

Análisis de la cascada de energía en turbulencia magnetohidrodinámica compresible

Gonzalo Javier Alvarez

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Abril 2024

TEMA:	Turbulencia de plasmas
ALUMNO:	Gonzalo Javier Alvarez
L.U. N°:	719/17
LUGAR DE TRABAJO:	Departamento de Física, FCEyN, UBA
DIRECTOR DEL TRABAJO:	Dr. Nahuel Andrés
CODIRECTOR DEL TRABAJO:	Dr. Pablo Dmitruk
FECHA DE INICIACION:	Marzo 2023
FECHA DE FINALIZACION:	Abril 2024
FECHA DE EXAMEN:	30/04/2024
INFORME FINAL APROBADO POR:	

Autor: Gonzalo Javier Alvarez

Director: Dr. Nahuel Andrés

Jurado: Dr. Sergio Dasso

CoDirector: Dr. Pablo Dmitruk

Jurado: Dr. Fernando Minotti

Prof.: Dra. Silvina Ponce Dawson

Jurado: Dra. Paola R. Imazio

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis directores Nahuel y Pablo por su acompañamiento tanto académico como personal en esta última etapa de la carrera y con los procesos de decisión que conlleva.

A la educación pública, un orgullo nacional que debemos apoyar y defender, hoy más que nunca. Incluyo aquí a los estados presentes, que han permitido tanto esta formación como el desarrollo de la ciencia y tecnología en el país.

A la facultad y comunidad de Exactas en la que tengo el honor de haber sido estudiante, de ser docente, y a la cuál quiero poder devolver todo lo que me dio.

A cada compañerx y amistad que me dejó este camino y de quienes aprendí dentro y fuera de la facultad. Si bien no quiero dejar a nadie fuera, siento la necesidad de hacer algunas menciones especiales:

Para Berna, con quién a lo largo de la carrera nos mirábamos a la cara sin entender lo que estaba pasando en el pizarrón, pero sabiendo que más tarde lo íbamos a entender juntos a la fuerza. Para Gastón, que se bancó los trapos en esas tardes y noches de laboratorio y que es para mí un ejemplo de disciplina en todo sentido. Para Sofi, que desde el CBC me tuvo que soportar de compañero, de amigo y hasta de docente. Para Nahue, Colo, Caro, Belu, José y el resto de la camada, que admiro y que siempre me sacan una sonrisa. No podría estar acá sin ustedes.

A Agus con quién “caímos” a esta facultad (y a Santi quién nos “arrastró”). Sé que todo lo que diga va a quedar corto: simplemente gracias por todos estos años de amistad, sos un hermano y tu apoyo fue muy importante.

A Alex, mi novio y compañero de vida que admiro y que fue fundamental para mí en esta última etapa. Gracias por estar, te amo.

A toda mi familia, que siempre me apoyó en todo y que los amo profundamente: a mis padres Gerardo y Cristina, mi hermano Ari y mi hermana Ro, como también a Juan, Vero y obviamente la mejor sobrina del mundo, Vicky.

Resumen

Mediante simulaciones numéricas directas (DNSs) en 3D, en la presente Tesis de Licenciatura se estudia la cascada de energía ε en turbulencia bajo la aproximación magneto-hidrodinámica (MHD) compresible (CMHD). Este análisis empleó DNSs con una resolución espacial fija de 512^3 puntos de grilla para CMHD utilizando una relación de clausura isotérmica. Basado en relaciones exactas derivadas a partir de la ecuación de Karman-Howarth, se computaron los términos de flujo para la cascada de energía compresible e incompresible. Variando tanto el número de Mach sónico como el número de Mach Alfvénico, observamos tanto distintos niveles de compresibilidad (regímenes subsónicos y supersónicos) como de campo magnético guía (debil, moderado y fuerte). Para el análisis numérico, se desarrollaron códigos que permiten computar la cascada de energía CMHD en direcciones arbitrarias mediante una interpolación por fuera de puntos de grilla de la caja cúbica. Esto permite el cálculo de funciones de correlación en función de las distintas escalas para, finalmente, promediar dichas funciones y obtener la cascada en función para distintos valores de la compresibilidad y del campo magnético guía.

Abstract

Using 3D direct numerical simulations (DNSs), the present Thesis studies the turbulent energy cascade rate ε under the compressible magnetohydrodynamic (CMHD) approach. The analysis utilises simulations with a fixed spatial resolution of 512^3 grid points for CMHD with an isothermal closure relation. The flux terms for the energy cascade rate were computed based on the exact laws derived from the Karman-Howarth equation. A parametric study was carried out, varying both the sonic and Alfvénic Mach number, to observe different levels of compressibility (subsonic and supersonic regimes) and guiding magnetic field. A code was developed for the numerical analysis, which enabled the computation of the CMHD energy cascade rate in arbitrary directions by interpolating outside the grid points to obtain a scale-dependent statistic and averaging them to obtain the cascade as a function of compressibility and guiding magnetic field.

Índice de figuras	III
Índice de tablas	V
1. Introducción	1
2. Descripción magnetohidrodinámica	5
2.1. Ecuaciones de fluidos	5
2.2. Ecuaciones electromagnéticas	6
2.3. Relación de clausura	7
2.4. Ecuaciones MHD compresibles	8
3. Fenomenología de la turbulencia	9
3.1. Turbulencia	9
3.2. La cascada de energía	10
3.2.1. Tasa de disipación	11
3.3. Las hipótesis de Kolmogorov	12
3.3.1. Rango inercial	13
3.4. Turbulencia en plasmas	13
4. Cascada de energía turbulenta	17
4.1. Cascada de energía en HD	17
4.1.1. Ecuación de von Kármán–Howarth	18
4.2. Relaciones exactas en MHD compresible	19
4.2.1. Expresión completa	19
4.2.2. Términos de flujo	20
4.2.3. El límite incompresible	21

5. Simulaciones y análisis numérico	23
5.1. El código numérico ENZO	23
5.1.1. Métodos conservativos	23
5.2. Resumen de simulaciones	24
5.2.1. Compresibilidad	25
5.2.2. Forzado del sistema y condiciones iniciales	26
5.3. Cómputo de la cascada de energía	26
5.3.1. Descomposición $SO(3)$	27
5.3.2. Interpolación	27
6. Resultados numéricos	31
6.1. Fluctuaciones de densidad	31
6.2. Anisotropías por el campo magnético	32
6.3. Cascadas de energía turbulenta	32
6.4. Dependencias de la cascada de energía	36
6.4.1. Compresibilidad	36
6.4.2. Campo magnético medio	36
7. Conclusiones	41
Bibliografía	43

1.1. Validación de la relación exacta para turbulencia MHD incompresible. Figuras extraídas de Sorriso-Valvo et al. [2002] y Mininni et al. [2008] , respectivamente.	2
1.2. Estimación de la cascada de energía para turbulencia MHD incompresible. Figuras adaptada de MacBride et al. [2005]	3
3.1. Representación esquemática de la cascada directa de energía propuesta por Richardson. En el rango inercial, existe una transferencia de energía a tasa constante que continua hasta las escalas de disipación (escala de Kolmogorov η) donde la energía es disipada en forma de calor.	11
3.2. Espectro de energía magnético en el viento solar a lo largo de distintas escalas espaciales y temporales. Extraído de Kiyani et al. [2015]	14
5.1. Esquema de las 73 direcciones de la descomposición $SO(3)$	28
6.1. Función de distribución (o PDF, por sus siglas en inglés) para el número de Mach turbulento y para la densidad del plasma, variando el valor de M_S a campo magnético medio constante $B_0 = 1$	32
6.2. Módulo de la velocidad para el caso de $M_S = 0.5$ y $M_A = 2$, en los planos paralelo y perpendicular al campo magnético medio con $B_0 = 0.5$. Para este caso de campo medio débil no existe una anisotropía pronunciada entre la dirección paralela y perpendicular.	33
6.3. Módulo de la velocidad del plasma para el caso de $M_S = 6$ y $M_A = 0.5$, en los planos paralelo y perpendicular al campo magnético medio con $B_0 = 12$. En este caso, e.g., campo magnético fuerte, se observa claramente la anisotropía que se genera al estirarse en la dirección del mismo.	33

6.4.	Ejemplo del cómputo de la cascada de energía a lo largo de las 73 direcciones SO(3). Cada curva gris es una interpolación (para una dirección particular) que permite el promedio entre ellas sobre las mismas escalas.	34
6.5.	Cascadas de energía provenientes de los términos de flujo incompresible (ε_I) y compresibles (ε_{1C} , ε_{2C} y la total, ε_C) en función de la escala para todos los valores barridos de M_S y M_A de las simulaciones.	35
6.6.	Componentes de las cascadas de energía compresible y la cascada incompresible en función de la escala. La barra de color viene dada por la compresibilidad.	37
6.7.	Componentes de la cascadas de energía compresible normalizada a la cascada incompresible en función de la escala. La barra de color viene dada por la compresibilidad.	37
6.8.	(a) La cascada de energía total compresible contra la incompresible. (b) El segundo término de la cascada de energía compresible en función del primero. En línea punteada se muestra la recta de pendiente 1 de referencia. En ambos casos la barra da color viene dada por el valor de compresibilidad.	38
6.9.	Cascada de energía total compresible en función de cascada incompresible. En línea punteada la recta de pendiente 1 de referencia. La barra de color corresponde al campo magnético medio.	38
6.10.	Cascadas de energía compresible e incompresible en función del campo magnético medio del sistema. La barra de color viene dada por el valor de compresibilidad para cada simulación. El marcador viene dado por el valor de M_A	39
6.11.	Cascadas de energía compresible normalizadas por la cascada incompresible en función de la compresibilidad del sistema. La barra de color viene dada por el valor del campo magnético para cada simulación.	40
6.12.	Cascadas de energía compresible normalizadas por la cascada incompresible en función de la compresibilidad del sistema. La barra de color viene dada por el valor de compresibilidad para cada simulación.	40

5.1. Parámetros de la simulación. Los valores de M_S y M_A son los valores objetivos determinados como entrada en la simulación. Presentamos los valores medios (promediado en toda la caja) del campo magnético, RMS del campo de velocidad y la compresibilidad del sistema.	25
--	----

La turbulencia es un fenómeno omnipresente en la naturaleza. Usualmente, la turbulencia aparece como un estado de movimiento muy complejo e irregular en el espacio y en el tiempo. Sin embargo, un flujo turbulento muestra la presencia de estructuras organizadas de diferentes tamaños y distintos tiempos de vida (i.e., vórtices), las cuales interactúan de manera no-lineal entre ellas, dando lugar a la llamada cascada no-lineal de energía [ver, [Richardson, 1922](#)]. En el caso paradigmático de turbulencia hidrodinámica incompresible, [von Kármán and Howarth \[1938\]](#) obtuvieron una expresión exacta para la cascada de energía (ε) bajo la hipótesis de turbulencia isotropa y homogénea. Esta es la llamada ecuación de von Kármán-Howarth y es uno de los pilares fundamentales de las teorías de la turbulencia incompresible. Este resultado no trivial tiene como consecuencia directa, entre otras cosas, al espectro de Kolmogorov para la energía cinética. Además, resulta independiente de los mecanismos de disipación presentes en el fluido y conecta la información disponible a gran escala, como los incrementos de velocidad, con cantidades a pequeña escala, como la tasa de disipación.

Varios trabajos han contribuido a la extensión de la ecuación de von Kármán-Howarth en el caso de plasmas magnetizados. Bajo las hipótesis de incompresibilidad, isotropía y homogeneidad, [Politano and Pouquet \[1998a\]](#) investigaron la relación exacta para turbulencia magnetohidrodinámica (MHD) totalmente desarrollada. A la vez, [Politano and Pouquet \[1998b\]](#) investigaron su potencial aplicación a mediciones in situ en el viento solar haciendo uso de las variables de Elsässer. Esta relación exacta para MHD incompresible ha sido validada numéricamente haciendo uso de distintas estrategias numéricas y parámetros del sistema [[Sorriso-Valvo et al., 2002](#), [Mininni et al., 2003](#)], así como también utilizada para estimar la cascada de energía en el viento solar y en distintas magnetosferas planetarias. En particular, la Figura 1.1 muestra el flujo de energía total incompresible en función de la escala, para distintas dimensiones y distintos forzados numéricos. En ambos casos, se

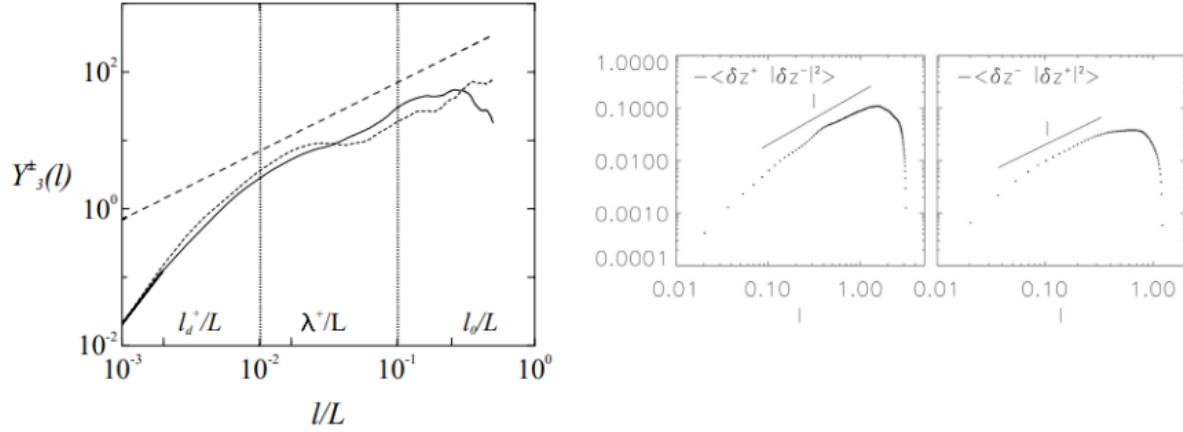


Figura 1.1: Validación de la relación exacta para turbulencia MHD incompresible. Figuras extraídas de [Sorriso-Valvo et al. \[2002\]](#) y [Mininni et al. \[2008\]](#), respectivamente.

observa que existe un rango inercial, en el cual los llamados términos de flujos escalan como la longitud ℓ , lo que implica una cascada de energía ε constante.

