
Entropías de Rényi y *Replica* *Wormholes*

Daniel Antonio Fondevila

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Director: Dr. Raúl Arias

Co-director: Dr. David Blanco



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Verano del 2024

Resumen

De entre los problemas actuales más importantes presentes en la física teórica de altas energías, el entendimiento de la gravedad como un fenómeno de naturaleza cuántica es catalogado como uno de los más resilientes frente a nuestros esfuerzos de desvelar sus misterios. En este trabajo, indagamos en la entropía de entrelazamiento en presencia de gravedad, siendo este uno de los nexos más prometedores que permite investigar la interacción entre ambas teorías.

Se exploró el rol de la integral de caminos gravitatoria como propuesta para cuantizar la gravedad y su capacidad de derivar la fórmula de islas para la entropía generalizada. Con este objetivo, introducimos el truco de réplicas en espacios con gravedad y su simplificación al considerar superficies dos dimensionales. Particularmente, se presentó la teoría de gravedad JT acoplada a espacios de Minkowski y se desarrollaron las entropías de entrelazamiento de una CFT para 1 y 2 intervalos. Por último, se discutieron los resultados de 2 intervalos en el contexto de la Paradoja de la Pérdida de la Información y pudo verificarse la coincidencia con la curva de Page de sistemas cuánticos razonables, utilizando como materia un campo de fermiones libres y un campo de escalares quirales.

Agradecimientos

Este fue un trabajo de investigación en el cual muchas personas, directa o indirectamente, contribuyeron a su desarrollo a lo largo de este último año.

En primer lugar, quiero agradecerle a Raúl Arias la guía y orientación que me brindó en este campo de vertiginosos cambios y vueltas, como también el constante intercambio de ideas y dudas en cuanto a seguir una carrera como científico. A David Blanco me gustaría agradecerle su gran predisposición y capacidad de motivar a las personas a través de sus clases magistrales.

Me gustaría agradecerle a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires por tantos momentos de felicidad entre pasillos y aulas, propiciando a lo largo de los años una educación de excelencia en un contexto social y económico tan complicado. A las y los docentes por moldear de a poco mi forma de pensar críticamente y transmitirme la pasión por la investigación en ciencia.

Resulta indispensable para mi agradecerle a la GGgang por su comprensión y continua motivación al momento de dar cada paso en esta carrera, cuyos miembros (en orden alfabético!) Andres, Emi, Lu, Luquita, Maia, Manu, Marian, Nico, Pedro y Sulei, cambiaron mi perspectiva en ámbitos académicos y de la vida en general. Quiero agradecerle a aquellas personas que estuvieron en gran parte de mi vida y por distintas circunstancias nuestras historias se separaron.

Por ultimo y fundamentalmente, quiero agradecerle a mis viejos Alicia y Tony por bancarme todos estos años y apoyar incondicionalmente mi decisión de perseguir una carrera que amase por encima de todo. A mi hermana Natalia por los pancitos caseros y al resto de mi familia que, a riesgo de fatales consecuencias, mencionaré en conjunto por entender mi particular forma de ser y siempre estar ahí cuando la necesito.

Ninguna de estas personas es responsable de los errores presentes en esta tesis.

“...and special thanks to my Insomnia, I couldn’t have done it without you. Since at night my eyes are heavy, but you make quantum gravity even heavier”

Anonymous

TEMA: **Gravedad Cuántica**

ALUMNO: **Daniel Fondevila**

LU N°: **647/18**

LUGAR DE TRABAJO: **FCEN, UBA**

DIRECTOR DEL TRABAJO: **Dr. Raúl Arias (IFLP)**

CODIRECTOR DEL TRABAJO: **Dr. David Blanco (UBA)**

FECHA DE INICIACIÓN: **Marzo 2023**

FECHA DE FINALIZACIÓN: **Marzo 2024**

FECHA DE EXAMEN: **26/3/2024**

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor:

Jurado

Director:

Jurado

Profesor:

Jurado

Índice general

1. Introducción	1
2. Entropías y función de partición en QFT y gravedad	6
2.1. Medidas de entrelazamiento	6
2.2. <i>Replica Trick & Twist Fields</i>	7
2.2.1. Resultados para un intervalo	14
2.2.2. Resultados para dos intervalos	15
2.3. Integral de camino gravitatoria	16
2.4. Entropía de Bekenstein-Hawking	18
2.5. Entropía generalizada	20
3. Entropía generalizada a partir de la acción replicada	23
4. <i>Replica Wormholes</i>	28
4.1. Resumen de gravedad JT	28
4.1.1. Solución en vacío: Agujero Negro Eterno	33
4.1.2. Estado semiclásico de la CFT	37
4.2. Único Intervalo a temperatura finita	39
4.2.1. Superficies Cuánticas Extremales	40
4.2.2. <i>Replica Wormholes</i>	42
4.2.3. Solución de réplica para $n \rightarrow 1$	45
4.3. Dos Intervalos a temperatura finita	47
4.3.1. Superficies Cuánticas Extremales	49
4.3.2. <i>Replica Wormholes</i>	53
5. Conclusiones	56
A. Ecuaciones de Movimiento JT	58
B. Derivación de la acción Schwarziana	60
C. Solución linealizada del <i>Welding Problem</i>	68

Capítulo 1

Introducción

Durante el siglo 20 se desarrollaron los dos pilares más importantes de la física moderna. Por un lado, la Relatividad General describe la gravedad como un fenómeno de naturaleza geométrica, y por otro, la Teoría Cuántica de Campos describe el comportamiento del mundo microscópico, culminando en la confección de una teoría de las fuerzas fundamentales llamada el Modelo Estándar. Hasta el momento, no se ha logrado describir las cuatro fuerzas fundamentales en un mismo marco teórico de forma consistente. La gravedad no parece seguir las mismas reglas de cuantización que siguen las demás fuerzas, fundamentalmente debido a la no renormalizabilidad de la misma, al tratarse de un campo de spin 2.

Este trabajo se encuentra enmarcado en el área de estudio de una teoría cuántica de la gravedad. Esta teoría pretende describir la relación entre la gravedad y la mecánica cuántica entendiendo a la gravedad como un fenómeno emergente, de la misma forma en la que un gas presenta propiedades macroscópicas descritas estadísticamente a partir del comportamiento de partículas individuales. Una teoría de este tipo es necesaria no solo por la naturalidad que se logra al entender que las 4 fuerzas son de la misma índole, sino que en la Teoría de la Relatividad General existen problemáticas que dejan en claro su incompletitud actual, de la misma forma que encontrábamos problemas que no se lograban resolver en el marco de una teoría de gravedad Newtoniana, o en las cercanías de las cargas eléctricas de un campo electromagnético clásico. Particularmente, estas problemáticas aparecen en el ámbito de soluciones a las ecuaciones de Einstein que presentan singularidades y cantidades infinitas.

Existen varios campos de estudio, siendo algunos más prometedores que otros, que marcan las distintas formas de encarar este problema. En [1] Hawking menciona tres de ellos. La **Teoría de Operadores** propone reemplazar la métrica en las ecuaciones de Einstein por una distribución de operadores que actúan en un espacio de Hilbert dado. El problema de este

enfoque es que las ecuaciones de movimiento no son polinómicas y por lo tanto es una utopía lograr resolverlas aún en situaciones sencillas. La **Cuantización Canónica** comúnmente considera una foliación del espacio-tiempo compuesta de superficies espaciales para definir un Hamiltoniano que genere la evolución temporal del sistema y reglas de conmutación para los campos a tiempo fijo. A pesar de que este enfoque, en cierto sentido, asegura la unitariedad de la teoría, dispone del tiempo y espacio como objetos de distinta naturaleza (en contra del espíritu de la relatividad especial). A su vez, restringe la topología que pueda adoptar el espacio-tiempo, pues impone que sea el producto de la recta real y una variedad tridimensional, en contra de lo que se espera de una teoría de gravedad cuántica comprensiva de configuraciones topológicamente más exóticas. Por último, Hawking menciona la que estudiaremos en este trabajo, la **Integral de caminos Gravitatoria**, la cual no es más que la versión gravitatoria de la Integral de Caminos de Feynman para cuantizar los campos de forma alternativa al procedimiento canónico. La misma consta de una integral que considera todas las posibles historias que puedan contarse dada una configuración inicial y final para la métrica y los campos de materia. En el caso de la gravedad, deben considerarse todas las configuraciones geométricas y topológicas que puedan conectar las variedades de contorno. Existen algunos métodos para tratar el cálculo en circunstancias específicas, pero la gran problemática de este enfoque es que actualmente no se entiende bien como computar esta integral.

En las últimas décadas, la formulación del entrelazamiento cuántico en el contexto gravitatorio [2, 3] permitió desvelar en mayor profundidad algunos de los aspectos que una teoría de gravedad cuántica debe cumplir. La entropía de entrelazamiento es un nodo que conecta distintas áreas de estudio como la Información Cuántica, Teoría Cuántica de Campos y gravedad. El estudio de ésta cantidad permite obtener herramientas aplicables en temas diversos como transiciones de fase topológicas en ciertas teorías de materia condensada [4, 5] y resultados en el estudio del flujo del grupo de renormalización en teoría de campos [6, 7]. En particular, uno de los problemas más relevantes en este área es la conocida Paradoja de la Pérdida de la Información en agujeros negros. Esta paradoja representa un objeto de estudio claro en el entendimiento cuántico de la gravedad, pues interpela una solución clásica a las ecuaciones de Einstein y aspectos propios de la cuántica, como lo es el entrelazamiento. Dicho problema ha sido atacado y parcialmente resuelto en un contexto holográfico, pero en recientes avances, se mostró que la Integral de caminos Gravitatoria en cierto sentido codifica estos métodos que tienen sus orígenes en la Teoría de Cuerdas [8, 9]. Como veremos en los siguientes Capítulos, se puede rederivar la entropía termodinámica de agujeros negros

por medio de la integral de caminos, como lo hicieron Gibbons y Hawking en [10], así como también tiene el poder de rederivar la *entropía generalizada* [9].

En este trabajo, buscamos entender el papel que juega esta propuesta para cuantizar la gravedad en el contexto de la Paradoja de la Pérdida de la Información, enfocándonos y siguiendo detenidamente la publicación de Ahmed Almheiri, Thomas Hartman, Juan Maldacena, Edgar Shaghoulian y Amirhossein Tajdini titulada **Replica Wormholes and the entropy of Hawking Radiation** [9]. En dicha publicación, los autores muestran cómo es posible derivar la denominada entropía generalizada a partir del truco de réplicas en un espacio con gravedad.

La entropía generalizada es una prescripción para el cálculo de la entropía en un contexto gravitatorio, hallada en el marco de la correspondencia AdS/CFT descubierta por Maldacena a finales del año 1997 [11]. Esta prescripción generaliza la conjetura (luego demostrada [8]) de Ryu-Takayanagi [2] para la entropía de una región de entrelazamiento definida en el borde de un espacio asintóticamente AdS. En los últimos años, se utilizaron estas herramientas holográficas en el contexto de la Paradoja de la Pérdida de la información en agujeros negros. Un buen resumen de esto último puede encontrarse en [12]. Se considerará un modelo de juguete, lo suficientemente complejo para capturar los aspectos relevantes del comportamiento termodinámico de agujeros negros, conocido como el modelo de gravedad JT (Jackiw–Teitelboim)[13, 14] acoplado a una CFT. El mismo describe un sistema de gravedad dinámica dos dimensional en el espacio AdS_2 , en el que la acción de Einstein-Hilbert es acoplada a un campo dilatónico y una teoría de campos conforme que vive sobre la geometría. Existen varios argumentos del por qué este modelo simplificado es relevante para el estudio cuántico de agujeros negros, algunos de los cuales son que el mismo puede ser obtenido en el límite de *near horizon* para agujeros negros casi extremales y que la resolubilidad de la teoría permite responder preguntas de forma concreta. Una de las propiedades más interesantes de los espacios de tipo AdS es que para un observador situado en el interior de la región gravitatoria, las partículas no masivas tardan un tiempo finito en ir y volver del infinito distante. Esto tiene como consecuencia que agujeros negros lo suficientemente masivos podrían llegar a termalizar, sin llegar nunca a la completa evaporación. Si bien la tensión entre la teoría gravitatoria y cuántica se produce mucho antes de la completa evaporación, es posible modificar el modelo de gravedad JT para asemejar el esquema a aquel en el que originalmente la paradoja fue formulada. Para lograr esto, en [15] propusieron drenar la radiación de Hawking acoplando espacios de Minkowski a los bordes de AdS_2 .

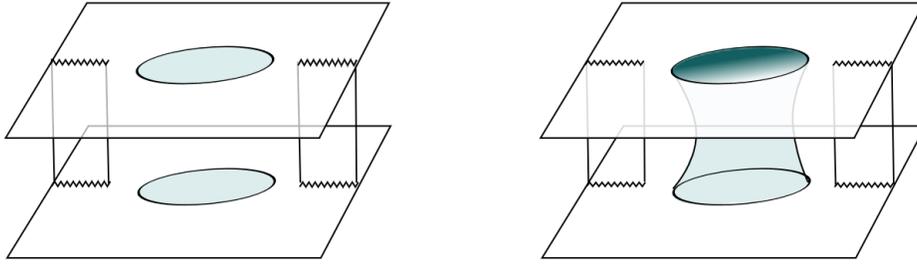


Figura 1.1: Los primeros dos saddles (*Wormholes*) relevantes en la aproximación de puntos estacionarios de la integral de caminos gravitatoria. Tenemos una región con gravedad (coloreada) y una región plana. La región de entrelazamiento se haya en la región no gravitatoria, aparece recortada y es sobre ellas que se realiza la identificación (unión entre copias) del truco de réplicas ($n = 2$). A izquierda aquella solución que rellena la región gravitatoria con espacios disjuntos y a derecha la solución que une las regiones gravitatorias exhibiendo una topología distinta.

Al estudiar el entrelazamiento de las configuraciones de los campos cuánticos en distintas regiones del espacio-tiempo plano, suele utilizarse el conocido truco de réplicas para computar primero la entropía de Rényi, luego realizar una continuación analítica en el parámetro de réplica y finalmente tomar el límite que recupere la entropía de von Neumann. Este truco se basa en la formulación de la matriz densidad de la región de entrelazamiento de interés en términos de una integral de caminos, y la consideración de n copias del sistema que son identificadas de forma cíclica a lo largo de la región de entrelazamiento. Esto resulta ser equivalente a computar la función de partición en una variedad no trivial, un *Replica (covering) Manifold*, en situaciones donde la gravedad no es dinámica. Sin embargo el modelo de gravedad JT acoplado a espacios de Minkowski, presenta tanto regiones gravitatorias como planas, y el procedimiento del truco de réplicas deviene en la consideración de una función de partición definida en términos de la integral de caminos gravitatoria. Esto se debe a que luego de identificar las regiones de entrelazamiento de las distintas copias, la geometría de la región gravitatoria no queda determinada, y por lo tanto, debe considerarse una gravedad dinámica por medio dicha integral. Esto permite dar cuenta de todas aquellas geometrías y topologías que logren completar el procedimiento de réplica, utilizando el borde de la región no gravitatoria replicada, como condición de contorno para la integral. Luego, se realiza la aproximación sobre *saddle points* (soluciones a las ecuaciones de movimiento), como es usual al estudiar tanto la integral de caminos gravitatoria y la integral de caminos en teoría cuántica de campos. En la Figura [1.1] se muestran los dos primeros *saddles* relevantes al considerar una región de entrelazamiento consistente de 2 intervalos en el modelo estudiado.

En los siguientes Capítulos computaremos de manera explícita dichos *Wormholes* al estudiar la entropía asociada a la región de entrelazamiento compuesta por 1 intervalo.

En el Capítulo 2, presentaremos de forma introductoria el estudio de la entropía de entrelazamiento en teoría cuántica de campos, así como también, el truco de réplicas y su formulación en términos de *Twist Fields*. Realizaremos una breve introducción a la integral de caminos gravitatoria y a partir de ella obtendremos la entropía de Bekenstein Hawking. Por último, presentamos una breve descripción de la entropía generalizada en el contexto holográfico. En el Capítulo 3, desarrollaremos en detalle la deducción de la entropía generalizada a partir del truco de réplicas, siguiendo de cerca, aquella presentada en [9]. En el Capítulo 4, presentamos en detalle el modelo de gravedad JT y caracterizaremos la solución de agujero negro eterno acoplando las regiones de Minkowski en los bordes de AdS_2 . A su vez, verificaremos el resultado obtenido en el Capítulo anterior para este modelo de juguete en particular, computando de forma explícita el *saddle point* cuando la región de entrelazamiento consta de 1 intervalo, y compararemos el resultado con el cálculo holográfico tradicional. Comentaremos brevemente algunos resultados en la consideración de 2 intervalos de entrelazamiento y cómo se interpretan en el contexto de la Paradoja de la Pérdida de la Información.

Capítulo 2

Entropías y función de partición en QFT y gravedad

La función de partición en QFT y gravedad toma el mismo rol en los cálculos que la función de partición en termodinámica estadística, con la distinción de que en teoría cuántica de campos, la misma se obtiene al considerar la amplitud de transición entre estados de vacío por medio de la integral de caminos. En este trabajo, es de utilidad especialmente en el cálculo de la entropía de entrelazamiento en teorías cuánticas con gravedad involucrada. En este Capítulo, realizaremos una breve descripción de los conceptos físicos que serán utilizados posteriormente en el análisis de los *Wormholes*, así como también, mostraremos la relevancia de la integral de caminos gravitatoria como propuesta para desvelar aspectos termodinámicos de agujeros negros. Presentaremos la entropía de entrelazamiento (*fine grained entropy*) y la entropía térmica (*coarsed grained entropy*) y su relación con la integral de caminos.

2.1. Medidas de entrelazamiento

La entropía de entrelazamiento es una cantidad que permite medir el entrelazamiento presente en un sistema compuesto por estados cuánticos. En teorías cuánticas con una cantidad discreta de grados de libertad, una matriz densidad describe sus propiedades entrópicas. Si el mismo se encuentra en un estado puro $|\psi\rangle$, entonces la definimos como

$$\rho = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{Z} \quad \text{y} \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad , \quad (2.1)$$

con Z la función de partición del sistema. Las propiedades de ρ dependerán de las características de los estados $|\psi\rangle$ del espacio de Hilbert \mathcal{H} que la compongan. Es de interés considerar

sistemas reducidos y analizar la entropía de entrelazamiento entre los distintos subsistemas que componen al espacio de Hilbert del sistema total. Se consideran los subsistemas $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ tales que la unión es el sistema descrito por \mathcal{H} , y se define la matriz densidad reducida del sistema \mathcal{A} como

$$\rho_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{B}}[\rho] = \sum_i \langle i|_{\mathcal{B}} \rho |i\rangle_{\mathcal{B}}, \quad (2.2)$$

es decir, se realiza un trazado sobre los estados propios $|i\rangle_{\mathcal{B}}$ del sistema complementario. La entropía de entrelazamiento (EE) del subsistema \mathcal{A} se define como

$$S(\mathcal{A}) = -\text{Tr}_{\mathcal{A}}[\rho_{\mathcal{A}} \log \rho_{\mathcal{A}}]. \quad (2.3)$$

A su vez, existe la llamada Entropía de Rényi definida como

$$S_n(\mathcal{A}) = \frac{1}{1-n} \log(\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}^n]), \quad (2.4)$$

donde $n \in \mathbb{R}_{>0}$ y $n \neq 1$ y coincide con la EE definida anteriormente en el límite

$$S(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow 1} S_n(\mathcal{A}). \quad (2.5)$$

En teoría cuántica de campos hay infinitos grados de libertad, uno por cada punto del espacio. Dado que, al especificar la configuración de los campos en una superficie de Cauchy Σ del espacio-tiempo \mathcal{M} , se determina el estado del sistema de forma local, es razonable asociar regiones $\mathcal{A} \subset \Sigma$ con subespacios del espacio de Hilbert \mathcal{H} de la teoría. De esta forma, en QFT, se estudia la EE de los campos restringidos a regiones del espacio-tiempo. Para una descripción más detallada de la EE en QFT referimos a los artículos [16, 17] y a [18, 19] cuando la QFT es invariante conforme.

En la siguiente sección, introduciremos el truco de réplicas para el cómputo de la entropía de entrelazamiento a partir de matrices densidad definidas en regiones espaciales. Para esto, resulta útil la formulación de teorías de campos en términos de integrales de caminos.

2.2. *Replica Trick & Twist Fields*

Siempre que se pueda realizar la continuación analítica de n en los reales para una dada entropía de Rényi, es posible calcular la entropía de entrelazamiento tomando el límite en que $n \rightarrow 1$. Sin embargo, en teorías cuánticas de campos, resulta para nada trivial obtener $\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}^n]$. La formulación de QFT en términos de integrales de caminos permite desarrollar un procedimiento geométrico, conocido como el truco de réplicas, capaz de calcular esta traza.

Una integral de camino define amplitudes de transición entre estados $|\phi_t(\vec{x})\rangle$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} bajo la acción de un operador Hamiltoniano H , donde definimos los estados como aquellos autovectores de un conjunto completo de observables que conmutan $\{\hat{\phi}(t, \vec{x})\}$

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) |\phi_t(\vec{x})\rangle = \phi_t(\vec{x}) |\phi_t(\vec{x})\rangle . \quad (2.6)$$

Una integral de camino define amplitudes de transición entre estados $|\phi_t(\vec{x})\rangle$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} bajo la acción de un operador Hamiltoniano H , donde definimos los estados como aquellos autovectores de un conjunto completo de observables que conmutan $\{\hat{\phi}(t, \vec{x})\}$

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) |\phi_t(\vec{x})\rangle = \phi_t(\vec{x}) |\phi_t(\vec{x})\rangle , \quad (2.7)$$

donde además tenemos que (tomando $t_o = 0$)

$$|\phi_T(\vec{x})\rangle = e^{iTH} |\phi_o(\vec{x})\rangle . \quad (2.8)$$

La amplitud de transición queda entonces escrita como

$$\langle \phi_T(\vec{x}) | \phi_o(\vec{x}) \rangle = \langle \phi'_o(\vec{x}) | e^{-iTH} | \phi_o(\vec{x}) \rangle = \int_{\phi(0, \vec{x}) = \phi_o(\vec{x})}^{\phi(T, \vec{x}) = \phi'_o(\vec{x})} [\mathcal{D}\phi(t, \vec{x})] e^{iI[\phi]} , \quad (2.9)$$

que luego de cambiar $t = -i\tilde{t}$, queda como

$$\langle \phi'_o(\vec{x}) | e^{-\tilde{T}H} | \phi_o(\vec{x}) \rangle = \int_{\phi(0, \vec{x}) = \phi_o(\vec{x})}^{\phi(-i\tilde{T}, \vec{x}) = \phi'_o(\vec{x})} [\mathcal{D}\phi(-i\tilde{t}, \vec{x})] e^{iI[\phi]} . \quad (2.10)$$

Definiendo $\beta = T - 0$, $\Phi(t, \vec{x}) = \phi(-it, \vec{x})$ y notando que $-iI[\phi] = -I_E[\Phi]$, podemos reescribir lo anterior como

$$\langle \phi'_o(\vec{x}) | e^{-\beta H} | \phi_o(\vec{x}) \rangle = \int_{\Phi(0, \vec{x}) = \phi_o(\vec{x})}^{\Phi(T, \vec{x}) = \phi'_o(\vec{x})} [\mathcal{D}\Phi(t, \vec{x})] e^{-I_E[\Phi]} . \quad (2.11)$$

Siendo confusos y adoptando una notación menos clara para ganar claridad, escribimos

$$\langle \phi'(\vec{x}) | e^{-\beta H} | \phi(\vec{x}) \rangle = \int_{\phi(0, \vec{x}) = \phi(\vec{x})}^{\phi(T, \vec{x}) = \phi'(\vec{x})} [\mathcal{D}\phi(t, \vec{x})] e^{-I_E[\phi]} , \quad (2.12)$$

donde $I_E[\phi] = \int \mathcal{L}[\phi]$ es la acción Euclídea, con \mathcal{L} la densidad Lagrangiana Euclídea de la materia, y las condiciones de borde para el campo $\{\phi'(\vec{x}), \phi(\vec{x})\}$ dependen de los estados involucrados. Actuar con el ket sobre el bra, o con el bra sobre el ket, repercute únicamente en estas condiciones de contorno para la integral de caminos. No especificar las condiciones

de contorno en uno de los bordes es equivalente a considerar solo un bra, o solo un ket, respectivamente. Formalmente, y simplificando la notación, tenemos que

$$|\phi_1\rangle = \int_{\phi(\tau)=\phi_1}^{\phi(T)=.} [\mathcal{D}\phi] e^{-I_E[\phi]} \quad \langle\phi_2| = \int_{\phi(\tau)=.}^{\phi(T)=\phi_2} [\mathcal{D}\phi] e^{-I_E[\phi]} . \quad (2.13)$$

De forma similar, puede considerarse la función de onda del estado de vacío $\Psi[\phi_0]$ como

$$\langle\phi_0|\Psi\rangle = \int_{t=-\infty}^{\phi(0)=\phi_0} [\mathcal{D}\phi] e^{-I_E[\phi]} , \quad (2.14)$$

donde hemos identificado las condiciones de contorno asociadas al estado de vacío $|\Psi\rangle$ con configuraciones que viven a tiempo Lorentziano $t = -\infty$ (lo cual corresponde a tomar $\beta \rightarrow \infty$), debido a que el estado de mínima energía es el único relevante en esa región del espacio de Hilbert¹. Una derivación detallada de estos argumentos pueden hallarse en [19, 20]. A su vez, la amplitud de transición entre estados de vacío en $t = \pm\infty$ es la función de partición de la teoría a temperatura $T = \frac{1}{\beta}$ con tiempo Euclídeo $\tau \sim \tau + \beta$, escribiéndose como

$$Z = \langle\Psi|\Psi\rangle = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-I_E[\phi]} . \quad (2.15)$$

Cada una de estas integrales de caminos pueden representarse pictóricamente (ver Figura [2.1]) y deben entenderse como una prescripción que muestra solo características topológicas de la variedad \mathcal{M} sobre la cual se computa la integral. Notemos que la ecuación (2.15) es equivalente a haber sumado sobre una base de estados $\{\phi_j\}$, esquemáticamente

$$\langle\Psi|\Psi\rangle \sim \sum_j \langle\Psi|\phi_j\rangle \langle\phi_j|\Psi\rangle , \quad (2.16)$$

y por cómo se relacionan los respectivos dibujos, equivale a haber pegado las regiones sobre las que viven las condiciones de contorno ϕ_j . Esto es importante para entender cómo se construye la matriz densidad en este formalismo.

