El generador hamiltoniano H_ξ , a partir de la estructura simpléctica, dado por la ecuación (2.10), que se reduce a la expresión (2.12),

y por otro lado,

(ii) la carga de Noether-Wald, dada por la expresión (2.25) en la sección anterior.

En esta sección discutiremos la relación entre estos dos objetos. Para ello, encontraremos una expresión explícita para la cantidad $k_\xi(\delta\Phi, \Phi)$ que aparece en (2.12). Posteriormente, veremos si las dos cargas coinciden.

Empezamos variando (2.22)

$$\delta J_\xi = \delta(\Theta(\Phi, \delta_\xi \Phi)) - \xi \cdot \delta L \quad (2.29)$$

donde la variación δ no ve al ξ ya que asumimos que es independiente de los campos de la teoría. De (2.5) tenemos que para configuraciones on shell $\delta L = d\Theta$, luego

$$\begin{aligned} \delta J_\xi &\approx \delta(\Theta(\Phi, \delta_\xi \Phi)) - \xi \cdot d\Theta(\Phi, \delta\Phi) \\ &= \delta(\Theta(\Phi, \delta_\xi \Phi)) - \mathcal{L}_\xi(\Theta(\Phi, \delta\Phi)) + d(\xi \cdot \Theta(\Phi, \delta\Phi)) \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde para pasar a la segunda línea usamos la fórmula mágica de Cartán. Variando (2.24) tenemos $\delta J_\xi \approx d\delta\mathfrak{K}_\xi$ que insertada aquí arriba conduce a

$$d(\delta\mathfrak{K}_\xi - \xi \cdot \Theta(\Phi, \delta\Phi)) \approx \delta(\Theta(\Phi, \delta_\xi \Phi)) - \mathcal{L}_\xi \Theta(\Phi, \delta\Phi) \quad (2.31)$$

Notemos que el lado derecho coincide con $\omega(\delta\Phi, \delta_\xi \Phi, \Phi)$, por lo tanto, usando la relación fundamental (2.11) llegamos a

$$k_\xi(\delta\Phi, \Phi) = \delta\mathfrak{K}_\xi - \xi \cdot \Theta(\Phi, \delta\Phi) \quad (2.32)$$

Esta expresión permite relacionar el Hamiltoniano H_ξ dado en (2.12) con la carga de Noether+Wald definida en (2.25). Integrando (2.31) sobre una superficie de Cauchy Σ y usando Stokes obtenemos

$$\delta H_\xi = \delta Q_\xi - \oint_{\partial\Sigma} \xi \cdot \Theta(\Phi, \delta\Phi) \quad (2.33)$$

De aquí concluimos que las variaciones δH_ξ y δQ_ξ coinciden sólo si el último término se anula. Puesto que δQ_ξ es integrable por definición ya que es la variación de Q_ξ , tenemos que δH_ξ será integrable solo si el último término también lo es. En ese caso, como mencionamos más arriba, resulta $\delta H_\xi = \delta Q_\xi$. El último término en (2.33), responsable de la no integrabilidad, puede ser interpretado como un flujo de carga que se pierde a través del borde (cf. (3.53)).

Es importante mencionar que la expresión (2.32) contiene una ambigüedad que no mencionamos arriba. Al escribir (2.32) podríamos sumar una forma exacta

$$k_\xi(\delta\Phi, \Phi) = \delta\mathfrak{K}_\xi(\delta\Phi, \Phi) - i_\xi \Theta(\delta\Phi, \Phi) + d(\cdot) \quad (2.34)$$

donde $d(\cdot)$ se refiere a una posible derivada total (término de borde) que se cancela al integrar sobre una superficie cerrada.

A continuación veremos qué forma toman estas expresiones en relatividad general.

2.5. Aplicaciones a Relatividad General

Para gravedad, partimos de la acción de Einstein-Hilbert

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} R[g], \quad (2.35)$$

donde la métrica $g_{\mu\nu}$ es el único campo dinámico a considerar. En lo que sigue denotaremos la variación de la métrica como

$$\delta g_{\mu\nu} := h_{\mu\nu}$$

De la variación (A.2) tenemos

$$\begin{aligned} \delta S[g_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}] &= \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} \left[-G^{\mu\nu} [g_{\alpha\beta}] h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \left((g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\nu h_{\alpha\beta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} \left[-G^{\mu\nu} [g_{\alpha\beta}] h_{\mu\nu} + \nabla_\mu (\nabla_\nu h^{\mu\nu} - \nabla^\mu h) \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde los índices de $h_{\mu\nu}$ se suben y bajan con la métrica de fondo

$$h_\nu^\alpha := g^{\alpha\mu} h_{\mu\nu}, \quad h := g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$$

Con estas definiciones el potencial presimpléctico (1.72) se reduce a

$$\Theta^\mu(g, h) = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (\nabla_\nu h^{\mu\nu} - \nabla^\mu h_\nu^\nu) \quad (2.37)$$

Evaluando la variación arbitraria $h \mapsto \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$ se obtiene on shell (ver (A.9))

$$\Theta^\mu(g, \mathcal{L}_\xi g) \approx \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \nabla_\nu (\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu) \quad (2.38)$$

Noether+Wald: para calcular la densidad de carga de Noether, comenzamos por la expresión de la corriente dada en (2.22). Puesto que on shell el tensor de Ricci es nulo, también lo es el lagrangiano. De esta manera, vemos que la corriente resulta

$$J_\xi \approx \Theta(\Phi, \delta_\xi \Phi) \quad (2.39)$$

Luego, de (2.24), vemos que podemos identificar directamente la densidad de carga de Noether \mathfrak{K}_ξ como

$$\mathfrak{K}_\xi = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (\nabla^\mu \xi^\nu - \nabla^\nu \xi^\mu) (d^{n-2}x)_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \nabla^\mu \xi^\nu (d^{n-2}x)_{\mu\nu} \quad (2.40)$$

Es importante mencionar que esta expresión fue obtenida en el capítulo anterior manipulando las expresiones de manera informal (cf. (1.78))

Hamiltoniano: para hallar la variación de la carga Hamiltoniana necesitamos computar el segundo término en (2.32)

$$\begin{aligned}
i_\xi \Theta &= (\xi^\mu \Theta^\nu - \xi^\nu \Theta^\mu)(d^{n-2}x)_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} [\xi^\mu \nabla_\sigma h^{\nu\sigma} - \xi^\mu \nabla^\nu h - \xi^\nu \nabla_\sigma h^{\mu\sigma} + \xi^\nu \nabla^\mu h](d^{n-2}x)_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} [\xi^\mu \nabla_\sigma h^{\nu\sigma} - \xi^\mu \nabla^\nu h](d^{n-2}x)_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

donde en el último paso usamos que $(d^{n-2}x)_{\mu\nu}$ es antisimétrico en (μ, ν) (ver (D.7)). Procedemos ahora a variar (2.40)

$$\begin{aligned}
\delta \mathfrak{K}_\xi &= \frac{1}{8\pi G} [\delta(\sqrt{-g}) \nabla^\mu \xi^\nu + \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \xi^\nu)](d^{n-2}x)_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{8\pi G} \left[\frac{h\sqrt{-g}}{2} \nabla^\mu \xi^\nu - \sqrt{-g} g^{\mu\rho} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\rho\sigma} \nabla_\alpha \xi^\nu + \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} \delta(\partial_\alpha \xi^\nu + \Gamma_{\alpha\rho}^\nu \xi^\rho) \right] (d^{n-2}x)_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \left[\frac{h}{2} \nabla^\mu \xi^\nu - h^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \xi^\nu + g^{\mu\alpha} \xi^\rho \delta \Gamma_{\alpha\rho}^\nu \right] (d^{n-2}x)_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \left[\frac{h}{2} \nabla^\mu \xi^\nu - h^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \xi^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\sigma} (\nabla_\alpha h_{\rho\sigma} + \nabla_\rho h_{\alpha\sigma} - \nabla_\sigma h_{\alpha\rho}) \xi^\rho \right] (d^{n-2}x)_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} [h \nabla^\mu \xi^\nu - 2h^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \xi^\nu + \xi^\rho (\nabla^\mu h_\rho^\nu - \nabla^\nu h_\rho^\mu)] (d^{n-2}x)_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

donde en la última expresión omitimos el segundo término del paréntesis, $\xi^\rho \nabla_\rho h^{\mu\nu}$, por ser simétrico en $(\mu\nu)$ y estar contraído con $(d^{n-2}x)_{\mu\nu}$ que es antisimétrico. Sigamos con la cuenta,

$$\begin{aligned}
\delta \mathfrak{K}_\xi &= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} [h \nabla^\mu \xi^\nu - 2h^{\mu\sigma} \nabla_\sigma \xi^\nu + \xi^\sigma (\nabla^\mu h_\sigma^\nu - \nabla^\nu h_\sigma^\mu)] (d^{n-2}x)_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} [-h \nabla^\nu \xi^\mu + 2h^{\nu\rho} \nabla_\rho \xi^\mu - \xi^\sigma (\nabla^\nu h_\sigma^\mu - \nabla^\mu h_\sigma^\nu)] (d^{n-2}x)_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \left[-\frac{h}{2} \nabla^\nu \xi^\mu + h^{\rho\nu} \nabla_\rho \xi^\mu - \xi_\sigma \nabla^\nu h^{\mu\sigma} \right] (d^{n-2}x)_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Finalmente, usando (2.41) y (2.43) obtenemos para (2.32)¹

$$\begin{aligned}
k_\xi(\delta\Phi, \Phi) &= \delta\mathfrak{R}_\xi - i_\xi\Theta \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \left[\xi^\mu \nabla^\nu h - \xi_\sigma \nabla^\nu h^{\mu\sigma} - \xi^\mu \nabla_\sigma h^{\nu\sigma} - \frac{h}{2} \nabla^\nu \xi^\mu + h^{\rho\nu} \nabla_\rho \xi^\mu \right] (d^{n-2}x)_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

A continuación veremos cómo se puede hacer uso de esta expresión para calcular cargas conservadas en distintos ejemplos.

2.5.1. Cargas en agujero negro Kerr-AdS

A modo de ejemplo apliquemos este formalismo a un agujero negro Kerr-AdS [15], que es una solución de la teoría de Einstein-Hilbert con constante cosmológica negativa. El lagrangiano de esta teoría es

$$\mathcal{L}(g, \partial g) = \frac{1}{16\pi G} \left(R + \frac{6}{l^2} \right) \tag{2.45}$$

donde la métrica $g_{\mu\nu}$ es el único campo dinámico. La métrica del agujero negro rotante en AdS métrica toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\Delta_\theta \left(\frac{1 + \frac{r^2}{l^2}}{\Xi} - \Delta_\theta f \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 - 2\Delta_\theta f a \sin^2 \theta dt d\varphi \\
&\quad + \left(\frac{r^2 + a^2}{\Xi} + f a^2 \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\varphi^2
\end{aligned} \tag{2.46}$$

con

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad , \quad \Delta_r = (r^2 + a^2) \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) - 2Gmr \quad , \quad f = \frac{2Gmr}{\rho^2} \\
\Delta_\theta &= 1 - \frac{a^2}{l^2} \cos^2 \theta \quad , \quad \Xi = 1 - \frac{a^2}{l^2}
\end{aligned}$$

Consideremos el espacio de soluciones parametrizadas por los parámetros m y a . Por otro lado, G y l son parámetros de la teoría. Se puede ver que la métrica (2.46) tiende asintóticamente a AdS₄.