La expansión de la corona solar hacia el sistema solar se conoce con el nombre de viento solar [e.g., [Parker, 2019](#)] y es un ejemplo de un plasma supersónico el cual es caracterizado por ser un plasma turbulento y anisótropo ([Tu and Marsch \[1995\]](#), [Dasso et al. \[2005\]](#), [Fraternali et al. \[2019\]](#)). A modo de ejemplo, la Figura 1.2 muestra un ejemplo de la cascada de energía estimada utilizando observaciones de la misión ACE en el viento solar. Es importante remarcar que gran parte de los avances por entender el fenómeno no-lineal de la turbulencia en plasmas espaciales han sido realizados bajo la aproximación de incompresibilidad, es decir, sin tener en cuenta la existencia de fluctuaciones de la densidad. Al incluir estas fluctuaciones en un plasma, es de esperar que tanto la dinámica general del plasma, como la cascada de energía se vean fuertemente afectadas [ver, [Dmitruk et al., 2005](#), [Banerjee and Galtier, 2013](#), [Andrés and Sahraoui, 2017](#), [Brodiano et al., 2021](#)]. En particular, [Andrés and Sahraoui \[2017\]](#) han derivado una expresión para la relación exacta para turbulencia compresible isotérmica en términos de la velocidad del plasma, la velocidad de Alfvén compresible y la densidad del plasma. Los autores han mostrado que la expresión para ε no solo tiene en cuenta los típicos términos de flujo, sino que involucra nuevos términos en el rango inercial. Más aún, estos resultados han sido confirmados y extendidos por [Simon and Sahraoui \[2021\]](#) al considerar un plasma compresible politrópico. Además, dentro de los regímenes compresibles, la turbulencia se presenta en rangos supersónicos en diversos fenómenos astrofísicos tales como el viento solar, la evolución del medio interestelar y la formación de estrellas donde existen regiones con grandes fluctuaciones de densidad [[Ferrand et al., 2020](#)].

Gracias a la gran cantidad de observaciones in situ disponibles, es sabido que la tempe-

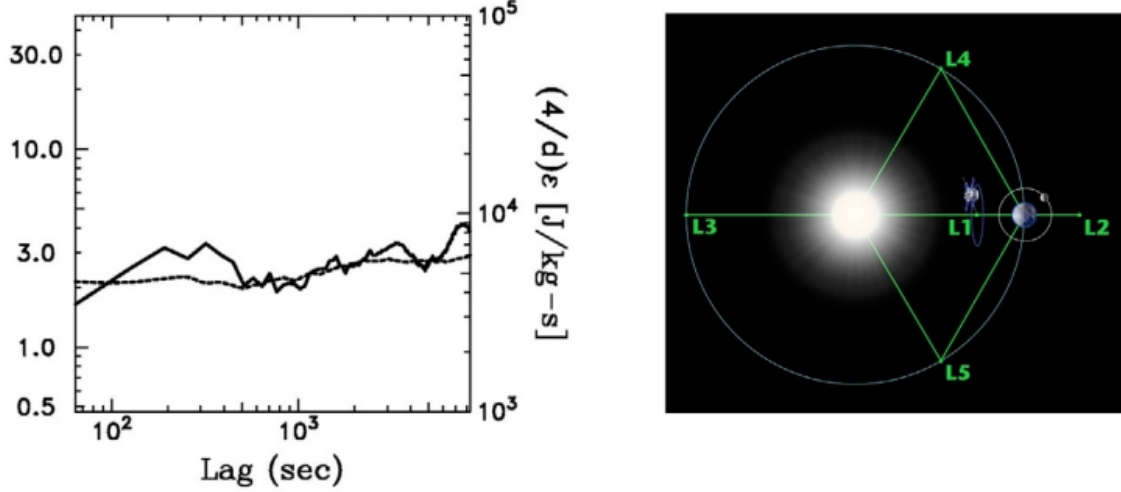


Figura 1.2: Estimación de la cascada de energía para turbulencia MHD incompresible. Figuras adaptada de [MacBride et al. \[2005\]](#).

ratura de los protones del viento solar disminuye más lentamente en función de la distancia radial desde el Sol en comparación con la predicción del modelo de expansión adiabática [[Matthaeus, 2021](#)]. Una pregunta necesaria es, ¿qué calienta el viento solar a medida que se expande desde el Sol hacia el medio interplanetario? Esta pregunta engloba lo que se conoce como el problema del calentamiento del viento solar y es un problema abierto al día de hoy en la comunidad de Física del Espacio. Una potencial respuesta a este problema es la cascada de energía turbulenta, la cual podría proporcionar una solución precisa al problema. En líneas generales, en turbulencia de plasmas, cuando el tamaño de las estructuras formadas alcanza la escala de disipación, la energía electromagnética turbulenta se convierte en energía térmica (calentamiento) y/o energía cinética (aceleración) de las partículas del plasma. Más aún, la turbulencia de gran escala magneto-hidrodinámica (MHD) sirve como reservorio de energía la cual *cascadea* hasta las escalas más pequeñas, donde es disipada mediante efectos cinéticos mientras calienta el plasma [[Bruno and Carbone, 2013](#)].

La motivación de la presente Tesis es estudiar la tasa de disipación de energía turbulenta (o simplemente, la cascada de energía) mediante el uso de simulaciones numéricas directas (DNSs) tridimensionales (3D) dentro del modelo MHD compresible (CMHD) para un plasma isotérmico, es decir, un plasma donde la densidad es proporcional a la presión (escalar). Esta relación de clausura es comúnmente utilizada en simulaciones astrofísicas turbulentas, como nubes moleculares o el viento solar. Es importante remarcar que existen otras clausuras del tipo gas ideal o politrópicas. Sin embargo, en la presente Tesis nos concentramos en la clausura isotérmica debido a la posible comparación de los resultados numéricos con las observaciones previas en el entorno cercano a la Tierra. Mediante un

estudio paramétrico variando tanto el número de Mach sónico como el número de Mach Alfvénico estudiaremos simulaciones en rangos subsónicos y supersónicos para distintos valores del campo magnético medio. Este estudio nos permitirá dar un paso más para el entendimiento de la cascada de energía compresible en el marco del problema del calentamiento del viento solar.

Cuando un fluido conductor se encuentra dentro de un campo electromagnético, las partículas que lo componen son aceleradas y, por tanto, generan nuevos campos que modificarán al campo inicial. Esto resulta en un proceso de retroalimentación donde el movimiento del fluido es afectado por el propio campo que sus cargas generan por medio de la fuerza de Lorentz. En la descripción magneto-hidrodinámica (MHD) desarrollada por Hannes Alfvén (1942) se trata al fluido como un medio continuo utilizando cantidades macroscópicas para su descripción y combinando las ecuaciones dinámicas de fluidos con las ecuaciones del electromagnetismo. La teoría MHD aplica para describir una gran cantidad de plasmas astrofísicos (como el viento solar), plasmas de laboratorio y metales líquidos, entre otros fenómenos. A continuación describiremos el conjunto de ecuaciones 3D que definen por completo la descripción MHD [Fitzpatrick, 2014] utilizadas para las DNSs en su versión compresible (CMHD) considerando fluctuaciones en la densidad.

2.1. Ecuaciones de fluidos

Para describir la dinámica del movimiento del fluido partimos de la ecuación de Navier-Stokes basada en la segunda ley de Newton (balance de momento) que vincula la aceleración de los elementos de fluido con las fuerzas externas y términos superficiales:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{1}{\rho}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_k + \mathbf{D}_k, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{u} son las fluctuaciones del campo de velocidad (restamos el valor medio), ρ es la densidad de masa (no constante para el caso compresible), P es la presión térmica y $(\mathbf{J} \times \mathbf{B})/\rho$ es la fuerza de Lorentz por unidad de masa (siendo $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ la corriente eléctrica y \mathbf{B} el campo magnético. En esta formulación, estamos trabajando con unidades

de \mathbf{B} de forma que $\mathbf{B}^2/2$ es la energía magnética. Por otro lado, el término \mathbf{F}_k es algún forzado mecánico (de larga escala) y \mathbf{D}_k es el término de disipación cinética (corta escala). En general, el mecanismo de disipación para fluidos newtonianos compresibles viene dado por la expresión

$$\mathbf{D}_k = \nu \left[\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \quad (2.2)$$

proveniente del tensor de esfuerzos superficiales. Además, considerando las fluctuaciones de densidad, incluimos la ecuación de continuidad que expresa la conservación de la masa del fluido:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}). \quad (2.3)$$

2.2. Ecuaciones electromagnéticas

Al trabajar con un fluido conductor en presencia de campos electromagnéticos, debemos incluir las ecuaciones del electromagnetismo dadas por las ecuaciones de Maxwell. En primer lugar, consideremos primero la ley de Ohm que relaciona el campo eléctrico con la corriente eléctrica que atraviesa a un medio conductor. La constante de proporcionalidad está dada por la conductividad eléctrica σ de forma que $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, válido para sistemas lineales. Además, esta relación es válida en el sistema de referencia del medio conductor; al considerar el movimiento del mismo, las propias cargas modifican el valor del campo obteniendo un término extra (al orden más bajo, considerando $u \ll c$) de forma que obtenemos un campo eléctrico efectivo dado por

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.4)$$

Ahora, si tomamos la ecuación de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

y sustituimos la relación entre los campos hallada previamente, resulta en la expresión dinámica para el campo magnético:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.6)$$

O bien, considerando algún forzado y mecanismo de disipación de forma genérica, tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}_m + \mathbf{D}_m, \quad (2.7)$$

que similarmente al caso hidrodinámico, \mathbf{F}_m es el rotor de la fuerza electromotriz, mientras que $\mathbf{D}_m = \eta \nabla^2 \mathbf{B}$ es el término de corta escala de disipación magnética. Por otro lado, hemos definido la constante $\eta = 1/\mu_0 \sigma$ de difusividad magnética (con μ_0 la permeabilidad magnética del vacío) que controla el nivel de difusión del campo magnético, análogamente a la viscosidad en el caso hidrodinámico. Esta constante de difusión nos permite definir el número de Reynolds magnético definido como

$$\text{Re}_m = \frac{LU}{\eta} \quad (2.8)$$

donde U y L son una velocidad y tamaño característico del sistema. De esta forma, si $\text{Re}_m \gg 1$ implica que la inercia del fluido es dominante y por lo tanto puede despreciarse la difusión (como es el caso del viento solar, donde se estima un orden de $\text{Re}_m = 7 \times 10^{16}$). En la aproximación de MHD ideal se considera $\eta = 0$. Esto simplifica la ecuación para el campo magnético vista en (2.6) a la expresión

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.9)$$

que implica el resultado

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (2.10)$$

Es decir, el flujo magnético es nulo y, por lo tanto, las líneas del campo magnético están congeladas en el fluido. Por otro lado, cuando Re_m es bajo, el campo magnético es altamente disipativo: las fuerzas de Lorentz inducidas se oponen al movimiento y, por lo tanto, convierten energía cinética en calor vía la disipación Óhmica.

Finalmente, nos falta considerar la ecuación de Gauss para el campo magnético que nos habla de su naturaleza solenoidal:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.11)$$

2.3. Relación de clausura

Uno de los casos de estudio más sencillos es asumir que el plasma sigue una ecuación de estado isotérmica donde la presión y densidad son directamente proporcionales mediante la velocidad del sonido c_s (constante):

$$P = c_s^2 \rho. \quad (2.12)$$

Aunque esta relación de clausura no es del todo válida para plasmas sin colisiones (como sucede en los plasmas cercanos a la Tierra), ha sido utilizada para modelar el viento solar [Parker, 1958] reflejando comportamientos del flujo compresible en la corona solar basado en observaciones. A partir de esta relación de clausura, podemos obtener la energía interna del plasma que viene dada por

$$e = c_S^2 \ln(\rho/\rho_0) \quad (2.13)$$

donde ρ_0 es un valor constante de referencia de la densidad de masa y c_S la velocidad del sonido en el medio. En caso de considerar otras relaciones de clausura, como es el caso de la relación politrópica, la única diferencia que habrá con lo presentado en este trabajo vendrá dada por la expresión resultante de la energía interna. A continuación reescribiremos las ecuaciones vistas en términos de las variables comúnmente usadas para obtener el conjunto de ecuaciones que describen la teoría MHD compresible o CMHD.

2.4. Ecuaciones MHD compresibles

En lugar de trabajar con el campo magnético \mathbf{B} , es usual y conveniente escribir estas ecuaciones definiendo la velocidad de Alfvén compresible:

$$\mathbf{u}_A \equiv \mathbf{B}/\sqrt{\rho}. \quad (2.14)$$

De esta manera, ambos campos \mathbf{u} y \mathbf{u}_A quedan expresados en unidades de velocidad y en pie de igualdad. Sumado a esto, podemos reescribir la Ecuación (2.3) en términos de la energía interna y, desarrollando términos, obtener el siguiente conjunto de ecuaciones que definen la teoría en términos de los campos \mathbf{u} , \mathbf{u}_A , ρ y e :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla e - c_S^2 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}_A \cdot \nabla \mathbf{u}_A - \frac{1}{\rho}(P + P_M) - \mathbf{u}_A(\nabla \cdot \mathbf{u}_A) + \mathbf{F}_k + \mathbf{D}_k \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_A}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_A + \mathbf{u}_A \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}_A}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F}_m + \mathbf{D}_m \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u}_A \cdot \nabla \rho = -2\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}_A) \quad (2.18)$$

donde también se definió $P_M \equiv \rho u_A^2/2$ la presión magnética que aparece como una contribución de la presión total.

CAPÍTULO 3

FENOMENOLOGÍA DE LA TURBULENCIA

En este Capítulo se introduce el concepto de turbulencia y las aproximaciones que se utilizan usualmente para estudiarla. Particularmente, veremos las ideas fundamentales y aproximaciones que se precisarán para obtener las leyes exactas presentadas en el Capítulo siguiente para estudiar la cascada de energía. Por último describiremos brevemente el marco de la turbulencia de plasmas y en dónde entra la aproximación MHD.

3.1. Turbulencia

La turbulencia es un fenómeno que generalmente se asocia con la formación de vórtices en un fluido. Está presente en la naturaleza y en nuestra vida cotidiana: desde el movimiento de un río que atraviesa obstáculos, hasta el humo que escapa por una chimenea o las zonas turbulentas típicas que atraviesan los aviones. Aunque es un fenómeno ubicuo y relativamente fácil de identificar y visualizar, no es fácil de entender. A pesar de los grandes avances en su comprensión, siguen existiendo muchas preguntas sin respuesta, y la turbulencia sigue siendo uno de los principales temas de investigación en física.

Si bien hay diversos fenómenos en los que podemos identificar la turbulencia, es difícil proporcionar una definición cuantitativa. Además, existe una amplia variedad de flujos turbulentos: flujos geofísicos (como los vientos atmosféricos y las corrientes acuáticas), flujos astrofísicos (como la corona y el viento solar, las nubes moleculares en el medio interestelar), plasmas, sistemas biológicos (como el flujo sanguíneo) e incluso en sistemas cuánticos (como los superfluidos). A pesar de esta diversidad, todos estos flujos comparten una serie de características similares que nos permiten identificar la turbulencia:

- Comportamiento errático y de difícil predicción, lo cual conlleva a concluir que los flujos turbulentos son caóticos. Es decir, pequeños cambios en las condiciones ini-

ciales del sistema evoluciona a estados completamente distintos. A pesar de que las ecuaciones que rigen la evolución son deterministas, esto hace que experimentalmente sea inviable la predicción debido al crecimiento exponencial de las incertezas en los campos.

