

# Simetría de T-dualidad en las correcciones de cuerdas a la Relatividad General

MATIAS ARIEL VOLIJ

Director: Diego Marqués

Instituto de Astronomía y Física del Espacio (IAFE)



Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

14 de febrero de 2024

## Resumen

Al día de hoy, mientras que la interacción gravitatoria es bien entendida clásicamente en el contexto de la relatividad general; su descripción en el marco de la mecánica cuántica permanece desconocido, posicionándose como uno de los grandes problemas abiertos en la física teórica contemporánea. En este contexto, la Teoría de Cuerdas emerge naturalmente como el único candidato para una teoría cuántica consistente de la gravedad. Si bien esta última es aun una teoría en desarrollo, una de las obstrucciones que rápidamente se evidencian es la necesidad de alcanzar escalas energéticas inaccesibles a las capacidades técnicas y tecnológicas actuales para comprobar algunas de sus predicciones en experimentos de partículas. Esto motiva, sin embargo, la búsqueda de efectos de cuerdas observables a bajas energías. En esta línea es que se desarrolla el estudio de acciones de campos efectivas de bajas energías, las cuales son construidas como una expansión perturbativa en el parámetro de la cuerda fundamental  $\alpha'$ . De esta forma, a orden cero en  $\alpha'$  la acción efectiva correspondiente reproduce las ecuaciones de la relatividad general en sus ecuaciones de movimiento, mientras que a ordenes siguientes lo que encontraremos son correcciones a las ecuaciones de la relatividad general.

Esto último, habilita a su vez la posibilidad de estudiar los efectos de cuerdas como correcciones a las soluciones de la relatividad general, las cuales podrían ser observables a escalas cosmológicas. Sin embargo, una limitación en el estudio tradicional de las acciones efectivas es la necesidad de calcular amplitudes de dispersión de cuerdas para la determinación de las mismas. Mas precisamente, cada orden en  $\alpha'$  requiere incrementar en -el equivalente a- un loop el cálculo de las amplitudes. Esto hace que el cálculo de las acciones de bajas energías se vuelva rápidamente imposible de realizar analíticamente. De forma computacional lo máximo que fue posible calcular son las correcciones de orden cúbico en  $\alpha'$ . Sin embargo, recientemente han sido publicados una serie de trabajos [3],[4] que presentan un acercamiento alternativo para el cálculo de estas acciones; fundados en la utilización de las simetrías de la teoría de cuerdas como requisito de consistencia para la construcción de acciones de bajas energías. En particular, una de las simetrías que hacen posible este enfoque es la denominada  $\beta$ -symmetry; la cual emerge de la propiedad de T-dualidad que presentan las teorías de cuerdas al ser compactificadas en toros  $T^d$ .

En este trabajo, se presenta como contribución original la verificación analítica de la invariancia frente a transformaciones  $\beta$  en la acción efectiva de bajas energías a orden  $\alpha'$ ;

así como el análisis del comportamiento de la acción frente a estas transformaciones. A fin de brindar el contexto necesario para comprender completamente los resultados obtenidos, se presentará en las secciones 1 y 2 una introducción a la teoría de cuerdas y su formulación elemental. En la sección 3 se describirá con mayor detalle el cálculo de acciones efectivas de bajas energías hasta primer orden en  $\alpha'$ , pasando por los distintos esquemas de campos en los cuales típicamente se escriben. En la sección 4 se describirá el origen de la simetría de T-dualidad ante compactificaciones toroidales, y el efecto de la compactificación sobre las teorías de campos de bajas energías. En la sección 5 se buscará describir el origen de la novedosa simetría  $\beta$ , mostrar la invariancia de la acción a orden cero en  $\alpha'$  y calcular las correcciones de las transformaciones a orden  $\alpha'$ ; de forma de presentar los recursos necesarios para verificar en la sección 6 de forma analítica la invariancia de la acción a primer orden en  $\alpha'$  en el esquema de Bergshoeff De Roo. Finalmente, en la sección 7 se realizará un repaso breve de lo estudiado a lo largo de este trabajo resaltando las principales conclusiones extraídas y planteando estudios futuros que se desprenden del mismo. En el apéndice A se encontrará además el cálculo explícito de las correcciones a la relatividad general obtenidas a partir de la acción de cuerdas de bajas energías a primer orden en  $\alpha'$ .

## **Agradecimientos**

Quiero agradecer a la Universidad de Buenos Aires, al departamento de física y a todo el cuerpo docente por los años de enseñanzas; al jurado por el compromiso y todas las contribuciones realizadas hacia la tesis; a mi familia y amigos, por el apoyo a lo largo de estos años; y especialmente a mi director Diego Marqués, al grupo de trabajo del IAFE y a Walter Barón de la UNLP por el apoyo y ayuda en cada punto del desarrollo del presente trabajo.

# Contents

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>  | <b>6</b>  |
| 1.1      | La historia de la unificación . . . . .                              | 6         |
| 1.2      | Limitaciones de los Modelos Actuales . . . . .                       | 7         |
| 1.3      | La Teoría de Cuerdas como candidato a una teoría unificada . . . . . | 9         |
| <b>2</b> | <b>Formulación de la teoría de cuerdas</b>                           | <b>12</b> |
| 2.1      | Formulación clásica . . . . .  | 12        |
| 2.2      | Cuantización de la cuerda bosónica . . . . .                         | 15        |
| <b>3</b> | <b>Acciones efectivas de bajas energías</b>                          | <b>20</b> |
| 3.1      | Acción de la cuerda bosónica . . . . .                               | 20        |
| 3.2      | Acciones a orden $\alpha'$ . . . . .                                 | 23        |
| 3.3      | EOMs de las acciones efectivas . . . . .                             | 25        |
| <b>4</b> | <b>Compactificación de Kaluza-Klein</b>                              | <b>28</b> |
| 4.1      | Desde la perspectiva del espacio-tiempo . . . . .                    | 29        |
| 4.2      | Desde la perspectiva de la cuerda . . . . .                          | 39        |
| <b>5</b> | <b><math>\beta</math>-symmetry</b>                                   | <b>50</b> |
| 5.1      | Invariancia del sector universal . . . . .                           | 53        |
| 5.2      | Transformaciones a orden $\alpha'$ . . . . .                         | 55        |
| <b>6</b> | <b>Variación del Lagrangiano a orden <math>\alpha'</math></b>        | <b>60</b> |
| <b>7</b> | <b>Conclusiones y reflexiones finales</b>                            | <b>68</b> |
| <b>A</b> | <b>EOMs a orden <math>\alpha'</math></b>                             | <b>72</b> |

# 1 Introducción

## 1.1 La historia de la unificación

La historia de la física moderna ha estado marcada por la unificación de teorías; fenómenos inicialmente estudiados de forma independiente son reconocidos como partes de un mismo mecanismo subyacente y las teorías originales son ajustadas para reflejar esta identificación.

Como caso paradigmático, podemos tomar a la teoría electromagnética. En sus inicios, la electricidad y el magnetismo fueron analizados como fenómenos independientes; siendo la electricidad descubierta primero en las investigaciones de Henry Cavendish y Charles Augustin de Coulomb entre los años 1771 y 1785. El fenómeno del magnetismo comienza poco después a ser estudiado, pero siempre considerándolo como un fenómeno independiente del anterior. Es recién entre los años 1819 y 1825 que los estudios de Hans Christian Oersted, Jean-Baptiste Biot, Felix Savart y Andre-Marie Ampère determinan que las corrientes eléctricas generan campos magnéticos. En el año 1831, Michael Faraday muestra que la variación de campos magnéticos genera a su vez campos eléctricos. Si bien estas relaciones entre fenómenos inicialmente independientes se vuelven conocidas, las ecuaciones que las describen resultan ser inconsistentes en su conjunto. Fue James Clerk Maxwell quien en el año 1865 logra construir un conjunto de ecuaciones -conocidas en la literatura como *Las ecuaciones de Maxwell*- las cuales son capaces de recuperar los resultados conocidos de una forma matemáticamente consistente. Como puede verse, este fue un caso en el cual la unificación de las teorías eléctricas y magnéticas en la teoría electromagnética no fue opcional, sino que fue necesario para describir de forma consistente a la naturaleza.

El siguiente cambio de paradigma, fue introducido por Albert Einstein a principios del siglo XX con la Teoría de la Relatividad Especial; en este contexto no son fuerzas las que se unifican sino los conceptos de tiempo y espacio. Esta última fue generalizada para el año 1915 a la llamada Teoría de la Relatividad General; en la cual la gravedad emerge como una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo, proveyendo una descripción geométrica para esta fuerza. Paralelamente, durante la primera mitad del siglo XX fue generado un cambio de paradigma quizás más profundo que el anterior; el desarrollo de la Mecánica Cuántica. Al día de hoy, la mecánica cuántica muestra ser el marco correcto para el desarrollo de toda teoría válida a escala microscópica. A fin de obtener una teoría

consistente en los términos mencionado anteriormente, uno quisiera poder construirla de forma tal que se encuentre basada tanto en los principios de la mecánica cuántica como en los principios de la Teoría de la Relatividad; pudiendo describir además las cuatro fuerzas observadas en la naturaleza: Fuerza Electromagnética, Fuerza Fuerte, Fuerza Débil y Fuerza Gravitatoria.

Las primeras tres fuerzas fue posible incorporarlas dentro de una llamada Teoría Clásica de Campos. A partir de esta ultima, aplicando los métodos canónicos de cuantización que logran llevar una teoría clásica a una teoría formulada en el marco de la Mecánica Cuántica, se llega a la Teoría Cuántica de Campos (TCC); en donde las partículas portadoras de las distintas fuerzas son excitaciones de campos cuánticos. En TCC, fue posible incorporar un modelo unificado para la Fuerza Débil y la Fuerza Electromagnética llamado Electrodinámica Cuántica (o QED por sus siglas en inglés); mientras que la Fuerza Fuerte conforma la denominada Cromodinámica Cuántica (QCD). La combinación del sector electrodébil y el sector de color, conforman el Modelo Estándar de Física de Partículas. El Modelo Estándar logra describir procesos que ocurren a escalas microscopias y energías muy elevadas con una precisión inmensa. De hecho, el momento magnético del electrón predicho en este modelo ha sido contrastado experimentalmente con una precisión relativa de  $1.3 \cdot 10^{-13}$ , convirtiéndose así en la predicción mas precisa de la historia de la ciencia.

### 1.2 Limitaciones de los Modelos Actuales

A pesar de los logros notables del Modelo Estándar, actualmente el mismo presenta una serie de limitaciones. Quizás el mas importante de ellos es el hecho de que no describe a la interacción gravitatoria.

A fin de incorporar la interacción gravitatoria de forma satisfactoria en el marco de una teoría cuántica de campos, siguiendo el mismo procedimiento realizado con la fuerza fuerte y la fuerza electrodébil, seria necesario:

1. Construir una Acción tal que las Ecuaciones de Eintein de la Relatividad General emerjan a partir del Principio de Mínima Acción.
2. Aplicar el proceso de cuantización a la acción anterior, pasando de una Teoría Clásica de Campos a una Teoría Cuántica de Campos. En este punto, las excitaciones del campo cuántico asociados a la gravedad serian las partículas portadoras de esta fuerza; los gravitones.

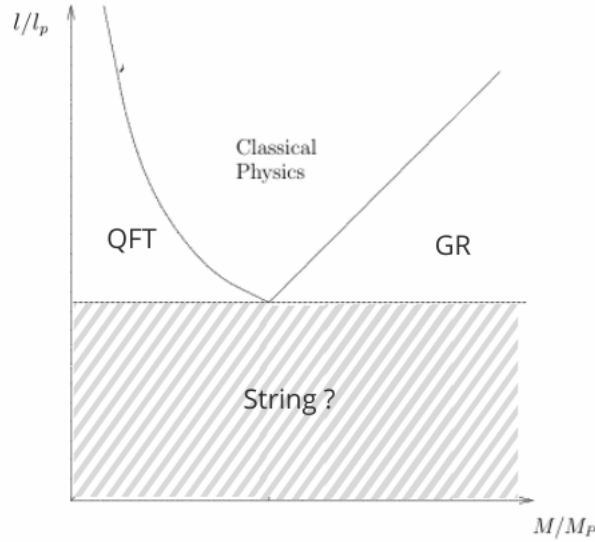
El primero de los puntos anteriores es posible obtenerlo, dando origen a la acción conocida como *Acción de Hilbert-Einstein*

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (1)$$

De esta forma, vemos que en el marco de una teoría clásica de campos la gravedad es posible describirla adecuadamente de manera unificada con las otras interacciones fundamentales de la naturaleza [16].

Sin embargo, se puede mostrar que al intentar aplicar el método de cuantización descrito en el segundo ítem, se llega a una teoría no-renormalizable [22]. Si bien este tipo de teorías tienen capacidad predictiva dentro de ciertos rangos de energía (ver trabajos [10], [9]), no poseen la completitud ultravioleta, por lo que a energía suficientemente alta dejan de valer. Es en este contexto que la teoría resultante suele ser utilizada para un tratamiento efectivo de gravedad cuántica

Llegado a este punto, vale la pena introducir el siguiente esquema; en el cual se visualizan las limitaciones del panorama actual al intentar describir procesos que requieran de Gravedad en Interacción con las otras fuerzas de la naturaleza



**Figure 1:** El esquema representa de forma cualitativa el rango de validez de las teorías contemporáneas. Se puede ver que no es posible describir procesos que requieran una descripción a escala microscópica de la gravedad a escalas de energía elevadas. Figura extraída de [23].



Como puede verse en la figura (1), al no contar con una teoría que logre describir la gravedad en el marco de la Mecánica Cuántica de forma bien comportada a altas energías, no es posible describir procesos microscópicos que ocurran en regiones del espacio-tiempo con curvatura suficientemente elevada.

En particular, este es el caso de:

- **El universo temprano.** Al día de hoy es ampliamente aceptado en el área de la cosmología que en los momentos próximos al Big Bang el universo debió sufrir una etapa inflacionaria, descrita por una expansión exponencial del factor de escala. Esta etapa involucra procesos realizados en una región de enorme curvatura, la cual requiere de una descripción en términos de gravedad cuántica para poder ser estudiado.
- **El interior de Agujeros Negros.** Las Ecuaciones de Einstein formuladas en el marco de la Relatividad General predicen la existencia de Agujeros Negros como una estructura geométrica del espacio-tiempo. Los trabajos de Stephen Hawking realizados en el rango de la validez de la Teoría Cuántica de Campos demuestran que la existencia de Agujeros Negros trae aparejada que estos objetos cuenten con un comportamiento termodinámico; el cual no es posible derivar de la Relatividad General por sí sola. Una descripción consistente de Agujeros Negros y los procesos que se desarrollan en su interior deberían ser realizada desde una teoría cuántica de la gravedad.

De forma adicional a las limitaciones de los modelos contemporáneos descriptos anteriormente, existen argumentos “estéticos” que indican que debe existir una teoría superadora al Modelo Estándar; como la enorme cantidad de partículas que son necesarios incorporar en el modelo y los mas de 20 parámetros adimensionales que es necesario incorporar “a mano” para tener una descripción completa.

En cualquier caso, se ve que la necesidad de contar con una teoría consistente de gravedad cuántica no es opcional. A fin de poder explicar los misterios de nuestro universo -o al menos pretenderlo- será necesario el desarrollo de una teoría unificada de la naturaleza.

### 1.3 La Teoría de Cuerdas como candidato a una teoría unificada

Si bien la teoría de cuerdas surge inicialmente a fines de la década de 1960 en el estudio de *Non-Linear Sigma Models*; actualmente es considerada como la candidata por excelencia a

una teoría unificada de la física.

En la Teoría de Cuerdas la unificación es profunda; los constituyentes elementales de la materia no son partículas puntuales sino filamentos unidimensionales. En efecto, en este contexto las distintas partículas del modelo estándar surgen como los distintos modos de vibración de la cuerda fundamental. Los gravitones (bosones de espín 2), en particular, surgen del modo cero.

Es importante notar que la teoría de cuerdas surge de la cuantización de la cuerda fundamental y predice la existencia de gravedad; por lo tanto es *per se* una teoría cuántica consistente de la gravedad.

De forma adicional, es posible construir acciones efectivas de bajas energías en donde es usual incorporar en el background las tres partículas no masivas predichas por esta teoría: el dilatón  $\phi$ , el gravitón  $G_{\mu\nu}$  y los campos de Kalb-Ramond  $B_{\mu\nu}$ . Haciendo esto a orden cero en  $\alpha'$ , lo cual es equivalente a solo considerar procesos a nivel árbol en TCC, y calculando las ecuaciones de movimiento son recuperadas las Ecuaciones de Einstein de la relatividad general

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} . \quad (2)$$

Mas aun, repitiendo el procedimiento ahora a orden 1 en  $\alpha'$  es posible obtener correcciones a la relatividad general

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{a+b}{2} \left[ \nabla_\sigma \nabla_\lambda R^{\sigma\lambda}{}_{\nu\mu} + \frac{1}{8}g_{\mu\nu}R_{\sigma\lambda\rho\beta}R^{\sigma\lambda\rho\beta} - \frac{1}{2}R_{\mu\lambda\rho\beta}R_{\nu}{}^{\lambda\rho\beta} \right] = T_{\mu\nu} , \quad (3)$$

donde los parámetros  $a$  y  $b$  que aparecen en la ecuación (3) están bien definidos y toman valores concretos dependiendo de que tipo de teoría de cuerdas se este considerando. Este tipo de resultados obtenidos a partir de acciones efectivas de bajas energías serán analizados con mayor detalle en la sección 3.

Por otro lado, un resultado peculiar de la Teoría de Cuerdas es que para que la misma no tenga anomalías, la dimensión del espacio-tiempo debe ser 10 en el caso de la cuerda súper-simétrica. Esto es distinto a lo que sucede en el Modelo Estándar, en donde la dimensión del espacio tiempo se fija para que coincida con las 4 dimensiones observadas.

Pero entonces, ¿que sucede con las 6 dimensiones adicionales que predice la teoría? Dado que el espacio-tiempo es curvo nada impide, por ejemplo, que una dimensión se curve sobre si misma de forma que la misma sea inaccesible en experimentos realizados a baja

energía. Este tipo de estructuras son los denominados *espacios compactos* y se cree que las 6 dimensiones adicionales predichas por Teoría de Cuerdas son compactificadas, de forma que existen en la naturaleza pero no fueron observadas hasta el momento.

Si bien este concepto puede resultar anti-intuitivo, lo cierto es que hay otro tipo de teorías físicas que hacen uso de la compactificación de dimensiones superiores para explicar la presencia de interacciones efectivas a bajas energías: Las teorías de Kaluza-Klein. Este tipo de Teorías fueron primero estudiadas por Theodor Kaluza en 1919 [14] cuando mostró que aplicar las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo de 5 dimensiones, con una de ellas compactificada en un círculo, daba origen a gravedad en 4 dimensiones acoplado con electromagnetismo. La compactificación de Kaluza-Klein será discutida en profundidad durante la sección 4.1. Este tipo de comportamiento junto a la predicción de 6 dimensiones adicionales a las observadas, llevo a la comunidad científica a conjeturar sobre la posibilidad de recuperar el Modelo Estándar con la elección adecuada del espacio interno. Si bien muchos físicos actualmente trabajan en esta búsqueda, se aproxima que existen alrededor de  $10^{500}$  espacios en los cuales sería posible compactificar. Esta es el denominado problema del *Landscape*, uno de los principales desafíos que tiene la Teoría de Cuerdas por delante.

Otras de las limitaciones es que muchos de los resultados en este contexto han sido obtenidos a partir de desarrollos perturbativos, los cuales presentan dos inconvenientes principales:

- El calculo de las correcciones a cada orden no son simples de obtener. En el caso de acciones de bajas energías, la corrección a cada orden requiere del calculo de amplitudes de scattering en donde para incrementar un orden en  $\alpha'$  es necesario calcular las amplitudes a un loop adicional. De esta forma, lo máximo que fue posible calcular fueron las correcciones a orden cubico.
- Las expansiones perturbativas tienen un rango de validez determinado. En general la estructura del resultado obtenido en la ecuación (3) se repite a ordenes siguientes; teniendo términos de la forma  $\alpha'^n (R_{iemman})^n$ . Es claro que para poder despreciar términos de orden superior es necesario asumir que las potencias del tensor de curvatura no compensan las de  $\alpha'$ . En el interior de agujeros negros, por ejemplo, es probable que estas hipótesis dejen de ser ciertas y por lo tanto se requiera considerar la serie perturbativa en su totalidad para obtener predicciones confiables.

Por este motivo, vemos que obtener resultados no perturbativos en Teoría de Cuerdas resulta de mucho interés. Los avances que se han dado en este camino han sido utilizando

fuertemente simetrías de la Teoría. En esta línea es que se enmarcan los resultados obtenidos en este trabajo, en donde se exploran algunos aspectos de la simetría efectiva conocida como  $\beta$ -symmetry. La descripción de esta simetría serán presentados en las secciones 5 y 6.

En particular, en este trabajo se buscará mostrar de forma puramente analítica la invariancia de la acción de bajas energías hasta orden  $\alpha'$  frente a las transformaciones  $\beta$ ; mostrando así como puede ser utilizada esta simetría en conjunto con otras simetrías típicas de teoría de cuerdas para determinar completamente la acción de bajas energías, posicionándola como un mecanismo viable de construcción a mayores ordenes. El calculo explicito de esto ultimo, el cual es en particular un resultado original, será presentado en la sección 6.

## 2 Formulaci3n de la teoría de cuerdas

### 2.1 Formulaci3n clásica

A lo largo de esta secci3n, se buscarán sentar las bases en la formulaci3n clásica y cuántica de la teoría de cuerdas; así como los principales éxitos obtenidos hacia la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad. Para ello, se utilizará fuertemente los resultados presentes en la literatura [12] [21].

En la formulaci3n clásica de la teoría de cuerdas, lo que se busca es el estudio de una acci3n que describa la dinámica de cuerdas relativistas.

Siguiendo esta línea, en analogía a lo hecho para el caso de una partícula puntual relativista, es posible escribir la *Acci3n de Nambu-Goto*

$$S_{NG} = -T \int dA = -T \int d^2\sigma \sqrt{-(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}. \quad (4)$$

$dA$  corresponde al diferencial de área de la *Hoja de Mundo*, la cual puede ser parametrizada en funci3n de los parámetros  $(\tau, \sigma)$  de la cuerda; y  $T$  es la tensi3n de la cuerda. Por razones históricas, esta ultima se escribe como  $T = (2\pi\alpha')^{-1}$ .