¹La expresión obtenida coincide con (2.28) en [18] y G.29 en [15]

Para emplear el formalismo tenemos que considerar variaciones de la solución en el espacio de soluciones, luego

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial m} \delta m + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial a} \delta a \quad (2.47)$$

La métrica (2.46) tiene dos vectores de Killing triviales que son ∂_t y ∂_φ .

Energía: analicemos ∂_t . Para calcular $\not\delta H_{\partial_t}$ vamos a usar la expresión general para el k_ξ en la teoría de Einstein-Hilbert (2.44). Tomando la 2-superficie $t = \text{const}$ y $r = \text{const}$ con $r \neq 0$ de manera tal que la superficie rodea al agujero negro, obtenemos

$$\not\delta H_{\partial_t} = \frac{1}{\Xi^2} \delta m + \frac{4ma}{\Xi^3 l^2} \delta a \quad (2.48)$$

Podemos verificar que esta carga es integrable teniendo en cuenta la expresión para Ξ dada arriba. A tal fin verifiquemos si las derivadas cruzadas son iguales

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta a} (\Xi^{-2}) &= \frac{2}{\Xi^3} \frac{2a}{l^2} \\ \frac{\delta}{\delta m} \left(\frac{4ma}{\Xi^3 l^2} \right) &= \frac{4a}{\Xi^3 l^2} \quad \rightsquigarrow \quad \not\delta H_{\partial_t} = \delta H_{\partial_t} \end{aligned}$$

Tomando $H_{\partial_t}[\bar{\Phi}] = 0$ para la solución de AdS puro hallamos

$$H_{\partial_t} = \frac{m}{\Xi^2} =: M \quad (2.49)$$

donde identificamos a esta carga como la masa de la solución.

Rotación: análogamente, para el Killing ∂_φ tenemos

$$\delta H_{\partial_\varphi} = \frac{a}{\Xi^2} \delta m + \frac{m \left(1 + 3 \frac{a^2}{l^2} \right)}{\Xi^3} \delta a \quad (2.50)$$

y por lo tanto

$$H_{\partial_\varphi} = \frac{ma}{\Xi^2} =: J \quad (2.51)$$

identificando a la carga con el momento angular de la solución.

2.6. Entropía de un agujero negro como una carga conservada

Veamos cómo podemos aplicar el formalismo CPS para calcular la entropía de un agujero negro [15].

Si el horizonte del agujero negro es un horizonte de Killing bifurcado, podemos elegir una superficie de Cauchy de manera tal que la superficie de bifurcación \mathcal{B} sea una parte del borde. La superficie Σ_2 , dibujada en la figura 2.1, es un ejemplo de esto. En este caso tenemos que $\partial\Sigma_2 = \mathcal{B} \cup i^0$.

Veremos que podemos asociar una carga conservada a una simetría exacta de un horizonte de Killing y que esta carga coincidirá con la entropía del agujero negro. Siguiendo la idea del formalismo empleado en la sección 2.1 podemos calcular variaciones de entropías y, de resultar integrables, podremos definir la entropía.

Definiremos la variación de entropía como

$$\delta\mathcal{S} := \oint_{\mathcal{B}} k_{\zeta_H}(\delta\Phi, \Phi) = \frac{2\pi}{\kappa} \oint_{\mathcal{B}} k_{\xi_H}(\delta\Phi, \Phi) \quad (2.52)$$

donde $\zeta_H := \frac{2\pi}{\kappa} \xi_H$ con ξ_H el vector de Killing que genera el horizonte y κ la gravedad superficial. Veremos a continuación que la integrabilidad de las cargas depende crucialmente de la normalización del vector de Killing.

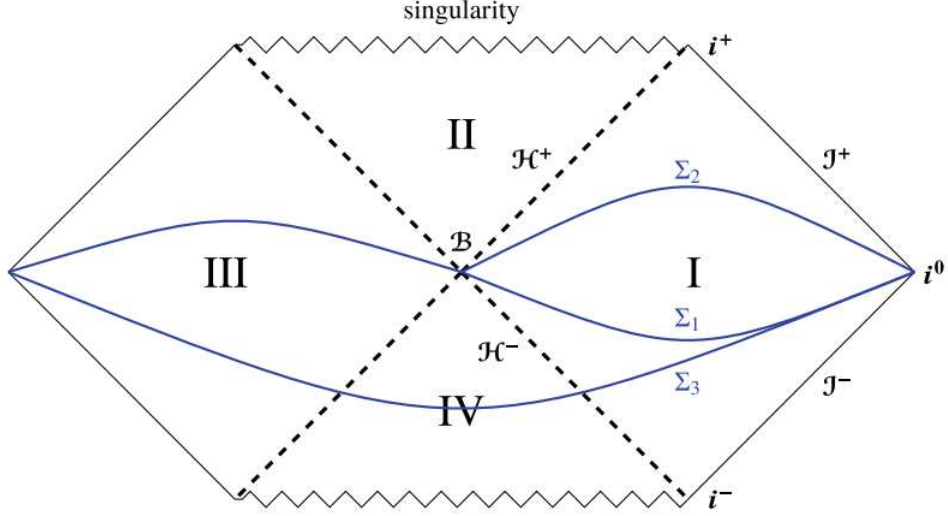


Figura 2.1: Diagrama de Penrose de un agujero negro de Schwarzschild. \mathcal{H}^\pm son los horizontes de eventos pasado y futuro, que se intersecan en \mathcal{B} , la superficie de bifurcación. Las distintas Σ son distintas superficies de Cauchy.

2.6.1. Entropía para un agujero negro Kerr-AdS

El vector de Killing que genera el horizonte de un agujero negro de Kerr-AdS está dado por

$$\xi_H = \partial_t + \Omega_H \partial_\varphi \quad (2.53)$$

donde

$$\Omega_H = \frac{a \left(1 + \frac{r_H^2}{l^2}\right)}{r_H^2 + a^2} \quad (2.54)$$

con Ω_H siendo la velocidad angular del agujero negro medida en coordenadas asintóticamente estáticas y r_H el radio del horizonte de eventos.

La carga asociada a ξ_H no resulta integrable pero sí lo es para el vector renormalizado como

$$\zeta_H := \frac{2\pi}{\kappa} \xi_H \quad \text{con} \quad \kappa = \frac{r_H \left(1 + \frac{a^2}{l^2} + 3\frac{r_H^2}{l^2} - \frac{a^2}{r_H^2}\right)}{2(r_H^2 + a^2)} \quad (2.55)$$

donde κ es la gravedad superficial. Tomando una superficie compacta tipo espacio que

rodee al agujero negro, obtenemos

$$\delta H_{\zeta_H} = \frac{\partial \left(\frac{\pi(r_H^2 + a^2)}{G\Xi} \right)}{\partial m} \delta m + \frac{\partial \left(\frac{\pi(r_H^2 + a^2)}{G\Xi} \right)}{\partial a} \delta a \quad (2.56)$$

Integrando (2.56) obtenemos la carga asociada, es decir, la entropía, que es

$$S = H_{\zeta_H} = \frac{\pi(r_H^2 + a^2)}{G\Xi} \quad (2.57)$$

Notemos que $a = 0$ implica $\Xi = 1$ y por lo tanto, en ese caso se ve fácilmente la ecuación general para la entropía,

$$S = \frac{A}{4G}$$

2.7. Primera ley de los agujeros negros

Los sistemas termodinámicos en equilibrio permiten distintas variaciones siempre y cuando se respete la conservación de la energía. La primera ley típicamente se escribe de la siguiente manera

$$\delta Q = \delta U - \sum_n \mu_n \delta q_n \quad (2.58)$$

donde δQ denota la transferencia de calor, U la energía interna, μ_n los potenciales químicos y q_n las demás cargas conservadas que el sistema podría tener. Esta relación puede ser escrita en términos de la entropía a través de la relación de Clausius, válida para procesos reversibles

$$\delta Q = T \delta S$$

Los agujeros negros al ser sistemas termodinámicos satisfacen una primera ley similar [15]. Dada una temperatura y potenciales químicos, los agujeros negros se comportan como un reservorio térmico. Las demás cargas y la energía incluyen al agujero negro y a todo lo demás que está afuera del horizonte. Las variaciones y perturbaciones están asociadas con cambios en las cargas a potenciales químicos fijos, que se pueden deber a interacciones del agujero negro con el ambiente como en el caso en el que algo entra en el agujero negro.

La primera ley es consecuencia directa de la ecuación que relaciona el vector de Killing que genera el horizonte ξ_H con los demás vectores de Killing del sistema. Por ejemplo, para un agujero negro Kerr-AdS tenemos

$$\xi_H = \partial_t + \Omega_H \partial_\phi \quad (2.59)$$

donde nuevamente Ω_H es la velocidad angular del agujero negro medida en coordenadas asintóticamente estáticas (la coordenada t es el tiempo para un observador en el infinito), que resulta constante para agujeros negros estacionarios.

Como se mencionó anteriormente, para que la entropía resulte una carga integrable, hay que normalizar el vector ξ_H apropiadamente con un factor inversamente proporcional a la gravedad superficial (cf. (2.55))

$$\zeta_H = \frac{2\pi}{\kappa} (\partial_t + \Omega_H \partial_\phi) \quad (2.60)$$

En presencia de campos de gauge, el concepto de invarianza debe ser relajado, permitiendo que los campos de gauge cambien a menos de una forma exacta frente al difeomorfismo. En concreto, si ζ es una isometría de la métrica, permitimos que

$$\mathcal{L}_\zeta A_\mu = \partial_\mu \lambda_\zeta \rightsquigarrow \mathcal{L}_\zeta F_{\mu\nu} = 0$$

De manera que, al hablar de transformaciones de simetría en presencia de campos de gauge, consideraremos que la transformación del campo de gauge involucra una composición de un difeomorfismo y una transformación de gauge compensatoria de manera que si sucintamente denotamos los parámetros de simetría como

$$\eta = \left(\zeta, -\lambda_\zeta - \frac{2\pi}{\kappa} \Phi_H \right) \rightsquigarrow \begin{cases} \delta_\eta g_{\mu\nu} := \mathcal{L}_\zeta g_{\mu\nu} \\ \delta_\eta A_\mu := \mathcal{L}_\zeta A_\mu - \partial_\mu \lambda_\zeta \end{cases} \quad (2.61)$$

De esta manera, la composición en $\delta_\eta A_\mu$ resulta ser una simetría exacta de la teoría. Un resultado importante es que la constante indeterminada en λ_ζ queda fijada por las condiciones de integrabilidad a $\Phi_H = \zeta_H \cdot A|_H$, i.e. los potenciales eléctricos en el horizonte (ver secc. 5.4.3 en [15]).