- Formación de estructuras de un rango amplio de escalas: desde las escalas más grandes donde se fuerzan mecánicamente los sistemas, hasta las escalas mas pequeñas de disipación. Esto hace que cualquier sistema turbulento tenga una cantidad enorme de grados de libertad.
- Interacciones no-lineales entre estructuras, lo cual conlleva a una transferencia de energía entre distintas escalas que se conoce como la cascada de energía.

Una forma de cuantificar el nivel de turbulencia en un fluido es mediante el número de Reynolds, un parámetro adimensional que se define como la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas en la ecuación de Navier-Stokes:

$$\text{Re} = \frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|} \sim \frac{UL}{\nu} \quad (3.1)$$

donde U y L son una velocidad y una longitud características del sistema, respectivamente. Según esta definición, un fluido con un bajo número de Reynolds se considera un flujo laminar, dominado por las fuerzas viscosas y caracterizado por un movimiento suave y constante. Por otro lado, para valores altos de Reynolds ($\text{Re} \gg 1$), el flujo se vuelve turbulento, dominado por las fuerzas inerciales que generan remolinos caóticos y vórtices.

3.2. La cascada de energía

La idea principal de la cascada de energía introducida por [Richardson \[1922\]](#) es que la energía cinética, inyectada por algún mecanismo de producción, entra a la turbulencia en las escalas grandes de movimiento. Luego, esa energía es transferida por procesos no viscosos a escalas cada vez más chicas, hasta alcanzar la escala más pequeña del sistema en donde la energía se disipa en calor por acción de la viscosidad. Más tarde, [Kolmogorov \[1941\]](#) profundizó en este concepto, identificando las escalas más chicas de la turbulencia, que ahora llevan su nombre. En la siguiente sección se presenta en más detalle el concepto de la cascada de energía de Richardson y las llamadas hipótesis de Kolmogorov para su estudio.

Para el estudio de la cascada de energía, vamos a considerar un flujo completamente turbulento, en valores del número de Reynolds altos ($\text{Re} \gg 1$). El primer concepto a introducir es considerar que la turbulencia está compuesta por remolinos de distintos tamaños.

De esta forma, cada remolino de una escala ℓ tiene una cierta velocidad $u(\ell)$ y por tanto, una escala de tiempo $\tau(\ell) = \ell/u(\ell)$. Además, cada remolino puede contener otros remolinos de menor escala en su interior. Esto quiere decir que los remolinos en las escalas más grandes del sistema tendrán un tamaño comparable con el del sistema y, por lo tanto, un Re grande, por lo que los efectos de la viscosidad son despreciables. La idea de Richardson es que estos grandes remolinos son inestables y se rompen, transfiriendo su energía a remolinos más chicos. Luego, esos remolinos se rompen de la misma forma, y así hasta alcanzar una escala tal que $Re(\ell) \equiv u(\ell)\ell/\nu$ es lo suficientemente chico como para que el remolino sea estable y finalmente la viscosidad molecular disipe la energía cinética. Este proceso es representado en la Figura 3.1.

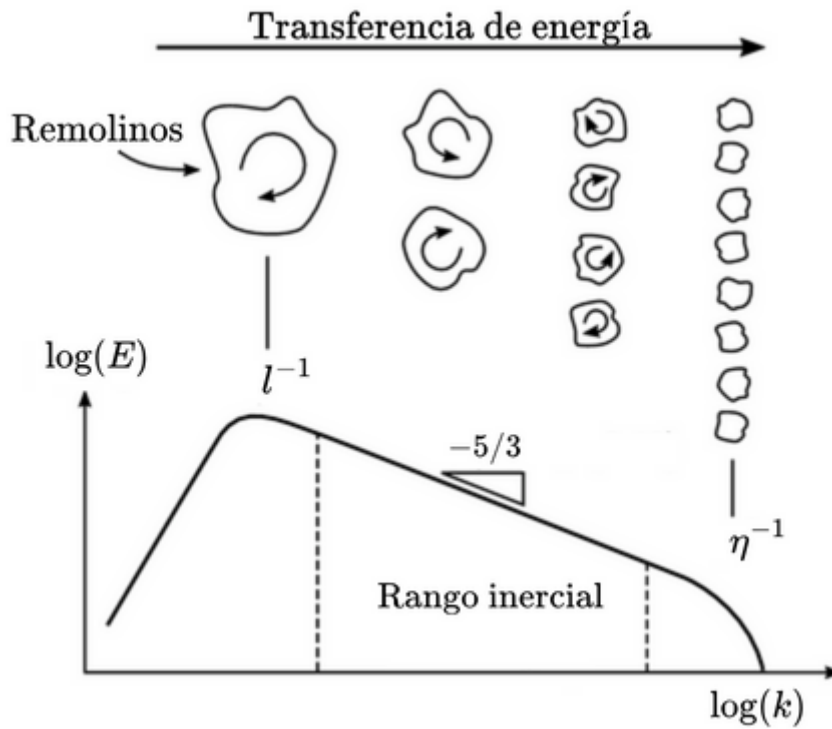


Figura 3.1: Representación esquemática de la cascada directa de energía propuesta por Richardson. En el rango inercial, existe una transferencia de energía a tasa constante que continua hasta las escalas de disipación (escala de Kolmogorov η) donde la energía es disipada en forma de calor.

3.2.1. Tasa de disipación

Una razón que hace importante esta forma de pensar la turbulencia es que posiciona a la disipación como el final de una serie de procesos. Así, *la tasa de disipación* ε es determinada por el primero de los procesos, que es la transferencia de energía desde los remolinos en las escalas grandes. Es decir, si los remolinos en las escalas grandes tienen una energía del orden u_0^2 y un tiempo característico $\tau_0 = \ell_0/u_0$, luego la tasa de disipación debe escalar

como

$$\varepsilon \sim E_0/\tau_0 = u_0^2/(\ell_0/u_0) \sim u_0^3/\ell_0. \quad (3.2)$$

Esto es consistente con las observaciones experimentales e indica que la tasa de disipación es independiente de la viscosidad del fluido (habiendo considerado $\text{Re} \gg 1$).

3.3. Las hipótesis de Kolmogorov

Para intentar resolver algunas de las preguntas fundamentales que quedaban por responder, Kolmogorov desarrolló una teoría fenomenológica sustentada en tres hipótesis. La primera de las hipótesis es considerar isotropía de las escalas pequeñas. En general, los remolinos grandes son naturalmente anisótropos al ser afectados por las condiciones de contorno del sistema. Kolmogorov consideró que esos sesgos direccionales se pierden en el proceso caótico de reducción de escala:

Hipótesis de isotropía local: Para un suficientemente alto número de Reynolds, los movimientos turbulentos de escalas chicas son estadísticamente isótropos. Es decir, existe invariancia ante cualquier rotación arbitraria al no haber direcciones privilegiadas.

De esta forma, se pierde toda información direccional y de la geometría de remolinos en las escalas grandes y la estadística de pequeña escala se vuelve universal, similarmente a lo que pasa en flujos con Re altos. Podemos preguntarnos entonces, ¿de qué parámetros depende esta estadística universal? En la cascada de energía, los dos procesos dominantes son, por un lado, la transferencia de energía a escalas sucesivamente más chicas, y por otro, la disipación viscosa al final de este proceso. Por esta razón, los parámetros que definen esta universalidad son la viscosidad cinemática ν y la tasa de disipación ε que será igual a la transferencia de energía. Esta hipótesis puede expresarse como:

Primera hipótesis de similaridad: En todo flujo turbulento a suficiente número de Reynolds, la estadística de la pequeña escala tiene una forma universal determinada por los parámetros ν y ε .

Dados estos dos parámetros, mediante análisis dimensional podemos obtener una longitud, velocidad y escala temporal únicas llamadas las escalas de Kolmogorov:

$$\eta \equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}, \quad (3.3)$$

$$u_\eta \equiv (\nu\varepsilon)^{1/4}, \quad (3.4)$$

$$\tau_\eta \equiv (\nu/\varepsilon)^{1/2}. \quad (3.5)$$

Estas escalas corresponden a las mas pequeñas y por lo tanto a remolinos disipativos. Podemos ver que el Re de estos remolinos es $\eta u_\eta / \nu = 1$, consistente con la idea de que la energía se transfiere a escalas cada vez mas chicas hasta la disipación. Conociendo estas escalas, podemos obtener el valor de la tasa de disipación

$$\varepsilon = \nu (u_\eta / \eta)^2 = \nu / \tau_\eta^2 \quad (3.6)$$

que caracteriza los remolinos disipativos.

3.3.1. Rango inercial

Inevitablemente, existe una región de escalas ℓ intermedia que es pequeña comparada con el tamaño de las grandes escalas ℓ_0 pero, a su vez, grande en comparación con la escala de disipación, es decir, $\ell_0 \gg \ell \gg \eta$. Los remolinos en escalas más grandes que los de disipación son poco afectados por la viscosidad y, por lo tanto, se llega a otra de las hipótesis:

Segunda hipótesis de similaridad: En todo flujo turbulento a suficiente número de Reynolds, la estadística de la escala ℓ en el rango $\ell_0 \gg \ell \gg \eta$ tiene una forma universal determinada únicamente por el parámetro ε independiente de ν .

Podemos, entonces, definir un rango de escalas $\ell_{\text{DIS}} \sim 60\eta$ en las que la disipación comienza a ser apreciable hasta alcanzar la escala disipativa η . Por otro lado, tenemos también alguna escala característica $\ell_{\text{ISO}} \sim \frac{1}{6}\ell_0$ en la que desaparece la anisotropía de los remolinos más grandes del sistema de escalas ℓ_0 . Por lo tanto, tendremos dos rangos de escalas relevantes: el rango inercial ($\ell_{\text{ISO}} > \ell > \ell_{\text{DIS}}$) y el rango de disipación ($\ell < \ell_{\text{DIS}}$). En el rango inercial los efectos de la viscosidad son despreciables y el fluido está dominado justamente por los efectos de inercia. En el rango de disipación, se producen todos los efectos viscosos responsables de la disipación del sistema.

3.4. Turbulencia en plasmas

La turbulencia en MHD se estudió históricamente dentro de dos comunidades muy distintas. Por un lado, en el mundo de la ingeniería se ha estudiado la turbulencia para bajos Re_m motivado por el entendimiento del flujo de metales líquidos aplicado a dispositivos electrónicos. Por el otro lado, dentro de la física del plasma y la astrofísica, en general, se tiende a estudiar turbulencia a muy altos $\text{Re}_m \gg 1$ dominado por la inercia. Muchos de estos trabajos se concentran en la turbulencia homogénea motivada por fenómenos como discos de acreción, la evolución de la atmósfera solar o del medio interestelar. Existen numerosos ejemplos de fenómenos turbulentos donde las fluctuaciones por compresión tienen

un gran impacto en la dinámica, es por esto que es fundamental el entendimiento de la transferencia de energía en CMHD.

Similarmente a la turbulencia HD, en turbulencia MHD las interacciones no lineales producen una cascada de energía desde las escalas grandes a las escalas más pequeñas del sistema. Una forma de estudiar este problema es mediante el espectro de potencia magnética que muestra como la energía se distribuye a lo largo de distintos números de onda (es decir, en el espacio de Fourier). En HD vimos tres principales rangos espaciales: las grandes escalas donde se inyecta la energía, el rango inercial y el rango disipativo. Para MHD, como es en el caso del viento solar, pueden identificarse cuatro regiones (Figura 3.2):

- **El rango f^{-1} :** en las frecuencias bajas (correspondientes a escalas temporales del orden de días) se observa una variabilidad de las fuentes: como es el caso del sol y la atmósfera solar.
- **El rango inercial:** similar al discutido en el rango hidrodinámico. Aquí sucede la cascada de energía desde las escalas grandes a chicas. En este rango, el espectro de energía es una ley de potencia con exponente $-5/3$. Además, este proceso es independiente de las condiciones iniciales en la gran escala y de los mecanismos de disipación en las escalas más chicas.
- **Rango de transición y de sub-iones:** es lo que llamamos el “rango de disipación”. En esta escala se rompe la idea de fluido en MHD y es necesario tener en cuenta los efectos cinéticos de las partículas cargadas que componen el plasma.

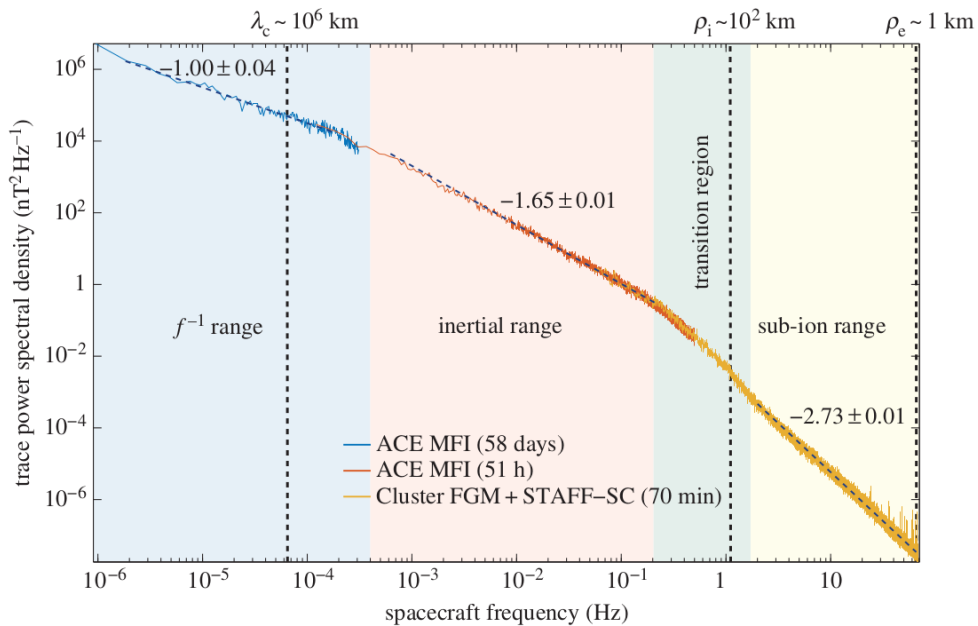


Figura 3.2: Espectro de energía magnético en el viento solar a lo largo de distintas escalas espaciales y temporales. Extraído de Kiyani et al. [2015].

