



---

# Carga de baterías cuánticas en contacto con entornos fuera del equilibrio

---

Julian Yacachury

Director: Augusto Roncaglia

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Febrero de 2024

TEMA: Carga de baterías cuánticas en contacto con entornos fuera del equilibrio

ALUMNO: Julian Yacachury

L.U. N°: 200/19

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, FCEN, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Augusto Roncaglia

CODIRECTOR o COLABORADOR: Franco Mayo

FECHA DE INICIACION: Marzo de 2023

FECHA DE FINALIZACION: Febrero de 2024

FECHA DE EXAMEN: Febrero de 2024

INFORME FINAL APROBADO POR:

---

Autor

---

Jurado

---

Director

---

Jurado

---

Profesor(a) de Tesis de Licenciatura

---

Jurado

## Resumen

En esta tesis se estudian procesos de carga para baterías cuánticas en contacto con entornos fuera de equilibrio, estudiando su eficiencia, potencia y producción de correlaciones. En particular, se consideran entornos con coherencias, y se busca entender su efecto por sobre estas propiedades, a su vez que generar una caracterización con el resto de los parámetros.

Se estudia un modelo colisional levemente coherente, que es descrito por una ecuación maestra de tipo Linblad, con un hamiltoniano efectivo que depende de las coherencias. A partir de la misma, se encuentra que la eficiencia de este caso no supera para ningún parámetro disponible el valor de su correspondiente proceso sin coherencias. Se opta entonces por tomar otro modelo que permite evaluar el efecto de coherencias arbitrarias junto con tiempos de interacción finitos. Se obtiene la eficiencia para estos procesos y se encuentra que es posible superar la eficiencia del proceso sin coherencias, a la vez que se realiza una caracterización con los parámetros de la misma. Por otro lado, se determina la cota máxima para esta eficiencia, y los parámetros en los cuales esta es alcanzada, siendo su valor  $\eta = \frac{2}{3}$ . Por último, se diseña un proceso para cerrar el ciclo de carga de la batería, el cual permite repetirlo indefinidamente sin modificar su eficiencia.

Posteriormente, se analiza la potencia de carga tanto para los procesos con y sin coherencias. Para el caso incoherente, se logra obtener una expresión analítica a partir de la cual se toman múltiples casos límite y aproximaciones. En particular, se encuentra la cota máxima para este. Respecto al proceso con coherencias, El resultado principal, es que las coherencias empeoran la potencia del proceso en todos los casos analizados. Además, se encuentra que en algunas regiones del espacio de parámetros utilizado hay un compromiso entre potencia y eficiencia, lo cual es usual para procesos termodinámicos de tiempo finito. Finalmente, se estudian las correlaciones entre la batería y el entorno que se generan en el proceso con coherencias. Se encuentra que la temperatura desfavorece la producción de todas las correlaciones, a la vez que aumenta el porcentaje de correlaciones clásicas por sobre la información mutua, que cuantifica las correlaciones totales. Adicionalmente, se encuentra que la eficiencia aumenta con las mismas.

# Agradecimientos

Antes que nada quiero agradecer a Augusto y a Franco por la constante ayuda para que aprenda y pueda presentar los resultados de esta tesis. También, quiero agradecer a los amigos y amigas que hice a lo largo de la carrera, sin los cuales estos años de mi vida habrían sido fundamentalmente diferentes, y mucho menospreciados. Por último y mas que nada, quiero agradecer a mis viejos, que me bancaron incondicionalmente en este proceso, y que me enseñaron que si quiero algo tengo que esforzarme siempre por alcanzarlo.

# Índice general

<b>Introducción</b>	4
<b>1. Termodinámica y baterías cuánticas</b>	8
1.1. Baterías cuánticas y procesos unitarios	8
1.1.1. Procesos colectivos	11
1.2. Proceso de carga disipativo	12
1.3. Interacciones repetidas	14
1.3.1. Protocolo para un estado activo	18
1.3.2. Ejemplo: proceso de carga de un qubit	19
1.4. Modelos colisionales en entornos levemente coherentes	21
1.4.1. Estados con coherencias	21
1.4.2. Modelos colisionales levemente coherentes	23
<b>2. Baterías en entornos fuera del equilibrio</b>	26
2.1. Carga de baterías en modelos colisionales levemente coherentes	26
2.1.1. Estado estacionario	27
2.1.2. Eficiencia	28
2.2. Carga de baterías con coherencias y tiempo de interacción finitos	31
2.2.1. Estado estacionario	31
2.2.2. Eficiencia	33
2.2.3. Cerrado del ciclo de carga	38
<b>3. Potencia de carga y correlaciones</b>	41
3.1. Potencia media	42
3.1.1. Caso sin coherencias	44
3.2. Potencia con coherencias	46
3.2.1. Cálculos numéricos	47
3.3. Correlaciones	51
3.4. Correlaciones del proceso	54
<b>Conclusiones</b>	58

<b>A. Cálculo del trabajo para la ecuación maestra</b>	<b>61</b>
<b>B. Cota para eficiencia</b>	<b>63</b>

# Introducción

La presente tesis trata sobre baterías cuánticas. Las mismas son sistemas que se utilizan con el fin de almacenar energía, y son descriptos a su vez a partir de la mecánica cuántica. Es de particular interés el efecto que tienen las propiedades intrínsecas a esta teoría, como las coherencias, por sobre el rendimiento de las mismas. Este análisis se realiza en el contexto de la termodinámica cuántica, teoría que surge a partir del estudio de los flujos de energía en estos sistemas. Originalmente, la termodinámica surgió como un medio para entender mejor los fenómenos energéticos que dominaban el paradigma del momento, considerando la revolución industrial y el creciente uso de maquinas térmicas. La misma consiguió dar un fundamento y base teórica a los procesos que estas atravesaban, a la vez de dar una noción de la eficiencia máxima que una maquina térmica real podía alcanzar, entre otras cosas. Su contra-parte cuántica no es diferente, en que intenta responder las mismas preguntas que la termodinámica clásica, empleando sistemas en escalas atómicas como base para su desarrollo. En el intento de unir estos modelos, surgen preguntas que aparecen debido a algunas características de la teoría cuántica, que difieren fundamentalmente de aquellas clásicas; la noción de trayectoria, o la definición de la temperatura son algunas de ellas. A partir de esto, la termodinámica cuántica se pregunta ¿Cómo definir el trabajo o calor de un sistema cuántico?, ¿Qué correcciones deben hacerse a las leyes clásicas de termodinámica cuando existe un acople fuerte con el entorno? o ¿Qué rol cumplen las fluctuaciones en la termodinámica del sistema? Adicionalmente, la mecánica cuántica posee propiedades de las cuales la teoría clásica carece, entre ellas las coherencias y el entrelazamiento. Resulta natural preguntar entonces, si dichos atributos presentan algún fenómeno novedoso, el cual sea explotable. En esta ocasión se buscar responder estas preguntas estudiando específicamente una batería de un qubit, en contacto con entornos que poseen coherencias.

El campo de termodinámica cuántica puede resultar paradójico, ya que une dos mundos altamente diferentes de la física, que pueden parecer incluso incompatibles. La termodinámica es fundamentalmente una teoría de siste-

mas macroscópicas, que busca estudiar un problema particular reduciendo las variables que los describen. La misma usa a su vez la fenomenología para construir sus bases, y modela procesos no a partir de entender correctamente el comportamiento microscópico del sistema, si no desde las variables de estado como la temperatura, presión o volumen, que son por definición macroscópicas. Por su parte, la cuántica es una teoría fundamental que busca describir exactamente el comportamiento de la escala atómica a partir de la ecuación de Schrödinger, la cual otorga la dinámica y energía de cada una de las componentes de un sistema físico - como por ejemplo, las partículas dentro de un átomo - en términos de distribuciones de probabilidad.

Ambas teorías son de mucho éxito, y describen correctamente una amplia gama de los fenómenos físicos que buscan modelar; tienen la necesidad también, de modificar sus bases, en búsqueda de la descripción de fenómenos mas complejos: la termodinámica en los fenómenos fuera de equilibrio y la mecánica cuántica en su versión relativista.

La creciente tendencia de disminuir el tamaño de los dispositivos electrónicos, hace que la perspectiva de una mecánica cuántica involucrada directamente en la tecnología sea cada vez menos lejana; y de la misma manera que para un circuito actual la termodinámica juega un rol en el procesamiento de información y estabilidad de los bits empleados, esta puede hacerlo así para su versión cuántica. Es por esto que buscar la unión de ambas teorías resulta fundamental. De la misma manera que en el comienzo de la cuántica se estudio el problema termodinámico de radiación de cuerpo negro, en el nuevo paradigma de baterías y maquinas cuánticas se cierra el círculo, entrando nuevamente en contacto estas dos teorías.

La termodinámica cuántica estudia entonces aquellos sistemas que se encuentran alejados de un régimen macroscópico, y en el que los fenómenos cuánticos dejan de ser despreciables. Experimentalmente, por ejemplo, se ha podido recrear un ciclo de Carnot en un sistema de iones atrapados [1, 2], demostrando así que los ciclos termodinámicos diseñados para sistemas macroscópicos, son además utilizables en las más pequeñas escalas atómicas. También, se han hecho grandes avances de manera general en los últimos años, estudiando maquinas térmicas, teoremas de fluctuación, y termalización de sistemas cuánticos, entre otros [3].

En el presente trabajo, los estudios de la batería están enfocados en encontrar si propiedades puramente cuánticas logran mejorar la tarea despenada sobre el sistema: Cargar y descargar una batería. Ya se encontró que la generación de correlaciones a través de un proceso termodinámico, como el de un ciclo de una maquina térmica, puede mejorar su despeno en la producción de trabajo y aumento de eficiencia [4, 5]. Por otro lado, se encontró que el costo para producir un dado estado de un sistema de  $N$  partes se reduce

considerablemente si los estados iniciales están correlacionados [6]. En esta línea, se busca encontrar el efecto de la presencia de las correlaciones con la eficiencia de la batería.

Por otro lado, también se mostró que las coherencias cuánticas dan una ventaja en ciertos procesos. Por ejemplo en [7] se muestra que para un oscilador armónico atravesando un ciclo de Carnot, mantener las coherencias a lo largo de todo el proceso brinda mejoras en la eficiencia para ciclos cortos. Por otro lado en [8] se muestra que se puede mejorar la eficiencia de un ciclo Otto de un qubit fuertemente acoplado a un baño de osciladores armónicos, si nuevamente se mantienen las coherencias a lo largo del proceso. De otra manera, se muestra en [9] que al terminar parcialmente los procesos isobáricos de un ciclo Otto, las coherencias residuales de estas ramas “interfieren” positivamente para mejorar la eficiencia del mismo.

En cuanto a las baterías cuánticas, en [10] se muestra como usando una guía de onda como batería y un qubit con coherencias como entorno, existe una directa correlación entre estas últimas y el trabajo. Por otro lado, en [11] se utiliza una batería compuesta por un hamiltoniano de  $N + 1$  niveles equiespaciados, donde se halla que las coherencias presentes en las ancillas mejoran la potencia de carga. Por último, en [12], se emplea un sistema de dos y tres celdas de qubits como baterías, en donde las coherencias se muestran como elemento para mejorar la eficiencia del proceso. Recientemente se ha presentado un marco general para las llamadas “Baterías cuánticas disipativas” [13], que presentan ventajas por sobre los procesos unitarios atravesados por un sistema cuántico cerrado. En ese contexto también se encontró que los efectos colectivos pueden ayudar a mitigar la disipación producto de la evolución abierta del sistema [14].

En particular, en esta tesis se revisan el trabajo ya mencionado de [13], y también los trabajos [15], [16]. En el primero se describe como obtener un *estado activo* - un estado al que se le puede retirar energía unitariamente - a partir de un modelo colisional de manera general, lo cual abre las puertas a estudiar sistemas arbitrarios como baterías, empleando este caso como punto de partida. En los artículos restantes, se emplea un modelo colisional levemente coherente, el cual está descrito por una ecuación maestra del tipo Linblad. De estos dos trabajos se tomaron los resultados como bases sobre las cuales extender esta tesis. La misma estará estructurada en tres capítulos, los cuales tratan de caracterizar una batería de un qubit desde distintos puntos de vista.

El capítulo [1] trata sobre las bases teóricas de la termodinámica cuántica, introduciendo los procesos unitarios y los procesos abiertos. En particular, se orienta dicho contenido para la sección de baterías cuánticas. Se introducen también, una familia de modelos que se incluyen dentro de los procesos

abiertos, son los modelos colisionales. Estos son introducidos y explicados en detalle. A partir de los mismos se presenta una manera de obtener una dinámica que resulte en un estado estacionario activo, para luego emplearlo como batería. Siguiendo esta línea, se muestran los resultados obtenidos para baterías con coherencias utilizando un modelo colisional levemente coherente.

En el capítulo 2 se introducen resultados nuevos, que incluyen expresiones analíticas para el estado estacionario de una batería de un qubit, empleando un modelo colisional levemente coherente. Por otro lado, se deja este último caso para pasar a interacciones de tiempo finito. Nuevamente se encuentra una expresión analítica para el estado estacionario del sistema, así como de su eficiencia. Para ambos casos se estudia el efecto de las coherencias, y se analizan también el efecto de los otros parámetros presentes en el sistema.

En el capítulo 3 se define la potencia de carga del proceso ya estudiado, a partir de la ergotropía y el tiempo característico más pequeño asociado a la convergencia del estado. Para la misma se encuentra, en el caso sin coherencias, una expresión analítica, la cual es estudiada, comprendiendo así el rol de los parámetros en este caso. Por otro lado, se estudia la potencia para el proceso con coherencias numéricamente, variando nuevamente los parámetros. Adicionalmente, se estudia la eficiencia en función de la potencia. Por último, se estudia la generación de correlaciones a lo largo del proceso para diferentes parámetros, entre el sistema y el entorno. Para esto se miden las correlaciones cuánticas y clásicas y entrelazamiento a lo largo del proceso de carga de la batería. Análogo a los capítulos anteriores, se modifican los parámetros del sistema para comprender su rol en la generación de estas cantidades. Finalmente, se estudia la relación entre las correlaciones y la eficiencia del proceso.

# Capítulo 1

## Termodinámica y baterías cuánticas

En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos de la termodinámica cuántica que se utilizan a lo largo de la tesis. Se introduce el concepto de batería cuántica y sus propiedades, tales como la ergotropía y potencia. Además, se describen diferentes tipos de procesos de carga que se caracterizan por el tipo de dinámica a la que se ve sujeta la batería. Estos pueden ser unitarios o abiertos, en particular se hace foco en el caso disipativo. También, se describe un tipo de dinámica abierta conocida como de modelo colisional, el cual sirve para estudiar la carga de baterías en entornos con coherencias. Se muestra, además, que en el límite de interacciones cortas la dinámica resultante de este modelo puede ser descrita por una ecuación maestra con la forma de Linblad.

### 1.1. Baterías cuánticas y procesos unitarios

Como se mencionó en la introducción, la tendencia hacia la miniaturización de los dispositivos tecnológicos implica también una reducción en el tamaño de los dispositivos encargados de almacenar energía, las baterías. Por este motivo, resulta interesante estudiarlas en el régimen cuántico. Adicionalmente, las propiedades intrínsecas a la teoría cuántica brindan ventajas en las tareas de procesamiento de información, por lo que resulta natural preguntarse si producen lo mismo en lo que respecta a los procesos termodinámicos. Ya se vio en los trabajos [4–14] que esto ocurre para distintas situaciones físicas. Para hacer esto, primero deben definirse las cantidades de importancia en una batería, como la capacidad de almacenamiento, o la potencia de carga y descarga.

Las baterías cuánticas son, tal y como sus contra-partes clásicas, sistemas en los cuales se busca almacenar energía para luego retirarla. Así, sus características se definen a partir de su capacidad de almacenamiento, como de la potencia de carga o descarga. Estas son a su vez determinadas por las propiedades intrínsecas al sistema ( $\mathcal{S}$ ), como el hamiltoniano ( $H$ ), el método de carga o el estado inicial ( $\rho_0$ ). En la figura 1.1 se esquematiza una batería, compuesta por un hamiltoniano y estado inicial.

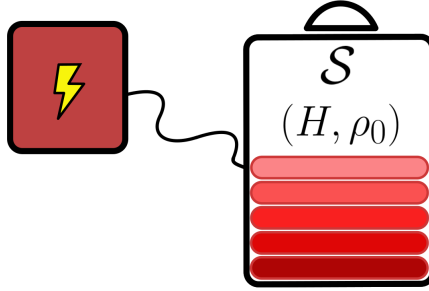


Figura 1.1: Esquema de una batería cuántica, incluyendo todos los elementos que la caracterizan.

Se considera un sistema cuántico con un hamiltoniano:

$$H = \sum_i E_i |i\rangle\langle i|,$$

donde por simplicidad se asume que no es degenerado y tiene dimensión finita. Por otro lado, se ordenan sus energías de manera creciente  $E_i \leq E_{i+1}$ . Si el sistema se encuentra en un estado inicial  $\rho$ , una manera de extraer su energía es simplemente efectuar una transformación sobre el sistema de forma tal que el estado final tenga energía menor a la del inicial. Esta transformación podría realizarse en forma unitaria, prendiendo por ejemplo un campo dependiente del tiempo  $V(t)$ . Este potencial resulta en una evolución unitaria, cuya dinámica modifica la energía del sistema. La variación de la misma en este caso está dada por la ecuación:

$$W(t) = \text{Tr}[H(U(t)\rho U^\dagger(t) - \rho)]. \quad (1.1)$$

La transformación  $U(t)$  se encuentra representada, en forma general, por:

$$U(t) = \mathcal{T}_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' [H + V(t')]\right), \quad (1.2)$$

donde  $\mathcal{T}_{\leftarrow}$  es la operación de ordenamiento temporal de la exponencial. De ahora en más se utiliza que  $\hbar = 1$ .

Al fijar el hamiltoniano del sistema, mediante la elección de  $V(t)$  es posible aplicar cualquier operación unitaria arbitraria y esto determina el valor de  $W(t)$ . La máxima cantidad de energía que se puede extraer del sistema mediante un proceso unitario surge de maximizar por sobre todas las unitarias posibles el valor de la energía final. Esto equivale a preguntarse cuál es aquel operador  $V(t)$  que minimiza la energía del estado  $U(t)\rho U^\dagger(t)$ . De esta manera, se define la *ergotropía* como la máxima cantidad de energía que se puede extraer del sistema de manera unitaria. Cantidad que, formalmente, se puede escribir como [17]:

$$\mathcal{W} = \text{Tr}[H\rho] - \min_{U(t)} \{ \text{Tr}[H U(t)\rho U^\dagger(t)] \} = \text{Tr}[H\rho] - \text{Tr}[H\sigma_\rho], \quad (1.3)$$

donde se define a  $\sigma_\rho$  como el estado pasivo correspondiente a  $\rho$ .

Los estados *pasivos* son aquellos a los que no se le puede remover mas energía con un proceso unitario. Es decir, el estado  $\sigma_\rho$  de un sistema con Hamiltoniano  $H$  es pasivo si

$$\text{Tr}[H\sigma_\rho] \leq \text{Tr}[H U\sigma_\rho U^\dagger] \quad \forall U \quad (1.4)$$

Dado que las transformaciones unitarias no transforman los autovalores del estado, es fácil intuir que la configuración menos energética que puede tomar un dado estado  $\rho$  - diagonal en la base del hamiltoniano -, es con los autovalores ordenados en el orden inverso al de las energías. De hecho, es posible demostrar que  $\sigma_\rho$  es un estado pasivo si y sólo si toma la siguiente forma en la base de  $H$  [18]:

$$\sigma_\rho = \sum_i r_i |i\rangle\langle i|, \quad (1.5)$$

donde los autovalores  $r_i$  son tales que  $r_i \geq r_{i+1}$ , es decir si es diagonal en la base de auto-energías y sus autovalores se encuentran ordenados de forma decreciente.

Además, es posible hallar una cota ergotropía. Para mostrar esto se define el estado térmico a temperatura inversa  $\beta^* = \frac{1}{k_B T^*}$  (de ahora en más se considera que  $k_B = 1$ ) que tiene la misma entropía la entropía de Von Neumann  $S[\cdot]$  que la del estado  $\rho$ . La misma se define como:

$$S[\rho] = \text{Tr}[\rho \ln(\rho)] = \sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i) \quad (1.6)$$

donde  $\lambda_i$  son los autovalores de  $\rho$ . Explícitamente, este estado térmico  $\omega_{\beta^*}(H)$  es:

$$\omega_{\beta^*}(H) = \frac{e^{-\beta^* H}}{\mathcal{Z}}, \quad (1.7)$$

con  $\mathcal{Z} = \text{Tr}[e^{-\beta^* H}]$  la función de partición. La relación entre entropías que se impone  $S[\rho] = S[\omega_{\beta^*}(H)]$  es equivalente a pedir que  $S[\sigma_\rho] = S[\omega_{\beta^*}(H)]$ , debido a que la entropía es invariante ante transformaciones unitarias ya que como dijimos no modifican los autovalores. Dado que el estado térmico es aquel que minimiza la energía libre [19]:

$$\text{Tr}[H\sigma_\rho] - \beta^* S[\sigma_\rho] \geq \text{Tr}[H\omega_{\beta^*}(H)] - \beta^* S[\omega_{\beta^*}(H)]. \quad (1.8)$$

donde:

$$F(\rho) = \text{Tr}[H\rho] - \beta S[\rho], \quad (1.9)$$

es la energía libre del sistema. Si se usa que las entropías son iguales, la inecuación se traduce a:

$$\text{Tr}[H\sigma_\rho] \geq \text{Tr}[H\omega_{\beta^*}(H)], \quad (1.10)$$

y es inmediato llegar a que:

$$\mathcal{W} \leq \text{Tr}[H\rho] - \text{Tr}[H\omega_{\beta^*}(H)], \quad (1.11)$$

usando la definición de  $\mathcal{W}$ . Esta cota no es trivial debido a que no es equivalente que un estado sea pasivo a que sea térmico.