Derivación de la primera ley: asumamos que un agujero negro estacionario d -dimensional no extremal está soportado por campos genéricos Φ . Digamos que el horizonte está generado por la simetría exacta η_H , luego tenemos que, por definición de simetría exacta,

$$\delta_{\eta_H} \Phi = 0$$

para todos los campos $\Phi = \{g_{\mu\nu}, A_\mu\}$. Podemos construir la corriente simpléctica usando (2.7) donde una de las variaciones será la simetría exacta

$$\omega(\delta\Phi, \delta_{\eta_H}\Phi, \Phi) = \delta\Theta(\delta_{\eta_H}\Phi, \Phi) - \delta_{\eta_H}\Theta(\delta\Phi, \Phi) \quad (2.62)$$

Esta cantidad es nula ya que es lineal en $\delta_{\eta_H}\Phi$. Integrando (2.62) en una superficie tipo tiempo (d-1)-dimensional Σ con dos bordes cerrados y suaves $\partial_1\Sigma$ y $\partial_2\Sigma$ que rodean el agujero negro, obtenemos

$$\int_{\Sigma} \omega(\delta\Phi, \delta_{\eta_H}\Phi, \Phi) = \int_{\Sigma} dk_{\eta_H}(\delta\Phi, \Phi) = \oint_{\partial_1\Sigma} k_{\eta_H}(\delta\Phi, \Phi) - \oint_{\partial_2\Sigma} k_{\eta_H}(\delta\Phi, \Phi) \quad (2.63)$$

donde en la primera igualdad usamos (2.11). Como $\delta_{\eta_H}\Phi = 0$, tenemos que

$$\oint_{\partial_1\Sigma} k_{\eta_H}(\delta\Phi, \Phi) = \oint_{\partial_2\Sigma} k_{\eta_H}(\delta\Phi, \Phi) \quad (2.64)$$

y dejando de lado el subíndice 1 o 2 en $\partial_i\Sigma$, podemos definir la variación de la entropía como

$$\delta\mathcal{S} := \oint_{\partial\Sigma} k_{\eta_H}(\delta\Phi, \Phi) \quad (2.65)$$

El generador $\eta_H = (\zeta_H, -\frac{2\pi}{\kappa}\Phi_H^a)$ lo podemos descomponer de la siguiente manera

$$\eta_H = \left(\frac{2\pi}{\kappa}\partial_t, 0\right) + \left(\frac{2\pi\Omega_H}{\kappa}\partial_\phi, 0\right) + \left(0, -\frac{2\pi}{\kappa}\Phi_H\right) \quad (2.66)$$

Como k es lineal en los generadores, la variación de la entropía se puede escribir como

$$\delta\mathcal{S} = \frac{2\pi}{\kappa} \oint_{\partial\Sigma} k_{\partial_t}(\delta\Phi, \Phi) + \frac{2\pi\Omega_H}{\kappa} \oint_{\partial\Sigma} k_{\partial_\phi}(\delta\Phi, \Phi) - \frac{2\pi}{\kappa} \Phi_H \oint_{\partial\Sigma} k_{(0,1)}(\delta\Phi, \Phi) \quad (2.67)$$

Usando la ley cero, es decir $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$ (la temperatura de Hawking), y las definiciones de masa (2.49), momento angular (2.51) y carga eléctrica (primer, segundo y tercer término respectivamente), obtenemos la primera ley para la termodinámica de agujeros negros

$$\delta M = T_H \delta\mathcal{S} + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \quad (2.68)$$

Esta derivación vale para agujeros negros estacionarios y axisimétricos con un horizonte de Killing. Apliquemos este resultado a un caso particular.

2.7.1. Primera ley para el agujero negro de Kerr-Newman

El agujero negro de Kerr-Newman modela un agujero negro rotante cargado en espacio plano, es una solución a la teoría de Einstein-Maxwell, cuya métrica está dada por

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \left(d\varphi - \frac{a}{r^2 + a^2} dt \right)^2 \quad (2.69)$$

donde

$$\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad y \quad \Delta := r^2 - 2mr + a^2 + q^2 \quad (2.70)$$

Esta solución es la única solución asintóticamente plana de la teoría, dados la masa m , el momento angular a y la carga eléctrica q , que son los únicos tres parámetros de la solución. Esta solución es estacionaria y axisimétrica con vectores de Killing ∂_t y ∂_φ . El radio del horizonte r_H está dado por las soluciones de la ecuación $r_H^2 - 2mr_H + a^2 + q^2 = 0$

$$r_H = m + \sqrt{m^2 - q^2 - a^2} \quad (2.71)$$

La gravedad superficial, la velocidad angular del horizonte y los potenciales eléctricos son

$$\kappa = \frac{r_H^2 - q^2 - a^2}{2(r_H^2 + a^2)r_H}, \quad \Omega_H = \frac{a}{a^2 + r_H^2}, \quad \Phi_H = \frac{qr_H}{r_H^2 + a^2} \quad (2.72)$$

Usando el método de soluciones en el espacio de fases podemos encontrar la masa, el momento angular, la entropía y la carga eléctrica

$$M = \frac{m}{G}, \quad J = \frac{ma}{G}, \quad Q = \frac{q}{G}, \quad S = \frac{\pi(r_H^2 + a^2)}{G} \quad (2.73)$$

Para verificar la primera ley notamos que

$$\delta M = \frac{\delta m}{G}, \quad \delta J = \frac{\delta ma + m\delta a}{G}, \quad \delta Q = \frac{\delta q}{G}, \quad \delta S = \frac{2\pi(r_H \delta r_H + a\delta a)}{G} \quad (2.74)$$

Luego se cumple la primera ley

$$\frac{\kappa}{2\pi} \delta S = \delta M - \Omega_H \delta J - \Phi_H \delta Q \quad (2.75)$$

La cual podemos verificar teniendo en cuenta que

$$\delta r_H = \left(1 + \frac{m}{\sqrt{m^2 - q^2 - a^2}} \right) \delta m - \frac{1}{\sqrt{m^2 - q^2 - a^2}} (q\delta q + a\delta a) \quad (2.76)$$

y usando la relación (2.71).

FÓRMULAS IMPORTANTES

. Variación lagrangiano

$$\delta L[\Phi] = E_{\Phi} \delta \Phi + d\Theta(\delta \Phi, \Phi)$$

. Corriente simpléctica

$$\omega(\delta_1 \Phi, \delta_2 \Phi, \Phi) = \delta_1(\Theta(\Phi, \delta_2 \Phi)) - \delta_2(\Theta(\Phi, \delta_1 \Phi))$$

. Relación fundamental

$$\omega(\delta \Phi, \delta_{\xi} \Phi, \Phi) \approx dk_{\xi}(\delta \Phi, \Phi)$$

. Variación generador hamiltoniano

$$\begin{aligned} \delta H_{\xi} &= \int_{\Sigma} \omega(\delta \Phi, \delta_{\xi} \Phi, \Phi) \\ &= \oint_{\partial \Sigma} k_{\xi}(\delta \Phi, \Phi) \end{aligned}$$

. Noether+Wald:

$$\text{Corriente : } J_{\xi} = \Theta(\Phi, \delta_{\xi} \Phi) - \xi \cdot L = d\mathfrak{K}_{\xi}$$

$$\text{Carga : } Q_{\xi} = \int_{\Sigma} J_{\xi} = \oint_{\partial \Sigma} \mathfrak{K}_{\xi}$$

. 2-forma de Iyer+Wald:

$$k_{\xi}(\delta \Phi, \Phi) = \delta \mathfrak{K}_{\xi} - \xi \cdot \Theta(\Phi, \delta \Phi)$$

. k_{ξ} en Relatividad General

$$k_{\xi}(\delta \Phi, \Phi) = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \left[\xi^{\mu} \nabla^{\nu} h - \xi_{\sigma} \nabla^{\nu} h^{\mu\sigma} - \xi^{\mu} \nabla_{\sigma} h^{\nu\sigma} - \frac{h}{2} \nabla^{\nu} \xi^{\mu} + h^{\rho\nu} \nabla_{\rho} \xi^{\mu} \right] (d^{n-2})_{\mu\nu}$$

Capítulo 3

Simetrías asintóticas: grupo BMS

En la década del 60 se comenzó el estudio de las simetrías de la relatividad general en presencia de bordes [3]. Al ser la teoría de Einstein una teoría invariante frente a cambios generales de coordenadas (difeomorfismos) se creía que dos soluciones de las ecuaciones de Einstein relacionadas por un difeomorfismo eran físicamente equivalentes. Sin embargo, en presencia de bordes, el estudio del comportamiento asintótico del campo gravitacional muestra que la situación cambia drásticamente: el borde rompe la covarianza general de la teoría. En presencia de bordes y condiciones de contorno para los campos, aparecen transformaciones de coordenadas a las cuales se le puede asociar una carga no nula, esto sugiere que dichas transformaciones serían físicas. Mientras que la mayoría de las transformaciones de coordenadas siguen siendo redundancias de la teoría con carga nula, existen transformaciones que preservan la estructura cercana al borde y que resultan ser simetrías físicas de la teoría. A estas simetrías físicas se las conoce como simetrías asintóticas. Bondi, van der Burg, Metzner y Sachs (BMS), introdujeron la noción de simetría asintótica y estudiaron dichas simetrías para espacios tiempos asintóticamente planos. La motivación de BMS era encontrar al grupo de Poincaré de relatividad especial como el grupo de simetría de los espacios asintóticamente planos, sin embargo, se encontraron con una extensión infinita del grupo de Poincaré. A este grupo se lo conoce como grupo BMS y generaliza las traslaciones de Poincaré con transformaciones conocidas como supertraslaciones. Estas transformaciones se suelen denominar difeomorfismos largos o vectores de Killing asintóticos y dan lugar a simetrías globales de RG en espacios asintóticamente planos, a pesar de estar paradójicamente construidas a partir de invarianzas locales.

En este capítulo estudiaremos las simetrías asintóticas de la relatividad general en espacios tiempos asintóticamente planos incorporando en el estudio la posibilidad de emisión de radiación gravitatoria. Para ello, estudiaremos la compactificación de Penrose del espacio de Minkowski e introduciremos las coordenadas apropiadas para parametrizar la radiación en el borde del espacio. A estas coordenadas se las conoce como coordenadas de Bondi. A partir de los desarrollos del capítulo anterior, obtendremos una fórmula que evalúa la energía radiada. Dicha fórmula define la evolución de la masa de Bondi. La fórmula que obtendremos tiene una interpretación física muy sencilla: establece que la masa contenida en el interior del espacio tiempo se mantiene constante a menos que exista emisión de radiación gravitatoria, en cuyo caso, solo puede decrecer. Introduciremos la noción de simetrías asintóticas, y derivaremos las propiedades de las simetrías conocidas como supertraslaciones. Estas resultan ser cambios de coordenadas que modifican la solución asintóticamente. Finalmente, utilizaremos el formalismo del capítulo anterior para calcular las cargas asociadas a las supertraslaciones.

3.1. Métrica asintóticamente plana

Consideremos la métrica de Minkowski que describe el espacio plano en coordenadas cartesianas

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.1)$$

Podemos escribir esta métrica en coordenadas esféricas como

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.2)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Introduciendo las coordenadas nulas $u = t - r$ y $v = t + r$ obtenemos

$$ds^2 = -dudv + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 d\Omega^2 \quad (3.3)$$

Un nuevo cambio de coordenadas $U = \arctan(u)$ y $V = \arctan(v)$ transforma la métrica a

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} \left(-dUdV + \frac{\sin^2(U-V)}{4} d\Omega^2 \right) \quad (3.4)$$

Los valores para los cuales diverge el factor delante de la métrica definen el borde conforme del espacio

$$\text{Borde conforme : } U, V = \pm \frac{\pi}{2}$$

Notemos que el dominio $U, V \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ cubre $u, v \in (-\infty, \infty)$. Finalmente, definiendo $T = U + V$ y $R = V - U$ resulta

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2(\frac{T-R}{2}) \cos^2(\frac{T+R}{2})} (-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2) \quad (3.5)$$

Las coordenadas T, R cumplen la siguiente relación

$$0 \leq R + |T| \leq \pi \quad (3.6)$$

Esto se debe a que en los límites de este dominio, el factor delante de la métrica diverge. Esta es la definición de Penrose para el borde conforme de la variedad.