Por otro lado, es necesario destacar que se ha utilizado la notaci3n  $\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$ ;  $X'^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ .

Si bien la acci3n de Nambu-Goto es una acci3n valida para la descripci3n de este objeto desde el punto de vista relativista, el hecho de tener una raíz cuadrada en la definici3n de la

acción traerá inconvenientes al abordar su cuantización. Es por este motivo, que se busca construir una acción que evada este inconveniente.

De esta forma, surge la acción de Polyakov, la cual introduce un campo auxiliar (Denominada *Métrica Intrínseca*)

$$S_p = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu . \quad (5)$$

Si bien la acción de Polyakov se ve distinta a la acción de Nambu-Goto; al calcular las ecuaciones de movimiento para el campo auxiliar  $h^{ab}$  y reemplazarlas en la acción se recupera esta última.

A partir de la acción anterior, es posible calcular las ecuaciones de movimiento,

$$\begin{cases} \frac{\delta S}{\delta h^{ab}} = \frac{\sqrt{-h}}{4\pi} T_{ab} = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta X^\mu} = \frac{1}{\sqrt{-h}} \partial_a (\sqrt{-h} h^{ab} \partial_b X^\mu) = 0 \end{cases} . \quad (6)$$

La primera de las dos ecuaciones anteriores, será entendida como una **restricción** de la teoría, pues proviene de las ecuaciones de un campo no dinámico.

Explícitamente, el constraint impuesto es que  $T_{ab} = 0$ .

Por otro lado, podemos analizar las simetrías que debe respetar la acción de polyakov:

- Invariancia ante transformaciones globales de Poincaré:  $X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu + b^\mu$ .
- Invariancia ante reparametrizaciones
- Invariancia ante reescaleos de Weyl:  $h_{ab} \rightarrow e^{2\phi} h_{ab}$ .

Pidiendo estas restricciones adicionales, podemos ver que la elección de una métrica intrínseca es equivalente a realizar un fijado de un gauge. Por este motivo, de ahora en adelante se trabajará en el gauge conformalmente plano ( $h_{ab} = \eta_{ab}$ ).

De esta forma, las ecuaciones de movimiento se reducen en este gauge a:

$$T_{ab} = 0 . \quad (7a)$$

$$\partial_a \partial^a X^\mu = 0 . \quad (7b)$$

Vemos que la ecuación (7b) corresponde a una ecuación de onda, mientras que la ecuación (7a) es un constraint para el tensor de Energía-Impulso, como vimos anteriormente.

Explícitamente, esta última podemos expandirla como

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \eta_{ab} \eta^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu = 0, \quad (8)$$

lo que implica que  $\dot{X} \cdot X' = 0$  (la cuerda solo admite oscilaciones transversales) y que  $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$  (los extremos de la cuerda se mueven a la velocidad de la luz  $c$ ).

En este punto, es conveniente introducir las llamadas *Coordenadas del cono de luz*. Estas coordenadas se definen como

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma. \quad (9)$$

En estas coordenadas, las ecuaciones de movimiento se escribe

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0, \quad (10)$$

lo que nos permite concluir que la forma mas general para  $X^\mu$  es:

$$X^\mu = X_R^\mu(\sigma^-) + X_L^\mu(\sigma^+). \quad (11)$$

Por otro lado, consideremos en particular el caso de la cuerda cerrada. En este caso, debemos imponer además la condición de periodicidad  $X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau)$ . En esta situación, se puede ver que la solución mas general de la ecuación de movimiento está dada por

$$X_R^\mu = \frac{1}{2} X^\mu + \frac{\pi \alpha'}{l} p^\mu \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-\frac{2\pi i}{l} n \sigma^-}. \quad (12a)$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2} X^\mu + \frac{\pi \alpha'}{l} p^\mu \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-\frac{2\pi i}{l} n \sigma^+}. \quad (12b)$$

A su vez, las condiciones de anulación del tensor energía-impulso toman la forma  $(\partial_+ X_L^\mu)^2 = (\partial_- X_R^\mu)^2 = 0$  en las coordenadas del cono de luz. Lo cual es equivalente a  $L_n = \tilde{L}_n$ ; donde definimos a los generadores de Virasoro

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_m^\mu \alpha_{\mu, n-m} \quad (13a)$$

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_m^\mu \tilde{\alpha}_{\mu, n-m} \quad (13b)$$

y se adopto la definición  $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu$ .

Dado además que en esta signatura  $p^2 = -M^2$ , esto nos permite definir la masa de la cuerda como

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{m \neq 0} \alpha_{-m} \alpha_m = \frac{2}{\alpha'} \sum_{m \neq 0} \tilde{\alpha}_{-m} \tilde{\alpha}_m . \quad (14)$$

Esta ultima condición ( $\sum_{m \neq 0} \alpha_{-m} \alpha_m = \sum_{m \neq 0} \tilde{\alpha}_{-m} \tilde{\alpha}_m$ ) se conoce como la *Level-Matching Condition*.

Para el caso de la cuerda abierta, el calculo es análogo. La diferencia, sin embargo, esta en que al no contar con la condición de periodicidad es necesario imponer condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno posibles son:

1. **Condiciones de Neumann:**  $\partial_\sigma X^\mu|_{0,l} = 0$ .

2. **Condiciones de Dirichlet:**  $\delta X^\mu|_{0,l} = 0$ .

En el caso de que tengamos un espacio D-dimensional, podemos elegir condiciones de Neumann en ciertas direcciones  $a, a = 0, \dots, p$  y condiciones de Dirichlet en otras ciertas coordenadas  $X^I, I = p + 1, \dots, D - 1$ .

Se puede ver que estas condiciones definen una superficie  $p + 1$  dimensional sobre la cual los extremos de las cuerdas abiertas pueden moverse. Estas hipersuperficies son conocidas como  $D_p$ -*branas*.

## 2.2 Cuantización de la cuerda bosónica

Se conocen distintos mecanismos, todos equivalentes, para realizar la cuantización de la cuerda clásica.

A continuación, se presentará la llamada *Cuantización en el cono de luz*. En la misma, la principal ventaja es que quedan en evidencia los verdaderos grados de libertad del sistema y es posible encontrar de forma simple el espectro de la cuerda.

Definimos las coordenadas sobre el cono de luz como

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 \pm X^1) , \quad (15)$$

de forma que tomaremos como base de coordenadas espacio-temporales al conjunto  $\{X^+, X^-, X^2, \dots, X^D\}$ . En esta base, el intervalo se escribe

$$dS^2 = -2dX^+dX^- + \sum_{i=2}^D dX^i dX^i. \quad (16)$$

Utilizando la invariancia frente a reparametrizaciones, podemos parametrizar  $X^+ = \alpha' p^+ \tau$ , con  $p^+ \neq 0$ .

Con estas definiciones, la ecuación de movimiento para la coordenada  $X^+$  se escribe

$$\partial_+ \partial_- X^+ = \partial_+ \partial_- \left( \frac{\alpha' p^+}{2} (\sigma^+ + \sigma^-) \right) = 0; \quad (17)$$

mientras que las condiciones de nulidad del tensor energía-momento se escriben

$$\partial_- X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \partial_+ X^i \partial_+ X_i. \quad (18a)$$

$$\partial_+ X_R^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \partial_- X^i \partial_- X_i. \quad (18b)$$

Pero por otro lado, vimos que la coordenada  $X^-$  puede ser expandida en modos como

$$X_L^-(\sigma^+) = \frac{1}{2} x^- + \frac{\alpha'}{2} p^- \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^+}. \quad (19a)$$

$$X_R^-(\sigma^-) = \frac{1}{2} x^- + \frac{\alpha'}{2} p^- \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\sigma^-}. \quad (19b)$$

Juntando todo, vemos que las condiciones sobre las coordenadas se transforman en relaciones para los modos  $\alpha_n^\mu$ ,

$$\alpha_n^- = \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}} \sum_m \alpha_{n-m}^i \alpha_{i,m}. \quad (20)$$

En particular, el modo cero verifica

$$\frac{\alpha' p^-}{2} = \frac{1}{2p^+} \left[ \alpha' (p^i)^2 + \sum_n \alpha_n^i \alpha_{i,-n} \right] = \frac{1}{2p^+} \left[ \alpha' (p^i)^2 + \sum_n \tilde{\alpha}_n^i \tilde{\alpha}_{i,-n} \right]. \quad (21)$$

Definiendo la masa como  $M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^i p_i$ , entonces la expresion anterior se reescribe



$$\alpha' M^2 = \sum_n \alpha_n^i \alpha_{i,-n} = \sum_n \tilde{\alpha}_n^i \tilde{\alpha}_{i,-n} . \quad (22)$$

Como conclusi3n, vemos que en estas coordenadas fue simple utilizar la invariancia ante reparametrizaciones, las ecuaciones de movimiento y las condiciones sobre el tensor energ3a-momento para:

1. Mostrar que el sistema cuenta con  $D(D - 2)$  grados de libertad.
2. Obtener una expresi3n para la masa de la cuerda en funci3n de D-2 modos de oscilaci3n.

A partir de aqu3, la cuantizaci3n se realizar3 promoviendo las cantidades de inter3s a operadores e imponiendo las reglas de conmutaci3n obtenidas cl3sicamente;

- $[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\delta^{ij}.$
- $[\hat{x}^-, \hat{p}^+] = -i.$
- $[\hat{\alpha}_n^i, \hat{\alpha}_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}.$
- $[\hat{\tilde{\alpha}}_n^i, \hat{\tilde{\alpha}}_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}.$

Luego, el espacio de Fock se construir3 definiendo un estado de vac3o  $|0, p\rangle$  tal que sea aniquilado por los operadores de destrucci3n  $\hat{\alpha}_n^i$  y  $\hat{\tilde{\alpha}}_n^i$ .

Expl3citamente, esto es

$$\hat{p}^\mu |0, p\rangle = p^\mu |0, p\rangle \quad (23a)$$

$$\hat{\alpha}_n^i |0, p\rangle = \hat{\tilde{\alpha}}_n^i |0, p\rangle = 0 \quad (23b)$$

para todo  $n > 0$ . Los estados excitados se construir3n a partir de la aplicaci3n sucesiva de los operadores de creaci3n  $\hat{\alpha}_{-n}^i$  y  $\hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^i$ .

Por ejemplo, el primer estado excitado ser3

$$\hat{\alpha}_{-n}^i |0, p\rangle ; \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^i |0, p\rangle . \quad (24)$$

Por otra parte, podemos mostrar utilizando el 3lgebra de Virasoro que el operador de masa es

$$\frac{\alpha'}{4}M^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_{n,i} + \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (25)$$

Como vemos, será necesario regularizar el ultimo termino de la suma. Para ello, apelaremos a la continuación analítica de la función  $\zeta$  de Riemann,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad (26)$$

de forma que  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ .

De esta manera, el operador de masa pasa a escribirse como

$$\frac{\alpha'M^2}{4} = N - \frac{D-2}{24} = \tilde{N} - \frac{D-2}{24}, \quad (27)$$

en donde se definieron de la forma usual los operadores de numero  $N$  y  $\tilde{N}$ .

Además podemos recordar el *level-matching condition*, según el cual  $N = \tilde{N}$  en el caso de la cuerda cerrada.

Habiendo construido los distintos estados de la cuerda, estamos en condiciones de analizar su espectro. A continuación, haremos el análisis para el caso de la cuerda cerrada.

**estado fundamental:**

Para el estado fundamental  $|0, p\rangle$ , tenemos que

$$N = \tilde{N} = 0. \quad (28a)$$

$$\frac{\alpha'M^2}{4} = -\frac{D-2}{24}. \quad (28b)$$

Vemos que la masa del estado dependerá de la dimensionalidad del espacio-tiempo; para  $D \geq 3$  estamos en presencia de un taquión, entendida como una inestabilidad de la teoría.

**primer excitado:**

Por la condición de Level Matching sabemos que este caso corresponde a tomar  $N = \tilde{N} = 1$ , de forma tal que el estado es

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0, p\rangle. \quad (29)$$

Supongamos que este estado es masivo. Luego, si pasáramos al sistema en reposo tenemos que el cuadvivector  $p^\mu$  podemos escribirlo como  $p^\mu = (m, 0, \dots, 0)$ , cuyo grupo de

simetría asociado es  $\mathcal{SO}(D - 1)$ . Sin embargo, si este fuera el caso, tendríamos  $(D - 1)^2$  estados en el estado fundamental. Esto entra en contradicción con la expresión (29), en donde se ve que hay  $(D - 2)^2$  estados. Concluimos que no es posible interpretar al primer excitado como estados masivos.

En cambio, si el estado fuera no masivo siempre podemos escribir su cuádrimomento en el sistema en reposo como  $p^\mu = (m, m, 0, \dots, 0)$ . En cuyo caso vemos que el grupo de simetría asociado es  $\mathcal{SO}(D - 2)$ , con  $(D - 2)^2$  estados posibles en su interior.

Concluimos pues que la masa de estos estados deberá ser nula. Esto, de hecho, nos impone que la dimensiones del espacio tiempo deberá ser  $D=26$ , lo que volviendo al caso del estado fundamental nos dice además que  $\frac{\alpha'}{4} M_{taq}^2 = -1$ .

Por otro lado, vemos que el estado (29) se encuentra en una representación  $24 \otimes 24$  del grupo  $\mathcal{SO}(24)$ , la cual no es una representación irreducible.

La misma, podemos descomponerla como suma directa de su parte simétrica, su parte antisimétrica y su traza  $S \oplus A \oplus Tr = S_{ij} + A_{ij} + \phi$ ;

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0, p\rangle = \left[ \left( \frac{\tilde{\alpha}_{-1}^i \alpha_{-1}^j + \tilde{\alpha}_{-1}^j \alpha_{-1}^i}{2} \right)_{i \neq j} + \left( \frac{\tilde{\alpha}_{-1}^i \alpha_{-1}^j - \tilde{\alpha}_{-1}^j \alpha_{-1}^i}{2} \right) + \tilde{\alpha}_{-1}^i \alpha_{-1}^i \right] |0, p\rangle . \quad (30)$$

De esta descomposición, es posible realizar la identificación

- $S_{ij} \rightarrow g_{\mu\nu}$  campo de spin 2, el **gravitón**.
- $A_{ij} \rightarrow B_{\mu\nu}$  campo de **gauge**.
- $\phi$  campo escalar, el **dilatón**.

Para el caso de la cuerda abierta, el análisis es similar. Por lo visto anteriormente, podemos tomar  $D = 26$  y consecuentemente, si utilizamos condiciones de Neumann en ambos extremos:

**El estado fundamental** es un taquión, mientras que el **primer excitado** corresponde a un vector de gauge  $A^\mu$  no masivo.

En el caso de las cuerdas abiertas, además, existe la posibilidad de considerar condiciones de Dirichlet en determinados extremos (dando origen a las  $D_p$  — *branas*). El análisis de estos casos excede el objetivo de esta sección.

Finalmente, es necesario destacar que hasta ahora hemos analizados los primeros dos estados del espectro de la cuerda; ¿Que sucede con los siguientes?

Los estados con  $N \geq 2$ ,  $\tilde{N} \geq 2$  corresponden a estados masivos en representaciones de  $\mathcal{SO}(25)$ . Notar que el primer estado no masivo tiene una masa de la escala de la masa de planck  $M_p$  y por lo tanto se desacopla en el limite de bajas energías. Es por este motivo, que en la siguiente sección se buscarán construir acciones de bajas energías considerando un fondo formado únicamente por los estados no-masivos  $B_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, \phi$ .

Si bien el análisis anterior fue realizado para la cuerda bosónica -llamada así pues todas sus excitaciones son bosones- una construcción similar puede realizarse para la cuerda fermiónica, en la cual los fermiones emergen al introducir la supersimetría. La consecuencia sobre el espectro de la introducción de los fermiones es que dimensión critica pasa a ser  $D = 10$ , mientras que el estado taquiónico es eliminado. Sin embargo, los campos no masivos analizados anteriormente siguen estando presentes y es por eso que sobrevivirán en las acciones de bajas energías, conformando el denominado *Sector Universal*.

### 3 Acciones efectivas de bajas energías

#### 3.1 Acción de la cuerda bosónica

En la sección 2.2 vimos que fue posible construir el espectro de la cuerda bosónica, en donde encontramos que el gravitón emerge naturalmente del proceso de cuantización de la cuerda clásica como un estado no masivo del espectro.

También encontramos que existen otros dos campos no masivos; el campo de Kalb-Ramond  $B_{\mu\nu}$  y el dilatón  $\phi$ . Los estados siguientes del espectro tienen masas del orden de la masa de Planck  $M_p \sim 10^{19} GeV$ . A bajas energías, estos últimos serán desacoplados siendo únicamente posible interactuar con los modos no masivos del espectro.

Por lo tanto, lo primero que nos interesará será si es posible construir una acción que describa a una cuerda acoplada con un fondo, en donde elegiremos por que campos estará compuesto el mismo.

En lo que sigue, se mostrará cual es la acción que describe a una cuerda moviéndose en un fondo compuesto por distintos modos. Esta subsección, se basa fuertemente en los trabajos [12], [7], [17] y [8].

Recordemos que la acción de Polyakov se define como

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu, \quad (31)$$

en donde se esta asumiendo que el espacio tiempo es plano.

Si quisiéramos extender la acción de Polyakov a espacios curvos, la generalización obvia seria considerar la acción

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X), \quad (32)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  ahora corresponde a la métrica del espacio-tiempo.

Sin embargo, de la cuantización de la acción de Polyakov habíamos visto que emergía el gravitón; partícula portadora de la fuerza gravitatoria. Por lo tanto, esperaríamos que, de alguna forma, la acción (32) sea posible construirla usando un fondo de gravitones.

Para mostrar que esto efectivamente es así, consideremos una perturbación a la métrica plana dada por

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (33)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (32), obtenemos que

$$S = S_p + V, \quad (34)$$

con  $S_p$  la acción de Polyakov original y

$$V = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu h_{\mu\nu}(X). \quad (35)$$

Luego, la función de partición podemos escribirla como

$$\mathcal{Z} = \int DX Dg e^{-S_p - V} = \int DX Dg e^{-S_p} \left[ 1 - V + \frac{1}{2} V^2 + \dots \right]. \quad (36)$$

Ahora, notemos que en particular si  $h_{\mu\nu} = \zeta_{\mu\nu} e^{ipx}$ , con  $\zeta_{\mu\nu}$  un tensor simétrico; entonces la expresión de  $V$  coincide idénticamente con la del operador de vértice de un gravitón con polarización  $\zeta_{\mu\nu}$  e impulso  $p^\mu$ .

Además,  $\zeta_{\mu\nu} e^{ipx}$  corresponde a una base para expandir el tensor  $h_{\mu\nu}$ , debido a que ambos son simétricos. Un  $h_{\mu\nu}$  arbitrario puede ser siempre escrito como una combinación lineal de ondas planas.

Luego, como la inserción de un único operador de vértice corresponde a incorporar un único gravitón; el termino  $e^V$  corresponderá a una superposición coherente de gravitones.

Como conclusión de lo anterior, vemos que efectivamente la acción (32) describe a una cuerda moviéndose en un fondo de gravitones, tal como esperábamos.

Lo siguiente que nos interesará es, de la misma forma que hicimos para el gravitón, construir acciones que describan la dinámica de la cuerda fundamental acoplada a un fondo compuesto por todos los campos no masivos:  $G_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu}$  y  $\Phi$ .

Para el caso del campo de Kalb-Ramond, el operador de vértice asociado es idéntico al del gravitón, con la diferencia de que el tensor de polarización  $\zeta_{\mu\nu}$  es ahora antisimétrico.

Siguiendo los mismos pasos que antes, se puede mostrar que la acción que describe a una cuerda acoplada con los campos  $B_{\mu\nu}$  y  $G_{\mu\nu}$  es

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \left( g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(X) \right), \quad (37)$$

con  $\epsilon^{\alpha\beta}$  un tensor antisimétrico.

Finalmente, la acción que contiene los 3 campos no masivos (incluyendo el dilatón) es

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \left( g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \alpha' \Phi(x) R^{(2)} \right); \quad (38)$$

donde  $R^{(2)}$  corresponde al *escalar de Ricci* sobre la hoja de mundo 2-dimensional.

Hasta el momento, nos convencimos de que la acción (38) es una acción válida desde el punto de vista de la teoría de cuerdas. Sin embargo, en la sección 2.2 a su vez vimos que la invariancia ante transformaciones de Weyl es una simetría fundamental de la teoría.

Si bien el término del dilatón rompe explícitamente esta simetría en el caso clásico, buscaremos las condiciones para las cuales la invariancia de Weyl se recupera cuanticamente.

Para ello, la estrategia será calcular las funciones beta del grupo de renormalización y pedir que las mismas se anulen.

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta(\Phi) = 0. \quad (39)$$

Las funciones beta miden la variación de la constante de acoplamiento con respecto a la escala de energía, y para obtenerlas es necesario calcular procesos de scattering.

El procedimiento típicamente es complejo y para obtener las funciones  $\beta$  a distintos ordenes en  $\alpha'$  es necesario tener en cuenta procesos con una cantidad creciente de loops.

A continuación, se dejan las expresiones para estas funciones a orden  $\alpha'$  [6]

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \alpha' R_{\mu\nu} + 2\alpha' \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{\alpha'}{4} H_{\mu\lambda\kappa} H_\nu^{\lambda\kappa} + \mathcal{O}(\alpha'^2). \quad (40a)$$

$$\beta_{\mu\nu}(B) = -\frac{\alpha'}{2} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} + \alpha' \nabla^\lambda \Phi H_{\lambda\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha'^2). \quad (40b)$$

$$\beta(\Phi) = -\frac{\alpha'}{2} \nabla^2 \Phi + \alpha' \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{\alpha'}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + \mathcal{O}(\alpha'^2). \quad (40c)$$

Como dijimos anteriormente, pedir que se recupere la invariancia de Weyl es equivalente a pedir la nulidad de las funciones beta. Esto ultimo abre una nueva pregunta: ¿Es posible construir una acción sobre un espacio D-dimensional cuyas ecuaciones de movimiento sean las condiciones anteriores?

En efecto, la respuesta a esta pregunta es afirmativa. Para la cuerda bosónica (con dimensión crítica  $D = 26$ ), esta acción es

$$S_{LE} = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left( R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\Box\phi - \frac{1}{12} H^2 \right). \quad (41)$$

Esta acción, se conoce en la literatura como *Acción de Bajas Energías* y nos permite entender los efectos de cuerdas sobre el espacio-tiempo.