Más allá de las escalas MHD, debemos tener en cuenta los efectos de pequeña escala y referirnos a la ley de Ohm generalizada para describir escalas espacio-temporales comparables al giro-período del ión y la distancia de penetración $d_i = c/\omega_{pi}$ (siendo c la velocidad de la luz y ω_{pi} la frecuencia del ión-plasma). La primera corrección para la descripción de fluido en esas escalas viene dada por la llamada corriente de Hall, que da origen al modelo llamado Hall-MHD (HMHD), donde presumiblemente la cascada de energía, y la dinámica en general, se vuelven dependientes de la compresibilidad del sistema [ver, [Andrés et al., 2018, 2019](#)].

CAPÍTULO 4

CASCADA DE ENERGÍA TURBULENTA

En base a los trabajos de [von Kármán and Howarth \[1938\]](#), [Kolmogorov \[1941\]](#) y [Moin and Yaglom \[1975\]](#) sobre turbulencia HD isótropa y anisótropa, bajo las hipótesis mencionadas, en este Capítulo estudiaremos la expresión de la cascada de energía mediante funciones de estructura de tercer orden en el campo de velocidad. Luego, mostraremos las relaciones exactas que surgen a partir de las ecuaciones MHD compresibles (ver, Capítulo 2.4) para turbulencia totalmente desarrollada y los distintos términos que aparecen. Finalmente, estudiaremos el límite incompresible de dicha relación.

4.1. Cascada de energía en HD

Para un caso de estudio más sencillo, veamos como se obtiene la cascada de energía en turbulencia HD para entender la metodología con la que se obtienen las ecuaciones en el caso de MHD compresible. En este caso, partimos de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.2)$$

donde \mathbf{f} son las fuerzas externas en las grandes escalas y para simplificar la notación tomamos $\rho_0 = 1$. Por otro lado, la ecuación de balance de energía (realizando un ensamble estadístico) viene dada por la potencia disipada por la fuerza externa y por la tasa de disipación de energía que definimos como ε :

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \rangle - \varepsilon \quad (4.3)$$

A continuación, veremos como para turbulencia homogénea en el rango inercial, esta cascada de energía es independiente de la escala y caracteriza una universalidad.

4.1.1. Ecuación de von Kármán–Howarth

En teoría de turbulencia incompresible estadísticamente isótropa y homogénea, para el caso de número de Reynolds Re tendiendo a infinito, uno de los resultados más importantes es la llamada "ley de los $4/5$ ". Esta primera relación exacta en turbulencia HD fue obtenida por Kolmogorov [1941] y permite estimar la tasa de disipación, o en otras palabras, la cascada de energía ε como funciones de estructura (o incrementos) de tercer orden en el campo de velocidad. Una forma de obtener esta relación es mediante el uso de la ecuación de von Kármán and Howarth [1938], es decir, a partir de la evolución temporal del tensor de segundo orden de la energía total del sistema.

Considerando la ecuación de Navier-Stokes para las componentes i y j evaluada en puntos del espacio \mathbf{x} y \mathbf{x}' , respectivamente tenemos que,

$$\partial_t u_i + \partial_k (u_k u_i) = -\partial_i P + \nu \partial_{kk}^2 u_i + f_i, \quad (4.4)$$

$$\partial_t u'_j + \partial'_k (u'_k u'_j) = -\partial'_j P + \nu \partial'^2_{kk} u'_j + f'_j, \quad (4.5)$$

donde la condición de incompresibilidad se escribe como $\partial_k u_k = 0$. Para simplificar la notación, estamos escribiendo los campos de forma que $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}$ y $\mathbf{u}(\mathbf{x}') \equiv \mathbf{u}'$, $\partial/\partial x' \equiv \partial'$ y, además, las fluctuaciones del campo de velocidad son en promedio cero: $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$. Entonces, podemos multiplicar la primera ecuación por u'_j y la segunda ecuación por u_i , sumarlas y tomar un ensamble estadístico, obteniendo una ecuación dinámica para el tensor de segundo orden,

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u_i u'_j \rangle + \langle \partial_k (u_k u_i u'_j) + \partial'_k (u'_k u'_j u_i) \rangle = \\ - \langle \partial_i (P u'_j) + \partial'_j (P u_i) \rangle + \nu \langle \partial_{kk}^2 (u_i u'_j) + \partial'^2_{kk} (u'_j u_i) \rangle + \langle f_i u'_j + f'_j u_i \rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Asumiendo turbulencia estadísticamente homogénea (ver Batchelor 1953), es decir, que la correlación a dos puntos depende únicamente de la distancia relativa ℓ , con $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \ell$, obtenemos la ecuación de von Kármán–Howarth, una ecuación dinámica para turbulencia homogénea:

$$\partial_t \left\langle \frac{u_i u'_i}{2} \right\rangle = \frac{1}{4} \nabla_\ell \cdot \langle (\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \rangle + 2\nu \partial_{\ell k \ell k}^2 \left\langle \frac{u_i u'_i}{2} \right\rangle + \mathcal{F}(\ell) \quad (4.7)$$

donde $\mathcal{F}(\ell) = \langle f_i u'_i + f'_i u_i \rangle / 2$. Asumiendo un estado estacionario con un balance estadístico entre el forzado y la disipación y considerando que el forzado actúa en las grandes escalas

y la disipación en las pequeñas escalas, obtenemos,

$$0 = \frac{1}{4} \nabla_\ell \cdot \langle (\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \rangle + \varepsilon. \quad (4.8)$$

De esta manera, observamos que es posible expresar la cascada de energía como la divergencia de un término de flujo \mathbf{F}_{HD} que no es otra cosa que la función de correlación de tercer orden del campo de velocidad,

$$-4\varepsilon = \nabla_\ell \cdot \langle |\delta \mathbf{u}|^2 \delta \mathbf{u} \rangle = \nabla_\ell \cdot \mathbf{F}_{\text{HD}}. \quad (4.9)$$

Es importante notar que esta expresión es válida en turbulencia anisótropa. En caso de asumir turbulencia estadísticamente isotrópica, podemos integrar esta expresión en una esfera de radio ℓ y obtener la relación exacta válida en el rango inercial,

$$-\frac{4}{3} \varepsilon \ell = \langle |\delta \mathbf{u}|^2 \delta u_\ell \rangle, \quad (4.10)$$

donde δu_ℓ es el incremento de velocidad en la dirección $\hat{\ell}$.

Finalmente, la relación exacta (4.10), a veces llamada la ley de los 4/3 [Galtier, 2018], es similar a la conocida ley de los 4/5 de Kolmogorov. En particular, esta última es un resultado teórico más beneficioso experimentalmente ya que solo requiere la información de una dirección espacial para obtener la tasa de disipación

$$-\frac{4}{5} \varepsilon \ell = \langle |\delta u_\ell|^3 \rangle. \quad (4.11)$$

Es decir, el estudio de incrementos del campo de velocidad a distintas escalas (incluso a nivel macro) nos habla de la tasa de disipación que sucede a nivel micro. Mediante esta misma metodología se puede realizar una derivación similar de la ecuación von Kármán–Howarth utilizando las ecuaciones CMHD.

4.2. Relaciones exactas en MHD compresible

4.2.1. Expresión completa

De manera análoga a la sección anterior, haciendo uso de las ecuaciones CMHD, asumiendo un plasma homogéneo, un estado estacionario y un balance entre forzado y disipación, se puede obtener una expresión completa para la relación exacta en turbulencia CMHD isotérmica [Andrés and Sahraoui, 2017] válida en el rango inercial,

$$-2\varepsilon_C = \frac{1}{2} \nabla_\ell \cdot \mathbf{F}_C + S_C + S_H + M_\beta \quad (4.12)$$

donde ε_C es la tasa total de cascada de energía compresible, \mathbf{F}_C es el término de flujo total compresible y S_C , S_H y M_β son los llamados términos de fuente, híbrido y β -dependiente, respectivamente. La derivación detallada de la expresión total de la cascada de energía compresible puede verse en [Andrés et al. \[2017\]](#) para el caso isotérmico y [Simon and Sahraoui \[2021\]](#) para el caso politrópico. Una cosa destacable de este tipo de relaciones exactas es que no se requieren, a priori, una suposición de isotropía y las mismas son independientes del tipo de mecanismo de disipación que actúa sobre el plasma (solo se asume que este actúa en las escalas más pequeñas del sistema). A pesar de incluir los últimos términos en la expresión completa (S_C , S_H y M_β), durante la presente Tesis estimaremos la cascada de energía compresible únicamente mediante los términos de flujo. Por un lado, observacionalmente existe una dificultad en la medición de los términos S debido a que este tipo de términos requieren cálculos de divergencia de los distintos campos, que solo son posibles mediante observaciones utilizando técnicas de *multi-spacecraft*, las cuales en el mejor de los escenarios conllevan grandes incertezas. Por otro lado, y lo que es relevante para nuestro caso de estudio, resultados numéricos previos indican que tanto para turbulencia HD y MHD subsónica y supersónica, los términos de fuente, híbrido y β -dependiente son despreciables con respecto a los de flujo en el rango inercial y solo serían relevantes en regiones muy particulares del plasma [[Kritsuk et al., 2013](#), [Andrés et al., 2019](#), [Ferrand et al., 2020](#)].

4.2.2. Términos de flujo

Podemos estimar la cascada de energía compresible mediante los términos de flujo, según lo mencionado anteriormente. De esta forma, la tasa total se computa como divergencias globales de términos de flujo, que dependen de variaciones de las variables del sistema. Para el caso compresible, podemos separar este flujo en dos términos de naturaleza distinta que involucran funciones de estructura (correlaciones de los campos) de tercer orden, de forma que $\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_{1C} + \mathbf{F}_{2C}$. Por un lado, tenemos un término del estilo de Yaglom [[Monin and Yaglom, 1975](#)], una generalización del término que se tiene en MHD incompresible [[Politano and Pouquet, 1998a](#)],

$$\mathbf{F}_{1C} = \langle [\delta(\rho\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u} + \delta(\rho\mathbf{u}_A) \cdot \delta\mathbf{u}_A] \delta\mathbf{u} - [\delta(\rho\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u}_A + \delta\mathbf{u} \cdot \delta(\rho\mathbf{u}_A)] \delta\mathbf{u}_A \rangle, \quad (4.13)$$

y por otro lado, un término puramente compresible

$$\mathbf{F}_{2C} = 2\langle \delta e \delta \rho \delta \mathbf{u} \rangle, \quad (4.14)$$

que es una nueva contribución a la cascada de energía debido a la presencia de fluctuaciones de densidad en el plasma. Además, en ésta formulación la única diferencia entre los

modelos con relación de clausura isotérmica (Ecuación 2.12) y politrópica viene dada por la forma de la energía interna del plasma. En nuestro caso, trabajamos con la expresión de energía interna vista en (2.13). Por ultimo, si asumimos la hipótesis de isotropía estadística, podemos integrar los términos de flujo a lo largo de una esfera de radio ℓ y obtener una relación escalar para la turbulencia isotrópica. De forma compacta tenemos que,

$$-\frac{4}{3}\varepsilon_C\ell = F_{1C} + F_{2C} \quad (4.15)$$

donde $F_{1C} + F_{2C}$ es la proyección a lo largo de la dirección del corrimiento de los campos. Escribiendo la expresión explícitamente obtenemos

$$\varepsilon_C = -\frac{3}{4\ell}\langle[\delta(\rho\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u} + \delta(\rho\mathbf{u}_A) \cdot \delta\mathbf{u}_A] \delta u_\ell - [\delta(\rho\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u}_A + \delta\mathbf{u} \cdot \delta(\rho\mathbf{u}_A)] \delta u_{A\ell} + 2\delta e \delta \rho \delta u_\ell\rangle, \quad (4.16)$$

donde nuevamente notamos que esta expresión es válida solo en el rango inercial MHD.

4.2.3. El límite incompresible

En el límite MHD incompresible, es decir $\rho \rightarrow \rho_0 = 1$, el termino \mathbf{F}_{2C} se anula mientras que \mathbf{F}_{1C} tiende a la expresión del flujo incompresible:

$$\mathbf{F}_I = \langle[(\delta\mathbf{u})^2 + (\delta\mathbf{u}_A)^2] \delta\mathbf{u} - 2(\delta\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u}_A)\delta\mathbf{u}_A\rangle \quad (4.17)$$

Además, en el límite incompresible se anulan los términos de fuente, por lo que podemos expresar la cascada de energía incompresible total como [Galtier, 2018]

$$-4\varepsilon_I = \nabla_\ell \cdot \mathbf{F}_I \quad (4.18)$$

$$\varepsilon_I = -\frac{1}{4}\nabla \cdot \langle[(\delta\mathbf{u})^2 + (\delta\mathbf{u}_A)^2] \delta\mathbf{u} - 2(\delta\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u}_A)\delta\mathbf{u}_A\rangle. \quad (4.19)$$

Aquí identificamos un primer término que se relaciona con la energía total del plasma (cinética más magnética) mientras que el segundo es un término relacionado a la helicidad cruzada. Al integrar asumiendo isotropía de igual manera que en el caso compresible, queda expresado en términos de los incrementos:

$$\varepsilon_I = -\frac{3}{4\ell}\langle[(\delta\mathbf{u})^2 + (\delta\mathbf{u}_A)^2] \delta u_\ell - 2(\delta\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u}_A)\delta u_{A\ell}\rangle. \quad (4.20)$$

En este Capítulo describiremos brevemente el código numérico ENZO [ver, [L., 2014](#)] utilizado para computar los términos de flujo de las relaciones exactas para turbulencia CMHD. Luego, se hará una breve descripción de las simulaciones con las que se trabajó y por último, la metodología del análisis numérico llevado a cabo durante la Tesis.

5.1. El código numérico ENZO

El proyecto ENZO¹ es un código numérico desarrollado de forma abierta por una comunidad de distintas instituciones, diseñado particularmente para cálculos hidrodinámicos astrofísicos. Utiliza un método parabólico a trozos (*piecewise parabolic method*) [[Woodward and Colella, 1984](#)]: una extensión de orden superior al método de Godunov. Dicho método realiza una interpolación espacial permitiendo una representación más pronunciada de las discontinuidades. De esta manera, se capturan los *shocks* de la simulación que ocurren naturalmente en un medio turbulento supersónico, por lo que es ideal para este tipo de fenómenos físicos.

5.1.1. Métodos conservativos

El método de Godunov en el que se basaron las simulaciones es un esquema numérico conservativo para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Consiste en dividir el volumen en valores discretos (volúmenes finitos) en el que en cada celda se resuelve un problema de Riemann (un problema de valores iniciales) que permite discontinuidades, satisfaciendo leyes de conservación. Esto nos permite imponer al sistema la conservación de masa, momento y energía obteniendo correctamente las posiciones y velocidades en shocks.