Si descartamos el factor conforme delante de la métrica en (3.5) es posible imaginar al espaciotiempo de Minkowski como una región del cilindro (universo estático de Einstein) dado por la métrica

$$ds_{ESU}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2$$

Damos una representación en la siguiente figura [19]

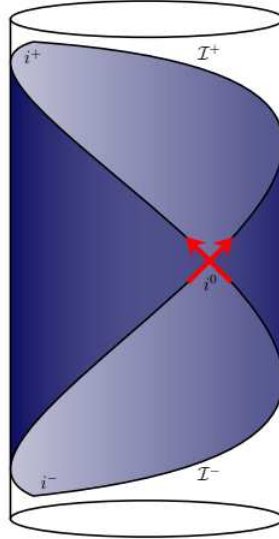


Figura 3.1: La superficie azul representa la compactificación conforme del espacio de Minkowski en el cilindro de Einstein $\mathbb{R} \times S^3$.

A partir de la figura 3.1 resulta el diagrama de Penrose de Minkowski, que se muestra a continuación

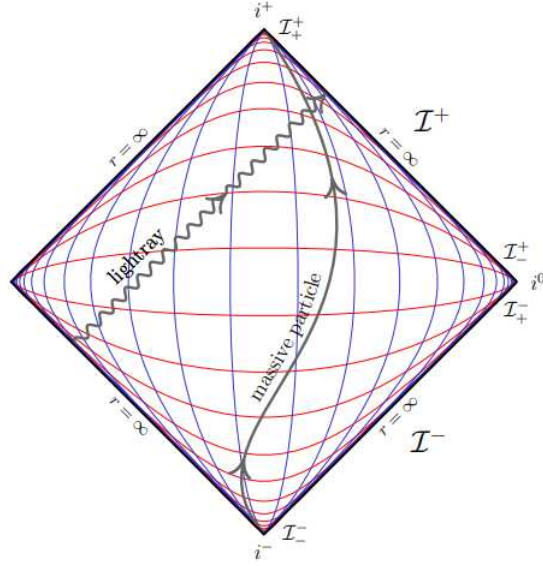


Figura 3.2: Diagrama de Penrose del espacio plano. Las curvas rojas son superficies de $t = \text{const}$ y las azules son superficies $r = \text{const}$. El infinito nulo futuro se denota como \mathcal{I}^+ y el pasado \mathcal{I}^- . Los puntos i^+ , i^- y i^0 representan el infinito futuro, el infinito pasado y el infinito espacial, respectivamente.

Como estamos interesados en estudiar simetrías asintóticas, vamos a querer analizar el comportamiento de los campos en \mathcal{I}^+ . Para tal fin debemos hallar un sistema de coordenadas conveniente. Como se observa en la figura de arriba, las coordenadas t y r están degeneradas en \mathcal{I}^+ y, por lo tanto, no resultan útiles para una buena descripción del infinito nulo. En particular, cualquier par de puntos sobre \mathcal{I}^+ tienen $t = \infty$ y $r = \infty$. Para poder diferenciar estos puntos y dar cuenta de la radiación que sale del interior del espacio-tiempo, introducimos la coordenada $u = t - r$ en la métrica (3.2). Obtenemos

$$ds^2 = -du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2 \quad (3.7)$$

La coordenada u se conoce como tiempo retardado de Bondi. Las superficies $u = \text{cte}$ son nulas y resuelven la degeneración que presentan las coordenadas (t, r) en \mathcal{I}^+ . Finalmente, introducimos coordenadas holomorfas z y \bar{z} para representar las coordenadas angulares sobre la 2-esfera,

$$z = e^{i\varphi} \cot \frac{\theta}{2} \quad (3.8)$$

De esta manera obtenemos

$$ds^2 = -du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \quad (3.9)$$

donde

$$\gamma_{z\bar{z}} = \frac{2}{(1 + z\bar{z})^2} \quad (3.10)$$

La métrica inversa es

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ -1 & 1 & \\ & & \frac{1}{2r^2}\gamma^{z\bar{z}} \end{pmatrix}$$

En lo que sigue denotaremos $x^\mu = (u, r, x^A)$ con $x^A = (z, \bar{z})$, $(A, B = 1, 2)$. Las coordenadas (u, r, z, \bar{z}) se conocen como coordenadas de Bondi. Es importante tener en mente que hasta ahora lo único que hicimos fue introducir coordenadas convenientes para estudiar las simetrías asintóticas del espacio plano en el infinito nulo futuro. Por lo tanto, la métrica (3.9) es la métrica de Minkowski en coordenadas de Bondi.

Podemos representar las coordenadas de Bondi en el diagrama de Penrose como

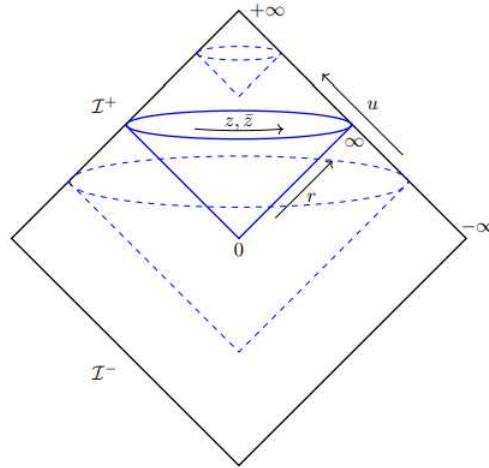


Figura 3.3: Diagrama de Penrose del espacio plano en coordenadas de Bondi. Los conos azules describen superficies $u = cte$ (superficies nulas) que eliminan la degeneración que había en \mathcal{I}^+ con coordenadas (t, r) .

A continuación estudiaremos soluciones de gravedad asintóticamente planas, esto significa que nos interesará analizar soluciones que puedan contener, por ejemplo, ondas

gravitacionales saliendo del sistema. Será importante entonces imponer que para $r \rightarrow \infty$ la métrica se comporte asintóticamente como (3.9). Esto demandará imponer (3.9) como comportamiento dominante en infinito. A continuación realizaremos un análisis detallado para determinar los posibles decaimientos de las distintas componentes de la métrica.

3.2. Fijado de gauge y Asintótica

A continuación definiremos la noción de espacio asintóticamente plano. A tal fin, impondremos un comportamiento asintótico particular para la métrica, esto se hará en un sistema de coordenadas particularmente elegido. El conjunto de coordenadas se denota $x^\mu = (u, r, x^A)$, se conoce con el nombre de Bondi+Sachs, y satisface las siguientes condiciones:

Foliación nula: el espacio tiempo se folia con superficies nulas $u = \text{const}$. El vector normal a estas hipersuperficies que denotaremos \mathcal{N} se escribe en términos de la función $S(x) = u = \text{cte}$ como

$$n_\mu = -\partial_\mu S = -\partial_\mu u = (-1, 0, 0, 0). \quad (3.11)$$

El signo menos puede entenderse para el caso de espacio plano: se introduce para que $n^\mu = \eta^{\mu\nu} n_\nu = -\eta^{\mu\nu} \partial_\nu (t - r) = (1, 1, 0, 0)$ sea un vector dirigido hacia el futuro. De (3.11)

$$\mathcal{N} \text{ nula} \rightsquigarrow 0 = n^\mu n_\mu = g^{\mu\nu} n_\nu n_\mu = g^{uu} \rightsquigarrow g^{uu} = 0 \quad (3.12)$$

Esta es la primera condición que impondremos para el fijado de gauge.

Recordemos que un vector \mathbf{t} se dice tangente a una hipersuperficie \mathcal{N} si es ortogonal a su normal, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$. Puesto que \mathcal{N} es nula, el vector normal \mathbf{n} es también tangente. Si resolvemos las curvas integrales del vector normal en \mathcal{N}

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = n^\mu \quad (3.13)$$

obtenemos el siguiente resultado:

Lema: las curvas integrales $x^\mu(\lambda)$ para el vector normal a una superficie nula son geodésicas.

Demostración: calculemos el transporte paralelo de \mathbf{n} a lo largo de las curvas integrales (3.13). Llamando $S(x) = u$ a la función que determina la hipersuperficie \mathcal{N} tenemos

$$n^\rho \nabla_\rho n^\mu = g^{\mu\nu} n^\rho \nabla_\rho \partial_\nu S = g^{\mu\nu} n^\rho \nabla_\nu \partial_\rho S = \frac{1}{2} \nabla^\mu (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (3.14)$$

donde usamos que las derivadas covariantes conmutan cuando actúan sobre escalares.

Concluimos entonces que la normal a la hipersuperficie $u = cte$ es nula, geodésica y tangente. A lo largo de un rayo de luz, tenemos que r crece mientras que la coordenada u es constante.

Coordenadas en el borde: vamos a pedir que las coordenadas $\{x^A\}$ se mantengan constantes a lo largo de las curvas (3.13), es decir

$$n^\mu \partial_\mu x^A = -g^{\mu\nu} \partial_\nu u \partial_\mu x^A = 0 \quad \rightsquigarrow \quad g^{uA} = 0 \quad (3.15)$$

Usando (3.12) y (3.15) tenemos que

$$0 = \delta_r^u = g^{u\mu} g_{\mu r} = g^{ur} g_{rr} \quad \rightsquigarrow \quad g_{rr} = 0 \quad (3.16)$$

Análogamente

$$0 = \delta_A^u = g^{u\mu} g_{\mu A} = g^{ur} g_{rA} \quad \rightsquigarrow \quad g_{rA} = 0 \quad (3.17)$$

Coordenada radial: finalmente vamos a pedir que la coordenada radial r sea tal que el elemento de área crezca como r^2 . Es decir, queremos que $\sqrt{\det g_{AB}} \propto r^2$. Por lo tanto, escribiendo $g_{AB} = r^2 h_{AB}$ tenemos que $h_{AB} \propto 1 + O(1/r)$. Equivalentemente

$$\partial_r (\det(h_{AB})) = 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.18)$$

Las condiciones para la métrica (3.16), (3.17) y (3.18) fijan lo que se conoce como el gauge de Bondi.

La métrica más general consistente con este fijado de gauge es

$$ds^2 = g_{uu} du^2 + 2g_{ur} dudr + 2g_{uA} dudx^A + g_{AB} dx^A dx^B \quad (3.19)$$

donde $g_{AB} := r^2 h_{AB}$ con h_{AB} satisfaciendo (3.18). Notemos que el espacio plano está contenido en el espacio de soluciones puesto que corresponde a

$$g_{uu} = -1 \quad , \quad g_{ur} = -1 \quad , \quad g_{uA} = 0 \quad , \quad g_{AB} = r^2 \gamma_{AB} \quad (3.20)$$

Decaimientos: el siguiente paso es determinar el rate de decaimiento de las componentes de (3.19). En principio, no existen restricciones para los decaimientos de las componentes.

Sin embargo, esperamos que la métrica “asintóticamente plana” describa física interesante, por lo tanto, los decaimientos tienen que ser cuidadosamente elegidos. Bondi, van der Burg, Metzner y Sachs sugirieron

$$g_{uu} = -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad , \quad g_{ur} = -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad , \quad g_{uA} = \mathcal{O}(1) \quad , \quad g_{AB} = r^2\gamma_{AB} + \mathcal{O}(r) \quad (3.21)$$

La razón para estos decaimientos, y no otros, es que dan origen a métricas que describen física no trivial. Notemos que el decaimiento para la componente g_{uu} contempla la métrica de Schwarzschild y para la componente g_{uA} contempla la métrica de Kerr.

