



Universidad de Buenos Aires  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física

# Cálculo de la distribución polarizada del fotón dentro del protón

*Tesis de Licenciatura en Física*

Gabriel Fernando Volonnino

Dirección: Dr. Daniel de Florian  
Colaborador: Lucas Palma Conte

Noviembre 2024

TEMA: Física de Partículas y de Altas Energías  
ALUMNO: Gabriel Fernando Volonnino  
L.U. N°: 168/18  
LUGAR DE TRABAJO: ICIFI-ECyT-UNSAM  
DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Daniel de Florian  
COLABORADOR DEL TRABAJO: Lucas Palma Conte  
FECHA DE INICIACION: Agosto 2023  
FECHA DE FINALIZACION: Octubre 2024  
FECHA DE EXAMEN: 28 de Noviembre 2024  
INFORME FINAL APROBADO POR:

---

Alumno: Gabriel Fernando Volonnino

---

Director: Dr. Daniel de Florian

---

Jurado: Dr. Rodolfo Sassot

---

Colaborador: Lucas Palma Conte

---

Jurado: Dr. Gustavo Otero Y Garzón

---

Prof.: Dra. Silvina Ponce Dawson

---

Jurado: Dra. Carla Bonifazi

## Agradecimientos

A mis viejos y toda mi familia por el apoyo, aguante, confianza y contención que me han dado toda la vida, en especial desde que decidí dedicarme a la ciencia. Sin ellos no hubiera sido posible estar acá haciendo lo que me gusta, por lo que estoy completamente agradecido hoy y siempre.

A mis amigos de toda la vida con quienes compartí cientos de horas haciendo cualquier otra cosa, gracias por ser un gran cable a tierra.

A las primeras personas que conocí en el CBC y en la carrera por acompañarme estos años y ayudarme a tener una agradable bienvenida a la vida académica.

A Toddys y el resto de compañeros y colegas por hacerme sentir parte de una comunidad científica, la cual admiro mucho y aprecio pertenecer. En particular a la Onda Goleadora por tener una racha de derrotas impoluta.

A la escuela de música El Estudio por darme el espacio para desarrollarme musicalmente desde que era tan chico. En particular a Kiko por ser un buen profesor y un gran amigo todos estos años.

A Daniel y Lucas por permitirme ser parte de un excelente grupo de trabajo y por la paciencia que me tuvieron este último año.

Y a las universidades públicas y todos los docentes y no docentes que las conforman, quienes hacen posible el acceso a una educación superior gratuita de calidad.

## Resumen

La motivación de esta tesis fue calcular la distribución partónica polarizada del fotón como un partón del protón. Para ello se utilizó el método LuxQED, el cual expresa la distribución en términos de las funciones de estructura del protón  $g_1$  y  $g_2$ . A la vez se implementaron distintos modelos fenomenológicos de acuerdo a la región de parámetros abarcada. El resultado final de la distribución partónica polarizada resultó ser, aproximadamente, del orden de  $x$  veces la distribución partónica no polarizada. La incerteza relativa llega a valores del 50 % para  $x \sim 10^{-3}$  y se reduce hasta el 10 % para valores más altos de  $x$ . El cálculo realizado en este trabajo es de gran importancia en el esfuerzo de mejorar la precisión de cálculos polarizados, teniendo implicaciones fundamentales en los futuros estudios del Electron-Ion Collider (EIC).

# Índice

Pág.

1. Introducción . . . . .	1
1.1. Ecuación de Dirac y su cuantización . . . . .	3
1.2. QED, QCD y Reglas de Feynman . . . . .	5
1.3. Interacciones y secciones eficaces . . . . .	9
1.4. Renormalización y esquema MS . . . . .	11
1.5. Modelo de Partones . . . . .	13
1.6. Tensor leptónico $L_{\mu\nu}$ y hadrónico $W_{\mu\nu}$ . . . . .	16
1.7. Fenomenología de PDFs . . . . .	18
1.8. Ecuaciones de evolución DGLAP . . . . .	20
2. Método LuxQED . . . . .	21
2.1. Proceso no-físico propuesto . . . . .	21
2.2. Cálculo de PDF polarizada . . . . .	23
3. Cálculo fenomenológico . . . . .	28
3.1. Región elástica . . . . .	28
3.2. Región de resonancias y continuo de bajo $Q^2$ . . . . .	30
3.3. Región perturbativa . . . . .	34
4. Resultados . . . . .	38
5. Conclusiones . . . . .	42
Apéndice . . . . .	43
A. Cambio de variables en el espacio de fase . . . . .	43

# Capítulo 1

## Introducción

El objetivo de entender los constituyentes de la materia es una búsqueda de conocimiento que ha acompañado a la humanidad desde sus comienzos. Esta pregunta, en un principio filosófica, la podemos encontrar en distintas culturas, remontándonos a las épocas de Kaṇāda en la India y de Democritus en Grecia. Ambos filósofos teorizaron la existencia de partículas pequeñas indivisibles como los constituyentes de la materia, siendo este último a quien se le atribuye nombrarlas “átomos”. Sin embargo, fueron los avances de los últimos siglos los que nos permitieron conocer y entender estas partículas, empezando con el descubrimiento del electrón gracias al físico inglés J.J. Thomson a fines del siglo XIX. Subsecuentemente, el siglo XX vió una plétora de descubrimientos y desarrollos teóricos sobre partículas. Ya a principios de este, el trabajo de Rutherford sobre láminas de oro nos permitió entender la noción de un núcleo, donde más tarde lo asignaríamos a la presencia de protones y neutrones. Los años siguientes vieron no solo un avance en los experimentos pero también en la teoría que los pudiera explicar: en 1927 Dirac desarrolló una teoría cuántica relativista capaz de explicar el comportamiento de las partículas fundamentales. No obstante, no todo lo que se conocía resultó ser indivisible. En 1964 Gell-Mann introdujo la idea de los quarks: partículas fundamentales que están siempre juntas, interactuando constantemente por la fuerza fuerte. Estas nuevas partículas fundamentales poseen *color*, un nuevo número cuántico que explica como no se pueden observar como partículas libres. Los quarks se agrupan formando hadrones, siendo mesones cuando son pares de quarks y bariones cuando son 3 quarks juntos. De esta manera, se entiende al protón y al neutrón como los bariones más livianos, siendo el protón el más liviano de todos. Esta teoría además nos permite asociar nuevas partículas a la fuerza fuerte, siendo los gluones los portadores de esta fuerza. Estas ideas y desarrollos pasarían a cementar lo que hoy se conoce como *Quantum Chromodynamics* (QCD). Esta nueva teoría, junto al resto de teorías que conforman al Modelo Estándar, toman como base en su construcción nuestra descripción del electromagnetismo a través de la teoría de *Quantum Electrodynamics* (QED). Esta cuantiza el campo electromagnético y asigna a los fotones como portadores de la interacción electromagnética, de modo que la descripción de la interacción se da a partir de simetrías de gauge.

Si bien la descripción del Modelo Estándar no termina ahí (pues no mencionamos la fuerza débil ni la generación de masa), en este trabajo nos interesa estudiar la estructura del protón y sus propiedades fundamentales. Mencionamos que el protón es el barión más liviano, conformado por 2 quarks  $u$  y un quark  $d$ . Si bien esta descripción inicial de *partones* (partículas fundamentales de un hadrón) es cierta, falta considerar otras interacciones. Para empezar, debido a la hadronización de los quarks va a haber una gran cantidad de gluones manteniendo la forma del protón. Una de las interacciones admitidas por la teoría es la creación de un par quark-antiquark por la aniquilación de un gluon o viceversa. Esto permite una creación y destrucción constante de gluones, quarks y antiquarks dentro del protón, dando origen a lo que se conoce como el *mar de quarks*. Este grupo de partículas es inestable y están siempre presentes en los hadrones. De esta manera, decimos que el protón está formado por 3 *quarks de valencia*  $uud$  y el mar de quarks. Además, la fuerza débil permite “intercambiar” quarks top ( $u$ ,  $c$  y  $t$ ) con quarks down ( $d$ ,  $s$  y  $b$ ), de modo que uno podría encontrar otros tipos de quarks (como el  $s$  y el  $c$ ) dentro del protón. Ahora, si uno quisiera calcular cuanto del protón son estos partones uno necesita tener alguna medida de su presencia en este. Para cuantificar esta presencia o contribución se define la *función de distribución partónica* (PDF por su nombre en inglés, *parton density function*) como una densidad de probabilidad en función de la fracción de momento del protón y de una variable de escala, al menos a primer orden. Estas PDFs se obtienen experimentalmente. A partir de ellas se puede obtener, por ejemplo, cuanto del impulso del protón aporta cada partícula y encontrar que los quarks  $u$  y  $d$  portan una gran parte del impulso, mientras que los gluones y los antiquarks llevan fracciones longitudinales pequeñas de este.

En cuanto a las propiedades fundamentales del protón, el modelo de partones es capaz de explicar la carga de este a partir de los quarks de valencia. Sin embargo, la presencia de quarks solamente no es capaz de explicar el resto de propiedades del protón. Este es el caso del espín del protón, el cual se esperaba que surga a partir de los quarks. Más aún, resultó ser que los quarks conforman una pequeña parte del espín del protón [1]. Este resultado inesperado generó una búsqueda del origen de las propiedades del protón a partir de sus constituyentes, donde también se incorporó la búsqueda del impulso lineal y el momento angular orbital. En este contexto, se comenzó a estudiar las PDFs de los partones del protón. Las más esenciales, siendo los quarks y los gluones, ya llevan años siendo estudiadas. Si se consideran interacciones de QED y QCD entre los partones uno encuentra que debe incluir los fotones que se pueden formar dentro del protón en la descripción de este. Por esta razón, la PDF del fotón comenzó a ser objeto de estudio en los últimos años. Además, el avance de resolución en experimentos hace necesaria la incorporación de correcciones de QED, así como un estudio de la PDF del fotón [2-5]. Desde 2017 se tienen resultados para las PDFs del fotón considerando los casos no polarizados (scattering leptón-protón sin helicidades definidas) y polarizados (scattering leptón-protón con helicidades definidas) [6]. Las PDFs resultan ser integrales de las funciones de estructura del protón. En el trabajo de 2017 se hizo un análisis fenomenológico y se obtuvo una PDF del fotón para el caso no polarizado. Si bien la PDF para el caso polarizado es

un resultado del mismo trabajo no habían suficientes mediciones para llevar a cabo un estudio análogo al caso no polarizado.

En este trabajo se continua con los esfuerzos comenzados en [6] donde está dada la PDF del fotón para el caso no polarizado como una integral en términos de las funciones de estructura  $g_1$  y  $g_2$ . En este sentido, para obtener la PDF del fotón es necesario poder describir ambas funciones de estructura en un amplio rango de energías y fracciones del momento del protón. Donde es aplicable se utilizan aproximaciones perturbativas de  $g_1$  y  $g_2$  pero a bajas energías no es posible, por lo que se usan varios resultados experimentales junto a modelos fenomenológicos para reconstruir la forma que toman estas funciones.

La organización del trabajo es la siguiente. En el resto del Cap. 1 se introduce el contexto teórico necesario. En el Cap. 2 se introduce el método de cálculo y el desarrollo a partir del cual se puede obtener la PDF del fotón polarizado. Adicionalmente se agrega un apéndice para detallar ciertas cuentas del desarrollo. El Cap. 3 detalla el método que utilizamos para calcular la PDF, donde se desarrolla como se utilizan en conjunto los resultados experimentales y los modelos fenomenológicos. Además, se detallan las fuentes de incertezas indicando su origen y como se suman al resultado final. Luego, en el Cap. 4 se muestran los resultados obtenidos. Finalmente, el Cap. 5 concluye el trabajo realizado.

## 1.1. Ecuación de Dirac y su cuantización

En este trabajo vamos a estar tratando extensamente con partículas de espín-1/2 por lo que naturalmente debemos introducir la ecuación de Dirac, pues es la teoría que describe este tipo de partículas [7]. La ecuación de Dirac es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (1.1)$$

Relativísticamente tiene sentido utilizar esta ecuación pues es invariante de Lorentz, i.e. no cambia al realizar una transformación de Lorentz. La matriz  $\gamma^\mu$  presenta su propio álgebra comúnmente conocido como *álgebra de Dirac*:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

La dimensión de las matrices  $\gamma^\mu$  es independiente de su álgebra por lo que la Ec. 1.2 vale para dimensiones  $n \times n$  pero, a menos que sea necesario cambiar de dimensión, trabajaremos con  $n = 4$ . Para esta elección de dimensiones las matrices admiten más de una representación. La representación quiral o de Weyl está dada por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

siendo  $\sigma^i$  las matrices de Pauli. La solución de partícula libre a la Ec. 1.1 está dada por

$$\psi(x) = u^s(p)e^{-ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0, \quad (1.4)$$



donde  $u^s(p)$  es un vector columna de 2 espinores y debe satisfacer  $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$ . Si a la vez admitimos soluciones con frecuencias negativas obtenemos que

$$\psi(x) = v^s(p)e^{ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \quad (1.5)$$

Cada solución tiene su propia expresión y son

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \quad (1.6)$$

donde  $\xi^s, \eta^s$  son distintas bases de espinores de 2 componentes y el supraíndice  $s$  es para indicar el espín de la partícula<sup>1</sup>. Se definen  $\sqrt{p \cdot \sigma}$  y  $\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}$  según

$$\sqrt{p \cdot \sigma} = \sqrt{E + p^3} \left( \frac{1 - \sigma^3}{2} \right) + \sqrt{E - p^3} \left( \frac{1 + \sigma^3}{2} \right) \quad (1.7)$$

$$\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} = \sqrt{E + p^3} \left( \frac{1 + \sigma^3}{2} \right) + \sqrt{E - p^3} \left( \frac{1 - \sigma^3}{2} \right). \quad (1.8)$$

Es notable la relación  $(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = p^2 = m^2$ .

Dado el carácter espinorial que presenta  $\psi$  necesitamos definir un *espinor adjunto o conjugado* a través de  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$  para poder generar un invariante de Lorentz a partir de la multiplicación de un campo de Dirac con su adjunto<sup>2</sup>.

A partir de la Ec. 1.1 uno puede construir un Lagrangiano que le permita recuperar dicha ecuación, el cual toma la forma

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (1.9)$$

Notablemente resulta ser  $\mathcal{L}_{Dirac} = 0$  por tener en su expresión la ecuación de Dirac explícitamente. De esta expresión se puede ver que el momento conjugado canónico de  $\psi$  resulta ser  $i\psi^\dagger$ , por lo que el hamiltoniano de Dirac se escribe

$$H_{Dirac} = \int d^3x \bar{\psi}(-\gamma \cdot \nabla + m)\psi = \int d^3x \psi^\dagger(-\gamma^0 \gamma \cdot \nabla + m\gamma^0)\psi. \quad (1.10)$$

Ahora para cuantizar necesitamos imponer relaciones entre los operadores de campos. Para los campos de Dirac esto se logra imponiendo relaciones de anticonmutación:

$$\{\psi_a(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab}, \quad \{\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{y})\} = \{\psi_a^\dagger(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = 0. \quad (1.11)$$

siendo la notación  $a, b$  para indicar las componentes de los espinores. Necesitamos obtener una base de autofunciones para  $H_{Dirac}$  y resulta ser que las mismas funciones que eran soluciones de partícula libre, Ecs. 1.4 y 1.5, forman una base de autofunciones con energías

<sup>1</sup>También se utiliza la notación  $u(p, s)$  en vez de  $u^s(p)$  por ser más clara visualmente. Más adelante en la Sec. 1.3 se empieza a utilizar esta notación.

<sup>2</sup>En cuántica no relativista no es necesario la incorporación de la matriz  $\gamma^0$  y basta con “conjugar”, la operación asociada a la notación  $\dagger$

que poseen el mismo signo que la frecuencia de cada solución. Por lo tanto, podemos expandir  $\psi$  en dicha base y obtener

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left( a_p^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_p^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (1.12)$$

donde el subíndice  $p$  denota momento y los operadores  $a_p^s$  y  $b_p^s$  son los usuales operadores de aniquilación de partículas y antipartículas, respectivamente. Los operadores de creación correspondientes son  $a_p^{s\dagger}$  y  $b_p^{s\dagger}$ . De manera análoga se obtiene  $\bar{\psi}$  a partir de su definición y de la Ec. 1.12, siendo este

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left( b_p^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} + a_p^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} \right). \quad (1.13)$$

Finalmente, el estado de vacío  $|0\rangle$  se define como el que cumple  $a_p^s |0\rangle = b_p^s |0\rangle = 0$ . Además, podemos reescribir el Hamiltoniano utilizando las Ecs. 1.12 y 1.13 de modo que se exprese como una suma de las energías de cada estado<sup>3</sup>

$$H_{Dirac} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s E_p \left( a_p^{s\dagger} a_p^s + b_p^{s\dagger} b_p^s \right). \quad (1.14)$$

## 1.2. QED, QCD y Reglas de Feynman

La electrodinámica cuántica (QED) es de una de las primeras teorías de partículas interactuantes desarrolladas y es una teoría de gauge  $U(1)$  abeliana, i.e. grupo de simetría conmutativo. Su densidad lagrangiana se escribe [8, 9]

$$\mathcal{L}^{QED} = \mathcal{L}_{Free}^{QED} + \mathcal{L}_{Gauge}^{QED}, \quad (1.15)$$

siendo que  $\mathcal{L}_{Free}^{QED}$  es el desarrollo usualmente conocido y  $\mathcal{L}_{Gauge}^{QED}$  es un término agregado para fijar el gauge desde la definición de  $\mathcal{L}^{QED}$ . Sabemos que el electromagnetismo sigue las leyes de Maxwell que podemos escribir como  $\square^2 A^\mu = j^\mu$  con  $j^\mu$  las fuentes y que es invariante de gauge, por lo que es necesario fijar un gauge. El primer término está dado por

$$\mathcal{L}_{Free}^{QED} = \sum_f \bar{\psi}_f [i\not{D} - m] \psi_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

donde la suma se hace sobre todos los posibles fermiones  $f^4$  y se define el vector potencial usual  $A^\mu$ , de modo que se define la derivada covariante  $D_\mu$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (1.17)$$

<sup>3</sup>Hay una sutileza en la Ec. 1.14 y es que estamos tirando un término infinito que surge de anticonmutar los operadores  $b_p^s$  y  $b_p^{s\dagger}$ .

<sup>4</sup>Como no estamos considerando interacciones débiles no desarrollamos la descripción electro-débil ni sumamos sobre los bosones cargados  $W^\pm$ .

con  $e$  la carga del fermión considerado y el tensor de fuerzas  $F_{\mu\nu}$  se define

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.18)$$

Luego, el término de gauge  $\mathcal{L}_{Gauge}^{QED}$  se escribe

$$\mathcal{L}_{Gauge}^{QED} = -\frac{1}{2a}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (1.19)$$

usando la constante  $a$  para fijar el gauge, e.g.  $a = 1$  se le llama gauge de Feynman. Sin embargo, esta descripción es parcial porque falta incluir el gauge de Lorenz  $\partial_\mu A^\mu = 0$  y no es posible a través de este término. Esta se puede incluir mediante la condición de Gupta-Bleuler:

$$\langle \Psi' | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = 0, \quad (1.20)$$

donde  $|\Psi\rangle$  representa los estados físicos posibles en la teoría. La Ec. 1.20 impone que el operador  $\partial_\mu A^\mu$  tenga elementos de matriz que se anulen. Como último detalle, se suele redefinir la constante de acoplamiento, i.e. la carga  $e$ , como  $\alpha = e^2/4\pi$ .

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es una teoría de gauge no-abeliana y se define a partir de la siguiente densidad lagrangiana efectiva [10]

$$\mathcal{L}^{QCD} = \mathcal{L}_{YM}^{QCD} + \mathcal{L}_{gauge}^{QCD} + \mathcal{L}_{ghost}^{QCD}, \quad (1.21)$$

donde  $\mathcal{L}_{YM}^{QCD}$  es la expresión originalmente postulada por Yang-Mills [11, 12],  $\mathcal{L}_{gauge}^{QCD}$  es un término para fijar el gauge de la teoría y  $\mathcal{L}_{ghost}^{QCD}$  son campos fantasmas para mantener la unitariedad de la matriz de scattering si el gauge elegido los requiere. El primer término de 1.21 se escribe

$$\mathcal{L}_{YM}^{QCD} = \sum_q \bar{\psi}_q [i\mathcal{D} - m] \psi_q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

siendo  $q = u, d, s, c, t, b$  los quarks del modelo estándar y  $\psi_q$  el campo respectivo a cada quark. Al ser una teoría invariante local  $SU(3)$  se tienen 8 generadores  $T_a$  que definen un algebra de Lie a partir de su relación de conmutación

$$[T_a, T_b] = i f^{abc} T_c, \quad (1.23)$$

donde  $f^{abc}$  son simplemente escalares y los índices  $a, b, c = 1, \dots, 8$  [13]. Los quarks interactúan mediante los gluones y estos últimos se describen mediante los campos  $\mathcal{A}_\mu$  que se escriben a partir de los generadores del grupo  $SU(3)$  según  $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^a T_a$ . A partir de estos uno puede definir la derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu$  como

$$(\mathcal{D}_\mu)_{ij} \equiv \partial_\mu \delta_{ij} + ig \mathcal{A}_\mu^a (T_a)_{ij}, \quad (1.24)$$

siendo  $g$  el acoplamiento de QCD que indica cuán fuerte es la presencia de esta interacción con los campos<sup>5</sup>, similar a la carga  $e$  de QED. Nuevamente podemos definir una constante

---

<sup>5</sup>Existe otra definición del acoplamiento en la bibliografía y esta es  $g_s$ . Suele aparecer cuando la constante de acoplamiento de QED se presenta como  $g$  en vez de  $e$ . El subíndice  $s$  indica *strong*, fuerte en inglés.

de acoplamiento  $\alpha_s = g^2/4\pi$  en total analogía con QED. De la misma manera, podemos definir por analogía con QED el tensor de fuerza  $G_{\mu\nu}$  como

$$G_{\mu\nu}^a \equiv [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a - gf^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c. \quad (1.25)$$

Es importante notar que los índices  $a, b, c, \dots$  no siguen las mismas reglas de contracción que los  $\mu, \nu, \dots$  y solamente se utilizan para enumerar los campos y generadores del álgebra. Notemos que el último término de la Ec. ?? surge de la no-conmutatividad de los generadores, expuesta en la Ec. 1.23.