¹Página Web

Como usualmente las divergencias discretas de rotores discretos no es exactamente cero (como es el caso de $\nabla \cdot \mathbf{B}$), los errores en simulaciones numéricas pueden incrementar con los pasos temporales. En estas situaciones, el sistema tiene comportamientos no físicos: campos magnéticos con topologías incorrectas que, por ejemplo, conllevan a transporte de plasma ortogonal al campo.

Estas simulaciones en particular se llevaron a cabo mediante la formulación de Dedner de las ecuaciones MHD. Esta es una formulación conservativa en que se utiliza una *limpieza de divergencia hiperbólica*: en cada paso del método se resuelven las ecuaciones de evolución numéricamente y se introduce un multiplicador de Lagrange para acoplar los vínculos de divergencias nulas en el sistema, penalizando su incumplimiento.

5.2. Resumen de simulaciones

La base de datos consiste en 21 simulaciones numéricas 3D (resolución de 512^3) en las que se varió tanto el número de Mach sónico como el número de Mach Alfvénico. El número de Mach sónico se define como

$$M_S = \langle |\mathbf{u}| \rangle / c_S \quad (5.1)$$

donde $\langle |\mathbf{u}| \rangle$ son las fluctuaciones de velocidad promediadas en la simulación que calculamos mediante el valor de RMS. Similarmente, el número de Mach Alfvénico es definido como

$$M_A = \langle |\mathbf{u}| \rangle / \langle |\mathbf{u}_A| \rangle \quad (5.2)$$

promediando de la misma forma para la velocidad de Alfvén. El espacio de parámetros a estudiar se obtiene con un barrido de ambos parámetros: $M_S = (0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ y $M_A = (0.5, 1, 2)$, permitiendo estudiar regímenes tanto subsónicos como supersónicos. En estas simulaciones, la velocidad se mide en unidades de M_S por lo que en todas tenemos que $c_S = 1$ (a menos de variaciones estadísticas). Por otro lado, la densidad media en toda la caja viene dada por $\rho_0 = M/V = 1$ que también es un vínculo de la simulación. Una vez determinados ambos números de Mach como entrada en la simulación, el campo magnético guía B_0 obtiene un valor medio definido, con valor no nulo, en la dirección \hat{x} y con valores despreciables en las otras componentes:

$$\frac{M_S}{M_A} \sim \frac{\langle |\mathbf{u}|/c_S \rangle}{\langle |\mathbf{u}| \rangle / \langle |\mathbf{u}_A| \rangle} \sim \frac{\langle |\mathbf{u}_A| \rangle}{c_S} \sim \frac{\langle |\mathbf{B}_0| \rangle}{c_S \sqrt{\rho_0}} \sim \langle B_0 \rangle^{(x)} \quad (5.3)$$

Run	M_S	M_A	$\langle B_0 \rangle^{(x)}$	u_{RMS}	σ_ρ
1	0.5	0.5	1.00	0.57	0.11
2	0.5	1	0.50	0.43	0.09
3	0.5	2	0.25	0.36	0.08
4	1	0.5	2.00	1.01	0.27
5	1	1	1.00	0.85	0.30
6	1	2	0.50	0.71	0.25
7	2	0.5	4.01	2.00	0.58
8	2	1	2.00	1.60	0.62
9	2	2	1.00	1.41	0.62
10	3	0.5	6.01	2.51	0.87
11	3	1	2.99	2.26	0.93
12	3	2	1.50	1.93	0.94
13	4	0.5	8.00	4.56	1.46
14	4	1	4.00	4.47	1.49
15	4	2	2.00	3.97	1.71
16	5	0.5	9.99	5.73	1.80
17	5	1	5.00	5.17	1.83
18	5	2	2.50	4.88	1.97
19	6	0.5	12.00	6.94	2.03
20	6	1	6.00	6.81	2.27
21	6	2	3.00	5.76	2.17

Tabla 5.1: Parámetros de la simulación. Los valores de M_S y M_A son los valores objetivos determinados como entrada en la simulación. Presentamos los valores medios (promediado en toda la caja) del campo magnético, RMS del campo de velocidad y la compresibilidad del sistema.

5.2.1. Compresibilidad

Si bien el nivel de compresibilidad es proporcional al número de Mach sónico (a mayor velocidad respecto a la del sonido, hay una mayor compresión en el fluido), busquemos definir un estimador a partir de los datos que nos permita caracterizar todas las simulaciones. Existen distintos estimadores que se pueden usar, uno posible es la desviación estándar del campo de densidad (a lo largo de toda la caja) definida como:

$$\sigma_\rho = \frac{\sqrt{\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2}}{\langle \rho \rangle}. \quad (5.4)$$

Así, a mayor desviación se tiene una mayor compresión, es decir, diferencias significativas con respecto a una densidad constante $\rho = \rho_0$ en cuyo caso se tiene $\sigma_\rho = 0$. Por otro lado, se define el número de Mach turbulento como $M_S^{\text{turb}} \equiv u/c_S$ definido punto a punto.

En nuestro caso, como todas las simulaciones numéricas corresponden a $c_S = 1$, luego, el número de Mach sónico es directamente el valor RMS de la velocidad del plasma.

5.2.2. Forzado del sistema y condiciones iniciales

El forzado externo utilizado acelera estocásticamente al fluido de forma estadísticamente isótropa. La excitación se da de forma suave en las escalas grandes en el intervalo de números de onda $k = [1, 2]$. De este modo, el forzado emula la interacción turbulenta con vórtices de mayor escala. Además, esta fuerza volumétrica excita de igual manera tanto modos de compresión como solenoidales en los campos. Este procedimiento produce flujos supersónicos que, en combinación con la componente solenoidal del forzado, desarrolla turbulencia en la que la tasa de inyección de energía alcanza un balance con la disipación numérica. A este estado impuesto del sistema lo llamamos turbulencia *impulsada por compresión*.

La condición inicial consiste en un fluido isotérmico en reposo con densidad uniforme $\rho_0=1$, permitiendo el desarrollo natural de la turbulencia por medio del forzado. La correlación espacio-temporal de la fuerza estocástica garantiza que las estructuras de larga escala se desarrollen en una escala temporal en concordancia con las velocidades y tamaños característicos del sistema. Por otro lado, como el estado final del sistema es estadísticamente isótropo, es independiente de las condiciones iniciales.

En la Tabla 5.1 mostramos los parámetros de entrada de la simulación (M_S y M_A) y los valores medios obtenidos a partir de los datos numéricos que describen la dinámica del sistema. Los datos a analizar corresponden a un *frame* temporal posterior a 10 tiempos dinámicos (*turn over times*) en los que se considera que la turbulencia se encuentra completamente desarrollada y se alcanza un estado estacionario (equilibrio entre forzado externo y tasa de disipación).

5.3. Cómputo de la cascada de energía

El principal objetivo de la presente Tesis consistió en el desarrollo de un código numérico que permite computar los términos de la cascada de energía compresible. A partir de los binarios provenientes de las simulaciones en ENZO, se obtienen los campos de velocidad, campo magnético y de densidad. Este código permite generalizar el cómputo de las funciones de estructura para cualquier conjunto de direcciones de forma consistente realizando una interpolación en los puntos de grilla. Esta interpolación pretende reducir el coste computacional que el que conllevaría una interpolación 3D. Por otro lado, parte del trabajo consistió en optimizar el cómputo de las funciones de estructura para reducir la

cantidad de términos espurios (por ejemplo, reduciendo adecuadamente el tamaño de los campos para realizar operaciones únicamente con los términos relevantes). A continuación, se explica brevemente la metodología llevada a cabo para el análisis numérico.

5.3.1. Descomposición $SO(3)$

Para calcular los valores medios de las funciones de estructura, es crucial considerar diferentes direcciones de incremento y así garantizar una estadística espacial adecuada. Un desafío importante fue encontrar un método sistemático para realizar estos promedios de manera homogénea en todas las direcciones posibles. Es importante tener en cuenta que si se realizaran translaciones en direcciones donde no hay puntos de la grilla, sería necesario realizar una interpolación 3D para poder evaluar en esos puntos intermedios y realizar los promedios posteriormente. Para evitar este tipo de interpolaciones, y reducir así el alto costo computacional, se llevó a cabo una técnica de promedio [similar a lo presentado en [Taylor et al., 2003](#)] tomando una descomposición de direcciones basada en el grupo de rotaciones $SO(3)$ para turbulencia isótropa [[Biferale and Toschi, 2001](#)]. Para esta descomposición, se computan las funciones de estructura a lo largo de las direcciones generadas por los vectores (en unidades de los puntos de grilla) $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(2,1,0)$, $(2,1,1)$, $(2,2,1)$, $(3,1,0)$, $(3,1,1)$ y los generados mediante todas las permutaciones tanto de índice como de signo de las tres coordenadas espaciales y sin contar los vectores que son paralelos entre sí. Este proceso nos proporciona un total de 73 direcciones radiales únicas que pueden visualizarse en la Figura 5.1. Cabe destacar que existe una descomposición $SO(2)$ análoga para promedios anisótropos con simetría cilíndrica, como es el caso cuando tenemos una dirección privilegiada (por ejemplo, determinada por un campo magnético fuerte). Para este trabajo, se realizó una descomposición isótropa que nos permite obtener información espacial en todas las direcciones sin ninguna suposición. Sería interesante hacer una comparación entre ambas para los casos de fuertes anisotropías dadas por el campo magnético guía.

5.3.2. Interpolación

Dado este conjunto de generadores, los incrementos se obtienen multiplicando cada dirección por un múltiplo entero de manera que siempre caigamos dentro de los puntos de la grilla. Este procedimiento debe realizarse hasta alcanzar un máximo incremento posible en la mitad de la caja debido a la periodicidad (sino, se estarían contando incrementos de más). Así, para cada dirección, obtenemos una tira de incrementos y sus correspondientes cascadas de energía dadas por la Ecuación (4.16) (términos de la cascadas compresibles) y la Ecuación (4.20) (cascada incompresible).

Para este procedimiento, es necesario tener en cuenta que, como estos incrementos en

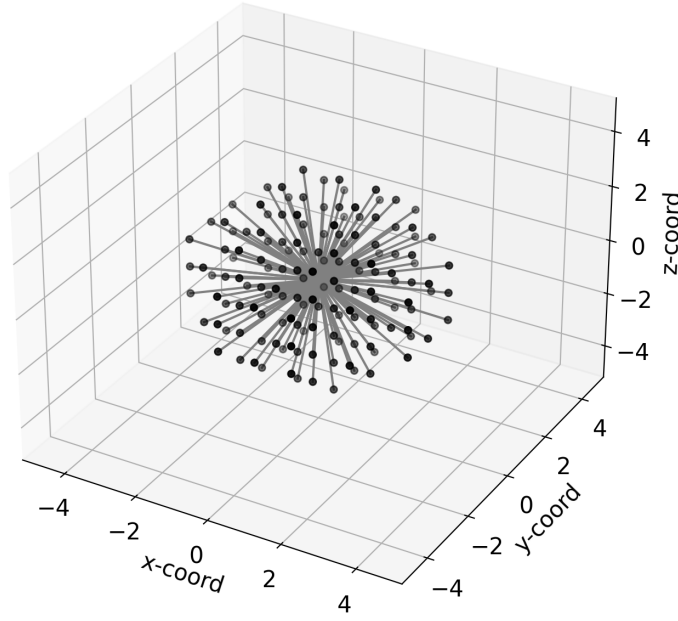


Figura 5.1: Esquema de las 73 direcciones de la descomposición $SO(3)$.

la escala dependen del módulo de cada generador de la descomposición, tendremos valores de la cascada de energía evaluados en distintos puntos. Tomemos un ejemplo:

Para la dirección: $\mathbf{j}_1 = (1, 0, 0) \longrightarrow \ell_{1r} = r \times (1, 0, 0)$ con $r = 1, 2, \dots, 256$

como el módulo es $|\mathbf{j}_1| = 1$, para cada paso de incremento nos estamos moviendo de un punto a otro de la grilla en pasos de tamaño $d\ell = 2\pi/512$ y deberemos dar 256 pasos para llegar a la mitad de la caja de forma que: $256 \times 1 \times 2\pi/512 = \pi$. Ahora, veamos otro ejemplo donde esto es distinto:

Para la dirección: $\mathbf{j}_2 = (1, 1, 0) \longrightarrow \ell_{2r} = r \times (1, 1, 0)$ con $i = 1, 2, \dots, r_{max}$

En este caso, deberemos ver cuál es el r_{max} tal que no sobrepasemos la mitad de la caja. Es decir, como ahora $|\mathbf{j}_2| = \sqrt{2}$, tendremos que ver el entero r máximo tal que $r_{max} \times \sqrt{2} \lesssim 256$. En este caso nos da $r_{max} = 181$, de forma que $181 \times \sqrt{2} \times 2\pi/512 \lesssim \pi$. Como no siempre es posible la igualdad hasta la mitad exacta, consideramos un entorno $(\pi - d\ell, \pi)$ anterior en el cuál considerar el incremento máximo.

En resumen, tendremos para cada generador del conjunto $\{\mathbf{j}_i\}_{i=1,2,\dots,73}$ una tira de valores de tamaño r_{max} con un espaciado entre puntos dado por el módulo del generador $|\mathbf{j}_i|$. Es debido a esto, que se llevó a cabo una interpolación del tipo *spline* cúbico (interpolador de Hermite) para poder evaluar el valor de todas las cascadas de energía en puntos distanciados

en el incremento mínimo $d\ell = 2\pi/512$ de la caja. Esto quiere decir que únicamente debemos interpolar una cantidad máxima de puntos de 73×256 (cantidad de curvas por la cantidad de puntos hasta la mitad de la caja) en lugar de una interpolación 3D, en principio de 256^3 puntos.

En este Capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos al computar y analizar la cascada de energía incompresible y compresible según la metodología explicada en el Capítulo anterior. En primer lugar, se muestra la relación del M_S con el nivel de fluctuaciones de densidad del sistema. Luego, se analiza la consecuencia de fuertes campos magnéticos en la anisotropía del sistema y se mostrarán algunos ejemplos de las DNSs. Se dará un ejemplo particular del cómputo de la cascada de energía y las que se derivan de los términos de flujo de cada una de las 21 simulaciones analizadas. Por último, se estudiarán los distintos términos en las escalas MHD y su relevancia relativa entre sí. Finalmente, se investigan las dependencias de los términos según el nivel de compresibilidad y campo magnético medio.

6.1. Fluctuaciones de densidad

En una primera parte, calculamos las distribuciones de valores de M_S^{turb} (haciendo uso de la distribución RMS del campo de velocidad) y de la densidad ρ en función del M_S (parámetro de entrada) de cada simulación. La Figura 6.1 muestra como las distribuciones de valores de M_S^{turb} y ρ se des-localizan, en otras palabras, se distribuyen en un rango más amplio de valores al aumentar el M_S . Los valores que se muestran son tales que el campo magnético medio es $\langle B \rangle^{(x)} \equiv B_0 = 1$ de forma que la única variación física entre las simulaciones viene dada por la compresibilidad del sistema. Por definición, las distribuciones de M_S^{turb} se centran en el valor medio indicado, es decir, que $\langle M_S^{\text{turb}} \rangle = M_S$. En particular, observamos que al aumentar el numero de Mach aumenta la compresibilidad del plasma, poblando mayores valores de densidad.