¹En el desarrollo en modos energéticos, aquellos de energías mayores al del vacío se ven suprimidos a tiempos grandes (para el ket o el bra en $-\infty$ y ∞ respectivamente)

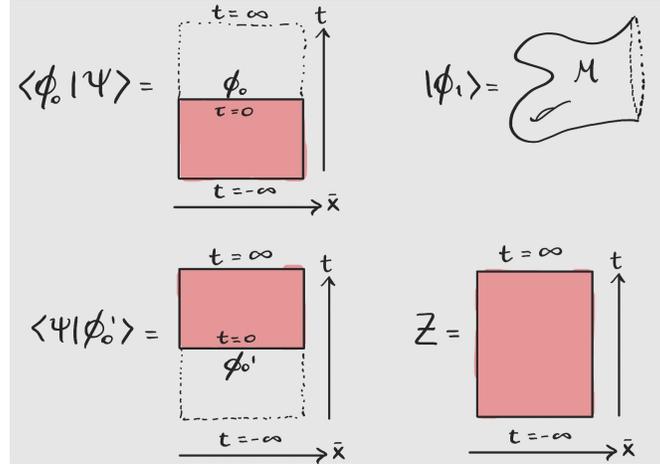


Figura 2.1: Prescripción pictórica de las integrales de camino. Aquellas pintadas son integrales de caminos sobre $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{1,d-1}$ (signatura Lorentziana). La función de partición es integrar con t de $-$ a $+$ infinito. Para las funciones de ondas mostradas, la condición de contorno $\phi_0(\vec{x})$ para el campo ϕ vive en el corte espacial $t = 0$. Arriba a la derecha, representamos la idea de preparar estados cuánticos como una integral de caminos sobre una variedad exótica \mathcal{M} .

Supongamos que una QFT se encuentra en el estado de vacío $|\Psi\rangle$ (por lo tanto $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$) y que consideramos en una superficie de Cauchy temporal Σ_t una superficie de entrelazamiento \mathcal{A} y su complemento asociado $\mathcal{A}^c = \mathcal{B}$. Para calcular $\rho_{\mathcal{A}}$, es necesario realizar un trazado sobre los estados de \mathcal{B} , que no significa más que integrar sobre las configuraciones de campos con soporte en \mathcal{B} . Notamos con $\{\phi^{A,\mathcal{B}}\}$ a las configuraciones del campo con soporte en cada región. Luego, la matriz densidad reducida se escribe como la integral sobre todas las configuraciones posibles de $\phi^{\mathcal{B}}$ a tiempo fijo $t = 0$

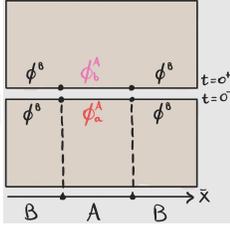
$$\rho_{\mathcal{A}} = \frac{1}{Z} \int [\mathcal{D}\phi^{\mathcal{B}}(\vec{x} \in \mathcal{B})] \langle \phi^{\mathcal{B}} | \Psi \rangle \langle \Psi | \phi^{\mathcal{B}} \rangle . \quad (2.17)$$

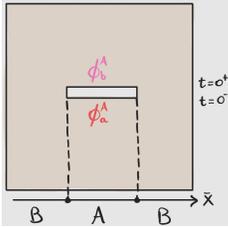
Dentro del formalismo que describimos, esta matriz densidad es un operador pues no están especificadas las condiciones de contorno para ϕ en la región \mathcal{A}^2 . Consideremos los elementos de matriz de $\rho_{\mathcal{A}}$ notando como $\{|\phi^{\mathcal{A}}\rangle\}$ al conjunto de estados asociados a la

²Esto es así pues $[\mathcal{D}\phi^{\mathcal{B}}(t = 0, \vec{x} \in \mathcal{B})]$ debe entenderse como una integral sobre la configuración del campo sobre toda Σ_t con una productoria de deltas que localizan la integral sobre condiciones de contorno en \mathcal{B} .

region de entrelazamiento

$$\langle \phi_a^A | \rho_{\mathcal{A}} | \phi_b^A \rangle = [\rho_{\mathcal{A}}]_{ab} = \frac{1}{Z} \int [\mathcal{D}\phi^{\mathcal{B}}(t=0, \vec{x} \in \mathcal{B})] (\langle \phi_a^A | \langle \phi^{\mathcal{B}} | | \Psi \rangle \langle \Psi | (| \phi_b^A \rangle | \phi^{\mathcal{B}} \rangle) \quad (2.18)$$

$$= \frac{1}{Z} \int [\mathcal{D}\phi^{\mathcal{B}}(t=0, \vec{x} \in \mathcal{B})] \quad (2.19)$$


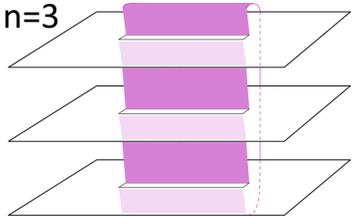
$$= \frac{1}{Z} \quad (2.20)$$


$$= \frac{1}{Z} \int [\mathcal{D}\phi(t, \vec{x})] e^{-I_E[\phi]} \prod_{\vec{x} \in \mathcal{A}} \delta(\phi(0^+, \vec{x}) - \phi_b^A(\vec{x})) \delta(\phi(0^-, \vec{x}) - \phi_a^A(\vec{x})), \quad (2.21)$$

donde en la última igualdad, reescribimos la integral de camino sobre todas las configuraciones del campo posibles, pero salvando aquellos términos con las condiciones de contorno adecuadas por medio de Deltas de Dirac. Notemos que

$$\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}] = \frac{Z}{Z} = 1, \quad (2.22)$$

pues trazar es realizar una integral sobre todas las configuraciones posibles (tomando $\phi_a^A = \phi_b^A$) del campo con soporte en \mathcal{A} , y esto implica pegar los bordes en $t = 0^\pm$, lo cual vuelve a computar la función de partición Z^3 . La generalización para $\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}^n]$ mediante este formalismo es directa

$$\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}^n] = \frac{1}{(Z)^n} \quad (2.23)$$


es decir, el truco de réplicas propone que para calcular $\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}^n]$ se deben considerar n copias del sistema, unirlas a lo largo la superficie de entrelazamiento \mathcal{A} , e imponer condiciones de

³Siendo estrictos, el dibujo que representa la función de partición Z es un cilindro al trabajar en signatura Euclídea, tomando $0^- = 0$ y $0^+ = \beta$ (con β el diámetro del cilindro).

contorno para el campo en cada copia etiquetada con $1 \leq j \leq n$, teniéndose que $\forall x \in \mathcal{A}$

$$\phi_j(0^-, x) = \phi_{j+1}(0^+, x) \quad (2.24)$$

$$\phi_n(0^-, x) = \phi_1(0^+, x), \quad (2.25)$$

donde (2.24) son las que imponemos al considerar $\rho_{\mathcal{A}}^n$, y (2.25) la que imponemos al tomar la traza. De esta forma, conformamos una variedad replicada denominada *Replica (covering) Manifold* $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ (obteniéndose la variedad original para $n = 1$, siendo $\widetilde{\mathcal{M}}_1 \equiv \mathcal{M}$) y

$$\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}^n] = \frac{Z_n}{(Z)^n}, \quad (2.26)$$

con Z_n la función de partición de la QFT en $\widetilde{\mathcal{M}}_n$. A partir de esta última igualdad, puede derivarse una fórmula equivalente para $S(\mathcal{A})$ en términos de las funciones de partición

$$S(\mathcal{A}) = -\lim_{n \rightarrow 1} \partial_n (\log(Z_n) - n \log(Z)). \quad (2.27)$$

La variedad replicada $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ no tiene la misma geometría que \mathcal{M} debido a que la curvatura se vuelve no nula alrededor de los bordes de la región \mathcal{A} que utilizamos para identificar las n copias, es decir, no alcanza con dar una vuelta en 2π alrededor de $\partial\mathcal{A}$ para llegar al mismo lugar, pues hemos transicionado a la siguiente copia en dicha rotación. Debido a la localidad de la densidad Langrangiana, cuando trabajamos en dos dimensiones podemos reescribir el problema como un modelo que vive en el plano complejo \mathbb{C} , imponiendo condiciones de contorno adecuadas en un numero finito de puntos (los bordes de la/las regiones de entrelazamiento) en n campos ϕ_j . Esto se conoce como la consideración del problema en el orbifold asociado $\mathcal{M}_n = \widetilde{\mathcal{M}}_n/\mathbb{Z}_n$, donde \mathbb{Z}_n se denomina como el grupo de réplica y actúa sobre la variedad replicada permutando cíclicamente las n copias que la componen (lo cual representa una simetría del problema).

Supongamos que $\mathcal{A} = [u_1, v_1]$ y la identificación de las n copias la hacemos para $x \in [u_1, v_1]$ y $\tau = 0$. En la función de partición definida en el plano complejo $z = x + i\tau$, implementamos la no trivialidad de $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ por medio de unos *campos* que viven en $\{z = u_1, z = v_1\}$ y que imponen condiciones de contorno para n campos ϕ_j . Escribimos la función de partición como

$$Z_n = \int_{\mathcal{C}_{u_1, v_1}} [d\phi_1 \dots d\phi_n] \exp \left[- \int_{\mathbb{C}} dx d\tau (\mathcal{L}[\phi_1] + \dots + \mathcal{L}[\phi_n]) \right], \quad (2.28)$$

donde $\int_{\mathcal{C}_{u_1, v_1}}$ restringe la integral de caminos sobre todas las configuraciones de los campos sujetos a que

$$\phi_i(x, 0^+) = \phi_{i+1}(x, 0^-) \quad x \in [u_1, v_1] \quad i = 1, \dots, n \quad n + i \sim i. \quad (2.29)$$

Notemos que $\mathcal{L}^{(n)}[\phi_1, \dots, \phi_n](x, \tau) = \sum_i \mathcal{L}[\phi_i](x, \tau)$ es una densidad Lagrangiana en la que tenemos la simetría $\mathcal{L}^{(n)}[\sigma\phi] = \mathcal{L}^{(n)}[\phi]$, donde $\sigma : i \rightarrow i+1$ permuta cíclicamente los campos. Luego, (2.28) define unos llamados *Twist Fields* asociados a las dos permutaciones cíclicas opuestas $i \rightarrow i+1$ y $i+1 \rightarrow i$, los cuales denotamos como

$$\mathcal{T}_n := \mathcal{T}_\sigma \quad \sigma : i \rightarrow i+1 \quad \text{mod } n \quad (2.30)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_n := \mathcal{T}_{\sigma^{-1}} \quad \sigma^{-1} : i+1 \rightarrow i \quad \text{mod } n, \quad (2.31)$$

y entonces, entendiendo que estos *Twist Fields* son los responsables de imponer las condiciones de contorno en la integral de caminos, tenemos que la función de partición en $\tilde{\mathcal{M}}_n$ es una función de dos puntos en \mathbb{C}

$$Z_n = Z[\tilde{\mathcal{M}}_n] \propto \left\langle \mathcal{T}_n(u_1, 0) \tilde{\mathcal{T}}_n(v_1, 0) \right\rangle_{\mathcal{L}^{(n)}, \mathbb{C}}. \quad (2.32)$$

Si buscamos el valor de expectación de campos \mathcal{O} en la variedad replicada, podemos asociarlos al valor de expectación en el orbifold por medio de la siguiente ecuación

$$\langle \mathcal{O}(x, \tau, i) \dots \rangle_{\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{M}}_n} = \frac{\left\langle \mathcal{T}_n(u_1, 0) \tilde{\mathcal{T}}_n(v_1, 0) \mathcal{O}_i(x, \tau) \dots \right\rangle_{\mathcal{L}^{(n)}, \mathbb{C}}}{\left\langle \mathcal{T}_n(u_1, 0) \tilde{\mathcal{T}}_n(v_1, 0) \right\rangle_{\mathcal{L}^{(n)}, \mathbb{C}}}, \quad (2.33)$$

donde $\mathcal{O}(x, \tau, i)$ actúa sobre ϕ en la copia i , y $\mathcal{O}_i(x, \tau)$ actúa sobre ϕ_i .

Si el campo de materia es una CFT en dos dimensiones y consideramos una región de entrelazamiento dada por 1 intervalo, puede mostrarse que estos *Twist Fields* son campos primarios y de dimensión de escala [19, 21]

$$d_n = \frac{c}{12} \left(n - \frac{1}{n} \right), \quad (2.34)$$

donde c es la carga central de la CFT. El procedimiento consiste en utilizar la identidad de Ward en la ecuación (2.33) junto con las reglas de transformación del tensor de energía momento al actuar con la transformación conforme

$$w = \left(\frac{z - u_1}{z - v_1} \right)^{1/n}, \quad (2.35)$$

la cual primero traslada los bordes de \mathcal{A} teniendo que $u_1 \rightarrow 0$ e $v_1 \rightarrow \infty$ (los cuales son puntos fijos de la transformación elevar a la $1/n$) y luego modifica el ángulo que describe a cada punto en el plano complejo $\theta \rightarrow \theta/n$, desmenuciendo de esta forma el exceso angular en u_1 y v_1 . Esta es la transformación explícita que nos lleva de la variedad replicada al orbifold (cuando estudiamos una región de entrelazamiento compuesta por 1 intervalo).

Notemos que siempre es posible considerar el problema del truco de réplicas en el orbifold asociado, pero solo en dos dimensiones sucede trivialmente que $\mathcal{M}_n = \mathbb{C}$. Esto es asegurado por el Teorema de Uniformización, el cual afirma la equivalencia entre una superficie de Riemann simplemente conexa arbitraria y alguna de las tres Superficies de Riemann: el disco unitario abierto, el plano complejo o la esfera de Riemann.

Si tenemos N intervalos para la región de entrelazamiento (cambiando la notación $\widetilde{\mathcal{M}}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{n,N}$), la ecuación (2.32) se generaliza naturalmente agregando los *Twist Fields* correspondientes evaluados en los demás bordes de dicha región

$$\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}^n] = Z[\widetilde{\mathcal{M}}_{n,N}] \propto \left\langle \mathcal{T}_n(u_1, 0) \widetilde{\mathcal{T}}_n(v_1, 0) \dots \mathcal{T}_n(u_N, 0) \widetilde{\mathcal{T}}_n(v_N, 0) \right\rangle_{\mathcal{L}^{(n)}, \mathbb{C}}. \quad (2.36)$$

Sin embargo, al aumentar el número de *Twist Fields*, la simetría conforme no es suficiente para determinar completamente la forma de la función de correlación. Como consecuencia, al considerar más de 1 intervalo, la entropía de entrelazamiento se vuelve modelo dependiente (ver por ejemplo [22, 23, 24, 25]). Por otro lado, el *genus* de la variedad replicada depende del número N y de n de la forma $(n-1)(N-1)$, y por lo tanto para $N \neq 1$, el *genus* de $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ y \mathbb{C} son distintos. La transformación que permite uniformizar la variedad replicada no se conoce de forma general. A pesar de esto, todos los *Twist Fields* que aparecen en (2.36) los asumimos campos primarios.

Comentamos también que si consideramos problemas en los que no tenemos regiones del plano complejo, sino regiones en espacios conformes a éste (lo cual es siempre verdadero en 2 dimensiones), siendo

$$ds_g^2 = \Omega^{-2} ds_{\mathbb{C}}^2, \quad (2.37)$$

entonces el valor de expectación de los *Twist Fields* se modifica por medio de los factores conformes Ω de la siguiente manera

$$\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}^n]_g = (\Omega_{u_1} \Omega_{v_1} \dots \Omega_{u_N} \Omega_{v_N})^{d_n} \left\langle \mathcal{T}_n(u_1, 0) \widetilde{\mathcal{T}}_n(v_1, 0) \dots \mathcal{T}_n(u_N, 0) \widetilde{\mathcal{T}}_n(v_N, 0) \right\rangle_{\mathcal{L}^{(n)}, \mathbb{C}}, \quad (2.38)$$

donde $\Omega_w = \Omega(w, \bar{w})$ es el factor conforme asociado a la región de espacio en la que se encuentra w .

2.2.1 Resultados para un intervalo

Si consideramos una CFT en dos dimensiones, pedir invariancia conforme determina completamente la función de dos puntos (2.32) y se obtiene que

$$\left\langle \mathcal{T}_n(u_1, 0) \widetilde{\mathcal{T}}_n(v_1, 0) \right\rangle_{\mathcal{L}^{(n)}, \mathbb{C}} = c_n \left(\frac{u_1 - v_1}{a} \right)^{-2d_n}, \quad (2.39)$$

con a un parámetro de regularización sobre los bordes $\{u_1, v_1\}$ y c_n una constante que es modelo dependiente. De esta forma, a partir de (2.4), puede computarse la entropía de Rényi y posteriormente la entropía de entrelazamiento, quedando que

$$S(\mathcal{A}) = \frac{c}{3} \log \frac{l}{a} + c'_1, \quad (2.40)$$

siendo $l = |u_1 - v_1|$ la longitud del intervalo y c'_1 una constante no universal definida como

$$c'_n = \frac{\log c_n}{1 - n}. \quad (2.41)$$

Podemos generalizar este último resultado utilizando la ecuación (2.38), el cual permite plantear el problema en espacios conformes al plano complejo, obteniéndose que

$$S(\mathcal{A}) = \frac{c}{6} \log \left(\frac{|u_1 - v_1|^2}{a\Omega(u_1)\Omega(v_1)} \right). \quad (2.42)$$

2.2.2 Resultados para dos intervalos

Como lo utilizaremos más adelante, definimos resultados para el caso en que la región de entrelazamiento esta compuesta por 2 intervalos disjuntos, siendo $\mathcal{A} = [u_1, v_1] \cup [u_2, v_2]$. En este caso, la función de partición sobre la variedad replicada queda (a menos de un factor de normalización)

$$\left\langle \mathcal{T}_n(u_1, 0) \tilde{\mathcal{T}}_n(v_1, 0) \mathcal{T}_n(u_2, 0) \tilde{\mathcal{T}}_n(v_2, 0) \right\rangle_{\mathcal{L}^{(n)}, \mathbb{C}} = c_n^2 \left(\frac{|u_1 - u_2| |v_1 - v_2|}{|u_1 - v_1| |u_2 - v_2| |u_1 - v_2| |u_2 - v_1|} \right)^{2d_n} \mathcal{F}_n(x) \quad (2.43)$$

$$= c_n^2 (\mathcal{Z}^2)^{-d_n} \mathcal{F}_n(x), \quad (2.44)$$

con \mathcal{F}_n una función que contiene detalles de la teoría particular bajo estudio, x es la razón de 4 puntos

$$x = \frac{(u_1 - v_1)(u_2 - v_2)}{(u_1 - u_2)(v_1 - v_2)}, \quad (2.45)$$

y \mathcal{Z} la definimos para simplificar la notación como

$$\mathcal{Z} = \frac{|u_1 - v_1| |u_2 - v_2| |u_1 - v_2| |u_2 - v_1|}{|u_1 - u_2| |v_1 - v_2|}. \quad (2.46)$$

Nuevamente, generalizando este resultado por medio de (2.38), se obtiene que

$$\text{Tr}[\rho_{\mathcal{A}}^n] = c_n^2 (\Omega(u_1)\Omega(v_1)\Omega(u_2)\Omega(v_2))^{d_n} (\mathcal{Z}^2)^{-d_n} \mathcal{F}_n(x) \quad (2.47)$$

$$= c_n^2 \left(\frac{\mathcal{Z}^2}{\Omega(u_1)\Omega(v_1)\Omega(u_2)\Omega(v_2)} \right)^{-d_n} \mathcal{F}_n(x). \quad (2.48)$$

Luego, la entropía de Rényi queda

$$S_n(\mathcal{A}) = \frac{-d_n}{1-n} \log \left(\frac{\mathcal{Z}^2}{\Omega(u_1)\Omega(v_1)\Omega(u_2)\Omega(v_2)} \right) + \frac{1}{1-n} \log(c_n^2 \mathcal{F}_n(x)) \quad (2.49)$$

$$= \frac{c}{12} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \log \left(\frac{\mathcal{Z}^2}{\Omega(u_1)\Omega(v_1)\Omega(u_2)\Omega(v_2)} \right) + \frac{1}{1-n} \log(c_n^2 \mathcal{F}_n(x)) . \quad (2.50)$$

Detallamos en particular la entropía de entrelazamiento de 2 intervalos para un campo de fermiones libres no masivos y para un campo de escalares quirales⁴[23, 24]

$$S_f(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \frac{c_f}{6} \log \left(\frac{\mathcal{Z}^2}{\Omega(u_1)\Omega(v_1)\Omega(u_2)\Omega(v_2)} \right) \quad (2.51)$$

$$S_q(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \frac{c_q}{6} \log \left(\frac{\mathcal{Z}^2}{\Omega(u_1)\Omega(v_1)\Omega(u_2)\Omega(v_2)} \right) - U(x) , \quad (2.52)$$

siendo $c_f = 1$ y $c_q = 1/2$ las carga centrales de las teorías en cuestión y $U(x)$ definida a partir de la Función Hipergeométrica F_1 de la forma

$$U(x) = -\frac{i\pi}{2} \int_0^\infty ds \frac{s}{\sinh^2 \pi s} \log \left(\frac{{}_2F_1(1+is, -is, 1; x)}{{}_2F_1(1-is, is, 1; x)} \right) . \quad (2.53)$$

Como comentario final al respecto, mencionamos que en \mathbb{C} ($\Omega_j = 1$) pueden reescribirse estas entropías de 2 intervalos utilizando la entropía de 1 intervalo y un término extra dependiente de x , siendo

$$\frac{c}{3} \log(\mathcal{Z}) = S(\mathcal{A}_1) + S(\mathcal{A}_2) + \frac{c}{3} \log(1-x) . \quad (2.54)$$

2.3. Integral de camino gravitatoria

De entre los distintos marcos teóricos para cuantizar la gravedad mencionados en la introducción, podemos encontrar las integrales de caminos gravitatorias. Remitimos al Capítulo 15 de [1] como referencia, pero realizamos una breve descripción de este formalismo a continuación.

De la misma forma que en QFT, las integrales de camino representan amplitudes de transición entre los distintos estados cuánticos de la teoría. En el caso de las gravitatorias, también se integra sobre todas las métricas sujetas a condiciones de contorno dadas por el

⁴El Hamiltoniano de la teoría es

$$H = \frac{1}{2} \int dx J^2(x) ,$$

con $J(x)$ la derivada quiral de un campos escalar sin masa en dos dimensiones, es decir, $J(x) = \partial_+ \phi(x^+)$.

problema en particular. Los campos cuánticos ϕ viven sobre superficies de Cauchy Σ (no necesariamente de tiempo constante), sobre las cuales existe una métrica g cuya dinámica viene comprendida en el computo de la integral

$$\langle g_2, \phi_2, \Sigma_2 | g_1, \phi_1, \Sigma_1 \rangle = \int D[g, \phi] e^{iI[g, \phi]}, \quad (2.55)$$

donde $D[g, \phi]$ es la medida en el espacio de todas las configuraciones de los campos g y ϕ compatibles con las condiciones de borde requeridas, e I la acción de los campos. La integral es realizada sobre todas las historias que comiencen y terminen con las configuraciones de los campos especificadas con 1 y 2.