Teniendo en cuenta (3.21), parametrizamos la métrica como una expansión en potencias de $1/r$. A primer orden escribimos (cf. (3.8) en [2] y (5.1.4) en [19])

$$\begin{aligned} ds^2 = & -du^2 - 2dudr + r^2\gamma_{AB}(z, \bar{z})dx^A dx^B \quad (\text{Minkowski}) \\ & + \frac{2m_B}{r} du^2 + rC_{AB}dx^A dx^B + D^B C_{AB}dudx^A \\ & + \frac{1}{16r^2} C_{AB}C^{AB} dudr + \frac{1}{r} \left[\frac{4}{3}(N_A + u\partial_A m_B) - \frac{1}{8}\partial_A(C_{BC}C^{BC}) \right] dudx^A \\ & + \text{términos subsubleading} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Las funciones que parametrizan asintóticamente la métrica (m_B, C_{AB}, N_A) deben ser entendidas como funciones de (u, x^A) , por ejemplo $m_B = m_B(u, x^A)$. Por otra parte, todos los índices A, B se suben y bajan con la métrica 2-dimensional γ_{AB} y D_B es la derivada covariante sobre la esfera. La parametrización (3.22) propuesta por BMS es apropiada para estudiar la radiación de ondas gravitatorias y las simetrías asintóticas del espacio plano.

La función $m_B(u, x^A)$ se conoce como *Bondi mass aspect* y representa una densidad angular de masa medida en un punto de \mathcal{I}^+ localizado en u y en la posición x^A sobre la esfera. La masa de Bondi $M(u)$ del sistema gravitatorio se obtiene integrando m_B en la esfera parametrizada por $\{x^A\}$

$$\text{Bondi mass :} \quad M(u) := \int_{S^2} d^2x \sqrt{\gamma} m_B(u, x^A) \quad (3.23)$$

naturalmente, la esfera sobre la que estamos integrando se localiza en $r = \infty$. Esta cantidad se interpreta como la masa contenida por el sistema gravitatorio. A continuación, veremos (cf.(3.28)) que la radiación de ondas gravitacionales o materia nula que escapa a través de \mathcal{I}^+ reduce la energía del espacio-tiempo a lo largo del tiempo. Cuando

$u \rightarrow -\infty$, la masa de Bondi coincide con la noción de energía ADM (la energía total del espacio-tiempo).

La función $C_{AB}(u, x^A)$ es simétrica $C_{AB} = C_{BA}$, de traza nula $\gamma^{AB}C_{AB} = 0$ y parametriza la información de la radiación gravitacional emitida sobre \mathcal{I}^+ . Su derivada temporal se conoce como

$$\text{Bondi news tensor : } N_{AB}(u, x^A) := \partial_u C_{AB}(u, x^A)$$

cuyo cuadrado se interpreta como el flujo de radiación gravitacional (cf. (3.28)).

El último ingrediente de la parametrización es el *angular momentum aspect* $N_A(u, x^A)$. El momento angular total del espacio-tiempo se obtiene contrayendo N_A con los generadores de rotaciones Y^A e integrando en la esfera

$$J(u) := \int_{S_\infty^2} d^2x \sqrt{\gamma} Y^A N_A(u, x^A) \quad (3.24)$$

Esta cantidad nos da el contenido de momento angular del espacio-tiempo a tiempo u .

3.3. Ecuaciones de Einstein

Hasta acá solo hemos parametrizado la geometría del espacio-tiempo, concluyendo que la métrica (3.22) no tiene invarianzas locales residuales. Sin embargo, queremos que la métrica sea consistente con las ecuaciones de Einstein, que para simplificar la tomaremos en ausencia de materia, i.e. $T_{\mu\nu} = 0$. Luego, pedimos que el ansatz (3.22) sea una solución de

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (3.25)$$

La ecuación de Einstein impone condiciones sobre las funciones m_B, C_{AB}, N_A . En particular, tenemos

$$\partial_u m_B = \frac{1}{4}D^A D^B N_{AB} - \frac{1}{8}N_{AB}N^{AB} \quad (3.26)$$

$$\partial_u N_A = -\frac{1}{4}D^B (D_B D^C C_{AC} - D_A D^C C_{BC}) + u \partial_A \left(T_{uu} - \frac{1}{4}D^B D^C N_{BC} \right) - T_{uA} \quad (3.27)$$

donde

$$T_{uu} = \frac{1}{8}N_{AB}N^{AB}$$

$$T_{uA} = -\frac{1}{4}\partial_A(C_{BC}N^{BC}) + \frac{1}{4}D_B(C^{BC}N_{CA}) - \frac{1}{2}C_{AB}D_CN^{BC}$$

Integrando esta expresión sobre la esfera eliminamos el primer término ya que es una derivada total en una superficie cerrada. De esa manera obtenemos, usando la definición (3.23),

$$\frac{d}{du}M(u) = \int_{S_\infty^2} d^2x\sqrt{\gamma} \partial_u m_B = -\frac{1}{8} \int_{S_\infty^2} d^2x\sqrt{\gamma} N_{AB}N^{AB} \quad (3.28)$$

Esta ecuación se interpreta fácilmente y nos dice algo muy intuitivo: la masa de Bondi de un sistema gravitatorio es constante si y solo si el tensor de news es nulo $N_{AB} = 0$, es decir, si no hay radiación gravitatoria. Cuando $N_{AB} \neq 0$, en presencia de radiación, la masa de Bondi decrece

$$\text{News} \neq 0 \rightsquigarrow \frac{d}{du}M(u) < 0$$

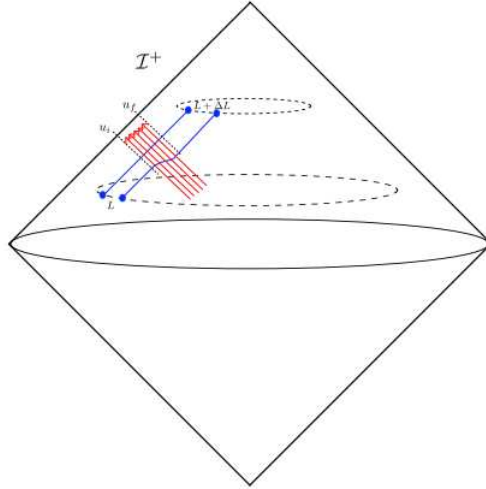


Figura 3.4: Representación de la radiación gravitatoria emitida (**News** $\neq 0$ en rojo) desde el interior del espacio-tiempo hacia el infinito.

Coloquialmente podríamos interpretar al término $\frac{1}{8}N_{AB}N^{AB}$ como el vector de Poynting de la gravedad en espacios asintóticamente planos.

En virtud de (3.26) y (3.27), los datos “iniciales” (independientes) en \mathcal{I}^+ que determinan unívocamente una solución de las ecuaciones de Einstein son: m_B, C_{AB} y N_A en el

tiempo (retardado) inicial, por ejemplo $u \rightarrow -\infty$ (\mathcal{I}_-^+ en fig. 3.5) y $N_{AB} \forall u$. Esta última condición nos dice que debemos indicar cuál fue el flujo de radiación emitida.¹

3.4. Simetrías asintóticas

En lo que sigue estudiaremos las simetrías asintóticas de Minkowski [20]. Estas simetrías van a corresponder a difeomorfismos que dejan invariante el comportamiento asintótico (3.21). En otras palabras simetrías residuales del ansatz de Bondi.

En general, decimos que un campo vectorial $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ es una isometría si deja invariante la métrica

$$\text{Isometría : } \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad \forall x \quad (3.29)$$

En el contexto de espacios asintóticamente planos diremos que un difeomorfismo ξ es una simetría asintótica o vector de Killing asintótico si satisface

$$\text{Simetría asintótica : } \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para } r \rightarrow \infty \quad (3.30)$$

Esto significa que preserva el comportamiento asintótico de $g_{\mu\nu}$ dado por (3.22).

En la década del 60, Bondi, van der Burg, Metzner y Sachs se preguntaron cuáles eran las simetrías asintóticas de la relatividad general en espacios tiempos asintóticamente planos. Puesto que para $r \rightarrow \infty$ esperamos que los campos sean débiles y la curvatura sea baja, BMS esperaban obtener las isometrías de relatividad especial como resultado (es decir, el grupo de Poincaré). Sin embargo, en lugar de eso encontraron lo que hoy se conoce como el grupo BMS, que es una extensión de dimensión infinita del grupo de Poincaré. Veremos en lo que sigue que estas simetrías asintóticas se corresponden con difeomorfismos muy particulares conocidos como difeomorfismos largos (o impropios) que preservan la estructura asintótica de la métrica. Pero, asimismo, decaen lo suficientemente despacio como para generar cargas no-triviales, resultado que sugiere, a diferencia de los difeomorfismos cortos que son redundancias de la teoría y dan origen a cargas nulas, que deberían ser considerados simetrías físicas.

Motivados por (3.30), para encontrar los vectores de Killing asintóticos (o difeomor-

¹Existe una condición adicional de decaimiento del News hacia \mathcal{I}_\pm^+ , debe decaer mas rápido que $1/|u|$ (ver 5.2.1 de [19]).

fismos largos) ξ^μ proponemos el siguiente ansatz

$$\xi^u = \mathcal{O}(1) \quad , \quad \xi^r = \mathcal{O}(1) \quad , \quad \xi^A = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.31)$$

Esta condición que implica $\xi^\mu \sim \mathcal{O}(1)$ en infinito, elimina los boosts y las rotaciones dado que $\xi_{Lorentz}^\mu \sim \mathcal{O}(r)$ en infinito. El ansatz (3.31) es consistente con las traslaciones usuales en Poincaré pues estas satisfacen $\xi_{trasl}^\mu \sim \mathcal{O}(1)$. Puesto que queremos preservar el gauge de Bondi (3.16), (3.17) y (3.18), debemos imponer que las derivadas de Lie de las componentes g_{rr} y g_{rA} sean exactamente cero.

g_{rr} : usando (3.16),(3.17) tenemos

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{rr} = 2\nabla_r \xi^\mu g_{r\mu} = 2\nabla_r \xi^u g_{ru} \quad (3.32)$$

De manera que esta condición se satisface si pedimos

$$\nabla_r \xi^u = (\partial_r \xi^u + \Gamma_{r\rho}^u \xi^\rho) = \partial_r \xi^u = 0 \quad (3.33)$$

donde usamos que los símbolos de Christoffel $\Gamma_{r\rho}^u = 0 \forall \rho$ para la métrica (3.22). Es decir que ξ^u es independiente de r ,

$$\xi^u = \xi^u(u, x^A) \quad (3.34)$$

g_{rA} : imponemos

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{rA} = \nabla_r \xi^B g_{BA} + \nabla_A \xi^u g_{ru} \quad (3.35)$$

donde usamos (3.16), (3.17) y (3.33). Insertando los decaimientos (3.21) válidos para $r \rightarrow \infty$ tenemos

$$0 = r^2 \gamma_{AB} \nabla_r \xi^B - \nabla_A \xi^u = \gamma_{AB} (r^2 \partial_r \xi^B - D^B \xi^u) \quad (3.36)$$

donde usamos que $\Gamma_{rA}^B \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$ e introdujimos nuevamente D^B , la derivada covariante sobre la esfera S^2 . Por lo tanto tenemos que

$$\partial_r \xi^B = \frac{1}{r^2} D^B \xi^u \quad (3.37)$$

luego,

$$\xi^A = -\frac{1}{r} D^A \xi^u \quad (3.38)$$

g_{ur} : para esta componente tenemos la condición de decaimiento (3.21). Pedimos entonces

$$\mathcal{L}_\xi g_{ur} = \nabla_u \xi^u g_{ur} + \nabla_r \xi^r g_{ur} + \nabla_r \xi^A g_{uA} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (3.39)$$

donde usamos el gauge de Bondi, (3.33). Usando el ansatz (3.31) para ξ^A y el decaimiento (3.21) para la componente g_{uA} , vemos que podemos descartar el último término por ser del orden de $\frac{1}{r^2}$. De manera que a orden dominante en r tenemos

$$\mathcal{O}(1) : \quad -\nabla_u \xi^u - \nabla_r \xi^r = -\partial_u \xi^u - \partial_r \xi^r = -\partial_u \xi^u = 0 \quad (3.40)$$

donde en el segundo paso usamos que $\Gamma_{u\mu}^u = \Gamma_{r\mu}^r = 0$ y en la tercera usamos el ansatz (3.31). Puesto que $\partial_u \xi^u = 0$, concluimos que ξ^u no depende de u y por (3.34) tenemos

$$\xi^u = \xi^u(x^A) \quad (3.41)$$

Finalmente, como la parte angular de la métrica tiene traza cero,

$$g_{AB} g^{AB} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 0 = g^{AB} \mathcal{L}_\xi g_{AB}$$

encontrando

$$\xi^r = \frac{1}{2} D^2 \xi^u \quad (3.42)$$

donde usamos que $\Gamma_{AB}^u = r \gamma_{AB}$.