### 1.1.1. Procesos colectivos

La caracterización de la capacidad de este tipo de baterías se vuelve no trivial al considerar procesos que involucran la presencia de varias baterías. En efecto, se halla que, si todos los sub-sistemas se encuentran cada uno *un estado pasivo*, el estado global no necesariamente representa un estado pasivo para el sistema compuesto respecto al Hamiltoniano completo  $H_T = \sum_i H_i$ . Es decir,

$$\otimes^n \sigma_\rho \neq \sigma_{\otimes^n \rho}. \quad (1.12)$$

Esto quiere decir que a priori un sistema compuesto por  $N$  baterías almacena más energía que la suma de las energías de cada una de las baterías, debido a que la extracción de toda la energía que cada uno posee individualmente no lleva al sistema a su estado pasivo. A su vez, esto implica que las operaciones locales - aquellas que afectan a cada sub-sistema individualmente - no son suficientes para explotar esta potencial ventaja. Para esto se precisan operaciones colectivas, que afecten simultáneamente a las partes del total. Por otro lado, el producto de estados térmicos lleva finalmente a un estado térmico del sistema total, que naturalmente es un estado pasivo. A los estados pasivos locales  $\sigma_\rho$ , que cumplen que  $\otimes^n \sigma_\rho$  también es pasivo para todo

valor de  $n$  se los llama *completamente pasivos* [20]. Puede mostrarse que un estado es completamente pasivo, si y sólo si es térmico.

En cuanto a la ventaja potencial en los sistemas colectivos, se ha especulado sobre la utilidad del entrelazamiento como una herramienta para mejorar la ergotropía de estos sistemas. Sin embargo, se ha demostrado que es posible lograr procesos de extracción óptimos sin recurrir al entrelazamiento [21]. Sin embargo, para lograr esto, se requiere emplear un método que involucra más operaciones, y por ende, más tiempo para completarse. Considerando eso, y que al cargar colectivamente cada componente se presume que debería requerirse menos tiempo en cargar o descargar la batería, resulta natural cuestionar si el tiempo necesario para llevar a cabo los procesos colectivos es menor que el requerido cuando se cargan individualmente cada sub-sistema. Con el objetivo de cuantificar estas diferencias, se define la potencia como el cociente entre la energía disponible en el sistema (ergotropía) y el tiempo que toma terminar el proceso:

$$P = \frac{\mathcal{W}}{T}. \quad (1.13)$$

Al llevar a cabo la comparación de los procesos, se normaliza la energía del proceso colectivo a aquella correspondiente al proceso paralelo, y se calcula la potencia del proceso para comparar estos tiempos. Se define así la ventaja cuántica de carga:

$$\Gamma = \frac{P_{\parallel}}{P_{\#}} = \frac{T_{\parallel}}{T_{\#}}, \quad (1.14)$$

donde el sub-índice  $\parallel$  hace referencia a los procesos paralelos y  $\#$  a los colectivos. Respecto a este factor, se encontró en [22] que si se emplean límites de velocidad cuánticos, la ventaja cuántica cumple la cota:

$$\Gamma < \gamma[k^2(m-1) + k], \quad (1.15)$$

donde  $\gamma$  es una constante dependiente del modelo empleado,  $k$  es el máximo número de sub-sistemas que son colectivamente cargados, y  $m$  (llamado número de participación) es el máximo número de operaciones paralelas en las que solo aparece un único sub-sistema. Esto muestra que en procesos cuánticos existe una ventaja en los procesos colectivos respecto a la potencia presente en sistemas que no explotan dichas propiedades, y que dicha ventaja escala con el número de sistemas cargados colectivamente.

## 1.2. Proceso de carga disipativo

El proceso de carga unitario se presenta entonces como un candidato para modelar baterías cuánticas, ya que permite cuantificar tanto la energía dis-

ponible en el dispositivo como la potencia de carga y descarga [23], debido a que el tiempo que toman los sistemas en llegar a los estados deseados es finito. No obstante, uno podría cuestionar la precisión necesaria para llevar a cabo estas tareas. Esto es en parte por el grado de control que se precisa para que la evolución sea exactamente la deseada, mientras que para cada estado inicial se precisa una unitaria diferente. Adicionalmente, la dinámica del sistema puede ser afectada por el contacto con elementos externos que perturban el sistema de interés y alteran el resultado final deseado. En particular, se estudiarían baterías que evolucionan como sistemas abiertos, es decir no-unitarios, debido a su interacción con un entorno o baño. En particular, se hace enfoque en procesos disipativos, que tienen la característica de llevar al sistema a un estado estacionario luego de transcurrido un determinado tiempo.

El primer ejemplo de evolución abierta que podemos mencionar es aquel en el que el sistema de interés es puesto en contacto con una fuente térmica a temperatura inversa  $\beta$ . En este caso, la batería convergería finalmente al estado de Gibbs con la misma temperatura, y como se mencionó antes, este estado es pasivo. El resultado final no tiene utilidad alguna en este caso, y naturalmente surge la pregunta sobre si es posible diseñar un proceso que lleve al sistema a un estacionario de ergotropía no nula, esto es, un estado estacionario *activo*. Si esto fuera posible, una de las ventajas que se pueden mencionar, se encuentra relacionada con que la convergencia al estado final deseado resulta ser independiente de los detalles del estado inicial o de otro tipo de fluctuación eventual que pueda afectar la dinámica del sistema.

Existen muchos modelos que describen la evolución abierta de un sistema cuántico dado, y todos involucran hipótesis específicas que se ajustan a distintas situaciones físicas. La ecuación de Linblad es un caso particular que describe un sistema inicialmente separable, cuya evolución es Markoviana, y que se puede derivar por ejemplo a partir de la interacción débil con un entorno suficientemente grande. Su expresión es la siguiente [24]:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_i \gamma_i \mathcal{L}(\rho, A_i), \quad (1.16)$$

donde  $\gamma_i$  son las tasas de decaimiento para transiciones descritas por operadores  $A_i$  que están asociados a la interacción entre sistema y ambiente. Por otro lado, el Linbladiano es un superoperador que está definido como  $\mathcal{L}(\rho, A_i) = A_i \rho A_i^\dagger - \frac{1}{2} \{\rho, A_i^\dagger A_i\}$  y  $H$  es el hamiltoniano del sistema de interés. Es importante destacar que si el Lindbladiano no estuviera presente, la dinámica seguiría la forma unitaria típica de la ecuación de Von-Neumann. De hecho, la inclusión de este operador en la ecuación diferencial es la que

brinda la característica disipativa a la evolución, y resulta en la convergencia asintótica mencionada anteriormente.

### 1.3. Interacciones repetidas

En los últimos años se han estado utilizando los llamados modelos colisionales (también conocidos como modelos de interacciones repetidas) para describir diferentes situaciones de interés relacionadas con la termodinámica cuántica [25, 26]. Un modelo colisional es aquel en el que un sistema de interés es puesto en contacto de manera sucesiva con sistemas cuánticos que llamaremos *ancillas*, que después de interactuar son removidas para no volver a hacerlo. El modelo colisional más básico es el que utiliza  $N$  ancillas idénticas, interactúan sucesivamente con el sistema durante un tiempo finito  $\tau$ . Esta situación naturalmente describe un proceso Markoviano y puede verse representada en el esquema de la figura 1.2.

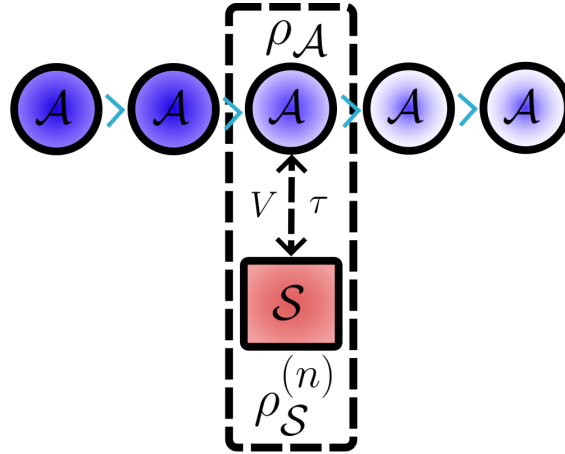


Figura 1.2: Esquema de un modelo colisional de tiempo de interacción  $\tau$ , con potencial de interacción  $V$ .

Se notaran  $H_S$  y  $H_A$  al Hamiltoniano del sistema y cada ancilla respectivamente, y  $V$  al potencial de interacción entre los dos. Si en un determinado instante el sistema se encuentra en un estado descrito por la siguiente matriz densidad  $\rho_S^{(n-1)}$ , entonces se puede garantizar que al comienzo del contacto con la  $n$ -ésima ancilla el estado del sistema es:

$$\rho_0^{(n)} = \rho_S^{(n-1)} \otimes \rho_A, \quad (1.17)$$

donde se entiende por subíndice  $\mathcal{S}$  como “sistema” y el subíndice  $\mathcal{A}$  como “ancilla”. También se abrevia a  $\rho(n\tau) = \rho^{(n)}$ . La evolución del sistema total

durante ese período de tiempo es unitaria, y por lo tanto el sistema a tiempo  $n\tau$  es:

$$\rho^{(n)} = U \left( \rho_S^{(n-1)} \otimes \rho_A \right) U^\dagger = U \rho_0^{(n)} U^\dagger, \quad (1.18)$$

donde  $U = \exp(-i\tau(H_S + H_A + V))$ , ya que los Hamiltonianos que la componen son independientes del tiempo. De esta manera, para obtener el estado del sistema luego de la  $n$ -ésima interacción se debe trazar sobre los grados de libertad del baño, por lo que finalmente se obtiene la expresión:

$$\rho_S^{(n)} = \text{Tr}_A[U \left( \rho_S^{(n-1)} \otimes \rho_A \right) U^\dagger], \quad (1.19)$$

donde  $\text{Tr}_A[\cdot]$  es la traza parcial sobre el espacio de  $\mathcal{A}$ . Esta acción es adecuada para la descripción de una evolución física debido a que preserva la traza y la positividad de la matriz densidad, las cuales garantizan que la misma resulte en un estado apropiado según la mecánica cuántica (mapas CPTP) [27]. Se define la acción sobre  $\rho$  de esta evolución no-unitaria en un tiempo  $\tau$  como  $\mathcal{E}(\rho)$ :

$$\mathcal{E}(\rho_S) = \text{Tr}_A[U(\rho_S \otimes \rho_A)U^\dagger]. \quad (1.20)$$

La composición sucesiva de este mapa resulta en la evolución total del estado del sistema. Con la noción de evolución ya resuelta, se quiere diseñar procesos disipativos que tengan un único estado estacionario *activo*. Un estado estacionario, tiene la característica que es invariante frente a la acción del mapa  $\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \hat{\rho}$ . Debido al carácter contractivo de la entropía relativa ante la acción del mapa, el estado estacionario es necesariamente atractivo. Con esto se entiende que la entropía relativa entre el estado y su estacionario siempre decrece [24]. Entonces mediante la aplicación sucesiva del mapa es posible llevar cualquier estado inicial al estacionario:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}^n(\rho) = \hat{\rho} \quad (1.21)$$

Un estado estacionario es tal que la producción de entropía es nula, y puede mostrarse que en el marco del modelo colisional que se utiliza aquí, debe tener la forma de [28]:

$$\hat{\rho}_\beta = \omega_\beta(H_0) = \frac{e^{-\beta H_0}}{\text{Tr}(e^{-\beta H_0})} \quad (1.22)$$

donde el operador  $H_0$  cumple que  $[U, H_0 + H_A] = 0$ . Esta última condición puede traducirse a dos ecuaciones separadas que son:

$$[H_S, H_0] = 0 \quad (1.23)$$

y que:

$$[V, H_0 + H_A] = 0. \quad (1.24)$$

Ahora podemos calcular las cantidades termodinámicas de relevancia para el modelo en cuestión. En primer lugar, el calor recibido por el sistema puede ser definido como “menos” el cambio energético del baño en cada paso. Esto sería:

$$Q_n = -\text{Tr}_{\mathcal{A}}[H_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}}^{(n)} - \omega_{\beta}(H_{\mathcal{A}}))], \quad (1.25)$$

donde  $\rho_{\mathcal{A}}^{(n)} = \text{Tr}_{\mathcal{S}}[\rho^{(n)}]$  es el estado de la  $n$ -ésima ancilla luego de la interacción. Usando que  $\text{Tr}[H_{\mathcal{A}}\omega_{\beta}(H_{\mathcal{A}})] = \text{Tr}[H_{\mathcal{A}}\rho_0^{(n)}]$ :

$$Q_n = -\text{Tr}\left[H_{\mathcal{A}}\left(U\rho_0^{(n)}U^\dagger - \rho_0^{(n)}\right)\right]. \quad (1.26)$$

donde se emplea la definición [\(1.18\)](#). Si se suma y resta  $H_0$  adentro de la traza,

$$Q_n = \text{Tr}\left[H_0\left(U\rho_0^{(n)}U^\dagger - \rho_0^{(n)}\right)\right] - \text{Tr}\left[(H_{\mathcal{A}} + H_0)\left(U\rho_0^{(n)}U^\dagger - \rho_0^{(n)}\right)\right]. \quad (1.27)$$

Utilizando además que  $[H_0 + H_{\mathcal{A}}, U] = 0$ , puede verse que:

$$\text{Tr}\left[(H_0 + H_{\mathcal{A}})\left(U\rho_0^{(n)}U^\dagger - \rho_0^{(n)}\right)\right] = 0, \quad (1.28)$$

y trazando sobre los grados de libertad de  $\mathcal{A}$  se obtiene finalmente que:

$$Q_n = \text{Tr}_{\mathcal{S}}[H_0(\rho_{\mathcal{S}}^{(n)} - \rho_{\mathcal{S}}^{(n-1)})]. \quad (1.29)$$

Por otro, lado se tiene que la variación de la energía interna de la batería en cada paso del proceso es:

$$E_n = \text{Tr}_{\mathcal{S}}[H_{\mathcal{S}}(\rho_{\mathcal{S}}^{(n)} - \rho_{\mathcal{S}}^{(n-1)})]. \quad (1.30)$$

Empleando ahora la primera ley de la termodinámica para el paso este paso,  $E_n = Q_n + W_n$ , el trabajo que se realiza en cada paso del proceso debe ser entonces:

$$W_n = \text{Tr}_{\mathcal{S}}[(H_{\mathcal{S}} - H_0)(\rho_{\mathcal{S}}^{(n)} - \rho_{\mathcal{S}}^{(n-1)})]. \quad (1.31)$$

El trabajo es una cantidad asociada a un agente externo, que pone en contacto el sistema mediante el potencial de interacción  $V$ . Notar que el caso particular de  $H_0 = H_{\mathcal{S}}$  describe el proceso de termalización, ya que el estado estacionario  $\hat{\rho}_{\beta}$  se corresponde con el estado de Gibbs asociado a  $H_{\mathcal{S}}$ . En este caso, es inmediato que el trabajo requerido para llevar al sistema a este

estado estacionario es nulo. La energía presente en el sistema es únicamente calor que fluye de los baños hacia la batería. Bajo esta definición de las cantidades termodinámicas, es también inmediato que si el sistema alcanzó el estacionario, siendo esto  $\rho_S^{(n)} - \rho_S^{(n-1)} = 0$ , todas ellas se anulan. Esto significa que mantener al sistema en un estado de equilibrio no tiene costo energético.

La evolución del modelo colisional considera el estado final de cada paso para definir el estado a un dado tiempo. Es posible obtener una ecuación diferencial para la evolución del sistema mediante el análisis del límite en el cual los pasos son infinitesimalmente pequeños. Para esto se busca calcular la derivada del estado luego de cada paso, y de allí encontrar una ecuación maestra para resolver la dinámica a todo tiempo. En la sección [1.4.2](#) se hace un desarrollo general sobre como hacer este procedimiento para un sistema con entornos con coherencias. Ese calculo incluye al de un sistema con ancillas térmicas, dando el resultado:

$$\dot{\rho}_S = -i[H_S, \rho_S] + \sum_i \gamma_i \mathcal{L}(\rho_S, A_i), \quad (1.32)$$

que es la ecuación maestra de Linblad. Esto quiere decir que el modelo colisional, en un límite de tiempo interacción corto, simula los procesos descriptos por la ecuación [\(1.32\)](#). La única excepción a tener en cuenta es que para el primer caso, la hipótesis de interacción débil es necesaria para hacer correctamente la deducción, mientras que en el modelo colisional esto no es necesario. Esto quiere decir que los procesos que describe el modelo colisional están obligados a corresponderse con la situación que definen al mismo, que es que los entornos sean continuamente renovados. Adicionalmente, debido a que el tiempo de interacción se vuelve infinitesimalmente pequeño, el potencial que media el contacto entre ancilla y sistema debe aumentar a medida que la duración del contacto disminuye, haciendo que la interacción sea necesariamente fuerte en este caso [\[27\]](#).

En particular, algunas situaciones físicas reales en las que el modelo colisional encaja adecuadamente son en la teoría de *micromaser* y la teoría de mediciones débiles. En la primera, se plantean átomos que interactúan uno a uno con un modo normal de una cavidad. Así, las partículas representan las ancillas, mientras que el sistema de interés es el modo normal [\[29, 30\]](#). Por otro lado, en la teoría de mediciones débiles, se quiere conocer las propiedades un sistema dado, continuamente. Para hacer esto se debe perturbar levemente al mismo en cada medición realizada. Las ancillas del modelo colisional son perfectas como los “medidores” responsables de producir una medición pseudo-continua y perturbativa [\[31, 32\]](#).

Una vez conseguido el estado de equilibrio, se quiere ver si el mismo es útil para el ámbito de las baterías cuánticas. Esto es, que este estado sea un

estado activo. Notar que este concepto es particularmente relevante porque quiere decir que, de existir, es un estado resistente ante perturbaciones y útil tanto para cargar como luego extraer su energía. A su vez no requiere un costo energético para ser mantenido. A continuación, se ejemplifica un caso así, mostrando que efectivamente existen.

### 1.3.1. Protocolo para un estado activo

Para generar de este modo un estado activo estacionario, se debe diseñar un potencial que lleve al sistema a dicho estado. Se considera entonces autooperadores del sistema y baño  $S_\alpha$  y  $A_\alpha$ , que satisfagan  $[H_S, S_\alpha] = \lambda_\alpha S_\alpha$  y  $[H_A, A_\alpha] = \lambda_\alpha A_\alpha$ . Luego, la interacción entre la batería y las ancillas como [13]:

$$V = \sum_{\alpha} g_{\alpha} S_{\alpha} \otimes A_{\alpha}, \quad (1.33)$$

donde  $g_{\alpha}$  es la constante de interacción. Este potencial cumple la siguiente relación de conmutación:

$$[V, -H_S + H_A] = 0. \quad (1.34)$$

Si se consideran los elementos de matriz de esta ecuación y la ecuación (1.24), se concluye que a menos de un término constante  $H_0$  es  $-H_S$ . Se toma entonces que  $H_0 = -H_S$ , lo que lleva a que el estacionario del mapa  $\mathcal{E}(\rho)$  es:

$$\hat{\rho}_{\beta} = \frac{e^{\beta H_S}}{\mathcal{Z}}. \quad (1.35)$$

donde  $\mathcal{Z} = \text{Tr}(e^{\beta H_S})$ , y es igual al caso de temperatura positiva solo si el espectro es simétrico respecto al cero. Este estado se corresponde con aquel que invierte completamente las poblaciones del estado térmico inicial del sistema. Se espera en consecuencia, que el estado al que el sistema llega sea uno activo debido a que ahora se encuentran invertidas las poblaciones respecto al térmico. Una vez se alcanza este estado estacionario, puede mostrarse que si el espectro de energía es simétrico respecto a un valor dado ( $E = \frac{E_i + E_{N+1-i}}{2}$ ) es posible elegir una unitaria que re-ordena los autovalores de manera tal que el estado pasivo es térmico [13], y por lo tanto se satura la cota (1.11) para la ergotropía.

Habiendo definido un proceso que lleva al sistema a un estado estacionario de equilibrio activo, se procede a cuantificar la eficiencia del mismo. Para esto, resulta natural considerar la ergotropía como recurso ganado, mientras que el trabajo aplicado el proceso cumple el rol de recurso gastado. Empleando

la usual definición de eficiencia se tiene que:

$$\eta = \frac{\mathcal{W}}{W} \quad (1.36)$$

donde  $\mathcal{W}$  es la ergotropía y  $W$  es el trabajo total del proceso. Se muestra en [13] que la ergotropía cumple el primer principio de la termodinámica, siendo esto:

$$\mathcal{W} = Q + W \quad (1.37)$$

lo que permite expresar a la eficiencia, cuando  $H_0 = -H_S$ , como :

$$\eta = 1 - \frac{|Q|}{W} = \frac{1}{2} \quad (1.38)$$

donde se utilizan las expresiones para calor y trabajo de las ecuaciones (1.29) y (2.10), que a su vez hicieron uso de la expresión (1.33) para el potencial. También se hace explícito que el calor en estos procesos es negativo (se disipa calor). Esto marca que la energía útil del proceso de carga con un potencial de la forma (1.33) siempre es la mitad de la energía invertida en cargar la batería, a diferencia de los procesos unitarios, donde toda la energía invertida contribuye a la carga de la batería. A modo de ejemplo, a continuación se muestra un proceso de carga disipativo de un qubit.