Si pedimos que las amplitudes de transición estén “encadenadas” como sucedía en QFT ($\langle 1|2 \rangle = \sum_3 \langle 1|3 \rangle \langle 3|2 \rangle$), es necesario modificar la acción de la teoría con el término de borde de Gibbons-Hawking y restar la contribución a la acción de dicho término para el caso en que la geometría es asintóticamente plana y embebida en un espacio plano, tomando el sentido de una regularización. La acción que aparece en la integral de caminos entonces es

$$I[g, \phi] = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g}(R - 2\Lambda) + \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} \mathcal{L}_{\text{materia}} + \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{h} K + C \quad (2.56)$$

$$C = -\frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{h} K^o, \quad (2.57)$$

con $\mathcal{L}_{\text{materia}}$ el Lagrangiano de la materia con el acople mínimo a la gravedad, $\{g, h\}$ las métricas sobre \mathcal{M} y la inducida en $\partial\mathcal{M}$ respectivamente y siendo $\{R, K\}$ las segundas formas fundamentales correspondientes. Aquí, el término denominado como C es aquel que sustrae la contribución del espacio plano al resultado, siendo equivalente al término de Gibbons-Hawking en el caso en que \mathcal{M} es plano. De igual forma que en QFT, se trabaja con la integral utilizando signatura Euclídea y no Lorentziana, lo cual comúnmente se logra por medio de una rotación de Wick de 90° . Esto asegura que todas las métricas involucradas sean definidas positivas. Consideramos la función de partición utilizando la integral de caminos con diferentes condiciones de contorno, pero utilizando la acción Euclídea \hat{I} debido a la complejificación del tiempo

$$Z(\beta) = \int D[g, \phi] e^{-\hat{I}[g, \phi]}, \quad (2.58)$$

donde ahora ya no es necesario indicar condiciones de contorno para g y ϕ , pero la coordenada temporal imaginaria debe ser periódica y cumplir $\tau \sim \tau + \beta$, en analogía con la función

de partición para una QFT a temperatura $T = 1/\beta$. Actualmente, no se entiende completamente como realizar la integral gravitatoria, pero existen métodos que permiten computarla de forma aproximada. Uno de ellos, es la aproximación de fase estacionaria, WKB o aproximación de *1-loop*. El mismo consiste en expandir la acción Euclídea alrededor de puntos estacionarios

$$\hat{I}[g, \phi] = \hat{I}[g_o, \phi_o] + \hat{I}[\bar{g}, \bar{\phi}], \quad (2.59)$$

donde $\{\bar{g}, \bar{\phi}\}$ son perturbaciones alrededor de las soluciones a las ecuaciones de movimiento $\{g_o, \phi_o\}$, y entonces, la función de partición queda corregida por un término cuántico que suele despreciarse en el limite semiclásico

$$Z(\beta) = e^{-\hat{I}[g_o, \phi_o]} Z_{\text{quantum}}. \quad (2.60)$$

2.4. Entropía de Bekenstein-Hawking

En esta sección revisaremos el cálculo de la entropía térmica de un agujero negro a partir de la función de partición gravitatoria, despreciando las correcciones cuánticas al realizar la aproximación semiclásica. La solución de Schwarzschild es la más simple y no trivial para las ecuaciones de Einstein en vacío, en la que luego de cambiar $t \rightarrow -i\tau$ en la métrica Lorentziana, obtenemos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.61)$$

Para asegurar la regularidad de esta métrica en el origen, debe pedirse que la coordenada temporal imaginaria sea periódica y $\tau \sim \tau + 8\pi M$. La justificación es que si expandimos esta métrica alrededor de $r = 2M$, e ignoramos la parte esférica $r^2 d\Omega^2$, se obtiene la métrica de un cono, y si τ no es periódico en $8\pi M$, aparece un defecto cónico en el origen. Luego tenemos que $\tau \in [0, 8\pi M]$ y $r \in [2M, +\infty)$, donde notamos que la región original con $r < 2M$ no existe en este nuevo espacio. Esta solución a las ecuaciones de movimiento cumple con la condición de contorno necesaria para la integral de caminos, tomando $\beta = 8\pi M$.

Debido a que la métrica de Schwarzschild es una solución de vacío $\langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$ con constante cosmológica $\Lambda = 0$, tenemos automáticamente que $R = 0$, por lo que el primer término en la acción (2.56) es nulo. Para el término de borde, calculamos la curvatura extrínseca del borde ∂M realizando un corte de la variedad a r fijo r_o , como se muestra en la Figura [2.2],

y restablecemos la variedad tomando el limite $r_o \rightarrow \infty$. Notamos que

$$h = g|_{\partial M} \quad K_{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{(i} n_{j)} = \nabla_{(i} n_{j)} \quad K = h^{ij} K_{ij} = \nabla_{\mu} n^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\mu} (\sqrt{g} n^{\mu}), \quad (2.62)$$

con n el vector unitario normal a ∂M y \mathcal{L} la derivada de Lie.

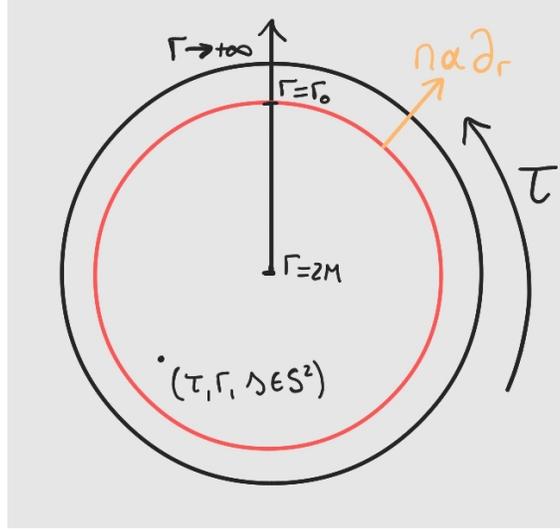


Figura 2.2: Diagrama de la solución de agujero negro Euclídeo. En rojo la curva recorte $r = r_o$. En naranja el vector normal a la curva.

De la Figura [2.2] notamos que $n = \alpha \partial_r$, y teniendo que cumplirse $n^2 = 1$, obtenemos que $n = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \partial_r$. Utilizando la última igualdad para K en (2.62), obtenemos

$$K = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_r \left(r^2 \sin \theta \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \right) \Big|_{r=r_o} = \frac{1}{r_o^2} \left[2r_o \sqrt{1 - \frac{2M}{r_o}} + \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_o}}} \right]. \quad (2.63)$$

El factor de volumen queda

$$d\tau d\theta d\phi \sqrt{h} = d\tau d\theta d\phi \sqrt{1 - \frac{2M}{r_o}} r_o^2 \sin \theta, \quad (2.64)$$

y como K no depende de ninguna de las variables de integración, la fea pero simple integral resulta

$$\int_{\partial M} \sqrt{h} K = \int_0^\beta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\tau d\theta d\phi \sin \theta \frac{r_o^2}{r_o^2} \sqrt{1 - \frac{2M}{r_o}} \left[2r_o \sqrt{1 - \frac{2M}{r_o}} + \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_o}}} \right] \quad (2.65)$$

$$= \beta (8\pi r_o - 12\pi M). \quad (2.66)$$

Este resultado diverge para $r_o \rightarrow \infty$, pero el contratérmino C^5 modifica esto, al corresponder al término de borde equivalente para el caso en que tomamos ∂M como borde de un espacio plano ∂M_o (el cilindro al considerar τ periódico en β), por lo que

$$-8\pi C = \int_{\partial M_o} \sqrt{h_o} K_o = \beta \left(8\pi r_o - 8\pi M + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_o}\right) \right), \quad (2.67)$$

y con lo cual

$$\hat{I}[g] = 4\pi M^2 = \frac{\beta^2}{16\pi} = -\log Z(\beta). \quad (2.68)$$

Para calcular la entropía utilizamos entonces la función de partición como es usual en cálculos termodinámicos, y recordando que el área del horizonte de eventos es $\text{Area}_{\text{horizonte}} = 4\pi r_{\text{horizonte}}^2 = 16\pi M^2$, se obtiene que

$$S_{\text{thermal}} = (1 - \beta\partial_\beta) \log Z = 4\pi M^2, \quad (2.69)$$

reobteniendo así la entropía de Bekenstein-Hawking

$$S_{\text{BH}} = \frac{\text{Area}}{4}. \quad (2.70)$$

2.5. Entropía generalizada

A partir de la correspondencia AdS/CFT descubierta por Maldacena en 1997, es posible estudiar geoméricamente la entropía de entrelazamiento en aquellas teorías de campos conformes que tienen un dual holográfico. El método que permite calcular dicha entropía fue propuesto inicialmente por Ryu y Takayanagi [2], inspirándose en la fórmula de Bekenstein-Hawking para la entropía de agujeros negros, la cual va como el área de la superficie del horizonte de eventos.

Supongamos una teoría de campos conformes viviendo en una geometría de fondo d -dimensional \mathcal{B}_d . Dada una superficie de Cauchy $\Sigma \subset \mathcal{B}_d$, la hipersuperficie de entrelazamiento $\partial\mathcal{A}$ será de codimensión 2 y $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c = \Sigma$.

⁵Notar que luego de hacer el cálculo con la definición (2.56) debemos multiplicar por -1 al analizar la acción Euclídea \hat{I}

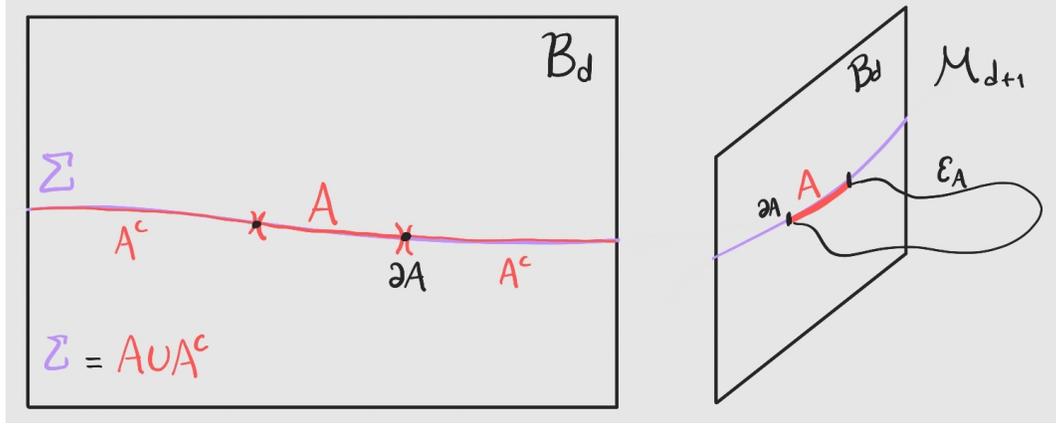


Figura 2.3: A la izquierda el diagrama del espacio \mathcal{B}_d y la superficie de entrelazamiento \mathcal{A} . En este dibujo, $\partial\mathcal{A}$ es una curva 0-dimensional. A la derecha, se muestra \mathcal{B}_d como borde del espacio \mathcal{M}_{d+1} y la curva de codimensión 2, que en este dibujo es unidimensional.

La correspondencia relaciona los grados de libertad que habitan en \mathcal{B}_d con aquellos que determinan la dinámica gravitatoria en un espacio $(d + 1)$ -dimensional, proponiendo que la CFT vive en el borde de dicho espacio \mathcal{M}_{d+1} local y asintóticamente AdS. Cuando el sistema es independiente del tiempo, o simétrico ante reflexiones temporales, se propone que

$$S_{\mathcal{A}} = \min_X \frac{\text{Area}(\varepsilon_{\mathcal{A}})}{4G_N^{d+1}}, \quad X = \varepsilon_{\mathcal{A}} : \begin{cases} \partial\varepsilon_{\mathcal{A}} \equiv \varepsilon_{\mathcal{A}}|_{\partial\mathcal{M}} = \partial\mathcal{A} \\ \exists \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{M} : \partial\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \varepsilon_{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A} \end{cases}, \quad (2.71)$$

donde $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ es una superficie extremal espacio-temporal de codimensión 2 perteneciente a \mathcal{M}_{d+1} , y $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ es el volumen que tiene como borde $\varepsilon_{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}$. Adicionalmente, $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ debe pertenecer al grupo de homotopía de \mathcal{A} , es decir, no deben haber singularidades en el volumen $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Del conjunto de superficies que cumplan estas condiciones, debe escogerse aquella que tenga área mínima.

Esta fórmula para la entropía de entrelazamiento fue inspiración de numerosos trabajos [3, 26, 27], y a lo largo de los años, la misma fue modificada generando propuestas alternativas. Las mismas involucran correcciones a orden $1/G_N$, que tienen origen en la consideración de aspectos cuánticos de la teoría, y por otro lado, contribuciones a la entropía debido a la aparición de *islas* en la región gravitatoria. Estas islas son superficies \mathcal{I} que forman parte de la superficie de codimensión 1 notada con $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ (y tiene como borde a X), resultando en una superficie total que no necesariamente es conexa. La superficie total lleva el nombre de *Quantum Surface* (o Superficie Cuántica) y es tal que extrema la entropía de Ryu-Takayanagi

pero corregida por la entropía de entrelazamiento de los campos en $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, en el interior de \mathcal{M}_{d+1} . Es posible que existan varias superficies cuánticas, y debido a esto, al final del cálculo, debe escogerse aquella que minimiza la entropía total. La fórmula es

$$S_{\mathcal{A}} = \min_X \left\{ \text{ext}_X \left[\frac{\text{Area}(\varepsilon_{\mathcal{A}})}{4G_N^{d+1}} + S_{\text{matter}}(\mathcal{I} \cup \mathcal{R}_{\mathcal{A}}) \right] \right\} \quad (2.72)$$

Capítulo 3

Entropía generalizada a partir de la acción replicada

Los autores de [9] muestran que la fórmula para la entropía generalizada puede derivarse por medio de la integral de caminos gravitatoria y el truco de réplicas, siguiendo de cerca aquel procedimiento que demuestra dicha fórmula en el contexto holográfico.

De forma general, puede considerarse una CFT definida sobre una variedad que conste de dos regiones distinguidas, una región plana y una región con gravedad. Luego, consideramos la entropía de entrelazamiento para una superficie \mathcal{R} que habite en la región no gravitatoria (ver figura [3.1]), y como es habitual en QFT, asumimos que se le puede asociar una matriz densidad $\rho_{\mathcal{R}}$ y que la misma puede expresarse en términos de una integral de caminos.

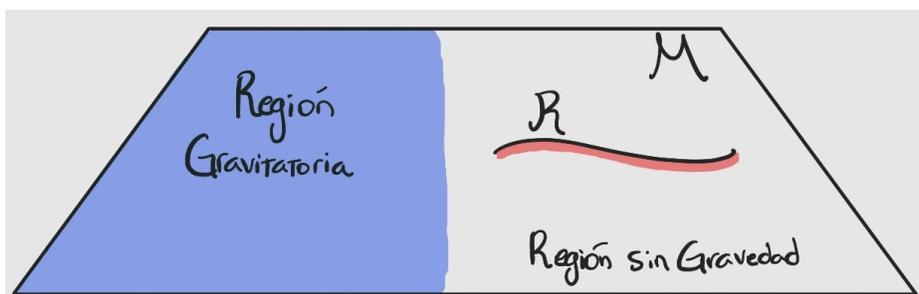


Figura 3.1: Diagrama de la variedad \mathcal{M} a ser replicada, con regiones gravitatorias y no gravitatorias. La región de entrelazamiento es \mathcal{R} .

Al resolver esta entropía utilizando el truco de réplicas debemos buscar la función de partición Z_n sobre una variedad replicada $\widetilde{\mathcal{M}}_n$, la cual consiste de una integral de caminos

gravitatoria, para así poder computar

$$S(\mathcal{R}) = S[\rho_{\mathcal{R}}] = -\lim_{n \rightarrow 1} \partial_n (\log(Z_n) - n \log(Z)) = -\partial_n \left(\frac{\log Z_n}{n} \right) \Big|_{n=1}. \quad (3.1)$$

Consideramos n copias de la configuración mencionada e identificamos los bordes de \mathcal{R} en cada una de ellas de forma cíclica. En la región sin gravedad la geometría queda completamente determinada, pues el procedimiento de réplicas no modifica esta última. Sin embargo, el procedimiento no prescribe una geometría particular que pueda conectar el *bulk* de cada una de las copias, pues existen distintas configuraciones geométricas compatibles con el procedimiento de réplica asociado a la región sin gravedad. Luego, definimos la función de partición como la integral de camino gravitatoria, en la cual debemos considerar todas aquellas soluciones (variedades) que cumplan que en el borde, coincidan con el borde de la región sin gravedad replicada. De esta forma, sumamos sobre todas aquellas geometrías (y topologías) $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ que logren completar el procedimiento de réplica. Si consideramos la presencia de un campo dilatónico¹ ϕ y campos de materia X , la función de partición en $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ es

$$Z_n = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\phi \mathcal{D}X e^{-I_{\text{total}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n; g, \phi, X]} \quad (3.2)$$

$$= \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\phi \mathcal{D}X e^{-(I_{\text{grav}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n; g, \phi] + I_{\text{mat}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n; g, X])} \quad (3.3)$$

$$= \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\phi e^{-I_{\text{grav}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n; g, \phi]} Z_{\text{mat}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n; g] \quad (3.4)$$

$$= \sum_{i, \text{saddles}} e^{-(I_{\text{grav}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n; g_i, \phi_i] - \log Z_{\text{mat}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n; g_i])}, \quad (3.5)$$

donde en la última igualdad hemos utilizamos la aproximación de puntos estacionarios o *saddle points* indexados, es decir, sumamos sobre todas aquellas geometrías que solucionan las ecuaciones de movimiento con las condiciones de contorno requeridas. Las distintas variedades $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ que resultan del replicado, pueden presentar o no una denominada *simetría de réplica*, es decir, la invariancia de la variedad frente a la acción de un grupo de réplica \mathbb{Z}_n , el cual actúa permutando cíclicamente cada una de las copias involucradas. Las geometrías *on-shell* (aquellas que son soluciones a las ecuaciones de movimiento) presentan dicha simetría debido a que las ecuaciones de Einstein extienden aquella presente en la condición de contorno geométrica (la región no gravitatoria replicada), y son estas mismas, las utilizadas en la aproximación de puntos estacionarios. Cuando $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ posee simetría de réplica, es

¹En esta instancia introducimos un campo dilatónico sin mucho detalle pues utilizaremos estos resultados en Capítulos posteriores, en los cuales dicho campo será relevante.

conveniente trabajar en el orbifold $\mathcal{M}_n = \widetilde{\mathcal{M}}_n/\mathbb{Z}_n$. Luego de cocientar por la relación de equivalencia definida por la acción de \mathbb{Z}_n , aparecen singularidades cónicas² con ángulo de apertura $\frac{2\pi}{n}$ en los puntos fijos de la acción de grupo. Destacamos la importancia de que la posición de estos puntos fijos depende de cuál sea la configuración geométrica que estemos considerando, y son determinadas (en el caso de las geometrías *on-shell*) por las ecuaciones de movimiento (y de esta forma no se rompe la invariancia ante difeomorfismos de la teoría). Para inducir estas singularidades cónicas que no estaban presentes en $\widetilde{\mathcal{M}}_n$, debemos agregar (sobre la posición de las singularidades) unas denominadas “branas cósmicas” de tensión (o energía)

$$T_n = \frac{1}{4G_N} \left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad (3.6)$$

de forma tal que la relación entre las acciones en cada espacio es

$$\frac{1}{n} I_{\text{grav}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n] = I_{\text{grav}}[\mathcal{M}_n] + T_n \int_{\Sigma_{d-2}} \sqrt{\gamma}, \quad (3.7)$$

donde γ es el determinante de la métrica inducida sobre la brana cósmica Σ_{d-2} (superficies de codimensión 2). De esta forma, los términos singulares del lado derecho de (3.7) se cancelan como era requerido, pues $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ es suave en los puntos fijos. La materia presente en la variedad replicada poseía una libre dinámica entre las distintas copias a través de la región \mathcal{R} (la conexión directa entre las copias). Esta dinámica puede ser descripta equivalentemente al considerar n campos de materia en \mathcal{M}_n y la inserción de *Twist Operators*, tanto en los bordes de \mathcal{R} como en los puntos fijos de la acción del grupo de réplica (donde tenemos las singularidades cónicas y las branas).

Para computar la entropía, consideramos la extensión analítica de la acción en $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ a través de la acción en \mathcal{M}_n , expandiendo $I_{\text{total}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n]$ alrededor de $n \sim 1$ y utilizando la ecuación (3.1). Para para $n = 1$, $\mathcal{M}_1 = \widetilde{\mathcal{M}}_1 = \mathcal{M}$, y por lo tanto

$$I_{\text{total}}[\widetilde{\mathcal{M}}_1] = I_{\text{grav}}[\widetilde{\mathcal{M}}_1] - \log Z_{\text{mat}}[\widetilde{\mathcal{M}}_1] = I_{\text{total}}[\mathcal{M}]. \quad (3.8)$$

²Son puntos para el caso 2D, pero superficies de codimensión 2 (singulares) en la situación más general

Para $n \sim 1$ tenemos que

$$I_{\text{total}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n] = I_{\text{grav}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n] - \log Z_{\text{mat}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n] \quad (3.9)$$

$$= n \left(I_{\text{grav}}[\mathcal{M}_n] + T_n \int_{\Sigma_{d-2}} \sqrt{\gamma} \right) - (1-n) \underbrace{\frac{1}{1-n} \log \frac{Z_{\text{mat}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n]}{Z_{\text{mat}}[\mathcal{M}]^n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow 1} S_{\text{mat}}} - n \log Z_{\text{mat}}[\mathcal{M}] \quad (3.10)$$

$$= n (I_{\text{grav}}[\mathcal{M}_n] - \log Z_{\text{mat}}[\mathcal{M}]) + n T_n \int_{\Sigma_{d-2}} \sqrt{\gamma} - (1-n) S_{\text{mat}}[\mathcal{R}, \mathcal{M}] \quad (3.11)$$

$$= n (I_{\text{total}}[\mathcal{M}] + I_{\text{grav}}[\mathcal{M}_n] - I_{\text{grav}}[\mathcal{M}]) + (n-1) \frac{\int_{\Sigma_{d-2}} \sqrt{\gamma}}{4G_N} + (n-1) S_{\text{mat}}[\mathcal{R}, \mathcal{M}] \quad (3.12)$$

$$= n I_{\text{total}}[\mathcal{M}] + (n-1) \left[\sum_{\alpha} \frac{\text{Area}(w_{\alpha}^i)}{4G_N} + S_{\text{mat}}[\mathcal{R}, \mathcal{M}] \right] + \mathcal{O}(n-1)^2 \quad (3.13)$$

$$= (n-1) S_{\text{gen}}(w^i) + n I_{\text{total}}[\mathcal{M}] + \mathcal{O}(n-1)^2. \quad (3.14)$$

En (3.11) utilizamos la fórmula para la entropía de entrelazamiento para una región en \mathcal{R} . En (3.13), primero usamos que $\delta I_{\text{grav}} = I_{\text{grav}}[\mathcal{M}_n] - I_{\text{grav}}[\mathcal{M}] = 0$, pues pequeñas desviaciones de la geometría *on-shell* se anulan (teniendo en cuenta que las singularidades cónicas tienen defecto casi nulo para $n \sim 1$ y que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$). Luego, usamos que tanto el término integral sobre Σ_{d-2} y S_{mat} ya son de orden $(n-1)$, y por lo tanto, pueden computarse sobre la geometría base \mathcal{M} . En la misma ecuación, notamos con w_{α}^i a la posición de las singularidades, donde i etiqueta el punto estacionario (geometría *saddle*) que estamos considerando, y α corre sobre el número total de singularidades cónicas en dicho *saddle*. Luego, recordando la integral de caminos gravitatoria expandida alrededor de *saddle points*, tenemos que

$$\frac{1}{n} \log Z_n = \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i, \text{saddles}} e^{-I_{\text{total}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n; g_i, \phi_i]} \right) \quad (3.15)$$

$$= \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i, \text{saddles}} e^{-(n-1) S_{\text{gen}}(w^i) - n I_{\text{total}}[\mathcal{M}]} \right) \quad (3.16)$$

$$= \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i, \text{saddles}} e^{-(n-1) S_{\text{gen}}(w^i)} \right) - I_{\text{total}}[\mathcal{M}] \quad (3.17)$$

$$= \frac{1-n}{n} S_{\text{gen}}(w) - I_{\text{total}}[\mathcal{M}] \quad (3.18)$$

$$= (1-n) S_{\text{gen}}(w) - I_{\text{total}}[\mathcal{M}], \quad (3.19)$$

donde

$$S_{\text{gen}}(w) = \min_{i, \text{saddles}} S_{\text{gen}}(w^i), \quad (3.20)$$

(lo cual nos permite aproximar el logaritmo) y entonces, obtenemos que la entropía es

$$S(\mathcal{R}) = -\partial_n \left(\frac{\log Z_n}{n} \right) \Big|_{n=1} = S_{\text{gen}}(w). \quad (3.21)$$

Luego, la relevancia de las distintas clases de homología en la minimización de la entropía generalizada, son ahora interpretadas como el relevamiento de minimalidad entre puntos estacionarios en la integral de camino gravitatoria del truco de réplicas, pues las posiciones de las singularidades cónicas presentes en el orbifold asociado a cada punto estacionario, son los bordes de las distintas Superficies Cuánticas Extremales.