3.4.1. Supertraslaciones

Ahora podemos juntar todo y usar (3.38), (3.34) y (3.42) para escribir el campo vectorial completo, i.e. vector de Killing asintótico. Definiendo $\xi^u = f(x^A)$ con $f(x^A)$ una función arbitraria sobre la esfera tenemos

$$\xi_f = f \partial_u + \frac{1}{2} D^2 f \partial_r - \frac{1}{r} D^A f \partial_A \quad (3.43)$$

Podemos expandir $f(x^A)$ en armónicos esféricos

$$f(x^A) = \sum_{l,m} f_{lm} Y_l^m(x^A) \quad (3.44)$$

Es gratificante verificar que los modos $l = 0, 1$ corresponden a las traslaciones usuales de Poincaré

$$\xi_{l=0} = \partial_t \quad , \quad \xi_{l=1,m=0} = -\partial_z \quad , \quad \xi_{l=1,m=\pm 1} = -\frac{1}{2}(\partial_x \pm i\partial_y) \quad (3.45)$$

Sin embargo, por ser $f(x^A)$ una función arbitraria de los ángulos sobre la esfera, aparecen infinitos modos adicionales, $l \geq 2$. Estos últimos son los que se conocen como supertraslaciones. Concluimos que pasamos de tener 4 traslaciones espaciotemporales del grupo de Poincaré a tener infinitas traslaciones. Este conjunto de vectores forma parte del grupo BMS.

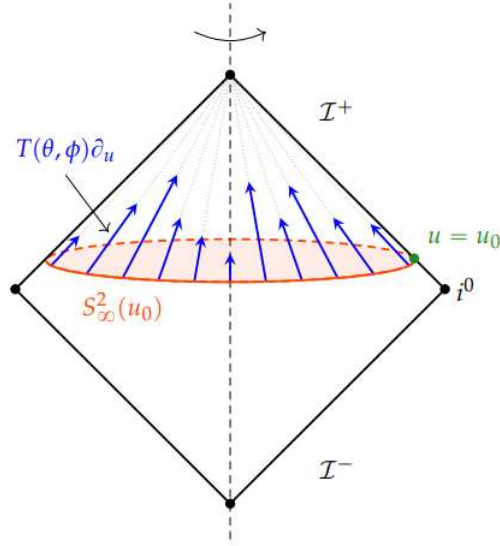


Figura 3.5: Esquema de las supertraslaciones del grupo BMS representadas con flechas azules. En este dibujo solo representamos la componente según ∂_u .

Las supertraslaciones son difeomorfismos, pero, como veremos a continuación, tienen asociadas cargas no triviales. Es decir, no son redundancias de la teoría, sino que son transformaciones físicas que cambian la configuración del sistema. Veamos esto en un ejemplo concreto teniendo en cuenta cómo actúan las supertraslaciones en las distintas funciones que parametrizan la métrica. Calculando la derivada de Lie de la métrica (3.22) para el campo vectorial dado por (3.43), obtenemos

$$\delta_f C_{AB} = f \partial_u C_{AB} - 2D_A D_B f + \gamma_{AB} D^2 f \quad (3.46)$$

Tomando luego la derivada parcial con respecto a u resulta

$$\delta_f N_{AB} = f \partial_u N_{AB} \quad (3.47)$$

Por otro lado,

$$\delta_f m_B = f \partial_u m_B + \frac{1}{4} (N^{AB} D_A D_B f + 2 D_A N^{AB} D_B f) \quad (3.48)$$

y

$$\delta_f N_A = f D_A m_B + 3 m_B D_A f + \frac{1}{4} C_{AB} D^B D^2 f \quad (3.49)$$

¿Qué significan las supertraslaciones físicamente?

Tomemos el ejemplo de Minkowski, donde $m_B = N_A = C_{AB} = 0$, y veamos qué obtenemos cuando supertrasladamos el espacio de Minkowski. En ese caso, usando (3.47), (3.48) y (3.49), tenemos

$$\delta_f m_B = \delta_f N_A = \delta_f N_{AB} = 0 \quad (3.50)$$

Lo cual nos indica que las supertraslaciones no pueden generar masa inercial u ondas gravitacionales partiendo del vacío de Minkowski. Sin embargo, el shear cambia, de (3.46), resulta

$$\delta_f C_{AB} = -2 D_A D_B f + \gamma_{AB} D^2 f \neq 0 \quad (3.51)$$

Concluimos entonces que el difeomorfismo cambia la configuración del sistema. Puesto que f no depende del tiempo, la solución que encontramos está conectada con la solución usual de vacío. Sin embargo, tiene cargas no-triviales (ver abajo). Decimos entonces que las supertraslaciones están espontáneamente rotas.²

²Todo tensor simétrico sin traza en S^2 , como C_{AB} se puede descomponer como

$$C_{AB} = -2 D_A D_B C + \gamma_{AB} D^2 C + \epsilon_{C(A} D_{B)} D^C \Psi$$

El primer término define un campo escalar $C(u, x^A)$ en la esfera, mientras que el segundo término viola paridad y depende de un campo pseudoescalar, $\Psi(u, x^A)$. Un análisis de los vínculos (3.26), (3.27) muestra que $C(u, x^A)$ puede ser no nulo en los límites asintóticos $u \rightarrow \pm\infty$. Los valores $C(\pm\infty, x^A)$ dan cuenta del efecto de memoria gravitatorio. Concluimos que las supertraslaciones generan un shift en el campo C , esto es $\delta_f C = f$ en concordancia con la noción de simetría espontáneamente rota (ver ecs. 3.14 y 3.26 en [2]).

Un dado valor de C es equivalente a una ruptura espontánea de la invarianza de supertraslación. La idea es que tenemos vacíos gravitacionales degenerados, y C es el bosón de Goldstone asociado a la ruptura. Es notable que las cuatro traslaciones de Poincaré no afectan la ruptura, porque consisten en los cuatro armónicos de $f(x^A)$, que son aniquilados por el operador diferencial $-2 D_A D_B + \gamma_{AB} D^2$. De manera que distintos perfiles de $C(x^a)$, etiquetan configuraciones inequivalentes del campo gravitacional. Además, como las supertraslaciones conmutan con la traslación temporal, las cargas asociadas conmutarán con el hamiltoniano, lo que significa que todos estos estados serán degenerados en energía. Este resultado fue obtenido para gravedad asintóticamente plana recientemente por Strominger [21].

Otra forma de ver que una supertraslación transforma una solución en otra físicamente distinta es la siguiente. Consideremos una solución en donde dos pulsos de radiación atraviesan \mathcal{I}^+ en tiempo retardado $u = 100$ por $\theta = 0$ (polo norte) y $\theta = \pi$ (polo sur). Ahora supertraslademos esta solución con una función $f(x^A)$ tal que $f(\theta, \phi)|_{\theta=0} = 100$ en el polo sur y $f(\theta, \phi)|_{\theta=\pi} = 0$ en el polo norte (recordemos que $f(x^A)$ es una función arbitraria que solo depende de los ángulos). Luego, los pulsos de la nueva solución salen: uno por el polo norte al tiempo $u = 100$, mientras que el segundo abandona el espacio-tiempo en $u = 200$. Ciertamente, coincidiremos con el lector en que estas dos soluciones son físicamente distintas.

Finalmente, el grupo BMS se obtiene agregando las supertraslaciones al grupo de Poincaré, es decir,

$$BMS = Lorentz \times Supertraslaciones \quad (3.52)$$

3.5. Cargas BMS

Una vez halladas las simetrías asintóticas, nos interesa calcular las cargas asociadas a ellas. Para ello vamos a basarnos en el CPS y usaremos la expresión para la carga infinitesimal de relatividad general, dada por (2.44). La derivación es bastante larga y los principales pasos están resumidos en el apéndice D y la referencia [22]

El resultado para las cargas asociadas a supertraslaciones es

$$\delta H_\xi[g, h] = \delta \left(\frac{1}{4\pi G} \int d^2\Omega f m_B \right) + \frac{1}{32\pi G} \int d^2\Omega f N_{AB} \delta C^{AB} \quad (3.53)$$

El primer término de (3.53) es exacto y coincide con la ec. (5.2.17) en [19] (corresponde al término integrable), mientras que el segundo es el término no integrable. Por lo tanto, la no integrabilidad de la carga la produce la presencia del tensor Bondi news N_{AB} no nulo [23]. En otras palabras, podemos asociar la no integrabilidad con la existencia de radiación gravitatoria (energía) fuera del sistema.

Este fenómeno es análogo a la no conservación observada en (3.28) para la carga asociada a ∂_t , donde mostramos que la masa de un sistema gravitatorio en un espacio asintóticamente plano se conserva cuando no hay tensor Bondi news, lo cual es intuitivo porque significa que no se está emitiendo radiación. Por otro lado, cuando se emite radiación y $N_{AB} \neq 0$, la masa no se conserva y disminuye con el tiempo.

FÓRMULAS IMPORTANTES

. Masa de Bondi

$$\frac{d}{du}M(u) = -\frac{1}{8} \int_{S_\infty^2} d^2x \sqrt{\gamma} N_{AB} N^{AB} \leq 0$$

. Vector de Killing asintótico

$$\xi_f = f \partial_u + \frac{1}{2} D^2 f \partial_r - \frac{1}{r} D^A f \partial_A$$

. Cargas asociadas a supertraslaciones

$$\delta H_\xi[g, h] = \delta \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi G} \int d^2\Omega f m_B \right)}_{Q_{\xi_f}} + \frac{1}{32\pi G} \int d^2\Omega f N_{AB} \delta C^{AB}$$

Conclusiones

Luego de estudiar las distintas formas del teorema de Noether y sus diversas consecuencias en teorías de gauge. Hay varias conclusiones que podemos mencionar.

En primer lugar, siempre que se tiene una simetría continua global, esto es, una transformación que deja invariante la acción a menos de un término de borde, podemos definir una corriente conservada mediante el primer teorema de Noether. Esta corriente se conserva on shell e involucra la transformación de simetría. Para simetrías locales, existen resultados off-shell, como las identidades de Noether y el segundo teorema de Noether, que proporcionan relaciones entre las ecuaciones de movimiento, implicando que estas no son todas independientes entre sí. Como consecuencia de esto, para el caso de simetrías locales (gauge theories) la corriente de Noether on shell resulta ser un término de borde. Matemáticamente esto se expresa diciendo que es posible escribirla en términos de un superpotencial. Esto se verificó tanto para electromagnetismo como para relatividad general, donde denotamos al superpotencial como $\bar{k}^{\mu\nu}$. La ambigüedad en la corriente de Noether local resulta similar a la que encontramos con el tensor de Belinfante en teoría de campos. Esto es, la posibilidad de sumarle a la corriente un término de borde arbitrario trivialmente conservado (denotado como $k^{\mu\nu}$). Dado que las corrientes resultan arbitrarias, las cargas asociadas a estas también lo son y surge la necesidad de introducir un nuevo formalismo para eliminar esta arbitrariedad.