### 1.3.2. Ejemplo: proceso de carga de un qubit

Como se mencionó, se analiza un protocolo el protocolo previamente mencionado para un sistema de un qubit. En particular se considera que las ancillas también son qubits, y que sus hamiltonianos son idénticos al de la batería. Esto es:

$$H_S = \frac{\omega}{2} \sigma_z^S, \quad (1.39)$$

y

$$H_A = \frac{\omega}{2} \sigma_z^A. \quad (1.40)$$

Adicionalmente, los estados iniciales de ambos elementos serán térmicos a la misma temperatura. Siguiendo la ecuación (1.33), en este caso los autooperadores del sistema son  $\sigma_{\pm}$ , y se tiene así que la interacción debe tener la forma de:

$$V = g(\sigma_+^S \otimes \sigma_+^A + \sigma_-^S \otimes \sigma_-^A). \quad (1.41)$$

Este potencial cumple entonces lo requerido por la ec. (1.33) para el protocolo activo, y por lo tanto el estado estacionario del sistema es:

$$\hat{\rho}_{\beta} = \frac{e^{\beta \frac{\omega}{2} \sigma_z}}{\mathcal{Z}} \quad (1.42)$$

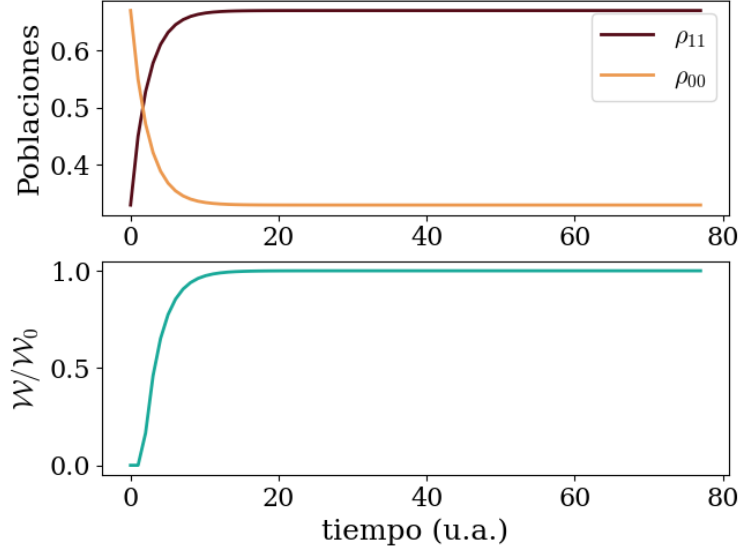


Figura 1.3: En la figura superior se muestran las poblaciones del fundamental y excitado del sistema en cuestión, en función del tiempo. Por otro lado, en la figura inferior se muestra la ergotropía normalizada por la ergotropía del estado estacionario, también en función del tiempo. Se muestra como al aumentar la población del estado excitado, la ergotropía aumenta de la misma manera. *Parámetros:*  $\beta = 3$ ,  $\omega = g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\tau = 1$ .

donde  $\mathcal{Z} = \text{Tr} \left( e^{\beta \frac{\omega}{2} \sigma_z} \right)$ . A partir de este estado puede calcularse fácilmente la ergotropía final del sistema. La misma tiene la forma de:

$$\mathcal{W}_0 = \omega \tanh \left( \beta \frac{\omega}{2} \right). \quad (1.43)$$

Para mostrar el proceso de carga para la batería, se simula numéricamente cada paso de la aplicación del mapa, en los que se calculan las poblaciones y la ergotropía del estado en ese paso. Estos resultados son mostrados en la figura 1.3. Se utilizan  $\omega = g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\beta = 3$  y  $\tau = 1$ . Se observa que la ergotropía aumenta a medida que el sistema se aproxima al estacionario, mostrando así que el mismo se encuentra finalmente en un estado activo.

La eficiencia de procesos que sigan este protocolo de carga va a ser siempre  $\frac{1}{2}$ , y es imposible modificar este hecho cambiando cualquiera de los parámetros ya existentes dentro del problema. Sin embargo, si se hace un planteo diferente en el que las auto-energías de ancilla y sistema son distintas, el resultado puede diferir [33]. En esta tesis se quiere estudiar qué es lo que sucede con el proceso de carga cuando el entorno se encuentra en un estado fuera del equilibrio térmico y posee coherencias cuánticas en la base de energías. De esta manera, a continuación se introducen algunas herramientas útiles para describir estos sistemas, así como también se revisan algunos trabajos

que analizan la influencia de este tipo de entornos en el rendimiento de ciclos termodinámicos.

## 1.4. Modelos colisionales en entornos levemente coherentes

Hasta ahora se revisaron procesos en los que se asumía que los elementos externos al sistema comenzaban en un estado estacionario de equilibrio y pasivo, en particular en uno térmico. Como se vio previamente, estos estados son inertes a la hora de extraer energía mediante procesos unitarios. Sin embargo, resultan ser útiles para la carga de baterías cuando se diseñan interacciones que conducen a estados estacionarios activos. Una pregunta que surge entonces es cómo cambia este proceso si el estado del entorno no tiene estas características.

En particular, se analizan estados que se diferencian del térmico por la presencia de coherencias en la base de energías. Esto significa que se encuentran representados por matrices densidad en dicha base con elementos no-nulos fuera de la diagonal. Llamar a un estado de estas características como uno fuera de equilibrio viene de la idea que el estado de Gibbs es el resultado de la termalización del sistema. Modificarlo conlleva entonces a una perturbación de dicho estado. Como se mencionó en la introducción de esta tesis, se intenta analizar el impacto de propiedades puramente cuánticas en los procesos termodinámicos y la presencia de coherencias cuánticas es una de ellas.

### 1.4.1. Estados con coherencias

Algunas formas de cuantificar las coherencias presentes en un estado son utilizar medidas como la norma  $\mathcal{U}_1$  de todos los elementos fuera de la diagonal respecto a una base dada, o la entropía relativa de coherencia [34]. Es vital notar que esta cantidad no puede tomar un valor arbitrario, ya que la positividad del estado puede dejar de estar garantizada. Depende entonces de la definición que se tome de las coherencias, la restricción que se toma para asegurar que se mantenga esa condición. En este trabajo se emplea la norma  $\mathcal{U}_1$ , que es la suma de los módulos de los elementos de la anti-diagonal del estado  $\rho$ :

$$\mathcal{U}_1(\rho) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}| \quad (1.44)$$

el factor  $\frac{1}{2}$  se incluye para evitar contar dos veces los módulos. En el caso en que se tenga un estado diagonal, y se desee incluirle coherencias, es necesario tener cuidado ya que la matriz densidad resultante tiene que respetar positividad. De esta manera, se considera como ejemplo un sistema de dimensión dos, en el que se muestran las condiciones necesarias que mantienen esto.

Se comienza considerando un estado térmico de temperatura inversa  $\beta$  y hamiltoniano  $H$ :

$$\omega_\beta(H) = p_\beta |0\rangle\langle 0| + (1 - p_\beta) |1\rangle\langle 1| \quad (1.45)$$

donde  $p_\beta = \text{Tr}(\sigma_- \sigma_+ \omega_\beta(H))$ . La pureza de este estado toma la forma de:

$$\mathcal{P}(\omega_\beta(H)) = 1 - 2 \left( \frac{\mu_\beta}{\mathcal{Z}} \right)^2 \quad (1.46)$$

donde se recuerda que la pureza de un dado estado  $\rho$  está definida como  $\mathcal{P}(\rho) = \text{Tr}(\rho^2)$ , y  $\mu_\beta^2 = p_\beta(1 - p_\beta)$ . Se quiere ahora agregar un parámetro al estado, para producir una transición continua entre uno térmico, y uno que posea coherencias. Para esto se hace la simple modificación de agregar en la anti-diagonal de la matriz densidad, un parámetro  $\mathcal{C}$ . El mismo modificaría al estado:

$$\rho_{coh} = p_\beta |0\rangle\langle 0| + (1 - p_\beta) |1\rangle\langle 1| + \mathcal{C} |0\rangle\langle 1| + \mathcal{C}^* |1\rangle\langle 0| \quad (1.47)$$

y la pureza del mismo resulta en:

$$\mathcal{P}(\rho_{coh}) = 1 - \frac{2(\mu_\beta^2 - |\mathcal{C}|^2)}{\mathcal{Z}^2}. \quad (1.48)$$

Se entiende entonces que si  $\mathcal{C} = 0$  el estado es térmico. Este parámetro, no puede tomar un valor arbitrario si se mantienen constantes las poblaciones, ya que es necesario mantener la positividad de la matriz densidad. Para respetar positividad, entonces se define un parámetro  $c$ , y se lo hace de manera tal que si  $0 \leq |c| \leq 1$  entonces la positividad este asegurada. Para hacer esto tiene que valer  $\mathcal{C} = \mu_\beta |c|$ . De esta manera, la pureza del estado toma la forma de:

$$\mathcal{P}(\rho_{coh}) = 1 - \frac{2(1 - |c|^2) \mu_\beta^2}{\mathcal{Z}^2} \quad (1.49)$$

y se cumple trivialmente que si  $|c| = 1$  el estado es puro. Por definición, si el valor de  $|c| > 1$ , la matriz densidad deja de ser positiva. Se tiene entonces que  $|c|$  sólo puede tomar valores entre 0 y 1, transitando entre un estado térmico y uno puro. La medida de coherencia en este caso es  $\mathcal{U}_1(\rho_{coh}) = \mu_\beta |c|$ , pero debido a que difieren únicamente en un factor, se considera a las coherencias

en esta tesis como  $|c\rangle$ . Este estado con coherencias puede pensarse como la suma entre un estado térmico, y un término proporcional a estas mismas:

$$\rho_{coh} = \omega_\beta(H) + |c\rangle\langle c| \quad (1.50)$$

donde  $\chi = \mu_\beta (\cos(\theta) \sigma_x + \sin(\theta) \sigma_y)$ , y  $\theta = \arg(c)$ .

Una vez definido apropiadamente este estado con coherencias, se procede a ver su efecto como ancillas en un modelo colisional, buscando encontrar ventajas o desventajas por sobre el caso ya revisado.

### 1.4.2. Modelos colisionales levemente coherentes

Para estudiar y ejemplificar el efecto de las coherencias en un proceso de carga de una batería cuántica, se emplea un sistema que replique al empleado en la sección [1.3.2](#). Como consecuencia, los hamiltonianos y potencial de interacción serán los mostrados allí. La única diferencia presente entre dicho proceso y el que se va a estudiar está en el estado de las ancillas. El mismo es el estado  $\rho_{coh}$  introducido en la ecuación [\(1.50\)](#). La acción del mapa resulta entonces:

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_A[U(\rho \otimes \rho_{coh})U^\dagger] \quad (1.51)$$

donde  $U$  es la unitaria definida en la sección [1.3.1](#). Como ya se vio previamente, la acción sucesiva de este mapa brinda la evolución temporal que se quiere estudiar. La situación es en definitiva la presentada en la figura [1.2](#), utilizando específicamente  $\rho_A = \rho_{coh}$ .

Los primeros trabajos que buscaron extender estas ideas para entornos fuera del equilibrio, son las referencias [\[15, 16\]](#). Allí se derivan ecuaciones maestras para modelos colisiones con ancillas que poseen coherencias en el límite de interacción corta. Adicionalmente, en el primer trabajo se encuentra a la coherencia como un recurso mediante un termino unitario en la energía, además de modificaciones para la primera y segunda ley que incluyen relaciones no triviales con este parámetro. En el segundo encuentran comportamientos no convencionales de un sistema atravesando un ciclo de Carnot, como un refrigerador híbrido capaz de refrigeración y generación de trabajo, o regiones en el espacio de parámetros en donde el sistema funciona por encima de la eficiencia de Carnot clásica. En este caso, se analizara dicha situación para el caso de baterías, con el objetivo de obtener tanto la evolución a todo tiempo como el estado estacionario del sistema. Para ello, se consideran también, las condiciones necesarias para adaptar al sistema a esta aproximación. En estos trabajos, se define al estado de la ancilla como:

$$\rho_{coh} = \omega_\beta(H_A) + \sqrt{\tau}|\tilde{c}\rangle\langle\tilde{c}| \quad (1.52)$$

donde el factor  $\sqrt{\tau}$  se emplea para que las aproximaciones sean consistentes, lo que implica ahora que  $|c| = \sqrt{\tau}|\tilde{c}|$ . En este estado, la medida de coherencia es  $\sqrt{\tau}|\tilde{c}|$ , pero para este sistema se piensa en  $|\tilde{c}|$  cuando se habla de coherencias. Notar que esto implica que el valor de las coherencias, para el caso de la ecuación maestra, debe ser pequeño. Por esta razón, a estos modelos se los llama *modelos colisionales con entornos levemente coherentes*. Por otro lado, el potencial a usar será  $V$ , que a priori comparte la forma propuesta en la sección del proceso de carga de un qubit.

A continuación se muestra la deducción de dicha ecuación maestra. Se comienza por usar el desarrollo de Baker-Housdorff-Campbell a segundo orden en  $\tau$  [35], se obtiene que:

$$\rho(n\tau) = \rho_S \otimes \rho_{coh} - i\tau[H, \rho_S \otimes \rho_{coh}] - \frac{\tau^2}{2}[\hat{V}, [\hat{V}, \rho_S \otimes \rho_{coh}]] \quad (1.53)$$

donde se entiende que  $\rho_S \otimes \rho_A = \rho_S((n-1)\tau) \otimes \rho_A$ . Considerando ahora que el tiempo de interacción se vuelve infinitesimalmente pequeño, el potencial debe ser re-normalizado para compensar por la poca energía intercambiada en ese tiempo. Se busca entonces que a medida que la interacción sea mas corta la intensidad aumente, y por lo tanto se redefine al mismo como  $\hat{V} = \frac{V}{\sqrt{\tau}}$ . Esto permite que la intensidad de la interacción escale inversamente al tiempo de interacción, y a medida que los sistemas son puestos en contacto durante menos tiempo interactúen mas fuertemente. Se busca ahora computar la derivada de  $\rho_S$ , por lo que se realiza el cálculo:

$$\dot{\rho}_S = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\text{Tr}_A[U(\rho_S \otimes \rho_{coh})U^\dagger] - \rho_S \otimes \rho_{coh}}{\tau}. \quad (1.54)$$

Es decir, nos quedaremos con el desarrollo de la ecuación (1.53) a orden uno. Debido a la re-normalización de  $\hat{V}$ , el tercer término es de este orden, lo que brinda una dinámica distinta a la unitaria, en particular será el responsable de la dinámica disipativa. Por otro lado, el factor  $\sqrt{\tau}$  presente en el estado de la ancilla también hace que el resultado final se vea modificado. La ecuación maestra resulta entonces:

$$\dot{\rho}_S = -i[H_S + |\tilde{c}| \text{Tr}_A(V\chi), \rho_S] - \frac{1}{2}[V, [V, \rho_S \otimes \omega_\beta(H_A)]]. \quad (1.55)$$

El efecto de las coherencias presentes en el entorno se encuentra relacionado con la aparición de un Hamiltoniano efectivo  $H_S^{ef} = H_S + |\tilde{c}| \text{Tr}_A(V\chi)$  que, dependiendo el proceso, puede resultar análogo a un campo externo. La dinámica disipativa sin embargo, no se ve afectada por  $|\tilde{c}|$ , ya que el término del Linbladiano no se ve modificado. Por otra parte, el caso de  $|\tilde{c}| = 0$  se corresponde con la ecuación maestra para el proceso sin coherencias [36].

A continuación, se estudia el estado estacionario de este último proceso, así como también la eficiencia de carga, en el caso que sea activo. Se busca analizar las diferencias respecto al valor  $\frac{1}{2}$  mencionado previamente. Adicionalmente, se pretende analizar el efecto del tiempo de interacción en el modelo colisional con coherencias, fuera del régimen de interacciones cortas.

## Capítulo 2

# Baterías en entornos fuera del equilibrio

En este capítulo se estudia la eficiencia de carga de procesos utilizando modelos colisionales con coherencias en el entorno. Se analiza un modelo colisional levemente coherente, encontrando que en el mismo no se supera la eficiencia el proceso sin coherencias. Con tal de vencer este valor, se recurre a procesos con tiempo de interacción finito. Al establecer una expresión para la eficiencia de este proceso, se encuentra estudiándola en función de los parámetros que el proceso sin coherencias es superado. En particular se muestra que el máximo valor que esta toma es de  $\frac{2}{3}$ . Se encuentra además que el caso de temperaturas bajas es equivalente al de un estado puro asociado al  $|0\rangle$ . Por último, se cierra el proceso de carga mediante una termalización del estado pasivo, permitiendo repetir el ciclo sin modificar la eficiencia de carga y descarga del mismo.

### 2.1. Carga de baterías en modelos colisionales levemente coherentes

Como se mencionó anteriormente, el modelo colisional es tal que si se emplean entornos térmicos en el régimen de tiempos cortos, la dinámica puede ser descripta mediante la ecuación de Linblad. Utilizando ancillas con coherencias es posible derivar una ecuación es similar, en la que aparece un Hamiltoniano efectivo que modifica la evolución unitaria, pero deja a la disipativa intacta.

A continuación se estudia cómo cambia el estado estacionario frente a esta dinámica, y cuál es la nueva eficiencia del proceso. Más importante aún, resulta clave entender si la nueva contribución al Hamiltoniano permite

mejorar la eficiencia en relación a la del proceso sin coherencias.

### 2.1.1. Estado estacionario

El sistema que se va a estudiar es el de qubits, empleando lo visto en la sección [1.4.2](#). Se considera que las coherencias  $\tilde{c}$  son reales, y que por lo tanto:

$$\chi = \mu_\beta \sigma_x. \quad (2.1)$$

Como se mostró en la deducción para llegar a la ecuación maestra, el potencial requiere de una re-definición para que la dinámica no sea la unitaria. Empleando esto junto con la forma de la ecuación [\(1.33\)](#) se tiene que:

$$\hat{V} = \frac{V}{\sqrt{\tau}} = \frac{\tilde{g}}{\sqrt{\tau}} (\sigma_+^S \otimes \sigma_+^A + \sigma_-^S \otimes \sigma_-^A). \quad (2.2)$$

La idea es entender si en un mismo proceso donde sin coherencias se obtenía un estado estacionario activo, ahora se tiene lo mismo, y si por otro lado se puede vencer la eficiencia del mismo. Empleando este potencial se obtiene que el término disipativo toma la forma de:

$$\dot{\rho} = -i[H_S + \mu_\beta \tilde{g} |\tilde{c}| \sigma_x, \rho] + \tilde{g} (p_\beta \mathcal{L}(\rho, \sigma_-) + (1 - p_\beta) \mathcal{L}(\rho, \sigma_+)) \quad (2.3)$$

donde se recuerda que  $\mathcal{L}(\rho, A_i) = A_i \rho A_i^\dagger - \frac{1}{2} \{\rho, A_i^\dagger A_i\}$ , y se obvia el sub-índice  $\mathcal{S}$  para notar el estado del sistema. Notar que a diferencia de la ecuación [\(1.32\)](#), ahora las tasas de decaimiento no están representadas por un único coeficiente, si no que por el producto entre  $\tilde{g}$  y las poblaciones del estado térmico. Las coherencias entonces dan un hamiltoniano efectivo  $H_S^{eff} = H_S + \mu_\beta \tilde{g} |\tilde{c}| \sigma_x$ , que en este caso puede ser interpretado como un espín bajo el efecto de un campo en  $\hat{x}$ .

Esta ecuación diferencial puede representarse también en términos de matrices. Se tiene de esta manera, que la derivada del estado es igual a una función del mismo:

$$\dot{\rho} = \mathcal{K}(\rho) + \mathcal{M}, \quad (2.4)$$

donde  $\mathcal{K}(\rho)$  tiene la forma:

$$\mathcal{K}(\rho_S) = \begin{pmatrix} -i\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|(\rho_{01} - \rho_{10}) - \tilde{g}^2\rho_{11} & 2i\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|\rho_{11} - ia^*\rho_{10} \\ -2i\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|\rho_{11} + ia\rho_{10} & i\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|(\rho_{01} - \rho_{10}) + \tilde{g}^2\rho_{11}, \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

donde  $a = \omega + i\frac{\tilde{g}^2}{2}$  y  $\rho_{ij}$  son los elementos de la matriz densidad del sistema. Para la definición de  $a$ , se recuerda que en la expresión [\(2.2\)](#) hay y una normalización por sobre el potencial, que en consecuencia cambia las unidades

de  $\tilde{g}$  de manera tal que  $\tilde{g}^2$  tiene unidades de energía. Esta función  $\mathcal{K}(\rho)$  se corresponde con la parte homogénea de la ecuación diferencial, mientras que  $\mathcal{M}$  brinda la solución particular:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \tilde{g}^2 p_\beta & -i\tilde{g}^2 \mu_\beta |\tilde{c}| \\ i\tilde{g}^2 \mu_\beta |\tilde{c}| & -\tilde{g}^2 p_\beta \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Algo a notar, es que en el caso sin coherencias la derivada de los elementos de matriz de la anti-diagonal no están acopladas a los elementos de matriz de la diagonal, y vice-versa. Lo que quiere decir esto, es que si el estado inicial no posee coherencias, como lo es en el caso de los estados térmicos, no podrán generarse a lo largo de la evolución. Por otro lado, en el caso de tener coherencias en los estados de las ancilla, al existir un acoplamiento ente términos diagonales y anti-diagonales, las coherencias van a ser distintas de cero en la batería. Fundamentalmente, lo que se está observando es que va a haber un pasaje de coherencias de baños a sistema, y las mismas seguirán la dinámica dictada por  $\mathcal{K}(\rho)$ .