Capítulo 4

Replica Wormholes

Al derivar la entropía generalizada a partir del truco de réplicas fue necesario considerar los *saddle points* (los *Replica Wormholes*) de la integral de caminos gravitatoria en una variedad replicada para una teoría arbitraria. En este Capítulo analizaremos en detalle la entropía de entrelazamiento para 1 y 2 intervalos en una teoría de campos conforme sobre el modelo de gravedad JT.

4.1. Resumen de gravedad JT

La gravedad Jackiw–Teitelboim (JT) [13, 14] es un modelo de gravedad cuántica resoluble en dos dimensiones. A pesar de su simplicidad, este modelo de juguete es lo suficientemente complejo como para analizar relaciones entre física de agujeros negros y holografía. Otro de sus aspectos interesantes, es que describe la física en el límite de *near horizon* de agujeros negros casi extremales en más dimensiones (como el caso de agujeros negros cargados en 4 dimensiones en la teoría de Einstein-Maxwell). Para una revisión detallada de esta teoría referimos a [28, 29, 30].

Si una variedad diferenciable \mathcal{M} tiene bordes, para que se satisfaga el principio variacional de la acción de Einstein-Hilbert, es necesario agregar un término conocido como el de Gibbons-Hawking-York. De modo que la acción (tomando $4G_N = 1$) es

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^{D-1} x \sqrt{-\gamma} K, \quad (4.1)$$

donde K y $\gamma_{\mu\nu}$ son la traza de la curvatura extrínseca y la métrica inducida sobre $\partial\mathcal{M}$ respectivamente. Una teoría gravitatoria de tipo Einstein en 2 dimensiones no tiene dinámica (pues $R_{\mu\nu} = 0$ trivialmente) y la acción viene caracterizada por la topología del espacio. Por

el teorema de Gauss-Bonnet, en 2 dimensiones la acción es

$$I_{\text{top}} = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{\mathcal{M}_2} R + \int_{\partial\mathcal{M}_2} 2K \right) = \chi = 2 - 2g - b, \quad (4.2)$$

con χ la característica de Euler, g el *genus* de la superficie y b el número de bordes que tenga. El modelo de gravedad JT consiste de prender un campo dilatónico $\Phi(x) = \phi_o + \phi(x)$ y acoplarlo a la gravedad de forma particular

$$-I_{\text{JT}} = \phi_o \chi + \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\mathcal{M}_2} \phi(R + 2) + 2\phi_b \int_{\partial\mathcal{M}_2} (K - 1) \right], \quad (4.3)$$

donde ϕ_o es un valor constante tal que $\phi \ll \phi_o$ y $\phi_b = \phi|_{\partial\mathcal{M}_2}$. En 2 dimensiones, las superficies a las que nos interesa calcular el área son puntos, y el área de un punto x de la variedad viene determinado por el valor del campo dilatónico

$$\frac{\text{Area}(x)}{4G_N} = \phi_o \chi + \phi(x). \quad (4.4)$$

En el Apéndice A, deducimos las ecuaciones de movimiento en detalle. Notamos que \mathcal{M}_2 es localmente AdS_2 debido a la ecuación de movimiento asociada a ϕ

$$R = -2. \quad (4.5)$$

Por otro lado, la ecuación de movimiento para el dilatón es

$$\nabla^\mu \nabla^\nu \phi - g^{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi + g^{\mu\nu} \phi = 0, \quad (4.6)$$

y las condiciones de contorno para las ecuaciones son

$$g_{uu}|_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{\epsilon^2}, \quad \phi|_{\partial\mathcal{M}} = \phi_b = \frac{\phi_r}{\epsilon}, \quad (4.7)$$

pues queremos soluciones que sean asintóticamente AdS_2 . Denotamos por u al tiempo propio en el borde, ϵ un regulador en las cercanías de $\partial\mathcal{M}$ y ϕ_r el valor renormalizado del campo dilatónico en $\partial\mathcal{M}$.

Por último, al considerar materia sobre la geometría y notando con X los campos conformes asociados, sumamos la acción correspondiente

$$I_{\text{JT+CFT}}[g_{\mu\nu}, \phi, X] = I_{\text{JT}}[g_{\mu\nu}, \phi] + I_{\text{CFT}}[g_{\mu\nu}, X] = I_{\text{total}}, \quad (4.8)$$

y del lado derecho de (4.6), se agrega el tensor de energía impulso asociado $T^{\mu\nu}$.

Puede escribirse la métrica en este espacio utilizando el gauge conforme

$$ds^2 = e^{2\rho} dw d\bar{w}, \quad (4.9)$$

y en (4.5), encontramos la ecuación de Liouville

$$-4\partial_w \partial_{\bar{w}} \rho + e^{2\rho} = 0, \quad (4.10)$$

cuyas soluciones se escriben de la forma

$$e^{2\rho} = 4 \frac{\partial_w W(w) \partial_{\bar{w}} \bar{W}(\bar{w})}{(W(w) + \bar{W}(\bar{w}))^2}, \quad (4.11)$$

siendo W y \bar{W} funciones “quirales” que dependen de w y \bar{w} respectivamente. Las soluciones que podamos encontrar utilizando diferentes coordenadas para la métrica corresponden a las expresiones de los distintos “parches” del espacio globalmente Anti de Sitter (ver Figura [4.1]), a los cuales llegamos realizando difeomorfismos que preserven el gauge conforme, pues

$$ds^2 = e^{2\rho} dw d\bar{w} = 4 \frac{\partial_w W(w) \partial_{\bar{w}} \bar{W}(\bar{w})}{(W(w) + \bar{W}(\bar{w}))^2} dw d\bar{w} \quad (4.12)$$

$$= 4 \frac{dW d\bar{W}}{(W + \bar{W})^2}. \quad (4.13)$$

Por ejemplo, se puede llegar al parche de Poincaré por medio del difeomorfismo $W(w) = w = \sigma + i\tau$, el cual parametriza con coordenadas $\{-i\tau, \sigma\}$ únicamente las regiones de la variedad que se encuentren causalmente conectadas con el origen de coordenadas.

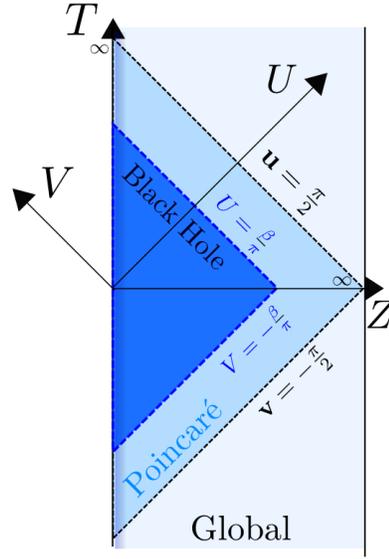


Figura 4.1: Diagrama de algunos de los parches locales que existen sobre el espacio globalmente AdS_2 . Figura adaptada de [30]

Otro aspecto relevante de la gravedad JT, es que la dinámica de los grados de libertad gravitatorios de la teoría son equivalentes a la dinámica de un grado de libertad en el borde. Esto se ve reflejado en que la acción puede llevarse a una de tipo Schwarziana, definiendo una curva en regiones cercanas al borde del disco hiperbólico y calculando la curvatura extrínseca sobre dicha curva, a la vez que realizar un desarrollo en potencias de ϵ , el parámetro que da cuenta de la cercanía al borde. Si a la coordenada del gauge conforme la reescribimos como $w = e^{-\gamma} e^{i\theta}$, entonces la curva puede escribirse como (ver Figura [4.2])

$$\Gamma = (\theta(\tau), \epsilon\theta'(\tau)) \quad \tau \in [0, \beta]. \quad (4.14)$$

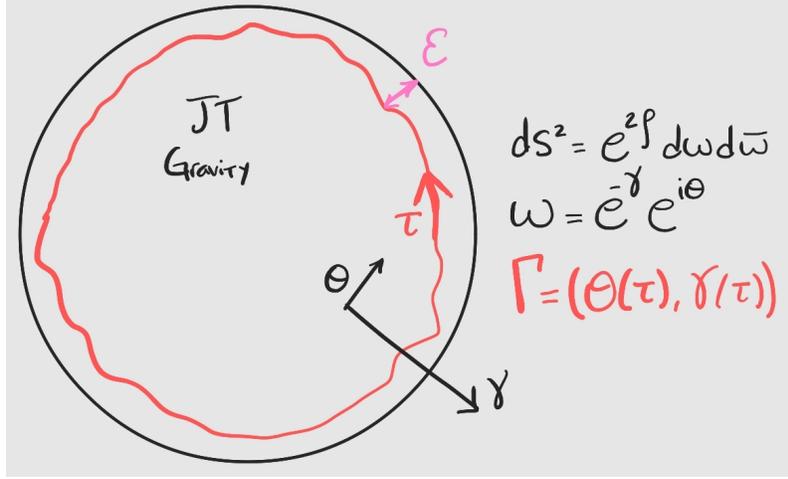


Figura 4.2: Diagrama del disco hiperbólico con gravedad JT y la curva Γ a la cual se le asocia el grado de libertad en el borde de la teoría.

La relación entre el γ de la curva con θ se deduce de imponer las condiciones de contorno que debe cumplir la métrica inducida sobre Γ , si es que la curva se encuentra cerca del borde del disco hiperbólico. De esta forma, calculando la curvatura extrínseca y reemplazando todo en la acción de JT, se obtiene

$$-I_{\text{total}} \sim \int d\tau \{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} + \log Z_{\text{CFT}}, \quad (4.15)$$

siendo la derivada Schwarziana definida como

$$\{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2. \quad (4.16)$$

Este resultado muestra que existen dos descripciones equivalentes de la dinámica de la gravedad JT. Una descripción efectiva dos dimensional que involucra aspectos gravitatorios y una descripción equivalente dependiente de un solo grado de libertad (o unidimensional) en el borde.

Una modificación usual, y particularmente útil para este trabajo, es introducir singularidades cónicas en el interior del disco hiperbólico. Esto se conoce comúnmente como teorías de JT deformadas [31, 32, 33]. Resulta que si consideramos singularidades cónicas en el problema, la ecuación Schwarziana se modifica de la siguiente forma

$$\boxed{-I_{\text{total}} = \phi\chi + \frac{\phi_r}{2\pi} \int d\tau [\{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} + U(\theta)\theta'^2] + \log Z_{\text{CFT}}, \quad (4.17)}$$

donde $U(\theta)$ es una función dependiente de las posiciones de las singularidades cónicas y tiende a cero cuando el déficit de las singularidades tiende a cero. Finalmente la ecuación de movimiento es

$$\frac{\phi_r}{2\pi} \partial_\tau [\{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} + U(\theta)\theta'^2] = i(T_{yy} - T_{\bar{y}\bar{y}}), \quad (4.18)$$

donde el tensor de energía momento T_{yy} se encuentra evaluado sobre el borde del disco hiperbólico. En el Apéndice B deducimos estas ecuaciones en detalle. Es importante remarcar que (4.18) es un resultado independiente de los demás ingredientes que iremos introduciendo más adelante.

4.1.1 Solución en vacío: Agujero Negro Eterno

Primero consideremos como solución la métrica Anti de Sitter en coordenadas de Poincaré

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + d\sigma^2}{\sigma^2} = -4 \frac{dudv}{(u-v)^2}, \quad (4.19)$$

con $\sigma \in [0, +\infty)$, t el tiempo Lorentziano y $\{u, v\}$ las coordenadas nulas asociadas. A su vez, si realizamos la rotación de Wick cambiando $t = -i\tau$ y tomando $Y = \sigma + i\tau$, $\sigma \in [0, +\infty)$ $\tau \in [0, \beta]$, obtenemos el espacio hiperbólico 2-dimensional \mathbb{H}_2

$$ds_{\mathbb{H}_2}^2 = \frac{d\tau^2 + d\sigma^2}{\sigma^2} = 4 \frac{dY d\bar{Y}}{(Y + \bar{Y})^2}. \quad (4.20)$$

Como ya mencionamos, las soluciones a las ecuaciones de movimiento para gravedad JT corresponden a los distintos difeomorfismos con los que se pueda actuar sobre la variedad. Al nivel de la métrica, esto se ve reflejado únicamente como un cambio de coordenadas, pero no debemos olvidar que el campo dilatónico también cambia. La métrica para el agujero negro corresponde a realizar el difeomorfismo

$$Y(y) = \frac{\beta}{\pi} \tanh\left(\frac{\pi}{\beta}y\right) \quad \bar{Y}(\bar{y}) = \frac{\beta}{\pi} \tanh\left(\frac{\pi}{\beta}\bar{y}\right), \quad (4.21)$$

obteniéndose la siguiente métrica y campo dilatónico

$$ds^2 = \frac{4\pi^2}{\beta^2} \frac{dyd\bar{y}}{\sinh^2 \frac{\pi}{\beta}(y + \bar{y})} \quad \phi = -\frac{2\pi\phi_r}{\beta} \frac{1}{\tanh\left(\frac{\pi}{\beta}(y + \bar{y})\right)}. \quad (4.22)$$

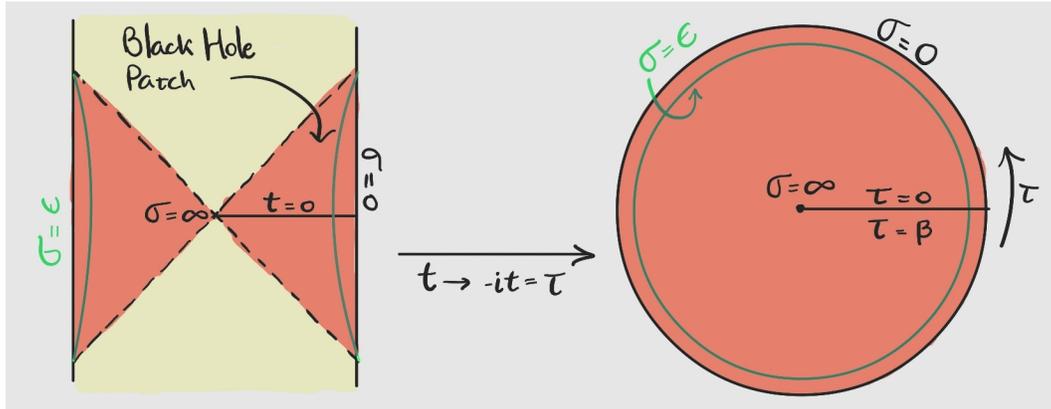


Figura 4.3: A izquierda, el diagrama de Penrose de la solución de agujero negro en AdS_2 . A derecha, la continuación analítica volviendo periódico en β al tiempo euclídeo.

En la Figura [4.3] se muestra dicho espacio. Este parche puede ser extendido en el mismo sentido que las coordenadas de Kruskal-Szekeres extienden las coordenadas clásicas de un agujero negro de Schwarzschild, y como resultado, se obtiene un agujero negro extendido (o también llamado el parche de Rindler). En líneas punteadas tenemos el horizonte de eventos y a $t = 0$ las curvas $\sigma = cte$, que corresponden a una foliación vertical contenida en la región anaranjada, tienen la normal en dirección al horizonte de eventos en el punto $\sigma = +\infty$. En dicha figura, también se muestra la continuación analítica yendo al tiempo euclídeo periódico en β necesario para evitar defectos cónicos. Notamos que esta continuación analítica es el disco hiperbólico y la región interior al horizonte de eventos (pintada de color claro) desaparece.

Utilizamos este modelo de juguete para estudiar la entropía del agujero negro y su relación con la Paradoja de la Pérdida de la Información. Sin embargo la termodinámica, aunque lo suficientemente similar en los aspectos cruciales para estudiarla en esta teoría, difiere de aquella propia de un agujero negro de Schwarzschild en espacio asintóticamente plano. La diferencia fundamental yace en el tiempo que tarda la luz en recorrer todo el espacio. Un observador situado en el interior de AdS mide un tiempo finito desde que prende una linterna hasta que ve su reflejo llegar desde el borde de AdS. Es por esto que al emitir radiación de Hawking, si el agujero negro es lo suficientemente grande, el mismo podría termalizar con su propia radiación. Si se pudiese impedir que el agujero negro llegue a estos estados de equilibrio, la variedad de procesos dinámicos permitidos sería mucho más rica. Es por esto, que se decide acoplar espacios planos sobre el denominado borde físico situado en $\sigma = \epsilon \ll 1$, e identificando el tiempo que recorre dicha curva con el tiempo propio de la región plana, como

se muestra en la Figura [4.4]. Luego, si se imponen “condiciones de contorno transparentes” para la CFT en la juntura, la radiación del agujero negro es drenada hacia la región plana. De esta forma, el sistema total esta compuesto por una región gravitatoria interior “in” (el disco hiperbólico en el que vive la teoría de gravedad JT), y una región exterior plana o no gravitatoria “out”

$$ds_{\text{in}}^2 = \frac{4\pi^2}{\beta^2} \frac{dyd\bar{y}}{\sinh^2 \frac{\pi}{\beta}(y + \bar{y})} \quad ds_{\text{out}}^2 = \frac{dyd\bar{y}}{\epsilon^2} \quad (4.23)$$

$$y = \sigma + i\tau \quad \bar{y} = \sigma - i\tau \quad \tau \sim \tau + \beta,$$

las cuales pueden ser reescritas en términos de una coordenada holomorfa que cubre todo el plano complejo $w = e^{\frac{2\pi}{\beta}y}$, siendo

$$ds_{\text{in}}^2 = \frac{4dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2} \quad ds_{\text{out}}^2 = \frac{\beta^2}{4\pi^2 \epsilon^2} \frac{dw d\bar{w}}{|w|^2}. \quad (4.24)$$

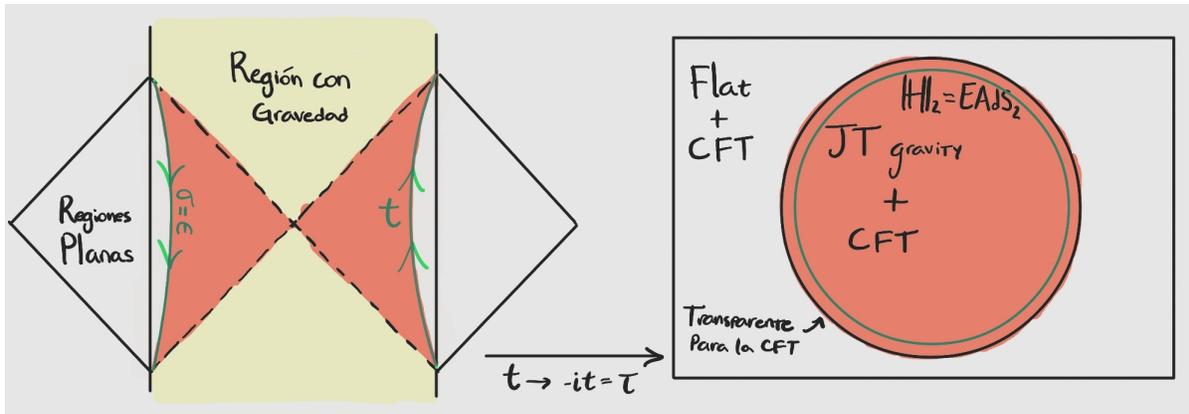


Figura 4.4: Pegado de regiones planas por fuera de la región gravitatoria. En todo el espacio existe la teoría de campos conforme y sobre el borde de la región gravitatoria condiciones de contorno transparentes para la CFT.

Notemos que hemos utilizado la misma coordenada holomorfa w, \bar{w} para ambas regiones. Esto es un caso particular en el que un problema conocido como el *Welding Problem* es trivial. La coordenada w en el borde del disco hiperbólico se identifica con la coordenada que parametriza el disco exterior del plano complejo. Podemos utilizar $w = e^{\frac{2\pi}{\beta}y} = e^{\frac{2\pi}{\beta}\sigma} e^{i\frac{2\pi}{\beta}\tau}$ tanto en la región interior como exterior, aun si la curvatura R es discontinua en la juntura (pasa de ser -2 a 0).

En un problema general, podemos definir $w = e^{-\gamma} e^{i\theta}$ como la coordenada que parametriza la región interior con $|w| \leq 1$ y $v = e^y = e^\sigma e^{i\tau}$ como la coordenada que parametriza la

región exterior con $|v| \geq 1$ ¹. Entonces, dada una identificación no trivial $\theta(\tau)$, el *Welding Problem* consiste en encontrar dos mapas holomorfos $\{G(w), F(v)\}$ que logren definirnos una coordenada holomorfa z sobre todo el plano complejo, como se muestra en la Figura [4.5]. Es decir, la solución al problema son G y F tal que

$$z = G(w) \quad \text{para } |w| \leq 1 \quad (4.25)$$

$$z = F(v) \quad \text{para } |v| \geq 1 \quad (4.26)$$

$$G(e^{i\theta(\tau)}) = F(e^{i\tau}) \quad \text{para } |w| = |v| = 1. \quad (4.27)$$

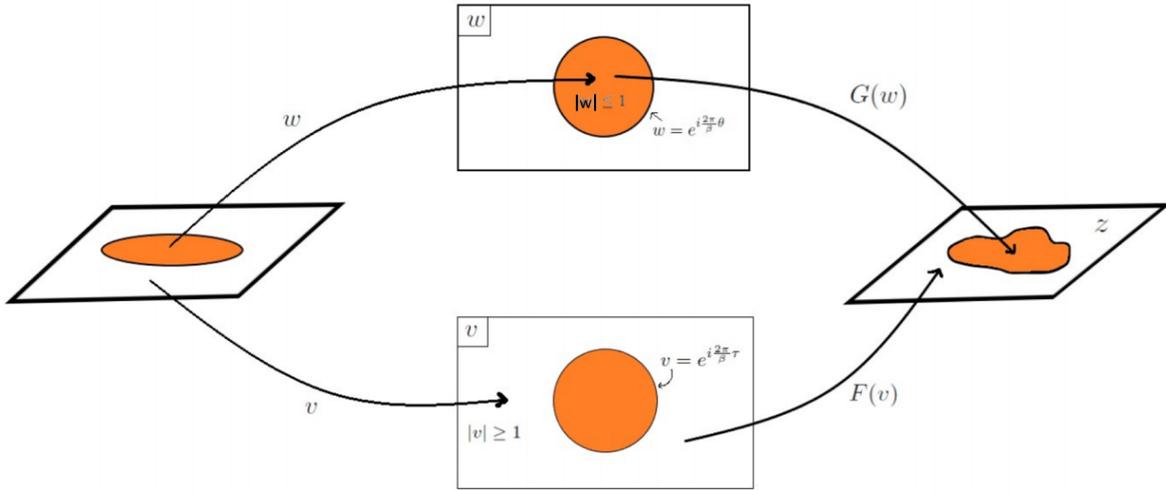


Figura 4.5: El *Welding Problem* involucra dos regiones, una interior parametrizada por $|w| \leq 1$ y una exterior parametrizada por $|v| \geq 1$ que se pegan en el borde de cada una $|w| = 1$, $|v| = 1$. El problema consiste en encontrar $G(w), F(v)$ holomorfas que definan una coordenada z sobre todo el plano complejo. Figura adaptada de [34].

Las funciones G y F no son necesariamente holomorfas fuera de las regiones que parametrizan w y v respectivamente. En el ejemplo trivial que analizamos, $\theta(\tau) = \tau$ y los círculos unitarios son el mismo, teniendo que $z = G(w) = w = F(v) = v$. Intuitivamente, podemos entender que si el pegado de los bordes no es trivial, es necesario transformar las regiones para juntar suavemente dichas curvas, formando un nuevo espacio parametrizado por z . Por

¹Siendo precisos, dado que θ y τ van de $[0, \beta]$, en la definición de w y v , en las exponenciales imaginarias tenemos un factor extra $\frac{2\pi}{\beta}$ que son obviados a cambio de claridad en la notación, y puede reobtenerse la generalidad al reescalar $\phi_r \rightarrow \frac{2\pi}{\beta}\phi_r$ pues ésta es la única escala dimensional del problema

ejemplo, podemos pensar en querer juntar dos reglas de distintas longitudes y pedir que ambas empiecen y terminen en el mismo lugar, necesariamente una de las reglas deberá ser estirada o comprimida. Para una revisión más detallada del *Welding Problem* remitimos a [35].