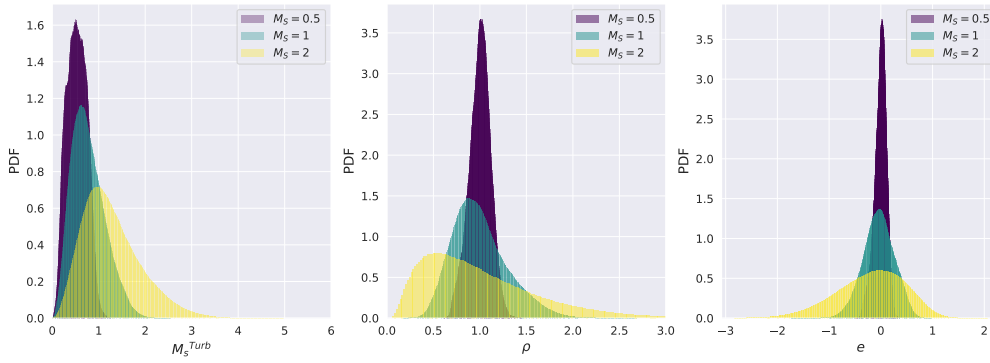


Figura 6.1: Función de distribución (o PDF, por sus siglas en inglés) para el número de Mach turbulento y para la densidad del plasma, variando el valor de M_S a campo magnético medio constante $B_0 = 1$.

6.2. Anisotropías por el campo magnético

La presencia de un campo magnético medio fuerte introduce una anisotropía en el sistema, la cual se ve reflejada en las fluctuaciones de los campos. Para ilustrar esta anisotropía, en las Figuras 6.2 y 6.3 mostramos dos simulaciones particulares: una con campo medio $B_0 = 0.5$ (campo débil) y otra con valor medio $B_0 = 12$ (campo fuerte). Para ambos casos, se muestra el módulo del campo de velocidad en dos planos distintos, uno paralelo y otro perpendicular al campo guía. Como es de esperar, en los casos de un campo guía fuerte, vemos estructuras alargadas a lo largo del eje x , con una bi-dimensionalización de la turbulencia en la dirección perpendicular al campo medio. Por otro lado, en el caso de campo débil, se observa un flujo turbulento isótropo, o sin dirección privilegiada.

Al trabajar con un amplio rango de valores de campos magnéticos que recorren el espectro de $B_0 \in [0.25, 12]$ (puede verse en la Tabla 5.1), decidimos no asumir ninguna hipótesis frente a la simetría de los campos. Debido a esto, llevamos a cabo la descomposición isótropa que nos asegura un adecuado promedio espacial en todas las direcciones. Es importante remarcar que esta descomposición no será la más adecuada en aquellos casos donde exista un campo magnético fuerte. Por ello, la interpretación de los resultados en estos casos debería ser puesta a prueba haciendo uso de otro tipo de descomposición.

6.3. Cascadas de energía turbulenta

Según la metodología explicada en el Capítulo 5, la Figura 6.4 muestra un ejemplo de cálculo de $|\varepsilon_C|$ para una simulación particular. En la Figura, se muestran las curvas que corresponden a la interpolación de los valores calculados para obtener puntos sobre los mismos incrementos. Cada una de estas curvas proviene de las direcciones de la descomposición

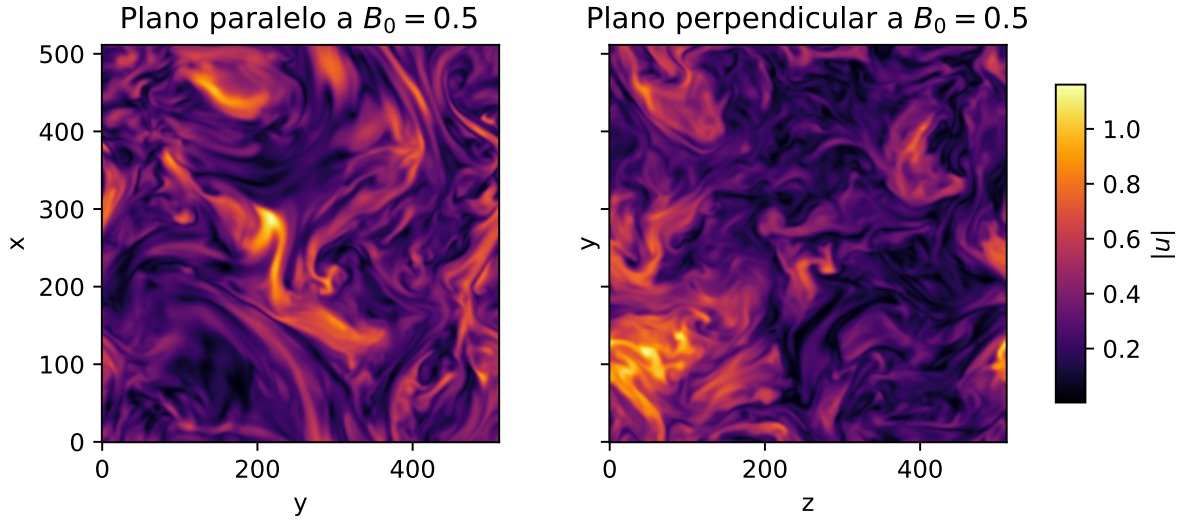


Figura 6.2: Módulo de la velocidad para el caso de $M_S = 0.5$ y $M_A = 2$, en los planos paralelo y perpendicular al campo magnético medio con $B_0 = 0.5$. Para este caso de campo medio débil no existe una anisotropía pronunciada entre la dirección paralela y perpendicular.

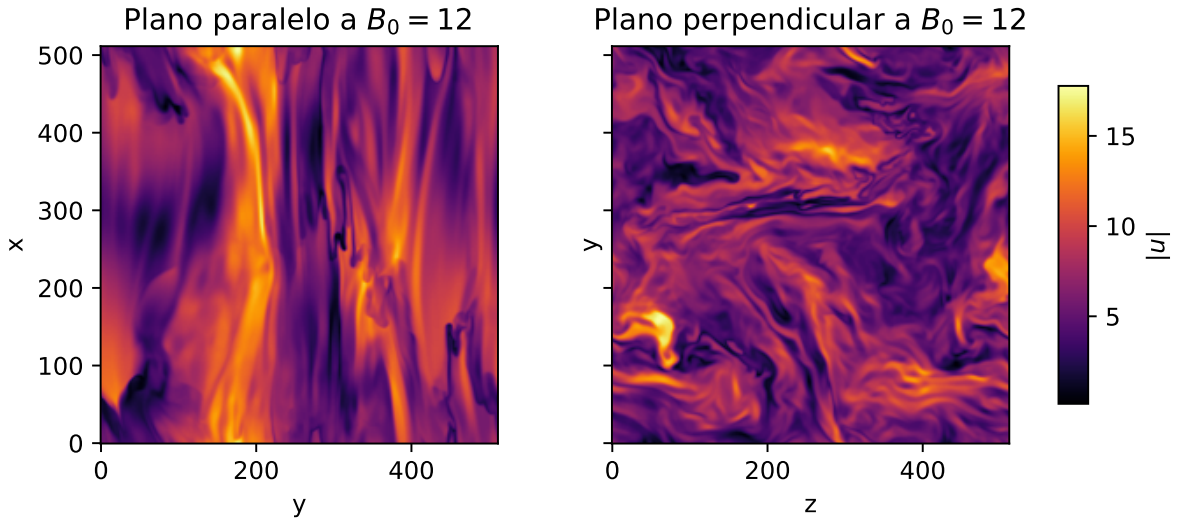


Figura 6.3: Módulo de la velocidad del plasma para el caso de $M_S = 6$ y $M_A = 0.5$, en los planos paralelo y perpendicular al campo magnético medio con $B_0 = 12$. En este caso, e.g., campo magnético fuerte, se observa claramente la anisotropía que se genera al estirarse en la dirección del mismo.

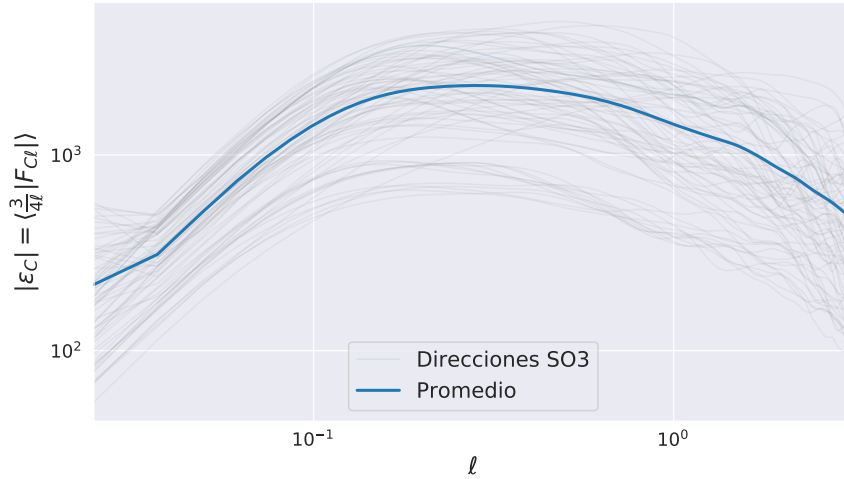


Figura 6.4: Ejemplo del cómputo de la cascada de energía a lo largo de las 73 direcciones $SO(3)$. Cada curva gris es una interpolación (para una dirección particular) que permite el promedio entre ellas sobre las mismas escalas.

$SO(3)$ y se muestra el promedio en cada punto evaluado.

En la presente Tesis, decidimos estudiar el valor absoluto de las cascadas de energía por su potencial comparación con las observaciones y su mayor convergencia estadística. Debido a las fluctuaciones, al estudiar cascadas con su correspondiente signo, es necesario tener mayor estadística para tener resultados confiables. Como esperamos una cascada directa (transferencia de escalas grandes a chicas) nos concentramos en el valor absoluto. Sin embargo, el signo de la cascada de energía es un tema de discusión abierto actualmente en el contexto de turbulencia del viento solar.

Como vimos en el Capítulo 3, en el rango inercial, se espera una cascada de energía constante. Siguiendo la relación obtenida en la Ecuación (4.16), al normalizar cada uno de los flujos (F_{1C} , F_{2C} y F_I) por la escala, se espera un comportamiento constante en el rango inercial MHD. La Figura 6.5 presenta los distintos términos de la cascada de energía compresible para todos los valores de M_S y M_A . A partir de estas curvas, obtuvimos el valor medio del valor absoluto de la cascada $\langle |\varepsilon| \rangle$ al promediar entre las escalas $\ell = 0.1$ y $\ell = 1$ donde se encuentra el rango inercial y se observa una tendencia constante. En todos los casos el término compresible $|\varepsilon_{1C}|$ supera en un orden de magnitud al término puramente compresible $|\varepsilon_{2C}|$. Por otro lado, observamos que la cascada incompresible $|\varepsilon_I|$ se diferencia de la cascada total compresible $|\varepsilon_C| = |\varepsilon_{1C}| + |\varepsilon_{2C}|$ al aumentar el valor de M_S .

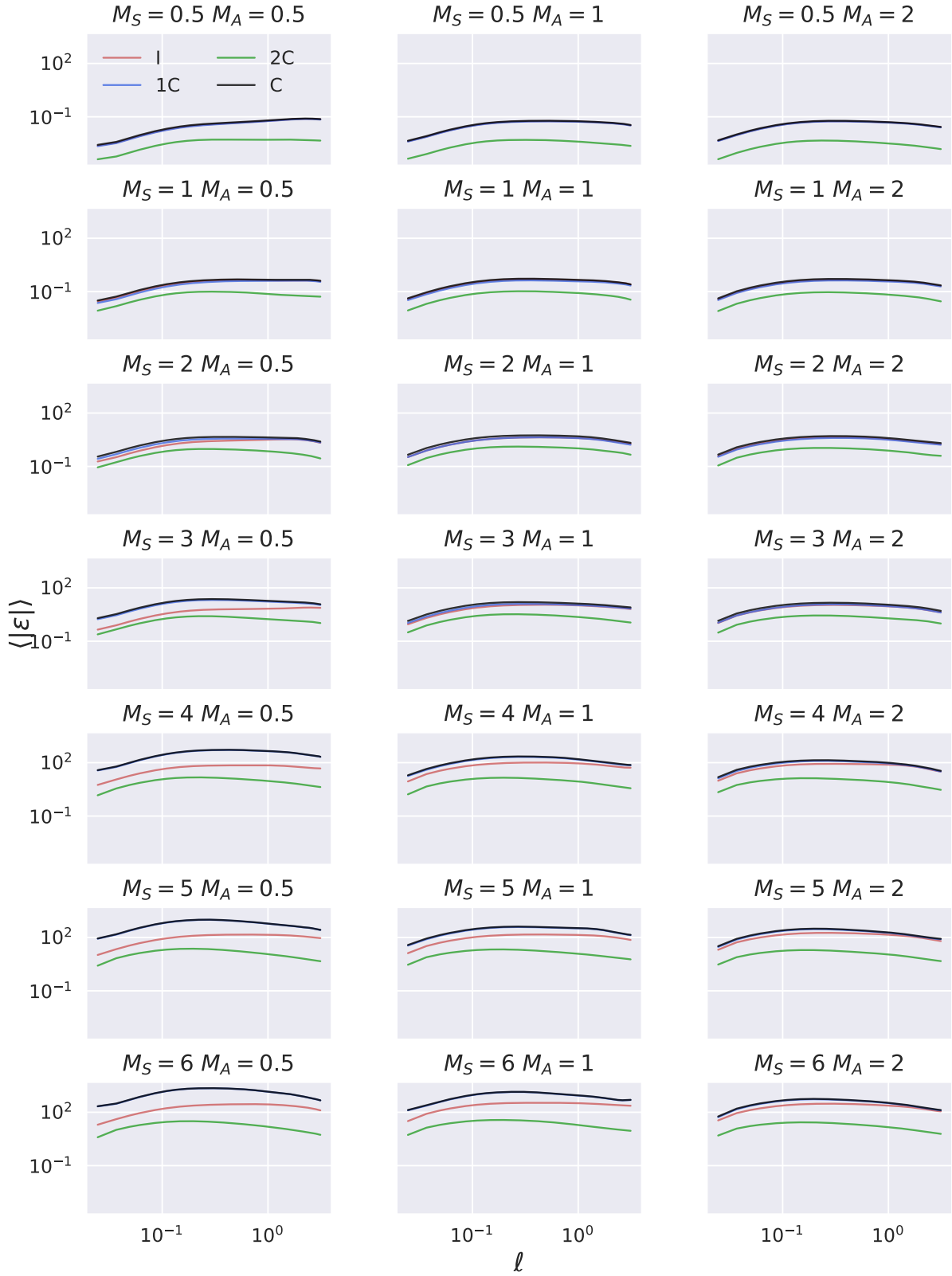


Figura 6.5: Cascadas de energía provenientes de los términos de flujo incompresible (ε_I) y compresibles (ε_{1C} , ε_{2C} y la total, ε_C) en función de la escala para todos los valores barridos de M_S y M_A de las simulaciones.