Se quiere ahora calcular el estado estacionario del sistema. Para esto se pide que  $\dot{\rho} = 0$ . Al imponer esa condición, la ecuación (2.3) se convierte en un sistema de cuatro ecuaciones para resolver el estado deseado. Notar que como los estados físicos tienen de traza uno, hay dos ecuaciones que no son independientes, y las incógnitas a resolver son tres en vez de cuatro. Resolviéndolas, se obtiene el siguiente resultado:

$$\hat{\rho}_{11} = \frac{(\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|)^2 + |a|^2\gamma^-}{2(\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|)^2 + |a|^2}, \quad \hat{\rho}_{10} = \frac{a\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|(2\gamma^- - 1)}{2(\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|)^2 + |a|^2} \quad (2.7)$$

$\hat{\rho}_{ij}$  son los elementos de matriz del estado estacionario, y debido a que el mismo tiene traza unitaria  $\hat{\rho}_{00} = 1 - \hat{\rho}_{11}$  y por positividad  $\hat{\rho}_{01} = (\hat{\rho}_{10})^*$ . Adicionalmente se cumple que si  $|\tilde{c}| = 0$ , se recupera el estado con poblaciones invertidas del proceso sin coherencias. A partir de este estado, se busca encontrar la ergotropía y trabajo del proceso, permitiendo calcular así la eficiencia de manera analítica.

### 2.1.2. Eficiencia

Para calcular la ergotropía, se debe diagonalizar el estado estacionario, y re-ordenar sus autovalores para finalmente obtener el estado pasivo. El mismo se consigue a partir de su definición en la sección 1.1 del capítulo anterior, asignando al de menor valor al estado de mayor energía y vice-versa. De esta manera el estado pasivo resulta:

$$\sigma_{\hat{\rho}} = \lambda_0 |1\rangle\langle 1| + \lambda_1 |0\rangle\langle 0| \quad (2.8)$$

donde  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$  son los autovalores de  $\hat{\rho}$  y sus expresiones son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{|a| \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \sqrt{|a|^2 + (2\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|)^2}}{2\left((\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|)^2 + |a|^2\right)} \quad (2.9)$$

y vale que  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1$  debido a la invarianza de la traza ante transformaciones unitarias. Finalmente, usando la definición de  $\mathcal{W}$  llegamos a la expresión final:

$$\mathcal{W} = \frac{\omega|a|^2 \tanh\left(\frac{\omega\beta}{2}\right)}{(2(\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|)^2 + |a|^2)} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|}{|a|}\right)^2}\right) \quad (2.10)$$

que en el caso sin coherencias recupera la expresión para ergotropía de  $\mathcal{W} = \omega \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)$ . Resta ahora calcular el trabajo empleado para cargar la batería, porque si bien la ergotropía es una medida de la energía disponible en el sistema, es importante considerar el gasto energético empleado en cargarla.

Para el cálculo de  $W$ , se considera la expresión de la derivada del mismo:

$$\dot{W} = \text{Tr}((H_S + H_B) \dot{\rho}). \quad (2.11)$$

Notar que en esta expresión, la derivada es la del sistema total, no la de  $S$ . Esto hace que no se pueda usar directamente la ecuación maestra (2.3), y nuevamente la herramienta a recurrir es a un desarrollo a orden uno en  $\tau$  para calcular la derivada. Realizando el mismo se llega finalmente a que:

$$\dot{W} = 2\omega\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}| \left( i(\rho_{10} - \rho_{01}) - \frac{\tilde{g}}{\mu_\beta|\tilde{c}|}(\rho_{11} - p_\beta) \right). \quad (2.12)$$

Resta entonces integrar esta expresión en el tiempo que dura el proceso para calcular el trabajo. Los detalles del cómputo son tratados en el apéndice A, y su resultado es:

$$W = \frac{2\omega \tanh\frac{\beta\omega}{2}}{2(\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|)^2 + |a|^2} \left( (\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|)^2 + |a|^2 \right) \quad (2.13)$$

donde  $W$  es la integral de  $\dot{W}$ , y nuevamente se cumple que a coherencias nulas la expresión del trabajo  $W = 2\omega \tanh\frac{\beta\omega}{2}$ , donde es inmediato verificar que vale para el caso sin coherencias si se usa que la eficiencia en ese caso es  $\frac{1}{2}$  y por lo tanto  $\mathcal{W} = 2W$ .

Una vez conseguidas la ergotropía y el trabajo, resta calcular su cociente para tener la eficiencia del proceso. La misma sigue entonces que:

$$\eta = \frac{\mathcal{W}}{W} = \frac{1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}}{4 + \epsilon^2} \quad (2.14)$$

donde:

$$\epsilon = \frac{2\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|}{\omega^2 + \frac{\tilde{g}^2}{4}}, \quad (2.15)$$

que es el único parámetro del cual depende esta expresión. Gracias a esto, es fácil ver que independientemente de la combinación de parámetros utilizados, siempre vale que  $\eta \leq \frac{1}{2}$ . Esto quiere decir que la eficiencia del proceso, en el límite de tiempos cortos de interacción, no puede superar la eficiencia del proceso sin coherencias. En la figura 2.1 se muestra la gráfica de la eficiencia en función de  $\epsilon$ .

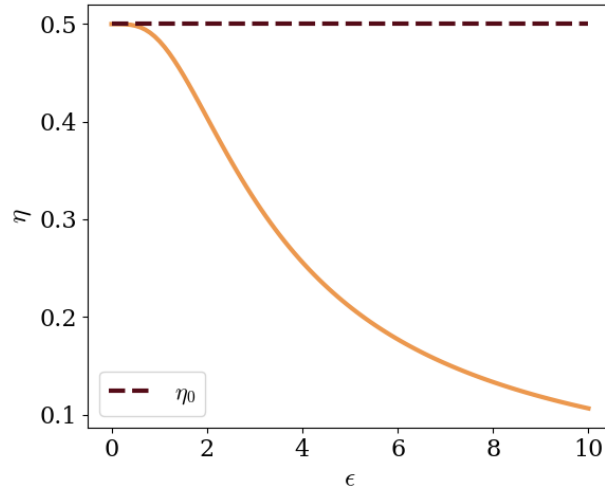


Figura 2.1: Eficiencia del proceso en el régimen de ecuación maestra, en función del parámetro  $\epsilon = \frac{2\tilde{g}\mu_\beta|\tilde{c}|}{\omega^2 + \frac{\tilde{g}^2}{4}}$ . Se observa entonces que con la ecuación maestra no puede superarse la eficiencia de un proceso sin coherencias.

Es entonces imposible vencer el valor sin coherencias de la eficiencia empleando un modelo colisional levemente coherente, utilizando el potencial de interacción de la ecuación (2.2). Sin embargo, se puede prescindir del formalismo de ecuaciones maestras, si se considera que el tiempo de interacción deja de ser infinitamente pequeño. Para esto entonces se debe aplicar el mapa de manera discreta en el tiempo, y considerar al estado como una sucesión de pasos que eventualmente alcanzaran el estado estacionario.

## 2.2. Carga de baterías con coherencias y tiempo de interacción finitos

Una vez estudiado el proceso de carga con coherencias pequeñas e interacciones cortas, se procede a estudiar el proceso con el modelo colisional completo. Esto es, con un tiempo de interacción y coherencias finitas. Para hacer esto, se comienza desde cero con la definición del mapa que caracteriza el proceso, para luego hallar el estado estacionario.

### 2.2.1. Estado estacionario

En términos del modelo colisional, se define un mapa el mapa que actúa sobre el sistema sucesivamente hasta alcanzar el estado estacionario. Para obtener su forma se procede en forma análoga a como se hizo la ecuación maestra. A partir del mismo se calcula, la ergotropía y el trabajo. Como ya se vio, la acción del mapa tiene la forma de:

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{A}}[U(\rho \otimes \rho_{coh})U^\dagger], \quad (2.16)$$

donde el estado estacionario de este mapa está definido a partir de  $\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \hat{\rho}$ . Para usar esa ecuación, primero se analiza cómo actúa la unitaria  $U$  sobre el estado. En primer lugar, se estudia el Hamiltoniano total del sistema resulta ser:

$$H = \frac{\omega}{2} (\sigma_z \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{A}} + \mathbb{I}_{\mathcal{S}} \otimes \sigma_z) + g (\sigma_+^{\mathcal{S}} \otimes \sigma_+^{\mathcal{A}} + \sigma_-^{\mathcal{S}} \otimes \sigma_-^{\mathcal{A}}). \quad (2.17)$$

Es fácil ver que este hamiltoniano es un hamiltoniano por bloques que actúa en los subespacios  $\mathcal{D} = \{|00\rangle, |11\rangle\}$  y al  $\mathcal{C} = \{|10\rangle, |01\rangle\}$  de la base  $\sigma_z$  para cada uno de los sistemas. En particular, es fácil ver que actúa trivialmente sobre  $\mathcal{C}$ , mientras que es posible escribirlo como una combinación lineal de matrices de Pauli definidas en  $\mathcal{D}$ . Es decir, produce transiciones únicamente entre estados  $|00\rangle$  y  $|11\rangle$ . El término de interacción se puede representar como un operador proporcional a  $\sigma_x$  en el espacio  $\mathcal{D}$ , mientras que el otro término, correspondiente al Hamiltoniano libre, como otro proporcional a  $\sigma_z$  sobre este mismo espacio. Por esta razón, al exponenciar el Hamiltoniano se obtiene una unitaria de la forma:

$$U = (\cos(\Omega\tau) \mathbb{I}_{\mathcal{D}} - i(\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \sin(\Omega\tau)) \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{C}}, \quad (2.18)$$

donde  $\Omega = \sqrt{\omega^2 + g^2}$ ,  $\hat{n} = (\frac{g}{\Omega}, 0, \frac{\omega}{\Omega})$  y  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ . La frecuencia natural de oscilación del sistema es entonces  $\Omega$ , y dependiendo del valor de  $\tau$  utilizado, el estado final del sistema se modifica según la ecuación (2.18).

La aplicación del mapa sobre el sistema entonces se construye mediante la aplicación de este operador sobre el estado  $\rho \otimes \rho_{coh}$  y efectuando la traza sobre los grados de libertad de la ancilla. Una vez realizado esto, se obtiene la representación matricial del superoperador asociado al mapa, de manera que  $\mathcal{E}(\rho) \equiv \Phi \vec{\rho}$ . A partir de ahora, cuando se hable de mapa y superoperador se utiliza la notación  $\Phi$ . Para hacerlo debe tomarse un orden particular en el que formar el vector de la matriz densidad. En este caso se opta por  $(\vec{\rho})^T = (\rho_{00}, \rho_{11}, \rho_{01}, \rho_{10})$ , y la expresión del superoperador resulta:

$$\Phi = \begin{pmatrix} p_\beta |X|^2 + (1 - p_\beta) & (1 - p_\beta) |Y|^2 & \mu_\beta c XY^* & \mu_\beta c^* X^* Y \\ p_\beta |Y|^2 & p_\beta + (1 - p_\beta) |X|^2 & \mu_\beta c XY & \mu_\beta c^* X^* Y^* \\ \mu_\beta c^* Y^* & \mu_\beta c^* Y & X & 0 \\ \mu_\beta c Y & \mu_\beta c Y^* & 0 & X^* \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

donde los parámetros  $X$  y  $Y$  siguen las expresiones:

$$X = \cos(\Omega\tau) + i \frac{\omega}{\Omega} \sin(\Omega\tau), \quad (2.20)$$

y

$$Y = -i \frac{g}{\Omega} \sin(\Omega\tau). \quad (2.21)$$

Al plantear la condición para despejar el estado estacionario:

$$\Phi \hat{\rho} = \hat{\rho} \quad (2.22)$$

se obtienen 4 ecuaciones de la misma manera que para la ecuación maestra. Nuevamente dos de ellas no son independientes, y al resolver las tres restantes se obtiene el estado estacionario final:

$$\hat{\rho}_{11} = \frac{p_\beta - (\mu_\beta |c|)^2 (1 - |G|^2)}{1 - 2(\mu_\beta |c|)^2 (1 - |G|^2)}, \quad \hat{\rho}_{10} = \frac{G \mu_\beta c (2p_\beta - 1)}{1 - 2(\mu_\beta |c|)^2 (1 - |G|^2)}, \quad (2.23)$$

donde

$$G = \frac{ig \sin(\Omega\tau)}{\Omega (1 - \cos(\Omega\tau)) + i \omega \sin(\Omega\tau)}, \quad (2.24)$$

y nuevamente vale que  $\hat{\rho}_{00} = 1 - \hat{\rho}_{11}$  y  $\hat{\rho}_{01} = (\hat{\rho}_{10})^*$ . Lo primero a destacar, es que ahora el estado estacionario depende explícitamente del valor de  $\tau$  tomado. No sólo eso, si no que el estado es periódico con este tiempo, ya que la única dependencia con el mismo está dentro de los argumentos de la función periódica  $G$ . El período de estas funciones está relacionado con la frecuencia  $\Omega = \sqrt{\omega^2 + g^2}$ , la cual es esencial para determinar el comportamiento periódico de todas las cantidades a calcular. Dicha periodicidad proviene de la

que aparece naturalmente en el proceso unitario que atraviesa el sistema durante cada iteración. La misma termina trasladándose al proceso entero, con todos los pasos incluidos. Esto quiere decir también que los estados que estén separados por una diferencia de tiempo de interacción que sea múltiplo de  $\frac{2\pi}{\Omega}$  serán los mismos, y que por lo tanto analizar valores de  $\tau$  que superen  $\tau' = \frac{2\pi}{\Omega}$  carece de sentido. Por otro lado este modelo sin coherencias se corresponde con los resultados previos [13, 33].

## 2.2.2. Eficiencia

Nuevamente, se busca calcular la eficiencia del proceso. Para esto se utiliza una propiedad muy útil de este proceso, y que se demuestra a continuación, que asegura que el trabajo realizado es el doble de la energía interna. La utilidad de este hecho recae en que para el computo analítico del trabajo se debe conocer el estado del entorno en cada paso. Al encontrar una relación entre trabajo y energía, se evita este problema ya que la energía interna sólo depende del estado del estado de  $\mathcal{S}$ . Usando que  $H_0 = -H_S$ , la expresión del trabajo en el paso  $n$  es (2.10):

$$W_n = \text{Tr} \left[ (H_S + H_A) \left( \rho^{(n)} - \rho_0^{(n)} \right) \right], \quad (2.25)$$

donde se recuerda que  $\rho^{(n)} = U \rho_0^{(n)} U^\dagger$ , siendo  $\rho_0^{(n)} = \rho_S^{(n-1)} \otimes \rho_{coh}$ . Como el proceso atravesado por la batería, exceptuando las ancillas, es el correspondiente al de la sección 1.3.1, se puede garantizar que  $[U, -H_S + H_A] = 0$ . Usando estos últimos hechos, y re-escribiendo:

$$H_S + H_A = 2H_S + (-H_S + H_A), \quad (2.26)$$

es fácil ver que:

$$W_n = 2 \text{Tr} \left[ H_S \left( \rho^{(n)} - \rho_0^{(n)} \right) \right] + \text{Tr} \left[ (-H_S + H_A) \left( \rho^{(n)} - \rho_0^{(n)} \right) \right]. \quad (2.27)$$

Usando la definición de  $\rho^{(n)}$  y que la unitaria conmuta con  $(-H_S + H_A)$ , puede verse que el segundo término se anula. Trazando ahora únicamente sobre los grados de libertad de la ancilla se tiene que:

$$W_n = 2 \text{Tr}_S [H_S \left( \rho_S^{(n)} - \rho_S^{(n-1)} \right)] \quad (2.28)$$

donde  $\rho_S^{(n)} = \text{Tr}_A[\rho^{(n)}]$ . A partir de la ecuación (1.30), puede verse que la expresión de trabajo mostrada en (2.28) es exactamente dos veces el valor de la energía. Notar que este es un resultado general, y sólo depende de que el

sistema cumpla las condiciones presentadas en la Sección [1.3.1](#) del Capítulo 1. Como esta relación vale para un paso arbitrario  $n$ , debe valer para el trabajo y energía totales. Usando la ecuación [\(2.28\)](#) y la definición de la ergotropía [\(1.3\)](#), se tiene que:

$$\eta = \frac{\text{Tr}[H_{\mathcal{S}}(\hat{\rho} - \sigma_{\hat{\rho}})]}{2 \text{Tr}[H_{\mathcal{S}}(\hat{\rho} - \omega_{\beta}(H_{\mathcal{A}}))]} \quad (2.29)$$

Recordando las definiciones del estado estacionario [\(2.23\)](#), el estado de Gibbs [\(1.45\)](#) y del estado pasivo [\(1.5\)](#), y calculando las trazas presentes, puede llegarse a que la expresión de la eficiencia es:

$$\eta = \frac{(\lambda_1 - \hat{\rho}_{00})}{2(p_{\beta} - \hat{\rho}_{00})} \quad (2.30)$$

donde  $\lambda_1$  es el mayor autovalor de  $\hat{\rho}$ . Notar que la eficiencia sólo depende de los elementos de matriz de distintas matrices densidad, por lo que no tiene unidades. Para calcular  $\lambda_1$ , se debe diagonalizar  $\hat{\rho}$ . El mismo toma la forma de:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{1 + (2\mu_{\beta}|c||G|)^2} (2p_{\beta} - 1)}{(1 - 2(\mu_{\beta}|c|)^2 (1 - |G|^2))} \right) \quad (2.31)$$

mientras que por la invarianza de la traza ante las transformaciones unitarias,  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1$ . Notar que si  $|c| = 0$  entonces  $\lambda_1 = p_{\beta}$ , de lo cual nuevamente se recupera el caso correspondiente al proceso sin coherencias. Todos los elementos de matriz allí presentes son conocidos, y ante su reemplazo y un poco de álgebra se llega finalmente a la ecuación general para la eficiencia:

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{1 + (2\mu_{\beta}|c||G|)^2}}{4(1 - (\mu_{\beta}|c|)^2 (1 - |G|^2))}. \quad (2.32)$$

Como se mencionó previamente, la periodicidad del estado estacionario es trasladada a la eficiencia del proceso al depender esta directamente del mismo.

Se comienza por estudiar el comportamiento de la eficiencia en función de la coherencia. Para esto se toma que  $\Omega = 1$  y que  $\omega = g$ . Se consideran además regímenes de alta y baja temperatura, con distintos valores de  $\tau$  para entender su efecto parcialmente. El régimen intermedio de la temperatura no es relevante, debido a que la función que expresa a la misma en el sistema ( $\mu_{\beta}$ ) es monótonamente creciente con la temperatura. En primer lugar, se observa en la figura [2.2](#) que, en efecto, es posible superar la eficiencia del caso sin coherencias. Por otro lado, dependiendo del valor de tiempo de interacción utilizado, la eficiencia crece o decrece en función de la coherencia. En

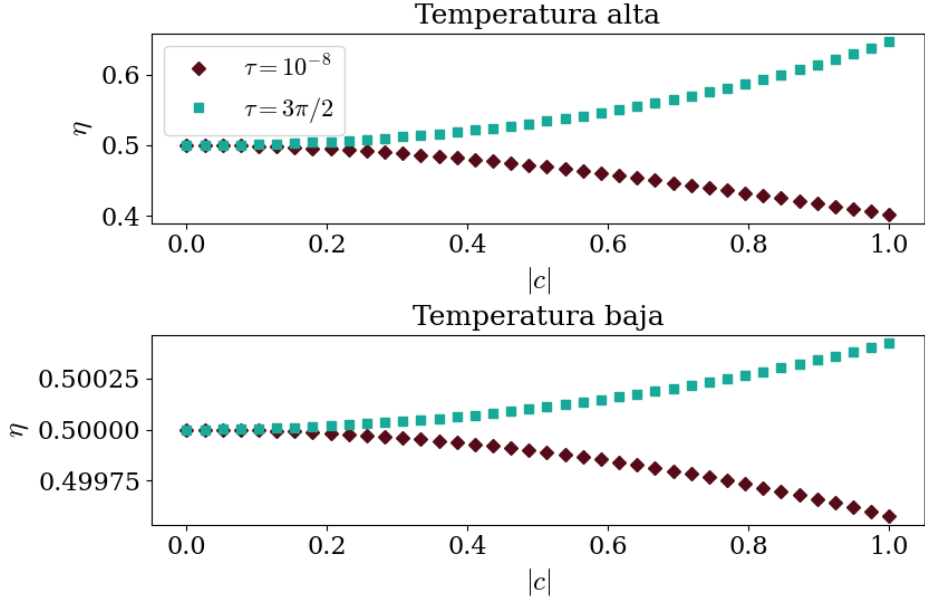


Figura 2.2: Figuras de eficiencia en función de coherencia, para distintos valores de  $\tau$ , en regímenes de temperatura alta y baja. Puede observarse que al cambiar la temperatura el comportamiento de cada curva no cambia, no así el orden de magnitud alrededor del cual se encuentran. Para temperaturas altas se ve que la eficiencia alcanza a superar el 60% mientras que para temperaturas bajas la eficiencia apenas sobrepasa el caso sin coherencias. Por otro lado, se encuentra que a tiempos de interacción cortos la eficiencia decrece como lo hacía en la ecuación maestra. *Parámetros:*  $g = \frac{1}{\sqrt{2}} = \omega$ ,  $\beta = 10^{-3}$  (Temperatura alta) y  $\beta = 10$  (Temperatura baja).

particular, para  $\tau = 10^{-8}$  la eficiencia siempre decrece. Esto es compatible con lo encontrado a partir de la ecuación maestra.