En esta instancia, algo natural es preguntarse la relación entre la no trivialidad del *Welding Problem* y la ecuación de movimiento Schwarziana de la teoría JT. Recordemos que en la derivación de la acción Schwarziana se asume únicamente la existencia del disco hiperbólico, y del lado derecho de la ecuación de movimiento (4.18) tenemos el tensor de energía momento evaluado en el borde del disco $e^{0+i\tau}$. En principio, cuando no tenemos singularidades internas (es decir cuando w es holomorfa), pegar un espacio plano por fuera del disco hiperbólico no repercute en la ecuación de movimiento (que además estaría escrita en términos de una coordenada holomorfa sobre todo el plano complejo). Pero, al introducir singularidades cónicas en el interior del disco hiperbólico, el problema del *Welding Problem* se vuelve no trivial y la función $F(v) = F(v(y))$ se ve involucrada al evaluar el tensor de energía momento sobre la juntura. Finalmente, para obtener la ecuación de movimiento debemos encontrar $T_{yy} - T_{\bar{y}\bar{y}}$ en términos de $F(v)$, lo cual es directo al estar tratando con una CFT.

4.1.2 Estado semiclásico de la CFT

Hemos mencionado que al disco hiperbólico debemos pegarle en el borde un espacio plano y tomar condiciones de contorno transparentes para la CFT que vive en todo el espacio unión, de modo que podamos controlar la dinámica del agujero negro cambiando el estado en el que se encuentre el campo. En particular, estudiaremos las entropías asociadas a distintas regiones cuando el agujero negro se encuentra en equilibrio térmico a una temperatura $T = \frac{1}{\beta}$. Si la CFT en la región sin gravedad se encontrase en el estado de vacío, la radiación del agujero negro sería drenada hacia la región plana y por lo tanto su temperatura sería dependiente del tiempo. Es por esto que la CFT debe estar en el estado cuántico que sostenga la solución de agujero negro en el interior del disco hiperbólico a temperatura constante. El procedimiento para encontrar dicho estado depende fundamentalmente de que el campo en cuestión es invariante conforme, y por lo tanto, las reglas de transformación del tensor de energía momentos $T_{\mu\nu}$ son conocidos y fáciles de manejar.

En física, una transformación conforme en el contexto de teorías CFT, representan una combinación de cambio de coordenadas y una transformación de Weyl (un difeomorfismo entre variedades que cambia la métrica del espacio en un factor global) al mismo tiempo. En teorías de campos conformes en dos dimensiones (1 dimensión compleja), el tensor de

energía momentos se factoriza en sus partes holomorfa T_{yy} y antiholomorfa $T_{\bar{y}\bar{y}}$, y al realizar una transformación de Weyl con factor conforme Ω

$$g \rightarrow \eta$$

$$ds_g^2 = \Omega^{-2} ds_\eta^2, \quad (4.28)$$

el valor de expectación en el vacío de estas componentes cambian de la siguiente forma

$$\langle T_{yy} \rangle_g = \langle T_{yy} \rangle_\eta - \frac{c}{12\pi} \frac{\partial_y^2 \Omega}{\Omega}, \quad (4.29)$$

con c la carga central de la CFT. Si se realiza un cambio de coordenadas

$$y \rightarrow w(y), \quad (4.30)$$

el valor de expectación de las componentes cambian de la siguiente forma

$$\langle T_{yy} \rangle_g = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \langle T_{ww} \rangle_g. \quad (4.31)$$

En conjunto, al realizar una transformación conforme tenemos que

$$y \rightarrow w(y)$$

$$dwd\bar{w} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} dyd\bar{y}$$

$$\Omega^{-2} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}, \quad (4.32)$$

y por lo tanto

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \langle T_{ww} \rangle_{dwd\bar{w}} = \langle T_{yy} \rangle_{dyd\bar{y}} + \frac{c}{24} \{w, y\}. \quad (4.33)$$

El caso de las coordenadas conjugadas se trata de forma análoga.

Al considerar la métrica de agujero negro, tenemos que el factor conforme que relaciona este espacio con aquel plano asociado es

$$ds_{in}^2 = \frac{4\pi^2}{\beta^2} \frac{dyd\bar{y}}{\sinh^2 \frac{\pi}{\beta}(y + \bar{y})} = \Omega^{-2} dyd\bar{y}$$

$$\Omega = \frac{\beta}{2\pi} \sinh \frac{\pi}{\beta}(y + \bar{y}). \quad (4.34)$$

Recordemos que la solución de agujero negro es de vacío, y por lo tanto $\langle T_{yy} \rangle_{\text{AdS}_2} = 0$. Utilizando (4.29), obtenemos que

$$\langle T_{yy} \rangle_{dyd\bar{y}} = \frac{c}{12} \frac{\pi}{\beta^2}. \quad (4.35)$$

Imponer condiciones de contorno transparentes para la CFT a lo largo de la juntura, es imponer que el estado que obtuvimos para la CFT en la región con gravedad dinámica “in”, sea el mismo que el estado de la CFT en la región plana “out”. De modo que para que el agujero negro no cambie su temperatura, la CFT debe encontrarse en un estado térmico en el exterior del disco. De esta forma, ingresa y egresa radiación en la región gravitatoria.

En esta instancia, remarcamos algunas de las ventajas de utilizar el *frame* dado por $w = e^{\frac{2\pi}{\beta}y}$. Recordemos que $y = \sigma + i\tau$ con $\tau \in [0, \beta]$ y $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ por lo que las coordenadas w cubren todo el plano complejo. Por otro lado, en el w -*frame*, la CFT en la región plana se encuentra en un estado de vacío $|0\rangle_w$ y $\langle T_{w\bar{w}} \rangle_{dw d\bar{w}} = 0$.

4.2. Único Intervalo a temperatura finita

En esta sección veremos realizado en un ejemplo concreto la equivalencia entre los métodos para calcular la entropía generalizada discutidos en el Capítulo 3.

Consideramos un intervalo $B = [0, b]$ que contiene el borde de AdS_2 y un punto del espacio plano como se muestra en la Figura [4.6]. Primero veremos como es el resultado utilizando el método de las Superficies Cuánticas Extremales (Ryu-Takayanagi modificado) y luego compararemos con el resultado del método que involucra los *Replica Wormholes* explícitamente en la configuración de agujero negro eterno.

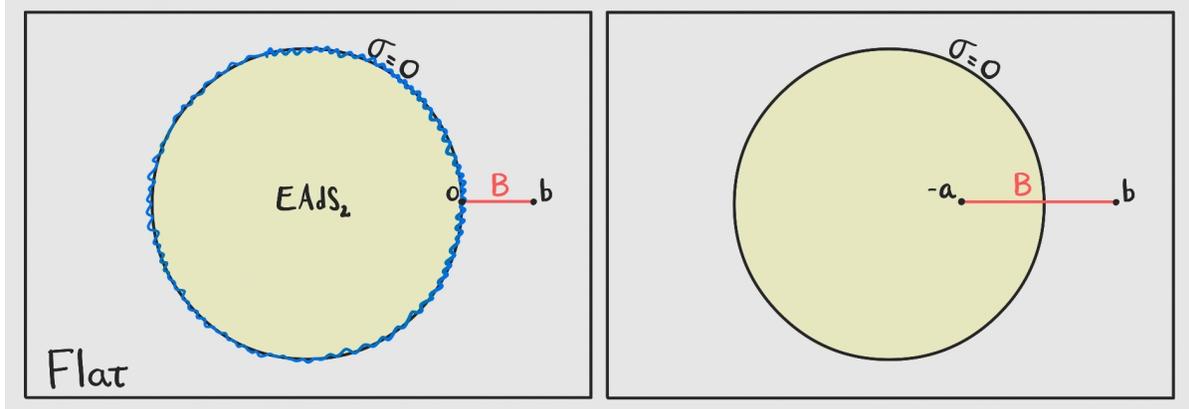


Figura 4.6: A la izquierda el intervalo $B = [0, b]$ en coordenadas y , pero mostrado sobre el plano complejo usando coordenadas w . Marcado en azul, hacemos referencia al grado de libertad cuántico al cual es dual la teoría de gravedad JT. A la derecha, el intervalo extendido al interior del disco hiperbólico hasta $-a$ debido al procedimiento que debe seguirse al utilizar la fórmula de la entropía generalizada.

Debido a que gravedad JT es una teoría que puede ser descrita a partir de un grado de libertad cuántico en el borde del disco hiperbólico (marcado esquemáticamente en azul en la Figura [4.6]), un intervalo que contenga un punto de dicho borde sería suficiente para dar cuenta de la dinámica del agujero negro en el cálculo de la entropía de entrelazamiento. Si por otro lado, decidimos utilizar la descripción efectiva del sistema teniendo en cuenta la existencia de una región gravitatoria, entonces la fórmula que debe ser utilizada es la entropía generalizada. Computar esta última precisa de la extensión del intervalo $[0, b]$ a uno del tipo $[-a, b]$, con $-a$ un punto perteneciente a la región gravitatoria.

4.2.1 Superficies Cuánticas Extremales

Como denotamos $\mathcal{A} = B = [0, b]$ al intervalo de interés, debemos extremar sobre todas las posiciones $-a$ interiores al disco hiperbólico de forma tal que la entropía generalizada sea mínima en el intervalo $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = [-a, b]$, quedando la ecuación (2.72) de la forma

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}(-a)}{4G_N} + S_{\text{CFT}}([-a, b]) \quad (4.36)$$

$$\partial_a S_{\text{gen}} = 0. \quad (4.37)$$

Notemos que $\frac{\text{Area}(-a)}{4G_N} = \phi_o + \phi(-a)$, habiendo considerado que la característica de Euler para el disco es 1. Para el segundo término, utilizaremos la entropía de entrelazamiento de

la CFT siguiendo los resultados de Cardy y Calabrese [19], los cuales hemos desarrollado en (2.42). Si tenemos un intervalo $[\omega_1, \omega_2]$ dado por una coordenada holomorfa ω que cubre el plano complejo (y estando la CFT en el estado de vacío), tenemos que

$$S_{\text{CFT}} = \frac{c}{6} \log \left(\frac{|\omega_1 - \omega_2|^2}{\epsilon_{1,UV} \epsilon_{2,UV} \Omega(\omega_1, \bar{\omega}_1) \Omega(\omega_2, \bar{\omega}_2)} \right), \quad (4.38)$$

con c la carga central de la CFT y $\epsilon_{i,UV}$ los parámetros del *cutoff* usados en los bordes del intervalo, como es común en esta clase de cálculos.

Si tenemos regiones del plano complejo que son conformes a otros espacios (en los cuales el problema fue planteado originalmente), entonces en el cálculo de la entropía, necesitamos los factores conformes Ω que relaciona las métricas luego de la transformación.

Tenemos que $w_1 = e^{\frac{2\pi}{\beta} y_1}$ y $w_2 = e^{\frac{2\pi}{\beta} y_2}$ con $y_1 = -a$ y $y_2 = b$. Además, los factores conformes que nos llevan de los espacios (4.24) al plano complejo son

$$\Omega(w_1, \bar{w}_1) = \frac{1 - |w_1|^2}{2} = -e^{\frac{\pi}{\beta}(y_1 + \bar{y}_1)} \sinh \frac{\pi}{\beta}(y_1 + \bar{y}_1) \quad (4.39)$$

$$\Omega(w_2, \bar{w}_2) = \frac{2\pi\epsilon}{\beta} |w_2| = \frac{2\pi\epsilon}{\beta} e^{\frac{2\pi}{\beta} y_2} \quad (4.40)$$

$$|w_1 - w_2|^2 = 4e^{\frac{2\pi}{\beta}(y_1 + y_2)} \sinh^2 \frac{\pi}{\beta}(y_1 - y_2), \quad (4.41)$$

y entonces, la entropía queda

$$S_{\text{CFT}} = \frac{c}{6} \log \left(\frac{4\beta e^{\frac{2\pi}{\beta}(y_1 + y_2)} \sinh^2 \left(\frac{\pi}{\beta}(y_1 - y_2) \right)}{-2\pi\epsilon^{\frac{\pi}{\beta}(y_1 + \bar{y}_1 + 2y_2)} \epsilon \sinh \left(\frac{\pi}{\beta}(y_1 + \bar{y}_1) \right) \epsilon_{1,UV} \epsilon_{2,UV}} \right) \quad (4.42)$$

$$= \frac{c}{6} \log \left(\frac{2\beta \sinh^2 \left(\frac{\pi}{\beta}(a + b) \right)}{\pi\epsilon \sinh \left(\frac{2\pi}{\beta} a \right) \epsilon_{1,UV} \epsilon_{2,UV}} \right). \quad (4.43)$$

Luego de ignorar los términos asociados a los *cutoff* de los puntos $-a$ y b y evaluando el campo dilatónico en $-a$, obtenemos que

$$S_{\text{gen}} = \phi_o + \frac{2\pi\phi_r}{\beta} \frac{1}{\tanh \frac{2\pi a}{\beta}} + \frac{c}{6} \log \left(\frac{2\beta \sinh^2 \left(\frac{\pi}{\beta}(a + b) \right)}{\pi\epsilon \sinh \left(\frac{2\pi}{\beta} a \right)} \right). \quad (4.44)$$

Por último, extremando S_{gen} respecto de a , se obtiene que

$$\partial_a S_{\text{gen}} = 0 \quad \sinh \left(\frac{2\pi a}{\beta} \right) = \frac{12\pi\phi_r}{\beta c} \frac{\sinh \left(\frac{\pi}{\beta}(a + b) \right)}{\sinh \left(\frac{\pi}{\beta}(a - b) \right)}. \quad (4.45)$$

En el límite $b \gtrsim \frac{\beta}{2\pi}$ y $\frac{\phi_r}{\beta c} \gtrsim 1$ se tiene

$$a \approx b + \frac{\beta}{2\pi} \log \left(\frac{24\pi\phi_r}{\beta c} \right) \quad \text{o} \quad e^{-\frac{2\pi a}{\beta}} \approx \frac{\beta c}{24\pi\phi_r} e^{-\frac{2\pi b}{\beta}}. \quad (4.46)$$

Notamos que el borde $-a$ del intervalo se acerca al horizonte de eventos a medida que la temperatura del agujero negro disminuye. Una observación es que al haber considerado un intervalo situado a solo uno de los lados, el cálculo involucra medio espacio, donde las traslaciones temporales en t son una simetría. Esto permite relacionar la superficie extremal en el caso en que el intervalo considerado no se encuentre a $t = 0$. Por lo tanto, si el borde del intervalo considerado fuese t_b y $\sigma_b = b$, entonces $t_a = t_b$ y $\sigma_a = -a$ con la a hallada en la ecuación (4.45).

4.2.2 *Replica Wormholes*

Analicemos el truco de réplicas aplicado a la teoría de gravedad JT. El procedimiento es aquel presentado en el Capítulo 3. Comenzamos con un intervalo $B = [0, b]$, como se muestra en la Figura [4.7], consideramos n copias de \mathcal{M} y las identificamos cíclicamente a lo largo del intervalo B , permitiendo que la gravedad rellene la región gravitatoria de forma dinámica (consideramos la integral de caminos gravitatoria en la variedad replicada $\widetilde{\mathcal{M}}_n$).

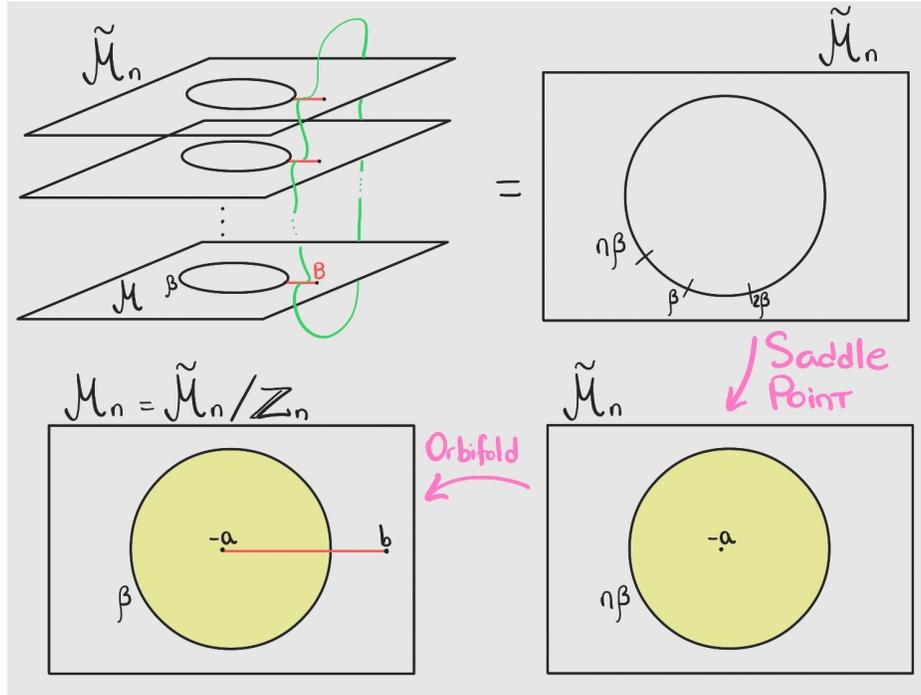


Figura 4.7: Se consideran n copias de \mathcal{M} identificándolas a lo largo del intervalo $B = [0, b]$ para formar la variedad replicada $\tilde{\mathcal{M}}_n$, el cual es equivalente a la copia original pero con borde de largo $n\beta$. Luego se considera como *saddle* dominante la configuración geométrica que rellena el interior de la región gravitatoria con el disco hiperbólico (pintado en amarillo). La misma posee simetría de réplica y un punto fijo en $-a$ ante el grupo de réplica \mathbb{Z}_n . La teoría en el orbifold \mathcal{M}_n presenta una singularidad cónica en $-a$ a determinar dinámicamente.

Dado que estamos considerando un intervalo que contiene un punto del borde de la región gravitatoria, el replicado tiene como consecuencia que la longitud del círculo se estira n veces, de forma tal que en la integral de camino gravitatoria la condición de contorno para $\tilde{\mathcal{M}}_n$ es que el borde tenga longitud $n\beta$. Nuevamente, remarcamos que los *saddle points* en la integral de camino tienen simetría de réplica por extensión de aquella presente en la región no gravitatoria, y consideramos continuar el cálculo en el orbifold $\mathcal{M}_n = \tilde{\mathcal{M}}_n/\mathbb{Z}_n$, pues aquí, la continuación analítica de n a los reales para la entropía es directa. En este último espacio, la longitud del borde es nuevamente β . Dado que el *saddle* dominante $\tilde{\mathcal{M}}_n$ es aquella solución que rellena la región gravitatoria con el disco hiperbólico, existe un punto fijo para el grupo de réplica \mathbb{Z}_n , y en el orbifold \mathcal{M}_n , aparece una singularidad cónica de apertura $\frac{2\pi}{n}$ en la posición $-a$ (ver Figura [4.7]). Tanto en $-a$ como en b tenemos la inserción de *Twist Operators* que actúan como condición de contorno para los n campos de materia. Por otro

lado, la posición $-a$ parametriza cada geometría *off-shell* $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ con simetría de réplica, y por lo tanto, al realizar la aproximación sobre *saddle points* en la integral gravitatoria, $-a$ se determina a partir de las ecuaciones de movimiento. Utilizamos la ecuación (3.7) para la teoría JT y vemos que

$$-\frac{1}{n}I_{\text{grav}}[\widetilde{\mathcal{M}}_n] = -I_{\text{JT+singularidad}}[\mathcal{M}_n] - \left(1 - \frac{1}{n}\right) (\phi_o + \phi(-a)) \quad (4.47)$$

$$= \phi_o \left(\chi + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}_n} \phi \left(\frac{4\pi}{\sqrt{g}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \delta(-a) \right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) (\phi_o + \phi(-a)) \quad (4.48)$$

$$+ \frac{\phi_b}{4\pi} \int 2(K - 1) \quad (4.49)$$

$$= \phi_o \chi + \frac{\phi_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} + U(\theta)\theta^2, \quad (4.50)$$

donde el último término en (4.47) es la adición del área de una brana cósmica (un punto) en la posición $-a$ para cancelar el término que proviene de la singularidad cónica en la curvatura de la acción de JT modificada.

Nuestro objetivo es determinar $-a$, y para esto, debemos hallar la ecuación de movimiento de esta teoría. En el Apéndice B mostramos que la ecuación de movimiento para una teoría de gravedad JT con singularidades cónicas sobre la cual vive una CFT es

$$\frac{\phi_r}{2\pi} \partial_\tau [\{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} + U(\theta)\theta^2] = i (T_{yy}(i\tau) - T_{\bar{y}\bar{y}}(-i\tau)) , \quad (4.51)$$

con $U(\theta)$ una función que depende de la posición de las singularidades, y que tiende a 0 cuando el déficit de las singularidades α tiende a 0. Para conectar este resultado con el truco de réplicas solo debemos tener en cuenta que el déficit depende explícitamente del parámetro de réplica n . Una opción equivalente pero más simple, es aprovechar la existencia de una transformación que uniformice el disco hiperbólico singular y usar la regla de composición para la derivada Schwarziana. Escribimos la posición de la singularidad en $-a$ como $w = A = e^{-a}$ y la transformación que uniformiza es

$$\tilde{w} = \left(\frac{w - A}{1 - Aw} \right)^{1/n} \quad (4.52)$$

Luego $U(\theta)$ es

$$U(\theta) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{(1 - A^2)^2}{|1 - Ae^{i\theta}|^4} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) R(\theta) . \quad (4.53)$$

Vemos entonces que realizar el truco de réplicas y cocientar, viene condensado en la definición de una nueva teoría de JT con singularidades cónicas de déficit $\alpha = 2\pi \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ (ver Apéndice B).

Por otro lado, recordamos que cuando tenemos singularidades cónicas en el disco hiperbólico extendido con regiones planas, el problema del *Welding Problem* es no trivial, y entran en juego unas funciones $G(w)$ y $F(v)$ (con w parametrizando el disco hiperbólico y v la región plana) para definir una coordenada holomorfa z que cubra todo el plano complejo. Dado que la ecuación de movimiento (4.51) involucra al tensor de energía momento evaluado en $v|_{\sigma=0} = e^y|_{\sigma=0} = e^{i\tau}$, debemos realizar una transformación conforme $F(v(y)) = z$, y el tensor de energía momento queda

$$T_{yy} = \left(\frac{dF(e^y)}{dy}\right)^2 T_{zz} - \frac{c}{24\pi} \{F(e^y), y\} \quad (4.54)$$

$$= e^{2y} \left[F'(v)^2 T_{zz} - \frac{c}{24\pi} \{F(v), v\} \right] + \frac{c}{48\pi}, \quad (4.55)$$

donde recordamos que z cubre el plano complejo de forma holomorfa, lo cual no implica que $T_{zz} = 0$ pero si a menos de una transformación conforme. Dicha transformación es $z \rightarrow \tilde{z} = z^{1/n}$, pues la misma remueve el *Twist Operator* en b . Luego tenemos que

$$T_{zz}(\tilde{z}) = -\frac{c}{24\pi} \{z^{1/n}, z\} = -\frac{c}{48\pi} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{z^2}, \quad (4.56)$$

y juntando todo (e introduciendo nuevamente la arbitrariedad en la temperatura reescalando $\phi_r \rightarrow \frac{2\pi}{\beta} \phi_r$), obtenemos la ecuación de movimiento de la teoría en el orbifold \mathcal{M}_n

$$\boxed{\frac{24\pi\phi_r}{c\beta} \partial_\tau \left[\{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) R(\theta)\theta'^2 \right] = ie^{2i\tau} \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{F'(e^{i\tau})^2}{F(e^{i\tau})^2} - \{F(e^{i\tau}), e^{i\tau}\} \right] + c.c.} \quad (4.57)$$

Remarcamos nuevamente que n solo determina el déficit de la singularidad cónica y por lo tanto la extensión de n a los reales es directa. Esta ecuación diferencial para θ es difícil de resolver pues F depende de θ .