Los términos de gauge  $\mathcal{L}_{gauge}^{QCD}$  se pueden escribir de dos maneras distintas

$$\mathcal{L}_{gauge}^{QCD} = -\frac{\lambda}{2} \sum_a (\partial_\mu \mathcal{A}_a^\mu)^2, \quad 1 < \lambda < \infty \quad (1.26)$$

$$\mathcal{L}_{gauge}^{QCD} = -\frac{\lambda}{2} \sum_a (n \cdot \mathcal{A}_a)^2, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (1.27)$$

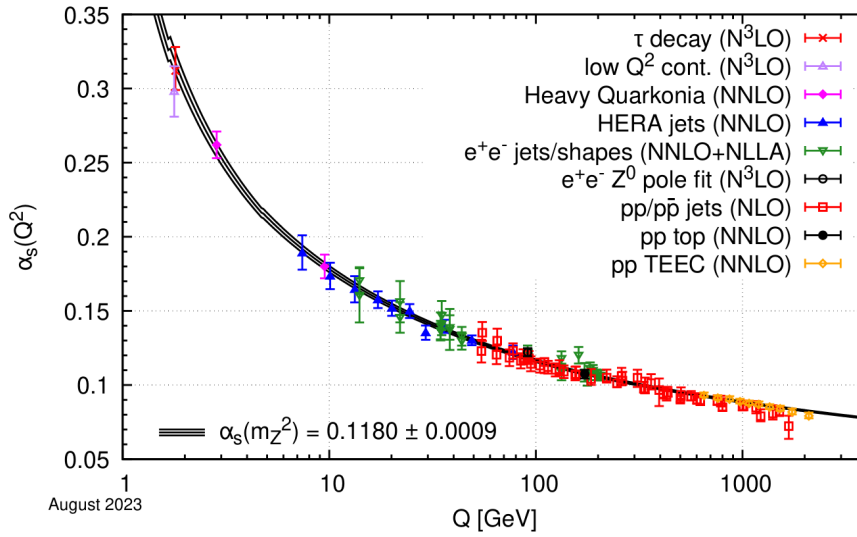
siendo  $n$  un vector fijo. El primer tipo de gauge define lo que se conoce como “gauge covariante”, mientras que los segundos definen los “gauge físicos” pues si se elige una constante  $\lambda \rightarrow \infty$  uno no debe incluir el término fantasma. Por completitud,  $\mathcal{L}_{ghost}^{QCD}$  se escribe

$$\mathcal{L}_{ghost}^{QCD} = (\partial_\mu \bar{c}_a) (\partial^\mu \delta_{ad} - gf_{abd} \mathcal{A}_b^\mu) c_d, \quad (1.28)$$

donde  $c(x)$  son los campos escalares fantasma y estos anticonmutan, más allá del espín que presenten.

La particularidad de QCD que la distingue de cualquier otra teoría que busca describir la fuerza fuerte es que por si sola es capaz de explicar el comportamiento a pequeñas y grandes distancias, que a la vez se relacionan con altas y bajas energías, respectivamente. Este comportamiento viene dado por el parámetro fundamental de QCD, su constante de acoplamiento. En la ecuación 1.24 se introdujo el acoplamiento  $g$  pero usualmente se trabaja con  $\alpha_s$ . Uno encuentra que esta interacción es de acoplamiento fuerte, i.e.  $\alpha_s$  alto, a bajas energías y a medida que uno aumenta la energía del proceso el acoplamiento  $\alpha_s$  decrece, dando lugar a una “libertad asintótica”. Para energías en el orden de  $0,1 - 1 \text{ TeV}$  se tiene  $\alpha_s \sim 0,1$  mientras que para energías por debajo de  $10 \text{ GeV}$  el acoplamiento aumenta rápidamente, donde surge el fenómeno de “confinamiento de color”. El comportamiento de  $\alpha_s$  a distintas escalas se puede ver en la Fig. 1.1 [14]. Gracias a la libertad asintótica se puede desarrollar QCD de forma perturbativa (pQCD) cuando se encuentra en el límite de energías altas o distancias pequeñas. De esta manera, se obtienen resultados (e.g. secciones eficaces) en potencias de  $\alpha_s$ . Sin embargo, a energías bajas reina el confinamiento de color, por lo que se vuelve imposible encontrar quarks aislados y siempre se hadronizan de a pares (mesones) o de a tres (bariones). A niveles bajos de energías uno suele trabajar en otros marcos teóricos como *lattice QCD* [15] pero en este trabajo no será necesario.

Uno puede tomar las densidades lagrangianas definidas en 1.16 y 1.22 para obtener las reglas de Feynman de QED y QCD, respectivamente. La característica importante

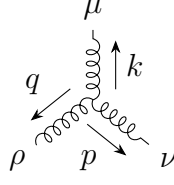


**Figura 1.1** Comparación de resultados experimentales con el calculo realizado por el Particle Data Group. La evolución del acoplamiento se realizo centrada alrededor de  $\alpha_s = 0,1180 \pm 0,0009$ . Figura extraída de [14].

de QCD que la distingue de QED es ser no-abeliana. Esto genera nuevos términos en su densidad lagrangiana sin correlato a QED que dan nuevos vértices en las reglas de Feynman. Estos son los vértices de 3 y 4 gluones. Las reglas de Feynman de QED[13] y QCD son

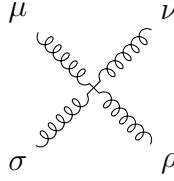
Fermion de espín $\frac{1}{2}$	$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \longrightarrow \end{array}$	$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
Propagador de fotón	$\begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \sim \end{array}$	$-i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2}$
Propagador de gluon	$\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \mu \text{ } \text{    } \text{ } \nu \end{array}$	$-i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2}$
Vértice fotón - fermion	$\begin{array}{c} \swarrow p \\ \searrow p' \\ \text{---} \end{array}$	$ie\gamma^\mu$
Vértice gluon - fermion	$\begin{array}{c} \mu \\ \text{---} \\ \swarrow \searrow \end{array}$	$i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu$

Vértice 3 gluones



$$-i\frac{g}{\sqrt{2}}\left[g^{\mu\nu}(p-k)^{\rho} + g^{\nu\rho}(q-p)^{\mu} + g^{\rho\mu}(k-q)^{\nu}\right]$$

Vértice 4 gluones



$$ig^2\left[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - \frac{1}{2}(g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho})\right]$$

### 1.3. Interacciones y secciones eficaces

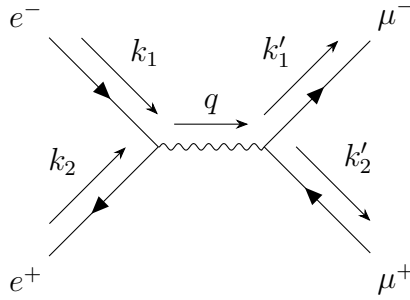
A partir de teorías que nos describen interacciones, sea QED o QCD, podemos calcular la probabilidad con la que pueden surgir ciertas interacciones. Experimentalmente estas interacciones se pueden medir del choque entre partículas y de este se calcula la *dispersión* (*scattering* en inglés), la cual es una medida de la probabilidad de la interacción. A medida que crece la dispersión la probabilidad de interacción aumenta. Para describir estos fenómenos desde la teoría se suele definir la *amplitud invariante*  $\mathcal{M}$ , la cual es un invariante de Lorentz y contiene toda la información específica del proceso. Esta se puede construir de forma perturbativa sumando todos los diagramas de Feynman que aparecen a cada orden. Luego, el *diferencial de sección eficaz*  $d\sigma$  se obtiene a partir de

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F}d^4q, \quad (1.29)$$

donde  $d^4q$  es el diferencial del espacio de fase y  $F = 4|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|E_1E_2$  es el flujo incidente con  $v_i$  y  $E_i$  las velocidades y energías de las partículas incidentes ( $i = 1, 2$  como en el ejemplo de la Fig. 1.2). Este diferencial es un invariante de Lorentz ya que se contruye a partir de diferenciales de tipo  $d^3p/E$ . Se interpreta  $|\mathcal{M}|^2$  como la suma sobre todos los estados finales posibles da la probabilidad de la dispersión a partir de la interacción considerada [13]. De modo ilustrativo consideremos una aniquilación de electrón-positrón que da origen a un par muón-antimuón al orden más bajo, la cual podemos representar en el diagrama de Feynman expuesto en la Fig. 1.2. El propagador y vértice del fotón ya lo conocemos por las reglas de Feynman vistas en la Sec. 1.2 y sabemos por la Sec. 1.1 como se expresan los campos cuantizados de Dirac. Para construir  $\mathcal{M}$  simplemente necesitamos recorrer en sentido inverso el diagrama de la Fig. 1.2, incluyendo los espinores  $u$  ( $\bar{v}$ ) de las (anti)partículas incidentes y los  $\bar{u}$  ( $v$ ) de las (anti)partículas salientes. De esta manera se obtiene

$$-i\mathcal{M} = \left[\bar{v}(k_2, s_2)ie\gamma^\mu u(k_1, s_1)\right] \left(-i\frac{g^{\mu\nu}}{q^2}\right) \left[\bar{u}(k'_2, s'_2)ie\gamma^\nu v(k'_1, s'_1)\right], \quad (1.30)$$

siendo  $s_1, s_2, s'_1, s'_2$  los espines correspondientes a las partículas cuyos momentos tienen la misma notación. La definición de  $\mathcal{M}$  es una forma de simplificar la información que



**Figura 1.2** Diagrama de Feynman para  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  al orden más bajo. Se explicitan los momentos de cada partícula, siendo la notación 1 para la partícula y 2 para su antipartícula y el supraíndice ' para los muones. Se sobrentiende que vale  $q = k_1 - k_2$ .

uno tiene al calcular  $d\sigma$ . Realmente faltan incluir distribuciones  $\delta$  por cada vértica para imponer conservación de energía durante el proceso pero estos términos se suelen incluir en  $d^4q$  ya que inevitablemente terminan restringiendo el rango de integración.

Para obtener  $|\mathcal{M}|^2$  para el caso no polarizado uno debe sumar sobre todos los espines de las partículas y luego se normaliza según todos los estados, de modo que se calcula

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{\sum_{s_1, s_2} \mathcal{M} \mathcal{M}^*}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)}. \quad (1.31)$$

El resto del cálculo de  $d\sigma$  se realiza independiente de si se considera un proceso polarizado o no, por lo que para el caso polarizado simplemente podemos concentrarnos en el cálculo de  $\mathcal{M}$ . En tal caso, uno debe explicitar los espines de las partículas y esto lo realiza a través de la helicidad. El operador de helicidad  $\hat{h}$  se define

$$\hat{h} = \frac{\hat{\Sigma} \cdot \hat{p}}{|\hat{p}|} = \frac{1}{|\hat{p}|} \begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

siendo  $\hat{p}$  el operador momento. Se interpreta la helicidad como la proyección del espín de la partícula sobre la dirección de su momento. Se sabe que la helicidad es una constante de movimiento, por lo que las autofunciones del Hamiltoniano  $H$  también son autofunciones del operador helicidad. En particular, la helicidad tiene autovalores  $\pm 1$  si el espín es paralelo al momento y antiparalelo, respectivamente. Sin embargo, no es invariante de Lorentz. Para el caso de partículas sin masa sabemos que la helicidad es igual a la quiralidad, la cual si es invariante de Lorentz y es una propiedad intrínseca de las partículas. Esta nos permite separar partículas en función de sus espinores si son *diestras* o *zurdas* (del inglés *right-handed* y *left-handed*). En particular, los proyectores de quiralidad son

$$\hat{P}_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad \hat{P}_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad (1.33)$$

con  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  y la notación  $R$  por *right* y  $L$  por *left*. Para continuar con el ejemplo ilustrativo vamos a continuar con el caso polarizado del proceso  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  pero

considerando que no tienen masa o que estamos en el límite ultrarelativista. Podemos continuar de la Ec. 1.30 pero necesitamos incorporar los operadores de quiralidad (helicidad ultrarelativista) para hacer explícito el espín de las partículas. Utilizando un proyector general para todas las partículas  $\hat{P} = (1 + s\gamma^5)/2$  obtenemos

$$-i\mathcal{M} = \left[ \bar{v}(k_2, s_2) \frac{1 - s_2\gamma^5}{2} i e \gamma^\mu \frac{1 + s_1\gamma^5}{2} u(k_1, s_1) \right] \left( -i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[ \bar{u}(k'_2, s'_2) \frac{1 - s'_2\gamma^5}{2} i e \gamma^\mu \frac{1 + s'_1\gamma^5}{2} v(k'_1, s'_1) \right]. \quad (1.34)$$

Continuando con el desarrollo uno eventualmente encuentra que si tiene una partícula diestra necesariamente su antipartícula debe ser zurda (o al revés) para que no se anule  $\mathcal{M}$ . Este resultado es general para el caso sin masa. Luego, el resto del cálculo de  $d\sigma$  sería análogo al caso no polarizado.

Experimentalmente la sección eficaz polarizada  $\Delta\sigma$  se obtiene midiendo 2 secciones eficaces distintas. Por un lado se mide la sección eficaz para el caso de espines con la misma proyección que el objetivo y por otro se mide la misma sección eficaz para espines con proyecciones distintas. Finalmente, la sección eficaz polarizada se constuye como la diferencia de ambas mediciones, por lo que se tiene algo de la forma

$$\Delta\sigma = \sigma^{\downarrow\uparrow} - \sigma^{\uparrow\uparrow}, \quad (1.35)$$

siendo  $\uparrow\downarrow$  la proyección de un haz de partículas y  $\uparrow\uparrow$  la proyección del blanco del haz.

## 1.4. Renormalización y esquema MS

Al realizar cálculos de secciones eficaces a órdenes superiores al más bajo es común encontrar términos divergentes en las integrales. Dentro de la teoría estos problemas se solucionan mediante renormalización. Renormalizar implica redefinir los parámetros de la teoría, e.g. constantes de acoplamiento en el Lagrangiano, para eliminar estas divergencias que uno puede encontrar. Sin embargo, hay distintos métodos de renormalización de los cuales no hay *a priori* uno superior al resto. Dependiendo del parámetro que uno redefine y, por ende, de la teoría que esté renormalizando puede haber un método pragmáticamente mejor que otro. La diferencia de los métodos aparece en la forma en la que redefinen los parámetros y todos deben ser iguales al orden más bajo, i.e. al orden donde no se requiere renormalizar.

Uno empieza trabajando con un Lagrangiano, e.g.  $\mathcal{L}^{QED}$  definido en la Ec. 1.15, donde todos los parámetros de la teoría (masas y constantes de acoplamiento) se les da el nombre de *parámetro desnudo* (del inglés *bare parameter*) y se los nota según  $e_0$ ,  $m_0$ , etcétera. Al renormalizar uno introduce un corte  $\lambda$  en la integral y los nuevos parámetros a definir dependerán de  $\lambda$ . Aún más, varios de ellos pueden diverger al dejar  $\lambda \rightarrow \infty$ . Este corte  $\lambda$  puede ser literalmente una constante de corte o puede aparecer como términos



proporcionales a  $1/\epsilon$  que surgen al hacer regularización dimensional<sup>6</sup>, i.e. al trabajar en  $d = 4 - \epsilon$  dimensiones donde al final uno debe tomar  $\epsilon \rightarrow 0$  [16].

Tomemos un parámetro desnudo genérico  $g_0$  y veamos como actúa la renormalización. La idea principal es expandir este parámetro  $g_0$  en una serie de potencias de un parámetro finito  $g$ , de modo que se escriba

$$g_0(\lambda) = g[1 + ga_1(\lambda) + \dots], \quad (1.36)$$

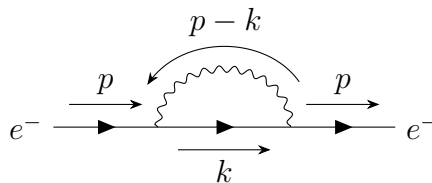
donde la función  $a_1(\lambda)$  se puede descomponer en  $a_1(\lambda) = a_1^\infty(\lambda) + a_1^{\text{finito}}(\lambda)$  y cada parte cumple

$$a_1^\infty(\lambda) \rightarrow \infty, \quad a_1^{\text{finito}}(\lambda) < a_1^{\text{F}} \quad \text{para } \lambda \rightarrow \infty. \quad (1.37)$$

Luego, en una teoría renormalizable la parte  $a_1^\infty(\lambda)$  se cancela con las otras divergencias de modo que el parámetro físico medible resulta ser  $g[1 + ga_1^{\text{F}} + \dots]$ . Cuando los cálculos se realizan al orden más bajo basta con reemplazar  $g_0$  por  $g$ . Se puede identificar que una teoría sea renormalizable o no en función de sus constantes de acoplamiento [7]:

- Super-Renormalizable: Constante de acoplamiento tiene dimensiones de masa positiva.
- Renormalizable: Constante de acoplamiento no tiene dimensiones.
- No-Renormalizable: Constante de acoplamiento tiene dimensiones de masa negativa.

A continuación introducimos un esquema de renormalización que se utiliza en el Cap. 2. El esquema de *substacción mínima* MS (del inglés *minimal subtraction*) [17] plantea renormalizar eliminando únicamente los polos de la integral, i.e. los términos divergentes. Es fácil reconocer los polos si se utiliza regularización dimensional ya que estos aparecen como términos proporcionales a  $1/\epsilon$ . Por ejemplo, si uno se propone a calcular el diagrama de la Fig. 1.3 comúnmente conocido como la *autoenergía del electrón* (*electron self-energy* en inglés) uno encontraría términos divergentes. Desarrollando la integral del



**Figura 1.3** Diagrama de Feynman para la autoenergía del electrón. Se plantea un electrón de momento  $p$  que emite un fotón de momento  $p - k$  y luego lo absorbe. El diagrama presenta divergencias ultravioletas (UV) e infrarojas (IR), de las cuales la primera se asocia con el término de masa (aunque esto es difícil de ver en este esquema de renormalización) y la segunda aparece para momentos chicos [18].

<sup>6</sup>En este caso la regularización debe realizarse previo a la renormalización, sino uno no podría identificar divergencias.

*loop* mediante regularización dimensional esta toma la forma

$$\Sigma_2(p) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left[ (2-\epsilon)x\not{p} - (4-\epsilon)m \right] \left[ \frac{2}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi e^{-\gamma} \mu^2}{(1-x)(m^2 - xp^2)} \right) \right] = \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\not{p} - 4m}{2\epsilon} + \dots \right), \quad (1.38)$$

donde se mantiene la notación de [18],  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ ,  $\mu$  es el factor de escala y  $\gamma = 0,5772\dots$  es la constante de Euler-Mascheroni. Se entiende que “...” en la Ec. 1.38 son términos finitos. Para eliminar estos términos divergentes se puede renormalizar la masa  $m_0$  y el campo  $\psi_0$  del electrón. Primero se plantea la expansión de estos parámetros en función de nuevos:

$$m_0 = Z_m m, \quad \psi_R = \frac{1}{\sqrt{Z_2}} \psi_0. \quad (1.39)$$

Ahora, para encontrar  $Z_m$  y  $Z_2$  es necesario imponer alguna condición física y para eso se utiliza el observable  $\langle \bar{\psi}\psi | \bar{\psi}\psi \rangle$ . Plantenado  $\langle \bar{\psi}_0\psi_0 | \bar{\psi}_0\psi_0 \rangle = \langle \bar{\psi}_R\psi_R | \bar{\psi}_R\psi_R \rangle$  se obtiene que

$$Z_m = 1 - \frac{3\alpha}{4\pi} \frac{1}{\epsilon}, \quad Z_2 = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \frac{2}{\epsilon}. \quad (1.40)$$

También se suele utilizar el esquema de *substracción mínima modificado*  $\overline{\text{MS}}$  el cual plantea eliminar los términos proporcionales a  $\ln(4\pi)$  y  $\gamma$  para recuperar el factor de escala  $\mu$ . Al nivel de un *loop* las  $Z_i$  de la renormalización  $\overline{\text{MS}}$  se pueden obtener a partir de las encontradas con MS a través de la sustitución  $1/\epsilon \rightarrow 1/\epsilon - \ln(4\pi) + \gamma$ . En [19] se puede encontrar un análisis más profundo de estos y otros esquemas.

## 1.5. Modelo de Partones

Para calcular la densidad de fotones que se generan dentro del protón nos interesa estudiar la dispersión electrón-protón (*ep*). Como se mencionó previamente, el protón es el barión más liviano por lo que es necesario considerar su estructura interna al estudiar este tipo de procesos. El *modelo de partones* surge para explicar los procesos de dispersión inelástica profunda (DIS) y nos permite realizar este tipo de descripciones. El proceso de DIS es una dispersión leptón-hadron totalmente inclusiva en el estado hadrónico final  $X$ , i.e. se consideran todos las posibles hadronizaciones luego de la interacción. En la figura 1.4 se esquematiza un diagrama básico de DIS.

Originalmente propuesto por Feynman [20], se modelan los hadrones a partir de constituyentes puntuales libres llamados *partones*. Inicialmente estos partones se identificaban con los quarks y gluones de QCD pero veremos que estos no son los únicos partones. Vimos previamente que a altas energías surge la libertad asintótica de QCD y es debido a este fenómeno que podemos describir las interacciones entre hadrones y leptones a partir de una suma de interacciones entre cada partón con el leptón. Es también en este límite de altas energías que uno puede desprestigiar la masa del hadrón y sus partones con respecto a la escala de energía  $Q$  del proceso<sup>7</sup>. Además, uno puede desprestigiar el impulso

<sup>7</sup>Más adelante se explicita la relación entre la escala del proceso y el momento transferido en este.