En los dos valores empleados de temperatura, es notable el crecimiento de la eficiencia con la misma, así como en el cambio que atraviesa al modificar  $|c|$ . Por último, es esencial destacar que si bien en distintos órdenes de magnitud, la eficiencia del proceso sin coherencias es superada en ambos valores de temperatura para  $\tau = \frac{3\pi}{2}$ . Esto quiere decir, que a priori ya se puede asegurar que existen, a partir del modelo colisional con ancillas coherentes, procesos posibles con mayor eficiencia.

A continuación se estudia la eficiencia en función de  $\tau$ . Como ya se mencionó, y demostró en la ecuación (2.32), el comportamiento de la misma es periódica en función de este parámetro. Esto es visible en la figura 2.3, donde se grafica entre 0 y  $2\pi$  usando  $\Omega = 1$ . Puede entonces verse cual es el efecto de aumentar y disminuir el valor de  $g$  y  $|c|$ .

En la figura 2.3 puede verse la eficiencia en función de  $\tau$  para distintos valores de  $|c|$ , en regímenes de interacción fuerte y débil. Se ignora nueva-

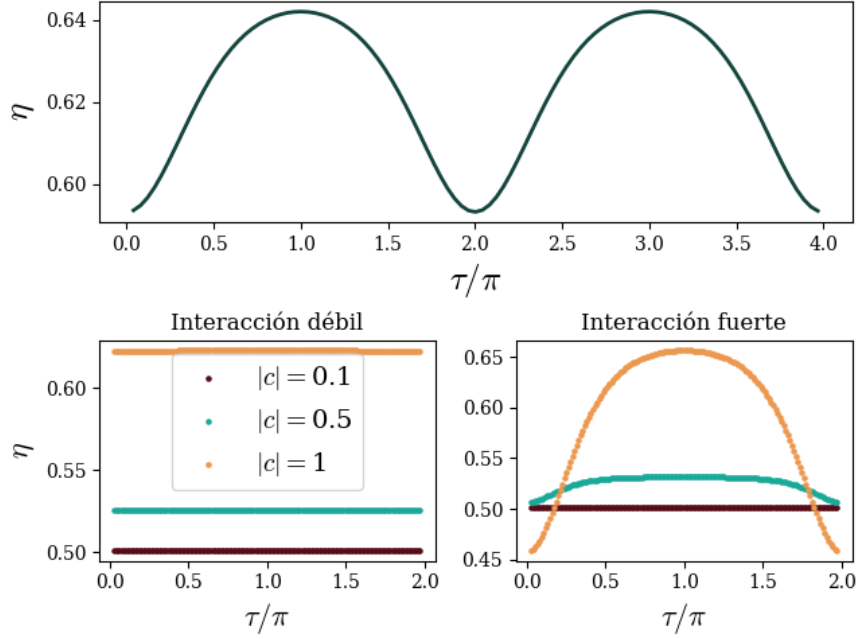


Figura 2.3: Gráficos de eficiencia en función de  $\tau$  para distintas coherencias, en regímenes de interacción fuerte y débil. Adicionalmente se grafica la eficiencia en función de este mismo parámetro para un rango mayor, mostrando explícitamente así la periodicidad ya mencionada. *Parámetros:* Para los gráficos para distintas coherencias se uso  $\beta = 1$ ,  $g = 0.1$  (Interacción débil),  $g = 0.9$  (Interacción fuerte),  $\omega = \sqrt{1 - g^2}$ . Para el gráfico que muestra la periodicidad, se uso  $\beta = 1$ ,  $g = \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $|c| = 1$ .

mente un régimen intermedio porque  $g$  se expresa únicamente a partir de funciones crecientes con el mismo. También, se muestran dos períodos de la función, donde se observa su periodicidad explícitamente. Puede notarse la diferencia cualitativa entre los distintos regímenes. Al interactuar débilmente, el valor de  $\tau$  no modifica sustancialmente la eficiencia. Este no es el caso para la coherencia, que lo hace de manera similar tanto en el régimen de interacción fuerte como en débil. Se observa que al interactuar más fuertemente, la elección del tiempo de interacción empleado representa mayor importancia. Al interactuar débilmente, lo opuesto ocurre. Esto puede ocurrir debido a que en este régimen la presencia prolongada de una ancilla no significa, energicamente hablando, un cambio importante. Para  $|c| \approx 0$  la eficiencia es aproximadamente constante y cercana a  $\frac{1}{2}$ , como puede verse desde la expresión (2.32).

Puede observarse también, que dependiendo del valor de la interacción y el tiempo, la coherencia hará crecer, decrecer o tener un comportamiento no monótono a la eficiencia. Por ejemplo en el régimen de interacción fuerte, en una región de tiempos cercana a los múltiplos del período, se puede concluir

que la eficiencia decrece con la coherencia. Por otro lado, en un región cercana a la intersección entre las curvas para distintas coherencias, se encuentra que hay un comportamiento no monótono, ya que la curva correspondiente a  $|c| = 1$  está entre medio de las otras dos restantes. Mientras que, en el centro del dominio de los tiempos de interacción seleccionados, la eficiencia es monótonamente creciente con  $|c|$ . Finalmente, en el régimen de interacción débil la eficiencia siempre es creciente con  $|c|$ , independientemente del valor de  $\tau$ .

Por último, se analiza la dependencia asintótica con  $\beta$ . Se encuentra que cuando  $\beta$  diverge, el proceso es equivalente al caso sin coherencias, es decir  $\eta \rightarrow 1/2$ . Esto es porque se tiene que  $\mu_\beta$  tiende al límite:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_\beta = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sqrt{p_\beta(1 - p_\beta)} = 0, \quad (2.33)$$

monótonamente con la temperatura. Si se revisa la expresión (2.32) para la eficiencia, la temperatura solo aparece a partir de este factor, que acompaña a  $|c|$  en toda la ecuación. Esto implica que es lo mismo tomar  $|c| = 0$  que este límite. Además, esto puede entenderse a partir de que en esta situación, los estados  $\rho_{coh}$  y  $\omega_\beta(H_{\mathcal{A}})$  son aproximadamente iguales, volviéndose ambos estados puros del fundamental. Por lo tanto, las ancillas afectan de la misma manera a la batería en ambos procesos. Es así que si la temperatura se acerca al cero absoluto, la eficiencia es, independientemente de los parámetros tomados, igual a la de la carga sin coherencias.

### Cota superior a la eficiencia

Una vez observado que este proceso puede, para ciertos valores del espacio de parámetros, superar la eficiencia del proceso sin coherencias, surge la pregunta de cuál es el máximo valor que esta puede tomar. Para evaluar esta cota, en primer lugar se toma el valor de  $\tau = \frac{\pi}{\Omega}$ , que puede mostrarse anula la derivada de la eficiencia respecto de  $\tau$  y es un máximo de la misma. Debido que al reemplazar este valor en  $\eta$ , las dependencias con  $g$  y  $\omega$  desaparecen, sólo resta maximizar con los parámetros  $|c|$  y  $\beta$ . La expresión en este tiempo de interacción toma la forma de:

$$\eta \leq \frac{2}{3} \quad (2.34)$$

Mirando cuidadosamente esta expresión, puede verse que si  $|c| = 1$  y  $\beta = 0$  (que equivale a  $\mu_\beta = \frac{1}{2}$ ), la eficiencia toma su máximo valor que es  $\eta = \frac{2}{3}$  (ver apéndice B). Adicionalmente, si se toma un tiempo cercano a este valor

de  $\tau$ , puede mostrarse fácilmente que la eficiencia supera a la del proceso sin coherencias independientemente de los parámetros seleccionados.

Si bien en este caso se alcanza el máximo de la eficiencia, basta con inspeccionar detalladamente la acción de la unitaria por sobre el estado conjunto de la batería y la ancilla para encontrar que este caso no es necesariamente algo factible. Recordando la acción de la unitaria en (2.18), esta unitaria actúa al comienzo de cada paso por sobre el estado  $\rho_0^{(n)}$  en el paso  $n$ , y al trazar el resultado sobre los grados de libertad de la ancilla obtenemos el estado de la batería en ese paso. Una vez elegido el valor  $\tau = \frac{\pi}{\Omega}$  se encuentra que esta unitaria toma la expresión de:

$$U = -\mathbb{I}_{\mathcal{D}} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{C}}. \quad (2.35)$$

Esto indica que para este valor del tiempo de interacción el mapa es la identidad. El valor para el cual está definida la fórmula de la eficiencia representa un valor asintótico al cual la misma tiende, al acercarse a  $\tau = \frac{\pi}{\Omega}$ .

### 2.2.3. Cerrado del ciclo de carga

Por completitud, una vez llevada la batería al estado pasivo, se puede pensar en un método para reproducir la carga de la batería indefinidamente. Para esto se analizan dos procesos distintos que buscan este objetivo. El primero consiste en hacer el proceso de carga desde el térmico una única vez, y luego descarga hasta el pasivo, utilizando a este último como nuevo estado inicial para volver a cargar la batería. El segundo consta de conectar al estado pasivo con un entorno térmico, permitiendo a partir de un potencial de interacción ( $V_{th}$ ) que la batería se equilibre con las ancillas. Estos procesos están esquematizados en la figura 2.4.

Empezando por el primer proceso, debe asegurarse que a partir del estado pasivo, y la acción del mapa de la ecuación (2.19) asociado al proceso de carga coherente, se llegue al mismo estado estacionario  $\hat{\rho}$ . Notar para esto la acción del mapa en la sección 2.2.1, en particular la ecuación que define el estado estacionario (2.22). En la misma no se emplea nunca el estado inicial de la batería, si no que se utiliza el estado inicial de las ancillas, así como el hamiltoniano total. Por esta razón, el estado estacionario del sistema sometido al mapa  $\Phi$  no puede depender del estado inicial que toma  $\mathcal{S}$ . Como la solución al sistema de ecuaciones es única, entonces el estado estacionario de este mapa no solo no depende del estado inicial que toma el sistema, si no que tampoco puede tomar otro valor que no sea el de la ecuación (2.23). Por esta razón, el estado estacionario de este proceso será el mismo, a pesar de que el estado inicial sea el estado pasivo  $\sigma_{\hat{\rho}}$ .

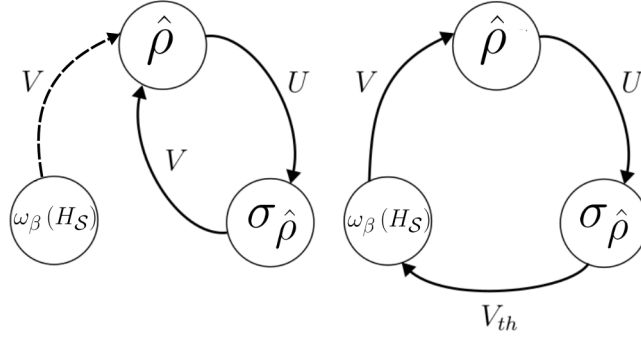


Figura 2.4: La figura de la izquierda esquematiza el ciclo de carga mediante la conexión entre el estado pasivo  $\sigma_{\hat{\rho}}$  y el estacionario  $\hat{\rho}$ , utilizando además la descarga unitaria  $U$ . La figura de la derecha hace lo mismo para el cerrado mediante el potencial  $V_{th}$ , cuyo objetivo es termalizar al estado pasivo para devolver a la batería a su estado inicial.

Una vez asegurado esto, resta entonces calcular la eficiencia empleando la definición de la misma. Sin embargo, rápidamente se simplifica la expresión para la misma. Para ver esto se recuerda que la ergotropía en este proceso sigue la expresión de:

$$\mathcal{W} = \text{Tr}[H_S (\hat{\rho} - \sigma_{\hat{\rho}})]. \quad (2.36)$$

A su vez la energía interna del proceso entero, dado un estado inicial  $\rho_0$ , es:

$$E = \text{Tr}[H_S (\rho_0 - \sigma_{\hat{\rho}})]. \quad (2.37)$$

Como en este caso  $\rho_0 = \sigma_{\hat{\rho}}$ , se tiene entonces que  $E = \mathcal{W}$ . Usando a su vez que  $W = 2E$  para estos procesos, entonces es inmediato usando la definición de eficiencia (1.36) que  $\eta = \frac{1}{2}$ . Esto quiere decir que cerrar al ciclo de carga tomando al estado pasivo como inicial no es una opción, ya que no puede reproducir la eficiencia del proceso de carga en el cual se adquieren ventajas.

Queda entonces estudiar el proceso que lleva al pasivo hasta el estado térmico. Para esto, se emplea el potencial:

$$V_{th} = g (\sigma_-^S \otimes \sigma_+^A + \sigma_+^S \otimes \sigma_-^A) \quad (2.38)$$

Si se considera que las ancillas están en un estado térmico  $\omega_{\beta}(H_B)$ , puede calcularse a partir del formalismo de la sección 1.3 que el operador  $H_0$  - el cual determina el estado estacionario del mapa  $\Phi$  -, es igual al hamiltoniano del sistema  $H_S$ . Siguiendo la expresión (1.22), el estado estacionario para este proceso es:

$$\hat{\rho}_{\beta} = \frac{e^{-\beta H_S}}{\mathcal{Z}}, \quad (2.39)$$

donde  $\mathcal{Z} = \text{Tr}[e^{-\beta H_S}]$ . Esto es efectivamente una termalización del estado pasivo hacia el estado térmico en el que se encontraba el sistema inicialmente, cerrando así el ciclo.

Una vez asegurado que la termalización es posible a partir del pasivo, utilizando el potencial  $V_{th}$ , resta cuantificar el costo de trabajo de este último proceso, ya que el mismo modificaría la eficiencia del proceso. Sin embargo, ya se vio a partir de la ecuación (2.10) que cualquier proceso de termalización que use este formalismo no cuesta trabajo. Esto quiere decir que la única energía transfiriéndose entre sistemas es de calor, y la eficiencia del proceso no es afectada debido a que el trabajo total del ciclo no cambia al agregar la termalización.

## Capítulo 3

# Potencia de carga y correlaciones

En este Capítulo se define la potencia de carga del proceso a partir de la ergotropía y el tiempo característico exponencial. Se analiza la potencia sin coherencias a partir de su forma analítica, estudiando el límite de la ecuación maestra y su máximo valor. Por otro lado se estudia la potencia del proceso sin coherencias de manera numérica, analizando su comportamiento con los distintos parámetros del sistema. Además, se examina el comportamiento de la eficiencia junto con el de la potencia en función de  $\tau$ , y se grafican la eficiencia a potencia máxima en función de la coherencia. Se concluye finalmente que las coherencias empeoran la potencia respecto al proceso sin coherencia, cumpliéndose a su vez en ciertas regiones de parámetros un intercambio entre eficiencia y potencia típico en sistemas termodinámicos de tiempo finito.

En cuanto a las correlaciones, se definen la información mutua, discordia cuántica, correlaciones clásicas a partir del formalismo de matriz densidad, a la vez que la concurrencia, una medida cerrada de entrelazamiento para sistemas de dos qubits. Se definen con estas las correlaciones del proceso entero, analizándolas en función de la temperatura, coherencias y tiempo de interacción. Por último, se grafica la eficiencia en función de la información mutua del proceso, encontrando que la misma crece monótonamente con las correlaciones.

Tradicionalmente, en termodinámica se considera que los procesos ocurren infinitamente lento, permitiendo un continuo de estados de equilibrio que dibujan una curva sobre el espacio de variables de estado. Si se cambia esto, asumiendo que los procesos toman un determinado tiempo, se encuentra que si bien el modelo es ahora más realista, la eficiencia resultante es menor a la de los procesos reversibles. Esto es compatible con lo que se encuentra en un sistema físico termodinámico real, y es posible encontrar valores de eficiencia a potencia máxima o vice-versa [7, 37].

En el sistema cuántico estudiado aquí, si bien existe un acercamiento asintótico al estado estacionario, luego de un tiempo finito puede considerarse a la batería como cargada, habitando completado ya un porcentaje arbitrariamente cercano al completo. Como la dinámica del proceso de carga disipativa es exponencial, existe un tiempo característico que está asociado a la escala temporal de la evolución. Por este motivo solo, el sistema ya es considerado como uno de no equilibrio, debido a que el mismo alcanza un equilibrio termodinámico en tiempo finito. Existe entonces una manera de caracterizar la potencia de este sistema. Así, cada uno de los valores de eficiencia que toma el proceso según los parámetros se corresponde con un dado tiempo característico, que determina la energía por unidad de tiempo.

Como se mencionó en el capítulo anterior, para el valor de  $\tau = \frac{\pi}{\Omega}$  se espera que la potencia sea nula, debido a que el mapa de la evolución es igual a la identidad. Se tiene entonces que en un régimen donde se alcanza máxima eficiencia, la potencia se anula. Este intercambio entre potencia y eficiencia es usual en los procesos termodinámicos a tiempo finito. A continuación, se estudia como cambia la potencia con la coherencia presente en el entorno, para distintos valores de temperatura. Se busca también determinar la existencia de regiones en el espacio de parámetros, en la que se encuentren ventajas tanto en potencia como eficiencia, o si solo es posible lograrla por separado.

### 3.1. Potencia media

Para definir la potencia del proceso de carga se utiliza la potencia media. Al hacer esto, se debe encontrar una escala de tiempo que defina aproximadamente la duración de la carga. Si bien, formalmente, la misma ocurre en un tiempo infinito debido a que el estacionario es una asíntota, puede considerarse completada la carga una vez alcanzado un alto porcentaje de la ergotropía correspondiente al estado estacionario. Para esto se analizan las propiedades espectrales del superoperador  $\Phi$  [38]. Este es un operador que no es hermítico y por lo tanto sus autovalores no son necesariamente reales. Dado que  $\Phi$  mapea un conjunto compacto en si mismo, el teorema

del punto fijo asegura que existe un punto fijo. Es decir, existe al menos un estado estacionario:  $\Phi \hat{\rho} = \hat{\rho}$ , siendo esta expresión equivalente a que  $\hat{\rho}$  sea un autoestado de autovalor uno. Sean entonces  $z_i$  los autovalores de  $\Phi$ , ordenados en módulo  $|z_i| > |z_{i+1}|$  con  $i = 0, 1, 2$ . Como  $\Phi$  es un mapa positivo, y el estado estacionario tiene autovalor 1, entonces debe valer  $|z_i| \leq 1$ . Por esta razón, la aplicación sucesiva del mapa sobre cualquier estado converge exponencialmente a  $\hat{\rho}$ . Esto es, si  $\Phi$  es diagonalizable, cualquier estado inicial  $\rho_0$  puede ser escrito como  $\rho_0 = \hat{\rho} + \sum_i c_i \sigma_i$ . Por lo tanto,

$$\Phi^n \rho_0 = \hat{\rho} + \sum_i c_i z_i^n \sigma_i, \quad (3.1)$$

teniendo cada autoestado  $\sigma_i$  una tasa de decaimiento asociada  $-\ln |z_i|$ , donde la más lenta correspondiente a  $|z_1|$ . Notar que como el resultado de aplicar el mapa es un estado físico, por la linealidad de la traza necesariamente los autoestados que no son el estacionario deben tener traza nula. En este caso, dado que además se tiene un tiempo de interacción con la ancilla  $\tau$ , es posible definir un tiempo característico  $\mathcal{T}$  para el decaimiento más relevante de la siguiente manera:

$$|z_i|^n = e^{-\frac{n\tau}{\mathcal{T}_i}}, \quad (3.2)$$

por lo tanto,

$$\mathcal{T}_i = -\frac{\tau}{\ln |z_i|}. \quad (3.3)$$

El tiempo característico acota a todas dinámicas restantes del sistema es el asociado a  $|z_1|$ :

$$\mathcal{T}_i \leq \mathcal{T}_1 \quad (3.4)$$

dando una noción del tiempo máximo que el proceso puede tardar.

Sin embargo, en el contexto de baterías cuánticas, es relevante entender el tiempo que caracteriza el mayor porcentaje de la carga del sistema. Para esto se observa la figura [3.1](#), en la que se muestra como predominan distintos tiempos característicos a lo largo del proceso, asociados cada uno a un autovalor de  $\Phi$  distinto. La notación de  $\mathcal{W}_e$  hace referencia a la ergotropía del estacionario. En este caso se obtienen: un autovalor igual a 1, dos autovalores con el mismo módulo y uno con el módulo más pequeño. En la figura se observa que el de menor módulo (asociado a una mayor pendiente) es el que domina la dinámica al principio. A su vez se muestra en rojo oscuro una línea punteada que marca el 95 % de la carga. Por lo tanto, la instancia en la cual se realiza el mayor porcentaje de la carga es en donde el tiempo asociado a  $|z_{min}|$  está presente. El otro autovalor, determina la escala temporal de una carga considerablemente más lenta. Utilizando el ordenamiento antes visto, este sería el autovalor  $|z_3|$ , que de ahora en mas toma la notación de  $|z_{min}|$ .