6.4. Dependencias de la cascada de energía

6.4.1. Compresibilidad

La Figura 6.6 muestra las dos componentes de la cascadas de energía compresible y la cascada de energía incompresible en función de la escala. El color corresponde a la compresibilidad del sistema. Notamos que al aumentar la compresibilidad, todas las cascadas de energía tienden a aumentar. Esto es esperable debido a que la compresibilidad viene dada por el aumento de M_S que define el valor RMS de la velocidad en la simulación. Por lo visto en la ecuación (4.13), como los flujos F_{1C} y F_I presentan términos proporcionales a los incrementos δu_ℓ , cada una de las cascadas de energía aumenta (aún en el cálculo incompresible).

La Figura 6.7 muestra los términos compresibles normalizados por el término incompresible. Observamos dos comportamientos, por un lado, $|\varepsilon_{1C}| > |\varepsilon_I|$ en todo el rango de escalas estudiadas. Por otro lado, $|\varepsilon_I| > |\varepsilon_{2C}|$.

Como mencionamos previamente, para cada una de las simulaciones hicimos un promedio a lo largo de las escalas espaciales donde se encuentra el rango inercial MHD. La Figura 6.8 (a) muestra la cascada de energía compresible total en función de la cascada incompresible. La Figura 6.8 (b) muestra los valores promediados, en el rango inercial, de la componente compresible $\langle |\varepsilon_{2C}| \rangle$ en función de la componente compresible $\langle |\varepsilon_{1C}| \rangle$. Observamos que ambas cascadas aumentan al aumentar la compresibilidad en el sistema. También observamos que la cascada compresible aumenta mucho más al aumentar la compresibilidad. Es interesante notar que para $\sigma_\rho \rightarrow 0$, es decir, en el límite incompresible, ambas cascadas convergen al mismo valor ya que $\delta\rho \rightarrow 0$ y, tal como vimos en la ecuación (4.17), se tiene que $F_C \rightarrow F_I$. Sumado a esto, podemos notar un comportamiento en el que el término $\langle |\varepsilon_{2C}| \rangle$ se asemeja en valor al $\langle |\varepsilon_{1C}| \rangle$ para valores de compresibilidad intermedios y se diferencia en los extremos.

6.4.2. Campo magnético medio

Para estudiar la dependencia de la cascada con el campo magnético medio, la Figura 6.9 muestra un análogo a la Figura 6.8 (a) donde reemplazamos la barra de color con el valor del campo magnético medio. En este caso, observamos que el campo magnético provoca un aumento significativo de la cascada de energía compresible respecto a la incompresible. En particular, si tomamos los valores de mayor compresibilidad en $\langle |\varepsilon_C| \rangle$ podemos ver un escalonamiento según el rango de campos magnéticos (débil-medio-fuerte) que proviene de los tres valores de $M_A = \{0.5, 1, 2\}$ que se tienen para cada valor de M_S (ver Tabla 5.1).

La Figura 6.10 muestra las componentes de la cascada compresible y la cascada incompresible en función del campo magnético medio. La barra de color corresponde a la

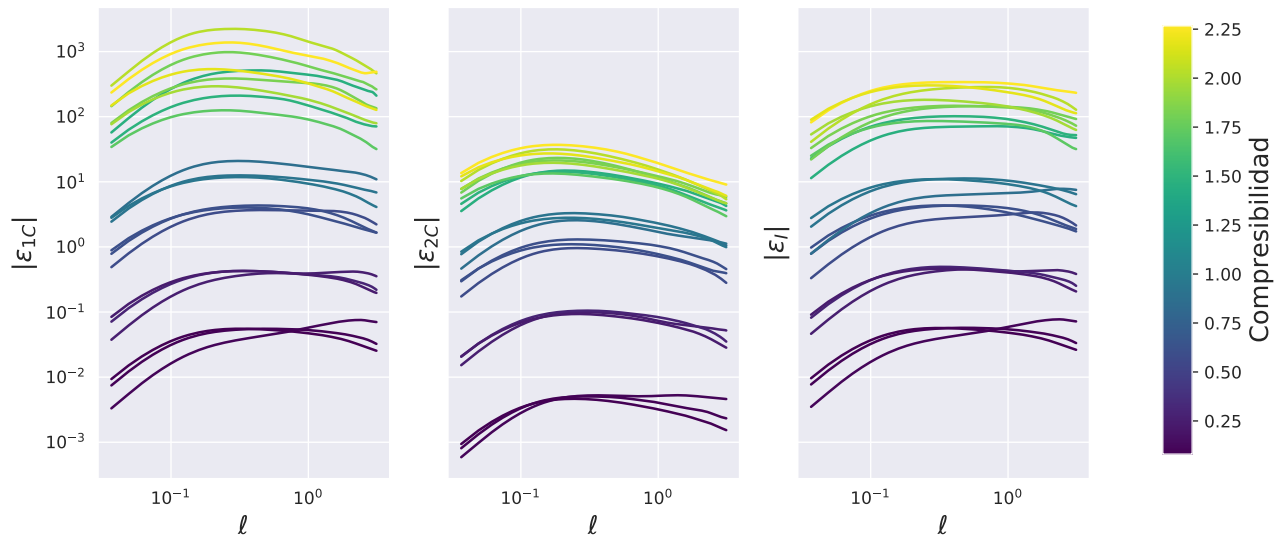


Figura 6.6: Componentes de las cascadas de energía compresible y la cascada incompresible en función de la escala. La barra de color viene dada por la compresibilidad.

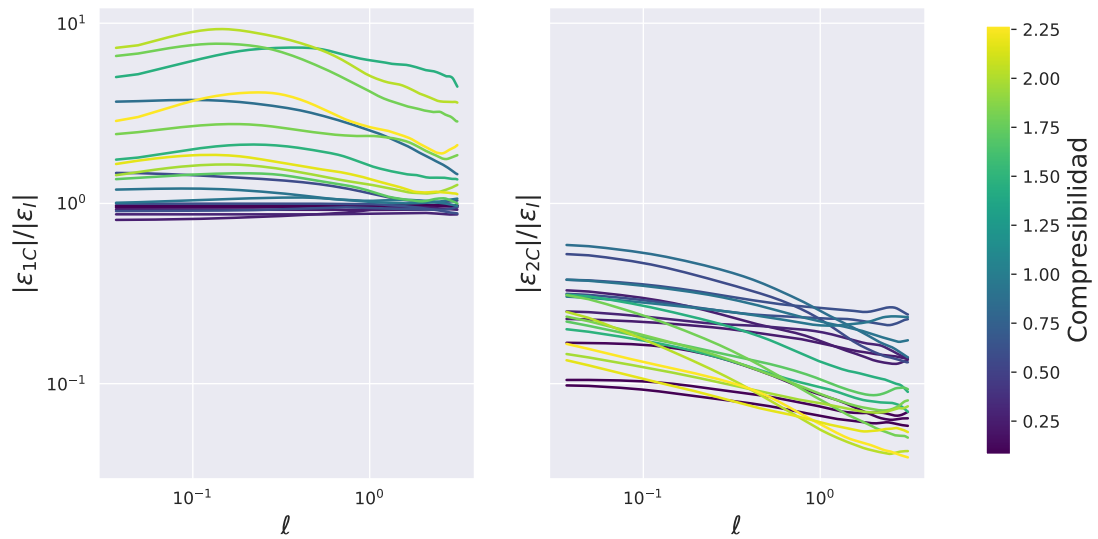


Figura 6.7: Componentes de la cascadas de energía compresible normalizada a la cascada incompresible en función de la escala. La barra de color viene dada por la compresibilidad.

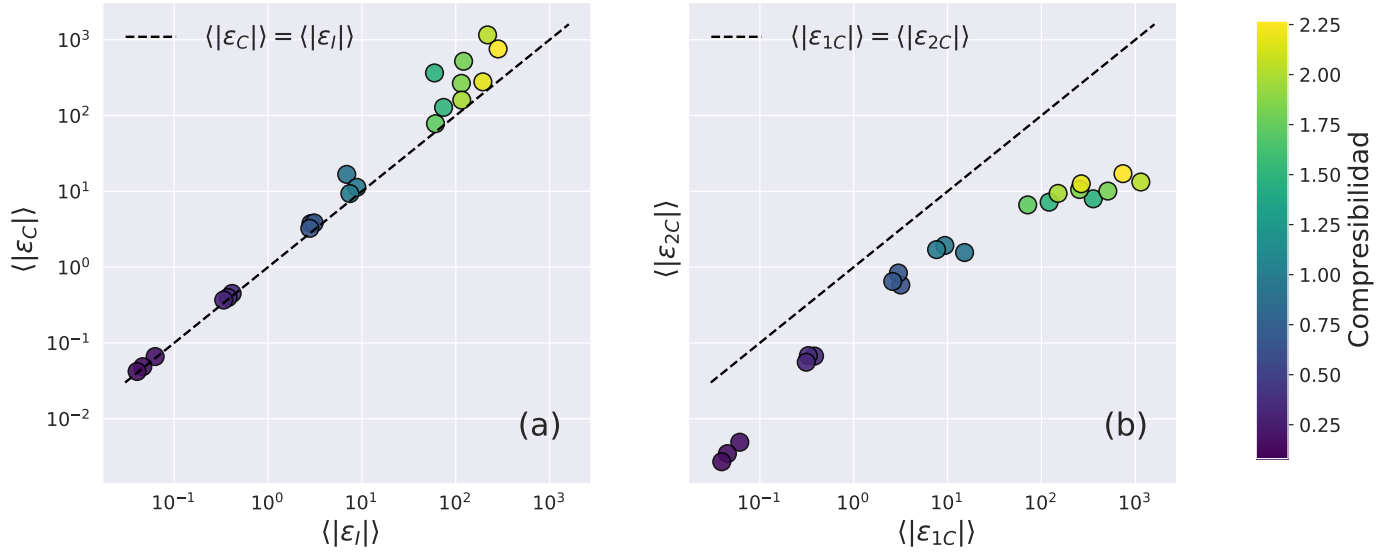


Figura 6.8: (a) La cascada de energía total compresible contra la incompresible. (b) El segundo término de la cascada de energía compresible en función del primero. En línea punteada se muestra la recta de pendiente 1 de referencia. En ambos casos la barra da color viene dada por el valor de compresibilidad.

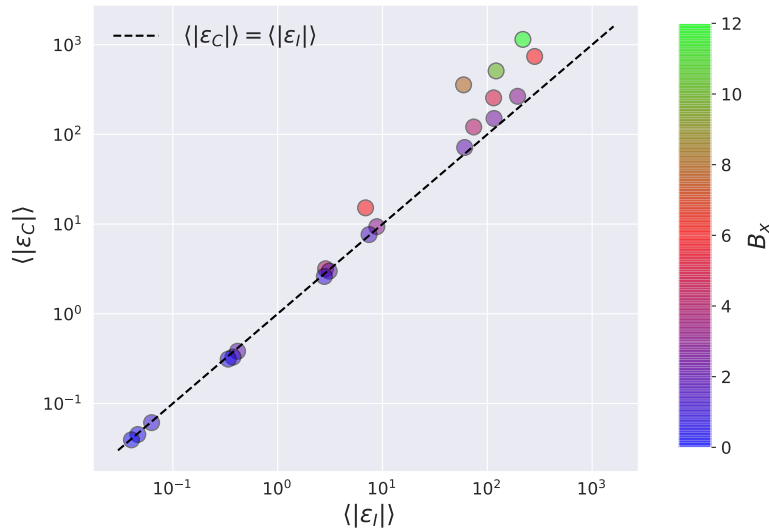


Figura 6.9: Cascada de energía total compresible en función de cascada incompresible. En línea punteada la recta de pendiente 1 de referencia. La barra de color corresponde al campo magnético medio.

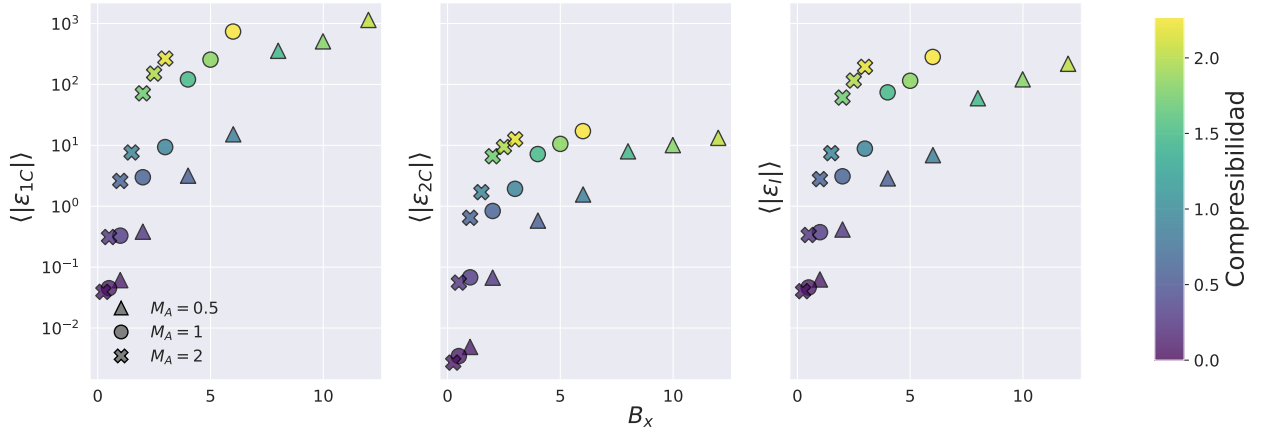


Figura 6.10: Cascadas de energía compresible e incompresible en función del campo magnético medio del sistema. La barra de color viene dada por el valor de compresibilidad para cada simulación. El marcador viene dado por el valor de M_A .

compresibilidad. Para cada nivel de compresibilidad, podemos distinguir tres curvas correspondientes a los valores de M_A que recorren distintos rangos del campo magnético. Si bien las cascadas aumentan con el magnético medio, para cada M_A se alcanzan valores dentro del mismo orden de magnitud: $\langle |\varepsilon_{1C}| \rangle \sim 10^3$, $\langle |\varepsilon_{2C}| \rangle \sim 10^1$ y $\langle |\varepsilon_{1C}| \rangle \sim 10^2$ y puede hacerse el mismo razonamiento para los tres valores de M_A en todos los niveles de compresibilidad (dados por M_S). En otras palabras, el valor asintótico de la cascada de cada rama depende fundamentalmente de la compresibilidad del sistema, y tiene variaciones dentro de ese orden de magnitud que se explican por el aumento del campo magnético medio.