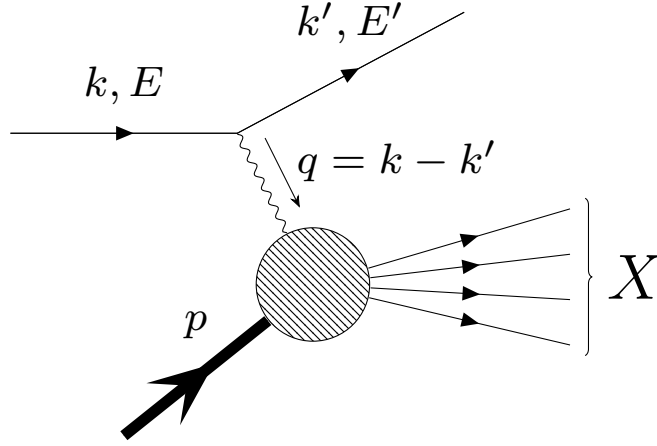
transverso de los partones y asumir que todos aquellos que participan del proceso son colineales al hadrón inicial y su momento es una fracción  $\xi$  de este, i.e. cada partón tiene un momento  $\xi P$ , siendo  $P$  el momento del hadrón original.

Con las consideraciones previas podemos describir a la dispersión completa leptón-hadrón  $\sigma_{lh}$  como una suma de las distintas dispersiones que se pueden dar entre el leptón y los partones del hadrón, despreciando interacciones entre estos últimos gracias a la libertad asintótica. Conceptualmente uno puede pensar el proceso de la siguiente manera: en el sistema centro de masa tenemos un leptón y un hadrón que colisionan con impulsos grandes. El hadrón de impulso  $P$  es un sistema de  $N$  partones de impulsos  $\xi_i P$  cada uno y todos estos tienen un tiempo de vida media  $\tau$  en el sistema propio al hadrón. Luego, desde el centro de masa el hadrón se encuentra contraído y su tiempo propio dilatado por efectos relativistas. Gracias a la dilatación temporal, los tiempos característicos de interacciones entre partones resulta mucho mayor al tiempo típico de interacción electromagnética  $t_{EM} \sim 1/Q$  para escalas de energía  $Q$  grandes. Por lo tanto, el leptón interactúa con un hadrón “congelado”, donde las distribuciones de partones están fijas y, entonces, la sección eficaz  $\sigma_{lh}$  puede escribirse como una suma incoherente de las *secciones eficaces partónicas* o *hard*  $\hat{\sigma}_i$  correspondientes a la interacción de cada partón con el leptón a través del bosón mediador de la interacción, i.e.

$$\sigma_{lh}(P) = \sum_i \int d\xi \hat{\sigma}_i(\xi P) f_{i/h}(\xi). \quad (1.41)$$

En la ecuación 1.41 se introducen las *funciones de distribución partónica* (PDF) y, al orden más bajo, se corresponden a la distribución de probabilidad de que el partón  $i$ -ésimo del hadrón presente una fracción de momento  $\xi$ . De esta manera obtenemos una expresión que nos permite factorizar el problema. Las secciones eficaces hard  $\hat{\sigma}_i$  describen las interacciones a corto alcance con el leptón, mientras que las PDFs contemplan todo el comportamiento, incluyendo largas distancias, por lo cual no son calculables perturbativamente. Sin embargo, estos objetos son universales y únicos para cada hadrón, por lo que es posible extraerlas a partir de resultados experimentales. A continuación se definen las variables cinemáticas que surgen al estudiar los procesos de DIS.

- $E$  la energía del leptón incidente.
- $k$  el momento del leptón incidente. Si se desprecia la masa, vale  $k = (E, 0, 0, E)$ .
- $\Omega$  el ángulo sólido en el que se dispersa el leptón saliente.
- $E'$  la energía del leptón saliente.
- $k'$  el momento del leptón saliente. Siguiendo la definición de las variables previas,  $k' = (E', E' \cos(\phi) \sin(\theta), E' \sin(\phi) \sin(\theta), E' \cos(\theta))$ .
- $p$  el momento del hadrón. Consideraremos protones únicamente, por lo que  $p^2 = m_p^2$ .
- $q = k - k'$  el momento transferido en el proceso, i.e. momento del fotón virtual.



**Figura 1.4** Diagrama básico de dispersión inelástica profunda (DIS). Se hace incidir un leptón de energía  $E$  y momento  $k$  sobre un hadrón de momento  $p$ . El fotón intercambiado presenta un momento  $q = k - k'$ , siendo  $k'$  el momento del leptón saliente de energía  $E'$ . De la interacción se pueden generar distintos procesos de hadronización. Como el proceso es inclusivo consideramos todos los posibles resultados, definiendolos *a priori* como  $X$ .

$$\nu = E - E' = p \cdot q / m_p \text{ la energía perdida del leptón.}$$

$$y = \nu / E = p \cdot q / p \cdot k \text{ la energía perdida fraccionaria del leptón.}$$

$$Q^2 = -q^2 = 2EE'(1 - \cos \theta) = 4EE' \sin^2(\theta/2).$$

$$x_{\text{bj}} = Q^2 / 2m_p \nu = Q^2 / 2p \cdot q = Q^2 / 2m_p E y.$$

Se define  $x_{\text{bj}}$  como la variable de Bjorken [21] y se interpreta como la fracción de momento que lleva cada partón, por lo que dejamos de lado la notación  $\xi$  en favor de esta nueva<sup>8</sup>. Por su definición sabemos que  $x_{\text{bj}} \geq 0$  y dado que la masa final debe cumplir  $M_X = (p + q)^2 \geq m_p$  uno obtiene que  $x_{\text{bj}} \leq 1$ . Por lo tanto, el espacio cinemático queda restringido por

$$0 \leq x_{\text{bj}} \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (1.42)$$

El valor de  $x_{\text{bj}} = 1$  se corresponde a una dispersión elástica. Esta es una colisión entre el leptón y el hadrón como un único cuerpo, por lo que se simplifica la descripción de partones.

Los partones con mayor contribución a la estructura del protón son los gluones  $g$  y los quarks de valencia  $u$  y  $d$ . Estos vienen seguidos por sus antiquarks respectivos,  $\bar{u}$  y  $\bar{d}$ , y por los quarks más pesados. Si bien estos últimos no son parte de los quarks de valencia, estos pueden surgir como pares quark-antiquark del mar de quarks. Las PDFs de todas estas partículas son conocidas para el caso no polarizado [14] pero no sucede lo mismo

<sup>8</sup>Esta definición es imprescindible para DIS pues veremos que el tensor asociado al hadrón de la Sec. 1.6 queda definido en función de  $x_{\text{bj}}$  y  $Q^2$ .

para el caso polarizado. Es importante aclarar que lo que llamamos *caso polarizado* es la distribución que surge de restar la distribución de partones con helicidades definidas y distintas, e.g.  $\Delta g = g_+ - g_-$  donde  $g_{\pm}$  indican la PDF con helicidad positiva y negativa, respectivamente. Hace más de 3 décadas se entiende la necesidad de determinar estas PDFs [22] y en el 2019 se obtuvieron ajustes para las PDFs polarizadas hasta el quark  $s$  [1]. Si consideramos que los partones se mueven rápidamente (lo cual está en concordancia con el límite  $Q^2 \rightarrow \infty$ ) estos generan campos electromagnéticos que se pueden asociar a distribuciones de fotones [23-25]. De este resultado surge la necesidad de considerar una PDF para el fotón dentro del protón, i.e.  $f_{\gamma/p}$ <sup>9</sup>. El caso no polarizado ya está estudiado en [26] y en mayor detalle en [6]. En este último trabajo se presenta el mecanismo con el que se obtienen  $f_{\gamma/p}$  y  $f_{\Delta\gamma/p}$ . En la Cap. 2 se presenta un método para obtener estas PDFs.

Las mediciones experimentales nos dan las secciones eficaces en funciones de la energía del leptón saliente  $E'$  y del ángulo de dispersión  $\Omega$ . Sin embargo, los resultados se suelen expresar en términos de una terna de variables  $(x, y, \phi)$  o  $(x, Q^2, \phi)$ . Si uno calcula los Jacobianos de las transformaciones de variables uno encuentra la siguiente relación:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy d\phi} = \left(\frac{m_p \nu}{E'}\right) \frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \left(\frac{Q^2}{y}\right) \frac{d^2\sigma}{dx dQ^2 d\phi}. \quad (1.43)$$

Si bien acá solo consideramos protones, la relación 1.43 vale para cualquier proceso de DIS. La utilidad de describir la sección eficaz en  $(x, y, \phi)$  o  $(x, Q^2, \phi)$  es que la mayoría de procesos de interés son independientes de  $\phi$ , por lo que uno obtiene un resultado solamente en términos de  $x$  y  $Q^2$  (o  $y$ ). Los procesos con los que trabajamos presentan esta característica.

## 1.6. Tensores leptónico $L_{\mu\nu}$ y hadrónico $W_{\mu\nu}$

Al trabajar con un proceso que incluya leptones la contribución inicial y final de estos se puede estudiar definiendo un tensor leptónico  $L_{\mu\nu}$  que contenga los momentos iniciales y finales de los electrones incidentes y salientes, vinculados a partir de la interacción que define el proceso. Este tipo de desarrollos es bastante común y se usa extensamente en la bibliografía [7, 10, 13, 27]. Si retomamos el ejemplo de  $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$  podemos reescribir la Ec. 1.31 de la siguiente manera:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{\sum_{s_1, s_2} \mathcal{M} \mathcal{M}^*}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} = \frac{e^4}{q^4} L_{(e)}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{(\mu)}, \quad (1.44)$$

definiendo el tensor leptónico para el electrón  $L_{(e)}^{\mu\nu}$  y su análogo para el muón  $L_{\mu\nu}^{(\mu)}$ . La idea detrás de estas definiciones es separar la contribución de cada leptón, lo cual facilita el cálculo y el análisis del proceso. En particular para este proceso ambos tensores presentan

---

<sup>9</sup>Se puede utilizar  $f_{\gamma}$  o  $\gamma$  como notación para las PDFs. A la vez, a partir del Cap. 2 se deja de usar la notación  $_{/p}$  por ser redundante ya que solamente se trabaja para el protón.

la misma forma, por lo que basta calcular solamente uno de ellos. Si tomamos el del electrón obtenemos que

$$L_{(e)}^{\mu\nu} = \sum_{s_1, s_2} \left[ \bar{v}(k_2, s_2) \gamma^\mu u(k_1, s_1) \right] \left[ \bar{u}(k_1, s_1) \gamma^\nu v(k_2, s_2) \right]. \quad (1.45)$$

Si ahora quisieramos ver el caso polarizado tomamos la Ec. 1.34 y, de la misma manera, identificamos la contribución del electrón:

$$L_{(e)}^{\mu\nu}(s_1, s_2) = \sum_{s_1, s_2} \left[ \bar{v}(k_2, s_2) \frac{1 - s_2 \gamma^5}{2} \gamma^\mu \frac{1 + s_1 \gamma^5}{2} u(k_1, s_1) \right] \left[ \bar{u}(k_1, s_1) \frac{1 - s_1 \gamma^5}{2} \gamma^\nu \frac{1 + s_2 \gamma^5}{2} v(k_2, s_2) \right]. \quad (1.46)$$

Si ahora uno continua desarrollando la Ec. 1.46 encontraría que el tensor es no nulo siempre que  $s_1 = -s_2$ . Este caso es relativamente sencillo pero muestra la sencillez con la que uno puede resolver analíticamente este tipo de procesos.

Sería conveniente tomar esta idea y definir un análogo para el protón y lo que surge de este luego de la interacción pero este desarrollo requiere mayor detalle. Sin embargo, uno no puede valerse simplemente de las reglas de interacción de QCD pues la interacción fuerte de los gluones tiene contribuciones no perturbativas. Debido a esto, desde la teoría solamente podemos obtener una expresión general del tensor hadrónico  $W_{\mu\nu}$  que cumpla las simetrías que describen la fuerza fuerte. El tensor hadrónico  $W_{\mu\nu}$  para una partícula de espín-1/2 (de acá en más consideraremos solamente protones) se define como [27]

$$W_{\mu\nu}(p, q, s) = \frac{1}{4\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle p, s | [j_\mu(x), j_\nu(0)] | p, s \rangle, \quad (1.47)$$

donde  $p$  es el momento del protón incidente,  $s$  es el espín de dicho protón,  $q$  es el momento del fotón virtual transferido al protón y  $j$  es la corriente electromagnética hadrónica. Con esta definición 1.47 se entiende al  $W_{\mu\nu}$  como una matriz que contiene la información del momento, del espín y de la energía que recibe el protón durante la interacción. Es importante tener presentes las siguientes relaciones cinemáticas de la interacción:  $p \cdot p = m_p^2$ ,  $q \cdot q = -Q^2$ ,  $s \cdot s = -m_p^2$  y  $p \cdot s = 0$ , siendo  $m_p \approx 0,938$  GeV la masa del protón y  $Q^2$  la energía a la cual se realiza el proceso.

Las interacciones de QCD se describen mediante una teoría de gauge no-abeliana (como se introdujo en las ecuaciones 1.21 a 1.28) la cual es invariante ante transformaciones de paridad, inversión temporal y de traslación. Usando estas propiedades en conjunto con las propiedades de los conmutadores y de la corriente electromagnética se obtiene la siguiente expresión para el tensor

$$W_{\mu\nu}(p, q, s) = F_1 \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{F_2}{p \cdot q} \left( p_\mu - \frac{p \cdot q q_\mu}{q^2} \right) \left( p_\nu - \frac{p \cdot q q_\nu}{q^2} \right) + \frac{ig_1}{p \cdot q} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} q^\lambda s^\sigma + \frac{ig_2}{(p \cdot q)^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} q^\lambda \left( p \cdot q s^\sigma - s \cdot q p^\sigma \right). \quad (1.48)$$

Los factores  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  se denominan *funciones de estructura* y en ellas estará codificada la información interna del protón que debemos extraer de los experimentos. A priori no están determinadas sus dependencias pero veremos de los experimentos que estarán dadas por la energía del proceso  $Q^2$  y la fracción de momento  $x_{bj}$  (o una nueva variable definida a partir de estas). Además, se puede ver que  $q^\mu W_{\mu\nu} = q^\nu W_{\mu\nu} = 0$ , por lo que decimos que el tensor se conserva. Esta propiedad es útil cuando se contrae con términos proporcionales a  $q_\mu$  y  $q_\nu$  porque nos permite reducir la Ec. 1.48 a la expresión

$$W_{\mu\nu}(p, q, s) = -F_1 g_{\mu\nu} + \frac{F_2}{p \cdot q} p_\mu p_\nu + \frac{ig_1}{p \cdot q} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} q^\lambda s^\sigma + \frac{ig_2}{(p \cdot q)^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} q^\lambda (p \cdot q s^\sigma - s \cdot q p^\sigma). \quad (1.49)$$

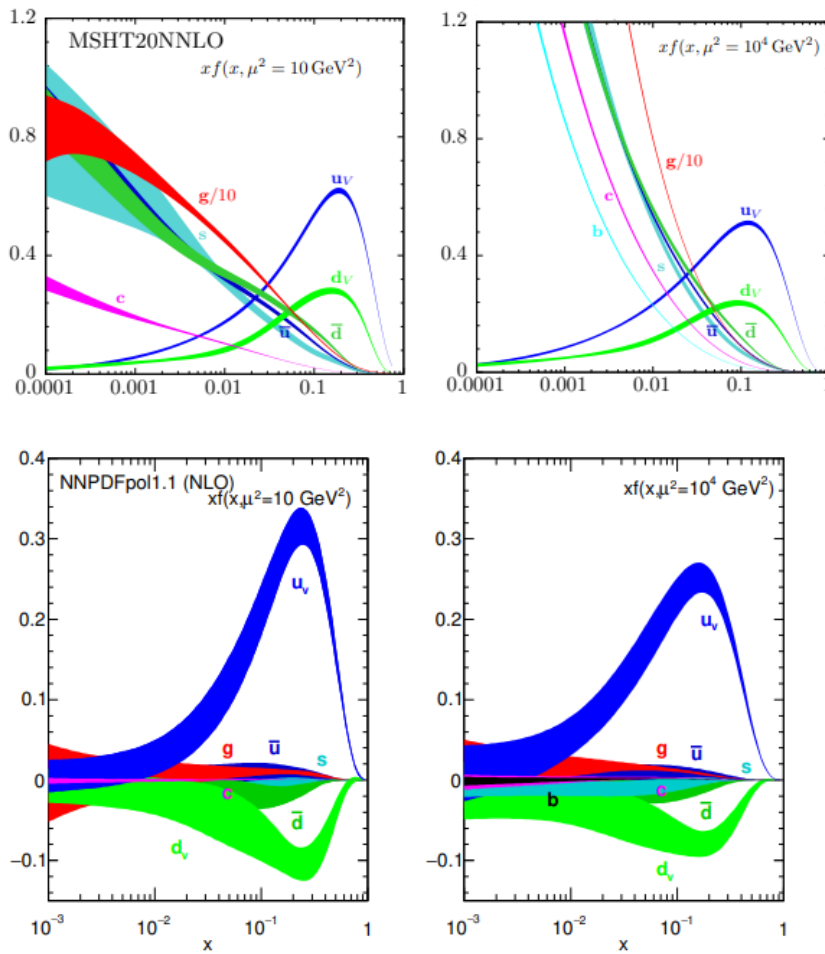
En las Ecs. 1.48 y 1.49 podemos ver que la parte simétrica de  $W_{\mu\nu}$  es independiente de la helicidad del protón, mientras que en la parte asimétrica aparece explícitamente el espín  $s$ , el cual lo podemos vincular a la helicidad  $H$  del protón en su sistema de referencia propio [28]. Esta relación asimetría-helicidad aparece en partículas de espín-1/2. Cuando sucede lo mismo para la parte leptónica de la interacción, i.e. para  $L_{\mu\nu}$ , uno encuentra que al hacer la contracción  $L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$  no pueden existir términos cruzados, i.e. donde hay espín de una partícula debe estar el espín de la otra. Por este motivo, las funciones de estructura  $F_1$  y  $F_2$  se obtienen mediante experimentos que usan partículas no polarizadas mientras que para obtener  $g_1$  y  $g_2$  es necesario utilizar un leptón y protón polarizados.

## 1.7. Fenomenología de PDFs

Las funciones de distribución de partones (PDFs) se extraen a partir del análisis de datos de procesos DIS leptón-nucleón y de procesos relacionados de dispersión dura iniciados por nucleones [14]. Este último tipo de procesos se realiza a altas energías, de modo que la interacción es a corta alcance y, usualmente, la transferencia de momento es grande. Actualmente hay alrededor de 20 procesos que se utilizan para obtener información interna de los hadrones y esta lista se ve actualizada constantemente, en gran parte gracias a los datos disponibles del LHC [29]. A medida que se dispone de datos más precisos sobre bosones y producción de pares de quarks se obtienen mejores restricciones sobre un rango cinemático más amplio, mejorando la descripción de las PDFs. Si bien los datos del LHC imponen varias restricciones, la mayoría provienen de las funciones de estructura.

A continuación detallaremos la metodología de extracción de PDFs por cinco grupos distintos: MSHT [30], NNPDF [31], CT [32], ATLAS [33] y ABMP [34]. El grupo CJ produjo PDFs a un orden siguiente al dominante (NLO del inglés *next-to-leading order*) para valores altos de  $x$  en un régimen de  $Q^2$  bajo [35]. Todos los grupos obtienen las PDFs para valores de  $Q_0^2 = 1 - 4 \text{ GeV}^2$  y luego las evolucionan con las ecuaciones que serán introducidas en la sección Sec. 1.8. Para empezar a producir las PDFs la mayoría de estos grupos empiezan con funciones de la forma  $xf = x^a(\dots)(1-x)^b$  usando entre 14 y 32 parámetros libres que serán optimizados mediante ajustes. En los casos que se usa este *ansatz* las incertezas se obtienen mediante la formulación “Hessiana”: los parámetros

libres se expanden alrededor de los mejores valores del ajuste y se obtienen variaciones a partir de combinaciones lineales de los parámetros, los cuales se derivan de grupos de autovectores ortogonales a los mejores valores del ajuste. En particular, el grupo NNPDF combina el uso de la representación de Monte Carlo de la medida de probabilidad en el espacio de las PDFs con el uso de redes neuronales. Los ajustes se realizan sobre un gran número de “réplicas” obtenidas mediante la fluctuación de puntos individuales determinada por la incerteza de los mismos. De esta manera se puede obtener un grupo de PDFs sin sesgo y la mejor predicción se calcula a partir de la curva promedio del grupo de PDFs, asociándole como incerteza su desviación estándar. Se muestran resultados de los grupos MSHT y NNPDF en la Fig. 1.5.



**Figura 1.5** Bandas de  $xf(x)$ , siendo  $f(x)$  la función de distribución de los partones  $u_v$ ,  $d_v$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{d}$ ,  $s \approx \bar{s}$ ,  $c = \bar{c}$ ,  $b = \bar{b}$  y  $g$ . Las figuras de arriba son PDFs obtenidas por el grupo MSHT a escala  $\mu^2 = 10 \text{ GeV}^2$  (izquierda) y  $\mu^2 = 10^4 \text{ GeV}^2$  (derecha). Las figuras de abajo son PDFs polarizadas obtenidas por el grupo NNPDF. Figuras extraídas de [14].