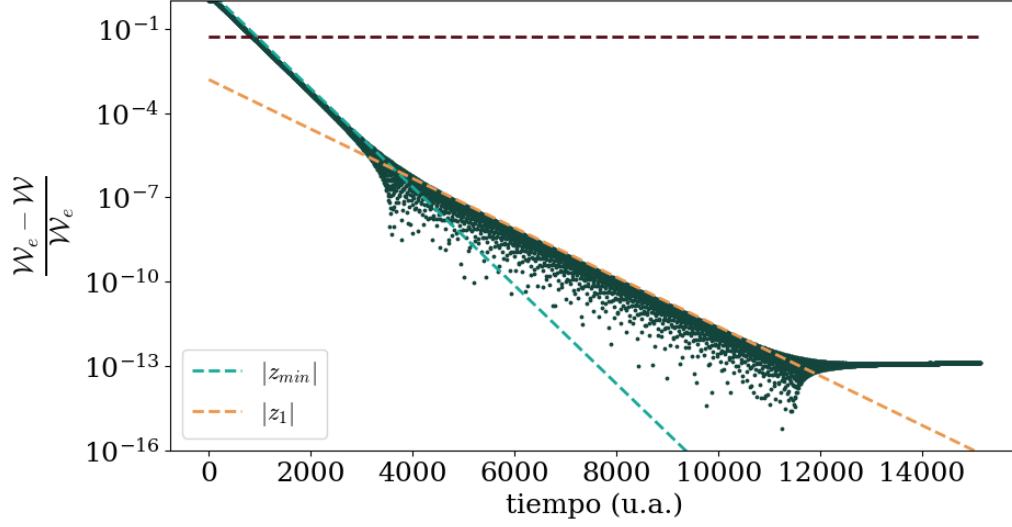


Figura 3.1: Gráficas de  $\hat{\rho}_{00} - \rho_{00}$  y  $\frac{\mathcal{W}_e - \mathcal{W}}{\mathcal{W}_e}$  en función del tiempo, donde  $\mathcal{W}_e$  representa la ergotropía del estado estacionario. El gráfico inferior se encuentra en escala logarítmica. Las líneas punteada muestran las distintas escalas celeste y naranja muestran las distintas escalas temporales presentes, mientras que la rojo oscuro marca el 95% de la carga. Comparando con el gráfico superior, se observa cómo el mayor porcentaje de la carga se da cuando domina el tiempo característico más corto. *Parámetros:*  $g = 0.1$ ,  $\omega = \sqrt{1 - g^2}$ ,  $|c| = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\tau = 1.5$

Una vez definida la escala de tiempo que se va a utilizar, se precisa definir cuál es la energía asociada. Dado que inicialmente la batería se encuentra descargada y la cantidad de energía a extraer es la ergotropía, se considera la expresión analítica calculada en el capítulo anterior para la escala de energía. Por lo tanto, si se nota al tiempo asociado a  $|z_{min}|$  directamente como  $\mathcal{T}$ , se tiene que la potencia de carga del proceso  $P$  es:

$$P = \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{T}}. \quad (3.5)$$

### 3.1.1. Caso sin coherencias

Por fuera del régimen de la ecuación maestra, aun no hay casos en donde se haya estudiado la potencia incluso para el caso sin coherencias. En el mismo, es posible calcular analíticamente la expresión de los autovalores. Particularmente, aquellos que son distintos a uno poseen el mismo modulo. Al diagonalizar  $\Phi$ , se obtiene entonces que:

$$|z_{min}| = 1 - \frac{g^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega\tau) \quad (3.6)$$

por lo que el tiempo característico es:

$$\mathcal{T}_0 = -\frac{\tau}{\ln\left(1 - \frac{g^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega\tau)\right)}, \quad (3.7)$$

donde el sub-índice “0” nota el proceso sin coherencias de ahora en mas. Dado que la ergotropía para este caso también está calculada (1.43), es posible obtener una expresión analítica para la potencia:

$$P_0 = \frac{\mathcal{W}_0}{\mathcal{T}_0} = -\frac{\omega}{\tau} \tanh\left(\beta\frac{\omega}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{g^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega\tau)\right) \quad (3.8)$$

A primera vista parece que en el caso ( $\tau \rightarrow 0$ ) - que se corresponde con el modelo colisional levemente coherente tomando coherencias nulas - se anula la potencia. Sin embargo, esto no es así. En primer lugar, aproximando el logaritmo en este régimen se obtiene  $\ln\left(1 - \frac{g^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega\tau)\right) \approx -\frac{g^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega\tau)$ . Luego, se puede recordar que para obtener la ecuación maestra se precisó normalizar la interacción ( $g = \frac{\tilde{g}}{\sqrt{\tau}}$ ). En ese caso, la constante de interacción empleada en el régimen de interacciones cortas lleva consigo un factor de  $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ . De esta manera, la potencia para ese caso está bien definida, y su valor es

$$P_0^{(EM)} = \omega\tilde{g}^2 \tanh\left(\beta\frac{\omega}{2}\right), \quad (3.9)$$

que coincide con el valor reportado en [33]. Por otro lado, en ambas expresiones puede notarse como al aumentar la temperatura, la potencia disminuye. Esto es porque en el caso sin coherencias el estado inicial de la batería y su estacionario son uno térmico, y uno que invierte dichas poblaciones térmicas respectivamente. En el límite de temperatura infinita estos estados son iguales, y no existe carga, ya que la ergotropía es nula.

Se quiere encontrar ahora una cota superior para la expresión (3.8). Para esto, se considera que la misma es creciente con el valor de  $\tanh\left(\beta\frac{\omega}{2}\right)$  y  $\sin^2(\Omega\tau)$ . Los máximos de estas funciones son uno, y los alcanzan en  $\beta \rightarrow \infty$  y  $\Omega\tau_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$  con  $n = 1, 2, \dots$ , respectivamente. Evaluando en estos puntos la potencia resulta:

$$P_0^{(\tau_n)} = -\frac{2\omega\Omega \ln\left(1 - \frac{g^2}{\Omega^2}\right)}{(2n-1)\pi} \quad (3.10)$$

Es inmediato ver que si se elige el menor de los valores de  $\tau_n$ , se obtiene el mejor resultado. Esto tiene sentido ya que mientras más se deje evolucionar cada paso, más tiempo tarda en llegar al estacionario. Si se considera además el límite  $\omega \rightarrow \infty$  se obtiene finalmente que ( $n = 1$ ):

$$P_0 \leq \frac{2g^2}{\pi}. \quad (3.11)$$

Sin embargo, el hecho de que este límite este bien definido puede resultar un poco anti-intuitivo, ya que en el mismo la energía de  $\mathcal{S}$  diverge, y por lo tanto la carga empleando  $g$  finito parece imposible. No obstante, en esta interpretación falta considerar que el tiempo de interacción elegido disminuye a medida que  $\omega$  aumenta, ya que  $\tau_n = \frac{(2n-1)\pi}{2\Omega}$ . Esto hace que las interacciones se vuelvan cortas, además de optimizar el tiempo característico del sistema. De otra manera, si la expresión (3.8) no es evaluada en  $\tau_n$ , efectivamente  $P$  tiende a cero al ir  $\omega$  hacia infinito, y no tiene un límite bien definido cuando  $g$  hace lo mismo, debido a que  $\Omega$  está dentro del argumento del seno.

Como último detalle a destacar, se puede recordar que la expresión de la unitaria (2.18) no depende del valor coherencias, lo que quiere decir que si se toma  $\tau = \frac{\pi}{\Omega}$  su valor también debería anularse aquí. Adicionalmente, la periodicidad encontrada en la eficiencia no se encuentra presente en la potencia, debido al factor  $\frac{1}{\tau}$  presente en la expresión. Como se menciona en el anterior párrafo, esto se puede interpretar como que al alargar el tiempo de interacción necesariamente aumentamos el tiempo característico de convergencia, y por lo tanto es completamente razonable ver la potencia disminuida.

## 3.2. Potencia con coherencias

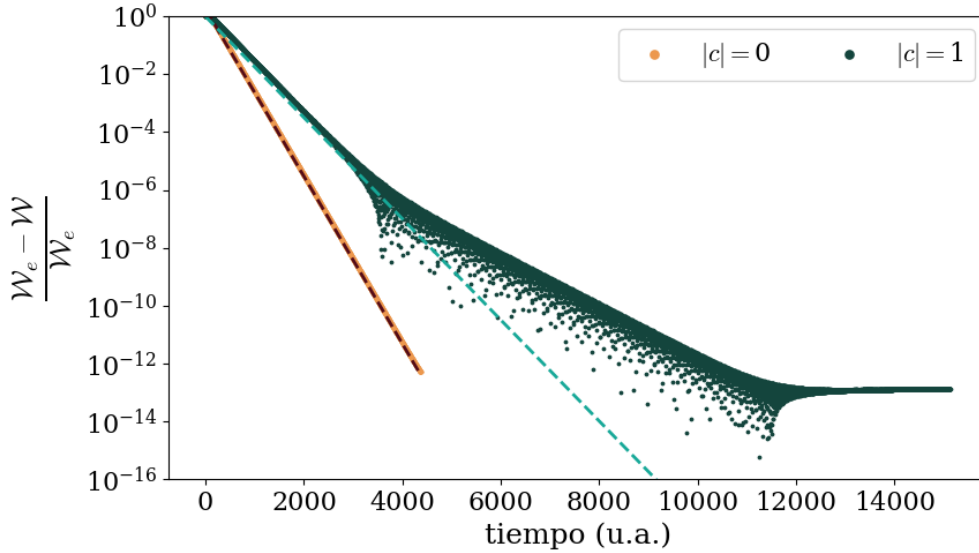


Figura 3.2: Gráfico donde se muestra la carga de la batería en función del tiempo, en escala logarítmica. Se observa como en el caso sin coherencias, la ergotropía del sistema alcanza el valor estacionario previo a que lo haga otro caso. *Parámetros:*  $\beta = 1$ ,  $g = 0.1$ ,  $\omega = \sqrt{1 - g^2}$ ,  $|c| = 1$ ,  $\tau = 1.5$

En la figura [3.2](#) se muestra la carga para el proceso con y sin coherencias, en el régimen de interacción débil. Puede verse que la carga del segundo proceso es mas rápida que la del primero, indicando a priori que hay una diferencia en la velocidad en la que se completan ambos. Para cuantificar la diferencias de potencia faltan analizar sus ergotropías, las cuales también son diferentes y necesarias para un estudio completo de la potencia.

Con el fin de encontrar los autovalores que dictan el tiempo característico de la evolución se recurre a cálculos numéricos. Por otro lado, la expresión de la ergotropía ya fue calculada analíticamente, y es empleada para los análisis a continuación.

### 3.2.1. Cálculos numéricos

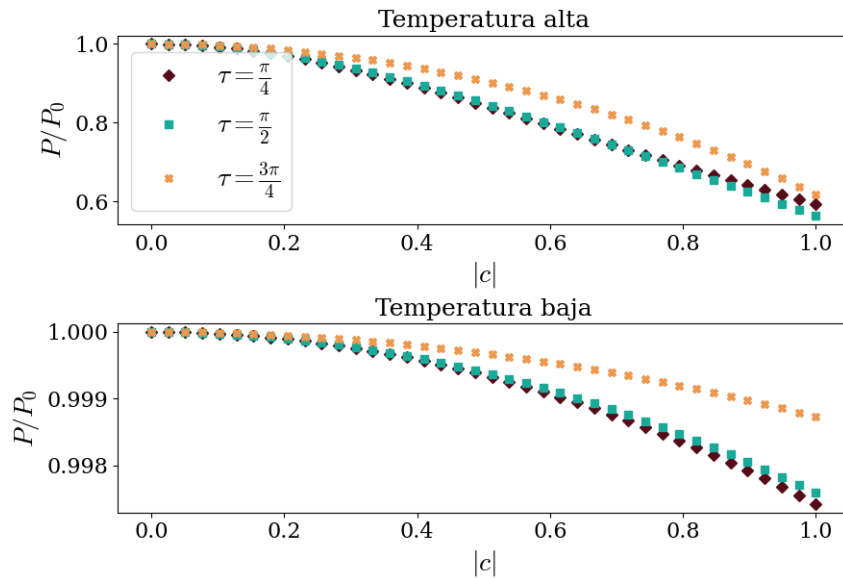


Figura 3.3: Gráficos de  $\frac{P}{P_0}$  en función de  $|c|$ , para  $\tau = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ . Se observa que la coherencia empeora la potencia en relación a la del proceso sin coherencias en todas las instancias analizadas. También, a medida que la temperatura disminuye, el efecto de las coherencias se ve disminuido debido a que el estado de las ancillas tiende a uno puro. *Parámetros:*  $g = \frac{1}{\sqrt{2}} = \omega$ ,  $\beta = 10^{-3}$  (Temperatura alta) y  $\beta = 10$  (Temperatura baja).

Para comenzar se grafica en la figura [3.3](#) la potencia normalizada por la correspondiente al proceso sin coherencias, en función de la coherencia. De manera análoga a la eficiencia, se toman distintos valores de  $\tau$  en los regímenes de temperatura alta y baja, tomándose también  $g = \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Se observa que la coherencia empeora la potencia en relación al proceso sin las mismas en todos los casos analizados. Por otro lado, se ve que en el tiempo

de interacción hay un comportamiento monótono en los parámetros utilizados. Por último notar cómo la dependencia con  $|c|$  disminuye al disminuir la temperatura, fenómeno que ya fue observado y explicado en el capítulo anterior.

Antes de avanzar con el análisis del tiempo de interacción, se puede notar que la potencia disminuye con la coherencia. Se recuerda por otro lado que para la eficiencia lo opuesto ocurría, ya que la misma aumentaba con el valor de  $|c|$ . Esto es un ejemplo del fenómeno ya mencionado, en el que la potencia es intercambiada por la eficiencia del proceso, si bien ocurre particularmente al aumentar la coherencia.

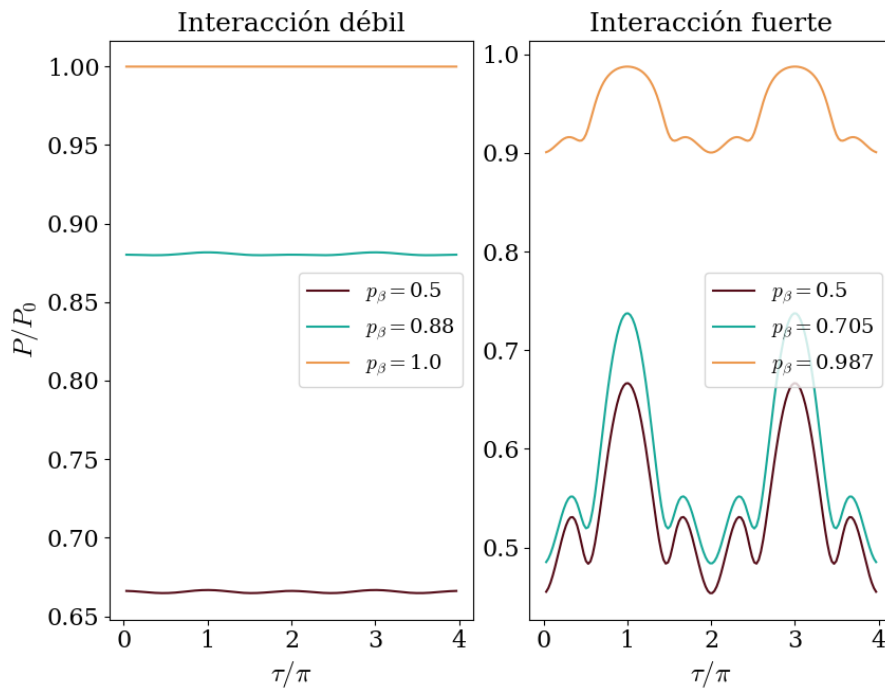


Figura 3.4: Gráficos de potencia, normalizada por la potencia del proceso sin coherencias, en función de  $\tau$  en unidades de  $\frac{\pi}{\Omega}$ . Se realizan los mismos para distintas temperaturas, y en regímenes de interacción fuerte y débil. Se encuentra que al estar mayoritariamente poblado el fundamental (temperaturas bajas) la potencia es más parecida a la del proceso sin coherencias. Por otro lado, la interacción fuerte hace que haya una mayor pérdida en la potencia dada una temperatura. *Parámetros:*  $|c| = 1$ ,  $g = 0.1$  (Interacción débil),  $g = 0.9$  (Interacción fuerte),  $\omega = \sqrt{1 - g^2}$

Para continuar, se grafica la potencia del proceso en función de  $\tau$ , normalizada por la potencia del proceso sin coherencias en la figura 3.4. Nuevamente, se realiza un estudio análogo al realizado para la eficiencia, tomando distintos valores de temperatura en regímenes de interacción fuerte y débil. Debido a que se toman distintos valores de  $g$ , la energía del hamiltoniano libre se

modifica de manera tal que  $\Omega = 1$ . Como además se toman distintos valores de  $\beta$ , las poblaciones para cada gráfico serán diferentes. Por esto, los mismos tienen asociadas distintos valores de  $p_\beta$ .

En el régimen de interacción débil, puede notarse que cuando el fundamental está mayormente poblado ( $p_\beta = 1$ ), la potencia del proceso sin coherencias y del proceso con las mismas son iguales. Esto se debe a lo ya mencionado sobre que el caso de temperaturas bajas equivale al caso sin coherencias. Sin embargo, al aumentar la interacción este no parece ser el caso. Esto puede deberse a que el acople entre las ancillas y la batería reduce el efecto que tiene el descenso de la temperatura sobre las coherencias. Puede observarse también que en el régimen de interacción débil, la dependencia con  $\tau$  es disminuida, lo cual tiene sentido ya que la energía intercambiada entre sistema y ancilla es menor. Por otro lado, la temperatura produce cambios sustanciales en ambos regímenes, porque la misma está presente dentro de los parámetros de la batería, y puede prescindir de la interacción para generar un efecto.

Se había mencionado en la sección 3.1.1 que el tiempo de interacción siempre produce una reducción en la potencia, debió a que la misma es proporcional a  $\frac{1}{\tau}$ . Sin embargo, se observa en la figura 3.4 que esto no parece ocurrir. Para entender esto se nota que el factor  $\tau$  en la expresión (3.3), presente en el numerador, está allí independiente de las coherencias. Esto quiere decir que al calcular  $\frac{P}{P_0}$ , inevitablemente el factor de  $\frac{1}{\tau}$  se cancela, y por lo tanto el efecto mencionado desaparece. Por último, se nota que la menor pérdida se da en  $\tau = \pi$ . Esto es porque en ese punto, la potencia de ambos procesos se anula, y por lo tanto su cociente tiende a uno.

## Comportamiento de la eficiencia

Todo apunta a que el caso sin coherencias es el mejor en términos de potencia. Se estudia ahora la dependencia de la eficiencia con la potencia. En la figura 3.5 se grafica la potencia en función de  $\tau$  en unidades de  $\pi$ , usando a la vez que  $\Omega = 1$ . Se consideran los regímenes de interacción débil y fuerte, para el caso con y sin coherencias por separado. Por sobre las curvas del primer proceso, se grafica con color el valor de la eficiencia asignado a ese valor de potencia. Como se sabe que para la segunda instancia la eficiencia no varía, se opta por un único color para toda la curva.

En primer lugar se puede ver como para  $\tau = \pi$  todas las curvas coinciden que la potencia es nula. Simultáneamente, se puede observar que la eficiencia allí es máxima, como se había calculado en el capítulo 2. Los valores cercanos a  $\tau = \pi$  son a su vez un perfecto ejemplo del intercambio entre potencia y eficiencia que se presencia en los procesos termodinámicos de tiempo finito. Sin

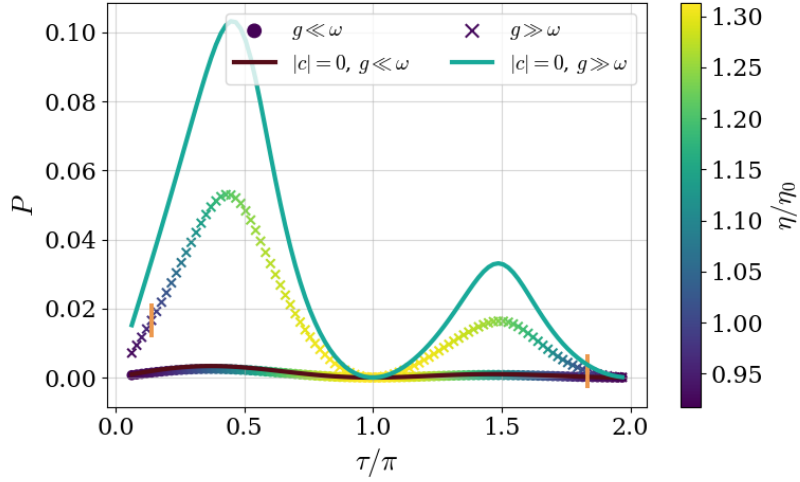


Figura 3.5: Gráfico de potencia en función de  $\frac{\tau}{\pi}$ , para regímenes de interacción fuerte ( $g \gg \omega$ ) y débil ( $g \ll \omega$ ), usando tanto el proceso con coherencias como el sin coherencias. Sobre las curvas del primero, se muestra el valor de la eficiencia en color. En naranja están separadas las regiones en donde la eficiencia supera la correspondiente al proceso sin coherencias. Para interacciones débiles esto no ocurre nunca. *Parámetros:*  $\beta = 1$ ,  $|c| = 1$  (curvas con coherencias),  $g = 0.1$  (interacción débil),  $g = 0.9$  (interacción fuerte),  $\omega = \sqrt{1 - g^2}$

embargo, puede notarse a la vez que para múltiplos del periodo la eficiencia y la potencia ambas disminuyen.