4.2.3 Solución de réplica para $n \rightarrow 1$

Consideramos el limite $n \rightarrow 1$, en el cual la prescripción para el *Welding Problem* difiere de τ en una pequeña perturbación $\theta(\tau) = \tau + \delta\theta(\theta)$. En el Apéndice C analizamos en detalle este limite expandiendo en modos de Fourier $\{\theta(\tau), G(w), F(v)\}$, y obtuvimos que

$$e^{2i\tau} \{F(e^{i\tau}), e^{i\tau}\} = -\delta\{e^{i\theta(\tau)}, \tau\}_- = -\frac{1}{2} (1 + H) (\delta\theta''' + \delta\theta') = -(\delta\theta''' + \delta\theta')_-, \quad (4.58)$$

en donde definimos $\delta\{e^{i\theta}, \tau\} := \{e^{i(\tau+\delta\theta)}, \tau\} - \{e^{i\tau}, \tau\}$, y denotamos con subíndice negativo al resultado de haber proyectado una función sobre las frecuencias negativas utilizando una transformada de Hilbert $\frac{1}{2}(1+H)$. Expandiendo (4.57) alrededor de $n \sim 1$ obtenemos

$$\partial_\tau(\delta\theta''' + \delta\theta') + \frac{ic}{12\phi_r} H(\delta\theta''' + \delta\theta') = (n-1) \left[\frac{c}{12\phi_r} \mathcal{F} + \partial_\tau(R\theta'^2) \right], \quad (4.59)$$

con

$$\mathcal{F} = -i \frac{e^{2i\tau}(B-A)^2}{(e^{i\tau}-A)^2(e^{i\tau}-B)^2} + c.c., \quad (4.60)$$

habiendo usado que $(n-1)(\frac{F'}{F})^2$ es de orden 1 en la perturbación y por lo tanto se puede considerar $F = \tilde{v} = \frac{v-A}{B-v}$, el cual corresponde a la solución trivial del *Welding Problem* para $n=1$ (elegimos mover B al infinito por medio de una transformación $SL(2, R)_v$). Resulta que los coeficientes de la expansión en serie de Fourier de $\delta\theta''' + \delta\theta'$ son nulos para los modos $m = 0, 1, -1$ (ver Apéndice C para más detalles), y al imponer esto del lado derecho de (4.59), se obtiene que

$$\int_0^{2\pi} d\tau e^{-i\tau} \left(\frac{c}{12\phi_r} \mathcal{F} + \partial_\tau(R\theta'^2) \right) = 0, \quad (4.61)$$

teniendo como resultado

$$\frac{c}{6\phi_r} \frac{\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{1}{\sinh(a)}, \quad (4.62)$$

y coincidiendo con aquel obtenido en el cálculo de la entropía generalizada para 1 intervalo (reescalando $\phi_r \rightarrow \frac{2\pi}{\beta} \phi_r$).

Finalmente, para verificar la coincidencia de las entropías, vemos que (4.50) reproduce el término de área de la entropía generalizada

$$-\partial_n \left(\frac{\log Z_n^{\text{grav}}}{n} \right) \Big|_{n=1} = - \left(-\frac{\phi_o}{n^2} - \frac{\phi_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \frac{1}{n^3} R(\theta)\theta'^2 \right) + \frac{\phi_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \partial_n \{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} \Big|_{n=1} \quad (4.63)$$

$$= \phi_o + \frac{\phi_r}{\sinh a} + \frac{\phi_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \partial_n \{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} \Big|_{n=1}, \quad (4.64)$$

donde usamos que $\phi_o \chi = \phi_o$ para el disco hiperbólico, y que

$$\frac{\phi_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau R(\theta)\theta'^2 = \frac{\phi_r}{\sinh a}. \quad (4.65)$$

Por otro lado, el término dominante en la acción de la materia es la entropía de entrelazamiento de la CFT, más una contribución de orden $(n-1)$ de una perturbación respecto de la métrica (que cancela el último término en (4.64))

$$\log Z_n^{\text{mat}} - n \log Z_1^{\text{mat}} = -(n-1) S_{\text{bulk}}([-a, b]) + \delta_g \log Z_M, \quad (4.66)$$

y finalmente, tenemos que

$$S([0, b]) = -\partial_n \left(\frac{\log Z_n^{\text{tot}}}{n} \right) \Big|_{n=1} = \phi_o + \frac{\phi_r}{\sinh a} + S_{\text{bulk}}([-a, b]) = S_{\text{gen}}. \quad (4.67)$$

4.3. Dos Intervalos a temperatura finita

Por último, analizaremos brevemente algunos resultados y argumentos al considerar entropías de entrelazamiento sobre dos intervalos. Planteamos una región \mathcal{R} sobre la cual recolectamos la radiación, como se muestra en la Figura [4.8], teniendo como bordes los puntos P_4 y P_2 . Dichos puntos evolucionan temporalmente hacia el futuro, y dado que esto no viene dado por un vector de *Killing* de la geometría, tendremos una dependencia temporal en la entropía.

El cálculo de Hawking (en otro contexto) muestra que la entropía de entrelazamiento sobre la región \mathcal{R} crece linealmente con el tiempo. Esto puede entenderse, al menos conceptualmente, debido a que \mathcal{R} atrapa la mitad de los modos entrelazados, puesto que la otra mitad cae dentro del agujero negro (ver Figura [4.9]). La contradicción en este punto es que si la entropía crece indefinidamente, en algún momento supera dos veces la entropía de Bekenstein-Hawking (dos veces debido a que tenemos dos bordes en AdS_2). Denominamos como curva de Page a la curva que describe el comportamiento que la entropía de entrelazamiento debería seguir al tomar como hipótesis la unitariedad de la teoría cuántica subyacente. Por otro lado, se espera que la entropía de entrelazamiento respete esta curva alrededor de un agujero negro debido al denominado Dogma Central, el cual cataloga esta geometría como un sistema cuántico razonable. En la Figura [4.10] mostramos la curva de Page esperada para este modelo y la discrepancia con el resultado predicho por Hawking.

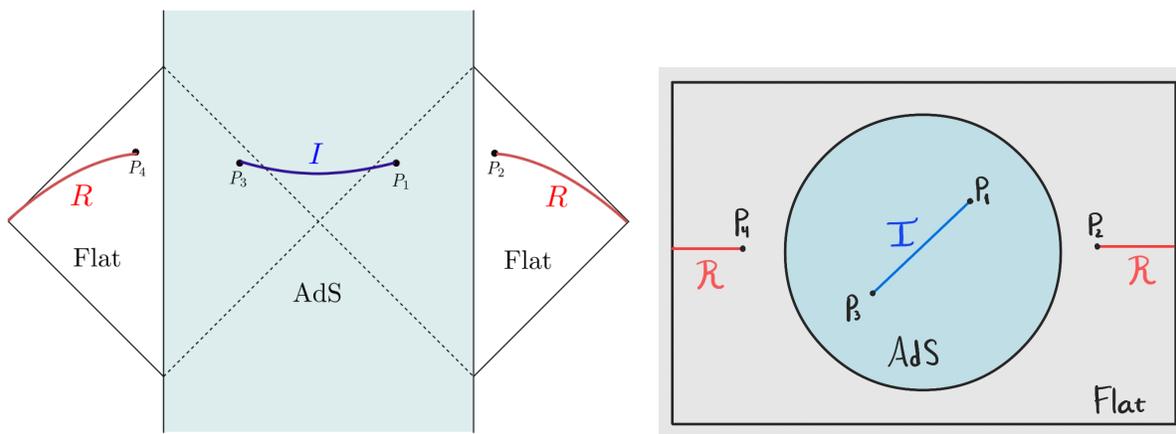


Figura 4.8: Gravedad JT con espacios planos acoplados a ambos lados. Se muestra en rojo la región de entrelazamiento inicial \mathcal{R} y en azul *isla* considerada al utilizar la entropía generalizada. Figura adaptada de [9].

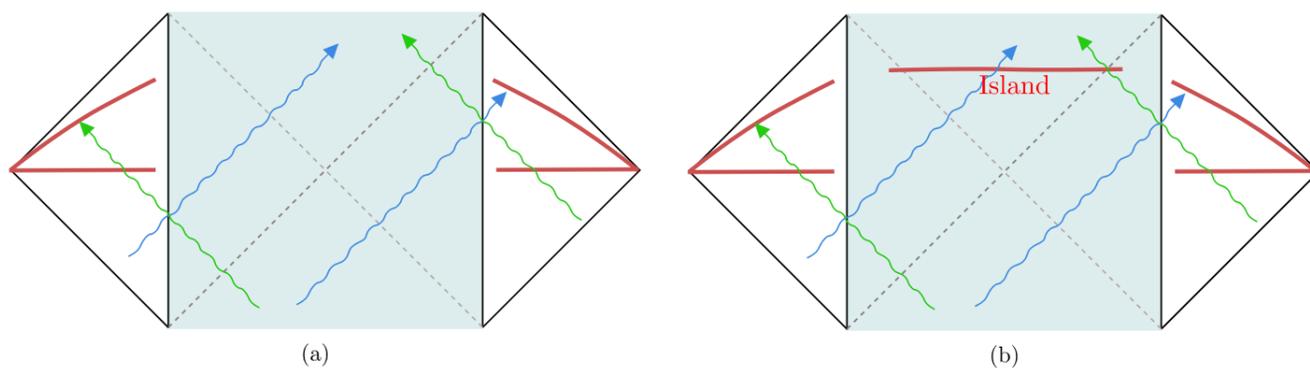


Figura 4.9: A izquierda se muestra esquemáticamente la dinámica de los modos de radiación. Vemos que la mitad de ellos son capturados por la región \mathcal{R} mientras que la otra mitad se pierden en el interior del agujero negro. Del lado derecho contemplamos la aparición de una *isla* en la región gravitatoria y la región de entrelazamiento se vuelve $\mathcal{I} \cup \mathcal{R}$, y por lo tanto se recuperan modos que anteriormente estaban perdidos, generando que la entropía disminuya. Figura adaptada de [9]

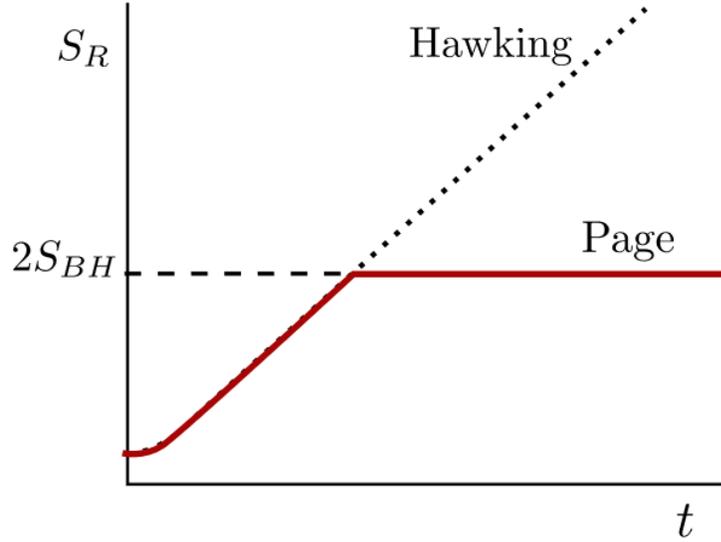


Figura 4.10: Gráfico esquemático de las curvas de entropía. En línea punteada la curva de entropía de entrelazamiento que crece indefinidamente, resultado predicho por Hawking. En rojo la curva de Page esperada para la entropía de entrelazamiento, la cual para tiempos grandes es igual a dos veces la entropía de Bekenstein-Hawking. Figura adaptada de [9].

4.3.1 Superficies Cuánticas Extremales

Al utilizar la fórmula para la entropía generalizada asumimos la existencia de los puntos P_1 y P_2 (que permiten dar cuenta de la *isla* en la región gravitatoria) y luego se intenta de determinarlos por medio del procedimiento de extremización, el cual nos dirá si efectivamente existen o no [23, 36].

Tomando $\beta = 2\pi$, los puntos $\{P_2, P_4, P_1, P_3\}$ tienen coordenadas (σ, t) dados por

$$P_2 = (b, t_b) \quad P_4 = (b, -t_b + i\pi) \quad P_1 = (-a, t_a) \quad P_3 = (-a, -t_a + i\pi) \quad (4.68)$$

(recordar que $\tau = -it$ y los puntos pares e impares son antipodales entre sí). Luego tenemos que²

$$\mathcal{R} = [P_4, \infty_L] \cup [P_2, \infty_R], \quad (4.69)$$

siendo $\infty_{L,R}$ el infinito radial en los ángulos de los puntos que se encuentren del lado izquierdo

²En toda esta subsección existe un abuso de notación al momento de especificar las regiones en términos de sus bordes, debido a que los mismos son puntos del plano complejo y no de la recta real.

(L) o derecho (R) respectivamente. A su vez la isla es el intervalo

$$\mathcal{I} = [P_3, P_1]. \quad (4.70)$$

Notemos que $(\mathcal{I} \cup \mathcal{R}) \cup ([P_4, P_3] \cup [P_1, P_2]) = \Sigma_t$ es una superficie de Cauchy. Luego asumiendo que el estado de la CFT es puro en Σ_t , tenemos que

$$S_{\text{CFT}}(\mathcal{I} \cup \mathcal{R}) = S_{\text{CFT}}([P_4, P_3] \cup [P_1, P_2]). \quad (4.71)$$

Esta es la entropía de dos intervalos y como comentamos en la sección 2.2, la misma es modelo dependiente. Primero realizamos el análisis para una teoría de fermiones libres, recordando de la ecuación (2.51) que

$$S_{\text{ferm}}([P_4, P_3] \cup [P_1, P_2]) = \frac{c}{6} \log \left(\frac{|x_{13}x_{24}x_{14}x_{23}|^2}{|x_{12}x_{34}|^2 \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4} \right), \quad (4.72)$$

(hemos cambiado la notación del Capítulo 2 usando $\mathcal{A} = [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]$) donde $x_{ij} = x_i - x_j$, $\Omega_j = \Omega(x_j, \bar{x}_j)$ son los factores conformes que nos llevan al espacio plano \mathbb{C} , a su vez hemos tirado los términos que provienen de los *cutoffs* y

$$x_j = e^{P_j}. \quad (4.73)$$

Reemplazando esto último, y teniendo en cuenta los factores conformes (4.39) (4.40), se obtiene que

$$S_{\text{ferm}}([P_4, P_3] \cup [P_1, P_2]) = \frac{c}{3} \log \left[\frac{2 \cosh t_a \cosh t_b |\cosh(t_a - t_b) \cosh(a + b)|}{\sinh a \cosh \left(\frac{a+b-t_a-t_b}{2} \right) \cosh \left(\frac{a+b+t_a+t_b}{2} \right)} \right]. \quad (4.74)$$

Luego, la entropía generalizada contemplando una isla es

$$S_{\text{gen}}^{\text{isla}}(\mathcal{I} \cup \mathcal{R}) = 2\phi_o\chi + \frac{2\phi_r}{\sinh a} + S_{\text{ferm}}([P_4, P_3] \cup [P_1, P_2]). \quad (4.75)$$

Buscamos extremos para esta entropía computando $\partial_a S_{\text{gen}}^{\text{isla}} = 0$, y al tomar $t_a = t_b = 0$ se obtiene

$$\frac{6\phi_r}{c} \sinh(a + b) = 2 \sinh^2 a - \sinh a \cosh a \sinh(a + b), \quad (4.76)$$

y la existencia de una solución real para a depende de los valores de b y $\frac{\phi_r}{c}$. Sin embargo, para tiempos largos, siempre existe una solución real que extrema la entropía generalizada. Sucede que el límite de tiempos grandes ($|P_4 - P_3| \ll |P_3 - P_1|$ y $|P_2 - P_1| \ll |P_3 - P_1|$)

) corresponde al límite de OPE de la función de cuatro puntos que describe la entropía de entrelazamiento de la materia, teniéndose que

$$S_{\text{ferm}}([P_4, P_3] \cup [P_1, P_2]) \approx 2S_{\text{ferm}}([P_1, P_2]) \quad (4.77)$$

$$= \frac{c}{3} \log \left(\frac{2|\cosh(a+b) - \cosh(t_a - t_b)|}{\sinh a} \right). \quad (4.78)$$

Debido a esto, la extremización de la entropía generalizada también factoriza y deviene en la extremización de la entropía generalizada de 1 intervalo (ambos por separado), teniéndose (por lo visto en la sección 4.2.1) que $t_a = t_b$ y $a \rightarrow \infty$

$$S_{\text{gen}}^{\text{isla}} = 2 \left(\phi_o \chi + \frac{2\phi_r}{\sinh a} + \frac{c}{3} \log \left(\frac{2|\cosh(a+b) - 1|}{\sinh a} \right) \right) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 2S_{\text{BH}}. \quad (4.79)$$

Dado a que la solución con isla no existe siempre (pero siempre considerándola para la extremización), consideramos también la entropía generalizada de un intervalo, teniéndose que

$$S_{\text{gen}}^{\text{sin isla}}(\mathcal{R}) = S_{\text{fermiones}}([P_4, P_2]) \quad (4.80)$$

$$= \frac{c}{3} \log(2 \cosh t_b) \xrightarrow{t_b \rightarrow \infty} t_b. \quad (4.81)$$

Por lo tanto, la verdadera entropía según el método de la Superficie Cuántica Extremal, es

$$S(\mathcal{R}) = \min\{S_{\text{gen}}^{\text{sin isla}}, S_{\text{gen}}^{\text{isla}}\}. \quad (4.82)$$

De esta forma recuperamos la curva de Page, pues la entropía que contempla una isla es menor a tiempos largos (donde además siempre tenemos solución para la isla al extremar) y el cambio en la entropía que minimiza sucede alrededor del tiempo de Page t_P .

Presentamos resultados similares al considerar una materia compuesta por escalares quirales [24], investigando la afirmación hecha por los autores de que el comportamiento para tiempos largos es común a todas las teorías conformes. Recordamos la fórmula para la entropía dada por la ecuación (2.52)

$$S_{\text{quiral}}([P_4, P_3] \cup [P_1, P_2]) = \frac{c}{6} \log \left(\frac{|x_{13}x_{24}x_{14}x_{23}|^2}{|x_{12}x_{34}|^2 \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4} \right) - U(x), \quad (4.83)$$

donde $U(x)$ es una integral de funciones hipergeométricas. El análisis consiste en estudiar el comportamiento de $U(x)$ y corroborar que no influye en la existencia (e inexistencia) de soluciones en la extremización de la entropía generalizada. En la Figura [4.11] se muestra el cálculo numérico de la función dependiente del tiempo. Por último, en la Figura [4.12] se

muestra el análisis numérico de las curvas de entrelazamiento, verificando el comportamiento esperado para las mismas.

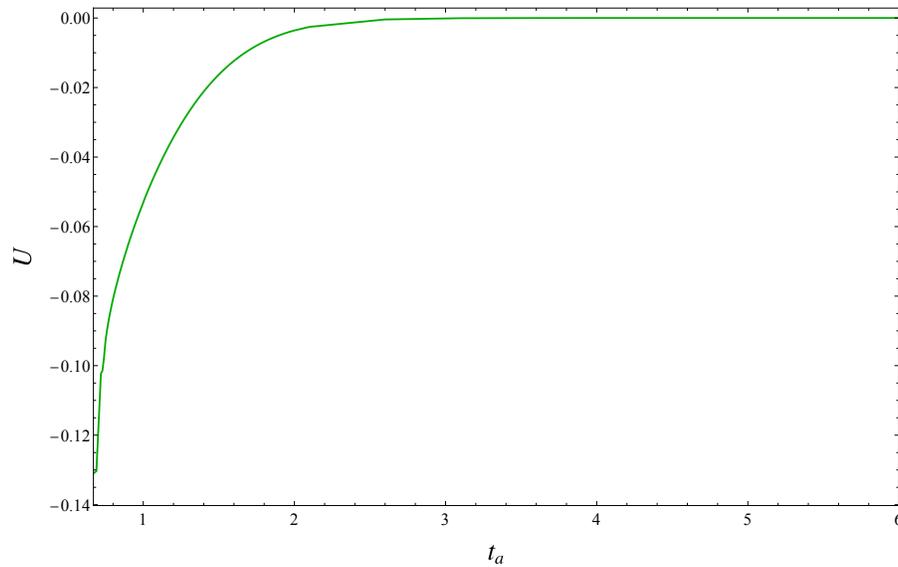


Figura 4.11: Análisis numérico de la función $U(x)$ dependiente del tiempo. Notamos principalmente que la misma tiende a cero para tiempos grandes, teniendo ninguna implicancia en la determinación de soluciones de la extremización de la entropía generalizada.

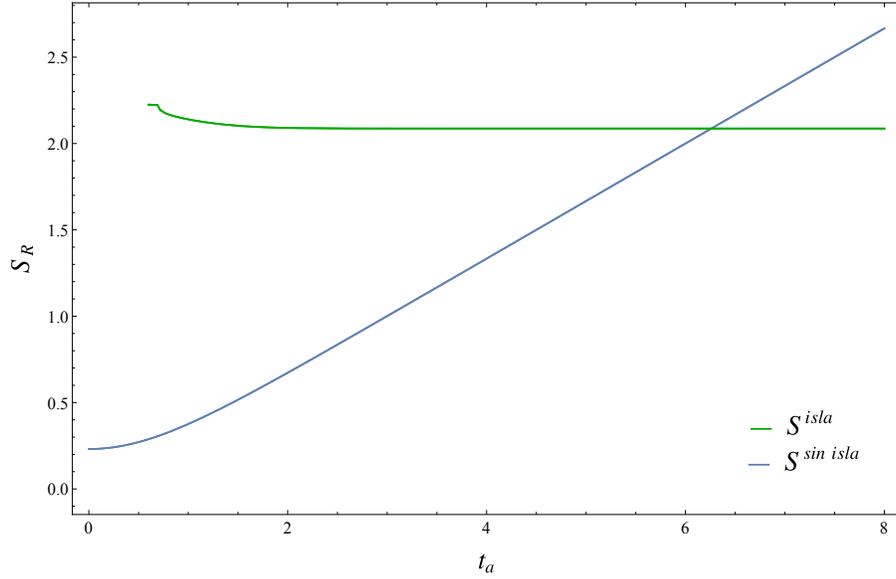


Figura 4.12: Análisis numérico de las entropías de entrelazamiento utilizando las contribuciones de islas para distintos valores iniciales de b y ϕ_r . Notamos que la adición del término $U(x)$ en la entropía de dos intervalos no interfiere con la minimización de la entropía generalizada dada por $S_{\text{gen}}^{\text{sin isla}}$ y $S_{\text{gen}}^{\text{isla}}$ para tiempos cortos y largos (en comparación con el tiempo de Page t_P) respectivamente.

4.3.2 *Replica Wormholes*

En este apartado comentamos brevemente las ideas alrededor del truco de réplicas para justificar la consideración de islas en la fórmula para la entropía generalizada. El procedimiento general es el mencionado con anterioridad. Se considera la región \mathcal{R} para el truco de réplicas y las n copias de la variedad original son pegadas cíclicamente a lo largo de la misma. La diferencia principal, en relación a lo que sucede para 1 intervalo, recae en las condiciones de contorno para la integral de caminos gravitatoria. Las mismas son tales que al aproximar la integral por la suma sobre *saddle points*, aparecen dos *Replica Wormholes* relevantes, como se muestra en la Figura [4.13]. Por un lado, tenemos el *saddle* ordinario (o de Hawking), el cual rellena la región gravitatoria de cada copia por medio del disco hiperbólico. Alternativamente, existe una solución a las ecuaciones de movimiento que conecta las copias por medio de una superficie gravitatoria, los llamados *Wormholes*. La topología de esta variedad replicada es la de una esfera con n puntos, y existen 2 puntos fijos ante el grupo de réplica \mathbb{Z}_n . Luego, como hemos hecho anteriormente, traducimos al problema sobre los orbifolds asociados a cada *saddle*.