## 1.8. Ecuaciones de evolución DGLAP

Como se puede ver en la Fig. 1.5 las PDFs solamente se pueden obtener a determinadas escalas. Sin embargo, existen ecuaciones integro-diferenciales que permiten evolucionar las PDFs a cualquier escala que se requiera. Estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de evolución DGLAP (Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi) y fueron propuestas por Altarelli-Parisi en 1977 [36] como una versión más simplificada para partones de derivaciones ya existentes. Lo novedoso de su derivación fue la interpretación física de la violación de escala y el hecho de que solo requiere utilizar los vértices básicos de QCD, vistos en la Sec. 1.2. Las ecuaciones de evolución DGLAP para el caso de distribuciones no polarizadas son

$$\frac{dq^i(x, t)}{dt} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q^i(x, t) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + G(y, t) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \right], \quad (1.50)$$

$$\frac{dG(x, t)}{dt} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ \sum_{i=1}^{2f} q^i(x, t) P_{Gq}\left(\frac{x}{y}\right) + G(y, t) P_{GG}\left(\frac{x}{y}\right) \right], \quad (1.51)$$

con  $q^i$  la PDF de los quarks (el índice  $i$  corre sobre todos los quarks y antiquarks),  $G$  la PDF de los gluones y la variable  $t$  definida según  $t \equiv \ln(Q^2/Q_0^2)$ . Las funciones  $P_{ij}$  se conocen como las *funciones de división* (*splitting functions* en inglés) y dan la probabilidad de que un partón emita otro, con el partón inicial reteniendo una fracción  $x/y$  del momento inicial. El subíndice de cada función  $P_{ij}$  nota los partones salientes. Para el caso polarizado se tiene un conjunto de ecuaciones similar:

$$\frac{d\Delta q^i(x, t)}{dt} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ \Delta q^i(x, t) \Delta P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + \Delta G(y, t) \Delta P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \right], \quad (1.52)$$

$$\frac{d\Delta G(x, t)}{dt} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ \sum_{i=1}^{2f} \Delta q^i(x, t) \Delta P_{Gq}\left(\frac{x}{y}\right) + \Delta G(y, t) \Delta P_{GG}\left(\frac{x}{y}\right) \right], \quad (1.53)$$

donde las funciones de distribución se definen según

$$\Delta q^i = q_+^i - q_-^i, \quad \Delta G = G_+ - G_-, \quad \Delta P_{AB} = P_{A_+B_+} - P_{A_-B_+}. \quad (1.54)$$

# Capítulo 2

## Método LuxQED

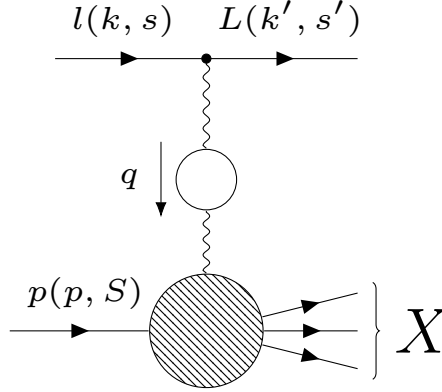
En [6] se presentan distintos métodos para obtener  $f_\gamma$  y  $f_{\Delta\gamma}$  a partir de integrales de las funciones de estructura introducidas en la sección 1.6. Se plantean dos procesos *beyond standard model* (BSM) proponiendo interacciones físicamente imposibles para un leptón y se muestra que la PDF resulta independiente del proceso. Además, obtienen la misma PDF a través de cálculo de operadores, el cual es independiente del proceso y también permite calcular contribuciones a mayores ordenes. En este trabajo nos interesa obtener  $f_{\Delta\gamma}$  a primer orden, por lo que utilizamos la simplicidad de reglas de Feynman y un proceso BSM para obtener  $f_{\Delta\gamma}$  que es exacto hasta el orden en el que trabajamos.

### 2.1. Proceso no-físico propuesto

Se propone un fotón de prueba a partir de un proceso BSM, i.e. no-físico, que se acopla a partículas del modelo estándar. Se desprecian contribuciones de interacciones débiles por lo que basta considerar el formalismo introducido en la sección 1.2. Se propone una interacción para leptones de espín-1/2, con un leptón incidente  $l$  de masa nula y otro leptón saliente  $L$  de masa  $M \gg m_p$ . Los momentos respectivos son  $k$  y  $k' = k - q$ , siendo  $q$  el momento del fotón virtual. La interacción propuesta se plantea con el término lagrangiano

$$\mathcal{L}_{BSM} = c \frac{e(\mu^2)}{\Lambda} \bar{L} \sigma^{\mu\nu} l F_{\mu\nu} + \text{h.c.}, \quad (2.1)$$

donde la constante de QED  $e$  depende de la escala de energía  $\mu$ . Además, se incluye el término conjugado para considerar el proceso inverso ( $L$  incidente,  $l$  saliente). Esta es una interacción mediada por el momento magnético, la cual presenta una violación de sabor. El momento magnético está representado por el tensor de espín  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . En la Fig. 2.1 se representa la interacción junto al proceso  $l + p \rightarrow L + X$ , a partir del cual se obtiene la PDF  $f_\gamma$ . Para obtener  $f_\gamma$  a primer orden uno debe considerar  $\Lambda \rightarrow \infty$  formalmente.



**Figura 2.1** Proceso  $l + p \rightarrow L + X$  a primer orden en  $1/\Lambda$ . Se considera la polarización de vacío en el fotón virtual. Este efecto lleva la constante de acoplamiento de QED  $\alpha$  a una función del momento  $q$   $\alpha(q^2)$ . Para obtener el caso polarizado es necesario plantear los espines de los leptones, siendo  $s$  el espín del leptón inicial  $l$  y  $s'$  el espín del leptón final  $L$ . Hacemos lo mismo para el protón, el cual tiene momento  $p$  y espín  $S$ , definido a partir de una helicidad  $H$ .

El termino de la Ec. 2.1 da un vértice de interacción

$$i \frac{ce(\mu^2)}{\Lambda} \bar{u}(k-q)[\not{\epsilon}, \not{q}]u(k), \quad (2.2)$$

siendo  $\epsilon$  el vector de polarización del fotón. A partir de la Ec. 2.2 uno puede definir un tensor leptónico  $L_{\mu\nu}$  para la transición  $l(k) \rightarrow L(k')$

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\Lambda} \text{Tr} [\not{k}[\not{q}, \gamma^\mu](\not{k}' + M)[\gamma^\nu, \not{q}]] = 2 \frac{c^2}{\Lambda} \text{Tr} [\not{k}\sigma^{\mu\alpha}q_\alpha(\not{k}' + M)\sigma^{\nu\beta}q_\beta]. \quad (2.3)$$

Calculando la traza y usando relaciones cinemáticas uno obtiene que

$$L^{\mu\nu} = \frac{4c^2}{\Lambda^2} \left[ (M^2 + Q^2)(q^\mu q^\nu - M^2 g^{\mu\nu}) + 4Q^2 k^\mu k^\nu - 2(M^2 + Q^2)(k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu) \right]. \quad (2.4)$$

Se puede hacer un chequeo rápido y observar que vale  $q_\mu L^{\mu\nu} = q_\nu L^{\mu\nu} = 0$ . Ahora, para obtener el caso polarizado debemos considerar que los leptones tienen espín definido. Planteamos que  $l$  tiene un espín  $s$  y que  $L$  presenta un espín  $s'$ , como se ve en la Fig. 2.1. Para el protón planteamos que tiene un espín  $S$ , de modo que se cumplen  $S^2 = -m_p^2$  y  $S \cdot p = 0$ . A partir de estas relaciones podemos calcular las contracciones con los momentos leptónicos  $k$  y  $k'$  y obtenemos

$$S \cdot k = -p \cdot k, \quad S \cdot q = -p \cdot q - \frac{M^2 + Q^2}{2} \frac{m_p^2}{p \cdot k}. \quad (2.5)$$

Usando  $q = k - k'$  se recupera  $S \cdot k'$ . Estas relaciones serán útiles para obtener el  $L^{\mu\nu}$  polarizado. Para obtener  $L^{\mu\nu}$  polarizado planteamos solamente la proyección de helicidad del

leptón incidente  $l$  ya que los procesos que nos interesan requieren únicamente especificar la helicidad de este leptón y la del protón (aunque para el siguiente desarrollo esta última no aparece). Ahora si incluimos el operador de proyección de helicidad  $P_s = \frac{1}{2}(1 + s\gamma^5)$ , siendo  $s = \pm$ , en la Ec. 2.4 obtenemos

$$L_{pol}^{\mu\nu} = 2\frac{c^2}{\Lambda} \text{Tr} \left[ \frac{1 - s\gamma^5}{2} \not{k} \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha (\not{k}' + M) \sigma^{\nu\beta} q_\beta \right]. \quad (2.6)$$

Desarrollando la traza uno llega a la expresión de  $L_{pol}^{\mu\nu}$  que nos interesa contraer con el tensor hadrónico  $W_{\mu\nu}$

$$L_{pol}^{\mu\nu} = \frac{4c^2}{\Lambda^2} \left[ (M^2 + Q^2)(q^\mu q^\nu - M^2 g^{\mu\nu}) + 4Q^2 k^\mu k^\nu - 2(M^2 + Q^2)(k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu) - i2sM^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho q_\sigma \right]. \quad (2.7)$$

Se ve del último término de la Ec. 2.7 que el tensor leptónico deja de ser simétrico y no se cancela al contrar con  $q$ . En particular será este término el que nos importe para obtener  $f_{\Delta\gamma}$  ya que el resto se cancela al calcular la diferencia entre  $\sigma_{l_{RPH}}$  y  $\sigma_{l_{LPH}}$ .

## 2.2. Cálculo de PDF polarizada

Nuestro objetivo ahora es obtener la sección eficaz  $\sigma_{lp}$  y, subsecuentemente, la diferencia  $\sigma_{l_{RPH}} - \sigma_{l_{LPH}}$  para poder extraer de esta última diferencia la PDF polarizada  $f_{\Delta\gamma}$ . La sección eficaz del proceso propuesto, esquematizado en 2.1, se escribe incluyendo todas las correcciones de QED según

$$\sigma_{lp}(p) = \frac{1}{4p \cdot k} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e_{ph}^4(q^2)}{q^4} (4\pi) W^{\mu\nu}(q, p) L_{\mu\nu}(q, k) 2\pi \delta((k - q)^2 - M^2) \theta(k^0 - q^0) \theta((p + q)^2 - m_p^2) \theta(p^0 + q^0). \quad (2.8)$$

Las polarizaciones de vacío están consideradas dentro de  $e_{ph}^2(q^2) = e^2/[1 - \Pi(q^2, \mu)]$  y en lo que sigue del desarrollo trabajamos con  $\alpha_{ph}(q^2) = e_{ph}^2(q^2)/4\pi$ . Es importante notar que si bien las polarizaciones dadas por el factor  $1/[1 - \Pi(q^2, \mu)]$  dependen de la escala  $\mu$  el factor  $e_{ph}^2$  solamente depende de  $q^2$ . A esta renormalización de la constante de acoplamiento de QED se le da el subíndice “ph” para notar que es el valor físico medible. Luego, el factor que acompaña a la integral es el flujo de energía del proceso, las funciones  $\delta$  están para fijar las masas y las  $\theta$  aparecen para asegurar energías positivas, así como garantizar que  $m_X^2 \geq m_p^2$ .

La contracción entre ambos tensores se puede seguir a partir de sus definiciones en las Ecs. 1.48 y 2.4 para el caso no polarizado o de 2.7 para el caso polarizado. Sin embargo, desarrollar previamente el espacio de fase facilita la cuenta. Siguiendo de la Ec. 2.8, el espacio de fase está dado por

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} 2\pi \delta((k - q)^2 - M^2) \theta(k^0 - q^0) \theta((p + q)^2 - m_p^2) \theta(p^0 + q^0). \quad (2.9)$$

Es conveniente definir las siguientes variables

$$x = \frac{M^2}{2p \cdot k}, \quad z = \frac{x}{x_{\text{bj}}} \quad (2.10)$$

donde  $x_{\text{bj}} = Q^2/(2p \cdot q)$  es la variable de Bjorken. Se puede ver de la definición que  $x$  tiene una forma similar a la variable de Bjorken pero donde  $x_{\text{bj}}$  se interpreta como la fracción de momento de un partón la nueva variable  $x$  es particularmente la fracción de momento del fotón como partón del protón. Con estas nuevas variables uno puede desarrollar la expresión vista en la Ec. 2.9 y, mediante un cambio de coordenadas, llegar a una expresión del espacio de fase donde las integrales se realicen sobre  $Q^2$  y  $x_{\text{bj}}$  (o  $z$ ). Este desarrollo se muestra con detalle en el apéndice A. Entonces, las integrales del espacio de fase se pueden llevar a la forma

$$\frac{1}{16\pi^2 M^2} \int_x^{1-\frac{2xm_p}{M}} dz \int_{Q_{\text{min}}^2}^{Q_{\text{max}}^2} dQ^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi}, \quad (2.11)$$

donde  $\phi$  es el ángulo de dispersión de la interacción y los límites de integración de  $Q^2$  están dados por

$$Q_{\text{min}}^2 = \frac{x^2 m_p^2}{1-z} \frac{2}{1 - \frac{2x^2 m_p^2}{(1-z)M^2} + \sqrt{1 - \frac{4x^2 m_p^2}{(1-z)^2 M^2}}}, \quad Q_{\text{max}}^2 = M^2 \left( \frac{1-z}{z} \right) \frac{1 - \frac{2x^2 m_p^2}{(1-z)M^2} + \sqrt{1 - \frac{4x^2 m_p^2}{(1-z)^2 M^2}}}{2 \left( 1 + \frac{x^2 m_p^2}{zM^2} \right)}. \quad (2.12)$$

Los límites de integración para  $z$  y  $Q^2$  se pueden simplificar viendo que sus expresiones dependen de un cociente entre masas que cumple  $m_p/M \ll 1$ . Por lo tanto, se ve que bajo esta expansión  $z$  corre entre  $x$  y 1 mientras que los límites de  $Q^2$  resultan ser

$$Q_{\text{min}}^2 \rightarrow \frac{x^2 m_p^2}{1-z}, \quad Q_{\text{max}}^2 \rightarrow M^2 \frac{1-z}{z}. \quad (2.13)$$

El resultado de  $\sigma_{lp}$  para el caso no polarizado se puede ver en [6] y resulta ser dependiente únicamente de las funciones de estructura  $F_1$  y  $F_2$ <sup>1</sup>. Como nos interesa el caso polarizado continuamos directamente con la diferencia entre las secciones eficaces  $\sigma_{l_{RPH}}$  y  $\sigma_{l_{LPH}}$ . A partir de la Ec. 2.8 y utilizando el espacio de fase de la Ec. 2.11 junto a la contracción de 1.48 con 2.7 la diferencia resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\sigma_{l_{RPH}} - \sigma_{l_{LPH}}] &= \frac{1}{2\pi\alpha(\mu^2)} \sigma_0 \int_x^1 \frac{dz}{z} \int_{Q_{\text{min}}^2}^{Q_{\text{max}}^2} \frac{dQ^2}{Q^2} \alpha_{\text{ph}}^2(-Q^2) \\ &\left\{ H \left( 4 - 2z - \frac{4m_p^2 x^2}{Q^2} - \frac{4m_p^2 x^2 Q^2}{M^4} - \frac{8m_p^2 x^2}{M^2} - \frac{2zQ^2}{M^2} \right) x g_1(x/z, Q^2) \right. \\ &\left. - H \left( \frac{8m_p^2 x^2}{zM^2} + \frac{8m_p^2 x^2}{zQ^2} \right) x g_2(x/z, Q^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

<sup>1</sup>En realidad resulta favorable expresar este resultado en términos de una combinación lineal entre  $F_1$  y  $F_2$  en reemplazo de  $F_1$  pero como en este trabajo el objetivo no es esta cuenta decidimos no detallarla en profundidad.

Nótese que se suprimen términos que sean del tipo  $m_p/M$  en los límites de integración, no hay dependencia del ángulo  $\phi$  y que las funciones de estructura  $g_1$  y  $g_2$  dependen de  $x_{bj}$  y  $Q^2$  pero por la elección de variables es necesario escribir  $x_{bj} = x/z$ . La constante  $\sigma_0$  se define

$$\sigma_0 \equiv \frac{4\pi c^2 e^2(\mu^2)}{\Lambda^2}, \quad (2.15)$$

la cual absorbe las constantes de la interacción definidas en 2.2. Dado que solamente se integra en  $z$  y  $Q^2$  el resultado final depende de  $x$  pero esta valor queda fijo gracias a  $M$  y a  $2p \cdot k = s - m_p$  siendo  $\sqrt{s}$  la energía del centro de masa.

Para poder extraer la PDF polarizada  $f_{\Delta\gamma}$  volvemos a las secciones eficaces partónicas  $\hat{\sigma}_{li}$  definidas en la Ec. 1.41 donde introducimos la sección eficaz leptón-hadrón como una suma de secciones eficaces leptón-partones. De esta manera, podemos describir  $\sigma_{l_h p_H}$  (con  $h = R, L$ ) a través de

$$\sigma_{l_h p_H}(p) = \sum_{i_s} \int dy \hat{\sigma}_{l_h i_s}(yp) f_{i_s/p_H}(y, \mu^2), \quad (2.16)$$

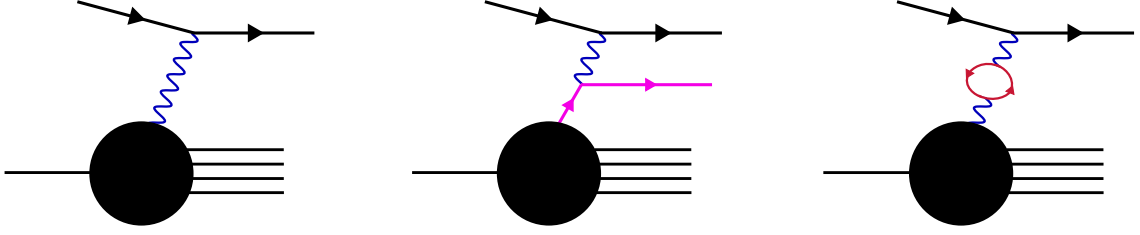
donde la suma sobre  $i_s$  se realiza considerando todos los partones y sus helicidades. Hasta ahora estuvimos utilizando la notación  $f_{\Delta\gamma}$  para la PDF polarizada del fotón pero la notación es general para cualquier partón<sup>2</sup>, siendo que se define como  $f_{\Delta i} \equiv f_{i_R/p_H} - f_{i_L/p_H}$ . Se debe que tener en cuenta que si se renormaliza en el esquema  $\overline{\text{MS}}$  el resultado final de las PDF también se encuentra en este esquema. Como vamos a trabajar hasta primer orden en las constantes de acoplamiento vamos a expandir la Ec. 2.8 en estas constantes, despreciando términos que van como  $m_p^2/M^2$ . De esta manera, obtenemos el siguiente desarrollo

$$\sigma_{lp}(p) = \int dy \hat{\sigma}_{l\gamma}^{(0,0)}(yp) f_\gamma(x, \mu^2) + \frac{\alpha(\mu^2)}{2\pi} \sum_{j \in \{q, l\}} \int dy \hat{\sigma}_{lj}^{(0,1)}(yp) f_j(x, \mu^2), \quad (2.17)$$

donde seguimos manteniendo el factor de escala  $\mu$  libre ya que todavía no la fijamos. Los diagramas correspondientes a  $\hat{\sigma}_{l\gamma}^{(0,0)}$  y  $\hat{\sigma}_{lj}^{(0,1)}$  se esquematizan en la Fig. 2.2. El primero de ellos es la contribución a orden más bajo en esta interacción, donde el único partón que puede formar parte es el fotón y se tiene directamente la PDF  $f_\gamma$ . Luego, el segundo diagrama se corresponde al siguiente orden en  $\alpha$ , que incluye las PDFs de los fermiones cargados. En el esquema  $\overline{\text{MS}}$  el término del tercer y último diagrama se anula ya que el fotón se considera *on-shell* y la polarización de vacío es directamente nula. Por esta razón, la suma en la Ec. 2.17 se considera para  $j \in \{q, l\}$ , donde  $q$  representa a los quarks y  $l$  a los leptones<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Otra notación usual es simplemente  $\Delta\gamma$ , dejando la  $f$ . Análogo para el resto de partones.

<sup>3</sup>No confundir esta notación general de leptones con el leptón  $l$  de masa nula considerado en el proceso BSM propuesto.



**Figura 2.2** Diagramas de Feynman para interacción leptón-partón hasta primer orden en  $\alpha_s$ , según el conteo fenomenológico. Se representan los diagramas a orden más bajo y la polarización de vacío que se suprime si se renormaliza según el esquema  $\overline{\text{MS}}$ .

La cuenta que estamos desarrollando se realiza dentro de un conteo de potencias “democrático”, en el sentido que se consideran  $\alpha$  y  $\alpha_s$  del mismo orden y que todas las PDF son del mismo orden. Sin embargo, en el estudio fenomenológico se debe considerar que  $\alpha$  es menor que  $\alpha_s$ , siguiendo como guía  $\alpha \approx \alpha_s^2$ . Con este conteo se tiene que la PDF del fotón es de orden  $\alpha L$  con respecto a las PDF de los quarks, siendo  $L$  un logaritmo de  $\mu^2$  sobre alguna escala hadrónica (e.g.  $m_p^2$ ). Se puede asumir que  $L \approx 1/\alpha_s$  y, en tal caso, los diagramas de la Figura 2.2 son de orden  $\alpha^2 L$ ,  $\alpha^2$  y  $\alpha^3 L \approx \alpha^2 \alpha_s$ , respectivamente. Luego, si uno quisiera una corrección de mayor orden esta sería de un orden  $1/L \approx \alpha_s \approx \sqrt{\alpha}$  mayor en vez de un orden  $\alpha$  como en el conteo anterior.