Para interacción débil puede notarse que el proceso es equivalente al proceso sin coherencias, pero únicamente en la potencia. La eficiencia cambia sustancialmente con  $\tau$  por encima de  $\eta_0$  en este caso, mientras que la curva de potencia asociada al proceso con coherencias es indistinguible de la del que no las tiene. Esto quiere decir que las pérdidas en potencia son bajas, teniendo a la vez una eficiencia mas alta que  $\eta_0$ . La desventaja de este caso es que la potencia real es baja.

Por último, en naranja están los límites para los cuales el proceso deja de superar la eficiencia del caso sin coherencias. Para interacciones fuertes esto ocurre en dos regiones cercanas a tiempos de interacción múltiplos del periodo, zonas en las cuales también hay una considerable pérdida en la potencia. Por otro lado, para interacción débil la eficiencia nunca es menor a la correspondiente al proceso sin coherencias.

Se quiere ver ahora la eficiencia a potencia máxima. Para esto se calcula este valor, en procesos de distintas coherencias. En la figura 3.6 se muestra esto mismo, en los regímenes utilizados en la figura 3.5. Nuevamente, se muestra en las curvas el valor de  $\frac{P}{P_0}$ , para no perder de vista el panorama com-

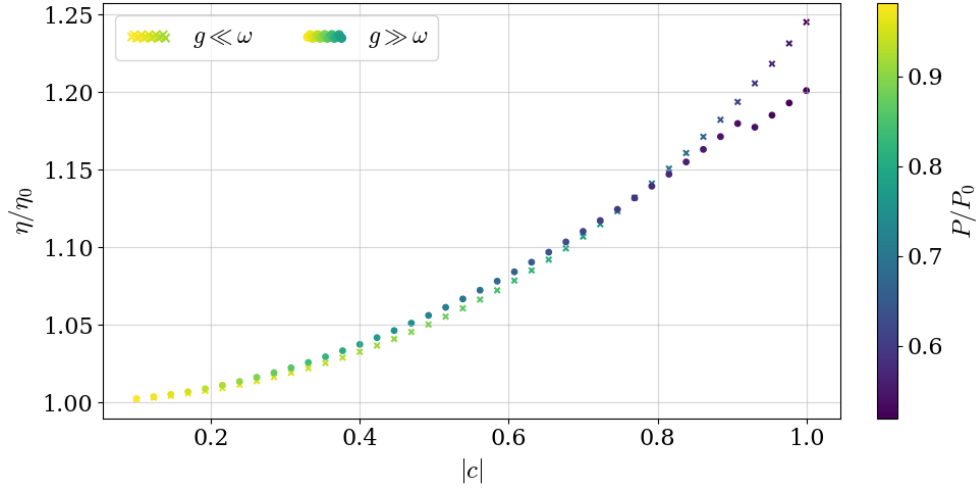


Figura 3.6: Gráfico de la eficiencia a potencia máxima normalizada por la correspondiente al proceso sin coherencias, en función de  $|c|$ . Por encima de los puntos de la curva se grafica la  $\frac{P}{P_0}$ . Parámetros:  $\beta = 1$ ,  $g = 0.1$  (interacción débil),  $g = 0.9$  (interacción fuerte),  $\omega = \sqrt{1 - g^2}$

pleto. Puede verse que las curvas son similares, difiriendo aproximadamente en un 5% en el valor máximo de eficiencia que alcanzan, y coincidiendo en la gran parte de la curva. Se observa también que a medida que la eficiencia aumenta, hay nuevamente una pérdida de potencia respecto al proceso sin coherencias.

Por otro lado, puede verse que la pérdida en potencia es menor en el régimen de interacción débil, a lo largo de toda la curva. Sin embargo, como se había visto en la figura 3.5, la potencia en interacciones fuertes es mayor. Se tiene entonces que la eficiencia a potencia máxima en ambos regímenes no difiere significativamente, mientras que la potencia es mayor para el régimen de interacción fuerte, y las pérdidas en la misma son menores para el régimen de interacción débil.

### 3.3. Correlaciones

En esta sección, se analizan el tipo de correlaciones entre la batería y las ancillas generadas a lo largo del proceso. Para esto, se considera la información mutua, que mide la cantidad de información compartida entre los dos sistemas y por lo tanto su correlación. Por otro lado, esta la discordia cuántica. La misma mide las correlaciones cuánticas presentes. La idea para

definir esta última es que, clásicamente, las expresiones:

$$\mathcal{I}[S, B]H[S] + H[B] - H[S, B], \quad (3.12)$$

y

$$\mathcal{J}[S : B] = H[S] - H[S|B], \quad (3.13)$$

son iguales. Aquí  $H[S, B]$  es la entropía conjunta y  $H[S|B]$  la entropía condicional, ambas de dos distribuciones de probabilidad  $S$  y  $B$ . Como se analiza a continuación, en cuántica estas no son iguales en general. Por lo tanto, la diferencia de estas expresiones sirve para cuantificar que tan “cuánticas” son las correlaciones. Para generalizar estas expresiones en el formalismo cuántico, hay que definir correctamente cada una de estas expresiones a partir de la matriz densidad [39]. Para esto se distingue entre  $S$  y  $B$ , y  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{B}$ , siendo las segundas la notación empleada para el caso cuántico.

En primer lugar la adaptación de la información mutua es simple, ya que basta con reemplazar con la entropía clásica con la de Von Neumann para estados cuánticos adecuadamente. La misma es:

$$\mathcal{I}[\mathcal{S}, \mathcal{A}] = S[\mathcal{S}] + S[\mathcal{A}] - S[\mathcal{S}, \mathcal{A}], \quad (3.14)$$

siendo  $S[\mathcal{S}]$  la entropía de Von Neumann del sistema  $\mathcal{S}$ .

Por otro lado, la expresión  $\mathcal{J}[\mathcal{S} : \mathcal{B}]$  es un poco más difícil de generalizar. Esto es por que la entropía condicional requiere el estado de uno de los sistemas, una vez realizadas mediciones por sobre el otro. En cuántica esto es un poco ambiguo, hasta que se define una base específica por sobre la cual realizar mediciones. En particular, aquí se emplean mediciones proyectivas  $\Pi_j^B$ , donde el índice  $j$  marca alguno de los resultados posibles, dada esa medición. Una vez realizada, el estado de  $S$  conocido el resultado correspondiente a  $\Pi_j^B$  es:

$$\rho_{S|\Pi_j^A} = \frac{\Pi_j^A \rho_{S,A} \Pi_j^A}{\text{Tr}[\Pi_j^A \rho_{S,A}]} \quad (3.15)$$

Naturalmente, la entropía condicional debería ser el promedio de la entropía de los estados medidos, usando la distribución de probabilidad asociada a los resultados  $j$ ,  $p_j$ . Esto sería:

$$S[\mathcal{S}|\{\Pi^A\}] = \sum_j p_j S[\rho_{S|\Pi_j^A}] \quad (3.16)$$

donde  $\{\Pi^B\}$  denota el conjunto de proyectores que se emplearon para la medición. Finalmente, la expresión para  $\mathcal{J}[\mathcal{S} : \mathcal{B}]$  en el formalismo cuántico es:

$$\mathcal{J}[\mathcal{S} : \mathcal{A}]_{\{\Pi^A\}} = S[\mathcal{S}] - S[\mathcal{S}|\{\Pi^A\}], \quad (3.17)$$

donde nuevamente el sub-índice  $\{\Pi^{\mathcal{A}}\}$  remarca la base empleada. En particular, se empleará la base que minimice la discordia cuántica y que por lo tanto sea la más “clásica” a utilizar, para dar cuenta del mínimo de correlaciones cuánticas que habrá en el sistema. Finalmente entonces, la discordia cuántica puede expresarse como:

$$D[\mathcal{S}, \mathcal{A}] = \mathcal{I}[\mathcal{S}, \mathcal{A}] - \max_{\{\Pi^{\mathcal{A}}\}} \mathcal{J}[\mathcal{S} : \mathcal{A}]_{\{\Pi^{\mathcal{A}}\}}, \quad (3.18)$$

donde puede interpretarse que  $\mathcal{I}[\mathcal{S}, \mathcal{A}]$  representa la información compartida total del sistema y  $\mathcal{J}[\mathcal{S} : \mathcal{A}]_{\{\Pi^{\mathcal{A}}\}}$  la información clásica ganada por la medición del sub-sistema  $\mathcal{A}$ . En general, en cuántica estas dos expresiones no son iguales [40], y su diferencia mide la magnitud de correlaciones cuánticas que hay presentes en el sistema. La idea de que las expresiones de  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  difieren viene de que ante una medición proyectiva, usualmente el sistema es perturbado. Por lo tanto, el resultado suele no ser el del sistema parcialmente trazado previo a la medición, si no de otras características. En particular, si se encuentra que el estado toma la forma de [40]:

$$\rho_{\mathcal{S}, \mathcal{A}} = \sum_j \Pi_j^{\mathcal{A}} \rho_{\mathcal{S}, \mathcal{A}} \Pi_j^{\mathcal{A}} \quad (3.19)$$

esto implica que la discordia cuántica sea nula. Notar que esto da una noción adicional para el significado de la discordia cuántica, y es que mide que tan perturbado fue el sistema dada una base de mediciones proyectivas. El sistema entonces tiene correlaciones cuánticas si es perturbado por un dado conjunto de mediciones.

Para maximizar las correlaciones clásicas en el caso de dos qubits, se piensa en dos parametrizaciones de un estado que sean perpendiculares entre si. Esto define la base:

$$\mathcal{C} = \{\cos(\theta) |1\rangle + \sin \theta e^{i\phi} |0\rangle, \cos(\theta) |0\rangle - \sin \theta e^{i\phi} |1\rangle\}. \quad (3.20)$$

Los proyectores asociados a estos estados serán entonces:

$$\Pi_+ = \cos^2 \theta |1\rangle\langle 1| + \sin^2 \theta |0\rangle\langle 0| - \cos(\theta) \sin(\theta) (e^{i\phi} |0\rangle\langle 1| + e^{-i\phi} |1\rangle\langle 0|) \quad (3.21)$$

$$\Pi_- = \sin^2 \theta |1\rangle\langle 1| + \cos^2 \theta |0\rangle\langle 0| + \cos(\theta) \sin(\theta) (e^{i\phi} |0\rangle\langle 1| + e^{-i\phi} |1\rangle\langle 0|), \quad (3.22)$$

Estos operadores definen proyectores sobre un vector arbitrario en la esfera de Bloch, con dirección definida por  $\theta$  y  $\phi$ . Maximizar las correlaciones clásicas se corresponde entonces con elegir el estado adecuado que lo haga. El mismo depende además del estado total del sistema, que en el contexto de baterías

cuánticas implementadas con modelos colisionales, lo hace a su vez del mapa empleado para realizar la evolución, así como del estado del entorno que es renovado constantemente.

Notar que la discordia cuántica es una medida de las correlaciones cuánticas totales, entre ellas el entrelazamiento. Usualmente determinar el entrelazamiento es altamente complejo e incluso en la mayoría de los casos no podemos evaluar una medida del mismo. Afortunadamente, para un sistema de dos qubits existe una medida cerrada de entrelazamiento que permite analizar esta correlación sin ambigüedades. La concurrencia cuántica es una cantidad que nos permite evaluar la cantidad de entrelazamiento existente para un sistema de dos qubits. Su expresión toma la forma de [41]:

$$C(\rho) = \max\{0, 2\lambda_{max} - \text{Tr}[R(\rho)]\} \quad (3.23)$$

donde  $\lambda_{max}$  es el autovalor de mayor valor de  $R(\rho)$ , siendo esta última matriz:

$$R(\rho) = \sqrt{\sqrt{\rho}\hat{\rho}\sqrt{\rho}} \quad (3.24)$$

con  $\hat{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y)$ , y  $\rho^*$  es el conjugado de  $\rho$  calculado en la base de  $\sigma_z$ . Cumple además, que para estados máximamente entrelazados toma el valor de uno. Cabe recalcar, que esta medida se encuentra definida para estados que poseen dos autovalores distintos de cero, lo cual representa todo estado distinto de uno puro. De igual manera, los mismos tienen su propia medida de entrelazamiento, que es la entropía marginal [42].

### 3.4. Correlaciones del proceso

En la figura 3.7 se muestran la información mutua y discordia cuántica en función del tiempo. Puede verse que en todas las curvas se alcanza un máximo para luego decrecer y mantener ese comportamiento a lo largo del tiempo. Se toma entonces como el valor de la información mutua asociada al proceso, el valor máximo de la misma, mientras que por otro lado la discordia cuántica que se evalúa corresponde al valor que toma en el momento en el que las correlaciones totales son máximas. Con la concurrencia se usa el mismo criterio que para la discordia. Las correlaciones clásicas quedan definidas a partir de  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{D}$ . Desde este punto, cuando se hable de alguna de las correlaciones ya mencionadas se estará utilizando esta definición.

Se evaluaron estas cantidades para cada paso del proceso de carga en diferentes situaciones. En la figura 3.8 se muestran las correlaciones para  $\tau = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ . Los tiempos elegidos son menores o iguales al cuarto del período

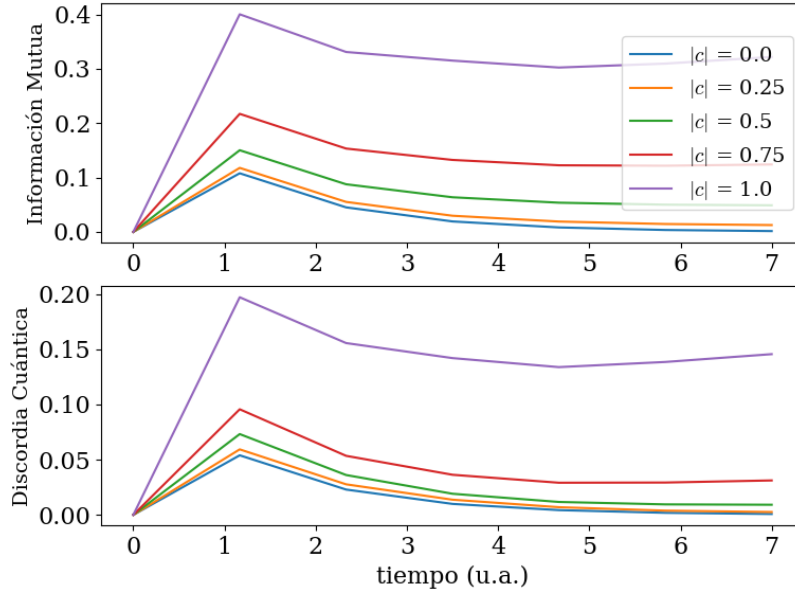


Figura 3.7: Gráficos de información mutua y discordia cuántica en función del tiempo, para distintas coherencias. Ambas figuras comparten el eje del tiempo. *Parámetros:*  $\beta = 1$ ,  $\omega = g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\tau = 1$ .

porque valores mayores repiten el comportamiento debido a la periodicidad presente en el sistema. Se toman además regímenes de temperatura alta y baja. En este último caso hay una marcada reducción en la dependencia de las coherencias, debido al efecto que trae  $\mu_\beta$  sobre las mismas. Por otro lado, la información mutua, junto con las otras correlaciones, aumentan a medida que la coherencia y el tiempo de interacción lo hacen. Sin embargo, ante un aumento de  $\tau$  la distribución de las correlaciones no es modificada significativamente. Por otro lado, se encuentra que con la temperatura si cambia esta distribución, representando las correlaciones clásicas una mayor parte de la información mutua en el régimen de temperatura alta. En el régimen de temperatura baja, esto no ocurre. Por último se observa que la información mutua, y por lo tanto las otras dos correlaciones, disminuyen su valor al aumentar la temperatura.

Por otro lado, en la figura 3.9 se muestra la concurrencia en función del tiempo de interacción para distintas coherencias, en los mismos regímenes mencionados previamente. Se observa que la temperatura reduce la concurrencia, lo cual es esperable ya que se considera al entrelazamiento como una correlación, y se vio en 3.8 que la temperatura tiene este efecto. En el régimen de temperatura alta, se encuentra que no hay concurrencia a menos que las ancillas sean puras. Por otro lado, se repite el comportamiento esperado con

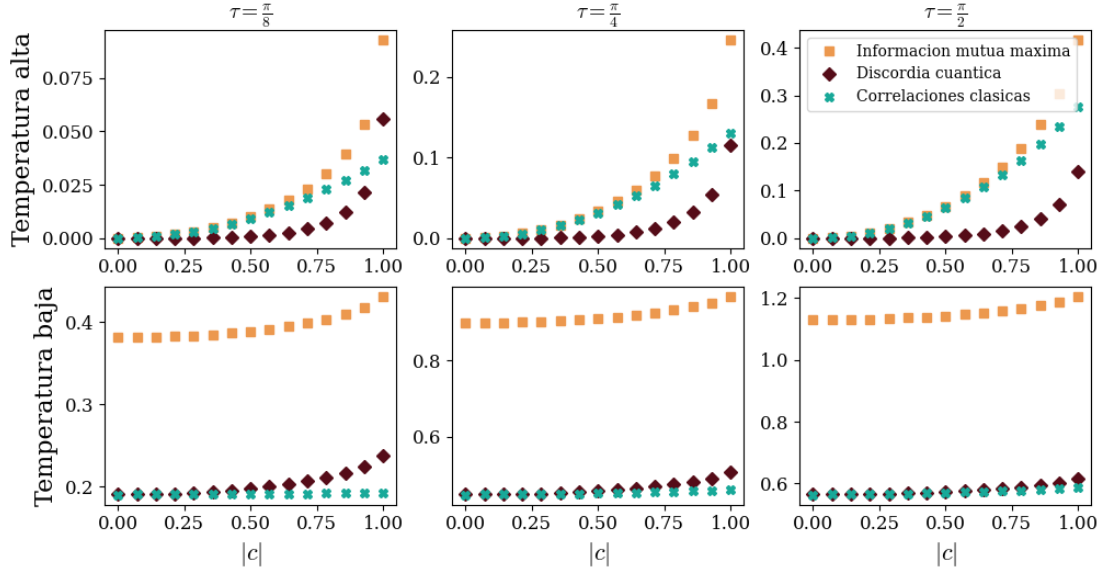


Figura 3.8: Correlaciones en función de  $|c|$ , para  $\tau = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$  en los regímenes de temperaturas altas y bajas. Se observa que las correlaciones totales aumentan a medida que lo hacen  $|c|$  y  $\tau$ , pero que cuando ésta última lo hace no se modifica la distribución de correlaciones clásicas y cuánticas significativamente. *Parámetros:*  $\omega = g = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = 10^{-3}$  (Temperatura alta),  $\beta = 5$  (Temperatura baja).

las coherencias a temperatura baja, ya que su dependencia se ve reducida.

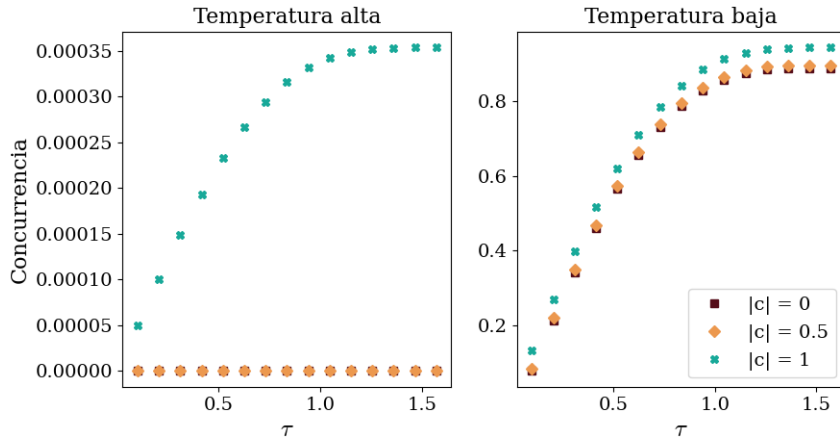


Figura 3.9: Concurrencia en función de  $\tau$  para coherencias  $|c| = 0, 0.5$  y  $1$ , en los regímenes de temperaturas altas y bajas. *Parámetros:*  $\omega = g = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = 10^{-3}$  (Temperatura alta),  $\beta = 5$  (Temperatura baja).