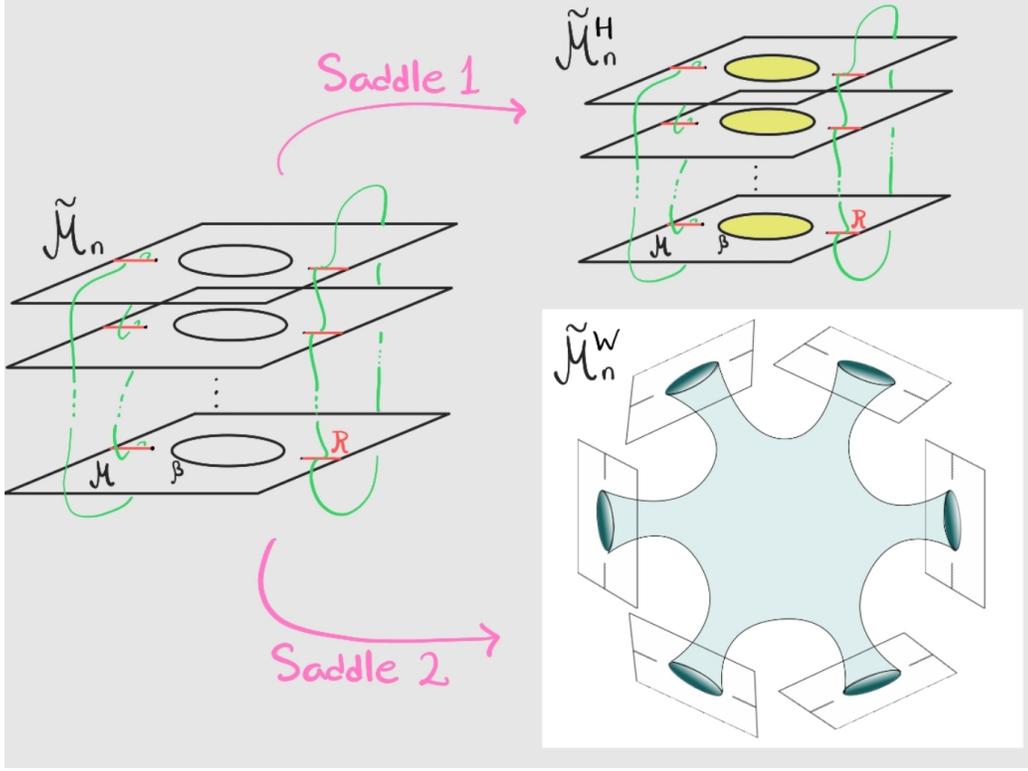


Figura 4.13: A izquierda la variedad replicada $\tilde{\mathcal{M}}_n$ tomando la región de entrelazamiento \mathcal{R} . A derecha los dos *saddles* relevantes, el de Hawking y el de tipo *Wormhole*.

Utilizamos la ecuación (3.17)

$$\frac{\log Z_n}{n} = \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i, \text{saddles}} e^{-(n-1)S_{\text{gen}}(w^i)} \right) - I_{\text{total}}[\mathcal{M}], \quad (4.84)$$

donde, en este caso, $i = 1, 2$ y etiqueta el *saddle* de Hawking y el *Wormhole*. Notemos que el *saddle* de Hawking no tiene puntos fijos ante el grupo de réplica y por lo tanto el orbifold asociado no tiene singularidades cónicas ($\mathcal{M}_n = \mathcal{M}$). Esto produce que

$$S_{\text{gen}}(w^i) = S_{\text{CFT}}(\mathcal{R}) = S_{\text{CFT}}([P_4, P_2]), \quad (4.85)$$

cuya solución vimos que era lineal en el tiempo, por lo que vemos que este *saddle* reproduce el resultado de Hawking. Por otro lado, en el orbifold asociado a la solución *Wormhole* tenemos dos singularidades cónicas en las posiciones P_1 y P_3 (ver Figura [4.14]), y por lo tanto

$$S_{\text{gen}}(w^i) = S_{\text{gen}}^{\text{isla}}(\mathcal{I} \cup \mathcal{R}) \quad (4.86)$$

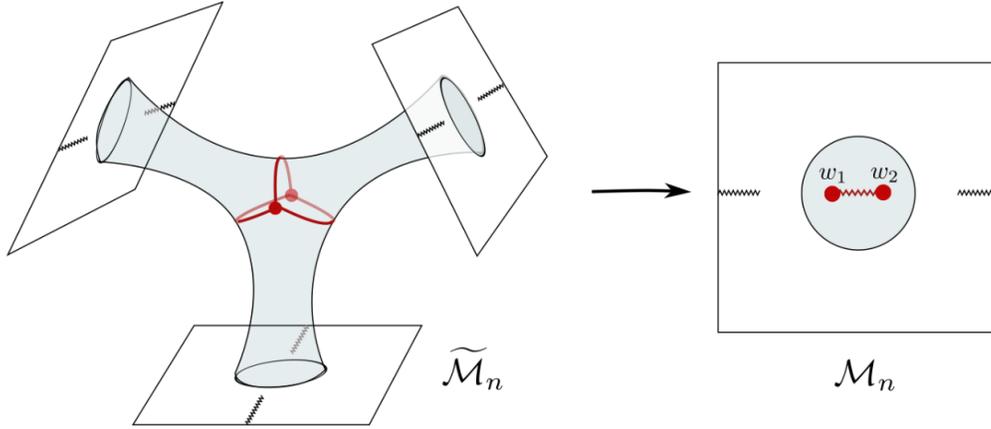


Figura 4.14: A izquierda se muestra el *saddle* tipo *Wormhole* para $n = 3$ y sus puntos fijos ante el grupo de réplica \mathbb{Z}_n (los cuales siguen siendo sólo 2 para $n \geq 2$ natural arbitrario, para $n = 1$ tenemos toda la variedad como punto fijo y para $n = 2$ una circunferencia). A derecha se muestra el orbifold asociado con las singularidades cónicas en w_1 y w_2 , los cuales recuerdan a los bordes de la isla \mathcal{I} .

Si tenemos en cuenta que $\frac{\text{Area}}{4} = \phi_o\chi + \phi(-a)$, entendemos que el término de la entropía generalizada con isla en (4.84) es suprimido en mayor medida debido al término topológico $\phi_o\chi$. De esta forma, el término de Hawking es el relevante dentro del logaritmo y aquel que representa la entropía de \mathcal{R} a tiempos cortos, pero debido a que crece linealmente termina siendo suprimido aún más que el término del *Wormhole*, recuperándose así el análisis realizado en la subsección anterior.

Para determinar que la posición de las singularidades cónicas en el orbifold coincide con aquella que extremiza la entropía generalizada en la formula de Superficies Cuánticas Extremales, sería necesario resolver la ecuación de movimiento para la teoría en dicho espacio y tener en cuenta el efecto del *Welding Problem* en este contexto. Los autores remarcan que aún no se tiene un entendimiento acabado al respecto debido a la dificultad del problema.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo logramos introducirnos en un área de estudio actual y relevante en el contexto de una teoría de gravedad cuántica.

La propuesta para cuantizar la gravedad a partir de la integral de caminos gravitatoria resulta prometedora debido a la capacidad que tiene la misma de recuperar resultados conocidos, derivados en distintos contextos y de forma general. A partir de ella, puede obtenerse la entropía térmica de un agujero negro utilizando únicamente dicha solución en el desarrollo de puntos estacionarios. Esto da la pauta, en analogía a lo que sucede con la entropía de sistemas termodinámicos estadísticos, de que las soluciones gravitatorias a las ecuaciones de Einstein son de alguna manera estados macroscópicos, cuyos estados microscópicos compatibles asociados corresponden a distintas configuraciones geométricas más exóticas. A su vez, la integral de caminos gravitatoria permitió derivar la fórmula para la entropía generalizada con islas, la cual nos permite computar entropías de entrelazamiento en un contexto gravitatorio holográfico. En palabras de Ahmed Almheiri : “*Gravity knew about holography before Juan*”, entendiéndolo de alguna forma que la integral tiene codificada los aspectos holográficos, descubiertos inicialmente en el contexto cuerdista.

Si bien el entendimiento general de la Paradoja de la Pérdida de la información en agujeros negros está lejos de estar acabado, aquellos resultados analizados en el modelo de juguete de gravedad JT y una CFT permiten derogar la clasificación de Paradoja a Problema. El error de Hawking fue utilizar una fórmula incorrecta para la entropía de entrelazamiento, siendo las islas que aparecen en la entropía generalizada, aquello que logra difuminar (al menos parcialmente) la tensión que existía entre la evolución unitaria de una teoría cuántica y la gravedad.

Por último mencionamos algunos de los innumerables temas para entender a futuro, como

por ejemplo la reconstrucción del interior de agujeros negros y el acceso a la información en ellos por medio del entrelazamiento, como también entender en mayor medida el truco de réplicas para n arbitrario al calcular la entropía para dos intervalos.

Apéndice A

Ecuaciones de Movimiento JT

Variando la acción del bulk de (4.3), obtenemos

$$\delta I_{\text{bulk}} = \int \sqrt{g}(R+2)\delta\phi + \int \sqrt{g}\phi\delta(R+2) + \int \phi(R+2)\delta(\sqrt{g}) . \quad (\text{A.1})$$

Luego la ecuación de movimiento asociada a ϕ es

$$R+2=0 , \quad (\text{A.2})$$

y por lo tanto el término que varia la raíz del determinante de la métrica se anula en soluciones a las ecuaciones de movimiento.

Al variar el escalar de curvatura se tiene que

$$\delta R = \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} , \quad (\text{A.3})$$

y utilizando la identidad de Palatini y el hecho de que la conexión es métrica se obtiene que

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla^\mu (\nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\nu\rho} \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho}) , \quad (\text{A.4})$$

y tenemos que

$$\int \sqrt{g}\phi\delta R = \int \sqrt{g}\phi R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \int \sqrt{g}\phi \nabla^\mu (\nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\nu\rho} \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho}) . \quad (\text{A.5})$$

El segundo término tiene que manipularse de forma tal de obtener derivadas para el campo dilatónico

$$\phi \nabla^\mu (\nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\nu\rho} \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho}) = \nabla_\mu (\phi (\nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\nu\rho} \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho})) - (\nabla^\mu \phi) (\nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\nu\rho} \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho}) , \quad (\text{A.6})$$

y además

$$\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} = \nabla^\nu (\nabla^\mu \delta g_{\mu\nu}) - \nabla^\mu \nabla^\nu \phi \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla^\mu \phi g^{\nu\rho} \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} = \nabla_\mu (\nabla^\mu \phi g^{\nu\rho} \delta g_{\nu\rho}) - \nabla_\mu \nabla^\mu \phi g^{\nu\rho} \delta g_{\nu\rho} . \quad (\text{A.8})$$

Entonces llegamos a que (A.6) es una derivada total, más un término proporcional a la variación de la métrica

$$\phi \nabla^\mu (\nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\nu\rho} \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho}) = \nabla^\mu (*) + (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi g^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} , \quad (\text{A.9})$$

y por el teorema de la Divergencia vemos que (A.5) queda

$$\int \sqrt{g} (-R^{\mu\nu} \phi + \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi g^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} + \text{términos de borde} . \quad (\text{A.10})$$

Usando que en dos dimensiones $R^{\mu\nu} = \frac{R}{2} g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}$, y el hecho de que en la acción original tenemos el contratérmino de Gibbons-Hawking, llegamos a que la ecuación de movimiento para el dilatón es

$$\nabla^\mu \nabla^\nu \phi - g^{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi + g^{\mu\nu} \phi = 0 . \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Derivación de la acción Schwarziana

Cuando en el disco hiperbólico no tenemos singularidades cónicas, la acción de gravedad JT puede llevarse a una de tipo Schwarziana definiendo una curva $\Gamma = (\theta(\tau), \gamma(\tau))$ en regiones cercanas al borde del disco hiperbólico y calculando la curvatura extrínseca sobre dicha curva, a la vez que realizar un desarrollo en potencias de ϵ , el parámetro que da cuenta de la cercanía al borde. En el gauge conforme

$$ds^2 = e^{2\rho} dw d\bar{w}, \quad (\text{B.1})$$

tenemos que la ecuación $R = -2$ se reduce a

$$-4\partial_w \partial_{\bar{w}} \rho + e^{2\rho} = 0, \quad (\text{B.2})$$

con solución

$$e^{2\rho} = \frac{4}{(1 - |w|^2)^2} \quad (\text{B.3})$$

En este caso la acción queda

$$I \sim \int d\tau \{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} + \log Z_{\text{CFT}} = \int d\tau \{\theta(\tau), \tau\} + \frac{1}{2}\theta' + \log Z_{\text{CFT}}. \quad (\text{B.4})$$

Sin embargo, al introducir singularidades cónicas el problema se complica. Para estudiar este caso seguiremos de cerca el procedimiento presentado en [9].

Consideremos singularidades cónicas de déficit α en el interior del disco hiperbólico. La ecuación para la curvatura en el gauge conforme queda

$$-4\partial_w \partial_{\bar{w}} \rho + e^{2\rho} = \alpha \sum_i \delta^2(w - w_i), \quad (\text{B.5})$$

con w_i la posición de las singularidades. Esta ecuación tiene como solución

$$e^{2\rho} = e^{2\rho_0} e^{2\delta\rho} = \frac{4}{(1 - |w|^2)^2} e^{2\delta\rho}, \quad (\text{B.6})$$

es decir, la solución del caso sin singularidades perturbada, teniendo que

$$\delta\rho \sim -\frac{(1 - |w|^2)^2}{3} U(\theta) \quad \text{para } |w| \rightarrow 1, \quad (\text{B.7})$$

con $U(\theta)$ una función que depende de las posiciones de las singularidades. Luego, tenemos que la métrica es

$$\boxed{ds^2 = \frac{4dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2} \left(1 - \frac{2}{3}(1 - |w|^2)^2 U(\theta) + \dots \right)}. \quad (\text{B.8})$$

Definimos ahora variables γ y θ tal que $w = e^{-\gamma} e^{i\theta}$ y expandimos la métrica cerca del borde, es decir para $\gamma \rightarrow 0$

$$dw = -e^{-\gamma} e^{i\theta} (d\gamma - id\theta) \quad d\bar{w} = -e^{-\gamma} e^{-i\theta} (d\gamma + id\theta) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{4dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2} = \frac{4e^{-2\gamma} (d\gamma^2 + d\theta^2)}{(1 - e^{-2\gamma})^2} = \left(\frac{1}{\sinh \gamma} \right)^2 (d\gamma^2 + d\theta^2). \quad (\text{B.10})$$

Teniendo en cuenta la serie de Taylor del seno hiperbólico y luego aproximando $\gamma \rightarrow 0$ llegamos a que

$$\left(\frac{1}{\sinh \gamma} \right)^2 (d\gamma^2 + d\theta^2) = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{3!} + \dots} \right)^2 (d\gamma^2 + d\theta^2) = \left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{3} \right] (d\gamma^2 + d\theta^2), \quad (\text{B.11})$$

y entonces

$$ds^2 = \frac{4dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2} \left(1 - \frac{2}{3}(1 - |w|^2)^2 U(\theta) + \dots \right) = \left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{3} \right] (d\gamma^2 + d\theta^2) \left(1 - \frac{2}{3}\gamma^2 U + \dots \right) \quad (\text{B.12})$$

$$= \left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{3}(1 + 2U) \right] (d\gamma^2 + d\theta^2) \quad (\text{B.13})$$

$$\boxed{ds^2 = \frac{d\theta^2 + d\gamma^2}{\gamma^2} - \frac{1}{3}(1 + 2U(\theta))d\theta^2}. \quad (\text{B.14})$$

Recordemos que la condición de contorno para la métrica es que en el borde tengamos $ds^2 = \frac{d\tau^2}{\epsilon^2}$ (en coordenadas $y = \sigma + i\tau$ y $\sigma = 0$). Igualando ambas métricas, teniendo en

cuenta que $\theta = \theta(\tau)$, que $\gamma = \gamma(\tau)$ y primando las derivadas obtenemos

$$ds^2 = \left[\frac{\theta'^2 + \gamma'^2}{\gamma^2} - \frac{1}{3}(1 + 2U)\theta'^2 \right] d\tau^2 = \frac{d\tau^2}{\epsilon^2} \quad (\text{B.15})$$

$$(\times \gamma^2 \epsilon^2) \rightarrow \gamma^2 = \epsilon^2 \left[\theta'^2 + \gamma'^2 - \frac{\gamma'^2}{3}(1 + 2U)\theta'^2 \right] \quad (\text{B.16})$$

$$\gamma^2 \left(1 + \frac{\epsilon^2}{3}(1 + 2U)\theta'^2 \right) = \epsilon^2(\theta'^2 + \gamma'^2) \quad (\text{B.17})$$

$$\left(\frac{1}{1+e} \sim 1-e \right) \rightarrow \gamma^2 = \epsilon^2(\theta'^2 + \gamma'^2) \left(1 - \frac{\epsilon^2}{3}(1 + 2U)\theta'^2 \right) \quad (\text{B.18})$$

$$\gamma^2 = \epsilon^2 \theta'^2 \left[1 - \frac{\epsilon^2}{3}(1 + 2U)\theta'^2 + \left(\frac{\gamma'}{\theta'} \right)^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{3}(1 + 2U)\theta'^2 \right) \right]. \quad (\text{B.19})$$

Asumimos que $\gamma = \epsilon\theta' + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ (como aquello que sucede para el caso sin singularidades cónicas)

$$\gamma^2 = \epsilon^2 \theta'^2 \left[1 - \frac{\epsilon^2}{3}(1 + 2U)\theta'^2 + \epsilon^2 \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right] \quad (\text{B.20})$$

$$\boxed{\gamma = \epsilon\theta' \left[1 + \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \frac{1}{6}(1 + 2U)\theta'^2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right]}. \quad (\text{B.21})$$

Ahora que hemos podido relacionar las componentes de la curva $\Gamma = (\theta(\tau), \gamma(\tau))$ cuando la misma se encuentra cerca del borde, podemos calcular la curvatura extrínseca

$$K = t^\mu t^\nu \nabla_\mu n_\nu, \quad (\text{B.22})$$

siendo t el vector tangente a Γ y n el vector normal a la misma en cada punto. Para esta parte del cálculo es suficiente con que $\gamma = \epsilon\theta'$ y despreciar las correcciones en ϵ^3 . Buscamos t y n teniendo en cuenta que

$$\dot{\Gamma} = (\theta', \epsilon\theta'') \quad (\text{B.23})$$

$$t = \frac{\dot{\Gamma}}{\|\dot{\Gamma}\|} \quad (\text{B.24})$$

$$\|\dot{\Gamma}\| = \sqrt{(\dot{\Gamma}, \dot{\Gamma})} = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{\Gamma}^\mu \dot{\Gamma}^\nu} \quad (\text{B.25})$$

$$= \sqrt{g_{\theta\theta}(\dot{\Gamma}^\theta)^2 + g_{\gamma\gamma}(\dot{\Gamma}^\gamma)^2}. \quad (\text{B.26})$$

Sabemos por (B.13) que $g_{\theta\theta} = g_{\gamma\gamma} = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{3}(1 + 2U)$ y $g_{\theta\gamma} = g_{\gamma\theta} = 0$ sobre los puntos de la curva. Luego

$$\|\dot{\Gamma}\| = \sqrt{\frac{\theta'^2}{\gamma^2} + \mathcal{O}(\epsilon^0)} = \sqrt{\frac{\theta'^2}{\epsilon^2\theta'^2} + \mathcal{O}(\epsilon^0)} = \frac{1}{\epsilon} \quad (\text{B.27})$$

$$t = \frac{(\theta', \epsilon\theta'')}{\frac{1}{\epsilon}} = (\epsilon\theta', \epsilon^2\theta'') \quad (\text{B.28})$$

$$n = (\epsilon^2\theta'', -\epsilon\theta') , \quad (\text{B.29})$$

siendo la condición de ortogonalidad $\theta'n^\theta + \epsilon\theta''n^\gamma = 0$ y además $n^2 = 1$ usando la métrica (B.13). La curvatura extrínseca de Γ es

$$K = t^\mu t^\nu \nabla_\mu n_\nu = -(t^\theta)^2 \Gamma_{\gamma\theta\theta} n^\gamma = -\frac{\epsilon^3\theta'^3}{2} \partial_\gamma g_{\theta\theta} , \quad (\text{B.30})$$

donde hemos usado que la conexión es

$$\Gamma_{\gamma\theta\theta} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{\theta\gamma} + \partial_\theta g_{\theta\gamma} - \partial_\gamma g_{\theta\theta}) = -\frac{1}{2} \partial_\gamma g_{\theta\theta} . \quad (\text{B.31})$$

Ahora utilizamos las siguientes identidades

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \theta' \quad \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} = -\frac{\partial\gamma}{\partial\tau} = -\gamma' \quad (\text{B.32})$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{1}{\theta'^2 + \gamma'^2} g_{\tau\tau} , \quad (\text{B.33})$$

y obtenemos que

$$K = -\frac{\epsilon^3}{2} \theta'^2 \theta' \partial_\gamma g_{\theta\theta} = -\frac{\epsilon^3}{2} \frac{\theta'^2}{\theta'^2} (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \partial_\sigma g_{\tau\tau} = -\frac{\epsilon^3}{2} \partial_\sigma g_{\tau\tau} . \quad (\text{B.34})$$

La derivada de la métrica queda

$$\partial_\sigma g_{\tau\tau} = \left[-\frac{2}{\gamma^3} \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma} - \frac{2}{3} \frac{dU}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \right] (\theta'^2 + \gamma'^2) + \left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{3}(1 + 2U) \right] \left(2\theta' \frac{\partial\theta'}{\partial\sigma} + 2\gamma' \frac{\partial\gamma'}{\partial\sigma} \right) , \quad (\text{B.35})$$

y utilizando nuevamente las identidades obtenemos que

$$\partial_\sigma g_{\tau\tau} = \left[-\frac{2\theta'}{\gamma^3} + \frac{2}{3} \frac{dU}{d\theta} \gamma' \right] (\theta'^2 + \gamma'^2) + \left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{3}(1 + 2U) \right] (2\theta'(-\gamma'') + 2\gamma'\theta) \quad (\text{B.36})$$

$$= \left[-\frac{2\theta'}{\gamma^3} (\theta'^2 + \gamma'^2) + \frac{1}{\gamma^2} (-2\theta'\gamma'' + 2\theta''\gamma') \right] \quad (\text{B.37})$$

$$= \left[-\frac{2\theta'^3}{\gamma^3} - \frac{2\theta'\epsilon^2\theta''^2}{\gamma^3} - \frac{2\theta'\gamma''}{\gamma^2} + \frac{2\theta''\gamma'}{\gamma^2} \right] , \quad (\text{B.38})$$

donde hemos tachado términos que al final de la cuenta van como ϵ^4 debido a que no tienen ningún γ dividiendo que los ayude a reducir el orden en este parámetro. Utilizando (B.21) notemos que

$$-\frac{2\theta'^3}{\gamma^3} = -\frac{2\theta'^3}{\epsilon^3\theta'^3} \left(1 - 3\epsilon^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \frac{1}{6} (1 + 2U) \theta'^2 \right] \right) = -\frac{2}{\epsilon^3} (\checkmark) \quad (\text{B.39})$$

$$-\frac{2\theta'\epsilon^2\theta''^2}{\gamma^3} = -\frac{2}{\epsilon} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \quad (\text{B.40})$$

$$-\frac{2\theta'\gamma''}{\gamma^2} = -\frac{2\theta'\epsilon\theta'''}{\epsilon^2\theta'^2} (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) = -\frac{2\theta'''}{\epsilon\theta'} \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{2\theta''\gamma}{\gamma^2} = \frac{2\theta''\epsilon\theta'' (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2))}{\epsilon^2\theta'^2} = \frac{2}{\epsilon} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2, \quad (\text{B.42})$$

y juntando todo, tenemos que K queda

$$K = -\frac{\epsilon^3}{2} \left[-\frac{2}{\epsilon^3} (\checkmark) - \cancel{\frac{2}{\epsilon} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2} - \frac{2\theta'''}{\epsilon\theta'} + \cancel{\frac{2}{\epsilon} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2} \right] \quad (\text{B.43})$$

$$= (\checkmark) + \epsilon^2 \frac{\theta'''}{\theta'} \quad (\text{B.44})$$

$$= 1 - 3\epsilon^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \frac{1}{6} (1 + 2U) \theta'^2 \right] + \epsilon^2 \frac{\theta'''}{\theta'} \quad (\text{B.45})$$

$$= 1 + \epsilon^2 \left[\frac{\theta'''}{\theta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + U \right) \theta'^2 \right] \quad (\text{B.46})$$

$$\boxed{K = 1 + \epsilon^2 \left[\{\theta, \tau\} + \left(\frac{1}{2} + U \right) \theta'^2 \right]}. \quad (\text{B.47})$$

Reemplazamos esta curvatura extrínseca en la acción de gravedad JT y obtenemos

$$I_{\text{JT}} = \frac{\phi_b}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} 2(K - 1) = \frac{2\phi_r}{4\pi\epsilon} \int \frac{d\tau}{\epsilon} \left[1 + \epsilon^2 \left[\{\theta, \tau\} + \left(\frac{1}{2} + U \right) \theta'^2 \right] - 1 \right] \quad (\text{B.48})$$

$$\boxed{I_{\text{JT}} = \frac{\phi_r}{2\pi} \int d\tau \left[\{\theta, \tau\} + \left(\frac{1}{2} + U \right) \theta'^2 \right]}. \quad (\text{B.49})$$

Este es un resultado general de una teoría de gravedad JT modificada sin trucos ni soldaduras de por medio. Veamos que este resultado es equivalente al mostrado en (4.53). Si tenemos 1 singularidad cónica de déficit $2\pi(1 - \frac{1}{n})$ ubicada en $A = e^{-a}$ en el interior del

disco hiperbólico, la transformación (4.52) uniformiza el disco hiperbólico de forma que la singularidad cónica desaparece. En coordenadas $\tilde{w} = e^{-\tilde{\gamma}} e^{i\tilde{\theta}}$ la acción Schwarziana queda

$$I_{JT} = \frac{\phi_r}{2\pi} \int d\tau \{ \tilde{\theta}(\tau), \tau \} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}'^2. \quad (\text{B.50})$$