Volviendo a la Ec. 2.17, necesitamos ahora las secciones eficaces partónicas. Se tiene que  $f_{\Delta\gamma}$  es de orden  $\alpha$  por lo que solo necesitamos el orden más bajo de la dispersión dura (*hard-scattering*)

$$\frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{l_R\gamma R} - \hat{\sigma}_{l_L\gamma R}] = \sigma_0 M^2 \delta(s - M^2), \quad (2.18)$$

para la cual se tiene  $z = x/y$  y  $x = M^2/s$ . Luego, la asimetría de polarización a orden  $\alpha\sigma_0$  resulta ser

$$\frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{l_RqR} - \hat{\sigma}_{l_LqR}] = \frac{\alpha(\mu)\sigma_0}{2\pi} \left\{ z(2-z) \left[ -\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{M^2(1-z)^2}{z\mu^2} \right] - 3z(1-z) \right\}, \quad (2.19)$$

donde el término  $1/\epsilon$  denota divergencias IR. Introduciendo las Ecs. 2.18 y 2.19 en 2.17 podemos obtener la diferencia de secciones eficaces desde el modelo de partones y aplicando la substracción  $\overline{\text{MS}}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\sigma_{l_RpH} - \sigma_{l_LpH}] = \sigma_0 H \left\{ x f_{\Delta\gamma}(x, \mu^2) + \frac{\alpha(\mu)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[ z(2-z) \ln \left( \frac{M^2(1-z)^2}{z\mu^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - 3z(1-z) \right] \times \sum_i e_i^2 \frac{x}{z} f_{\Delta i} \left( \frac{x}{z}, \mu^2 \right) + \mathcal{O}(\alpha\alpha_s) \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

El paso siguiente consiste en definir una nueva factorización para tratar los problemas que conlleva realizar este cálculo con un proceso BSM. Definimos el esquema de “factorización física” (*physical factorization* en inglés) suprimiendo aquellos términos que van

como  $1/M^2$  (y el factor dimensional  $\sigma_0$ ) de la Ec. 2.14

$$f_{\Delta\gamma}^{\text{PF}}(x, \mu^2) = \frac{1}{2\pi\alpha(\mu^2)} \int_x^1 \frac{dz}{z} \int_{Q_{\min}^2}^{\frac{\mu^2}{1-z}} \frac{dQ^2}{Q^2} \alpha_{\text{ph}}^2(-Q^2) \left\{ \left(4 - 2z - \frac{4m_p^2 x^2}{Q^2}\right) g_1(x/z, Q^2) - \left(\frac{8m_p^2 x^2}{zQ^2}\right) g_2(x/z, Q^2) \right\}, \quad (2.21)$$

donde la escala  $\mu$  elegida debe ser  $\mu \sim M$  o, de manera inversa, proponer una masa  $M \sim \mu$  si se fija la escala desde un principio. En esta factorización se intercambia el límite de integración superior de  $Q^2$  por  $\mu^2/(1-z)$ . La idea detrás de esta factorización es separar la integral de la Ec. 2.14 en términos de la integral dada en la Ec. 2.21 y los términos restantes. Estos últimos solo tienen contribuciones de  $Q^2$  del orden de  $M^2$  dado que consideramos  $\mu \sim M$  y, por ende, no se tienen logaritmos grandes. Ahora, como  $Q^2$  es grande dentro del rango de integración  $[\frac{\mu^2}{1-z}, \frac{M^2(1-z)}{z}]$  se pueden hacer los reemplazos  $g_1(x/z, Q^2)$  por  $g_1(x/z, \mu^2)$  y  $\alpha_{\text{ph}}(-Q^2)$  por  $\alpha_{\text{ph}}(-\mu^2) = \alpha(\mu^2)$  hasta correcciones de orden  $\alpha_s(\mu^2)$  y  $\alpha(\mu^2)$ . De esta manera se simplifica la integral sobre  $Q^2$  en el rango restante y podemos reescribir 2.14 según

$$\frac{1}{2}[\sigma_{l_{RPH}} - \sigma_{l_{LPH}}] = \sigma_0 H x f_{\Delta\gamma}^{\text{PF}}(x, \mu^2) + \frac{\alpha(\mu^2)}{2\pi} \sigma_0 H \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ + 2(2-z) \ln\left(\frac{M^2(1-z)^2}{z\mu^2}\right) - 2(1-z) \right\} x g_1(x/z, \mu^2). \quad (2.22)$$

Con esta factorización adecuada podemos extraer  $f_{\Delta\gamma}$  de la Ec. 2.20 igualandola a la Ec. 2.22. Sin embargo, necesitamos identificar  $g_1$  en la Ec. 2.20. Esta función de estructura se define según

$$g_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dy dz \delta(yz - x) [C_{\Delta q}(y) \otimes f_{\Delta q}(z, Q^2) + C_{\Delta g}(y) \otimes f_{\Delta g}(z, Q^2)] \quad (2.23)$$

donde la suma se hace sobre todos los quarks  $q = u, d, c, s, b, t$ , siendo  $e_q$  sus respectivas cargas y  $f_{\Delta q}$  sus PDF polarizadas (igual para la PDF del gluón  $f_{\Delta g}$ ). Al orden que nos interesa debemos usar como coeficientes  $C_{\Delta q} = \delta(1-z)$ . Esta identificación nos permite igualar 2.20 y 2.22, a partir de la cual obtenemos

$$f_{\Delta\gamma}(x, \mu^2) = \frac{1}{2\pi\alpha(\mu^2)} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ \int_{Q_{\min}^2}^{\frac{\mu^2}{1-z}} \frac{dQ^2}{Q^2} \alpha_{\text{ph}}^2(Q^2) \left[ \left(4 - 2z - \frac{4m_p^2 x^2}{Q^2}\right) g_1(x/z, Q^2) - \left(\frac{8m_p^2 x^2}{zQ^2}\right) g_2(x/z, Q^2) \right] + \alpha^2(\mu^2) 4(1-z) g_1(x/z, \mu^2) \right\}. \quad (2.24)$$

Nótese que el último factor dentro de las llaves no está siendo integrado en  $Q^2$  y solamente se integra en  $z$ . Finalmente, pudimos extraer la distribución que nos interesa calcular.



# Capítulo 3

## Cálculo fenomenológico

El resultado que obtuvimos de la PDF polarizada del fotón en la Ec. 2.24 contempla un amplio rango en los parámetros  $Q^2$  y  $x$  para los cuales se necesita conocer las funciones de estructura  $g_1$  y  $g_2$  como funciones de  $x$  y  $Q^2$ . Para lograr esto hacemos uso de modelos fenomenológicos en conjunto con datos experimentales. Nuestro estudio está dividido en 3 regiones: una región elástica, una región de resonancias con un continuo de bajo  $Q^2$  y una última región continua de alto  $Q^2$ . Definimos la variable  $W$  para separar las regiones según

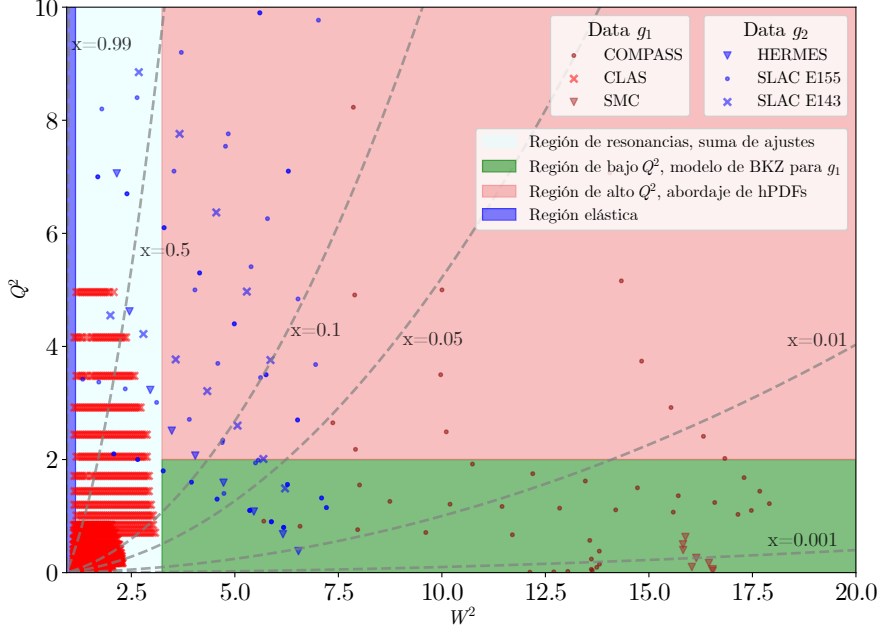
$$W^2 = m_p^2 + \frac{1 - x_{bj}}{x_{bj}} Q^2. \quad (3.1)$$

La región elástica se establece a partir de  $W^2 < (m_p + m_{\pi^0})^2 \approx 1,15 \text{ GeV}^2$ . La región de resonancias en el rango  $(m_p + m_{\pi^0})^2 \approx 1,15 \text{ GeV}^2 < W^2 < W_{\text{res}}^2 = 3,24 \text{ GeV}^2$  y el continuo de bajo  $Q^2$  se rige por  $W^2 > W_{\text{res}}^2$  y  $Q^2 < Q_{\text{per}}^2 = 2 \text{ GeV}^2$ . Finalmente la región de alto  $Q^2$  está dada por  $Q^2 > Q_{\text{per}}^2$  y  $W^2 > W_{\text{res}}^2$ . Esta última región es la única que puede utilizar un desarrollo perturbativo como aproximación para las funciones  $g_1$  y  $g_2$ . En todas las regiones es necesario evolucionar la constante de acoplamiento  $\alpha$  y para ello utilizamos el desarrollo de esta al orden más bajo (*leading order* LO) con la condición inicial dada por  $\alpha(\text{Rb}) = (137,035998995)^{-1}$ , siendo Rb la masa de un átomo de  $^{87}\text{Rubidio}$  [37, 38]. En la Fig. 3.1 se puede ver la distribución de los datos en el espacio de parámetros.

El cálculo de  $f_{\Delta\gamma}$  se realiza en `Python`, utilizando `SciPy` como librería de cálculo integral. Las funciones dadas por esta librería están basadas en `Quadpack`, paquete de `Fortran` con subrutinas de cálculo integral [39].

### 3.1. Región elástica

Como fue mencionado previamente, la región elástica comprende los procesos que cumplen la restricción  $W^2 < (m_p + m_{\pi^0})^2 \approx 1,15 \text{ GeV}^2$ . En particular, esta restricción nos permite describir las funciones  $g_1$  y  $g_2$  a partir de los factores de forma eléctrico y



**Figura 3.1** Espacio de parámetros  $(W^2, Q^2)$  en conjunto con los datos utilizados para el cálculo fenomenológico de  $f_{\Delta\gamma}$ . Para distinguir las regiones analizadas se remarca en verde claro la región de resonancias, en verde oscuro la región de bajo  $Q^2$  con modelo BKZ, en rojo la región de alto  $Q^2$  y en azul la región elástica. Los puntos rojos representan datos medidos de  $g_1$  en COMPASS [40] (círculos), CLAS [41, 42] (cruces) y SMC [43, 44] (triángulos). Los puntos azules representan los datos medidos de  $g_2$  en las colaboraciones de SLAC E143 [45] (cruces), SLAC E155 [46, 47] (círculos) y de HERMES [48] (triángulos).

magnético de Sachs  $G_E$  y  $G_M$  respectivamente [49]

$$g_1^{ela} = \frac{1}{2} \frac{G_E(Q^2)G_M(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} \delta(1 - x_{bj}), \quad (3.2)$$

$$g_2^{ela} = \frac{\tau}{2} \frac{G_E(Q^2)G_M(Q^2) - G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} \delta(1 - x_{bj}), \quad (3.3)$$

donde se define  $\tau = Q^2/(4m_p^2)$  como una función de  $Q^2$ . Es importante notar que las funciones  $\delta$  implican que el electrón interactúa directamente con el protón, por lo que se está despreciando la radiación de este último. Sin embargo, considerar la emisión de fotones del protón implica una corrección de mayor orden y esto va más allá del nivel de precisión de nuestro cálculo. Ahora solo resta reemplazar las Ecs. 3.2 y 3.3 en 2.24 para lo cual es necesario utilizar la igualdad  $\delta(1 - x_{bj}) = z\delta(z - x)$ , la cual surge directamente

de propiedades de la  $\delta$  y de la definición de  $z$ . Entonces,

$$f_{\Delta\gamma}(x, \mu^2) = \frac{1}{2\pi\alpha(\mu^2)} \int_{Q_{\min}^2}^{\frac{\mu^2}{1-x}} \frac{dQ^2}{q^2} \alpha_{\text{ph}}^2(Q^2) \left[ \frac{G_E(Q^2)G_M(Q^2)}{1+\tau} \left(2 - 2x - \frac{2m_p^2 x^2}{Q^2}\right) + \frac{\tau G_M^2(Q^2)}{1+\tau} \left(2 - 2\frac{2m_p^2 x^2}{Q^2}\right) \right]. \quad (3.4)$$

A este punto es necesario tomar una definición de los factores de forma  $G_E$  y  $G_M$  y para eso se propone el siguiente modelo conocido como *forma dipolar*:

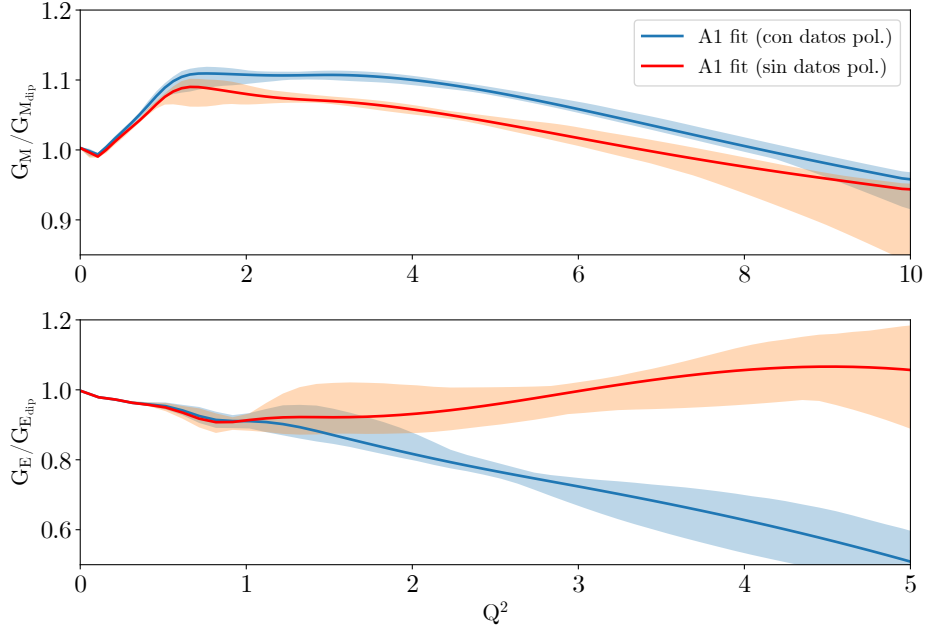
$$G_E(Q^2) = \frac{1}{(1 + Q^2/m_{\text{dip}}^2)}, \quad G_M(Q^2) = \mu_p G_E(Q^2), \quad (3.5)$$

siendo  $m_{\text{dip}} = 0,71 \text{ GeV}^2$  y  $\mu_p \approx 2,793$  el momento magnético anómalo del protón. Esta fórmula es exacta únicamente para  $Q^2 = 0$ , i.e.  $G_E(0) = 1$  y  $G_M(0) = \mu_p$  son valores exactos. Para cualquier otro valor el modelo es una aproximación. En [6] y en los resultados que nosotros obtenemos en el Cap. 4 se ve que la región elástica tiene gran influencia en los resultados finales, por lo que consideramos que es necesario tomar factores de forma más precisos. Para lograr esto se proponen utilizar los ajustes experimentales a los factores de forma publicados por la colaboración A1 [50]. Los datos de A1 están limitados hasta  $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$  pero en su publicación también incluyen un ajuste global hasta  $Q^2 \sim 10 \text{ GeV}^2$ . Luego, más allá de  $10 \text{ GeV}^2$  fijamos los valores de  $G_E$  y  $G_M$  al valor que tienen para  $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ . En la Fig. 3.2 se muestran los ajustes a los factores de forma normalizados a las expresiones dipolares, introducidas en la Ec. 3.5. Se incluyen los dos ajustes realizados por la colaboración A1, uno presenta datos no-polarizados (en rojo) y el otro presenta datos polarizados (en azul). Para llevar a cabo el estudio fenomenológico decidimos utilizar el ajuste con datos polarizados dado que provee un mejor marco de trabajo para realizar tal cálculo<sup>1</sup>. Además, en la Fig. 3.2 también se puede apreciar las bandas de error para cada ajuste. Estos errores son propagados al realizar el cálculo del error en nuestro resultado de la PDF polarizada del fotón. Para realizar esta propagación se considera que los errores en ambos ajustes están completamente correlacionados, como se propone en [6]. Luego, la variación de estos nos darán la incerteza de esta región en nuestro resultado.

## 3.2. Región de resonancias y continuo de bajo $Q^2$

La región de resonancias está caracterizada por  $(m_p + m_{\pi^0})^2 < W_{\text{res}}^2 = 3,24 \text{ GeV}^2$ , mientras que la región continua de bajo  $Q^2$  se corresponde a  $W^2 > (m_p + m_{\pi^0})^2$  y  $Q^2 < Q_{\text{per}}^2 = 2 \text{ GeV}^2$ . Dado que la aproximación perturbativa no se puede aplicar en estos rangos nos vemos obligados a utilizar mediciones y modelos fenomenológicos.

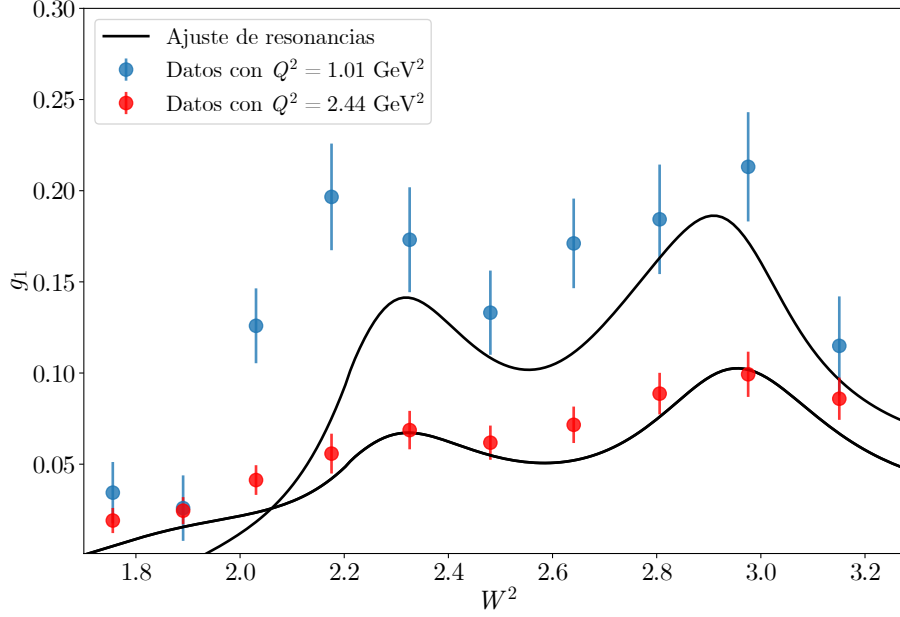
<sup>1</sup>Este ajuste provee restricciones más fuertes a las contribuciones de intercambio de 2 fotones (Two-Photon Exchange), aporte que es fuertemente discutido en [50].



**Figura 3.2** Ajustes de  $G_E(Q^2)$  y  $G_M(Q^2)$  de la colaboración A1, realizados sobre datos no polarizados y polarizados [50]. Los ajustes están normalizados por su expresión dipolar, Ec. 3.5, para evidenciar la variación de los experimentos de esta aproximación.

En el sector de resonancias los modelos de  $g_1$  y  $g_2$  se realizaron como una suma de términos resonantes. Estos fueron extraídos de ajustes realizados sobre mediciones. Los autores de [51] publicaron un código para realizar el cálculo de las funciones de estructura dentro de la región que ya establecimos como la de resonancias, i.e.  $W < W_{\text{res}} = 1,8 \text{ GeV}$ . Los ajustes utilizan mediciones dadas por la colaboración CLAS [41, 42], donde solamente se utilizaron protones longitudinalmente polarizados como blancos. Debido a esto,  $g_1$  se infiere a partir de un ajuste global sobre datos mundiales<sup>2</sup> de  $g_2$ . También utilizan datos de las siguientes colaboraciones: RSS [52, 53], SANE [54] y Jefferson Lab Hall A g2p [55]. En estos experimentos se determinaron las asimetrías  $A_{\parallel}$  y  $A_{\perp}$  a partir de las cuales se pueden reconstruir  $g_1$  y  $g_2$ . Se pueden ver varios de estos datos en la Fig. 3.1. Sin embargo, este modelo de ajustes solamente es aplicable para valores de  $Q^2 < 7,5 \text{ GeV}^2$ , según se detalla en [51]. Por ende, se utiliza un modelo perturbativo para valores más altos. Este modelo se detalla en la Sec. 3.3. Aún así, por la restricción anterior de  $W^2 < W_{\text{per}}^2$  esta nueva condición resulta en valores altos de  $x$  y para estos valores las funciones de estructura son casi nulas y los efectos de resonancia decaen. Por lo tanto, se espera que esta elección de modelo no altere significativa el resultado. En la Fig. 3.3 se muestra el modelo de ajustes para 2 subgrupos de datos de CLAS [41], uno para  $Q^2 = 1,01 \text{ GeV}^2$  y otro para  $Q^2 = 2,44 \text{ GeV}^2$ .

<sup>2</sup> *World data* en inglés, se refiere a muchos (si no son todos) datos disponibles públicamente.



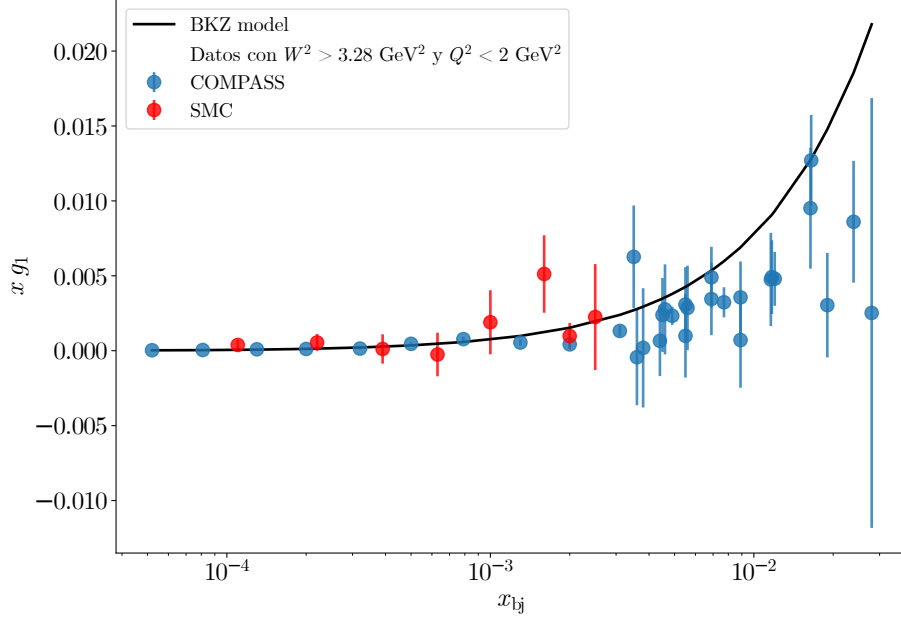
**Figura 3.3** Ajustes de resonancias en  $g_1$  [51] para subgrupos de mediciones de CLAS [41]. Los datos en azul se corresponden a  $Q^2 = 1,01 \text{ GeV}^2$  y los datos en rojo se corresponden a  $Q^2 = 2,44 \text{ GeV}^2$ .