Antes de pasar al estudio de acciones efectivas a orden 1 en potencias de  $\alpha'$ , es importante notar que:

1. La acción (41) la calculamos para el caso de la cuerda bosónica y constituye lo que se conoce como el *sector universal*. Para cuerdas Tipo IIA, Tipo IIB y Heterótica; este sector se mantiene sin modificaciones a orden cero en  $\alpha'$ . A ordenes siguientes, sin embargo, las acciones sufrirán distintas correcciones.
2. En general, dado que la teoría de cuerdas supersimétrica incluye fermiones, es posible incorporar en la acción modos fermiónicos de la cuerda. A la larga, sin embargo, los mismos no serán tenidos en cuenta.

### 3.2 Acciones a orden $\alpha'$

La equivalencia entre la expansión a primer orden en  $\alpha'$  en la acción de cuerdas de bajas energías y la cancelación de la anomalía de Weyl en el modelo  $\sigma$  a dos loops fue primero verificada por R. Metsaev y A. Tseytlin [19]. Los autores mostraron que las correcciones

a orden  $\alpha'$  para un fondo compuesto por el gravitón  $G_{\mu\nu}$ , la dos forma  $B_{\mu\nu}$  y el dilatón  $\phi$  queda completamente determinada por ocho coeficientes, los cuales deben ser determinados por amplitudes de dispersión a tres y cuatro puntos de estados no masivos. Realizando este procedimiento, encontraron también las correcciones para la teoría de cuerdas Bosónica, Heterótica, Tipo I, Tipo IIA y Tipo IIB.

A continuación se muestra una expresión compacta para la acción de bajas energías a orden  $\alpha'$

$$S_{MT} = \int dx \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left( L^{(0)} + L^{(1)} \right), \quad (42)$$

donde el supra-índice en los términos  $L$  indica el orden en  $\alpha'$  al que corresponde. Explícitamente, estos términos son

$$L^{(0)} = R - 4\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + 4\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \frac{1}{12} H^2. \quad (43a)$$

$$L^{(1)} = \frac{a-b}{4} H^{\mu\nu\rho} \Omega_{\mu\nu\rho} - \frac{a+b}{8} \left[ R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2} H^{\mu\nu\rho} H_{\mu\sigma\lambda} R_{\nu\rho}{}^{\sigma\lambda} \right. \\ \left. + \frac{1}{24} H^{\mu\nu\rho} H_{\mu\sigma}{}^\lambda H_{\nu\lambda}{}^\delta H_{\rho\delta}{}^\sigma - \frac{1}{8} H_{\mu\rho\delta} H^{\mu\rho}{}_\lambda H_{\nu\sigma}{}^\delta H^{\nu\sigma\lambda} \right]. \quad (43b)$$

La elección de los parámetros  $a$  y  $b$ , corresponde a fijar el tipo de teoría que estamos considerando.

$$\frac{a+b}{8} = \begin{cases} -\frac{1}{4}\alpha' & \text{Cuerda Bosónica} \\ -\frac{1}{8}\alpha' & \text{Cuerda Heterótica} \\ 0 & \text{Tipo II} \end{cases}, \quad \frac{a-b}{8} = \begin{cases} 0 & \text{Cuerda Bosónica} \\ -\frac{1}{8}\alpha' & \text{Cuerda Heterótica} \\ 0 & \text{Tipo II} \end{cases} \quad (44)$$

Esta forma de escribir la acción de bajas energías, es lo que se conoce como *Esquema de Metsaev - Tseytlin*. Como una redefinición de campos no cambia la física subyacente, es posible reescribir esta misma acción de formas distintas. Esto es lo que se conoce como realizar un cambio de esquema [18].

En ocasiones un determinado esquema es útil para realizar ciertos cálculos pero, a fin de analizar de forma práctica las simetrías de la acción, es necesario realizar un cambio de esquema.



Un esquema alternativo en el cual será de utilidad escribir esta acción, es el conocido como *Esquema de Bergshoeff De Roo*[5].

En este esquema, la acción se escribe de forma mas compacta al introducir términos *con torsión*. La acción en este esquema se escribe

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} (L^{(0)} + aL_a^{(1)} + bL_b^{(1)}); \quad (45)$$

donde  $L^{(0)}$  representa el Lagrangiano de orden mas bajo en potencias de  $\alpha'$ , mientras que  $L_a^{(1)}$  y  $L_b^{(1)}$  representan las correcciones de primer orden.

Cada uno de los términos anteriores se escribe en este esquema como

$$L^{(0)} = R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\Box\phi - \frac{1}{12}H^2. \quad (46a)$$

$$L_a^{(1)} = \frac{1}{4}H^{abc}\Omega_{abc}^{(-)} - \frac{1}{8}R_{abcd}^{(-)}R^{(-)abcd}. \quad (46b)$$

$$L_b^{(1)} = -\frac{1}{4}H^{abc}\Omega_{abc}^{(+)} - \frac{1}{8}R_{abcd}^{(+)}R^{(+ )abcd}. \quad (46c)$$

Por otro lado, un punto a remarcar es el hecho de que todos los índices corresponden a índices planos (asociados al formalismo de vielbein).

La acción escrita en este esquema, será utilizada en la sección 6, para mostrar que la misma es posible recuperarla pidiendo que se respeten ciertas simetrías de la teoría.

### 3.3 EOMs de las acciones efectivas

A fin de entender las implicancias de las acciones efectivas, será de interés calcular las ecuaciones de movimiento a orden cero y a primer orden en  $\alpha'$ .

Los campos de los que depende la acción son el dilatón  $\phi$ , el tensor antisimétrico  $B_{\mu\nu}$  y la métrica  $g_{\mu\nu}$ . A orden cero en  $\alpha'$ , una variación genérica de la acción respecto de los campos se escribe a menos de derivadas totales como

$$\delta S = \int d^n X \sqrt{-g} e^{-2\phi} (\Delta\phi\delta\phi + \Delta g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \Delta B^{\mu\nu}\delta B_{\mu\nu}), \quad (47)$$

donde

$$\Delta\phi = -2\mathcal{L}_0 = -2R + 8\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - 8\nabla_\mu\nabla^\mu\phi + \frac{1}{6}H^2. \quad (48a)$$

$$\Delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\Delta\phi + R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{1}{4}H_{\mu\rho\sigma}H_\nu{}^{\rho\sigma}. \quad (48b)$$

$$\Delta B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla^\rho H_{\rho\mu\nu} - \nabla^\rho \phi H_{\rho\mu\nu}. \quad (48c)$$

El punto extremal de la acción corresponderá a pedir que  $\Delta\phi = \Delta B_{\mu\nu} = \Delta g_{\mu\nu} = 0$ .

A partir de las ecuaciones de movimiento anteriores, podemos ver que reemplazando  $\Delta\phi = 0$  en (48b) y multiplicando la expresión resultante por  $\alpha'$  llegamos a que la ecuación de movimiento para la métrica resulta ser

$$\alpha' R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{\alpha'}{4}H_{\mu\rho\sigma}H_\nu{}^{\rho\sigma} = 0 = \beta_{\mu\nu}(G); \quad (49)$$

mientras que multiplicando (48c) por  $-\alpha'$  llegamos a que la ecuación de movimiento para la dos forma es

$$-\frac{\alpha'}{2}\nabla^\rho H_{\rho\mu\nu} + \alpha'\nabla^\rho \phi H_{\rho\mu\nu} = \beta_{\mu\nu}(B) = 0. \quad (50)$$

Análogamente, si multiplicamos (48b) por  $g^{\mu\nu}$  y usamos que  $\Delta\phi = 0$  llegamos a una expresión que relaciona el escalar de curvatura con los demás campos presentes en la acción

$$R = \frac{1}{4}H_{\mu\rho\sigma}H^{\mu\rho\sigma} - 2\nabla^2\phi. \quad (51)$$

Usando (51) dentro de (48a) y multiplicando el resultado por  $\frac{\alpha'}{8}$  llegamos a que la ecuación de movimiento para  $\phi$  puede reescribirse como

$$-\frac{\alpha'}{2}\nabla^2\phi + \alpha'\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{\alpha'}{24}H_{\mu\rho\sigma}H^{\mu\rho\sigma} = \beta(\Phi) = 0. \quad (52)$$

Concluimos entonces que, en efecto, de las ecuaciones de movimiento de la acción a orden cero (41) se recupera la condición de nulidad de las funciones beta del grupo de normalización a orden  $\alpha'$ ; tal como buscábamos.

Alternativamente, de la ecuación (48b), reemplazando explícitamente el valor de  $\Delta\phi$  (48a), vemos que obtenemos una expresión de la forma

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (53)$$

donde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  y definimos un objeto  $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\phi, B_{\mu\nu})$ .

Vemos entonces que de las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva a orden cero en  $\alpha'$  recuperamos también las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General. Interpretamos además, a  $T_{\mu\nu}$  como el tensor de energía-momento en este fondo.

Vemos adicionalmente, que si consideramos el sector puramente gravitatorio, tomando  $\phi = B_{\mu\nu} = 0$ , entonces recuperamos las ecuaciones de Einstein de vacío

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (54)$$

Por otro lado, vale la pena destacar dos observaciones:

1. Las ecuaciones de movimiento reproducen ecuaciones de Einstein pero no en 4 dimensiones, como se las suele estudiar en Relatividad General, sino en  $n$  dimensiones arbitrarias. Para el caso de la cuerda supersimétrica  $n = 10$ .
2. Dado que las ecuaciones de Einstein se obtuvieron de considerar acciones efectivas a orden mas bajo en potencias de  $\alpha'$ , esperamos que al incorporar términos de orden superior obtengamos correcciones a las ecuaciones de Einstein..

Respecto al primer punto, si bien es cierto que en principio estamos considerando una cantidad de dimensiones que no se corresponden a las observadas experimentalmente; al considerar procesos de compactificación es posible hacer contacto con las típicas 4 dimensiones del espacio-tiempo. En este proceso, es posible demostrar que las ecuaciones de Einstein seguirán siendo recuperadas. El detalle de esta observación será tratada en la sección siguiente.

Respecto al segundo punto, efectivamente podemos ahora considerar la acción efectiva a orden  $\alpha'$  escrita en el esquema de Metzaev - Tseytlin (231b). De nuevo, para calcular las ecuaciones de movimiento deberemos variar la acción respecto a los campos y pedir la anulación de cada término de forma independiente a la variación considerada. Sin embargo, dado que la corrección a orden  $\alpha'$  contiene términos de Chern-Simon -los cuales solo admiten una descripción en formalismo de Frame- las ecuaciones de movimiento completas no admitirán su escritura en el formalismo métrico.

De esta forma, en este cálculo debemos considerar las variaciones respecto a los campos  $\phi$ ,  $B_{ab}$  y  $e_a^\mu$ . Donde los índices latinos hacen referencia a índices planos.

Este hecho, hace que calcular las ecuaciones de movimiento sea un proceso mas complejo. Para simplificar, siendo además que nuestro interés esta en calcular las correcciones a las ecuaciones de movimiento para el sector puramente gravitatorio, podemos hacer la cuenta en el formalismo métrico teniendo en cuenta que luego de obtener las ecuaciones tomaremos el limite  $\phi, B_{\mu\nu} \rightarrow 0$ .

De esta forma, se puede llegar a que, a orden  $\alpha'$  las ecuaciones de movimiento para el sector gravitatorio son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \alpha' \left[ \frac{a-b}{4} \nabla_\sigma \nabla_\lambda R^\sigma{}_{\nu\mu}{}^\lambda + \frac{a+b}{16} g_{\mu\nu} R_{\sigma\lambda\rho\beta} R^{\sigma\lambda\rho\beta} \right] = T_{\mu\nu}; \quad (55)$$

Donde nuevamente  $T_{\mu\nu}$  dependerá de los campos restantes y puede ser interpretada como un tensor de energía-momento; siendo que al anular los campos  $\phi$  y  $B_{\mu\nu}$ ,  $T_{\mu\nu}$  también se anulará.

El calculo detallado de este resultado puede encontrarse en el apéndice A.

De esta forma, vemos que efectivamente fue posible encontrar correcciones a las ecuaciones de la Relatividad General.

## 4 Compactificación de Kaluza-Klein

Hasta ahora, hemos hecho un repaso de la teoría de cuerdas que va desde su formulación fundamental, hasta el desarrollo de acciones efectivas de bajas energías. Sin embargo, ha habido un punto en el cual no se ha hecho énfasis hasta ahora: la dimensionalidad del espacio.

A diferencia de lo que sucede en la teoría de la relatividad general (RG) o en la teoría cuántica de campos (TCC), en donde las dimensiones del espacio-tiempo son "fijadas" a 4 debido a las observaciones fenomenológicas; en la teoría de cuerdas el numero de dimensiones del espacio-tiempo quedan determinadas al pedir la nulidad de la carga central (i.e. la restauración de la simetría de Weyl en el proceso de cuantización).

De esta forma, para el caso de la cuerda bosónica mostramos en la sección 2.2 que las dimensiones del espacio-tiempo debían ser  $D = 26$ . Al incorporar supersimetría, la condición pasa a ser  $D = 10$  [24][12].

Una pregunta que surge de forma inmediata al obtener estos resultados, es si existe algún mecanismo en la naturaleza que permita compatibilizar la dimensionalidad predicha con la observada; La respuesta es que si.

Efectivamente, con el desarrollo de la teoría de la relatividad general, la hipótesis de que el espacio fuera plano dejo de ser cierta; de hecho es justamente la posibilidad del espacio-tiempo de curvarse la que explica la interacción gravitatoria en este marco.

Luego, debido a que el espacio puede ser -y de hecho es- curvo; nada impide que ciertas dimensiones espaciales se curven sobre si mismas a tal punto que se vuelvan inaccesibles a bajas energías. En ese sentido, para un observador que se encuentra a una escala energética mucho menor que la escala típica de longitud de la *dimensión compacta*, su dinámica será descripta de forma efectiva únicamente por las dimensiones no compactas. Así mismo, como veremos más adelante, la estructura de las dimensiones compactas determinarán una gran parte de la dinámica sobre las dimensiones no compactas.

Históricamente, la primera de estas propuestas fue la realizada por Theodor Kaluza [14] y Oskar Klein [15] en el contexto de la relatividad general; en donde consideraron un espacio-tiempo de 5 dimensiones en la cual una de ellas era compactificada en un círculo.

En esta sección, repasaremos el cálculo de Kaluza-Klein, generalizándolo a las llamadas *Compactificaciones Toroidales*; para luego compatibilizar los resultados clásicos (desde la perspectiva del espacio-tiempo) con los resultados cuánticos (desde la perspectiva de la cuerda).

Finalmente, haremos uso de esta compatibilización para deducir condiciones de consistencia en la teoría.

## 4.1 Desde la perspectiva del espacio-tiempo

A lo largo de este apartado, se buscará la descripción de los efectos de tener dimensiones compactas dentro del espacio-tiempo, para una teoría de campos. La discusión que se presenta, fue extraída principalmente de [21], [13], [1], [20], [14] y [15].

Comenzaremos repasando el argumento clásico de Kaluza-Klein. Consideremos un espacio-tiempo de 5 dimensiones  $\{x^\mu\}$  y asumimos que la coordenada  $x^5 = y$  es compacta. De esta forma, separamos a las coordenadas en coordenadas internas y externas, identificándolas a las dimensiones compactas y no compactas respectivamente.

$$x^\mu = (x^i, y). \quad (56)$$

Si el espacio compacto es un círculo de radio  $R$ , entonces podemos imponer la condición de periodicidad  $y \sim y + 2\pi R$ .

Para fijar ideas consideremos un campos escalar no masivo  $\Psi$  en 5 dimensiones. Este campo obedecerá una ecuación de Klein-Gordon de la forma

$$\partial^\mu \partial_\mu \Psi = \partial^i \partial_i \Psi + \partial_y^2 \Psi = 0. \quad (57)$$

Como la coordenada  $y$  es periódica, puedo expandir a  $\Psi$  en modos de Fourier de la forma

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(x^i) e^{\frac{iky}{R}}. \quad (58)$$

Vemos que se respeta la condición de periodicidad  $\Psi(y + 2\pi R) = \Psi(y)$ , como esperábamos.

Reemplazando además la expansión en modos dentro de la ecuación de Klein-Gordon encontramos que

$$\square_5 \Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \partial^i \partial_i \Psi_k - \frac{k^2}{R^2} \Psi_k \right] e^{\frac{iky}{R}}; \quad (59)$$

de forma que para cada modo se satisface una ecuación de Klein-Gordon en 5 dimensiones de la forma

$$\left( \partial^i \partial_i - m_k^2 \right) \Psi_k, \quad (60)$$

con  $m_k = \frac{k}{R}$ .

De esta forma, vemos que un único campo escalar **no masivo** en 5 dimensiones, se ve como una torre infinita de modos de masa  $m_k = \frac{k}{R}$  al compactificar en un círculo.

Además, notamos que si  $R$  es pequeño y consideramos un observador a bajas energías  $E \ll \frac{1}{R}$ , entonces el único modo significativo será el modo cero

$$\Psi(x^\mu) \simeq \Psi_0(x^i). \quad (61)$$

A bajas energías, podemos tomar como aproximación que los campos no dependen de las coordenadas compactas.

**Observación:** Llegado este punto, nuestro objetivo será escribir una acción efectiva compactificada  $S^{(5)} \rightarrow S^{(4)}$ . Sin embargo, para que la truncación sea consistente, las ecuaciones de movimiento calculadas desde  $S^{(5)}$  y luego compactificadas deben coincidir con las ecuaciones calculadas desde  $S^{(4)}$ . Este requerimiento se conoce como *Truncación Consistente* y será un punto a verificar al finalizar con el procedimiento descrito a continuación.

Consideramos la acción de Einstein-Hilbert  $S^{(5)} = \int d^5x \sqrt{g(x^\mu)} R_5[g(x^\mu)]$ .

Usando el ansatz 61, proponemos que la acción compactificada será de la forma

$$S^{(4)} = v \int d^4x \sqrt{g^0(x^i)} R_5[g^0(x^i)]; \quad (62)$$

donde  $v$  es el factor de volumen del espacio compacto

$$v = \int dy = 2\pi R, \quad (63)$$

y usamos fuertemente que únicamente el modo no masivo de Kaluza-Klein contribuye a bajas energías y por lo tanto la métrica se trunca

$$g(x^\mu) = g^0(x^i) + \frac{E}{R} g^1(x^\mu) + \left(\frac{E}{R}\right)^2 g^2(x^\mu) + \dots \simeq g^0(x^i). \quad (64)$$

Luego, vemos que ya ningún campo depende de la coordenada compacta.

Para que nuestra truncación preserve la simetría ante difeomorfismos, sabemos que la métrica truncada  $g_{\mu\nu}^0$  deberá transformar como

$$\delta g_{\mu\nu}^0 = \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu}^0 + \partial_\mu \xi^\rho g_{\rho\nu}^0 + \partial_\nu \xi^\rho g_{\mu\rho}^0. \quad (65)$$

En particular, la componente  $g_{44}^0$  transforma como un escalar

$$\delta g_{44}^0 = \xi^k \partial_k g_{44}^0; \quad (66)$$

donde se uso de nuevo que  $\partial_y(\dots) = 0$ .

De la misma manera, podemos preguntarnos si existe alguna parametrización de las demás componentes que transformen de otra forma identificable.

Esquemáticamente, vemos que podemos descomponer el tensor métrico como

$$g_{\mu\nu}^0 = \begin{pmatrix} g_{ij}^0 & g_{4j}^0 \\ g_{i4}^0 & g_{44}^0 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Proponemos la siguiente parametrización:  $g_{44}^0 = e^\phi$ ;  $g_{i4}^0 = A_i e^\phi$ ;  $\xi^4 = \lambda$ .

Luego,

$$\delta g_{i4}^0 = \delta A_i e^\phi + A_i \delta e^\phi = \xi^k \partial_k A_i e^\phi + \xi^k A_i \partial_k e^\phi + \partial_i \xi^k A_k e^\phi + \partial_i \lambda e^\phi. \quad (68)$$

Por otro lado, teníamos que  $\delta g_{44}^0 = \delta e^\phi = \xi^k \partial_k e^\phi$ .

Juntando todo, llegamos a que

$$\delta A_i = \zeta^k \partial_k A_i + \partial_i \zeta^k A_k + \partial_i \lambda \quad (69)$$

y por lo tanto, concluimos que  $A_i$  transforma como un campo de Gauge.

Finalmente, para  $g_{ij}^0$  podemos elegir la parametrización

$$g_{ij}^0 = G_{ij} + A_i A_j e^\phi. \quad (70)$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta g_{ij}^0 &= \delta G_{ij} + \delta(A_i A_j e^\phi) \\ &= \zeta^k \partial_k G_{ij} + \partial_i \zeta^k G_{kj} + \partial_j \zeta^k G_{ik} + \zeta^k \partial_k A_i A_j e^\phi + \zeta^k \partial_k A_j A_i e^\phi \\ &\quad + \zeta^k A_i A_j \partial_k e^\phi + \partial_i \zeta^k A_k A_j e^\phi + \partial_i \lambda A_j e^\phi + \partial_j \lambda A_i e^\phi + \partial_j \zeta^k A_i A_k e^\phi; \end{aligned} \quad (71)$$

de donde concluimos que

$$\delta G_{ij} = \zeta^k \partial_k G_{ij} + \partial_i \zeta^k G_{kj} + \partial_j \zeta^k G_{ik} \quad (72)$$

y por lo tanto,  $G_{ij}$  transforma como una métrica en 4 dimensiones.

Finalmente, vemos que la métrica truncada en 5 dimensiones podemos descomponerla como

$$g_{\mu\nu}^0 = \begin{pmatrix} G_{ij} + A_i A_j e^\phi & A_j e^\phi \\ A_i e^\phi & e^\phi \end{pmatrix}; \quad (73)$$

donde  $A_i$  es un campo de gauge,  $e^\phi$  es un campo escalar, y  $G_{ij}$  es la métrica en  $D - 1$  dimensiones.

Introduciendo este ansatz -conocido en la literatura como *ansatz de Kaluza-Klein*- dentro de la acción de Hilbert-Einstein compactificada tenemos que

$$\begin{aligned} S^{(4)} &= \frac{v}{16\pi G_N^{(5)}} \int d^4x \sqrt{g^0(x^i)} R_5[g^0(x^i)] \\ &= \frac{1}{16\pi G_N^{(4)}} \int d^4x \sqrt{G} e^{\frac{1}{2}\phi} \left( R_4(G) + \frac{1}{4} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{4} e^\phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right); \end{aligned} \quad (74)$$

en donde se definió  $F_{\mu\nu}$  de la forma usual,  $F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$ , y  $G_N^{(4)} = \frac{G_N^{(5)}}{v}$ .