Las Figuras 6.11 y 6.12 muestran el comportamiento entre el valor relativo de los términos de la cascada compresible con respecto a la incompresible en función de la compresibilidad y del campo magnético medio respectivamente. En cada caso, la barra de color corresponde al valor de campo magnético medio y compresibilidad. Al ver la relación $\langle |\varepsilon_{1C}| \rangle / \langle |\varepsilon_I| \rangle$ el campo magnético aumenta considerablemente la cascada de energía en adición al incremento visto previamente debido a la compresibilidad. Por otro lado, observamos que $\langle |\varepsilon_{2C}| \rangle / \langle |\varepsilon_I| \rangle$ tiende a anularse tanto para baja como alta compresibilidad, sin importar el valor del campo magnético. La independencia de $\langle |\varepsilon_{2C}| \rangle$ con el campo es esperable debido a que no se presenta explícitamente en la expresión vista en (4.14) a diferencia de $\langle |\varepsilon_I| \rangle$ que tiene un término proporcional (proveniente de la energía magnética). Este resultado es interesante porque no es esperable a priori que la relación entre ambas cascadas disminuya para valores altos de compresibilidad. En consecuencia, observamos un comportamiento cóncavo donde en niveles de compresibilidad intermedias, en el rango de valores $\sigma_\rho \in [0.5, 1]$, esta relación es máxima.

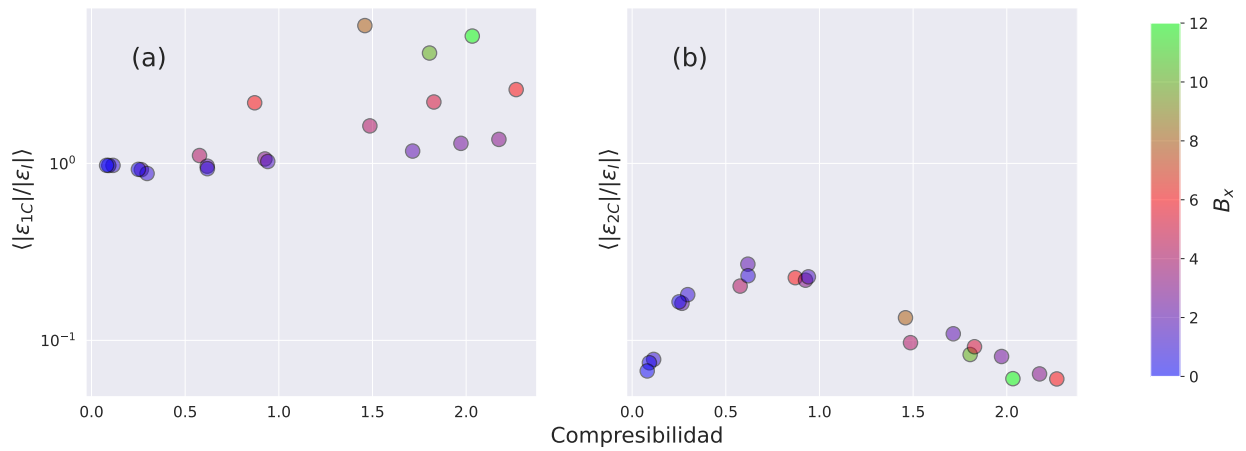


Figura 6.11: Cascadas de energía compresible normalizadas por la cascada incompresible en función de la compresibilidad del sistema. La barra de color viene dada por el valor del campo magnético para cada simulación.

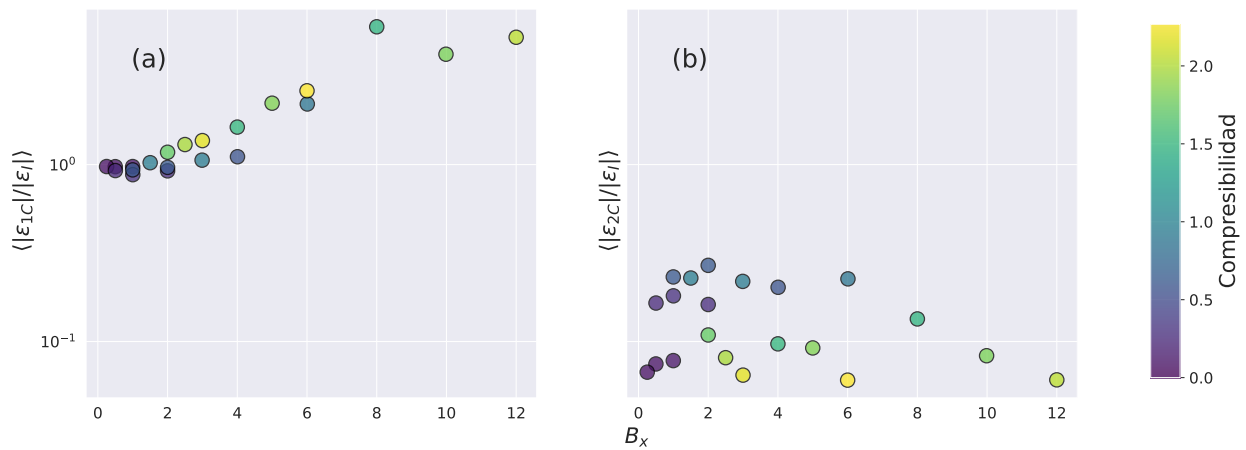


Figura 6.12: Cascadas de energía compresible normalizadas por la cascada incompresible en función de la compresibilidad del sistema. La barra de color viene dada por el valor de compresibilidad para cada simulación.

En el marco de la presente Tesis de Licenciatura, se estudió la cascada de energía en turbulencia compresible e isotérmica. A través del uso de una serie de simulaciones numéricas directas dentro del modelo MHD compresible y con una resolución espacial de 512^3 puntos de grilla, se realizó un estudio de parámetros variando el número de Mach sónico M_S y el número de Mach Alfvénico M_A . Las simulaciones analizadas cubrieron distintas regiones de compresibilidad dentro de rangos subsónicos y supersónicos, incluyendo valores del campo magnético guía débiles, moderados y fuertes.

En cada una de las simulaciones, se utilizó un forzado estocástico que excita tanto modos incompresibles como compresibles y se alcanzó un estado estacionario de turbulencia completamente desarrollada. Nuestros resultados numéricos mostraron que al aumentar M_S , para campo magnético medio constante, aumentan las fluctuaciones de densidad. A partir de esta observación, definimos un estimador para la compresibilidad del sistema. De esta forma, a partir de las variables de entrada de la simulación, pudimos obtener valores medios físicamente relevantes para nuestro caso de estudio: la compresibilidad y el campo magnético medio.

Con el fin de entender la importancia de las fluctuaciones de densidad en la cascada de energía turbulenta, el objetivo principal del trabajo consistió en el desarrollo de un código para computar las cascadas de energía turbulenta y su posterior análisis. En particular, nos concentramos en los términos de flujo de las leyes exactas que nos permiten estimar la cascada de energía total y que permiten ser comparados con datos experimentales. Para tener una estadística representativa de todas las direcciones espaciales, utilizamos una descomposición isótropa y observamos como la cascada de energía media incrementa al aumentar la compresibilidad. Además, la cascada de energía compresible aumenta respecto a la incompresible según el valor del campo magnético guía. Por otro lado, comparamos tanto la expresión para la relación compresible e incompresible y estudiamos la importancia

relativa entre cada uno de los términos compresibles. Observamos que los valores de las cascadas de energía dependen fundamentalmente de la compresibilidad, con incrementos en ese orden de magnitud que proviene del campo magnético medio. A su vez, vimos que la relación entre el término puramente compresible y la cascada incompresible tiene un valor máximo para compresibilidades intermedias.

Notamos que para una siguiente etapa del trabajo, se deberá incluir los términos restantes de la expresión total de las relaciones exactas y su comparación con el caso politrópico. A la vez, apuntamos a realizar un estudio comparativo entre estos trabajos numéricos y los resultados observacionales obtenidos con datos *in situ* provistos por misiones espaciales, como la multi-sonda Magnetospheric MultiScale (MMS), la sonda Parker Solar Probe (PSP) y la sonda Solar Orbiter (SolO). Estos trabajos serán parte de la Tesis de Doctorado a llevarse a cabo entre 2024 y 2028.

- [1] N. Andrés and F. Sahraoui. Alternative derivation of exact law for compressible and isothermal magnetohydrodynamics turbulence. *Physical Review E*, 96(5):053205, 2017.
- [2] N. Andrés, P. Clark di Leoni, P. D. Mininni, P. Dmitruk, F. Sahraoui, and W. H. Matthaeus. *Physics of Plasmas*, 24(10):102314, 2017.
- [3] N. Andrés, S. Galtier, and F. Sahraoui. Exact law for homogeneous compressible hall magnetohydrodynamics turbulence. *Physical Review E*, 97(1):013204, 2018.
- [4] N. Andrés, F. Sahraoui, S. Galtier, L. Z. Hadid, R. Ferrand, and S. Y. Huang. *Phys. Rev. Lett.*, 123:245101, Dec 2019.
- [5] N. Andrés, F. Sahraoui, S. Galtier, L. Z. Hadid, R. Ferrand, and S. Y. Huang. Energy cascade rate measured in a collisionless space plasma with mms data and compressible hall magnetohydrodynamic turbulence theory. *Physical review letters*, 123(24):245101, 2019.
- [6] S. Banerjee and S. Galtier. Exact relation with two-point correlation functions and phenomenological approach for compressible magnetohydrodynamic turbulence. *Physical Review E*, 87(1):013019, 2013.
- [7] G. K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge Univ. Press, 1953.
- [8] L. Biferale and F. Toschi. Anisotropic homogeneous turbulence: Hierarchy and intermittency of scaling exponents in the anisotropic sectors. *Physical review letters*, 86(21):4831, 2001.
- [9] M. Brodiano, N. Andrés, and P. Dmitruk. Spatiotemporal analysis of waves in compressively driven magnetohydrodynamics turbulence. *The Astrophysical Journal*, 922(2):240, 2021.

- [10] R. Bruno and V. Carbone. The solar wind as a turbulence laboratory. *Living Reviews in Solar Physics*, 10:1–208, 2013.
- [11] S. Dasso, L. Milano, W. Matthaeus, and C. Smith. Anisotropy in fast and slow solar wind fluctuations. *The Astrophysical Journal*, 635(2):L181, 2005.
- [12] P. Dmitruk, W. H. Matthaeus, and S. Oughton. Direct comparisons of compressible magnetohydrodynamics and reduced magnetohydrodynamics turbulence. *Physics of Plasmas*, 12(11):112304, 2005.
- [13] R. Ferrand, S. Galtier, F. Sahraoui, and C. Federrath. Compressible turbulence in the interstellar medium: New insights from a high-resolution supersonic turbulence simulation. *The Astrophysical Journal*, 904(2):160, 2020.
- [14] R. Fitzpatrick. *Plasma Physics: An Introduction*. CRC Press, 2014.
- [15] F. Fraternale, N. V. Pogorelov, J. D. Richardson, and D. Tordella. Magnetic turbulence spectra and intermittency in the heliosheath and in the local interstellar medium. *The Astrophysical Journal*, 872, 40, 2019.
- [16] S. Galtier. Turbulence in space plasmas and beyond. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 51(29):293001, 2018.
- [17] K. H. Kiyani, K. T. Osman, and S. C. Chapman. Dissipation and heating in solar wind turbulence: from the macro to the micro and back again, 2015.
- [18] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 30, pages 299–303, 1941.
- [19] A. N. Kolmogorov. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 32, pages 16–18, 1941.
- [20] A. G. Kritsuk, R. Wagner, and M. L. Norman. Energy cascade and scaling in supersonic isothermal turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 729:R1, 2013.
- [21] B. G. L. *The Astrophysical Journal*, 211, 19, 2014.
- [22] B. MacBride, M. Forman, and C. Smith. Turbulence and third moment of fluctuations: Kolmogorov’s 4/5 law and its mhd analogues in the solar wind. In *Solar wind 11/SOHO 16, Connecting sun and heliosphere*, volume 592, page 613, 2005.
- [23] W. Matthaeus. Turbulence in space plasmas: Who needs it? *Physics of Plasmas*, 28(3), 2021.

- [24] P. D. Mininni, D. O. Gómez, and S. M. Mahajan. Role of the hall current in magnetohydrodynamic dynamos. *The Astrophysical Journal*, 584(2):1120, 2003.
- [25] P. D. Mininni, A. Alexakis, and A. Pouquet. Nonlocal interactions in hydrodynamic turbulence at high reynolds numbers: The slow emergence of scaling laws. *Phys. Rev. E*, 77:036306, Mar 2008.
- [26] A. S. Monin and A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, volume 2. Cambridge, MA: MIT Press., 1975.
- [27] E. N. Parker. *Astrophys. J.*, 128:664, 1958.
- [28] E. N. Parker. *Cosmical magnetic fields: Their origin and their activity*. Oxford university press, 2019.
- [29] H. Politano and A. Pouquet. von kármán–howarth equation for magnetohydrodynamics and its consequences on third-order longitudinal structure and correlation functions. *Physical Review E*, 57(1):R21, 1998a.
- [30] H. Politano and A. Pouquet. Dynamical length scales for turbulent magnetized flows. *Geophysical Research Letters*, 25(3):273–276, 1998b.
- [31] L. F. Richardson. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 1922.
- [32] P. Simon and F. Sahraoui. *The Astrophysical Journal*, 916(1):49, 2021.
- [33] L. Sorriso-Valvo, V. Carbone, A. Noullez, H. Politano, A. Pouquet, and P. Veltri. Analysis of cancellation in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Physics of Plasmas*, 9(1):89–95, 2002.
- [34] M. A. Taylor, S. Kurien, and G. L. Eyink. Recovering isotropic statistics in turbulence simulations: The kolmogorov 4/5th law. *Physical Review E*, 68(2):026310, 2003.
- [35] C.-Y. Tu and E. Marsch. Mhd structures, waves and turbulence in the solar wind: Observations and theories. *Space Science Reviews*, 73, 1–210, 1995.
- [36] T. von Kármán and L. Howarth. On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 164(917):192–215, 1938. ISSN 0080-4630. doi: 10.1098/rspa.1938.0013.
- [37] P. Woodward and P. Colella. *Journal of Computational Physics*, 54, 115, 1984.

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2024