La región de bajo  $Q^2$  no presenta tantas mediciones como la región de resonancias, comparación que se aprecia en la Fig. 3.1. Debido a esto no podemos modelar esta región mediante ajustes y nos vemos obligados a utilizar un modelo fenomenológico. Utilizamos el modelo BKZ [56-58] para describir  $g_1$ . Este se basa en ideas de *Vector Meson Dominance* (VMD) [59], que a su vez es un modelo construido para tratar con interacciones fotón-hadrón. De esta manera, se describe  $g_1$  según

$$\begin{aligned}
g_1^{\text{BKZ}}(x_{\text{bj}}, Q^2) = & C \left[ \frac{4}{9} \left( \Delta u_{\text{val}}^{(0)}(x_{\text{bj}}) + \Delta \bar{u}^{(0)}(x_{\text{bj}}) \right) + \frac{1}{9} \left( \Delta d_{\text{val}}^{(0)}(x_{\text{bj}}) + \Delta \bar{d}^{(0)}(x_{\text{bj}}) \right) \right] \frac{M_\rho^4}{(Q^2 + M_\rho^2)^2} \\
& + C \left[ \frac{2}{9} \Delta \bar{s}^{(0)}(x_{\text{bj}}) \right] \frac{M_\phi^4}{(Q^2 + M_\phi^2)^2} \\
& + g_1^{\text{per}}(x_{\text{bj}}, Q^2),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde  $\Delta q^{(0)}$ , con  $q = u, d, s$  son las PDF polarizadas evaluadas a  $Q_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$ ,  $M_\phi$  y  $M_\rho$  son las masas de los mesones  $\phi$  y  $\rho$  respectivamente y  $g_1^{\text{per}}$  es una extrapolación de la función de estructura del modelo de QCD mejorado a valores arbitrarios de  $Q^2$  y  $x$ . El parámetro  $C$  se puede calcular a partir de la regla de sumatoria DHGHY [56, 60] pero podemos ajustarlo a partir de mediciones. Luego, para la parametrización de la parte perturbativa de la Ec. 3.6 (tanto para  $g_1^{\text{per}}$  como para las PDF) se utiliza el conjunto de PDFs DSSV [1, 22] con las correcciones de QED introducidas en [61]. En [40] se

utiliza este modelo en la región de bajo  $Q^2$  y obtienen resultados en concordancia con los experimentos. En la Fig. 3.4 se muestran las mediciones disponibles para la región de bajo  $Q^2$ , obtenidas de las colaboraciones COMPASS [40, 62] (círculos azules) y SMC [43, 44] (círculos rojos). También se grafica el modelo BKZ, evidenciando cualitativamente cuán bien describe los resultados experimentales. A partir de esta concordancia entre el modelo y los datos podemos evaluar  $g_1$  en puntos donde todavía no hay datos disponibles.



**Figura 3.4** Comparación del modelo BKZ para  $g_1$  a los datos experimentales. Los datos son de las colaboraciones COMPASS [40, 62] (círculos azules) y SMC [43, 44] (círculos rojos). El modelo BKZ, explícito en la Ec. 3.6, presenta un parámetro  $C$  que fue ajustado a partir de los datos y de la parametrización perturbativa usando el conjunto de PDFs DSSV con correcciones de QED para la evolución [1, 61].

Para combinar el modelo de resonancias y el de bajo  $Q^2$  utilizamos dos escalas de transición para suavizar el paso entre ambas regiones, como se propone en [6]. Se definen  $W_{\text{low}}^2 = 3 \text{ GeV}^2$  y  $W_{\text{hi}}^2 = 4,5 \text{ GeV}^2$  y la transición se describe a partir de

$$g_1 = \begin{cases} g_1^{\text{res}} & W^2 < W_{\text{low}}^2, \\ (1 - \rho(W^2))g_1^{\text{res}} + \rho(W^2)g_1^{\text{BKZ}} & W_{\text{low}}^2 < W^2 < W_{\text{hi}}^2, \\ g_1^{\text{BKZ}} & W_{\text{hi}}^2 < W^2, \end{cases} \quad (3.7)$$

siendo  $g_1^{\text{res}}$  el modelo fenomenológico de resonancias [51] y la función  $\rho(W^2)$  definida a partir de

$$\rho(W^2) = 2\omega^2 - \omega^4, \quad \omega = \frac{W^2 - W_{\text{low}}^2}{W_{\text{hi}}^2 - W_{\text{low}}^2}. \quad (3.8)$$

Con ambos modelos y su transición ahora somos capaces de calcular  $g_1$  en ambas regiones de resonancias y bajo  $Q^2$ . A la vez, vamos a utilizar el mismo tipo de transición entre las regiones continuas de bajo y alto  $Q^2$ , donde  $g_1^{\text{BKZ}}$  será reemplazado por el modelo perturbativo que describiremos en la siguiente sección.

Nos falta ver la contribución de  $g_2$  en estas regiones pero la situación es más delicada pues los datos experimentales disponibles son considerablemente menos que los disponibles para  $g_1$  y, además, no hay modelo fenomenológico que describa satisfactoriamente su comportamiento en estas regiones. Sin embargo, podemos estimar el orden de sus contribuciones en la Ec. 2.24 a partir del coeficiente que la acompaña. Definiendo  $r = \frac{8m_p^2 x^2}{zQ^2}$  se puede ver que  $r \leq \frac{2m_p^2}{W_{\text{res}}^2 - m_p^2} \approx 0,75$  en la región continua de bajo  $Q^2$ . Dado que el coeficiente que multiplica a  $g_1$  es de un orden mayor ( $\sim 4$ ) podemos despreciar la contribución de  $g_2$  en esta región. En la región de resonancias no podemos despreciar  $g_2$  pues  $r$  puede tomar valores más altos y resultar comparable a  $g_1$ . Para determinar la incerteza de  $g_1$  y  $g_2$  se realizó lo siguiente: ubicamos los  $N_{\text{datos}} = 5$  más cercanos al punto en el cual se están evaluando los funciones de estructura y ahí calculamos el promedio de las incertezas experimentales pertinentes a los datos disponibles. De esta manera le asignamos una incerteza a cada punto de las funciones de estructura que calculamos. Por último, este error se propaga al resultado final de  $f_{\Delta\gamma}$ .

### 3.3. Región perturbativa

La región continua de alto  $Q^2$ , previamente definida a partir de  $Q^2 > Q_{\text{per}}^2 = 2 \text{ GeV}^2$  y  $W^2 > W_{\text{res}}^2 = 3,24 \text{ GeV}^2$ , presenta la particularidad de que las funciones de estructura  $g_1$  y  $g_2$  pueden ser calculadas a partir de un modelo perturbativo<sup>3</sup>. Esto nos permite prescindir de mediciones experimentales de  $g_1$  y  $g_2$  en esta región para obtener el primer resultado de  $f_{\Delta\gamma}$ . A la vez, para obtener la expresión de  $g_1$  que aparece en la factorización física de la Ec. 2.21, i.e.  $g_1 = g_1(x_{\text{bj}}, Q^2)$ , utilizamos el calculo de QCD+QED que se describe en [61] (conjunto de PDFs DSSV, previamente ya mencionadas). Sin embargo, hay que tomar una pequeña precaución en consideración: necesitamos la PDF del fotón polarizada para calcular  $g_1$ . Sabemos que la contribución de  $f_{\Delta\gamma}$  a  $g_1$  es chica, al menos al orden en el que trabajamos, por lo que podemos tomar un modelo de juguete como una primera aproximación y esta no debería afectar significativamente al resultado final de  $f_{\Delta\gamma}$ . Tomamos que  $f_{\Delta\gamma}^{\text{mod}} = x f_\gamma$  [61], utilizando  $f_\gamma$  del conjunto de PDFs NNPDF [63].

En cuanto a  $g_2$ , tomamos la relación de Wandzura-Wilczek [64], i.e.,

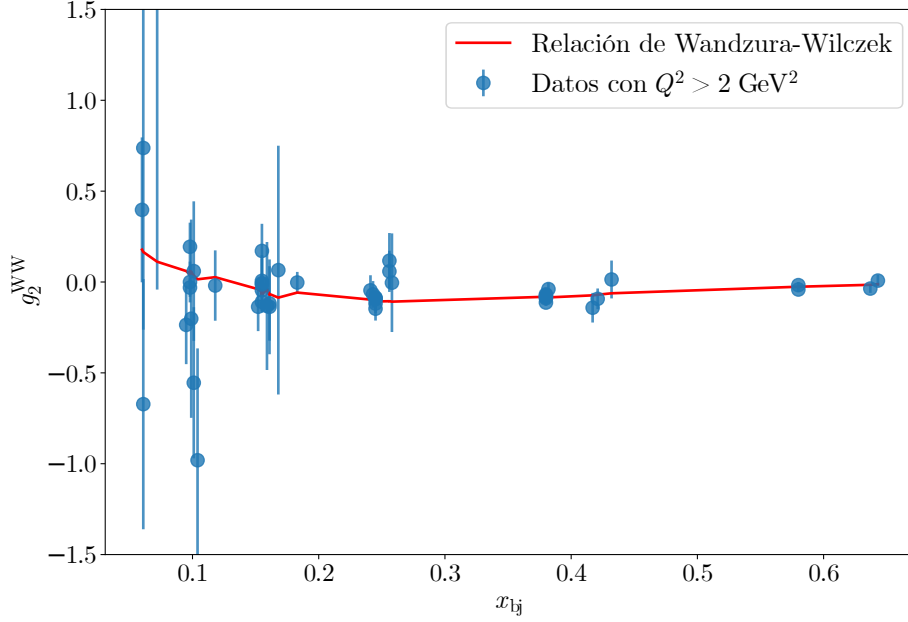
$$g_2^{WW}(x_{\text{bj}}) = -g_1(x_{\text{bj}}) + \int_{x_{\text{bj}}}^1 \frac{dy}{y} g_1(y). \quad (3.9)$$

Se espera que este modelo funcione bien a valores altos de  $Q^2$  dado que es una aproximación hasta contribuciones de twist-2 y no se tienen en cuenta contribuciones de twist-3.

---

<sup>3</sup>Si bien no fue explicitado, ya utilizamos un desarrollo perturbativo de  $g_1$  en la obtención de  $f_{\Delta\gamma}$  a partir de la Ec. 2.23, donde luego utilizamos su aproximación a LO.

En la Fig. 3.5 se grafica la forma dada por la Ec. 3.9 junto a datos experimentales de las contribuciones de SLAC [45-47] y HERMES [48] con la condición  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$  (recordemos  $Q_{\text{per}}^2 = 2 \text{ GeV}^2$ ). Se puede apreciar lo bien que ajusta la aproximación de Wandzura-Wilczek a los datos en el rango  $[0,1,0,6]$ , permitiendonos evaluar  $g_2$  en rangos en los cuales todavía no se dispone de resultados experimentales.



**Figura 3.5** Relación de Wandura-Wilczek en comparación a resultados experimentales. La forma dada por la Ec. 3.9 se contrasta con los datos de SLAC [45-47] y HERMES [48], con la condición impuesta por la región de alto  $Q^2$ , i.e.  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$ .

Finalmente, hay varias fuentes de error en esta región que hay que estimar. Primero, hay una incerteza teórica en el cálculo de  $f_{\Delta\gamma}^{\text{PF}}$  al variar independientemente las escalas no-físicas de renormalización  $\mu_R$  y de factorización  $\mu_F$  en el cálculo de  $g_1$ . Para determinar este error se calcula la PDF polarizada  $f_{\Delta\gamma}$  variando las escalas en un factor 2, i.e.  $Q/2 < \mu_{R,F} < 2Q$ . Luego, tomamos la suma en cuadratura de ambas variaciones como la incerteza en el cálculo de  $f_{\Delta\gamma}$ . Es importante notar que esta incerteza no se puede calcular en  $g_1$  a LO pues no hay dependencia de una escala no-física a este orden. Luego, la segunda fuente de error proviene de la arbitrariedad con la que uno corta la factorización física en la Ec. 2.21 del resto de la expresión de la Ec. 2.24. El resultado final no puede depender de esta escala, por lo que se introduce una nueva escala variable  $M_Z$  de modo que el límite superior en la integral de  $Q^2$  es  $M_Z^2/(1-z)$ . Se espera que el resultado final sea independiente de esta elección en el sentido de que los términos faltantes de mayor orden cancelen esa variación. De esta manera, la expresión de  $f_{\Delta\gamma}^{\text{PF}}$  se reescribe para explicitar



esta fuente de incerteza

$$f_{\Delta\gamma}^{\text{PF}}(x, \mu^2, M_Z) = \frac{1}{2\pi\alpha(\mu^2)} \int_x^1 \frac{dz}{z} \int_{Q_{\min}^2}^{\frac{M_Z^2}{1-z}} \frac{dQ^2}{Q^2} \alpha^2(Q^2) \left[ \left( 4 - 2z - \frac{4m_p^2 x^2}{Q^2} \right) g_1(x/z, Q^2) - \frac{8m_p^2 x^2}{zQ^2} \right]. \quad (3.10)$$

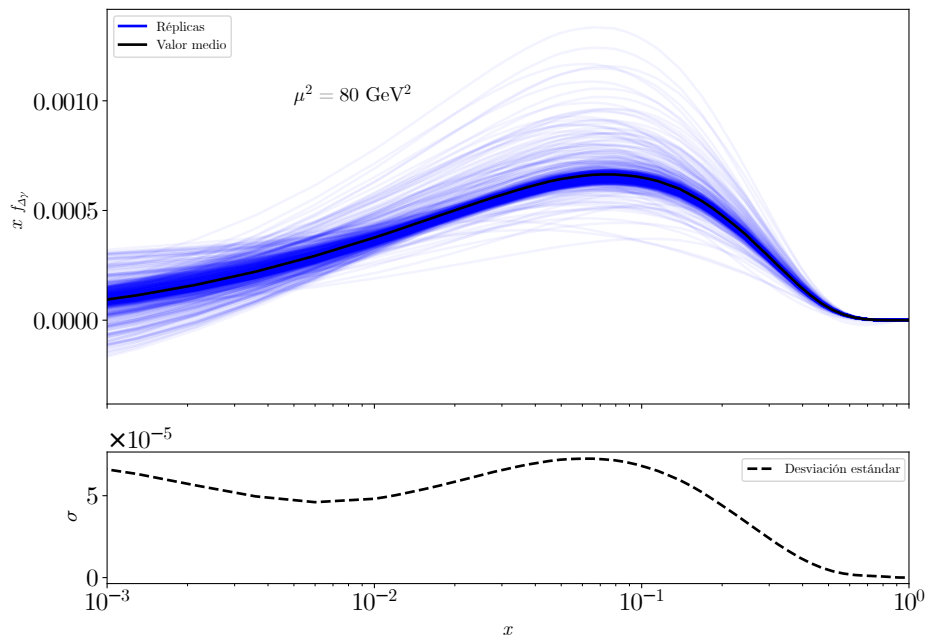
A la vez, debemos considerar otra expresión que varía por este corte. Entre las Ecs. 2.21 y 2.22 se comenta que al tener términos restantes integrando con  $Q^2$  del orden de la escala elegida era posible tomar ciertas aproximaciones. Como este término resulta dependiente de la escala no-física  $\mu$  nuevamente es necesario considerar que nuestro resultado sea independiente de  $\mu$ , por lo que se debe reescribir este término. Si definimos  $f_{\Delta\gamma}^{\text{LO}}$  según

$$f_{\Delta\gamma}^{\text{LO}}(x, \mu^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} g_1^{\text{LO}}(x/z, \mu^2), \quad (3.11)$$

entonces el error al introducir  $M_Z$  es

$$f_{\Delta\gamma}^{\text{LO}}(x, \mu^2, M_Z) = f_{\Delta\gamma}^{\text{LO}}(x, \mu^2) + \frac{1}{2\pi\alpha(\mu^2)} \int_x^1 \frac{dz}{z} \int_{\frac{M_Z^2}{1-z}}^{\frac{\mu^2}{1-z}} \frac{dQ^2}{Q^2} \alpha^2(Q^2) (4 - 2z) g_1^{\text{LO}}(x/z, Q^2). \quad (3.12)$$

Para obtener la incerteza asociada a esta escala se varía  $\mu/2 < M_Z < 2\mu$ . Por último, se debe considerar una incerteza más en  $g_1$  que se origina de las varias réplicas de PDFs que se generan dentro del conjunto DSSV [1]. Para estimar este error se calcula  $g_1$  y, a partir de este resultado, se calcula  $f_{\Delta\gamma}$  para cada réplica. Luego, se calcula la curva promedio de las réplicas y se toma su desviación estándar como la incerteza. En el gráfico superior de la Fig. 3.6 se muestran las  $N_{rep} = 999$  réplicas de la PDF polarizada del fotón junto a la curva media. También se muestra la curva de variación estándar pertinente.



**Figura 3.6** Réplicas (curvas azules) de la PDF polarizada del fotón a  $\mu^2 = 80 \text{ GeV}^2$ , calculadas a partir de cada réplica de  $g_1$  del conjunto de PDFs DSSV con correcciones de QED [1, 61]. Se grafica la curva media (curva negra), i.e. el valor medio. Además, en el gráfico inferior se muestra la desviación estándar  $\sigma$  punto a punto.

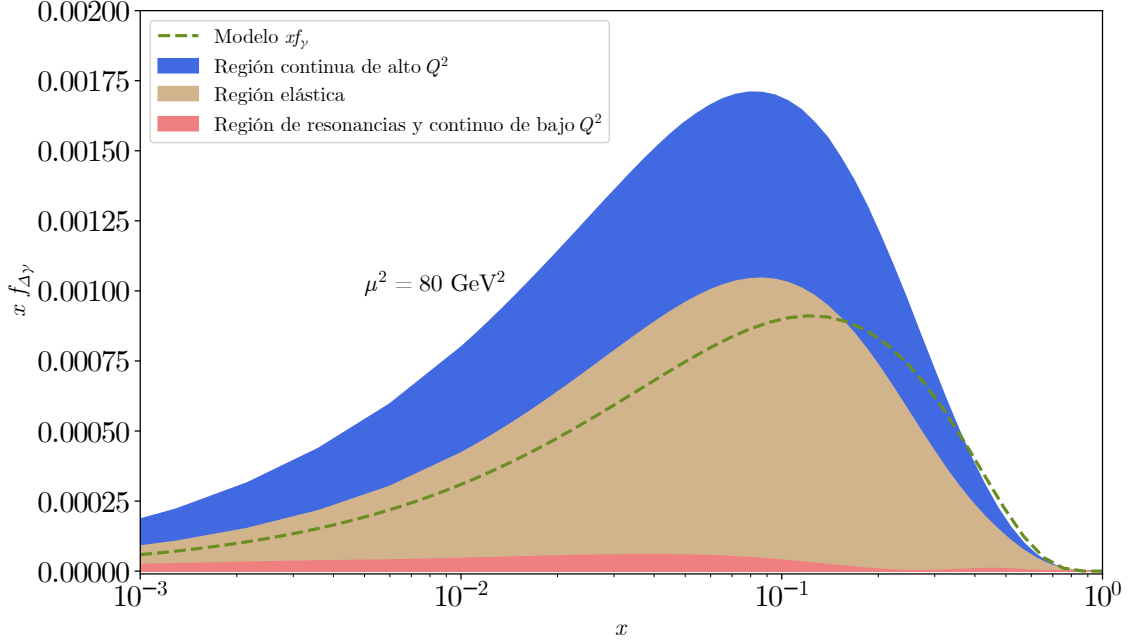
# Capítulo 4

## Resultados

En la Fig. 4.1 se presenta el resultado obtenido para la PDF polarizada del fotón  $f_{\Delta\gamma}$ , calculada a  $\mu^2 = 80 \text{ GeV}^2$ . Se grafica cada contribución por separado (detalladas en el Cap. 3) y se entiende que  $f_{\Delta\gamma}$  es la suma de ellas. Es evidente que la región elástica (en marrón) presenta la mayor contribución a  $f_{\Delta\gamma}$ , seguida por la región de alto  $Q^2$  (en azul) y la región de resonancias y de bajo  $Q^2$  (en rojo) presentan el menor aporte al resultado final. A la vez, se grafica el modelo sencillo utilizado para obtener  $g_1$  previo al cálculo de  $f_{\Delta\gamma}$  y podemos ver que, si bien no captura la misma forma funcional, este modelo predice el orden en el que se encuentra nuestro resultado de la PDF. Recordemos que este modelo está dado por  $f_{\Delta\gamma}^{\text{mod}} = x f_\gamma$ , para el cual se obtiene la PDF no polarizada  $f_\gamma$  a partir del conjunto NNPDF [63]. Además, en la Fig. 4.2 se muestran todas las incertezas relativas que fueron desarrolladas en el Cap. 3. En rojo se presentan las incertezas de la región de resonancias y de bajo  $Q^2$ , las cuales provienen de incertezas experimentales (ya detalladas en la Sec. 3.2). Luego, en distintas tonalidades de azul se muestran las tres fuentes de incertezas presentes en la región de alto  $Q^2$ : el azul más oscuro representa la incerteza que se tiene al variar la escala no-física con la cual se calcula  $g_1$ , el azul más claro representa la incerteza que surge al reemplazar  $\mu$  por la escala de masa  $M_Z$  en los límites de integración, introducida en las Ecs. 3.10 y 3.12 y el azul restante son las incertezas introducidas por la variación de las PDFs por sus réplicas del conjunto DSSV [1, 61]. La región marrón identifica las incertezas que provienen de la región elástica, siendo su origen las variaciones de los mismos ajustes utilizados para el cálculo (véase la Fig. 3.2 en la Sec. 3.1). Finalmente, se suman en cuadratura todos estos errores. Podemos ver que el error relativo varía entre el 50% y el 10%, siendo que el 50% se tiene para  $x \sim 10^{-3}$  y alcanza el 10% de error relativo para  $x \sim 10^{-1}$ . Es notable que si bien es coherente el hecho de que  $f_{\Delta\gamma}$  tienda a 0 a medida que  $x$  se aproxima a 1 el error relativo aumenta hasta un 30% en estos valores. Las principales fuentes de incerteza provienen de la variación en las réplicas de las PDFs y del error experimental en la región de bajo  $Q^2$  y resonancias.