**Observaciones:**



- $\phi$  es un escalar no masivo que determina el acoplamiento de Gauge  $\frac{1}{g^2} = e^{\frac{3}{2}\phi}$ .
- La intensidad de la gravedad queda determinada por el volumen de la dimensión compacta.

Este mismo resultado lo podemos generalizar a mas dimensiones si partimos de una teoría en  $D$  dimensiones y compactificamos  $d$  de ellas en un toro  $T^d = S^1 \times \dots \times S^2$ .

En esta situación, de nuevo nos preguntaremos como podemos descomponer los distintos campos que aparecen en la acción, teniendo en cuenta que ninguno de ellos dependerá de las dimensiones compactas a bajas energías.

En este caso, a diferencia del caso anterior, consideraremos la compactificación de la acción dada por (41). Por lo tanto, como el contenido de campos de esta acción es  $\{g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, \phi\}$ ; tendremos que elegir una parametrización consistente para cada uno de ellos.

Comenzamos con el tensor métrico. Al igual que antes, parametrizamos

$$g_{\mu\nu}^0 = \begin{pmatrix} G_{ij} + A_i^c G_{cd} A_j^d & A_i^c G_{cb} \\ G_{ad} A_j^d & G_{ab} \end{pmatrix}; \quad (75)$$

donde los índices  $a, b, c, d$  recorren las coordenadas internas, y los índices  $i, j$  recorren las coordenadas externas.

Además, parametrizaremos

$$\tilde{\zeta}^\mu = (\tilde{\zeta}^i, \lambda^a). \quad (76)$$

Luego, nuevamente podemos preguntarnos como transforma cada una de las componentes frente a difeomorfismos

$$\delta G_{ab} = \tilde{\zeta}^\rho \partial_\rho G_{ab} + \partial_a \tilde{\zeta}^\rho g_{\rho b}^0 + \partial_b \tilde{\zeta}^\rho g_{a\rho}^0 = \tilde{\zeta}^\rho \partial_\rho G_{ab}, \quad (77)$$

de donde concluimos que  $G_{ab}$  aporta  $\frac{d(d+1)}{2}$  escalares. Notemos que nuevamente, usamos la condición de que los campos no dependen de las coordenadas internas.

Análogamente se puede ver que

$$\delta g_{ib}^0 = \delta A_i^c G_{cb} + A_i^c \delta G_{cb} = \tilde{\zeta}^k \partial_k A_i^c G_{cb} + A_i^c \tilde{\zeta}^k \partial_k G_{cb} + \partial_i \tilde{\zeta}^k A_k^c G_{cb} + \partial_i \lambda^c G_{cb}, \quad (78)$$

de donde despejamos que

$$\delta A_i^c = \zeta^k \partial_k A_i^c + \partial_i \zeta^k A_k^c + \partial_i \lambda^c \quad (79)$$

y finalmente concluimos, que  $A_i^c$  aporta  $d$  campos de Gauge.

Por ultimo, escribiendo explícitamente la expresión para  $\delta g_{ij}^0$  y usando las reglas de transformación para los campos  $G_{ab}$  y  $A_i^c$ , llegamos a que el termino  $G_{ij}$  transforma como

$$\delta G_{ij} = \zeta^k \partial_k G_{ij} + \partial_i \zeta^k G_{kj} + \partial_j \zeta^k G_{ik} . \quad (80)$$

Es decir, que  $G_{ij}$  transforma como un tensor métrico en  $D - d$  dimensiones

Para la dos forma  $b_{\mu\nu}$ , escribimos de nuevo una expansión perturbativa de la forma

$$b(x^\mu) = b^0(x^i) + \frac{E}{R} b^1(x^\mu) + \left( \frac{E}{R} \right)^2 b^2(x^\mu) + \dots \quad (81)$$

A bajas energías nos quedamos con la aproximación

$$b(x^\mu) \simeq b^0(x^i) . \quad (82)$$

De esta manera, proponemos una parametrización para  $b_{\mu\nu}^0$  de la forma

$$b_{\mu\nu}^0 = \begin{pmatrix} B_{ij} - \frac{1}{2}(A_i^c V_{jc} - A_j^c V_{ic}) + A_i^c A_j^d B_{cd} & V_{ib} - B_{bc} A_i^c \\ -V_{aj} + B_{ac} A_j^c & B_{ab} \end{pmatrix} . \quad (83)$$

De nuevo, miramos como transforman los campos  $B_{ab}$ ,  $V_{ib}$  y  $B_{ij}$  ante difeomorfismos, usando ahora que  $\xi^\mu = (\xi^i, \lambda^a)$ ,  $\lambda_\mu = (\lambda_i, \lambda_a)$ .

En general, sabemos que como  $b_{\mu\nu}$  es una dos-forma, entonces

$$\delta b_{\mu\nu}^0 = \xi^\rho \partial_\rho b_{\mu\nu}^0 + \partial_\mu \xi^\rho b_{\rho\nu}^0 + \partial_\nu \xi^\rho b_{\mu\rho}^0 + 2\partial_{[\mu} \lambda_{\nu]} . \quad (84)$$

Luego, repitiendo cálculos análogos para los de  $\delta g^0$ , llegamos a que

$$\delta B_{ab} = \zeta^k \partial_k B_{ab} . \quad (85a)$$

$$\delta V_{ib} = \zeta^k \partial_k V_{ib} + \partial_i \zeta^k V_{kb} + \partial_i \lambda_b . \quad (85b)$$

$$\delta B_{ij} = \zeta^k \partial_k B_{ij} + \partial_i \zeta^k B_{kj} + \partial_j \zeta^k B_{ik} + 2\partial_{[i} \lambda_{j]} + V_{[id} \partial_{j]} \lambda^d + A_{[i}^d \partial_{j]} \lambda_d . \quad (85c)$$

Vemos luego, que  $B_{ab}$  transforma como  $\frac{d(d-1)}{2}$  campos escalares;  $V_{ib}$  transforma como  $d$  campos de Gauge abelianos; y  $B_{ij}$  transforma como una 2-forma en  $D - d$  dimensiones mas términos de *Green-Schwarz*.

Por otro lado, también tenemos al dilatón  $\phi$ . Buscaremos definir un  $\Phi$  compactificado, tal que al compactificar se mantenga la estructura de la medida de integración

$$\sqrt{g}e^{-2\phi} \rightarrow \sqrt{G}e^{-2\Phi}. \quad (86)$$

Notemos que, usando la parametrización elegida para el tensor métrico, podemos descomponer al mismo como

$$g^0 = \begin{pmatrix} G + AG_e A^\dagger & AG_e \\ G_e A^\dagger & G_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A^\dagger & 1 \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Como el determinante del producto es el producto de los determinantes, llegamos a que

$$\det(g) = \det(G) \cdot \det(G_e). \quad (88)$$

De la condición (86), podemos despejar usando esto ultimo que

$$\Phi = \phi - \frac{1}{4} \log(G_e). \quad (89)$$

Luego, vale la pena preguntarnos sobre si con esta definición  $\Phi$  sigue transformando como un escalar. Efectivamente

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \delta\phi - \frac{1}{4} \frac{\delta G_e}{G_e} \\ &= \zeta^k \partial_k \phi - \frac{1}{4} \frac{\zeta^k \partial_k G_e}{G_e} \\ &= \zeta^k \partial_k \left( \phi - \frac{1}{4} \log(G_e) \right) \\ &= \zeta^k \partial_k \Phi. \end{aligned} \quad (90)$$

Habiendo llegado a este punto, es conveniente hacer un repaso de lo que hemos mostrado. Al compactificar en  $T^d$ , y partiendo de un contenido de campos  $\{g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, \phi\}$  en  $D$  dimensiones, se llega al siguiente contenido de campos en  $n = D - d$  dimensiones:

- Una métrica  $G_{ij}$ .
- Una 2-forma abeliana  $B_{ij}$ .

- $2d$  1-formas abelianas  $\{A_i^a, V_{ib}\}$ , las cuales puedo agrupar convenientemente en un vector 2d-dimensional  $A_i^\mu = \begin{pmatrix} A_i^a \\ V_{ia} \end{pmatrix}$ .
- $\frac{d(d-1)}{2} + \frac{d(d+1)}{2} = d^2$  escalares  $\{G_{ab}, B_{ab}\}$ .
- Un escalar  $\Phi$ .

Además, encontramos que existe un conjunto de simetrías locales parametrizadas por  $\{\xi^i, \lambda_i, \lambda^a, \lambda_a\}$ . A los últimos dos los agruparemos de manera conveniente en un vector 2d-dimensional  $\lambda^\mu = \begin{pmatrix} \lambda^a \\ \lambda_a \end{pmatrix}$ .

Por otro lado, también habíamos visto como transforman los campos ante difeomorfismos

$$\delta G_{ij} = \mathcal{L}_\xi G_{ij} \quad (91a)$$

$$\delta \Phi = \mathcal{L}_\xi \Phi \quad (91b)$$

$$\delta A_i^\mu = \mathcal{L}_\xi A_i^\mu + \partial_i \lambda^\mu \quad (91c)$$

$$\delta B_{ij} = \mathcal{L}_\xi B_{ij} + 2\partial_{[i} \lambda_{j]} + A_{[i}^a \partial_{j]} \lambda_a + V_{[ia} \partial_{j]} \lambda^a \quad (91d)$$

A fin de construirmos términos que transformen realmente de forma covariante, notemos que podemos definir las cantidades

$$\mathcal{F}_{ij}^M = 2\partial_{[i} A_{j]}^M \implies \delta \mathcal{F}_{ij}^M = \mathcal{L}_\xi \mathcal{F}_{ij}^M, \quad (92a)$$

$$\mathcal{H}_{ijk} = 3\partial_{[i} B_{jk]} - 3A_{[i}^M \partial_j A_{k]}^N \eta_{MN} \implies \delta \mathcal{H}_{ijk} = \mathcal{L}_\xi \mathcal{H}_{ijk}, \quad (92b)$$

donde introducimos además la métrica invariante  $\mathcal{O}(d, d)$ ,  $\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_a^b \\ \delta_b^a & 0 \end{pmatrix}$ .

A continuación, buscaremos agrupar todos los campos dentro de multipletes de  $\mathcal{O}(d, d)$ .

Primero que nada, los campos  $G_{ij}, B_{ij}, \Phi$  son singletes frente a transformaciones  $\mathcal{O}(d, d)$ .

Los  $d^2$  escalares, podemos agruparlos dentro de una matriz escalar  $\mathcal{M}$  de la forma

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} G_{ab} - B_{ac} G^{cd} B_{db} & B_{ac} G^{cb} \\ B_{bc} G^{ca} & G^{ab} \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Notemos a continuación que, por definición, una matriz  $\mathcal{O} \in \mathcal{O}(d, d)$  si y solo si  $\mathcal{O}_M^P \eta_{PQ} \mathcal{O}_N^Q = \eta_{MN}$ .

Pero con nuestra definición de  $\mathcal{M}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \eta \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} B_{ac} G^{ce} & G_{ae} - B_{ac} G^{cd} B_{de} \\ G^{ae} & B_{ec} G^{ca} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G_{ef} - B_{eg} G^{gl} B_{lf} & B_{eg} G^{gf} \\ B_{fg} G^{ge} & G^{ef} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \eta. \end{aligned} \quad (94)$$

Luego, concluimos que  $\mathcal{M} \in \mathcal{O}(d, d)$ .

Además,  $\mathcal{M}$  transforma ante difeomorfismos como

$$\delta \mathcal{M}_{MN} = \mathcal{L}_{\xi} \mathcal{M}_{MN}. \quad (95)$$

Finalmente, consideremos la acción efectiva en  $D$  dimensiones de la forma

$$S^{(D)} = \int d^D x e^{-2\phi} \left( R^{(D)} - 4 \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + 4 \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \frac{1}{2} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right). \quad (96)$$

Introduciendo el ansatz de Kaluza-Klein y usando las definiciones anteriores se llega a que, la acción compactificada  $S^{(n)}$  se escribe

$$\begin{aligned} S^{(n)} &= v_d \int d^n x \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left( R^{(n)} - 4(\nabla\Phi)^4 + 4\Box\Phi - \frac{1}{12} \mathcal{H}_{ijk} \mathcal{H}^{ijk} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \nabla_i \mathcal{M}_{MN} \nabla^i \mathcal{M}^{MN} - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{ij}^M \mathcal{M}_{MN} \mathcal{F}^{ijN} \right). \end{aligned} \quad (97)$$

Una vez obtenida la acción compactificada, podemos preguntarnos sobre cuales son las simetrías de la misma y, en particular, si existe una nueva simetría que emerja al compactificar.

Como mostramos anteriormente, se ve directamente que la acción compactificada es invariante ante difeomorfismos en  $(D - d) - \dim(\xi^i)$  y posee una simetría de Gauge para el campo  $B(\lambda_i)$ .

Sin embargo, adicionalmente vemos que todos los campos quedan agrupados en multipletes de  $\mathcal{O}(d, d)$ .

Ante una transformación  $\mathcal{O}$  del grupo  $\mathcal{O}(d, d)$ , sabemos que los campos  $A_i^M$  y  $\mathcal{M}_{MN}$  transforman como

- $A'^M_i = A^N_i \mathcal{O}^M_N$ .
- $\mathcal{M}'_{MN} = \mathcal{O}^P_M \mathcal{O}^Q_N \mathcal{M}_{PQ}$ .

Los campos  $G_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $\Phi$  transforman como escalares.

Luego, frente a una transformación  $\mathcal{O}(d, d)$  global, la acción transforma como

$$S'^{(n)} = v_d \int d^n x \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left( R^{(n)} - 4(\nabla\Phi)^4 + 4\Box\Phi - \frac{1}{12} \mathcal{H}'_{ijk} \mathcal{H}'^{ijk} + \frac{1}{8} \nabla_i \mathcal{M}'_{MN} \nabla^i \mathcal{M}'^{MN} - \frac{1}{4} \mathcal{F}'^M_{ij} \mathcal{M}'_{MN} \mathcal{F}'^{ijN} \right). \quad (98)$$

Expandiendo cada uno de los términos anteriores, por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_i \mathcal{M}'_{MN} \nabla^i \mathcal{M}'^{MN} &= \mathcal{O}^P_M \mathcal{O}^M_R \mathcal{O}^Q_N \mathcal{O}^N_S \nabla_i \mathcal{M}_{PQ} \nabla^i \mathcal{M}^{RS} \\ &= \delta^P_R \delta^Q_S \nabla_i \mathcal{M}_{PQ} \nabla^i \mathcal{M}^{RS} \\ &= \nabla_i \mathcal{M}_{MN} \nabla^i \mathcal{M}^{MN}; \end{aligned} \quad (99)$$

es decir, este termino resulta invariante ante transformaciones globales  $\mathcal{O}(d, d)$

Por otro lado, sabemos que por definición

$$\mathcal{F}'^M_{ij} = 2\partial_{[i} A'^M_{j]} = 2\partial_{[i} A^P_{j]} \mathcal{O}^M_P. \quad (100)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'^M_{ij} \mathcal{M}'_{MN} \mathcal{F}'^{ijN} &= \mathcal{O}^M_P \mathcal{O}^N_Q \mathcal{O}^R_M \mathcal{O}^S_N \mathcal{F}^P_{ij} \mathcal{M}_{RS} \mathcal{F}^{ijQ} \\ &= \delta^R_P \delta^S_Q \mathcal{F}^P_{ij} \mathcal{M}_{RS} \mathcal{F}^{ijQ} \\ &= \mathcal{F}^R_{ij} \mathcal{M}_{RS} \mathcal{F}^{ijS}. \end{aligned} \quad (101)$$

De nuevo, esto nos dice que este termino permanece invariante ante transformaciones de este grupo de simetría.

Finalmente, analicemos como transforma la cantidad  $\mathcal{H}_{ijk}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{ijk} &= 3\partial_{[i} B_{jk]} - 3A'^M_{[i} \partial_j A'^N_{k]} \eta_{MN} \\ &= 3\partial_{[i} B_{jk]} - 3A^P_{[i} \partial_j A^Q_{k]} \mathcal{O}^M_P \mathcal{O}^N_Q \eta_{MN} \\ &= 3\partial_{[i} B_{jk]} - 3A^P_{[i} \partial_j A^Q_{k]} \eta_{PQ} \\ &= \mathcal{H}'_{ijk}. \end{aligned} \quad (102)$$

Vemos que  $\mathcal{H}_{ijk}$  es invariante frente a este tipo de transformaciones, por lo que cualquier término que construido a partir de estas cantidades también lo será.

Finalmente, juntando todo, vemos que la acción compactificada en su totalidad es invariante frente a transformaciones  $\mathcal{O}(d, d)$ .

Como conclusión, vemos que de la compactificación en  $T^d$  emerge una simetría  $\mathcal{O}(d, d)$  global.

## 4.2 Desde la perspectiva de la cuerda

En la sección anterior, discutimos el efecto que tendría la compactificación de  $d$  dimensiones en un toro  $T^d$  sobre la acción de campos a bajas energías. De allí, mostramos dos hitos fundamentales:

1. El contenido de campos de la teoría en  $D$  dimensiones, se ve incrementado al pasar a la teoría en  $d$  dimensiones. En particular, vimos que la estructura de este nuevo conjunto de campos, dependerá fuertemente de la estructura del espacio compacto. Así, para el caso de una compactificación toroidal, el conjunto de campos se ve incrementado por campos escalares y campos de Gauge abelianos.
2. El hecho de asumir que el espacio compacto es un toro hace que las simetrías de la teoría en  $d$  dimensiones también se vean incrementadas respecto a la teoría en  $D$  dimensiones. En particular, mostramos que emerge una simetría global ante transformaciones del grupo  $\mathcal{O}(d, d)$ .

En esta sección nos propondremos estudiar los efectos -cuánticos- sobre la cuerda fundamental que tiene el hecho de asumir que las dimensiones de la hoja de mundo son compactificadas en toros. Con este fin, seguiremos principalmente el artículo [11], y en forma complementaria los trabajos [18] y [2].

Al igual que en el caso de la sección anterior, partiremos de analizar los efectos de asumir una única dimensión compactificada en un círculo para la cuerda libre; para luego estudiar el caso de  $d$  dimensiones compactificadas para una cuerda propagándose en un background. Veremos que, de nuevo, emergen nuevas simetrías en la teoría y buscaremos compatibilizar estos resultados con los obtenidos en la sección anterior.

Consideremos a continuación la acción de una de una única cuerda bosónica libre, la acción de Polyakov

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \partial_\alpha X \partial^\alpha X. \quad (103)$$

Si compactificamos en un círculo, podemos hacer la identificación  $X \approx X + 2\pi Rm$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ .

Por otro lado, en la sección 2.2 se mostró que siempre podemos escribir

$$X(\sigma, \tau) = X_R(\sigma - \tau) + X_L(\sigma + \tau). \quad (104)$$

Expandiendo en modos, tenemos que

$$X_R(\sigma - \tau) = x_R - \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p_R(\sigma - \tau) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \alpha_l e^{il(\sigma - \tau)}, \quad (105a)$$

$$X_L(\sigma + \tau) = x_L + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p_L(\sigma + \tau) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \tilde{\alpha}_l e^{-il(\sigma + \tau)}, \quad (105b)$$

donde  $x = x_R + x_L$  corresponde a la posición del centro de masa.

Ahora bien, por un lado sabemos que en la función de onda de la cuerda incluye un factor  $e^{ipx}$ . Para que esta función sea univaluada necesitamos que

$$e^{ipx} = e^{ipx + ip2\pi R}, \quad (106)$$

de donde concluimos que el momento deberá estar cuantizado;  $p = \frac{n}{R}$ , con  $n$  entero.

Por otro lado, también sabemos que se deberá satisfacerse la condición  $X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma) + 2\pi mR$ . Esto implica además que

$$p_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} n - \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} m \right) \quad (107a)$$

$$p_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} n + \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} m \right) \quad (107b)$$

Siguiendo con el procedimiento de cuantización canónica, podemos escribir el momento canónicamente conjugado de  $X(\sigma)$ ,

$$P(\sigma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}} \left[ p_L + p_R + \sum_{l \neq 0} \alpha_l e^{il(\sigma - \tau)} + \sum_{l \neq 0} \tilde{\alpha}_l e^{-il(\sigma + \tau)} \right]. \quad (108)$$



Adicionalmente, las relaciones de conmutación canónicas para  $x_R, p_R, x_L, p_L, \alpha_n, \tilde{\alpha}_n$  se escriben

$$[x_L, p_L] = [x_R, p_R] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}, \quad [\alpha_m, \alpha_n] = [\tilde{\alpha}_m, \tilde{\alpha}_n] = m\delta_{m+n,0} \quad (109)$$

y el Hamiltoniano con ordenamiento normal se escribe

$$H = L_{0L} + L_{0R}, \quad (110)$$

con

$$L_{0R} = \frac{1}{2}p_R^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{-l}\alpha_l \quad (111a)$$

$$L_{0L} = \frac{1}{2}p_L^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-l}\tilde{\alpha}_l. \quad (111b)$$

Vemos luego de las ecuaciones (107), (109) que ante la transformación

$$\frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \rightarrow \frac{\sqrt{\alpha'}}{R}, \quad m \leftrightarrow n \quad (112)$$

las cantidades que intervienen en la expresión del Hamiltoniano transforman como

$$\begin{cases} p_R \rightarrow -p_R \\ p_L \rightarrow p_L \\ \alpha_n \rightarrow -\alpha_n \\ \tilde{\alpha}_n \rightarrow \tilde{\alpha}_n; \end{cases} \quad (113)$$

de forma que

$$L'_{0R} = \frac{1}{2}p'^2_R + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha'_{-l}\alpha'_l = L_{0R}. \quad (114a)$$

$$L'_{0L} = \frac{1}{2}p'^2_L + \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\alpha}'_{-l}\tilde{\alpha}'_l = L_{0L}. \quad (114b)$$

Concluimos entonces, que ante la transformación (112), el Hamiltoniano de la cuerda bosonica libre es invariante. Esta simetría es conocida en la literatura como *Target Space Duality Symmetry*, o simplemente **T-duality**.

Notemos que esta simetría podemos entenderla como asociada a la posibilidad de un objeto extendido -una cuerda- de enrollarse en un espacio compacto. Por lo tanto, esta dualidad es exclusiva de teoría de cuerdas y no cuenta con un análogo en teoría de campos.