Utilizando la regla de la composición para la derivada Schwarziana, notamos que

$$I_{JT} = \frac{\phi_r}{2\pi} \int d\tau \left[\{ \theta, \tau \} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{(1 - A^2)^2}{|1 - Ae^{i\theta}|^4} \right) \theta'^2 \right], \quad (\text{B.51})$$

y al igualar (B.49) con (B.51) obtenemos que

$$\boxed{U(\theta) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{(1 - A^2)^2}{|1 - Ae^{i\theta}|^4}}. \quad (\text{B.52})$$

Para buscar la ecuación de movimiento de la teoría extremamos respecto de θ

$$-\delta I_{JT} = -\frac{\phi_r}{2\pi} \int d\tau \frac{[\{ \theta, \tau \} + (\frac{1}{2} + U) \theta'^2]'}{\theta'} \delta\theta. \quad (\text{B.53})$$

A priori la acción de la CFT no depende de θ , sin embargo, al realizar perturbaciones de la forma $\theta \rightarrow \tilde{\theta} = \theta + \delta\theta$ se inducen cambios en $T_{\mu\nu}$. Para ver esto primero definimos coordenadas locales complejas $\log w = \gamma + i\theta$ cerca del borde. En la región plana, por fuera del disco hiperbólico, tenemos coordenadas $y = \sigma + i\tau$. Sobre la identificación tenemos $\sigma = 0$ y por lo tanto

$$\log w = i\theta(\tau) = i\theta(-iy). \quad (\text{B.54})$$

Si realizamos una perturbación en θ tenemos que

$$i\theta(-iy) \rightarrow i\tilde{\theta}(-iy) = i\theta(-iy) + i\delta\theta(-iy) \neq i\theta(-iy), \quad (\text{B.55})$$

y como hemos cambiado la identificación que teníamos, cambia solución a la ecuación de movimiento y por lo tanto la física. Para solucionar este problema, debemos compensar con una transformación de $y \rightarrow \tilde{y} = y + \xi$ (con $\xi \ll 1$) (ver figura [B.1]) de forma tal que

$$\tilde{\theta}(-i\tilde{y}) = \theta(-iy) \quad (\text{B.56})$$

$$\theta(-i\tilde{y}) + \delta\theta(-i\tilde{y}) = \theta(-iy) \quad (\text{B.57})$$

$$\theta(-i(y + \xi)) + \delta\theta(-i(y + \xi)) = \theta(-iy) \quad (\text{B.58})$$

$$\theta(-iy) + i\xi\theta'(-iy) + \delta\theta(-iy) = \theta(-iy) \quad (\text{B.59})$$

$$\delta\theta(-iy) = -i\xi\theta'(-iy) \quad (\text{B.60})$$

$$\boxed{\xi^y = i \frac{\delta\theta(-iy)}{\theta'(-iy)}} \quad \boxed{\xi^{\bar{y}} = -i \frac{\delta\theta(i\bar{y})}{\theta'(i\bar{y})}}. \quad (\text{B.61})$$

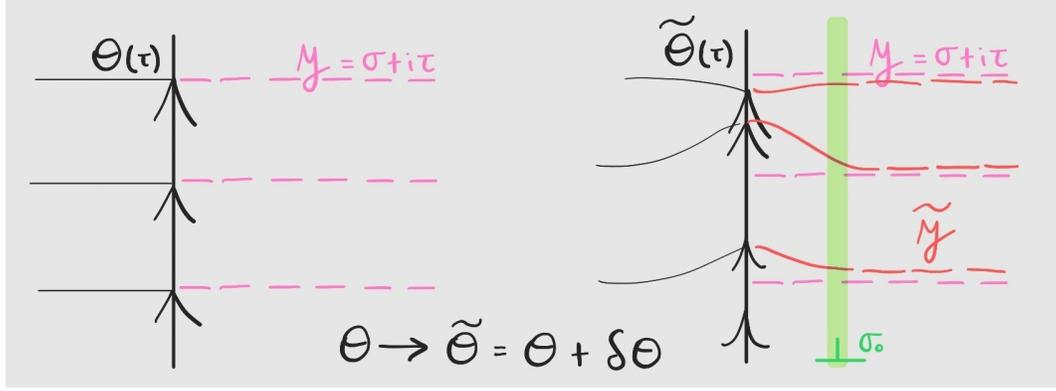


Figura B.1: A izquierda la identificación θ en función del tiempo euclídeo. Luego de realizar una variación en θ se induce una variación en y , que se extiende al interior de la región plana hasta una distancia típica σ_o . Esto produce una dependencia indirecta en el tensor de energía impulso en θ .

La idea es que esta deformación de θ es local, y por ende la repuesta de y también esta localizada en las cercanías del borde. El hecho de que ante una variación de θ se induzca una variación en las coordenadas y , genera que el tensor de energía impulso dependa indirectamente de esta variación. Para escribir la perturbación extendiéndose al interior del espacio plano, suavizamos con una función $h(\sigma)$ que muera rápido yendo al interior

$$\xi^y = i \frac{\delta\theta(-iy)}{\theta'(-iy)} h(\sigma) \quad \xi^{\bar{y}} = -i \frac{\delta\theta(i\bar{y})}{\theta'(i\bar{y})} h(\sigma), \quad (\text{B.62})$$

con $h(0) = 1$ y que decrece rápidamente a mayores valores de σ , como por ejemplo el escalón de Heaviside $h(\sigma) = \Theta(\sigma_o - \sigma)$ para $\sigma_o \ll 1$. Este cambio en y a su vez induce una variación en la métrica

$$dy = d\tilde{y} - d\xi^y \approx \left(1 - \frac{\partial\xi^y}{\partial y}\right) d\tilde{y} \quad d\bar{y} = \left(1 - \frac{\partial\xi^{\bar{y}}}{\partial \bar{y}}\right) d\tilde{\bar{y}} \quad (\text{B.63})$$

$$ds^2 = dyd\bar{y} = d\tilde{y}d\tilde{\bar{y}} - 2\partial_\mu\xi^\nu d\tilde{y}^\mu d\tilde{\bar{y}}_\nu \rightarrow \delta g_{\mu\nu} = -2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}. \quad (\text{B.64})$$

Usando la definición del tensor de energía momento $T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \log Z$ vemos que

$$\delta \log Z = -\frac{1}{2} \int d\varphi d\sigma (T_{yy} \partial g^{yy} + T_{\bar{y}\bar{y}} \delta g^{\bar{y}\bar{y}}) \quad (\text{B.65})$$

$$= -2 \int d\varphi d\sigma (T_{yy} \partial_{\bar{y}} \xi^y + T_{\bar{y}\bar{y}} \partial_y \xi^{\bar{y}}), \quad (\text{B.66})$$

donde se considera que la métrica de fondo es plana para y y que la traza del tensor de energía momento es cero (y que $\partial^y = \partial_{\bar{y}}$). Las derivadas de las perturbaciones son

$$\partial_{\bar{y}}\xi^y = \frac{i}{2} \frac{\delta\theta(-iy)}{\theta'(-iy)} h' \left(\frac{y + \bar{y}}{2} \right) \quad \partial_y \xi^{\bar{y}} = -\frac{i}{2} \frac{\delta\theta(-i\bar{y})}{\theta'(-i\bar{y})} h' \left(\frac{y + \bar{y}}{2} \right), \quad (\text{B.67})$$

donde usamos que las derivadas son holomorfas o antiholomorfas, y por lo tanto aporta la derivada de h , que es $h'(\sigma) = -\delta(\sigma - \sigma_o)$. Integrando (B.67) en σ y tomando el limite $\sigma_o \rightarrow 0$ de forma tal que $\varphi \rightarrow \tau$ y $-iy \rightarrow \tau$ obtenemos

$$\delta \log Z = i \int d\tau (T_{yy} - T_{\bar{y}\bar{y}}) \frac{\delta\theta}{\theta'}. \quad (\text{B.68})$$

Con lo cual igualando a (B.53) finalmente obtenemos

$$\boxed{\frac{\phi_r}{2\pi} \partial_\tau [\{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} + U(\theta)\theta'^2] = i (T_{yy} - T_{\bar{y}\bar{y}})}. \quad (\text{B.69})$$

Apéndice C

Solución linealizada del *Welding Problem*

La solución al *Welding Problem* consiste de dos funciones F y G que mapean dos coronas distintas del plano complejo a un nuevo espacio parametrizado por z , dada una prescripción de pegado $\theta(\tau)$ de los bordes de cada corona. Existen transformaciones intermedias y finales que pueden alterar o no la prescripción y las soluciones. Sobre el plano complejo puede actuarse con el grupo $SL(2, C)$ (isomorfo al grupo de Möbius) moviendo los puntos del plano incluyendo al infinito. Por ejemplo la transformación $\mu = \frac{1}{z-z_0}$ trae el infinito a z_0 . Esto arroja cierta ambigüedad en cuanto a la posición del polo que pueda tener F o G . Por esto se pide que $F(\infty) = \infty$, que equivale a restringir $SL(2, C)$ a aquel conjunto de transformaciones que dejen quieto el punto en infinito. Estas son las traslaciones, rotaciones y dilataciones, y ninguna de ellas modifica la prescripción $\theta(\tau)$. Por otro lado antes de resolver el problema, tenemos al grupo $SL(2, R)_{w,v}$ actuando por separado en cada corona. Pero aunque cada grupo preserva el círculo $|w| = 1$ y $|v| = 1$, la prescripción es modificada al transformarse $e^{i\theta}$ o $e^{i\tau}$ respectivamente. Estas transformaciones no están en pie de igualdad. Si actuamos con $SL(2, R)_w$ sobre el disco hiperbólico y las posiciones de las singularidades cónicas w_i , el integrando de la acción Schwarziana resulta invariante. Esto se interpreta como una redundancia de gauge sobre el disco hiperbólico. Sin embargo al actuar con $SL(2, R)_v$ sobre la corona exterior del plano complejo (la región plana) transformamos τ y la acción queda modificada, y por lo tanto éstas no representan una simetría.

En esta sección estudiamos las soluciones G y F , holomorfas en la corona interior y exterior del plano complejo respectivamente, en el límite en que la prescripción difiere de la identidad por una pequeña perturbación $\theta(\tau) = \tau + \delta\theta(\tau)$, con $\delta\theta(\tau)$ fijo.

Expandimos en modos de fourier

$$\theta(\tau) = \tau + \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m e^{im\tau} \quad , \quad G(w) = w + \sum_{l=0}^{l=\infty} g_l w^l \quad , \quad F(v) = v + \sum_{l=-\infty}^{l=2} f_l v^l . \quad (\text{C.1})$$

La condición de pegado es que

$$G(w^{i\theta(\tau)}) = F(e^{i\tau}) \quad \text{con } \theta(\tau) = \tau + \delta\theta \quad (\text{C.2})$$

$$e^{i\theta} + \sum g_l e^{il\theta} = e^{i\tau} + \sum f_l e^{il\tau} \quad (\text{C.3})$$

$$(1 + \delta\theta)e^{i\tau} + \sum g_l ((1 + \delta\theta)e^{i\tau})^l = e^{i\tau} + \sum f_l e^{il\tau} \quad (\text{C.4})$$

$$i \sum c_m e^{i(m+1)\tau} + \sum (g_l + i g_l \sum c_m e^{im\tau}) e^{il\tau} = \sum f_l e^{il\tau} , \quad (\text{C.5})$$

donde usamos que $e^{i\tau} = e^{i\delta\theta} e^{i\tau} \approx (1 + \delta\theta)e^{i\tau}$, que $(1 + \delta\theta)^l \approx (1 + il\delta\theta)$ y que $\delta\theta = \sum c_m e^{im\tau}$. A primer orden en los coeficientes c_m, g_l, f_l obtenemos

$$\sum_{-\infty}^{\infty} i c_m e^{i(m+1)\tau} + \sum_0^{\infty} g_l e^{il\tau} = \sum_{-\infty}^2 f_l e^{il\tau} \quad (\text{C.6})$$

$$\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} [i c_{l-1} + g_l - f_l] e^{il\tau} = 0 . \quad (\text{C.7})$$

habiendo redefinido $m = l - 1$ y $f_l = 0 \forall l > 2$ y $g_l = 0 \forall l < 0$. Luego obtenemos que

$$\begin{cases} i c_{l-1} = -g_l & l > 2 \\ i c_{l-1} = f_l & l \leq -1 \end{cases} . \quad (\text{C.8})$$

Existe una ambigüedad al poder actuar con $SL(2, \mathbb{C})$ que es removida al pedir que $G(0) = 0$ y $F(v) = v + cte$ para $v \rightarrow \infty$. Esto equivale a tres condiciones para los modos

$$\lim_{w \rightarrow 0} w + \sum g_l w^l = 0 \Leftrightarrow \boxed{g_0 = 0} \quad (\text{C.9})$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v + f_2 v^2 + f_1 v + f_0 + \sum_{l>0} f_{-l} \frac{1}{v^l} = v + cte \Leftrightarrow \boxed{f_2 = f_1 = 0} , \quad (\text{C.10})$$

y entonces

$$\boxed{\begin{cases} i c_{l-1} = -g_l & l > 0 \\ i c_{l-1} = f_l & l \leq 0 \end{cases}} . \quad (\text{C.11})$$

Ahora analizamos como queda $v^2\{F, v\} = v^2\left(\frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right)$ para la ecuación de movimiento en (4.57). Primero notamos que si nos quedamos a primer orden en f_l , el Schwarziano se reduce a $\{F, v\} = F'''$ pues el segundo término es como mínimo cuadrático, y en el primer término $\frac{1}{F'} \approx 1 + \sum f_l(\text{cosas})$. Luego

$$\{F, v\} = F''' = \sum_{l=-\infty}^{l=0} l(l-1)(l-2)f_l v^{l-3} \quad (\text{C.12})$$

$$m = l - 1 = \sum_{m=-\infty}^{m=-1} m(m^2 - 1)ic_m v^{m-2} \quad (\text{C.13})$$

$$\boxed{v^2\{F, v\} = \sum_{m=-\infty}^{m=-1} m(m^2 - 1)ic_m v^m} . \quad (\text{C.14})$$

Por otro lado, notemos que

$$\delta\{e^{i\theta(\tau)}, \tau\} := \{e^{i(\tau+\delta\theta)}, \tau\} - \{e^{i\tau}, \tau\} = \delta\theta''' + \delta\theta' = -\sum_m ic_m m^3 e^{im\tau} + \sum_m ic_m m e^{im\tau} \quad (\text{C.15})$$

$$= -\left(\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} m(m^2 - 1)ic_m e^{im\tau}\right) . \quad (\text{C.16})$$

Podemos relacionar (C.14) con (C.15) a través de una transformada de Hilbert. Definiendo la acción $H \cdot e^{im\tau} = -\text{sgn}(m)e^{im\tau}$ notamos que $\frac{1}{2}(1+H)$ proyecta sobre los modos de frecuencia negativa de una función escrita en modos de Fourier. De modo que

$$v^2\{F, v\} = -\delta\{e^{i\theta(\tau)}, \tau\}_- = -\frac{1}{2}(1+H)((\delta\theta)''' + (\delta\theta)') . \quad (\text{C.17})$$

Bibliografía

- [1] W. Israel y S. W. Hawking. *General Relativity; An Einstein centenary survey*. 1980.
- [2] S. Ryu y T. Takayanagi. *Holographic Derivation of Entanglement Entropy from the anti-de Sitter Space/Conformal Field Theory Correspondence*. 2006. DOI: [10.1103/physrevlett.96.181602](https://doi.org/10.1103/physrevlett.96.181602).
- [3] V. E. Hubeny, M. Rangamani y T. Takayanagi. *A covariant holographic entanglement entropy proposal*. 2007. DOI: [10.1088/1126-6708/2007/07/062](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/07/062).
- [4] A. Kitaev y J. Preskill. «Topological Entanglement Entropy». En: *Physical Review Letters* 96.11 (mar. de 2006). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.96.110404](https://doi.org/10.1103/physrevlett.96.110404). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.110404>.
- [5] M. Levin y Xiao-Gang Wen. «Detecting Topological Order in a Ground State Wave Function». En: *Physical Review Letters* 96.11 (mar. de 2006). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.96.110405](https://doi.org/10.1103/physrevlett.96.110405). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.110405>.
- [6] H. Casini y M. Huerta. «A Finite entanglement entropy and the c-theorem». En: *Phys. Lett. B* 600 (2004), págs. 142-150. DOI: [10.1016/j.physletb.2004.08.072](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.08.072). arXiv: [hep-th/0405111](https://arxiv.org/abs/hep-th/0405111).
- [7] H. Casini y M. Huerta. «On the RG running of the entanglement entropy of a circle». En: *Phys. Rev. D* 85 (2012), pág. 125016. DOI: [10.1103/PhysRevD.85.125016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.125016). arXiv: [1202.5650 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1202.5650).
- [8] A. Lewkowycz y J. Maldacena. «Generalized gravitational entropy». En: *JHEP* 08 (2013), pág. 090. DOI: [10.1007/JHEP08\(2013\)090](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2013)090). arXiv: [1304.4926 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1304.4926).
- [9] A. Almheiri et al. *Replica wormholes and the entropy of Hawking radiation*. 2020. DOI: [10.1007/jhep05\(2020\)013](https://doi.org/10.1007/jhep05(2020)013).
- [10] G. W. Gibbons y S. W. Hawking. «Action integrals and partition functions in quantum gravity». En: *Phys. Rev. D* 15 (10 1977), págs. 2752-2756. DOI: [10.1103/PhysRevD.15.2752](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.2752). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2752>.

- [11] J. M. Maldacena. «The Large N limit of superconformal field theories and supergravity». En: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), págs. 231-252. DOI: [10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1](https://doi.org/10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1). arXiv: [hep-th/9711200](https://arxiv.org/abs/hep-th/9711200).
- [12] A. Almheiri et al. «The entropy of Hawking radiation». En: *Rev. Mod. Phys.* 93.3 (2021), pág. 035002. DOI: [10.1103/RevModPhys.93.035002](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.035002). arXiv: [2006.06872 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2006.06872).
- [13] C. Teitelboim. «Gravitation and Hamiltonian Structure in Two Space-Time Dimensions». En: *Phys. Lett. B* 126 (1983), págs. 41-45. DOI: [10.1016/0370-2693\(83\)90012-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90012-6).
- [14] R. Jackiw. «Lower Dimensional Gravity». En: *Nucl. Phys. B* 252 (1985). Ed. por R. Baier y H. Satz, págs. 343-356. DOI: [10.1016/0550-3213\(85\)90448-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90448-1).
- [15] A. Almheiri et al. *The entropy of bulk quantum fields and the entanglement wedge of an evaporating black hole*. DOI: [10.1007/jhep12\(2019\)063](https://doi.org/10.1007/jhep12(2019)063).
- [16] H. Casini y M. Huerta. «Entanglement entropy in free quantum field theory». En: *J. Phys. A* 42 (2009), pág. 504007. DOI: [10.1088/1751-8113/42/50/504007](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/50/504007). arXiv: [0905.2562 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0905.2562).
- [17] H. Casini y M. Huerta. «Lectures on entanglement in quantum field theory». En: *PoS TASI2021* (2023), pág. 002. DOI: [10.22323/1.403.0002](https://doi.org/10.22323/1.403.0002). arXiv: [2201.13310 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2201.13310).
- [18] P. Calabrese y J. L. Cardy. «Entanglement entropy and quantum field theory». En: *J. Stat. Mech.* 0406 (2004), P06002. DOI: [10.1088/1742-5468/2004/06/P06002](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2004/06/P06002). arXiv: [hep-th/0405152](https://arxiv.org/abs/hep-th/0405152).
- [19] P. Calabrese y J. Cardy. *Entanglement entropy and conformal field theory*. 2009. DOI: [10.1088/1751-8113/42/50/504005](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/50/504005).
- [20] T. Nishioka. *Entanglement entropy: Holography and renormalization group*. DOI: [10.1103/revmodphys.90.035007](https://doi.org/10.1103/revmodphys.90.035007).
- [21] J. L. Cardy, O. A. Castro-Alvaredo y B. Doyon. «Form Factors of Branch-Point Twist Fields in Quantum Integrable Models and Entanglement Entropy». En: *Journal of Statistical Physics* 130.1 (oct. de 2007), págs. 129-168. ISSN: 1572-9613. DOI: [10.1007/s10955-007-9422-x](https://doi.org/10.1007/s10955-007-9422-x). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s10955-007-9422-x>.
- [22] Pasquale Calabrese, John Cardy y Erik Tonni. «Entanglement entropy of two disjoint intervals in conformal field theory». En: *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2009.11 (nov. de 2009), P11001. ISSN: 1742-5468. DOI: [10.1088/1742-5468/2009/11/p11001](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2009/11/p11001). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2009/11/P11001>.

- [23] H. Casini y M. Huerta. «Reduced density matrix and internal dynamics for multicomponent regions». En: *Class. Quant. Grav.* 26 (2009), pág. 185005. DOI: [10.1088/0264-9381/26/18/185005](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/18/185005). arXiv: [0903.5284](https://arxiv.org/abs/0903.5284) [hep-th].
- [24] R. E. Arias et al. «Entropy and modular Hamiltonian for a free chiral scalar in two intervals». En: *Phys. Rev. D* 98.12 (2018), pág. 125008. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.125008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.125008). arXiv: [1809.00026](https://arxiv.org/abs/1809.00026) [hep-th].
- [25] David Blanco, Alan Garbarz y Guillem Pérez-Nadal. «Entanglement of a chiral fermion on the torus». En: *Journal of High Energy Physics* 2019.9 (sep. de 2019). ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/jhep09\(2019\)076](https://doi.org/10.1007/jhep09(2019)076). URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09\(2019\)076](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09(2019)076).
- [26] T. Faulkner, A. Lewkowycz y J. Maldacena. *Quantum corrections to holographic entanglement entropy*. 2013. DOI: [10.1007/jhep11\(2013\)074](https://doi.org/10.1007/jhep11(2013)074).
- [27] N. Engelhardt y A. C. Wall. *Quantum extremal surfaces: holographic entanglement entropy beyond the classical regime*. 2015. DOI: [10.1007/jhep01\(2015\)073](https://doi.org/10.1007/jhep01(2015)073).
- [28] G. Sárosi. «AdS₂ holography and the SYK model». En: *PoS Modave2017* (2018), pág. 001. DOI: [10.22323/1.323.0001](https://doi.org/10.22323/1.323.0001). arXiv: [1711.08482](https://arxiv.org/abs/1711.08482) [hep-th].
- [29] D. A. Trunin. «Pedagogical introduction to the Sachdev–Ye–Kitaev model and two-dimensional dilaton gravity». En: *Usp. Fiz. Nauk* 191.3 (2021), págs. 225-261. DOI: [10.3367/UFNe.2020.06.038805](https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.06.038805). arXiv: [2002.12187](https://arxiv.org/abs/2002.12187) [hep-th].
- [30] T. G. Mertens y G. J. Turiaci. *Solvable models of quantum black holes: a review on Jackiw–Teitelboim gravity*. 2023. DOI: [10.1007/s41114-023-00046-1](https://doi.org/10.1007/s41114-023-00046-1).
- [31] T. G. Mertens y G. J. Turiaci. «Defects in Jackiw–Teitelboim Quantum Gravity». En: *JHEP* 08 (2019), pág. 127. DOI: [10.1007/JHEP08\(2019\)127](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2019)127). arXiv: [1904.05228](https://arxiv.org/abs/1904.05228) [hep-th].
- [32] E. Witten. «Deformations of JT Gravity and Phase Transitions». En: (jun. de 2020). arXiv: [2006.03494](https://arxiv.org/abs/2006.03494) [hep-th].
- [33] R. Arias, M. Botta-Cantcheff y P. J. Martinez. «Pacman geometries and the Hayward term in JT gravity». En: *JHEP* 04 (2022), pág. 130. DOI: [10.1007/JHEP04\(2022\)130](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2022)130). arXiv: [2112.10799](https://arxiv.org/abs/2112.10799) [hep-th].
- [34] Yueren Xing. *Entropy and replica geometry in generic two-dimensional dilaton gravity theories*. 2023. arXiv: [2301.06830](https://arxiv.org/abs/2301.06830) [hep-th].
- [35] E. Sharon y D. Mumford. *2D-Shape Analysis Using Conformal Mapping*. 2006.
- [36] A. Almheiri, R. Mahajan y J. Maldacena. «Islands outside the horizon». En: (oct. de 2019). arXiv: [1910.11077](https://arxiv.org/abs/1910.11077) [hep-th].

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2024