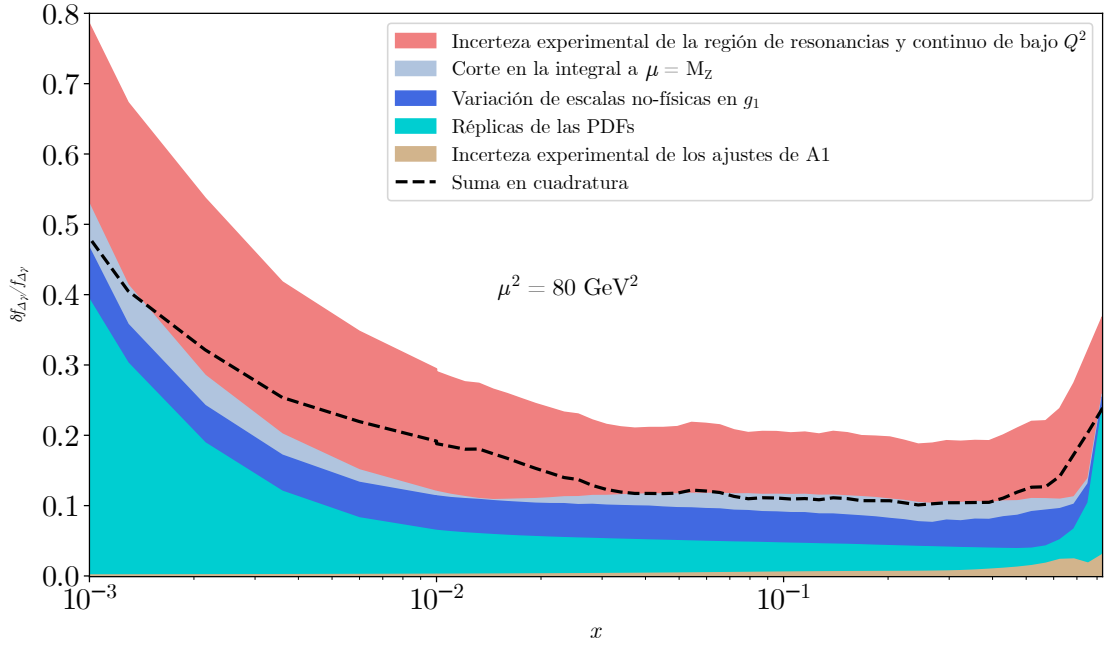
A partir del resultado de  $f_{\Delta\gamma}$  se evolucionó a distintas escalas  $\mu^2$ . En la Fig. 4.3 se muestran las evoluciones a las escalas  $\mu^2 = 10, 10^2, 10^3, 10^5 \text{ GeV}^2$  utilizando las ecuaciones QCD+QED DGLAP [61]. Se puede apreciar en la figura que los cambios a la PDF son

pequeños. En la misma figura se expone el cociente  $f_{\Delta\gamma}/f_\gamma$ , para los cuales se utilizó  $f_\gamma$  de NNPDF [63]. Como era de esperarse el cociente es menor a 1 y se aproxima a 1 a medida que  $x \rightarrow 1$ .

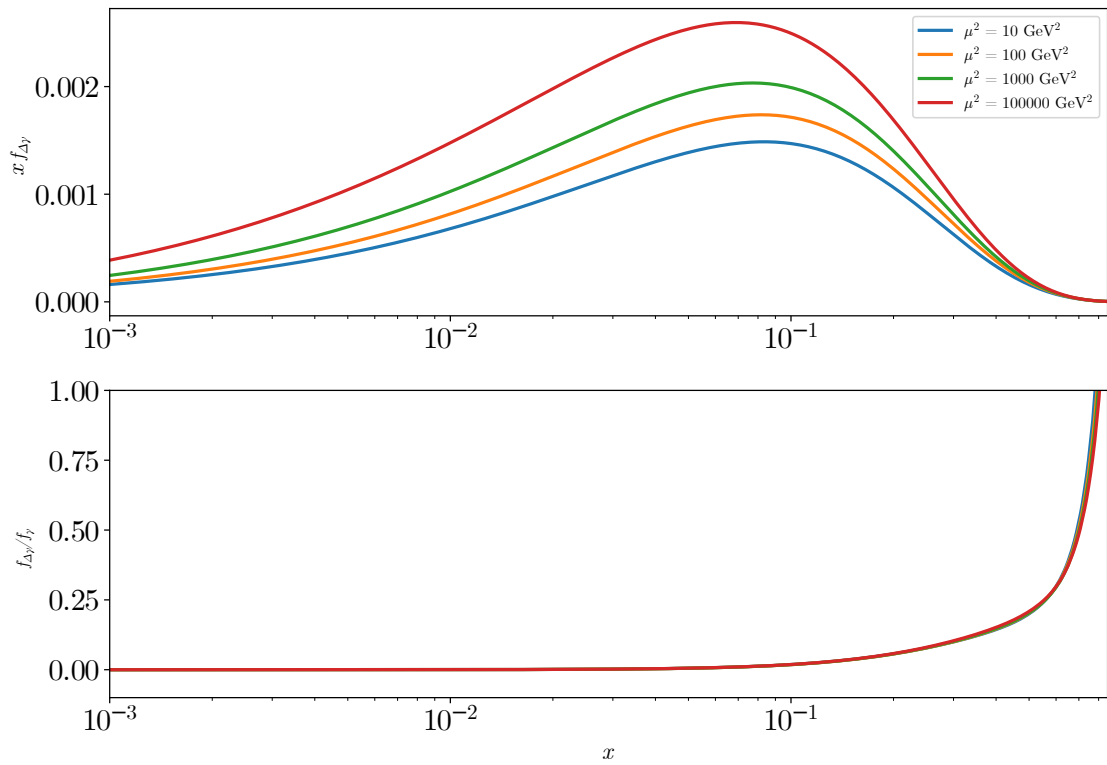


**Figura 4.1** PDF polarizada del fotón  $f_{\Delta\gamma}$ . El resultado se obtiene para  $\mu^2 = 80 \text{ GeV}^2$ . En azul se muestra la contribución de la región con desarrollo perturbativo a alto  $Q^2$ , en marrón se tiene la contribución de la región elástica y en rojo se tiene el aporte de las resonancias y la región de bajo  $Q^2$ . Además, también se grafica el modelo utilizado para obtener  $g_1$ , siendo este  $f_{\Delta\gamma} = x f_\gamma$ . Se puede ver que si bien no predice la forma del resultado obtenido se encuentra dentro del mismo orden.

Finalmente se calcula el primer momento de la distribución  $f_{\Delta\gamma}$ , la cual da como resultado la contribución del fotón al espín del protón. El resultado se presenta truncado debido a que no se puede determinar completamente debido a las grandes incertezas presentes para bajo  $x$ . A la escala  $\mu^2 = 10 \text{ GeV}^2$  se obtiene  $\int_{0,001}^1 f_{\Delta\gamma} dx \approx 0,0049 \pm 0,0008$ . En comparación a la contribución de los quarks y gluones este valor es chico, considerando que estos ya saturan el espín del protón [65].



**Figura 4.2** Incertezas relativas  $\delta f_{\Delta\gamma}/f_{\Delta\gamma}$  para la PDF polarizada del fotón  $f_{\Delta\gamma}$  a escala  $\mu^2 = 80 \text{ GeV}^2$ . En distintas tonalidades de azul se muestran los errores provenientes de la región de alto  $Q^2$ , los cuales incluye las incertezas en las réplicas del conjunto de PDFs DSSV, la variación de la escala de corte  $M_Z$  en la integral y la variación de escalas no físicas en el cálculo de  $g_1$ . En rojo se tiene la incerteza de la región de resonancia, proveniente de los datos experimentales usados en los modelos de ajustes de resonancias y los que se utilizaron en el modelo BKZ. En marrón se tiene la incerteza de la región elástica que proviene de los ajustes de la colaboración A1. La curva negra representa la suma en cuadratura de todas las incertezas.



**Figura 4.3** Distribución partónica polarizada del fotón evolucionada a distintas escalas  $\mu^2$  a partir de correcciones a las ecuaciones de evolución DGLAP. En la gráfico inferior se muestra el cociente entre la distribución polarizada  $f_{\Delta\gamma}$  y la no polarizada  $f_\gamma$ , las cuales fueron extraídas del grupo de PDFs de NNPDF [63].

# Capítulo 5

## Conclusiones

Se logró calcular la PDF polarizada del fotón como partón del protón mediante resultados experimentales y modelos fenomenológicos utilizando el método propuesto por el grupo de LuxQED, como se detalla en su trabajo [6]. Para llevar a cabo esto se requirió de un conocimiento claro de física de partículas de altas energías, desde los modelos más básicos a modelos más complejos. Se decidió por estudiar esta PDF mediante procesos físicamente imposibles *Beyond Standard Model* que nos permitieron una interpretación sencilla a través de diagramas de Feynman. También fue de gran importancia replicar las cuentas necesarias para obtener la PDF polarizada del fotón  $f_{\Delta\gamma}$  para entender y poder continuar con el trabajo de LuxQED.

La PDF polarizada  $f_{\Delta\gamma}$  se obtuvo mediante cálculo integral. Para la región elástica, se pudo describir las funciones de estructura  $g_1$  y  $g_2$  en términos de los factores de forma de Sachs, optando por datos experimentales publicados por la colaboración A1 por sobre aproximaciones a través de modelado. En las regiones de resonancias y de bajo  $Q^2$  se realizó el cálculo a través de una combinación de datos experimentales y modelos fenomenológicos. En particular, las resonancias fueron incluidas en la cuenta a través de suma de ajustes, como son introducidos en [51]. Luego, la zona de bajo  $Q^2$  fue modelada a través del modelo BKZ para  $g_1$  como es propuesto en [56-58] y se comparó con datos experimentales para verificar su validez. En esta región se estimó que la contribución de  $g_2$  es despreciable al orden que trabajamos. Por último, la región de alto  $Q^2$  admitía una descripción perturbativa de las funciones  $g_1$  y  $g_2$ , por lo que se implementaron PDFs del conjunto de DSSV con correcciones de QED para calcular  $g_1$  y, para  $g_2$ , se utilizó la relación de Wandzura-Wilczek. Además, pudimos calcular la incerteza relativa, que es del 50 % en  $x \sim 10^{-3}$  y decrece para valores mayores de  $x$ . Se calculó el primer momento de la PDF polarizada de forma truncada y se obtuvo su contribución al espín del protón a escala  $\mu^2 = 10 \text{ GeV}^2$ , obteniendo  $\int_{0,001}^1 f_{\Delta\gamma} dx \approx 0,0049 \pm 0,0008$ . Teniendo en cuenta las futuras mediciones del EIC la PDF polarizada será de suma importancia para mejorar la precisión de los cálculos polarizados. Aún más, en [66] ya se discute la importancia de la distribución partónica polarizada del fotón.

# Apéndice

## A. Cambio de variables en el espacio de fase

Para hacer el cambio de variables que describen nuestro espacio de fase primero necesitamos tener presente las relaciones que se cumplen a lo largo del proceso  $l + p \rightarrow L + X$ . El momento del protón satisfase  $p^2 = m_p^2$ , el momento del leptón  $l$  no es masivo por lo que se tiene  $k^2 = 0$  y el leptón saliente  $L$  presenta una masa  $M \gg m_p$ , por lo que  $k'^2 = M^2$ . Luego, el fotón intercambiado en la interacción cumple  $q = k - k'$  y el estado hadrónico  $X$  debe presentar una masa  $m_X^2 = (q + p)^2 \geq m_p^2$ . Ahora, vamos a definir unas *pseudo* coordenadas de cono de luz. Usualmente las coordenadas de cono de luz se definen según

$$x^+ \equiv \frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}}, \quad x^- \equiv \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}},$$

donde se dejan invariante las coordenadas  $x^2$  y  $x^3$  y, además, se las suele juntar en la definición de  $x_\perp = (x^2, x^3)$ . Se nota rápidamente que las nuevas coordenadas  $x^+$  y  $x^-$  son, respectivamente, las rectas  $t = x$  y  $t = -x$ , razón por la cual se les da el nombre de *coordenadas de cono de luz*. Sin embargo, las coordenadas que nosotros definimos son las siguientes:

$$x^+ \equiv \frac{x^0 + x^1}{2}, \quad x^- \equiv \frac{x^0 - x^1}{2}. \quad (\text{A.1})$$

Nótese que la única diferencia es un factor  $\sqrt{2}$  pero vamos a aprovechar esta definición más adelante en el desarrollo. La definición de  $x_\perp$  se mantiene igual. Definimos 2 vectores nulos que definen los ejes de colisión  $n$  y  $\bar{n}$  de modo que

$$k^\mu = \frac{1}{2}k^-n^\mu, \quad p^\mu = \frac{1}{2}p^+\bar{n}^\mu + \frac{1}{2}p^-n^\mu, \quad q^\mu = \frac{1}{2}q^+\bar{n}^\mu + \frac{1}{2}q^-n^\mu + q_\perp^\mu, \quad (\text{A.2})$$

siendo  $n \parallel k$  y se cumple  $n \cdot \bar{n} = 2$ . Se toma como convención  $q_\perp^2 = -q_\perp^\mu q_\perp^\nu g_{\mu\nu} > 0$  y se recuerdan definiciones dadas en el texto

$$Q^2 = -q^2 = -q^+ - q^- + q_\perp^2, \quad x_{\text{bj}} = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{p^+q^- + p^-q^+}, \quad y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}. \quad (\text{A.3})$$

Además introducimos una nueva variable

$$\chi = -\frac{q \cdot k}{p \cdot k} = -\frac{q^+}{p^+}. \quad (\text{A.4})$$



Con todas estas definiciones podemos hacer los cambios de variables pertinentes. Primero pasamos a las coordenadas definidas en la Ec. A.1 y esto nos da un Jacobiano  $|J_1| = 1/2$ . Si usaramos las coordenadas de cono de luz usuales nos evitamos este factor  $1/2$ . Luego, de las 2 variables que quedaron invariantes en el cambio anterior se hace un cambio a variables polares  $q_\perp^2$  y  $\phi$ , el cual nos da un nuevo Jacobiano que nuevamente cumple  $|J_2| = 1/2$ . De esta manera, las variables que nos definen la medida de integración  $d^4q$  satisfacen

$$d^4q = \frac{dq^+ dq^-}{2} d^2q_\perp = \frac{\pi}{2} dq^+ dq^- dq_\perp^2 \frac{d\phi}{2\pi}, \quad (\text{A.5})$$

donde se multiplica y divide por  $\pi$  para tener normalizado el rango angular definido por  $\phi$ . Las variables independientes son  $q^+$ ,  $q^-$  y  $q_\perp^2$  y si tenemos un sistema de referencia con  $p^\pm$  dado podemos usar las variables independientes para determinar  $Q^2$ ,  $x_{bj}$  y  $\chi$  mediante las Ecs. A.3 y A.4. El sistema de referencia que usamos a lo largo de este trabajo es el sistema de reposo del protón, pero por ahora basta con decir cual usamos. Entonces podemos invertir las relaciones entre las variables y despejar  $q^+$ ,  $q^-$  y  $q_\perp^2$  como funciones de  $Q^2$ ,  $x_{bj}$  y  $\chi$

$$q^+ = -p^+ \chi, \quad q^- = \frac{Q^2}{x_{bj} p^+} + \chi p^-, \quad q_\perp^2 = Q^2 \left(1 - \frac{\chi}{x_{bj}}\right) - \chi^2 m_p^2. \quad (\text{A.6})$$

Recordemos que por la convención que tomamos para  $q_\perp^2$  se debe cumplir la relación  $Q^2 \left(1 - \frac{\chi}{x_{bj}}\right) > \chi^2 m_p^2$ . Luego, el Jacobiano del cambio de variables resulta ser  $|J_3| = Q^2/x_{bj}^2$ . Continuando del resultado visto en la Ec. A.5 tenemos que

$$d^4q = \frac{\pi}{2} d\chi Q^2 dQ^2 \frac{dx_{bj}}{x_{bj}^2} \frac{d\phi}{2\pi}. \quad (\text{A.7})$$

Ahora que tenemos variables más adecuadas para integrar tenemos que reescribir las restricciones impuestas por las  $\delta$  y  $\theta$  en estas nuevas variables. Se puede verificar rápidamente que  $p^2 = p^+ p^-$  y como estamos trabajando en el sistema de reposo del protón se tiene  $p^+ = p^- = m_p$ . Consideremos que los leptones  $l$  y  $L$  tienen energías  $E$  y  $E'$  respectivamente, entonces sus cuadri-momentos se pueden escribir

$$k^\mu = (E, 0, 0, E), \quad k'^\mu = (E', 0, k' \sin \theta, k' \cos \theta). \quad (\text{A.8})$$

Como  $p_X^0 = p^0 + q^0 = m_p + E - E' \geq m_p$  tenemos que  $E \geq E'$ . Luego,

$$Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2 = 2k \cdot k' - k'^2 = 2E(E' - k' \cos \theta) - M^2 \geq 2E(E' - k') - M^2, \quad (\text{A.9})$$

donde la desigualdad se da pues  $-\cos \theta \geq -1$ . Usando  $E'^2 - k'^2 = (E' - k')(E' + k') = M^2$  la desigualdad en la Ec. A.9 se desarrolla a

$$Q^2 \geq M^2 \left( \frac{2E}{E' + k'} - 1 \right) \geq M^2 \left( \frac{2E'}{E' + k'} - 1 \right) \geq M^2 \left( \frac{E' + k'}{E' + k'} - 1 \right) = 0, \quad (\text{A.10})$$

donde se usó  $E \geq E'$  y que  $E' \geq k'$ . Por lo tanto, tenemos que  $Q^2 \geq 0$ .

Nuestro análisis continúa con  $x_{\text{bj}}$ . Sabemos que  $p \cdot k = p^+ k^- / 2 = m_p k^0 = m_p E$ , entonces  $p \cdot k > 0$ . Ahora, el cambio de variables definido en A.1 se puede invertir y tenemos que  $q^0$  se escribe

$$q^0 = \frac{q^+ + q^-}{2} = \frac{Q^2}{2x_{\text{bj}}m_p}, \quad (\text{A.11})$$

donde la última igualdad sale de la definición de  $x_{\text{bj}}$  dada en la Ec. A.3 junto a usar el sistema de reposo del protón. De  $\theta(k^0 - q^0)$  tenemos que

$$2k^0 = 2(k^0 - q^0) = 2\left(\frac{p \cdot k}{m_p} - \frac{Q^2}{2x_{\text{bj}}m_p}\right) \Rightarrow 2\frac{p \cdot k}{m_p} - \frac{Q^2}{x_{\text{bj}}m_p} > 0. \quad (\text{A.12})$$

Luego, de  $\theta(p^0 + q^0)$  se tiene que  $2(p^0 + q^0) \geq 2m_p$  y si juntamos esto con la Ec. A.11 se obtiene

$$2\left(m_p + \frac{Q^2}{2x_{\text{bj}}m_p}\right) \geq 2m_p \Rightarrow \frac{Q^2}{x_{\text{bj}}} \geq 0. \quad (\text{A.13})$$

Como vimos en la Ec. A.10, vale  $Q^2 \geq 0$ , por lo que se debe cumplir  $x_{\text{bj}} \geq 0$  para que valga el resultado de la Ec. A.13. De la  $\theta$  restante se impone  $m_X^2 = (p + q)^2 \geq m_p^2$ . Aplicándole a la Ec. A.11 esta condición tenemos

$$m_p^2 + 2p \cdot q + q^2 \geq m_p^2 \Rightarrow Q^2 \frac{1 - x_{\text{bj}}}{x_{\text{bj}}} \geq 0 \Rightarrow x_{\text{bj}} \leq 1. \quad (\text{A.14})$$

De  $\delta((k - q)^2 - M^2)$  tenemos la masa de  $L$  fija y se obtiene

$$k^2 - 2k \cdot q + q^2 = M^2 \Rightarrow M^2 + Q^2 = -2k \cdot q = 2(p \cdot q)\chi. \quad (\text{A.15})$$

Si en vez de fijar  $k'^2 = M^2$  se integrara sobre un rango de masas la única condición que esto nos daría es  $M^2 \geq 0$ , por lo que tenemos la desigualdad

$$2(p \cdot q)\chi \geq Q^2. \quad (\text{A.16})$$

De las Ecs. A.3 podemos reescribir  $y$  en función de  $Q^2/x_{\text{bj}}$  y  $p \cdot q$ . Luego, las Ecs. A.12 y A.13 nos permiten ver que  $0 \leq y \leq 1$ . También podemos reescribir  $\chi$  en función de  $y$ , de modo que  $\chi = -yq \cdot k/p \cdot q$ . Desarrollemos  $q \cdot k$ :

$$q \cdot k = (k - k') \cdot k = -k' \cdot k = Ek' \cos \theta - EE' \geq (k' \cos \theta - E)E'. \quad (\text{A.17})$$