Consideremos a continuación, una interacción a 1-loop. La función de partición para la cuerda bosónica se escribe

$$\mathcal{Z} = \int_{\Gamma} d^2\tau \hat{\mathcal{Z}}(\tau, \bar{\tau}) \sum_{p_L, p_R} \text{Tr} \left[ e^{i\pi\tau L_{0R} - i\pi\bar{\tau} L_{0L}} \right], \quad (115)$$

donde  $\tau$  es el parámetro modular y  $\Gamma$  es la región fundamental del plano  $\tau$ .

Pero ahora, notemos que podemos usar la expansión en modos (111) para reescribir la función de partición como

$$\mathcal{Z} = \int_{\Gamma} d^2\tau \hat{\mathcal{Z}}(\tau, \bar{\tau}) \sum_{p_L, p_R} \text{Tr} \left[ e^{i\pi\tau \frac{p_R^2}{2} + i\pi\tau \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{-l} \alpha_l - i\pi\bar{\tau} \frac{p_L^2}{2} - i\pi\bar{\tau} \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-l} \tilde{\alpha}_l} \right]. \quad (116)$$

A su vez, de (107) vemos que  $p_R$  y  $p_L$  quedan completamente determinados por los enteros  $m, n$ . Esto nos permite cambiar la sumatoria  $\sum_{p_R, p_L} \rightarrow \sum_{m, n}$ .

Vemos entonces que  $m$  y  $n$  pasan a ser índices mudos para la función de partición, y luego el intercambio entre ellos es trivialmente equivalente físicamente.

Usando además las reglas de transformación (113), vemos que la función de partición  $\mathcal{Z}$  es invariante ante T dualidad a un loop.

Hasta ahora vimos que al compactificar en un círculo la teoría es invariante ante las transformaciones de T-dualidad (112) para

- La teoría libre.
- La teoría con interacciones a un loop.

Si la simetría se extendiera a funciones de partición de genero mayor, entonces la teoría en su totalidad sería invariante ante T dualidad. De esta observación se desprende además que compactificar en un círculo de radio  $\frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \ll 1$  es físicamente equivalente a compactificar en un círculo de radio  $\frac{\sqrt{\alpha'}}{R} \ll 1$ .

Para lo que sigue será de utilidad hacer el reescalado  $X \rightarrow RX$ , forma que la condición de periodicidad característica del espacio compacto toma la forma  $X \approx X + 2\pi m$  y la acción queda escrita como

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \int d\tau \hat{G}_{11} \partial_\alpha X \partial^\alpha X, \quad (117)$$

donde definimos  $\hat{G}_{11} = R^2$ .

Si redefinimos además  $\hat{G}_{11} \rightarrow \frac{\hat{G}_{11}}{\alpha'}; \frac{R}{\sqrt{\alpha'}} \rightarrow R$ , entonces la acción queda

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \int d\tau \hat{G}_{11} \partial_\alpha X \partial^\alpha X. \quad (118)$$

Con estas nuevas definiciones, las transformaciones de T dualidad (112) se reescriben simplemente como  $R \rightarrow \frac{1}{R}, G_{11} \rightarrow \frac{1}{G_{11}}$ .

Trabajando con estas redefiniciones, consideremos ahora la función de partición de genero  $g$  dada por

$$\mathcal{Z}_g = \int dg_{\alpha\beta} dX d\hat{X} e^{-\frac{R^2}{4\pi} \int_{\mathcal{M}_g} d\tau d\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X - \int_{\mathcal{M}_g} d\tau d\sigma \hat{L}}; \quad (119)$$

Donde:

- $\mathcal{M}_g$  es la superficie de Riemann asociada al genero  $g$ .
- La coordenada compacta es representada por  $X$ .
- Las coordenadas no compactas son representadas por  $\hat{X}$ , con Lagrangiano  $\hat{L}$ .
- $g_{\alpha\beta}$  corresponde a todas las métricas compatibles con la topología de  $\mathcal{M}_g$ .
- Fue realizada la continuación analítica  $\tau \rightarrow -i\tau$ .

La compactificación sobre  $X$  se define de forma generalizada a una superficie de genero  $g$  con la identificación

$$\int_{a_i} dX = 2\pi m_i, \quad \int_{b_i} dX = 2\pi n_i; \quad (120)$$

donde  $a_i, b_i$  son los denominados *Ciclos Homólogos Canónicos* de  $\mathcal{M}_g$ ; y el índice  $i$  toma los valores  $i = 1, \dots, g$ .

Introduciendo la base estándar de 1-formas cerradas  $\omega_i$ , tal que se verifica

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij} \quad (121a)$$

$$\int_{b_i} \omega_j = \tau_{ij} = (\tau_1)_{ij} + i(\tau_2)_{ij} \quad (121b)$$

se puede demostrar que la función de partición  $\mathcal{Z}_g$  la podemos escribir como

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_g &= \int_{\mathcal{M}_g} dm D(m) R \sum_{m_i, n_i} e^{-\pi R^2 (\vec{m} + \vec{n} \tau)^t \tau_2^{-1} (m + n \tau)} \\ &= \int_{\mathcal{M}_g} dm D(m) R R^{-g} \det(\tau_2) \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^{2g}} e^{i\pi (\vec{p}_R \tau \vec{p}_R - \vec{p}_L \tau \vec{p}_L)}.\end{aligned}\quad (122)$$

En la ecuación anterior, hemos definido además las cantidades

$$\vec{p}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{R} \vec{k} - R \vec{m} \right). \quad (123a)$$

$$\vec{p}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{R} \vec{k} + R \vec{m} \right). \quad (123b)$$

Haciendo el cambio  $R \rightarrow \frac{1}{R}$ ,  $\vec{k} \leftrightarrow \vec{m}$  y notando que  $\vec{k}, \vec{m}$  son índices mudos se puede ver que

$$\mathcal{Z}_g\left(\frac{1}{R}\right) = R^{2g-2} \mathcal{Z}_g(R). \quad (124)$$

Dado que la expansión perturbativa completa para la función de partición de la cuerda se escribe

$$\mathcal{Z}(\Phi, R) = \sum_{g=0}^{\infty} e^{(1-g)\Phi} \mathcal{Z}_g(R); \quad (125)$$

juntando las expresiones (125), (124) llegamos a que

$$\mathcal{Z}(\Phi + 2 \log(R), \frac{1}{R}) = \mathcal{Z}(\Phi, R). \quad (126)$$

Finalmente, de (126) concluimos que la *T-dualidad* es una simetría de la teoría completa, i.e. a todo orden en la expansión perturbativa, si consideramos además que el dilatón transforma como  $\Phi \rightarrow \Phi + 2 \log(R)$ .

De aquí se desprende además que la simetría de T-dualidad es parte fundamental de la teoría de cuerdas, y por tanto una teoría de bajas energías consistente debe respetarla.

Al igual que hicimos en la sección anterior, a continuación intentaremos extender la compactificación de una única dimensión en un círculo a la compactificación de  $d$  dimensiones en un toro  $T^d$ .

En esta situación, las  $i = 1, \dots, d$  dimensiones compactas verifican una condición de periodicidad de la forma

$$X^i \approx X^i + 2\pi m^i. \quad (127)$$

Consideramos además ya no a la cuerda bosónica libre, sino a la cuerda en un back-ground toroidal de la forma

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \int d\tau \left[ \sqrt{g} g^{\alpha\beta} G_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j + \epsilon^{\alpha\beta} B_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j - \frac{1}{2} \sqrt{g} \Phi R^{(2)} \right]; \quad (128)$$

en donde  $G_{ij}$  corresponde al tensor métrico, y  $B_{ij}$  es un tensor antisimétrico

Por simplicidad, podemos definir la matriz  $E$ , conocida en la literatura como *Background Matrix*

$$E = G + B. \quad (129)$$

Partiendo ahora de la acción (128), podemos repetir el procedimiento de cuantización canónica sobre la hoja de mundo. Dado que estamos considerando teorías en la dimensión crítica (donde se cancela la anomalía de Weyl), podemos fijar sin pérdida de generalidad  $g_{\alpha\beta}(\sigma, \tau) = \eta_{\alpha\beta}$ .

El momento canónicamente conjugado está dado por

$$2\pi P_i = G_{ij} \dot{X}^j + B_{ij} X'^j = p_i + \text{oscilaciones}. \quad (130)$$

Como  $X^i$  tiene periodicidad  $2\pi$ , entonces  $p_i = n_i$ , con  $n_i \in \mathbb{Z}$ .

Por otro lado, el Hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned} H &= L_{0R} + L_{0R} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \left[ (2\pi)^2 (P_i G^{ij} P_j) + X'^i (G - BG^{-1}B)_{ij} X'^j + 4\pi X'^i B_{ik} G^{kj} P_j \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma (P_L^2 + P_R^2); \end{aligned} \quad (131)$$

donde se definió además

$$P_{La} = \left[ 2\pi P_i + (G - B)_{ij} X'^j \right] e_a^{*i}. \quad (132a)$$

$$P_{Ra} = \left[ 2\pi P_i - (G + B)_{ij} X'^j \right] e_a^{*i}. \quad (132b)$$

Adicionalmente, se tiene el constraint

$$\int_0^{2\pi} d\sigma P X' = L_{0L} - L_{0R} = 0. \quad (133)$$

De las ecuaciones anteriores, se deduce que  $P_L$  y  $P_R$  siguen estando desacoplado, describiendo left/right-movers respectivamente.

Luego, podemos descomponer al Hamiltoniano como

$$H = H^{(0)} + H^{(\text{osc})}. \quad (134)$$

De ahora en adelante, analizaremos únicamente el comportamiento de  $H^{(0)}$ ; por lo que será de utilidad redefinir simplemente  $H^{(0)} = H$ .

Luego,

$$\begin{aligned} H &= L_{0L} + L_{0R} \\ &= \frac{1}{2}(p_L^2 + p_R^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[ n_i (G^{-1})^{ij} n_j + m^i (G - BG^{-1}B)_{ij} m^j + 2m^i B_{ik} (G^{-1})^{kj} n_j \right]; \end{aligned} \quad (135)$$

donde  $n_i$  corresponde al autovalor del momento, y  $m_i$  a los *winding modes*. De la expresión (135) se desprende que

$$p_L = [n^t + m^t(B + G)]e^*. \quad (136a)$$

$$p_R = [n^t + m^t(B - G)]e^*. \quad (136b)$$

Vemos entonces, que el espectro queda descripto únicamente en termino de los modos cero  $(p_L, p_R)$ .

Notamos además, es posible definir una matriz

$$M(E) = \begin{pmatrix} G - BG^{-1}B & BG^{-1} \\ -G - 1B & G^{-1} \end{pmatrix}, \quad (137)$$

de modo de escribir el Hamiltoniano (135) de una forma mas compacta

$$H = \frac{1}{2}(p_L^2 + p_R^2) = \frac{1}{2}Z^t M Z; \quad (138)$$

en donde  $Z$  se define como el vector  $Z = (m_a, n_b)$ .

Notemos que en particular,  $M \in 2d \times 2d$ . Por lo tanto, ante una transformación  $g$  del grupo  $\mathcal{O}(d, d)$ ,  $M$  transforma como  $M \rightarrow M' = M_g = g M g^t$ .

Esto ultimo, nos lleva a preguntarnos como transforma  $E$  ante una transformación  $g \in \mathcal{O}(d, d)$ . Para ver esto, consideramos en particular el elemento

$$g_{E=G+B} = \begin{pmatrix} e & B(e^t)^{-1} \\ 0 & (e^t)^{-1} \end{pmatrix} \quad (139)$$

y definimos la acción de  $g$  sobre una matriz  $F \in d \times d$  como

$$g(F) = (aF + b)(cF + d)^{-1}. \quad (140)$$

De esta forma, se ve que para el caso  $F = \mathbb{1}$ , entonces  $g_E(\mathbb{1}) = E = G + B$  y además se puede ver que  $M = g_E g_E^t$ .

Luego,

$$M' = M(E') = M_g = g M g^t = g g_E g_E^t g^t = g_{E'} g_{E'}^t, \quad (141)$$

lo que implica que  $g_{E'} = g g_E$  y finalmente

$$E' = g_{E'}(\mathbb{1}) = g g_E(\mathbb{1}) = g(E) = (aE + b)(cE + d)^{-1}. \quad (142)$$

En esta instancia, vemos que naturalmente los campos comienzan a ser posible agruparlos en forma de matrices  $2d \times 2d$ , y lo que nos lleva a estudiar su comportamiento ante transformaciones del grupo  $\mathcal{O}(d, d)$ . En particular, vamos a tener particular interés en como se ve afectado el espectro de la teoría frente a este tipo de transformaciones.

Para este fin, vale la pena repasar la estructura del grupo  $\mathcal{O}(d, d)$ . Este grupo, puede ser descompuesto en:

1. **B-shifts:** Consiste en agregar a la matriz  $B_{ij}$  una matriz antisimétrica entera  $\Theta_{ij}(\mathbb{Z})$ .

$$g_\theta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \Theta \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \Theta_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad \Theta_{ij} = -\Theta_{ji}. \quad (143)$$

2. **Cambio de base**  $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ :

$$g_A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (144)$$

3. **Dualidad factorizada**  $D_i$ : Corresponde a una generalización de la dualidad  $R \rightarrow \frac{1}{R}$ . Explícitamente,  $D_i$  lleva  $R_i \rightarrow \frac{1}{R_i}$  si el background es un producto directo de círculos de radio  $\{R_i\}$

$$g_{D_i} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - e_i & e_i \\ e_i & \mathbb{1} - e_i \end{pmatrix} \quad (145)$$

en donde  $e_i$  posee todas sus componentes nulas, excepto la componente  $ii$ , la cual vale 1

Luego, la teoría será invariante ante transformaciones del grupo  $\mathcal{O}(d, d)$  si es invariante frente a todas las transformaciones anteriores por separado. A fin de identificar si la teoría es invariante ante estas transformaciones, buscaremos el espectro de la misma y verificaremos que el mismo sea invariante.

Expandiendo en modos, encontramos que

$$X^i(\sigma, \tau) = x^i + m^i \sigma + \tau G^{ij} (p_j - B_{jk} m^k) + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left[ \alpha_n^i(E) e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^i(E) e^{-in(\tau+\sigma)} \right]. \quad (146a)$$

$$2\pi P_i(\sigma, \tau) = p_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \left[ E_{ij}^t \alpha_n^j(E) e^{-in(\tau-\sigma)} + E_{ij} \tilde{\alpha}_n^j(E) e^{-in(\tau+\sigma)} \right]. \quad (146b)$$

Las relaciones de conmutación se obtienen a raíz de expandir en modos el conmutador

$$\left[ X^i(\sigma, 0), P_j(\sigma', 0) \right] = i \delta_j^i \delta(\sigma - \sigma'); \quad (147)$$

el resultado es

$$\left[ x^i, p_j \right] = i \delta_j^i, \quad (148a)$$

$$\left[ \alpha_n^i(E), \alpha_m^j(E) \right] = \left[ \tilde{\alpha}_n^i(E), \tilde{\alpha}_m^j(E) \right] = m G^{ij} \delta_{m+n,0}, \quad (148b)$$

y todos los demás conmutadores se anulan.

Reemplazando en la expresión para el Hamiltoniano  $H$ , integrando y aplicando ordenamiento normal se llega a que

$$H = \frac{1}{2} Z^t M Z + N + \tilde{N}, \quad (149)$$

con



$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-n}^i(E) G_{ij} \alpha_n^j(E). \quad (150a)$$

$$\tilde{N} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^i(E) G_{ij} \tilde{\alpha}_n^j(E). \quad (150b)$$

Frente a una transformación del grupo  $\mathcal{O}(d, d)$ , habíamos encontrado como transforma  $E$ , de donde es posible extraer a su vez las siguientes relaciones para  $G$

$$(d + cE)^t G' (d + cE) = G \quad (151a)$$

$$(d - cE^t) G' (d - cE^t) = G \quad (151b)$$

y a su vez, frente a estas transformaciones tenemos que

$$\alpha_n(E) \rightarrow (d - cE^t)^{-1} \alpha_n(E'), \quad \tilde{\alpha}_n(E) \rightarrow (d + cE)^{-1} \tilde{\alpha}_n(E'). \quad (152)$$

Reemplazando las reglas de transformación (152) dentro de la expresión para los operadores número (150), y usando a su vez las relaciones (151); concluimos que los operadores  $N, \tilde{N}$  son invariantes frente a estas transformaciones.

De esta observación, se desprende que el espectro de la teoría es invariante frente a transformaciones  $\mathcal{O}(d, d, \mathbb{Z})$ .

Finalmente, del análisis realizado en esta sección vemos que  $\mathcal{O}(d, d)$  es una simetría fundamental que emerge al compactificar en toros  $T^d$ . En caso de compactificar en  $T^1$ , estas transformaciones incluyen la *T-dualidad*.

### Observaciones:

1. Si bien en este caso el estudio lo hicimos para el caso de la cuerda bosónica, un tratamiento análogo puede realizarse para la cuerda heterótica obteniendo resultados equivalentes.
2. Desde el punto de vista del espacio-tiempo, analizando los efectos de compactificar en toros sobre acciones efectivas de bajas energías, también encontramos que esta simetría emerge.

Concluimos luego que cualquier acción de bajas energías que sea posible escribir, deberá poseer invariancia  $\mathcal{O}(d, d)$  al compactificar en este tipo de espacios para ser considerada consistente. En la próxima sección, partiremos de esta afirmación para buscar un mecanismo para determinar si las acciones poseen esta simetría sin necesidad de llevar adelante el proceso de compactificación.

## 5 $\beta$ -symmetry

A lo largo de este apartado, se buscara brindar un mecanismo alternativo a los discutidos previamente para el cálculo de acciones efectivas de bajas energías; justificado en base a las simetrías fundamentales subyacentes de la teoría de cuerdas. Los argumentos que se siguen a continuación, son replicados del artículo original [3] en donde se presenta la simetría denominada como  $\beta$ -symmetry.

En las secciones anteriores, vimos como si partimos de teoría de cuerdas y asumimos que  $d$  de las  $D$  dimensiones son compactificadas en un toro; entonces llegamos a una teoría con una simetría emergente. Esta simetría, conocida en la literatura como *Target Space Duality*, demostramos además que:

1. Es una simetría **fundamental** de la teoría perturbativa, ya que se extiende a todo orden.
2. Se generaliza a la invariancia frente al grupo de simetría  $\mathcal{O}(d, d)$ .

Paralelamente, mostramos como desde la perspectiva de las acciones de bajas energías convencionales, al compactificar en un toro  $T^d$  también es posible -mediante redefiniciones de campos- llevar a la acción compactificada a un esquema en el cual todos los campos se pueden agrupar en multipletes de  $\mathcal{O}(d, d)$ ; haciendo esta simetría manifiesta.

Presentado de esta forma, vemos claramente como la posibilidad de reescribir a la acción compactificada en términos de multipletes  $\mathcal{O}(d, d)$  no era opcional; sino que era un requisito de consistencia de la teoría.

Esta observación, lleva a preguntarnos si existe una forma de identificar en una dada acción de bajas energías si la misma respetará T-dualidad sin la necesidad de realizar explícitamente el proceso de compactificación y las redefiniciones de campos pertinentes para llevar a la teoría en un esquema en el cual la simetría sea manifiesta.

Para intentar responder esta pregunta, recordemos que en la sección (4.2) mostramos como al grupo  $\mathcal{O}(d, d)$  podemos factorizarlo en su parte geométrica (B-shifts y difeomorfismos) y su parte no geométrica (caracterizada por las dualidades factorizadas  $D_i$ ).

La parte geométrica puede ser parametrizada infinitesimalmente por  $\alpha^\mu_\nu$  y  $B_{\mu\nu}$ , de forma que ante las transformaciones de este subgrupo

$$\delta E_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - \alpha^\rho_\mu E_{\rho\nu} - \alpha^\rho_\nu E_{\mu\rho}; \quad (153a)$$

$$\delta \partial_\mu = -\alpha^\rho_\mu \partial_\rho; \quad (153b)$$

$$\delta \phi = -\frac{1}{2} \alpha^\rho_\rho; \quad (153c)$$

en donde hemos definido  $E_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}$ , al igual que en secciones anteriores.

Frente a estas transformaciones, podemos preguntarnos como transforma la acción (41).

Usando las reglas de transformación (153), vemos que

$$\begin{aligned} \delta \left( \sqrt{-g} e^{-2\phi} \right) &= \delta(\sqrt{-g}) e^{-2\phi} - 2\sqrt{-g} e^{-2\phi} \delta \phi \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} e^{-2\phi} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - 2\sqrt{-g} e^{-2\phi} \delta \phi \\ &= \sqrt{-g} e^{-2\phi} [\alpha^\rho_\rho - g^{\mu\nu} \alpha^\rho_\mu g_{\rho\nu}] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (154)$$

Repetiendo una cuenta similar para los otros términos de la acción, se demuestra que la misma es invariante ante estas transformaciones.

La parte no-geométrica, en cambio, no es posible parametrizarla infinitesimalmente de forma tan directa, debido a que las transformaciones  $D_i$  son no conexas con la identidad.

En cambio, definiremos la matriz  $g_\beta = T g_\theta T$ , en donde

$$T = \prod_{i=1}^d D_i \quad (155)$$

y  $g_\theta$  corresponde a la matriz definida en la ecuación (143).

Se puede ver que la forma mas general de la matriz  $g_\beta$  es

$$g_\beta = \begin{pmatrix} \delta^{\mu\nu} & 0 \\ \beta^{\mu\nu} & \delta^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (156)$$

en donde el bi-vector  $\beta^{\mu\nu}$  se define como  $\beta^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \Theta_{\rho\sigma}$ , con  $\Theta_{\rho\sigma}$  el shift del campo  $B$  (143).

Notemos que  $g_\beta \in \mathcal{O}(d, d)$ , al ser un producto de matrices de este grupo. Al mismo tiempo, corresponde a una matriz conexa con la identidad y contiene en su interior la acción de las dualidades factorizadas. En efecto, utilizaremos el bi-vector  $\beta_{\mu\nu}$  para parametrizar la acción infinitesimal de la parte no-geométrica del grupo de simetría.

La acción de elementos de la forma (156) sobre la matriz  $E$  puede leerse de (142). En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} E' &= (aE + b)(cE + d)^{-1} \\ &= E(\beta E + \mathbb{1})^{-1} \\ &= E(\mathbb{1} - \beta E) + \mathcal{O}(\beta^2); \end{aligned} \tag{157}$$

De forma que, a primer orden en el parámetro  $\beta^{\mu\nu}$ , tenemos que

$$\delta E_{\mu\nu} = -E_{\mu\rho}\beta^{\rho\sigma}E_{\sigma\nu}. \tag{158}$$

De forma similar, se puede mostrar que

$$\delta\phi = \frac{1}{2}\beta^{\mu\nu}E_{\mu\nu}. \tag{159}$$

Las transformaciones (158) y (159), si bien dejan invariante a la acción compactificada; se puede ver que no son una simetría de la acción sin compactificar. Luego, concluimos que es la parte no geométrica del grupo  $\mathcal{O}(d, d)$  la se vuelve una simetría al compactificar.