Una vez observado explícitamente el aumento monótono de las correlaciones con las coherencias, se busca estudiar la dependencia de la eficiencia

con las correlaciones totales. Para hacer esta curva se modifica la coherencia, calculando simultáneamente la información mutua y la eficiencia del proceso. Al graficar una en función de la otra se obtiene como resultado la figura 3.10, donde se utilizaron los  $\tau$  empleados en los anteriores gráficos. Se observa fundamentalmente que ante un aumento en las correlaciones también hay un aumento en la eficiencia. En particular el máximo que las mismas pueden alcanzar aumenta también con  $\tau$ , debido a que los valores de información mutua que el proceso toma incrementan con este parámetro. Observar que la eficiencia alcanza un valor similar al mostrado como máximo en el capítulo 2, a pesar de no ser  $\tau = \frac{\pi}{\Omega}$ . Esto no presenta un problema, ya que los parámetros seleccionados allí fueron utilizados para mostrar como ejemplo lo máximo que este proceso puede tener en eficiencia. De hecho, este valor no es técnicamente alcanzado ya que  $0.64 < \frac{2}{3}$ . Se concluye así que ante un aumento de las correlaciones hay un aumento en la eficiencia de la batería.

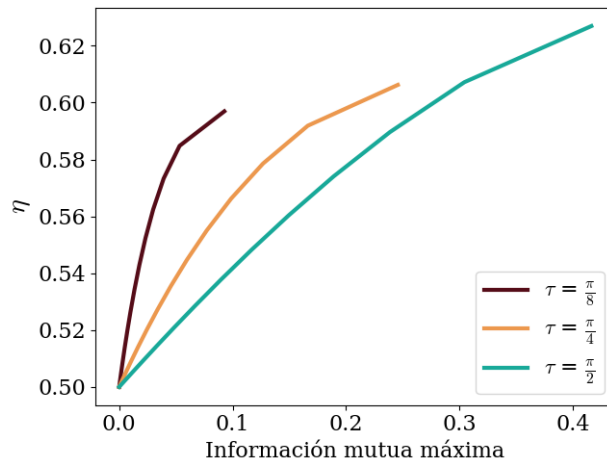


Figura 3.10: Gráfico de eficiencia en función de la información mutua máxima, para distintos valores de tiempo de interacción. Se encuentra que la eficiencia aumenta al aumentar las correlaciones totales, y que el mayor valor de la misma se alcanza para  $\tau = \frac{\pi}{2}$ . Parámetros:  $\beta = 10^{-3}$ ,  $g = \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

# Conclusiones

En esta tesis se analizó el proceso de carga de una batería cuántica mediante un modelo colisional. El sistema y ancillas estuvieron compuestos por sistemas idénticos de un qubit de energía  $\omega$ , con la excepción de que las ancillas poseían coherencias.

En primer lugar se estudió la eficiencia de carga del sistema para un modelo colisional levemente coherente. Para esto se empleó la ecuación maestra hallada en [15, 16], que dicta la dinámica del sistema. A partir de esta, se calculó analíticamente el estado estacionario del sistema y la eficiencia del proceso. Se muestra que la dependencia de esta sólo es con el parámetro  $\epsilon = \frac{2\mu_\beta|c|}{\omega^2 + \frac{g^2}{4}}$ , y que con el mismo no puede superarse el caso del proceso sin coherencias.

Para extender el análisis fuera estas aproximaciones, se consideró un tiempo de interacción finito. De esta manera, se definió el mapa  $\Phi$  sobre el estado del sistema. Se obtuvo la expresión matricial del mismo, con la cual se extrajo el valor del estado estacionario del sistema de manera analítica. Para calcular el valor de la eficiencia, se demostró que en los procesos que se cumple  $[U, -H_S + H_B] = 0$  el trabajo es el doble de la energía interna. Una vez obtenida la expresión de  $\eta$ , se encuentra que existen procesos en los cuales se supera el valor del caso sin coherencias.

Al estudiar el comportamiento de la eficiencia cambiando los parámetros del problema, se encontró que tomando tiempos de interacción pequeños se replica cualitativamente el comportamiento de la ecuación maestra. Por otro lado se estudió el efecto parcial de la temperatura, encontrando que la eficiencia aumenta al incrementar la temperatura, para los parámetros utilizados. A su vez se encontró que al disminuir la misma, las ancillas tienden a un estado puro asociado al  $|0\rangle$ , en donde las coherencias no importan, y que por lo tanto el resultado es el mismo al del proceso sin las mismas.

Luego se estudió la dependencia con  $\tau$ , encontrando que al interactuar débilmente, el valor del tiempo de interacción deja de importar. Por otro lado, se halla que las coherencias modifican fuertemente la eficiencia tanto en un régimen de interacción débil, como en uno de interacción fuerte.

Adicionalmente, se encuentra que con  $|c|$ , en el segundo régimen, el comportamiento de la eficiencia difiere dependiendo el valor de  $\tau$  en el que el sistema se encuentre: puede decrecer para valores cercanos a múltiplos del período, aumentar para valores próximos a la mitad del mismo, o tener un comportamiento variado en otros casos.

Se obtuvo también una cota máxima al valor de eficiencia, encontrando que en este caso es de  $\frac{2}{3}$ . Sin embargo, estudiando con más detalle el mapa del problema, se halló también que su acción para este ese valor es igual a la identidad. Por esta razón, el proceso es virtualmente imposible, ya que la evolución del mapa es no existente. Se puede sin embargo, acercarse cuanto uno quiera a este proceso, obteniendo así la eficiencia máxima.

Se prosiguió con el estudio de la potencia, utilizando la definición  $P = \frac{W}{T}$ . Se analizó inicialmente el caso sin coherencias de manera analítica. Al hacerlo, se obtuvo también la potencia de la ecuación maestra empleando las normalizaciones adecuadas. Se encontró que la temperatura tiene un efecto negativo en la potencia, debido a que el estado estacionario y el pasivo son iguales en el límite  $\beta \rightarrow 0$ , haciendo que no haya energía a descargar. Se observó que el valor de  $\omega$  disminuye el valor de potencia, debido a que la energía que se quiere cargar aumenta. Se buscó también el máximo valor de potencia en este caso, hallando que este depende únicamente de la intensidad de la interacción empleada.

Se continuó con el análisis de la potencia para el proceso con coherencias. Se encontró que al disminuir la temperatura reduce el efecto de la coherencia, como era esperado debido a lo revisado sobre el estado de las ancillas. Se halló también que al modificarse  $|c|$ , nunca puede superarse el valor del proceso sin la misma en los casos analizados.

Se estudió también la dependencia con el tiempo de interacción. Se encuentra nuevamente que, empleando ancillas puras, la potencia nunca supera la correspondiente al proceso sin coherencias. Por otro lado se encuentra también que al interactuar fuertemente, el efecto que tiene la disminución de la temperatura sobre las coherencias se ve disminuido. Adicionalmente, en el régimen de interacciones débiles la dependencia con  $\tau$  se ve disminuida, mientras que la temperatura en si produce cambios del mismo orden en ambos regímenes. Esto es debido a que prescinde de la interacción para afectar al sistema, ya que esta presente en el estado inicial del mismo.

Se analizó el comportamiento de la eficiencia a la vez que el de la potencia. Se encuentra que todos procesos estudiados tienen potencia nula en  $\tau = \frac{\pi}{\Omega}$ , hallando al mismo tiempo que en el entorno de este valor es un ejemplo ideal del intercambio entre potencia y eficiencia. Se encuentra también que el proceso en el régimen de interacción débil es equivalente al proceso con coherencias en cuanto a la potencia, pero que no es así para la eficiencia. Sin

embargo, en el mismo la potencia es sustancialmente menor a la del régimen de interacción fuerte. Para el mismo valor de  $g$ , se observa que  $\frac{\eta}{\eta_0}$  nunca es menor a uno, no así para el régimen opuesto donde se hallan regiones donde  $\frac{\eta}{\eta_0} \leq 1$  cercanos a múltiplos del período.

Para estudiar la eficiencia a potencia máxima, se grafica a la misma en función de la coherencia. Se encuentra que las curvas entre los regímenes de interacción fuerte y débil son muy similares, difiriendo principalmente para coherencias cercanas a uno en un 5%. Fundamentalmente, vuelve a encontrarse un intercambio entre potencia y eficiencia.

Finalmente, se estudió el efecto de los parámetros en la generación de correlaciones del proceso. Para medir las mismas se consideró el mayor valor de información mutua a lo largo del proceso, y la discordia cuántica asociada al tiempo en el que esto ocurría. Se encuentra que las coherencias aumentan las correlaciones, sin modificar sus distribuciones al cambiar el tiempo de interacción. A su vez, se observa que el porcentaje de correlaciones clásicas aumenta con la temperatura. La concurrencia disminuye con la temperatura, siendo distinta de cero únicamente cuando  $|c| = 1$ , en el régimen de temperaturas altas. En última instancia, se observa que la eficiencia aumenta junto con las correlaciones totales y con  $\tau$  en este caso, alcanzando un valor de  $\eta \approx 0.64$  en el mejor de los casos.

Como trabajo a futuro, se busca estudiar estos sistemas de manera colectiva, con el objetivo de caracterizar de la ventaja cuántica en términos del grado de coherencias presente en los entornos.

# Apéndice A

## Cálculo del trabajo para la ecuación maestra

Para calcular el trabajo del proceso de carga de la ecuación maestra (2.4) se debe integrar la ecuación (2.12). Para hacer esto, debe tenerse previo cuidado con el termino constante que aparece en la misma, ya que su integral divergería. Esto, sin embargo, no termina siendo un problema. Si se considera que la solución de la ecuación diferencial debe tener un término correspondiente a la solución homogéneo y otro a la solución estacionaria:

$$\rho = \rho_h + \hat{\rho}. \quad (\text{A.1})$$

Al reemplazar su expresión en la ecuación (2.11), y considerarse solo los términos constantes, se tiene que:

$$i(\hat{\rho}_{10} - \hat{\rho}_{01}) - \frac{g}{\mu_\beta |c|} (\hat{\rho}_{11} - p_\beta) \quad (\text{A.2})$$

Reemplazando la expresión del estacionario (2.7)

$$i(\hat{\rho}_{10} - \hat{\rho}_{01}) - \frac{g}{\mu_\beta |c|} (\hat{\rho}_{11} - p_\beta) = \frac{g^3 \mu_\beta |c|}{2(g\mu_\beta |c|)^2 + |a|^2} [(2p_\beta - 1) + (1 - 2p_\beta)] = 0$$

permitiendo así que la derivada del trabajo dependa únicamente de la solución homogénea de la ecuación maestra.

Se definen entonces las variables:

$$L_{ij} = \int_0^{+\infty} \rho_{ij}^h dt. \quad (\text{A.3})$$

donde  $\rho_{ij}^h$  son los elementos de la matriz densidad de la solución homogénea de la ecuación maestra. Al integrar [2.12](#) queda entonces:

$$\Delta W = 2\omega g|c| \left( i(L_{10} - L_{01}) - \frac{g}{\mu_\beta|c|} L_{11} \right). \quad (\text{A.4})$$

Resta calcular el valor de estas incógnitas para completar el cómputo de la eficiencia.

Para despejar estos valores, se integra la parte homogénea de la ecuación maestra. Debido a que  $\mathcal{K}(\rho)$  es lineal en  $\rho$ , la integral de esta misma función sera también únicamente función de las variables  $\{L_{ij}\}$ . La ecuación maestra queda entonces como:

$$\vec{\rho} - \omega_\beta(H_S) = \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(\rho) dt = \mathcal{F}(L) \quad (\text{A.5})$$

donde se entiende a  $\mathcal{F}(L)$  como el resultado de integrar  $\mathcal{K}(\rho)$ , que es función de la matriz  $L$  formada por las incógnitas  $L_{ij}$ . Una vez resueltos sus valores, puede reemplazárselos y hacer álgebra para llegar finalmente a la expresión presentada en [\(2.10\)](#).

# Apéndice B

## Cota para eficiencia

Se tiene que la expresión de la eficiencia es:

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{1 + (2\mu_\beta|c||G|)^2}}{4(1 - (\mu_\beta|c|)^2(1 - |G|^2))}. \quad (\text{B.1})$$

Podemos pensarla como función de  $|G|$ , que se redefine como  $z$ . Se calcula ahora la derivada de  $\eta$  respecto a  $z$ :

$$\frac{d\eta}{dz} = -\frac{z \left( 1 + 2(\mu_\beta|c|)^2 - 2(\mu_\beta|c|) + 2(\mu_\beta|c|)z^2 + \sqrt{4(\mu_\beta|c|)z^2 + 1} \right)}{(z^2 + 1 - (\mu_\beta|c|)^2) \sqrt{4(\mu_\beta|c|)z^2}} \quad (\text{B.2})$$

A partir de la misma, quiere verse que  $\eta$  es monótona en  $z$ , en particular decreciente. Esto es equivalente a mostrar que:

$$1 + 2(\mu_\beta|c|)^2 - 2(\mu_\beta|c|) + 2(\mu_\beta|c|)z^2 + \sqrt{4(\mu_\beta|c|)z^2 + 1} > 0 \quad (\text{B.3})$$

donde se usó que  $z \geq 0$  por definición. Los dos últimos términos de la inecuación son necesariamente mayores a cero. También puede verse que los primeros tres términos forman un polinomio de grado dos en  $\mu_\beta|c|$  que es mayor a cero debido a que tiene raíces imaginarias y es positivo por ejemplo cuando  $c = 0$ . Esto quiere decir que:

$$\frac{d\eta}{dz} < 0, \quad (\text{B.4})$$

por lo que el valor que maximiza  $\eta$  es el menor valor de  $z$ . Al ser  $z \geq 0$ , entonces la eficiencia se maximiza en  $z = 0$ . Por lo tanto:

$$\eta_{max} = \frac{1}{2(1 - (\mu_\beta|c|)^2)}. \quad (\text{B.5})$$

En última instancia falta maximizar respecto a  $\mu_\beta|c|$ . Como  $\eta_{max}$  es monótonamente creciente con  $\mu_\beta|c|$ , el máximo valor alcanzable para estos corresponde al máximo de la eficiencia. Este valor es  $\mu_\beta|c| \leq \frac{1}{2}$ , y evaluando en el mismo se obtiene que:

$$\eta < \frac{2}{3}. \tag{B.6}$$

# Bibliografía

- [1] Johannes Roßnagel, Samuel T. Dawkins, Karl N. Tolazzi, Obinna Abah, Eric Lutz, Ferdinand Schmidt-Kaler, and Kilian Singer. A single-atom heat engine. *Science*, 352(6283):325–329, April 2016.
- [2] D. von Lindenfels, O. Gräß, C.T. Schmiegelow, V. Kaushal, J. Schulz, Mark T. Mitchison, John Goold, F. Schmidt-Kaler, and U.G. Poschinger. Spin heat engine coupled to a harmonic-oscillator flywheel. *Physical Review Letters*, 123(8), August 2019.
- [3] Sai Vinjanampathy and Janet Anders. Quantum thermodynamics. *Contemporary Physics*, 57(4):545–579, July 2016.
- [4] G. Alvarado Barrios, F. Albarrán-Arriagada, F. A. Cárdenas-López, G. Romero, and J. C. Retamal. Role of quantum correlations in light-matter quantum heat engines. *Physical Review A*, 96(5), November 2017.
- [5] Adam Hewgill, Alessandro Ferraro, and Gabriele De Chiara. Quantum correlations and thermodynamic performances of two-qubit engines with local and common baths. *Physical Review A*, 98(4), October 2018.
- [6] Facundo Sapienza, Federico Cerisola, and Augusto Roncaglia. Correlations as a resource in quantum thermodynamics. *Nature Communications*, 10:2492, 06 2019.
- [7] Roie Dann and Ronnie Kosloff. Quantum signatures in the quantum carnot cycle. *New Journal of Physics*, 22(1):013055, January 2020.
- [8] Ferdi Altintas, Ali Ü. C. Hardal, and Özgür E. Müstecaplıoğlu. Rabi model as a quantum coherent heat engine: From quantum biology to superconducting circuits. *Physical Review A*, 91(2), February 2015.
- [9] Patrice A. Camati, Jonas F. G. Santos, and Roberto M. Serra. Coherence effects in the performance of the quantum otto heat engine. *Physical Review A*, 99(6), June 2019.

- [10] Juliette Monsel, Marco Fellous-Asiani, Benjamin Huard, and Alexia Auffèves. The energetic cost of work extraction. *Physical Review Letters*, 124(13), March 2020.
- [11] Stella Seah, Martí Perarnau-Llobet, Géraldine Haack, Nicolas Brunner, and Stefan Nimmrichter. Quantum speed-up in collisional battery charging. *Physical Review Letters*, 127(10), August 2021.
- [12] F. H. Kamin, F. T. Tabesh, S. Salimi, and Alan C. Santos. Entanglement, coherence, and charging process of quantum batteries. *Physical Review E*, 102(5), November 2020.
- [13] Felipe Barra. Dissipative charging of a quantum battery. *Physical Review Letters*, 122(21), May 2019.
- [14] Javier Carrasco, Jerónimo R. Maze, Carla Hermann-Avigliano, and Felipe Barra. Collective enhancement in dissipative quantum batteries. *Physical Review E*, 105(6), June 2022.
- [15] Franklin L. S. Rodrigues, Gabriele De Chiara, Mauro Paternostro, and Gabriel T. Landi. Thermodynamics of weakly coherent collisional models. *Physical Review Letters*, 123(14), oct 2019.
- [16] Kenza Hammam, Heather Leitch, Yassine Hassouni, and Gabriele De Chiara. Exploiting coherence for quantum thermodynamic advantage. *New Journal of Physics*, 24(11):113053, nov 2022.
- [17] A. E Allahverdyan, R Balian, and Th. M Nieuwenhuizen. Maximal work extraction from finite quantum systems. *Europhysics Letters (EPL)*, 67(4):565–571, August 2004.
- [18] Wiesław Pusz and Stanislaw Woronowicz. Passive states and kms states for general quantum systems. *Communications in Mathematical Physics*, 58:273–290, 10 1978.
- [19] Anirban N. Chowdhury, Guang Hao Low, and Nathan Wiebe. A variational quantum algorithm for preparing quantum gibbs states, 2020.
- [20] Robert Alicki and Mark Fannes. Entanglement boost for extractable work from ensembles of quantum batteries. *Phys. Rev. E*, 87:042123, Apr 2013.
- [21] Karen V. Hovhannisyan, Martí Perarnau-Llobet, Marcus Huber, and Antonio Acín. Entanglement generation is not necessary for optimal work extraction. *Physical Review Letters*, 111(24), December 2013.

- [22] Francesco Campaioli, Felix A. Pollock, Felix C. Binder, Lucas Céleri, John Goold, Sai Vinjanampathy, and Kavan Modi. Enhancing the charging power of quantum batteries. *Phys. Rev. Lett.*, 118:150601, Apr 2017.
- [23] Felix C Binder, Sai Vinjanampathy, Kavan Modi, and John Goold. Quantacell: powerful charging of quantum batteries. *New Journal of Physics*, 17(7):075015, July 2015.
- [24] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. The theory of open quantum systems. 2002.
- [25] Gabriele De Chiara, Gabriel Landi, Adam Hewgill, Brendan Reid, Alessandro Ferraro, Augusto J Roncaglia, and Mauro Antezza. Reconciliation of quantum local master equations with thermodynamics. *New Journal of Physics*, 20(11):113024, November 2018.
- [26] Felipe Barra. The thermodynamic cost of driving quantum systems by their boundaries. *Scientific Reports*, 5(1), October 2015.
- [27] Francesco Ciccarello, Salvatore Lorenzo, Vittorio Giovannetti, and G. Massimo Palma. Quantum collision models: Open system dynamics from repeated interactions. *Physics Reports*, 954:1–70, April 2022.
- [28] Felipe Barra and Cristóbal Lledó. Stochastic thermodynamics of quantum maps with and without equilibrium. *Phys. Rev. E*, 96:052114, Nov 2017.
- [29] P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre. Theory of a microscopic maser. *Phys. Rev. A*, 34:3077–3087, Oct 1986.
- [30] P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre. Quantum and semiclassical steady states of a kicked cavity mode. *Journal of the Optical Society of America B Optical Physics*, 3(6):906–910, June 1986.
- [31] Carlton M. Caves. Quantum mechanics of measurements distributed in time. a path-integral formulation. *Phys. Rev. D*, 33:1643–1665, Mar 1986.
- [32] Carlton M. Caves. Quantum mechanics of measurements distributed in time. II. Connections among formulations. *Phys. Rev. D*, 35(6):1815, 1987.

- [33] Franco Mayo and Augusto J. Roncaglia. Collective effects and quantum coherence in dissipative charging of quantum batteries. *Physical Review A*, 105(6), June 2022.
- [34] Felix Bischof, Hermann Kampermann, and Dagmar Bruß. Quantifying coherence with respect to general quantum measurements. *Phys. Rev. A*, 103:032429, Mar 2021.
- [35] Brian C. Hall. An elementary introduction to groups and representations, 2000.
- [36] Ronnie Kosloff. Quantum thermodynamics and open-systems modeling. *The Journal of Chemical Physics*, 150(20):204105, 05 2019.
- [37] Jincan Chen. The maximum power output and maximum efficiency of an irreversible carnot heat engine. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 27(6):1144, 1994.
- [38] Ingemar Bengtsson and Karol Zyczkowski. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. 08 2017.
- [39] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. *Physical Review Letters*, 88(1), December 2001.
- [40] W.H. Zurek. Einselection and decoherence from an information theory perspective. *Annalen der Physik*, 512(11–12):855–864, November 2000.
- [41] Scott Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Physical Review Letters*, 78(26):5022–5025, June 1997.
- [42] Martin B. Plenio and S. Virmani. An introduction to entanglement measures, 2006.

Tesis disponible bajo Licencia: Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina Buenos Aires, 2024