Es el covariant phase space formalism el que proporciona un método para calcular variaciones de cargas asociadas a simetrías. En síntesis podríamos resumirlo como una técnica donde se enfatiza el cálculo de los superpotenciales (lower degree forms) en lugar de la corriente conservada. Las variaciones de cargas, pueden o no ser integrables y estar o no conservadas. El formalismo es lagrangiano y, por lo tanto, covariante. Permite calcular cargas conservadas de agujeros negros tales como la masa, el momento angular y la entropía y también es posible formular la primera ley de la termodinámica de agujeros

negros en términos de este formalismo.

Finalmente, se estudiaron las simetrías asintóticas de gravedad en espacio plano. El resultado es el grupo BMS, que es una extensión infinito dimensional del grupo de Poincaré. El grupo BMS, generaliza las traslaciones del grupo de Poincaré con difeomorfismos asintóticos que dependen de funciones arbitrarias sobre la esfera celestial, a estos difeomorfismos se los conoce como supertraslaciones. Las supertraslaciones se corresponden con difeomorfismos largos que, si bien son transformaciones locales, no son redundancias de la teoría, ya que es posible asociarles cargas no nulas. En otras palabras, actúan no trivialmente sobre el espacio de soluciones del sistema. Asimismo, se calcularon las cargas asociadas a dichas transformaciones, resultando ser no integrables cuando el tensor de News es distinto de cero. Por último, se mostró explícitamente cómo la masa del sistema decrece cuando hay News, esto es, en presencia de radiación.

Han quedado pendiente muchos temas que seguramente estudiaremos en el corto y mediano plazo. Entre ellos, el álgebra de cargas conservadas, la formulación del electromagnetismo en coordenadas de Bondi y las simetrías asintóticas de la gravedad en el espacio-tiempo de de Sitter.

Apéndice A

Acción de Einstein-Hilbert

Dada la acción

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} R[g], \quad (\text{A.1})$$

variándola arbitrariamente obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S[g_{\mu\nu}, \delta g_{\mu\nu}] &= \frac{1}{16\pi G} \int d^d x [\delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} [G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu (g^{\rho\nu} \delta \Gamma_{\sigma\nu}^\mu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\rho}^\rho)] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde usamos

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}, \quad \delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

y que la variación del Ricci es una derivada total¹

$$\text{Identidad de Palatini :} \quad \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho \quad (\text{A.4})$$

con $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho$ dado por

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\tau} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\tau} - \nabla_\tau \delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.5})$$

¹El último término en la regla de transformación para la conexión

$$\Gamma' = JJJ\Gamma + \underbrace{JJ\partial J}$$

depende únicamente del cambio de coordenadas y no así de la conexión afín. Por lo tanto, si variamos ligeramente la conexión, el término final permanece inalterado y se elimina en la sustracción para obtener $\delta\Gamma$.

Notemos que el primer término de (A.2) involucra el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ que on shell desaparece para gravedad pura, el segundo término, por otra parte, es una derivada total. Ese segundo término, usando (A.5) se puede reescribir como

$$\delta S[g_{\mu\nu}, \delta g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} [-G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \nabla_\mu ((g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta})] \quad (\text{A.6})$$

A partir de esta expresión, identificamos el potencial presimpléctico de relatividad general

$$\text{Potencial presimpléctico : } \Theta^\mu(g, \delta g) := \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.7})$$

Para obtener el término de borde K^μ , definido en (1.23), asociado a invarianzas frente a difeomorfismos de la métrica

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \quad (\text{A.8})$$

tenemos que variar la acción. Comenzamos evaluando el segundo término en (A.6) en (A.8), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{16\pi G}{\sqrt{-g}} \Theta^\mu(g, \delta_\xi g) &= (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\nu (\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha) \\ &= \nabla_\nu (\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu) - 2\nabla^\mu (\nabla_\nu \xi^\nu) \\ &= \nabla_\nu (\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu) - 2\nabla_\nu \nabla^\mu \xi^\nu - 2R^\nu{}_\sigma{}^\mu{}_\nu \xi^\sigma \\ &= \nabla_\nu (\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu) + 2R^{\sigma\mu} \xi_\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde usamos la identidad

$$[\nabla^\alpha, \nabla_\nu] \xi^\lambda = R^\lambda{}_\sigma{}^\alpha{}_\nu \xi^\sigma$$

. Variando (A.6) con $\delta \rightarrow \delta_\xi$ dado por (A.8) tenemos

$$\begin{aligned} \delta S[g_{\mu\nu}, \delta_\xi g_{\mu\nu}] &= \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} [-2G^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\mu (\nabla_\nu (\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu) + 2R^{\sigma\mu} \xi_\sigma)] \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} [-2\nabla_\mu (G^{\mu\nu} \xi_\nu) + 2\xi_\nu \nabla_\mu G^{\mu\nu} + 2\nabla_\mu (R^{\mu\nu} \xi_\nu)] \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} 2\nabla_\mu ((R^{\mu\nu} - G^{\mu\nu}) \xi_\nu) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} \nabla_\mu (g^{\mu\nu} R \xi_\nu) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{-g} \nabla_\mu (\xi^\mu R) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde para pasar a la tercera línea usamos la identidad de Bianchi $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Concluyendo que

$$K^\mu(g_{\mu\nu}, \delta_\xi g_{\mu\nu}) = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \xi^\mu R \quad (\text{A.11})$$

Podemos entonces calcular la corriente de Noether (off shell)

$$\begin{aligned} J^\mu(g, \delta_\xi g) &= \Theta^\mu(g, \delta_\xi g) - K^\mu \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (\nabla_\nu (\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu) + 2R^{\mu\nu} \xi_\nu - g^{\mu\nu} \xi_\nu R) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (\nabla_\nu (\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu) + 2(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R) \xi_\nu) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \nabla_\nu (\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu) + \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} G^{\mu\nu} \xi_\nu \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Donde podemos interpretar al primer término como la contribución de gravedad y al segundo como la contribución de materia en el caso de que esta se encuentre acoplada.

Apéndice B

Condición de integrabilidad

Para mostrar la equivalencia entre (2.13) y (2.14) comenzamos por notar que de la expresión (2.33) se sigue que solo debemos analizar la condición de integrabilidad sobre el término

$$\oint_{\partial\Sigma} \xi \cdot \Theta(\Phi, \partial\Phi).$$

Esto se debe a que $\delta\mathfrak{K}_\xi$ es integrable. Luego,

$$0 = (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)H_\xi \approx - \oint_{\partial\Sigma} \delta_1(\xi \cdot \Theta(\Phi, \delta_2\Phi)) - \delta_2(\xi \cdot \Theta(\Phi, \delta_1\Phi)) \quad (\text{B.1})$$

$$= - \oint_{\partial\Sigma} \xi \cdot (\delta_1\Theta(\Phi, \delta_2\Phi) - \delta_2\Theta(\Phi, \delta_1\Phi)) \quad (\text{B.2})$$

$$= - \oint_{\partial\Sigma} \xi \cdot \omega(\delta_1\Phi, \delta_2\Phi, \Phi) \quad (\text{B.3})$$

donde asumimos que los parámetros de transformación $\delta\xi = 0$ son independientes de los campos Φ .

Apéndice C

Covariant Phase Space: definiciones y notación de formas

En esta sección resumiremos definiciones y detalles de la formulación CPS en notación de formas [18].

Denotaremos con **negrita** a las formas y vectores en el espacio tiempo.

Espacio de fases: variedad \mathcal{P} , que posee una 2-forma Ω que llamamos forma simpléctica. Las coordenadas que parametrizan la variedad X^A inducen una base para el espacio cotangente δX^A , entonces $\mathbf{\Omega} = \Omega_{AB}\delta X^A\delta X^B$ debe satisfacer

1. $\Omega_{AB} = -\Omega_{BA}$
2. $\delta\Omega = 0$
3. $\omega_{AB}V^B = 0 \Leftrightarrow V^B = 0$ donde V es un vector en el espacio tangente de \mathcal{P} .

En el contexto de teoría de campos denotamos con $\bar{\mathcal{F}}$ al espacio de soluciones de la teoría de campos, claramente $\dim \bar{\mathcal{F}} = \infty$. Denotaremos una variación en el espacio de soluciones del sistema con $\delta_i\Phi$, a nivel geométrico $\delta_i\Phi$ es un vector en el espacio tangente de $T_{\Phi}\bar{\mathcal{F}}$. La forma simpléctica de Lee+Wald se define a partir de su acción sobre vectores en el espacio tangente $\delta_i\Phi$

$$\Omega_{\text{LW}}(\delta_1\Phi, \delta_2\Phi, \Phi); = \int \omega_{\text{LW}}(\delta_1\Phi, \delta_2\Phi, \Phi)$$

donde la integral es sobre todos los puntos del espacio tiempo y (cf. (2.7))

$$\omega_{\text{LW}}(\delta_1\Phi, \delta_2\Phi, \Phi) := \delta_1(\Theta(\Phi, \delta_2\Phi)) - \delta_2(\Theta(\Phi, \delta_1\Phi))$$

esta forma es cerrada en el espacio de soluciones.

. Elemento de volumen: $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}$ es el tensor de Levi+Civita, $\epsilon_{012 \dots d} = +1$

$$d^d x \sqrt{-g} \rightsquigarrow \epsilon = \frac{\sqrt{-g}}{d!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}$$

. Acción: el lagrangiano escalar $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ es una 0-forma

$$S[\phi] = \int \epsilon \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \int \mathbf{L}(\phi, \partial\phi)$$

puesto que $\mathbf{L} := \epsilon \mathcal{L}$ es una forma de rango máximo podemos decir que

$$\mathbf{L}(\phi, \partial\phi) := \star \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \frac{\sqrt{-g}}{d!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}$$

Notar que \mathbf{L} es una densidad.

. Variación de la acción:

$$\delta S[\phi, \delta\phi] = \int (\mathbf{E}(\phi) \delta\phi + d\Theta)$$

de donde reconocemos a Θ como una $(d-1)$ -forma. Nuevamente, la podemos pensar como el dual de Hodge del potencial presimpléctico Θ^μ en (1.29)

$$\Theta := \frac{\sqrt{-g}}{(d-1)!} \epsilon_{\mu\mu_1 \dots \mu_{d-1}} \Theta^\mu dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{d-1}}$$

. Simetría: transformación de los campos tal que a primer orden

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \nabla_\mu K^\mu$$

en términos de formas

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L} + d\mathcal{K}$$

luego

$$\mathcal{K} := \star K$$

· Difeomorfismos: para un lagrangiano invariante frente a difeomorfismos $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ tenemos usando (2.20)

$$\delta_\xi L = d(\xi \cdot L)$$

entonces,

$$\mathcal{K} = i_\xi L = \xi \cdot L$$

Apéndice D

Cargas asociadas a supertraslaciones

Una forma alternativa de escribir una métrica asintóticamente plana en el gauge de Bondi es

$$ds^2 = e^{2\beta} \frac{V}{r} du^2 - 2e^{2\beta} du dr + g_{AB}(dx^A - U^A du)(dx^B - U^B du) \quad (\text{D.1})$$

con

$$g_{AB} = r^2 \gamma_{AB} + r C_{AB} + \mathcal{O}(1) \quad (\text{D.2})$$

$$U^A = \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (\text{D.3})$$

$$\beta = -\frac{1}{32} r^{-2} C_B^A C_A^B - \frac{1}{12} r^{-3} C_B^A D_A^B + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{V}{r} = -\frac{1}{2} \bar{R} + r^{-1} 2M + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (\text{D.5})$$

con \bar{R} la curvatura escalar de D_A .