Tal como se discutió en la sección (4.1), un punto esencial en el proceso de compactificación es asumir que los campos no dependen de las coordenadas del espacio interno. Así mismo, si bien el tensor  $\beta_{\mu\nu}$  esta típicamente definido para las coordenadas internas únicamente; podemos extenderla a todo el espacio asumiendo el embebido trivial en donde  $\beta_{\mu\nu} = 0$  si los índices recorren coordenadas externas.

Luego, utilizando esta definición, la hipótesis de independencia de coordenadas internas podemos imponerla con el siguiente vinculo

$$\beta^{\mu\nu}\partial_\nu(\cdot \cdot \cdot) = 0. \tag{160}$$

A fines practicos, es posible determinar si  $\mathcal{O}(d, d)$  emergerá como una simetría global a compactificar en un toro, verificando si las *transformaciones beta* (158, 159), junto con la restricción (160), dejan invariante a la acción en  $D$  dimensiones.

## 5.1 Invariancia del sector universal

A continuación, usaremos las denominadas *transformaciones*  $\beta$  para verificar que el sector universal NS-NS es invariante frente a ellas.

Para esto, será de gran utilidad trabajar en el formalismo de Frame, en el cual los índices latinos corresponden a *índices planos*, los cuales suben y bajan con la métrica de Minkowski; y se define además el viebein  $e_\mu^a$  de forma que

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} . \quad (161)$$

Luego, partimos de escribir las transformaciones en término de los campos fundamentales de este formalismo  $\phi$ ,  $e_a^\mu$ ,  $b_{ab}$ .

Usando que  $g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu})$  y las reglas de transformación (158), vemos que

$$\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (E_{\mu\rho} \beta^{\rho\sigma} E_{\sigma\nu} - E_{\nu\sigma} \beta^{\rho\sigma} E_{\rho\mu}) . \quad (162)$$

Usando además que  $\beta^{\mu\nu}$  es un tensor constante antisimétrico, tenemos que

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} \beta^{\rho\sigma} b_{\sigma\nu} + b_{\mu\rho} \beta^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu} . \quad (163)$$

Al mismo tiempo, podemos definir las variaciones  $\delta e_{ab}$  y  $\delta b_{ab}$  como

$$\delta e_{ab} = e_a^\mu \delta e_{\mu b} ; \quad \delta b_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu \delta b_{\mu\nu} ; \quad (164)$$

con lo cual,

$$\delta[g_{\mu\nu}] = \delta e_{\mu a} e_{\nu b} \eta^{ab} + e_{\mu a} \delta e_{\nu b} \eta^{ab} . \quad (165)$$

Luego,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta[g_{\mu\nu}] &= 2\delta e_{ab} \eta^{ab} \\ &= 2\beta^{\rho\sigma} b_{\sigma\rho} . \end{aligned} \quad (166)$$

Definiendo  $b_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu b_{\mu\nu}$ , vemos que

$$\delta e_{ab} \eta^{ab} = \beta^c_b b_{ca} ; \quad (167)$$

de donde leemos finalmente

$$\delta e_{ab} = -b_{ac} \beta^c_b . \quad (168)$$

Mediante cuentas análogas, se puede mostrar que

$$\delta e_{ab} = -b_{ac}\beta^c{}_b. \quad (169a)$$

$$\delta b_{ab} = -\beta_{ab} - b_{ac}\beta^c{}_d b_{db}; \quad (169b)$$

$$\delta\phi = \frac{1}{2}e^a{}_a. \quad (169c)$$

Con las reglas de transformación (169) y el constraint (160), se puede mostrar que las conexiones y tensores que aparecen en la acción (41) transforman como

$$[\delta, D_a] = 0. \quad (170a)$$

$$\delta\omega_{cab} = \beta_{[a}{}^d H_{b]cd} - \frac{1}{2}\beta_c{}^d H_{abd}. \quad (170b)$$

$$\delta H_{abc} = 6\omega^d{}_{[ac}\beta_{b]d}. \quad (170c)$$

$$\delta(\nabla_a\phi) = \frac{1}{2}\beta^{cd}H_{acd}. \quad (170d)$$

$$\delta(\nabla_a\nabla_b\phi) = \frac{1}{2}\beta^{cd}\nabla_{(a}H_{b)cd} - \beta^{ce}\omega_{e(a}{}^d H_{b)cd} - \beta^c{}_{(a}H_{b)cd}\nabla^d\phi. \quad (170e)$$

Ahora, a partir de las reglas (170), de nuevo podemos ver que los términos que aparecen de forma explícita en la acción de interés transforman de la siguiente manera

$$\delta(\sqrt{-g}e^{-2\phi}) = 0. \quad (171a)$$

$$\delta R = -2\beta^{cd}\nabla^b H_{bcd} + 5\beta^{cd}\omega_{cab}H_d{}^{ab}. \quad (171b)$$

$$\delta(\nabla\phi)^2 = \beta^{cd}H_{bcd}\nabla^b\phi. \quad (171c)$$

$$\delta(\square\phi) = \frac{1}{2}\beta^{cd}\nabla^b H_{bcd} - \beta^{cd}\omega_{cab}H_d{}^{ab} + \beta^{cd}H_{bcd}\nabla^b\phi. \quad (171d)$$

$$\delta(H^2) = 12\beta^{cd}\omega_{cab}H_d{}^{ab}. \quad (171e)$$

Usando estas últimas, es ahora trivial ver que se satisface  $\delta\mathcal{L} = 0$ ; es decir que no solo las transformaciones  $\beta$  son una simetría de la acción de bajas energías (41), sino que deja explícitamente invariante al Lagrangiano.

Más aun, podemos ver que si partimos de un Lagrangiano genérico compuesto por una combinación lineal arbitraria de estos términos

$$\tilde{\mathcal{L}} = R + m(\nabla\phi)^2 + n\Box\phi + pH^2, \quad (172)$$

aplicando las transformaciones (171)

$$\begin{aligned} \delta_\beta \tilde{\mathcal{L}} &= -2\beta^{cd}\nabla^b H_{bcd} + 5\beta^{cd}\omega_{cab}H_d^{ab} + m\beta^{cd}H_{bcd}\nabla^b\phi + \frac{n}{2}\beta^{cd}\nabla^b H_{bcd} \\ &\quad - n\beta^{cd}\omega_{cab}H_d^{ab} + n\beta^{cd}H_{bcd}\nabla^b\phi + 12p\beta^{cd}\omega_{cab}H_d^{ab} \\ &= \left(\frac{n}{2} - 2\right)\beta^{cd}\nabla^b H_{bcd} + (5 + 12p - n)\beta^{cd}\omega_{cab}H_d^{ab} + (m + n)\beta^{cd}H_{bcd}\nabla^b\phi; \end{aligned} \quad (173)$$

de donde observamos que  $\delta_\beta \tilde{\mathcal{L}} = 0$  si y solo si

$$n = 4, \quad m = -4, \quad p = -\frac{1}{12} \implies \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}. \quad (174)$$

Vemos que no solo se verifica que la acción 41 es invariante ante transformaciones  $\beta$  aplicando el constraint (160), sino que es el la única cantidad compuesta de estos términos que resulta invariante a orden cero en  $\alpha'$ .

De este resultado, concluimos que sería posible determinar enteramente las acciones de bajas energías a partir de pedir que se respeten las simetrías de la teoría; incluyendo la simetría de T-dualidad ante compactificaciones toroidales.

Notemos además que si bien pedimos que al compactificar emerja  $\mathcal{O}(d, d)$  como grupo de simetría -lo que ya vimos que es una condición de consistencia-, finalmente logramos construir una acción en  $D$  dimensiones que es independiente de la estructura del espacio compacto. Esto nos permite, en particular, el calculo de las ecuaciones de movimiento del sector gravitatorio; las cuales constituyen **correcciones a las ecuaciones de la relatividad general**.

## 5.2 Transformaciones a orden $\alpha'$

De la misma forma que hicimos para la acción de bajas energías a orden mas bajo en  $\alpha'$ , quisiéramos extender las transformaciones  $\beta$  para que nos permitan determinar la acción a ordenes superiores en  $\alpha'$ .

Comencemos notando que, dado que buscamos transformaciones que dejen invariante a la medida de integración  $\sqrt{-g}e^{-2\phi}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \delta[\sqrt{-g}e^{-2\phi}] &= \delta[\sqrt{-g}]e^{-2\phi} - 2\sqrt{-g}e^{-2\phi}\delta\phi \\
 &= \sqrt{-g}e^{-2\phi} \left[ g^{\mu\nu} \delta e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} - 2\delta\phi \right] \\
 &= \sqrt{-g}e^{-2\phi} [\delta e^a{}_a - 2\delta\phi] \\
 &= 0;
 \end{aligned} \tag{175}$$

lo que ata la variación de  $\phi$  a la variación del vielbein como

$$\delta\phi = \frac{1}{2}\delta e^a{}_a. \tag{176}$$

Este resultado es válido para todo orden en  $\alpha'$ .

Por otro lado, a orden  $\alpha'$  podemos escribir esquemáticamente

$$\delta_\beta = \delta_\beta^{(0)} + \delta_\beta^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha'^2); \tag{177}$$

en donde  $\delta_\beta^{(1)}$  corresponde a la corrección de la transformación a orden  $\alpha'$  y  $\delta_\beta^{(0)}$  nota las transformaciones a orden cero (169).

Luego, si partimos de la acción de bajas energías en el esquema bi-paramétrico de Bergshoeff De Roo (192), vemos que la variación a orden  $\alpha'$  la podremos descomponer como

$$\delta_\beta \mathcal{L} = \delta_\beta^{(0)} \mathcal{L}^{(0)} + \delta_\beta^{(1)} \mathcal{L}^{(0)} + a \delta_\beta^{(0)} \mathcal{L}_a^{(1)} + b \delta_\beta^{(0)} \mathcal{L}_b^{(1)}. \tag{178}$$

El primer termino en la ecuación anterior, vimos en la sección 5.1 que se anula.

Al segundo termino, integrando por partes podemos llevarlo a la forma

$$\delta_\beta^{(1)} \mathcal{L}^{(0)} = \delta_\beta^{(1)} e^{ab} \Delta e_{ab} + \delta_\beta^{(1)} b^{ab} \Delta b_{ab}; \tag{179}$$

En donde definimos

$$\Delta e_{ab} = -2 \left( R_{ab} + 2\nabla_{(a} \nabla_{b)} \phi - \frac{1}{4} H_{acd} H_b{}^{cd} \right). \tag{180a}$$

$$\Delta b_{ab} = \frac{1}{2} \nabla_c H^c{}_{ab} - \nabla_c \phi H^c{}_{ab}. \tag{180b}$$

Por otro lado, debido que  $\mathcal{L}_b^{(1)} = \mathcal{L}_a^{(1)}[H \rightarrow -H]$ , podemos de momento tomar el parámetro  $b = 0$  sin pérdida de generalidad.



Juntando todo, tenemos que

$$\delta_\beta \mathcal{L} = \delta_\beta^{(1)} \mathcal{L}^{(0)} + a \delta_\beta^{(0)} \mathcal{L}_a^{(1)}. \quad (181)$$

A partir de este punto, el objetivo será determinar las transformaciones a primer orden  $\delta_\beta^{(1)} e_{ab}$ ,  $\delta_\beta^{(1)} b_{ab}$ ,  $\delta_\beta^{(1)} \phi$  pidiendo que  $\delta_\beta \mathcal{L} = 0$ .

Para determinar la forma explícita de las transformaciones  $\delta_\beta^{(1)} e_{ab}$  y  $\delta_\beta^{(1)} b_{ab}$ ; buscaremos utilizar que conocemos las transformaciones a orden cero para llevar el termino  $a \delta_\beta^{(0)} \mathcal{L}_a^{(1)}$  a la forma de la ecuación (179).

Sin embargo, no será necesario que calculemos la variación completa a orden cero de este ultimo término. En cambio, utilizaremos una expansión en potencias de los flujos  $\omega_{abc}$ ,  $H_{abc}$  y  $D_a \phi$ .

De esta forma, buscaremos que las variaciones de orden cero se cancelen con las variaciones a primer orden termino a termino en esta expansión.

Debido a que los flujos son campos compuestos, sin embargo, los mismos obedecen a su vez *Identidades de Bianchi* que relacionan los distintos ordenes de la expansión. A fin de evitar ambigüedades, se considerará primero el orden mas bajo en la expansión y se buscará llevar este a su forma minimal mediante la utilización de Identidades de Bianchi, a expensas de incorporar términos de orden superior. Una vez fijado el orden cero, se pasará al orden siguiente en donde el procedimiento será repetido.

Siguiendo este procedimiento, podemos expandir en flujos las ecuaciones de movimiento (180) como

$$\Delta e_{ab} = -4D_a D_b \phi - 2D_a \omega_{cb}^c + 2D_c \omega_{ab}^c + \dots \quad (182a)$$

$$\Delta b_{ab} = \frac{1}{2} D_c H_{ab}^c + \dots \quad (182b)$$

En donde los puntos suspensivos indican términos de orden superior en potencias de flujos.

De esta forma, si partimos de

$$\mathcal{L}_a^{(1)} = \frac{1}{4} H^{abc} \Omega_{abc}^{(-)} - \frac{1}{8} R_{abcd}^{(-)} R^{(-)abcd}, \quad (183)$$

En donde definimos

$$\Omega_{abc}^{(-)} = \omega_{[ad}^{(-)e} D_{\underline{b}} \omega_{\underline{c}]e}^{(-)d} + \omega_{[ad}^{(-)e} \omega_{fe}^{(-)d} \omega_{\underline{b}\underline{c}]f} + \frac{2}{3} \omega_{[ad}^{(-)e} \omega_{\underline{b}e}^{(-)f} \omega_{\underline{c}]f}^{(-)d} \quad (184a)$$

$$R_{abcd}^{(-)} = 2D_{[a} \omega_{b]cd}^{(-)} + 2\omega_{[ab]}^e \omega_{ecd}^{(-)} + 2\omega_{[ac}^{(-)e} \omega_{b]ed}^{(-)} \quad (184b)$$

$$\omega_{abc}^{(-)} = \omega_{abc} - \frac{1}{2} H_{abc} ; \quad (184c)$$

Vemos que para  $\delta_\beta^{(0)} \mathcal{L}_a^{(1)}$ , el orden mas bajo en la expansión en flujos será cúbico

$$\delta_\beta^{(0)} \mathcal{L}_a^{(1)} = \sum_{h=0}^3 \left[ \delta^{(0)} \mathcal{L}_a^{(1)} \right]_{(h,3-h)} + \dots \quad (185)$$

En la ultima ecuación, notamos con  $(h, 3-h)$  a los términos con  $h$  flujos  $H$  y  $3-h$  flujos  $\omega$ .

Escrito de la forma anterior, cada termino puede ser llevado a

$$\left[ \delta^{(0)} \mathcal{L}_a^{(1)} \right]_{(0,3)} = \Delta e^{ab} \left[ \frac{1}{4} \beta_a^c \omega_{bde} \omega_c^{de} \right] + [\mathcal{D}_a T^a]_{(0,3)} , \quad (186a)$$

$$\begin{aligned} \left[ \delta^{(0)} \mathcal{L}_a^{(1)} \right]_{(1,2)} &= \Delta b^{ab} \left[ -\beta^{ec} \omega_{ea}^d \omega_{bcd} + \beta^{ec} \omega_{ae}^d \omega_{bcd} + \frac{1}{2} \beta_a^c \omega_{bde} \omega_c^{de} \right] \\ &+ \Delta e^{ab} \left[ -\frac{1}{8} \beta_a^e H_{bcd} \omega_e^{cd} \right] + [\mathcal{D}_a T^a]_{(1,2)} , \end{aligned} \quad (186b)$$

$$\begin{aligned} \left[ \delta^{(0)} \mathcal{L}_a^{(1)} \right]_{(2,1)} &= \Delta b^{ab} \left[ \frac{1}{2} \beta^{ec} \omega_{ea}^d H_{bcd} - \frac{1}{2} \beta^{ec} \omega_{ae}^d H_{bcd} - \frac{1}{4} \beta_a^c \omega_{bde} H_c^{de} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \beta_a^c H_{bde} \omega_c^{de} \right] + \Delta e^{ab} \left[ \frac{1}{16} \beta_a^e H_{bcd} H_e^{cd} \right] + [\mathcal{D}_a T^a]_{(2,1)} , \end{aligned} \quad (186c)$$

$$\left[ \delta^{(0)} \mathcal{L}_a^{(1)} \right]_{(3,0)} = \Delta b^{ab} \left[ \frac{1}{8} \beta_a^c H_{bde} H_c^{de} \right] + [\mathcal{D}_a T^a]_{(3,0)} , \quad (186d)$$

en donde en  $\Delta e^{ab}$  y  $\Delta b^{ab}$  solo nos quedamos con los términos de primer orden en flujos.

Por otro lado, definimos  $\mathcal{D}_a T^a$  como

$$\mathcal{D}_a T^a = D_a T^a - 2D_a \phi T^a - \omega_{ba}^b T^a , \quad (187)$$

de forma que al introducirlo en la acción aporta a una derivada total

$$\sqrt{-g}e^{-2\phi}\mathcal{D}_a T^a = \partial_\mu \left( \sqrt{-g}e^{-2\phi}e^\mu{}_a T^a \right) \quad (188)$$

y por lo tanto, no será necesario tenerlo en consideración para el análisis que estamos realizando.

Finalmente, a partir de reemplazar (182) y (186) en (181), llegamos a que para que la variación total se cancele a orden  $\alpha'$  requerimos que

$$\delta^{(1)}e_{ab} = -\frac{a}{4} \left( \beta_{(a}{}^c \omega_{b)de} \omega_c{}^d e - \frac{1}{2} \beta_{(a}{}^e \omega_{b)cd} H_e{}^{cd} - \frac{1}{2} \beta_{(a}{}^e H_{b)cd} \omega_e{}^{cd} + \frac{1}{4} \beta_{(a}{}^e H_{b)cd} H_e{}^{cd} \right). \quad (189a)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}b_{ab} = -a \left( -\beta^{ec} \omega_{e[a}{}^d \omega_{b]cd} + \beta^{ec} \omega_{[ae}{}^d \omega_{b]cd} + \frac{1}{2} \beta_{[a}{}^c \omega_{b]de} \omega_c{}^{de} + \frac{1}{2} \beta^{ec} \omega_{e[a}{}^d H_{b]cd} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \beta^{ec} \omega_{[ae}{}^d H_{b]cd} - \frac{1}{4} \beta_{[a}{}^c \omega_{b]de} H_c{}^{de} - \frac{1}{4} \beta_{[a}{}^e H_{b]de} \omega_c{}^{de} + \frac{1}{8} \beta_{[a}{}^c H_{b]de} H_c{}^{de} \right). \end{aligned} \quad (189b)$$

Este resultado lo obtuvimos para la elección particular de parámetros  $(a, b) = (a, 0)$ . Si queremos pasar al resultado genérico para este esquema bi-paramétrico, simplemente debemos notar que

$$L_b^{(1)} = L_a^{(1)}[-H]. \quad (190)$$

Con esta consideración, vemos que la transformación genérica a orden  $\alpha'$  en el esquema de Bergshoeff De Roo es

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}e_{ab} = \frac{b-a}{4} \beta_{(a}{}^c \left( \omega_{b)de} \omega_c{}^d e + \frac{1}{4} H_{b)de} H_c{}^{de} \right) \\ + \frac{a+b}{8} \beta_{(a}{}^e \left( \beta_{(a}{}^e \omega_{b)cd} H_e{}^{cd} + \beta_{(a}{}^e H_{b)cd} \omega_e{}^{cd} \right). \end{aligned} \quad (191a)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}b_{ab} = (a+b) \left( \beta^{ec} \omega_{e[a}{}^d \omega_{b]cd} - \beta^{ec} \omega_{[ae}{}^d \omega_{b]cd} - \frac{1}{2} \beta_{[a}{}^c \omega_{b]de} \omega_c{}^{de} - \frac{1}{8} \beta_{[a}{}^c H_{b]de} H_c{}^{de} \right) \\ + \frac{b-a}{2} \left( \beta^{ec} \omega_{e[a}{}^d H_{b]cd} - \beta^{ec} \omega_{[ae}{}^d H_{b]cd} - \frac{1}{2} \beta_{[a}{}^c \omega_{b]de} H_c{}^{de} - \frac{1}{2} \beta_{[a}{}^e H_{b]de} \omega_c{}^{de} \right). \end{aligned} \quad (191b)$$

$$\delta_\beta^{(1)} \phi = \frac{1}{2} \delta_\beta^{(1)} e_a{}^a. \quad (191c)$$

Vemos que fue posible encontrar las reglas de transformación a orden  $\alpha'$  que respetan los campos  $\phi$ ,  $e_{ab}$  y  $b_{ab}$ . Si bien este resultado lo obtuvimos a primer orden en la expansión de flujos; en la siguiente sección mostraremos como partiendo de estas transformaciones y utilizando fuertemente el constraint  $\beta^{\mu\nu}\partial_\nu$  se puede mostrar de forma puramente analítica que la acción (192) es invariante frente a las mismas.

En otras palabras, mostraremos como nuevamente  $\mathcal{O}(d, d)$  será una simetría global de la acción efectiva a orden  $\alpha'$  al compactificar en un toro  $T^d$  sin la necesidad de construir los multipletes de forma explícita.

## 6 Variación del Lagrangiano a orden $\alpha'$

En la sección anterior, vimos como para encontrar las transformaciones  $\beta$  a orden  $\alpha'$  fue necesario realizar una expansión en potencias de los flujos y luego aplicar una serie de métodos computacionales. Sin embargo, el calculo analítico de la invariancia de la acción a orden  $\alpha'$  frente a estas transformaciones nunca había sido verificado y presenta un aporte significativo en el entendimiento de las estructuras tensoriales que constituyen estas acciones, así como sus transformaciones frente a la parte no geométrica del grupo  $\mathcal{O}(d, d)$ . En particular, es posible identificar transformaciones pseudo-covariantes en ciertos tensores fundamentales, lo que incentiva estudios posteriores en esta línea.