De la Ec. A.11 tenemos que  $2p \cdot q = Q^2/x_{\text{bj}}$  por lo que finalmente podemos reescribir  $\chi$  a

$$\chi = -y \frac{q \cdot k}{p \cdot q} \geq 2yx_{\text{bj}} \frac{E - k' \cos \theta}{Q^2} \geq 0 \quad (\text{A.18})$$

pues  $y, x_{\text{bj}}, Q^2 \geq 0$  y  $E \geq E' \geq k'$ . Luego, de la condición  $q_{\perp}^2 > 0$  y la Ec. A.6 tenemos que

$$Q^2 \left(1 - \frac{\chi}{x_{\text{bj}}}\right) > \chi^2 x_{\text{bj}}^2 \geq 0 \Rightarrow x_{\text{bj}} \geq \chi. \quad (\text{A.19})$$

La  $\delta((k - q)^2 - M^2)$  se puede reescribir en términos de  $\chi$ , lo cual nos servirá para eliminar  $d\chi$  de la integral. Se tiene que  $(k - q)^2 = 2(p \cdot k)\chi - Q^2$ , por lo tanto

$$\delta((k - q)^2 - M^2) = \delta(2(p \cdot k)\chi - (Q^2 + M^2)) = \frac{1}{2p \cdot k} \delta\left(\chi - \frac{Q^2 + M^2}{2p \cdot k}\right). \quad (\text{A.20})$$

Deberíamos reemplazar esta igualdad en todas las relaciones vistas para entender cómo se modifican los resultados previos en virtud del resultado de la Ec. A.20 pero, por ejemplo, la desigualdad dada por la Ec. A.16 es trivial. El reemplazo pertinente que debemos realizar es en la Ec. A.19, del cual podemos despejar  $x_{\text{bj}}$  y obtener

$$x_{\text{bj}} > \frac{Q^2 \chi}{Q^2 - \chi^2 m_p^2} = \frac{2p \cdot k (M^2 + Q^2) Q^2}{4(p \cdot k)^2 Q^2 - m_p^2 (M^2 + Q^2)^2}. \quad (\text{A.21})$$

Este límite inferior de lo único que depende es de  $Q^2$ , que a la vez nos da la escala de energía del proceso, por lo que si llevamos  $Q^2 \rightarrow 0$  podemos obtener el menor valor posible de  $x_{\text{bj}}$ :

$$x_{\text{bj}}^{\text{min}} = \frac{M^2}{2(p \cdot k - m_p M)}. \quad (\text{A.22})$$

En luz de los resultados vistos es importante recordar que en el texto definimos la fracción de momento del fotón y su relación con  $x_{\text{bj}}$  a través de

$$x = \frac{M^2}{2p \cdot k}, \quad z = \frac{x}{x_{\text{bj}}}.$$

La cuenta se vuelve más conveniente con estas variables, por lo que haremos un cambio de variable adicional de  $x_{\text{bj}} \rightarrow z$  para el resultado final del espacio de fase. Antes de tal cambio de variable conviene ver toda la información que la Ec. A.21 nos puede dar. En particular, dado un  $x_{\text{bj}}$  podemos obtener los límites de integración de  $Q^2$  según la relación vista. Despejando  $Q^2$  de esta obtenemos una cuadrática cuyas raíces son

$$Q_{\pm}^2 = \frac{x_{\text{bj}} - x - \frac{2x_{\text{bj}}x^2m_p^2}{M^2} \pm \sqrt{(x_{\text{bj}} - x)^2 - \frac{4x_{\text{bj}}^2x^2m_p^2}{M^2}}}{\frac{2x}{M^2} \left(1 + \frac{x_{\text{bj}}xm_p^2}{M^2}\right)}, \quad (\text{A.23})$$

para las cuales es necesario que la diferencia dentro de la raíz sea positiva. Esto no es un problema porque pedir tal condición sale directamente de reescribir  $x_{\text{bj}} > x_{\text{bj}}^{\text{min}}$ . Se ve directamente de la Ec. A.23 que  $Q_+^2 > Q_-^2$  y se puede verificar que se cumple la siguiente relación

$$Q_+^2 Q_-^2 = \frac{xx_{\text{bj}}m_p^2M^4}{M^2 + xx_{\text{bj}}m_p^2}. \quad (\text{A.24})$$

Esta relación es útil para reescribir  $Q_-^2$  de modo que sea más sencillo ver cómo se comporta cuando uno considera  $M \gg m_p$ . Haciendo estas expansiones uno encuentra los límites de

$Q_{\min}^2$  y  $Q_{\max}^2$ . Primero reescribimos  $Q_{\pm}^2$  (y los renombramos acorde) con la definición de la nueva variable  $z$  y expandimos:

$$Q_{\min}^2 = \frac{x^2 m_p^2}{1-z} \frac{2}{1 - \frac{2x^2 m_p^2}{(1-z)M^2} + \sqrt{1 - \frac{4x^2 m_p^2}{(1-z)^2 M^2}}} \xrightarrow{M \gg m_p} \frac{x^2 m_p^2}{1-z}, \quad (\text{A.25})$$

$$Q_{\max}^2 = M^2 \left( \frac{1-z}{z} \right) \frac{1 - \frac{2x^2 m_p^2}{(1-z)M^2} + \sqrt{1 - \frac{4x^2 m_p^2}{(1-z)^2 M^2}}}{2 \left( 1 + \frac{x^2 m_p^2}{zM^2} \right)} \xrightarrow{M \gg m_p} M^2 \frac{1-z}{z}. \quad (\text{A.26})$$

Haciendo el cambio de variable que adelantamos previamente y continuando de la Ec. A.7 tenemos que la medida de integración toma la siguiente forma

$$d^4 q = \frac{\pi}{2} d\chi Q^2 dQ^2 \frac{x_{\text{bj}}}{x_{\text{bj}}^2} \frac{d\phi}{2\pi} = \frac{2(p \cdot k)}{M^2} \frac{\pi}{2} d\chi Q^2 dQ^2 dz \frac{d\phi}{2\pi}, \quad (\text{A.27})$$

donde el factor  $p \cdot k$  se verá cancelado con el que surgió en la Ec. A.20. Luego, los límites de  $z$  salen directamente de los que tenemos para  $x_{\text{bj}}$ , siendo estos

$$x \leq z \leq 1 - \frac{2xm_p}{M} \xrightarrow{M \gg m_p} x \leq z \leq 1. \quad (\text{A.28})$$

Finalmente escribimos el espacio de fase con todo lo desarrollado en este apéndice

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \delta((k-q)^2 - M^2) \theta(k^0 - q^0) \theta((p+q)^2 - m_p^2) \theta(p^0 + q^0) = \frac{1}{16\pi^2 M^2} \int_x^{1 - \frac{2xm_p}{M}} dz \int_{Q_{\min}^2}^{Q_{\max}^2} dQ^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi}. \quad (\text{A.29})$$

Esta expresión final es exacta y no presenta la expansión en  $m_p/M$  pero en los cálculos realizados si se tiene en cuenta, recuperando los límites vistos en las Ecs. A.25, A.26 y A.28.

# Bibliografía

- [1] Daniel de Florian et al. “Monte Carlo sampling variant of the DSSV14 set of helicity parton densities”. En: *Phys. Rev. D* 100 (11 dic. de 2019), pág. 114027. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.114027. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.114027>.
- [2] A. D. Martin et al. “Parton distributions incorporating QED contributions”. En: *The European Physical Journal C - Particles and Fields* 39.2 (feb. de 2005), págs. 155-161. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s2004-02088-7. URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s2004-02088-7>.
- [3] Richard D. Ball et al. “Parton distributions with QED corrections”. En: *Nuclear Physics B* 877.2 (dic. de 2013), págs. 290-320. ISSN: 0550-3213. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321313005233>.
- [4] Carl Schmidt et al. “CT14QED parton distribution functions from isolated photon production in deep inelastic scattering”. En: *Phys. Rev. D* 93 (11 jun. de 2016), pág. 114015. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.114015. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.114015>.
- [5] L. A. Harland-Lang, V. A. Khoze y M. G. Ryskin. “Photon-initiated processes at high mass”. En: *Phys. Rev. D* 94 (7 oct. de 2016), pág. 074008. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.074008. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.074008>.
- [6] Aneesh V. Manohar et al. “The photon content of the proton”. En: *Journal of High Energy Physics* 2017.12 (dic. de 2017). ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/jhep12(2017)046. URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2017\)046](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2017)046).
- [7] Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN: 978-0-201-50397-5, 978-0-429-50355-9, 978-0-429-49417-8. DOI: 10.1201/9780429503559.
- [8] David Tong. *Lectures on Gauge Theory*. 2018. URL: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory.html>.
- [9] David Tong. *Lectures on Quantum Field Theory*. 2007. URL: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>.
- [10] Raymond Brock et al. “Handbook of perturbative QCD: Version 1.0”. En: *Rev. Mod. Phys.* 67 (1995), págs. 157-248. DOI: 10.1103/RevModPhys.67.157.

- [11] Chen-Ning Yang y Robert L. Mills. “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”. En: *Phys. Rev.* 96 (1954). Ed. por Jong-Ping Hsu y D. Fine, págs. 191-195. DOI: 10.1103/PhysRev.96.191.
- [12] James H. Eittle. “MHV Lagrangians for Yang–Mills and QCD”. Tesis doct. Southampton U., 2008. arXiv: 0808.1973 [hep-th].
- [13] Francis Halzen y Alan Martin. *Quarks & Leptons: An introductory course in modern particle physics*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1984.
- [14] Particle Data Group et al. “Review of Particle Physics”. En: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2022.8 (ago. de 2022), pág. 083C01. ISSN: 2050-3911. DOI: 10.1093/ptep/ptac097. eprint: <https://academic.oup.com/ptep/article-pdf/2022/8/083C01/49175539/ptac097.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptac097>.
- [15] Rajan Gupta. *Introduction to Lattice QCD*. 1998. arXiv: hep-lat/9807028 [hep-lat]. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-lat/9807028>.
- [16] Elliot Leader y Enrico Predazzi. *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology. Cambridge University Press, 1996.
- [17] Jean Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, jun. de 2002. ISBN: 9780198509233. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198509233.001.0001. URL: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198509233.001.0001>.
- [18] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2013.
- [19] P. Pascual y R. Tarrach. *QCD: RENORMALIZATION FOR THE PRACTITIONER*. Vol. 194. 1984.
- [20] Richard P. Feynman. “Very High-Energy Collisions of Hadrons”. En: *Phys. Rev. Lett.* 23 (24 dic. de 1969), págs. 1415-1417. DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.1415. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.1415>.
- [21] J. D. Bjorken y E. A. Paschos. “Inelastic Electron-Proton and  $\gamma$ -Proton Scattering and the Structure of the Nucleon”. En: *Phys. Rev.* 185 (5 sep. de 1969), págs. 1975-1982. DOI: 10.1103/PhysRev.185.1975. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.185.1975>.
- [22] Daniel de Florian et al. “Evidence for Polarization of Gluons in the Proton”. En: *Phys. Rev. Lett.* 113 (1 jul. de 2014), pág. 012001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.012001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.012001>.
- [23] E. Fermi. “Über die Theorie des Stoßes zwischen Atomen und elektrisch geladenen Teilchen”. En: *Zeitschrift für Physik* 29.1 (dic. de 1924), págs. 315-327. ISSN: 0044-3328. DOI: 10.1007/BF03184853. URL: <https://doi.org/10.1007/BF03184853>.

- [24] C. F. v. Weizsäcker. “Ausstrahlung bei Stößen sehr schneller Elektronen”. En: *Zeitschrift für Physik* 88.9 (sep. de 1934), págs. 612-625. ISSN: 0044-3328. DOI: 10.1007/BF01333110. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01333110>.
- [25] E. J. Williams. “Nature of the High Energy Particles of Penetrating Radiation and Status of Ionization and Radiation Formulae”. En: *Phys. Rev.* 45 (10 mayo de 1934), págs. 729-730. DOI: 10.1103/PhysRev.45.729. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.45.729>.
- [26] Aneesh Manohar et al. “How Bright is the Proton? A Precise Determination of the Photon Parton Distribution Function”. En: *Phys. Rev. Lett.* 117 (24 dic. de 2016), pág. 242002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.242002. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.242002>.
- [27] Aneesh V. Manohar. *An Introduction to Spin Dependent Deep Inelastic Scattering*. 1992. arXiv: hep-ph/9204208 [hep-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/9204208>.
- [28] Elliot Leader. “Spin and helicity”. En: *Spin in Particle Physics*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology. Cambridge University Press, 2001, págs. 1-17.
- [29] Juan Rojo et al. “The PDF4LHC report on PDFs and LHC data: results from Run I and preparation for Run II”. En: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 42.10 (sep. de 2015), pág. 103103. DOI: 10.1088/0954-3899/42/10/103103. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/42/10/103103>.
- [30] S. Bailey et al. “Parton distributions from LHC, HERA, Tevatron and fixed target data: MSHT20 PDFs”. En: *The European Physical Journal C* 81.4 (abr. de 2021), pág. 341. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09057-0. URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09057-0>.
- [31] Richard D. Ball et al. “The path to proton structure at 1% accuracy”. En: *The European Physical Journal C* 82.5 (mayo de 2022), pág. 428. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10328-7. URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10328-7>.
- [32] Tie-Jiun Hou et al. “New CTEQ global analysis of quantum chromodynamics with high-precision data from the LHC”. En: *Phys. Rev. D* 103 (1 ene. de 2021), pág. 014013. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.014013. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.014013>.
- [33] G. Aad et al. “Determination of the parton distribution functions of the proton using diverse ATLAS data from pp collisions at  $\sqrt{s} = 7, 8$  and 13 TeV”. En: *The European Physical Journal C* 82.5 (mayo de 2022), pág. 438. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10217-z. URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10217-z>.

- [34] S. Alekhin et al. “Parton distribution functions,  $\alpha_s$ , and heavy-quark masses for LHC Run II”. En: *Phys. Rev. D* 96 (1 jul. de 2017), pág. 014011. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.014011. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.014011>.
- [35] A. Accardi et al. “Constraints on large- $x$  parton distributions from new weak boson production and deep-inelastic scattering data”. En: *Phys. Rev. D* 93 (11 jun. de 2016), pág. 114017. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.114017. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.114017>.
- [36] G. Altarelli y G. Parisi. “Asymptotic freedom in parton language”. En: *Nuclear Physics B* 126.2 (1977), págs. 298-318. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(77\)90384-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90384-4). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377903844>.
- [37] Tatsumi Aoyama, Toichiro Kinoshita y Makiko Nio. “Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron”. En: *Atoms* 7.1 (2019). ISSN: 2218-2004. DOI: 10.3390/atoms7010028. URL: <https://www.mdpi.com/2218-2004/7/1/28>.
- [38] Rym Bouchendira et al. “New Determination of the Fine Structure Constant and Test of the Quantum Electrodynamics”. En: *Phys. Rev. Lett.* 106 (8 feb. de 2011), pág. 080801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.080801. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.080801>.
- [39] R. Piessens, E. De Doncker-Kapenga y C. W. Überhuber. *QUADPACK: a subroutine package for automatic integration*. Springer, 1983. ISBN: 3-540-12553-1.
- [40] M. Aghasyan et al. “Longitudinal double-spin asymmetry  $A_{1p}$  and spin-dependent structure function  $g_{1p}$  of the proton at small values of  $x$  and  $Q^2$ ”. En: *Physics Letters B* 781 (2018), págs. 464-472. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.044>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318302405>.
- [41] X. Zheng et al. “Measurement of the proton spin structure at long distances”. En: *Nature Physics* 17.6 (jun. de 2021), págs. 736-741. ISSN: 1745-2481. DOI: 10.1038/s41567-021-01198-z. URL: <https://doi.org/10.1038/s41567-021-01198-z>.
- [42] K.V. Dharmawardane et al. “Measurement of the  $x$ - and  $Q^2$ -dependence of the asymmetry  $A_1$  on the nucleon”. En: *Physics Letters B* 641.1 (2006), págs. 11-17. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.08.011>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269306009890>.
- [43] B. Adeva et al. “Spin asymmetries  $A_1$  of the proton and the deuteron in the low  $x$  and low  $Q^2$  region from polarized high energy muon scattering”. En: *Phys. Rev. D* 60 (7 sep. de 1999), pág. 072004. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.072004. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.072004>.



- [44] B. Adeva et al. “Spin asymmetries  $A_1$  and structure functions  $g_1$  of the proton and the deuteron from polarized high energy muon scattering”. En: *Phys. Rev. D* 58 (11 oct. de 1998), pág. 112001. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.112001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.112001>.
- [45] K. Abe et al. “Measurements of the proton and deuteron spin structure functions  $g_1$  and  $g_2$ ”. En: *Phys. Rev. D* 58 (11 oct. de 1998), pág. 112003. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.112003. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.112003>.
- [46] P.L. Anthony et al. “Measurement of the proton and deuteron spin structure functions  $g_2$  and asymmetry  $A_2$  Work supported by the National Science Foundation and the Department of Energy contract DE-AC03-76SF00515.1”. En: *Physics Letters B* 458.4 (1999), págs. 529-535. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(99\)00590-0](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00590-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399005900>.
- [47] P.L. Anthony et al. “Precision measurement of the proton and deuteron spin structure functions  $g_2$  and asymmetries  $A_2$ ”. En: *Physics Letters B* 553.1 (2003), págs. 18-24. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)03015-0](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(02)03015-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269302030150>.
- [48] A. Airapetian et al. “Measurement of the virtual-photon asymmetry  $A_2$  and the spin-structure function  $g_2$  of the proton”. En: *The European Physical Journal C* 72.3 (mar. de 2012), pág. 1921. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-012-1921-5. URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-1921-5>.
- [49] R. G. Fersch et al. “Determination of the proton spin structure functions for  $0,05 < Q^2 < 5 \text{ GeV}^2$  using CLAS”. En: *Phys. Rev. C* 96 (6 dic. de 2017), pág. 065208. DOI: 10.1103/PhysRevC.96.065208. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.96.065208>.
- [50] J. C. Bernauer et al. “Electric and magnetic form factors of the proton”. En: *Physical Review C* 90.1 (jul. de 2014). ISSN: 1089-490X. DOI: 10.1103/physrevc.90.015206. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.90.015206>.
- [51] A. N. Hiller Blin, V. I. Mokeev y W. Melnitchouk. “Resonant contributions to polarized proton structure functions”. En: *Phys. Rev. C* 107 (3 mar. de 2023), pág. 035202. DOI: 10.1103/PhysRevC.107.035202. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.035202>.
- [52] F. R. Wesselmann et al. “Proton Spin Structure in the Resonance Region”. En: *Phys. Rev. Lett.* 98 (13 mar. de 2007), pág. 132003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.132003. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.132003>.

- [53] K. Slifer et al. “Probing Quark-Gluon Interactions with Transverse Polarized Scattering”. En: *Phys. Rev. Lett.* 105 (10 sep. de 2010), pág. 101601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.101601. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.101601>.
- [54] W. Armstrong et al. “Revealing Color Forces with Transverse Polarized Electron Scattering”. En: *Phys. Rev. Lett.* 122 (2 ene. de 2019), pág. 022002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.022002. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.022002>.
- [55] D. Ruth et al. *The Proton Spin Structure Function  $g_2$  and Generalized Polarizabilities in the Strong QCD Regime*. 2022. arXiv: 2204.10224 [nucl-ex]. URL: <https://arxiv.org/abs/2204.10224>.
- [56] Barbara Badelek. *Spin dependent structure function  $g_1(x, Q^2)$  at low  $x$  and low  $Q^2$* . 2003. arXiv: hep-ph/0306101 [hep-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0306101>.
- [57] B. Badelek, J. Kwiecinski y B. Ziaja. “Spin structure function  $g_1(x, Q)$  and the DHGHY integral  $I(Q)$  at low  $Q$ : predictions from the GVMD model”. En: *The European Physical Journal C - Particles and Fields* 26.1 (nov. de 2002), págs. 45-49. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s2002-01041-2. URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s2002-01041-2>.
- [58] B. Badelek y J. Kwiecinski. “Spin dependent structure function  $g_1$  at small  $x$  and small  $Q^2$ ”. En: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 25.7 (jul. de 1999), pág. 1533. DOI: 10.1088/0954-3899/25/7/341. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/25/7/341>.
- [59] T. H. Bauer et al. “The hadronic properties of the photon in high-energy interactions”. En: *Rev. Mod. Phys.* 50 (2 abr. de 1978), págs. 261-436. DOI: 10.1103/RevModPhys.50.261. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.50.261>.
- [60] B. L. Ioffe. “The nucleon spin problem”. En: *Surveys in High Energy Physics* 8.1-4 (1995), págs. 107-134. DOI: 10.1080/01422419508201820. eprint: <https://doi.org/10.1080/01422419508201820>. URL: <https://doi.org/10.1080/01422419508201820>.
- [61] Daniel de Florian y Lucas Palma Conte. *QED corrections to parton distributions and Altarelli-Parisi splitting functions in the polarized case*. 2023. arXiv: 2305.14144 [hep-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/2305.14144>.
- [62] C. Adolph et al. “The spin structure function  $g_1p$  of the proton and a test of the Bjorken sum rule”. En: *Physics Letters B* 753 (2016), págs. 18-28. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2015.11.064>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931500920X>.

- [63] Valerio Bertone et al. “Illuminating the photon content of the proton within a global PDF analysis”. En: *SciPost Phys.* 5 (2018), pág. 008. DOI: 10.21468/SciPostPhys.5.1.008. URL: <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.5.1.008>.
- [64] S. Wandzura y F. Wilczek. “Sum rules for spin-dependent electroproduction- test of relativistic constituent quarks”. En: *Physics Letters B* 72.2 (1977), págs. 195-198. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90700-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90700-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269377907006>.
- [65] Ignacio Borsa et al. *NNLO Global Analysis of Polarized Parton Distribution Functions*. 2024. arXiv: 2407.11635 [hep-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/2407.11635>.
- [66] Daniel Rein, Marc Schlegel y Werner Vogelsang. “Probing the polarized photon content of the proton in  $ep$  collisions at the EIC”. En: *Physical Review D* 110.1 (jul. de 2024). ISSN: 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.110.014041. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.110.014041>.

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución - No Comercial -  
Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina Buenos Aires, 2024