La expresión para la carga, teniendo en cuenta (2.12) y (2.44) es

$$\begin{aligned} \delta H_\xi[g, h] = \frac{1}{16\pi G} \int_S (d^{n-2}x)_{\mu\nu} \sqrt{-g} & \left[\xi^\nu D^\mu h - \xi^\nu D_\sigma h^{\mu\sigma} + \xi_\sigma D^\nu h^{\mu\sigma} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} h D^\nu \xi^\mu + \frac{1}{2} h^{\nu\sigma} (D^\mu \xi_\sigma - D_\sigma \xi^\mu) - (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \quad (\text{D.6}) \end{aligned}$$

con

$$(d^{n-k})_{\mu\nu} = \frac{1}{k!(n-k)!} \epsilon_{\mu\nu\alpha_1 \dots \alpha_{n-2}} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_{n-2}} \quad , \quad \epsilon_{01 \dots n-1} = 1 \quad (\text{D.7})$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned} \delta H_\xi[g, h] = & \frac{1}{16\pi G} \lim_{r \rightarrow \infty} \int d^2\Omega r^2 e^{2\beta} \left[\xi^r (D^u h - D_\sigma h^{u\sigma} + D^r h_r^u - D^u h_r^r) - \right. \\ & - \xi^u (D_r h - D_\sigma h^{r\sigma} - D^r h_u^u + D^u h_u^r) + \xi^A (D^r h_A^u - D^u h_A^r) + \frac{1}{2} h (D^r \xi^u - D^u \xi^r) + \\ & \left. + \frac{1}{2} h^{r\sigma} (D^u \xi_\sigma - D_\sigma \xi^u) - \frac{1}{2} h^{u\sigma} (D^r \xi_\sigma - D_\sigma \xi^r) \right] \quad (\text{D.8}) \end{aligned}$$

donde ξ^r, ξ^u, ξ^A están dados por (3.43)

Usando los símbolos de Christoffel de la métrica (D.1) dados explícitamente en la sección 4.3 de [24], obtenemos, para la parte que acompaña a ξ^r

$$\begin{aligned} D^u h - D_\sigma h^{u\sigma} + D^r h_r^u - D^u h_r^r &= D^u h - D_u h^{uu} - D_r h^{ur} - D_A h^{uA} + D_r h^{ur} - D^u h_r^r = \\ &= D^u h - D_A h^{uA} = g^{ur} g^{AB} (D_r h_{AB} - D_A h_{rB}) \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos que $D_u h^{uu} = D_r h_r^r = 0$. Nuevamente, usando los símbolos de Christoffel tenemos que

$$\begin{aligned} D^u h - D_A h^{uA} &= g^{ur} g^{AB} (D_r h_{AB} - D_A h_{rB}) = -e^{-2\beta} (g^{AB} \partial_r h_{AB} - k^{AB} h_{AB} + e^{-2\beta} g^{AB} k_{AB} h_{ru}) = \\ &= \frac{1}{4r^3} C^{AB} \delta C_{AB} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (\text{D.10}) \end{aligned}$$

donde en la última igualdad nos quedamos a primer orden para $r \rightarrow \infty$.

Análogamente, tenemos que computar los demás términos de (D.8)

$$\begin{aligned} - (D^r h - D_\sigma h^{r\sigma} - D^r h_u^u + D^u h_u^r) &= \frac{1}{r^2} \left(4\delta M - \frac{1}{2} D_A D_B \delta C^{AB} + \frac{1}{2} \delta \partial_u (C^{AB} C_{AB}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \partial_u C_{AB} \delta C^{AB} - C^{AB} \partial_u \delta C_{AB} \right) + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad (\text{D.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^r h_A^u - D^u h_A^r &= \frac{1}{2r} D_B \delta C_A^B + \frac{2}{3r^2} \left(2 \ln r - \frac{1}{3} \right) D_B \delta D_A^B + \mathcal{O}(r^{-3}) \\ &+ \frac{1}{r^2} \left(\frac{4}{3} \delta N_A + \frac{1}{3} \delta (C_{AB} D_C C^{BC}) - \frac{1}{4} C_{AB} D_C \delta C^{BC} \right) \quad (\text{D.12}) \end{aligned}$$

Nos faltan los últimos tres términos de (D.8). Para eso, notemos que

$$\frac{1}{2}h^{r\sigma}(D^u\xi_\sigma - D_\sigma\xi^u) - \frac{1}{2}h^{u\sigma}(D^r\xi_\sigma - D_\sigma\xi^r) = \frac{1}{2}(h_u^u + h_r^r)(D^u\xi^r - D^r\xi^u) + \frac{1}{2}h_A^r(D^u\xi^A - D^A\xi^u) \quad (\text{D.13})$$

Además, tenemos que

$$\frac{1}{2}(h - h_u^u - h_r^r)(D^r\xi^u - D^u\xi^r) = \frac{1}{2}g^{AB}h_{AB}(D^r\xi^u - D^u\xi^r) = 0 \quad (\text{D.14})$$

con lo cual solo tenemos que computar el término $\frac{1}{2}h_A^r(D^u\xi^A - D^A\xi^u)$. Sin embargo, por la forma de (3.43), tenemos que

$$(D^u\xi^A - D^A\xi^u) = 0 \quad (\text{D.15})$$

por lo tanto no lo tenemos en cuenta. Ahora, usamos (3.43) y agrupamos todos los términos, para terminar obteniendo

$$\begin{aligned} \delta H_\xi[g, h] = \frac{1}{16\pi G} \int d^2\Omega f \left(4\delta M - \frac{1}{2}D_A D_B \delta C^{AB} + \frac{1}{2}\delta\partial_u(C^{AB}C_{AB}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\partial_u C_{AB}\delta C^{AB} - C^{AB}\partial_u\delta C_{AB} \right) - \frac{1}{2}D_A f D_B \delta C^{AB} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Para aclarar la situación, la primera línea de (D.16) viene de (D.11) y el último término viene del primer término de (D.12). Donde además, como estamos tomando límite para $r \rightarrow \infty$, tiramos todos los términos que decaen como $\mathcal{O}(r^{-1})$ o más rápido.

Finalmente, haciendo partes en D_A y en ∂_u obtenemos

$$\delta H_\xi[g, h] = \frac{1}{16\pi G}\delta \int d^2\Omega 4f m_B + \frac{1}{16\pi G} \int d^2\Omega \left[\frac{f}{2}\partial_u C_{AB}\delta C^{AB} \right] \quad (\text{D.17})$$

y usando $N_{AB} = \partial_u C_{AB}$ tenemos

$$\delta H_\xi[h, g] = \frac{1}{16\pi G}\delta \int d^2\Omega 4f m_B + \frac{1}{16\pi G} \int d^2\Omega \left[\frac{f}{2}N_{AB}\delta C^{AB} \right] \quad (\text{D.18})$$

Referencias

1. Noether, E. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics* **1**, 186-207. ISSN: 1532-2424. <http://dx.doi.org/10.1080/00411457108231446> (ene. de 1971).
2. Compère, G. y Fiorucci, A. *Advanced Lectures on General Relativity* 2019. arXiv: [1801.07064](https://arxiv.org/abs/1801.07064) [hep-th]. <https://arxiv.org/abs/1801.07064>.
3. Fiorucci, A. *Leaky covariant phase spaces: Theory and application to Λ -BMS symmetry* 2021. arXiv: [2112.07666](https://arxiv.org/abs/2112.07666) [hep-th]. <https://arxiv.org/abs/2112.07666>.
4. Gieres, F. Covariant canonical formulations of classical field theories. *SciPost Physics Lecture Notes*. ISSN: 2590-1990. <http://dx.doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.77> (dic. de 2023).
5. Bondi, H., van der Burg, M. G. J. y Metzner, A. W. K. Gravitational Waves in General Relativity. VII. Waves from Axi-Symmetric Isolated Systems. *Proceedings of the Royal Society of London Series A* **269**, 21-52 (ago. de 1962).
6. Sachs, R. K. Gravitational Waves in General Relativity. VIII. Waves in Asymptotically Flat Space-Time. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **270**, 103-126. ISSN: 00804630. <http://www.jstor.org/stable/2416200> (2025) (1962).
7. Sachs, R. Asymptotic Symmetries in Gravitational Theory. *Phys. Rev.* **128**, 2851-2864. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.128.2851> (6 dic. de 1962).
8. Bañados, M. y Reyes, I. A short review on Noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms. *International Journal of Modern Physics D* **25**, 1630021. ISSN: 1793-6594. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218271816300214> (ago. de 2016).

9. Henneaux, M., Julia, B. y Silva, S. Noether superpotentials in supergravities. *Nuclear Physics B* **563**, 448-460. ISSN: 0550-3213. [http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(99\)00536-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00536-2) (dic. de 1999).
10. Tong, D. *General Relativity* (2019).
11. Blau, M. *Lecture notes on General Relativity* (2025).
12. Coleman, S. *Sidney Coleman's Lectures on Relativity* 2022.
13. Landau L. Lifshitz, E. *The Classical Theory of Fields* 1965.
14. Wald, R. M. y Zoupas, A. General definition of “conserved quantities” in general relativity and other theories of gravity. *Physical Review D* **61**. ISSN: 1089-4918. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.61.084027> (mar. de 2000).
15. Grumiller, D. y Sheikh-Jabbari, M. M. *Black Hole Physics: From Collapse to Evaporation* ISBN: 978-3-031-10342-1, 978-3-031-10343-8 (Springer, nov. de 2022).
16. Seraj, A. *Conserved charges, surface degrees of freedom, and black hole entropy* 2016. arXiv: [1603.02442 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1603.02442). <https://arxiv.org/abs/1603.02442>.
17. Crnkovic, C. *Symplectic geometry of the covariant phase space* 1988.
18. Hajian, K. *On Thermodynamics and Phase Space of Near Horizon Extremal Geometries* 2015. arXiv: [1508.03494 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1508.03494). <https://arxiv.org/abs/1508.03494>.
19. Strominger, A. *Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory* 2018. arXiv: [1703.05448 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1703.05448). <https://arxiv.org/abs/1703.05448>.
20. Puhm, A. *Lectures on advanced General Relativity* 2024. @misc%7Bhttps://www.youtube.com/watch?v=8CyIBJdduYs&list=PL1CFLtXeIrQrcYpa4qTCcnTkFUuVuw931&index=3&ab_channel=GalileoGalileiInstitute%28GGI%29%7D.
21. Strominger, A. On BMS Invariance of Gravitational Scattering. *JHEP* **07**, 152. arXiv: [1312.2229 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1312.2229) (2014).
22. Barnich, G. y Troessaert, C. BMS charge algebra. *Journal of High Energy Physics* **2011**. ISSN: 1029-8479. [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2011\)105](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2011)105) (dic. de 2011).
23. Guica, M. *Asymptotic symmetries, black holes, and holography* 2018. @misc%7Bhttps://www.ipht.fr/Docspht/articles/t18/018/public/2018%5C_Guica%5C_lecture%5C_notes.pdf%7D.

24. Barnich, G. y Troessaert, C. Aspects of the BMS/CFT correspondence. *Journal of High Energy Physics* **2010**. ISSN: 1029-8479. [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05\(2010\)062](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05(2010)062) (mayo de 2010).

Tesis disponible bajo Licencia: Creative Commons,
Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5
Argentina
Buenos Aires, 2025