La siguiente sección, presenta el resultado original en donde se muestra como las transformaciones  $\beta$  resultan ser una simetría de todas las acciones de bajas energías, dejando invariante los respectivos Lagrangianos hasta orden  $\alpha'$ .

Debido a que la métrica plana es invariante frente a todo tipo de transformaciones, resultará útil trabajar en un esquema en el cual todos los campos fundamentales se encuentren expresados en el formalismo de Frame. Es por esto, que el esquema seleccionado en este caso será el esquema bi-paramétrico generalizado de Bergshoeff-de Roo, donde todas las acciones efectivas de cuerdas son recuperadas a partir de las distintas elecciones de los parámetros (a,b). En este esquema, la acción se escribe como

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} (L^{(0)} + aL_a^{(1)} + bL_b^{(1)}); \quad (192)$$

donde  $L^{(0)}$  representa el Lagrangiano de orden mas bajo en potencias de  $\alpha'$ , mientras que  $L_a^{(1)}$  y  $L_b^{(1)}$  representan las correcciones de primer orden.

Cada uno de los términos anteriores se escribe en este esquema como

$$L^{(0)} = R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\Box\phi - \frac{1}{12}H^2; \quad (193a)$$

$$L_a^{(1)} = \frac{1}{4}H^{abc}\Omega_{abc}^{(-)} - \frac{1}{8}R_{abcd}^{(-)}R^{(-)abcd}; \quad (193b)$$

$$L_b^{(1)} = -\frac{1}{4}H^{abc}\Omega_{abc}^{(+)} - \frac{1}{8}R_{abcd}^{(+)}R^{(+ )abcd}; \quad (193c)$$

Donde  $\phi$  denota al dilatón,  $g$  al determinante de la métrica,  $R$  al escalar de curvatura,  $R_{abcd}^{(\pm)}$  al tensor de curvatura con torsión y  $\Omega_{abc}^{(\pm)}$  al término de Chern-Simon con torsión.

Por otro lado, cabe destacar que a lo largo de esta sección en los cálculos se utilizara principalmente la formulación de Frame de la relatividad general, en la cual la métrica del espacio-tiempo se escribe en función de los llamados vielbein como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e_\mu^a e_\nu^b. \quad (194)$$

En ese sentido, los campos con índices planos -representados por índices latinos- estarán relacionados con los campos con índices curvos mediante contracciones con el vielbein. De esta forma, por ejemplo, será frecuentemente utilizada la definición de derivada plana como  $D_a = e_a^\mu \partial_\mu$ .

Luego, la variación hasta orden  $\alpha'$  del Lagrangiano, podrá ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta_\beta[L] = \delta_\beta \left[ \sqrt{-g}e^{-2\phi} \right] & \left( L^{(0)} + aL_a^{(1)} + bL_b^{(1)} \right) \\ & + \sqrt{-g}e^{-2\phi} \left[ \delta_\beta^{(0)}L^{(0)} + \delta_\beta^{(1)}L^{(0)} + a\delta_\beta^{(0)}L_a^{(1)} + b\delta_\beta^{(0)}L_b^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (195)$$

Debido a que las transformaciones  $\beta$  dejan invariante la medida de integración (i.e.  $\delta_\beta[\sqrt{-g}e^{-2\phi}] = 0$ ) y considerando que  $\delta_\beta^{(0)}L^{(0)} = 0$ , el Lagrangiano será invariante ante estas transformaciones si y solo si se verifica

$$\delta_\beta^{(1)}L^{(0)} + a\delta_\beta^{(0)}L_a^{(1)} + b\delta_\beta^{(0)}L_b^{(1)} = 0. \quad (196)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos tomar el caso particular de la cuerda heterótica que resulta de la elección de parámetros  $(a, b) = (\alpha', 0)$ .

Con esta elección particular de parámetros, la ecuación anterior queda escrita como

$$\delta_\beta^{(1)}L^{(0)} + \alpha'\delta_\beta^{(0)}L_a^{(1)} = 0. \quad (197)$$

Mostrar que efectivamente se verifica la ecuación (197), será el principal objetivo de los cálculos siguientes. Dado que todos los términos que intervienen en la misma son proporcionales a  $\alpha'$ , por simplicidad y sin pérdida de generalidad tomaremos  $\alpha' = 1$  de ahora en adelante.

Para calcular el valor de  $\delta_\beta^{(1)} L^{(0)}$  partimos de la expresión para una variación genérica del vielbein y la dos-forma

$$\begin{aligned} \delta L^{(0)} = & -2 \left( R_{ab} + 2\nabla_a \nabla_b \phi - \frac{1}{4} H_{acd} H_b^{cd} \right) \delta e_{ab} \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{D}_c H_{ab}^c \delta b_{ab} + \mathcal{D}_a \left[ 2\mathcal{D}_b \delta e^{ab} - \frac{1}{2} H^{abc} \delta b_{bc} \right] ; \end{aligned} \quad (198)$$

donde se define la acción de la derivada caligráfica  $\mathcal{D}_a$  actuando sobre un campo genérico  $\mathcal{X}$  como

$$\mathcal{D}_a \mathcal{X} = \nabla_a \mathcal{X} - 2\nabla_a \phi \mathcal{X} , \quad (199)$$

y la derivada covariante plana  $\nabla_a$  se define de forma análoga a la derivada covariante con índices curvos, cambiando los Símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ab}^c$  por la Conexión de Spin  $\omega_{ab}^c$ .

Las transformaciones  $\beta$  actúan sobre los distintos campos a orden cero como

$$\delta^{(0)} e_{ab} = -b_{ac} \beta_b^c \quad (200a)$$

$$\delta^{(0)} b_{ab} = -\beta_{ab} - b_{ac} \beta^{cd} b_{db} \quad (200b)$$

$$\delta^{(0)} \phi = \frac{1}{2} \delta^{(0)} e_a^a \quad (200c)$$

Mientras que a orden  $\alpha'$  toman la forma

$$\delta^{(1)} e_{ab} = -\frac{1}{4} \beta_{(a}^e \omega_{b)cd}^{(-)} \omega_e^{(-)cd} . \quad (201a)$$

$$\delta^{(1)} b_{ab} = \beta^{ef} \left( \omega_{e[a}^g \omega_{b]fg}^{(-)} - \omega_{[ae}^g \omega_{b]fg}^{(-)} \right) - \frac{1}{2} \beta_{[a}^f \omega_{b]ge}^{(-)} \omega_f^{(-)ge} . \quad (201b)$$

Dado que estas transformaciones no inducen términos con dilatones en la expresión de  $\delta^{(0)} L^{(1)}$ , en caso de buscar que se verifique (197) será necesario que sean cancelados todos los términos asociados al dilatón en la expresión (198).

De la expresión anterior, podemos aislar entonces los términos que dependen del dilatón  $\phi$

$$\begin{aligned} \delta L_\phi^{(0)} = & -8\nabla_a \nabla_b \phi \delta e^{ab} - 4\nabla_a \phi \nabla_b (\delta e^{ab}) - 4\nabla_b \phi \nabla_a (\delta e^{ab}) \\ & + 8\nabla_a \phi \nabla_b \phi + \nabla_a \phi H^{abc} \delta b_{bc} - \nabla_c \phi H^{abc} \delta b_{ab} . \end{aligned} \quad (202)$$

Esta expresión puede reducirse al considerar que  $\delta e_{ab}$  es un tensor simétrico y  $\delta b_{ab}$  un tensor antisimétrico a

$$\delta L_\phi^{(0)} = -8\nabla_a \nabla_b \phi \delta e^{ab} - 8\nabla_a \phi \nabla_b (\delta e^{ab}) + 8\nabla_a \phi \nabla_b \phi . \quad (203)$$

Hasta aquí, el calculo se ha hecho de manera general para cualquier variación  $\delta$ .

Consideremos ahora el caso de interés,  $\delta = \delta_\beta^{(1)}$ . Para este caso, sabemos que la variación de los campos toma la forma (201).

A continuación, reemplazamos estos valores en la ecuación (203) y usamos las siguientes identidades

$$\nabla_a \nabla_b \phi = D_a D_b \phi + \omega_{ab}{}^c D_c \phi . \quad (204a)$$

$$\nabla_b \beta^{ae} = 2\omega_{ab}{}^{[a} \beta^{e]d} . \quad (204b)$$

Usando además la condición de  $\beta$ -symmetry, expresada como

$$\beta^{ab} D_a(\dots) = 0 , \quad (205)$$

llegamos a

$$\delta_\beta^{(1)} L_\phi^{(0)} = 2\omega^{[ab]f} D_f \phi \beta_b{}^e \omega_{abc}^{(-)} \omega_e^{(-)cd} - [D_a, D_b] \phi \beta^{ae} \omega_{cd}^{(-)b} \omega_e^{(-)cd} . \quad (206)$$

Finalmente, usando la identidad

$$[D_a, D_b] \mathcal{X} = -2\omega_{[ab]}{}^f D_f \mathcal{X} \quad (207)$$

para  $\mathcal{X}$  un tensor arbitrario, llegamos a que  $\delta_\beta^{(1)} L_\phi^{(0)} = 0$ ; lo que nos permite eliminar las contribuciones del dilatón de la expresión (198). Eliminando estos términos, vemos que esta ecuación se puede reescribir de forma genérica como

$$\delta_{\beta}^{(1)} L^{(0)} = -2 \left( R_{ab} - \frac{1}{4} H_{acd} H_b{}^{cd} \right) \delta_{\beta}^{(1)} e^{ab} + 2 \nabla_a \nabla_b \delta_{\beta}^{(1)} e^{ab} - \frac{1}{2} \nabla_a \delta_{\beta}^{(1)} b_{bc} . \quad (208)$$

Dado que los términos que saldrán de la contribución  $\delta_{\beta}^{(0)} L^{(1)}$  involucran productos de Tensores de Riemann con 3-formas  $H_{abc}$  y  $\omega_{abc}$ , intentaremos llevar los términos en (208) a esta forma para que los distintos términos sean sencillos de comparar.

Comenzamos mirando los términos que involucran a  $\delta_{\beta}^{(1)} b_{bc}$ . Reemplazando la expresión dada por (201) vemos que obtenemos

$$-\frac{1}{2} H^{abc} \nabla_a \delta_{\beta}^{(1)} b_{bc} = -\frac{1}{2} H^{abc} \nabla_a \left[ \beta^{ef} \left( \omega_{eb}{}^g \omega_{cfg}^{(-)} - \omega_{be}{}^g \omega_{cfg}^{(-)} \right) - \frac{1}{2} \beta_b{}^f \omega_{cge}^{(-)} \omega_f^{(-)ge} \right] . \quad (209)$$

Usando que la derivada plana del bi-vector  $\beta^{ef}$  se escribe

$$D_a \beta^{ef} = 4 \beta^{d[e} \omega_{[da]}{}^{f]} \quad (210)$$

y expandiendo todos los términos, llegamos a que es posible reescribir los términos de (209) como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} H^{abc} \nabla_a \delta_{\beta}^{(1)} b_{bc} = & -\frac{1}{2} H^{abc} \left[ \beta^{ef} \left( \frac{1}{2} \omega_{eab} \omega_{cgd}^{(-)} \omega_f^{(-)gd} + 2 \omega_{[eb]}{}^g \omega_{af}^{(-)d} \omega_{cdg}^{(-)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega_{[eb]}{}^g R_{acfg}^{(-)} + \omega_{cf}^{(-)g} R_{aebg} - \frac{1}{2} \omega_{cf}^{(-)g} R_{abeg} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \beta_b \left( \omega_c^{(-)ge} R_{afge}^{(-)} + \frac{1}{2} \omega_f^{(-)ge} R_{acge}^{(-)} + \omega_f^{(-)ge} \omega_{cg}^{(-)d} \omega_{ade}^{(-)} \right) \right] . \end{aligned} \quad (211)$$

Por otro lado, analicemos la contribución del termino  $2 \nabla_a \nabla_b \delta_{\beta}^{(1)} e^{ab}$  a la variación de orden 1 del  $L^{(0)}$ .

Partimos de escribir

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \delta_{\beta}^{(1)} e^{ab} = & D_a D_b \delta_{\beta}^{(1)} e^{ab} + D_a \omega_b{}^a{}_f \delta_{\beta}^{(1)} e^{fb} + \omega_b{}^a{}_f D_a \delta_{\beta}^{(1)} e^{fb} + D_a \omega_b{}^b{}_f \delta_{\beta}^{(1)} e^{af} \\ & + 2 \omega_b{}^b{}_f D_a \delta_{\beta}^{(1)} e^{af} + \omega_a{}^a{}_g \omega_b{}^g{}_f \delta_{\beta}^{(1)} e^{fb} + \omega_a{}^a{}_g \omega_b{}^b{}_f \delta_{\beta}^{(1)} e^{gf} . \end{aligned} \quad (212)$$

Luego, usamos que podemos escribir



$$D_a D_b \delta_\beta^{(1)} e^{ab} = -\frac{1}{4} \left[ \beta^{ge} D_b \left( \omega_{ag}{}^a \omega^{(-)b}{}_{cd} \omega_e^{(-)cd} \right) + 4\beta^{f[g} \omega_{[fb]}{}^{e]} \omega_{ag}{}^a \omega^{(-)b}{}_{cd} \omega_e^{(-)cd} \right. \\ \left. - \beta^{ae} \omega_{[ab]}{}^f D_f \left( \omega^{(-)b}{}_{cd} \omega_e^{(-)cd} \right) - 4\omega_{[ab]}{}^f \beta^{g[a} \omega_{gf]}{}^{e]} \omega^{(-)b}{}_{cd} \omega_e^{(-)cd} \right], \quad (213)$$

y

$$D_a \delta_\beta^{(1)} e^{fb} = -\frac{1}{2} \beta^{g[f} \omega_{[ga]}{}^{e]} \omega^{(-)b}{}_{cd} \omega_e^{(-)cd} - \frac{1}{2} \beta^{g[b} \omega_{[ga]}{}^{e]} \omega^{(-)f}{}_{cd} \omega_e^{(-)cd} \\ - \frac{1}{4} \beta^{(fe} D_a \left( \omega^{(-)b}{}_{cd} \omega_e^{(-)cd} \right). \quad (214)$$

Juntando todo, llegamos a que es posible escribir al término  $\nabla_a \nabla_b \delta_\beta^{(1)} e^{ab}$  en forma compacta como

$$\nabla_a \nabla_b \delta_\beta^{(1)} e^{ab} = \frac{1}{8} \omega_a{}^{bf} \omega_e^{(-)cd} \beta^{ae} R_{fbcd}^{(-)} + \frac{1}{4} \omega_{ab}{}^f \omega^{(-)bcd} \beta^{ae} R_{fecd}^{(-)} \\ - \frac{1}{4} \omega_{ab}{}^f \omega^{(-)bcd} \beta^{ae} \omega_{fc}^{(-)g} \omega_{egd}^{(-)} - \frac{1}{4} \beta^{(fe} \omega^{(-)b)}{}_{cd} \omega_e^{(-)cd} R^a{}_{baf}; \quad (215)$$

Donde para llegar a esta expresión se ha usado fuertemente la condición (205).

A partir de haber obtenido las expresiones anteriores, estamos en condiciones de escribir de forma explícita el término (208)

$$\delta_\beta^{(1)} L^{(0)} = -\frac{1}{8} H_{acd} H_b{}^{cd} \beta^{ae} \omega^{(-)b}{}_{cd} \omega_e^{(-)cd} + \frac{1}{4} \omega_a{}^{bf} \omega_e^{(-)cd} \beta^{ae} R_{fbcd}^{(-)} \\ + \frac{1}{2} \omega_{ab}{}^f \omega^{(-)bcd} \beta^{ae} R_{fecd}^{(-)} - \frac{1}{2} \omega_{ab}{}^f \omega^{(-)bcd} \beta^{ae} \omega_{fc}^{(-)g} \omega_{egd}^{(-)} \\ - \frac{1}{2} H^{abc} \left[ \beta^{ef} \left( \frac{1}{2} \omega_{eab} \omega_{cgd}^{(-)} \omega_f^{(-)gd} + 2\omega_{[eb]}{}^g \omega_{af}^{(-)d} \omega_{cgd}^{(-)} + \omega_{[eb]}{}^g R_{acfg}^{(-)} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \beta_b{}^f \left( \omega_c^{(-)ge} R_{afge}^{(-)} + \frac{1}{2} \omega_f^{(-)ge} R_{acge}^{(-)} - \omega_f^{(-)ge} \omega_{cg}^{(-)d} \omega_{ade}^{(-)} \right) \right]. \quad (216)$$

En este punto, vale la pena recordar que nuestro objetivo es mostrar que se satisface la ecuación (197)

Vemos que logramos calcular explícitamente el primer termino de la expresión anterior.

A continuación, veremos el resultado explicito para el segundo termino. Explícitamente, lo que buscaremos calcular es

$$\delta_\beta^{(0)} L^{(1)} = \frac{1}{4} \delta_\beta^{(0)} \left[ H^{abc} \Omega_{abc}^{(-)} \right] - \frac{1}{8} \delta_\beta^{(0)} \left[ R_{abcd}^{(-)} R^{(-)abcd} \right]. \quad (217)$$

Usando además la identidad

$$\Omega_{abc}^{(-)} = \frac{1}{2} \omega_{[\bar{a}}^{(-)de} R_{\bar{b}\bar{c}]ed}^{(-)} - \frac{1}{3} \omega_{[\bar{a}\bar{d}}^{(-)e} \omega_{\bar{b}\bar{e}}^{(-)f} \omega_{\bar{c}]f}^{(-)d}, \quad (218)$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \delta_\beta^{(0)} \left[ H^{abc} \Omega_{abc}^{(-)} \right] &= \frac{1}{4} \delta_\beta^{(0)} \left[ H^{abc} \right] \Omega_{abc}^{(-)} + \frac{1}{8} H^{abc} \delta_\beta^{(0)} \left[ \omega_a^{(-)de} \right] R_{bcd}^{(-)} \\ &\quad + \frac{1}{8} H^{abc} \omega_a^{(-)de} \delta_\beta^{(0)} \left[ R_{bcd}^{(-)} \right] - \frac{1}{4} H^{abc} \delta_\beta^{(0)} \left[ \omega_{ad}^{(-)e} \right] \omega_{be}^{(-)f} \omega_{cf}^{(-)d}. \end{aligned} \quad (219a)$$

$$\frac{1}{8} \delta_\beta^{(0)} \left[ R_{abcd}^{(-)} R^{(-)abcd} \right] = \frac{1}{4} \delta_\beta^{(0)} \left[ R_{abcd}^{(-)} \right] R^{(-)abcd}. \quad (219b)$$

Luego, vemos que será útil calcular las variaciones beta a orden cero de los distintos tensores que aparecen en las expresiones anteriores.

Partiendo de (200) vemos que es posible escribir

$$\delta_\beta^{(0)} \omega_{cab} = \beta_{[a}{}^d H_{b]cd} - \frac{1}{2} \beta_c{}^d H_{abd}. \quad (220a)$$

$$\delta_\beta^{(0)} H_{abc} = 6 \omega_{[ac}{}^d \beta_{b]d}. \quad (220b)$$

A partir de estas expresiones, llegamos a su vez a que

$$\delta_\beta^{(0)} \omega_{acd}^{(\pm)} = \pm \beta_{ea} \omega_{cd}^{(\pm)} e_{cd} \pm 2 \beta_{e[c} \omega_{d]a}^{(\mp)e}, \quad (221)$$

donde  $\omega_{acd}^{(\pm)} = \omega_{acd} \pm \frac{1}{2} H_{acd}$ .

Por otro lado, podemos a su vez utilizar estas expresiones para calcular el término  $\delta_\beta^{(0)} R_{abcd}^{(-)}$ .

Partimos de escribir

$$\delta_\beta^{(0)} R_{abcd}^{(-)} = 2D_{[a} \omega_{b]cd}^{(\pm)} + 2\omega_{[ab]}{}^e \omega_{ecd}^{(\pm)} - 2\omega_{[\bar{a}\bar{c}}^{(\pm)e} \omega_{\bar{b}]de}^{(\pm)}; \quad (222)$$

usando las ecuaciones anteriores para las variaciones de los distintos tensores, llegamos a

$$\begin{aligned} \delta_\beta^{(0)} R_{abcd}^{(-)} &= \pm 2 \beta_{e[a} R^{\pm e}{}_{b]cd} \pm 4 R_{e[ab][c}^{\mp]} \beta_{d]}{}^e + 2 H_{abe} \omega_{f[c}^{\mp]} \beta_{d]}{}^f \\ &\quad - 4 \omega_{f[a}^{\mp]} H_{b]e[c} \beta_{d]}{}^f + 2 \beta^{ef} \omega_{ecd}^{(-)} \omega_{fab}^{(+)}. \end{aligned} \quad (223)$$

Finalmente, la utilización de las siguientes identidades de Bianchi

$$R_{abcd}^{(\pm)} = R_{cdab}^{(\mp)}, \quad (224a)$$

$$R_{[abc]d}^{(\pm)} = \pm \frac{1}{3} \nabla_d H_{abc} + \frac{1}{2} H_{[ab}{}^e H_{c]de}, \quad (224b)$$

lleva a una escritura compacta para la variación del Tensor de Riemann con torsión

$$\delta_\beta^{(0)} R_{abcd}^{(-)} = \beta_a^e R_{ebcd}^{(\pm)} + \beta_b^e R_{aecd}^{(\pm)} - \beta_c^e R_{abed}^{(\pm)} - \beta_d^e R_{abce}^{(\pm)} + 2\beta^{ef} \omega_{ecd}^{(-)} \omega_{fab}^{(+)}. \quad (225)$$

Volviendo al calculo de los términos (219), podemos reemplazar las expresiones 220, (221) y (225) para obtener

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \delta_\beta^{(0)} \left[ H^{abc} \Omega_{abc}^{(-)} \right] &= \frac{1}{4} \beta^{ef} \omega_{ecd}^{(-)} \omega_{fab}^{(+)} R^{(-)abcd} - \frac{1}{2} \omega^{(+gac} \beta_g^b \omega_{ad}^{(-)e} \omega_{be}^{(-)f} \omega_{cf}^{(-)d} + \\ &\quad \frac{1}{4} H^{abc} \left[ 2\beta_{fe} \omega^{(+f}{}_{da} \left( \frac{1}{2} R_{bc}^{(-)ed} - \omega_b^{(-)ef} \omega_{cf}^{(-)d} \right) \right. \\ &\quad \left. + \omega_a^{(-)de} \beta^{fg} \omega_{fed}^{(-)} \omega_{gbc}^{(+)} \right] + \end{aligned} \quad (226a)$$

$$\frac{1}{4} \omega^{gac} \beta_g^b \left( \omega_{ad}^{(-)e} R_{bce}^{(-)d} + \omega_{cd}^{(-)e} R_{abe}^{(-)d} \right).$$

$$\frac{1}{8} \delta_\beta^{(0)} \left[ R_{abcd}^{(-)} R^{(-)abcd} \right] = \frac{1}{2} \beta^{ef} \omega_{ecd}^{(-)} \omega_{fab}^{(+)} R^{(-)abcd}. \quad (226b)$$

Así mismo, es posible reescribir los términos (216) de forma conveniente como

$$\begin{aligned} \delta_\beta^{(1)} L^{(0)} &= \frac{1}{4} \beta^{ef} \omega_{ecd}^{(-)} \omega_{fab}^{(+)} R^{(-)abcd} + \frac{1}{2} \omega_{ab}^{(+f} \omega^{(-)bcd} \beta^{ae} R_{fecd}^{(-)} \\ &\quad - \frac{1}{2} H^{abc} \beta^{ef} \omega_{[eb]}^g R_{acfg}^{(-)} - \frac{1}{2} \omega_{ab}^{(+f} \omega^{(-)bcd} \beta^{ae} \omega_{fc}^{(-)g} \omega_{egd}^{(-)} \\ &\quad - \frac{1}{4} H^{abc} \beta^{fg} \omega_a^{(-)de} \omega_{fed}^{(-)} \omega_{gbc}^{(+)} - H^{abc} \beta^{ef} \omega_{[eb]}^g \omega_{af}^{(-)d} \omega_{cgd}^{(-)}. \end{aligned} \quad (227)$$

Por otro lado, es sencillo mostrar que (226a) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \delta_\beta^{(0)} \left[ H^{abc} \Omega_{abc}^{(-)} \right] &= \frac{1}{4} \beta^{ef} \omega_{ecd}^{(-)} \omega_{fab}^{(+)} R^{(-)abcd} + \frac{1}{2} H^{abc} \beta^f{}_e \omega_{[af]d} R_{bc}^{(-)ed} \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega^{(+gac} \beta_g^b \omega_a^{(-)de} R_{bcd}^{(-)} - \frac{1}{2} \omega^{(+gac} \beta_g^b \omega_{ad}^{(-)e} \omega_{be}^{(-)f} \omega_{cf}^{(-)d} + \\ &\quad - \frac{1}{2} H^{abc} \beta_{fe} \omega^{(+f}{}_{da} \omega_b^{(-)eg} \omega_{cg}^{(-)d} + \frac{1}{4} H^{abc} \omega_a^{(-)de} \beta^{fg} \omega_{fed}^{(-)} \omega_{gbc}^{(+)}. \end{aligned} \quad (228)$$

Escritos los términos (228), (227) y (226b) de esta forma, y usando las siguientes identidades

$$-H^{abc}\beta^{ef}\omega_{[eb]}^g\omega_{af}^{(-)d}\omega_{cgd}^{(-)} = \frac{1}{2}H^{abc}\beta_{fe}\omega^{(+ )f}_{da}\omega_b^{(-)eg}\omega_{cg}^{(-)d}, \quad (229a)$$

$$\frac{1}{2}H^{abc}\beta^f_e\omega_{[af]d}R_{bc}^{(-)ed} = \frac{1}{2}H^{abc}\beta^{ef}\omega_{[eb]}^gR_{acfg}^{(-)}, \quad (229b)$$

$$\frac{1}{2}\omega^{(+ )gac}\beta^b_g\omega_a^{(-)de}R_{bcd}^{(-)} = -\frac{1}{2}\omega_{ab}^{(+ )f}\omega^{(-)bcd}\beta^{ae}R_{fecd}^{(-)}, \quad (229c)$$

podemos ver que trivialmente se satisface (197).

## 7 Conclusiones y reflexiones finales

En la sección 2.1, comenzamos analizando la acción que describe a un objeto unidimensional -una cuerda- relativista de forma clásica. Partiendo de estos resultados, en la sección 2.2 vimos como es posible realizar un proceso de cuantización para esta teoría antes clásica.

Del proceso de cuantización, aprendemos dos hechos remarcables:

1. Las distintas excitaciones de la cuerda fundamental son vistas como campos desde la perspectiva del espacio-tiempo.
2. La dimensionalidad del espacio no es arbitraria, sino que queda determinada al buscar la cancelación de anomalías. Para el caso de la cuerda bosónica la dimensión del espacio-tiempo será  $D = 26$ , mientras que para la super-cuerda será  $D = 10$ .

Encontramos además el primer acierto de la teoría; dentro de su espectro emerge naturalmente un campo compatible con lo que esperamos que sea un gravitón: Una partícula bosónica no masiva de spin 2.

Junto con el gravitón, emergen también una dos forma  $b_{\mu\nu}$ , un campo escalar  $\phi$  -el dilatón- y una torre infinita de campos adicionales con masas que comienzan en el orden de la masa de Planck  $M_p$ .

¿Como es posible reconciliar la predicción de un numero infinito de partículas con el modelo estándar? Naturalmente, como ha pasado a lo largo de la historia de la física, lo que observamos depende de como y a que escala de energía lo hacemos. Siendo que experimentalmente ha sido posible explorar hasta el momento escalas energéticas mucho menores a la escala de Planck, lo primero que buscamos es un mecanismo para construir

acciones efectivas de bajas energías; las cuales permitan en ultima instancia hacer contacto con el modelo estándar.

Impulsados por este enfoque, en la sección 3 partimos de la acción de una cuerda acoplada con un fondo integrado por el gravitón, el campo de Kalb-Ramond y el dilatón; descartando la contribución de campos de mayor masa. A partir de allí, vemos que explícitamente que se rompe la invariancia ante transformaciones de Weyl; lo que nos lleva a buscar condiciones para restaurar esta simetría en el caso cuántico.

En este punto, es que aparece una gran limitación para este enfoque, siendo que para determinar las condiciones mencionadas anteriormente es necesario calcular amplitudes de dispersión a distintos ordenes en  $\alpha'$ ; o equivalentemente calcular las funciones Beta del Grupo de Renormalización. Ambas alternativas suponen un esfuerzo tal que hace imposible su determinación de forma analítica. En particular, lo máximo que se ha logrado calcular estas condiciones es a orden  $\alpha'^3$ .

Estas condiciones, que aseguran la preservación de la invariancia de Weyl, pueden ser pensadas luego como las ecuaciones de movimiento de una acción en  $D$  dimensiones. Esta es la acción conocida como *Acción de Bajas Energías*. A orden cero en  $\alpha'$ , llegamos a la acción (41), la cual en sus ecuaciones de movimiento emergen las Ecuaciones de Einstein de la Relatividad General. Este hecho, constituye otro acierto fundamental para la teoría.

Mas aun, dado que las condiciones de restauración de la simetría de Weyl para el caso cuántico se calculan de forma perturbativa en el parámetro de la cuerda  $\alpha'$ ; la acción de bajas energías (41) sufrirá correcciones orden a orden. A orden  $\alpha'$ , las ecuaciones de movimiento calculadas a partir de la acción (231b) dará origen a Ecuaciones de Einstein con correcciones de orden  $\alpha'$ . Este hecho no es menor siendo que:

1. Esperamos que una teoría consistente de gravedad cuántica prediga correcciones a la Teoría de la Relatividad General, en escalas hoy en día no estudiadas experimentalmente.
2. Habilita el estudio de correcciones a las soluciones conocidas de Relatividad General, las cuales podrían tener consecuencias contrastables experimentalmente compatibles con las capacidades técnicas y tecnológicas actuales.

Vemos entonces, que se hace visible una disyuntiva; para poder hacer contacto con la física de energías en el rango explorado -modelo estándar- es esencial el calculo de acciones de bajas energías. Sin embargo, los métodos de calculo conocidos presentan serias

limitaciones que han causado que hasta la actualidad solo se conozcan acciones a orden cubico en  $\alpha'$ . Esto nos lleva a preguntarnos si no existe un tercer método para el calculo de estas acciones.

En forma paralela, podemos volver a la predicción de la Teoría de Cuerdas en cuanto a la dimensionalidad del espacio-tiempo, y su discrepancia con lo observado experimentalmente. Al igual que sucedía en el caso del espectro es posible que, a escalas bajas de energías, ciertas dimensiones nos sean inaccesibles en caso de que las mismas sean de hecho compactas. El numero de geometrías del espacio compacto que son compatibles con la teoría se estiman ser del orden de  $10^{500}$  y constituyen el *Landscape de la Teoría de Cuerdas*. Sin embargo, podemos estudiar el proceso de compactificación de  $d$  dimensiones para la geometría más simple; un toro  $T^d$ . Tal como mostramos en la sección 4.2, en este caso emerge una simetría conocida como *Target Space Duality* -o simplemente *T-duality*- la cual en una dimensión establece la equivalencia física entre la compactificación en un circulo de radio  $R$  y un circulo de radio inverso  $\frac{1}{R}$ . Para  $d$  dimensiones, esta simetría se identifica con la invariancia ante el grupo de transformaciones  $\mathcal{O}(\mathbb{Z}, d, d)$ .

En esta misma sección, mostramos además que esta es una simetría a **todo orden en teoría de perturbaciones**, por lo que se constituye como una simetría fundamental de la Teoría de Cuerdas. Luego, esperamos que desde la acción de bajas energías al compactificación también emerja una simetría ante este grupo para ser considera una acción consistente. En la sección 4.1 mostramos de forma explicita que esto se verifica para el caso de la acción (41), en donde emerge una simetría global ante el grupo  $\mathcal{O}(\mathbb{R}, d, d)$ .

De esta manera, vemos que sería posible utilizar esta simetría ante compactificaciones toroidales, en conjunto con las simetrías convencionales ante difeomorfismos y transformaciones de Lorentz, para fijar la forma de la acción a distintos ordenes. En el apartado 5.1, por otra parte, mostramos como el grupo  $\mathcal{O}(d, d)$  se descompone en una parte geométrica, integrada por difeomorfismos y traslaciones rígidas de la dos forma; y una parte no geométrica, parametrizada infinitesimalmente por un bi-vector  $\beta^{\mu\nu}$ .

De esta forma, debido a que en (41) la parte geométrica de  $\mathcal{O}(d, d)$  es *per se* una simetría de la acción antes de compactificar, concluimos que es la parte no-geométrica la que emerge como simetría al compactificar en estos espacios. Como es de esperar, si uno utiliza las reglas de transformación bajo este subgrupo de los campos  $b_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu}$  y  $\phi$ ; uno encuentra que antes de compactificar la acción no es invariante frente a estas transformaciones.

En este punto, recordamos el procedimiento de compactificación llevado adelante en

4.1. La parte esencial del *Ansatz de Kaluza klein* es asumir que los campos no dependen de las coordenadas compactas. Luego, es esta condición el que logra promover la totalidad del grupo  $\mathcal{O}(d, d)$  al estatus de simetría.

Concluimos que la condición de invariancia ante  $\mathcal{O}(d, d)$  puede ser verificada desde la acción en  $D$  dimensiones pidiendo la invariancia ante las transformaciones (205) en conjunto con el vínculo  $\beta^{\mu\nu}\partial_\nu[\cdot \cdot \cdot] = 0$ . Esta es la simetría que se conoce como  $\beta$ -symmetry. Notemos que este mecanismo, además, permite verificar que el grupo  $\mathcal{O}(d, d)$  emergerá como simetría global tras compactificar sin la necesidad de aplicar las redefiniciones de campos pertinentes para hacer esta simetría manifiesta.

Profundizando en el estudio de esta simetría "efectiva", es que en la sección 5.1 verificamos no solo que el sector universal NS-NS es invariante frente a estas transformaciones, sino que además mostramos que partiendo de términos invariantes ante transformaciones de Lorentz y Diffeoformismos; estas transformaciones terminan de fijar completamente la acción. Adicionalmente, es ese mismo apartado es que se encuentran las transformaciones beta a orden  $\alpha'$  mediante métodos computacionales.

Con estas transformaciones halladas de forma explícita, en la subsección 6 partimos de la acción de bajas energías a orden  $\alpha'$  en el esquema de Bergshoeff De Roo (192) y mostramos **de forma analítica** como se verifica la invariancia  $\beta$ -symmetry.

De esto ultimo, aprendemos además que:

1. Es posible construir objetos tensoriales -como es el caso del Tensor de Riemann con torsión- que definen una noción de convariancia ante transformaciones  $\beta$ .
2. A diferencia de lo que ocurre típicamente, en este caso la invariancia no ocurre orden a orden en  $\alpha'$  de forma independiente; sino que las transformaciones de orden  $\alpha'$  de los términos a orden cero, se cancelan las transformaciones a orden cero de los términos de orden  $\alpha'$ .
3. No es posible la descripción de estas transformaciones en un formalismo métrico, por lo que la utilización del formalismo de Frame en este caso no es opcional.

Como conclusión general, notamos como es posible utilizar las simetrías de la teoría para la construcción de acciones efectivas. Este método, a diferencia de los métodos convencionales, permite un tratamiento analítico y de menor complejidad que motiva la búsqueda de acciones a mayor orden en  $\alpha'$ .

En adición, la reciente publicación de un artículo [4], en donde se encuentra un procedimiento sistemático para hallar las transformaciones  $\beta$  a todo orden en  $\alpha'$ , impulsa aun mas la búsqueda de acciones efectivas a mayores ordenes.

Finalmente, este estudio abre nuevas potenciales lineas de investigación, como:

- Identificación de estructuras tensoriales subyacentes, invariantes antes las transformaciones  $\beta$ .
- Análisis no perturbativos basados en esta simetría, la cual sabemos corresponde a una simetría fundamental de la teoría frente a este tipo de compactificaciones.
- Extensión de este mecanismo hacia el sector fermiónico y definición de transformaciones generalizadas que engloben ambos sectores.
- Estudio de la simetría  $\beta$ , en teorías tipo IIA / IIB; en las cuales, debido a que las correcciones en las acciones de bajas energías comienzan a orden cubico en  $\alpha'$ , el comportamiento frente al grupo  $\mathcal{O}(d, d)$  permanece poco explorado.
- Utilización de las correcciones obtenidas para las ecuaciones de la relatividad general, para el cálculo de correcciones en las soluciones.

## A EOMs a orden $\alpha'$

En este apéndice, se buscará calcular las acciones de movimiento a orden  $\alpha'$ , partiendo de la acción de bajas energías en el esquema de Metsav-Tseytlin (231b).

En este esquema, la acción se escribe

$$S_{MT} = \int dx \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left( L^{(0)} + L^{(1)} \right) ; \quad (230)$$

donde

$$L^{(0)} = R - 4\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + 4\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \frac{1}{12} H^2 . \quad (231a)$$

$$L^{(1)} = \frac{a-b}{4} H^{\mu\nu\rho} \Omega_{\mu\nu\rho} - \frac{a+b}{8} \left[ R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2} H^{\mu\nu\rho} H_{\mu\sigma\lambda} R_{\nu\rho}{}^{\sigma\lambda} \right. \\ \left. + \frac{1}{24} H^{\mu\nu\rho} H_{\mu\sigma}{}^\lambda H_{\nu\lambda}{}^\delta H_{\rho\delta}{}^\sigma - \frac{1}{8} H_{\mu\rho\delta} H^{\mu\rho}{}_\lambda H_{\nu\sigma}{}^\delta H^{\nu\sigma\lambda} \right] . \quad (231b)$$



Debido a que el termino de Chern-Simon  $\Omega_{\mu\nu\rho}$  se escribe en función de la conexión de spin y por tanto no puede ser descrito en un formalismo métrico, los campos fundamentales de esta acción son  $\phi$ ,  $b_{\mu\nu}$ ,  $e^\mu_a$ .

La variación de estos campos fundamentales, induce luego una variación genérica sobre la acción que podemos escribir como

$$\begin{aligned} \delta S_{MT} = & \int d^D x \delta \left[ \sqrt{-g} e^{-2\phi} \right] \left( \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) \\ & + \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \delta \mathcal{L}^{(0)} + \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \delta \mathcal{L}^{(1)}. \end{aligned} \quad (232)$$

En general, por el principio de mínima acción, pedir que la variación de la acción sea nula da origen a las ecuaciones de movimiento para los distintos campos.

Sin embargo, en este caso nos interesará únicamente las ecuaciones de movimiento para el sector puramente gravitatorio; las cuales se obtienen a partir de tomar  $b_{\mu\nu} = \phi = 0$  sobre las ecuaciones de movimiento generales.

Esto, en particular, simplificará el calculo de estas ecuaciones; siendo que solo necesitaremos calcular explícitamente los términos que no se anularán tras tomar esta ultima condición.

El primer termino en (232) podemos reescribirlo como

$$\begin{aligned} \int d^D x \delta \left[ \sqrt{-g} e^{-2\phi} \right] \left( \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) &= \int d^D x \delta(\sqrt{-g}) e^{-2\phi} \left( \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) \\ &\quad - 2 \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left( \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) \delta\phi \\ &= \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left( \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - 2\delta\phi \right], \end{aligned} \quad (233)$$

mientras que el segundo termino en (232) se expande como

$$\begin{aligned} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \delta \mathcal{L}^{(0)} &= \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[ \frac{\delta R}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{6} H^{\mu\nu\rho} \delta H_{\mu\nu\rho} \right. \\ &\quad \left. - 8 \partial_\mu \delta\phi \partial^\mu \phi + 4 \nabla_\mu \nabla^\mu \delta\phi \right]. \end{aligned} \quad (234)$$

Integrando por partes, se puede mostrar que los términos que contienen a la variación del dilatón contribuyen a una derivada total; mientras que  $[H^{\mu\nu\rho} \delta H_{\mu\nu\rho}]_{b_{\mu\nu}=0} = 0$ .

Usando en forma adicional que

$$\frac{\delta R}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = R^{\mu\nu} g_{\mu\nu} , \quad (235)$$

llegamos a que

$$\left[ \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \delta \mathcal{L}^{(0)} \right]_{b_{\mu\nu}=\phi=0} = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} . \quad (236)$$

Notemos que en este caso, la variación la dejamos expresado en en el formalismo métrico por simplicidad. La relación entre  $\delta g_{\mu\nu}$  y  $\delta e_\mu^a$  es

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e_{a(\nu} \delta e_{\mu)}^a . \quad (237)$$

Por ultimo, vemos que al tercer término en (232) lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} \left[ \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \delta \mathcal{L}^{(1)} \right]_{b_{\mu\nu}=\phi=0} &= \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[ \frac{a-b}{4} \Omega_{\mu\nu\rho} \delta H^{\mu\nu\rho} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a+b}{4} R_\rho^{\sigma\mu\nu} \delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} - \frac{a+b}{4} R_\rho^{\sigma\mu\nu} R_{\gamma\sigma\mu\nu} \delta g^{\rho\gamma} \right] ; \end{aligned} \quad (238)$$

de forma inmediata, vemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} e^{-2\phi} \frac{a-b}{4} \Omega_{\mu\nu\rho} \delta H^{\mu\nu\rho} &= \sqrt{-g} e^{-2\phi} \frac{3}{4} \Omega^{\mu\nu\rho} \partial_\mu (\delta b_{\nu\rho}) \\ &= -\sqrt{-g} e^{-2\phi} \frac{3}{4} (a-b) \nabla_\mu \Omega^{\mu\nu\rho} \delta b_{\nu\rho} + \text{D.T.} + \mathcal{O}(\phi) . \end{aligned} \quad (239)$$

Por otro lado, para calcular cuando vale  $\sqrt{-g} e^{-2\phi} R_\rho^{\sigma\mu\nu} \delta R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  en termino de las variaciones de los campos elementales, notemos primero que por definición

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]\sigma}^\rho + 2\Gamma_{[\underline{\mu}\lambda}^\rho \Gamma_{\underline{\nu}]\sigma}^\lambda , \quad (240)$$

de forma que

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 2\nabla_{[\underline{\mu}} \delta \Gamma_{\underline{\nu}]\sigma}^\rho . \quad (241)$$

Luego, integrando por partes tenemos que

$$\sqrt{-g} e^{-2\phi} R_\rho^{\sigma\mu\nu} \delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -2\sqrt{-g} \nabla_\mu R_\rho^{\sigma\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho + \text{D.T.} + \mathcal{O}(\phi) . \quad (242)$$

Por otro lado, se puede ver que

$$\delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} = \delta g^{\rho\lambda} g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_{\sigma} \delta g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} \delta g_{\sigma\lambda} - \partial_{\lambda} \delta g_{\sigma\nu}) ; \quad (243)$$

integrando por partes, llegamos luego a que

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} e^{-2\phi} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu} \delta R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = & \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[ 2\nabla_{(\underline{\sigma}} (\nabla_{\mu} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu}) g^{\rho\lambda} \delta g_{\underline{\nu})\lambda} \right. \\ & + 2\Gamma_{\rho(\underline{\sigma}}^{\alpha} (\nabla_{\mu} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu}) g^{\rho\lambda} \delta g_{\underline{\nu})\lambda} + 2\nabla_{\mu} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu} \partial_{(\underline{\sigma}} g^{\rho\lambda} \delta g_{\underline{\nu})\lambda} \\ & - \nabla_{\mu} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha} g^{\rho\lambda} \delta g_{\sigma\nu} - \nabla_{\mu} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu} \partial_{\lambda} g^{\rho\lambda} \delta g_{\sigma\nu} \\ & - \nabla_{\lambda} (\nabla_{\mu} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu}) g^{\rho\lambda} \delta g_{\sigma\nu} - \nabla_{\mu} R_{\alpha}^{\sigma\mu\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^{\alpha} g^{\rho\lambda} \delta g_{\sigma\nu} \\ & \left. + \nabla_{\mu} R_{\rho}^{\alpha\mu\nu} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} g^{\rho\lambda} \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_{\mu} R_{\rho}^{\sigma\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu} g^{\rho\lambda} \delta g_{\sigma\nu} \right] \\ & + \text{D.T.} + \mathcal{O}(\phi) . \end{aligned} \quad (244)$$

Se puede demostrar que los términos (  $\sim$  ) se cancelan entre si, al igual que los términos (  $\_ \_$  ). Luego,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} e^{-2\phi} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu} \delta R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = & \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[ 2\nabla_{(\underline{\sigma}} (\nabla_{\mu} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu}) g^{\rho\lambda} \delta g_{\underline{\nu})\lambda} \right. \\ & \left. - \nabla_{\lambda} (\nabla_{\mu} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu}) g^{\rho\lambda} \delta g_{\sigma\nu} \right] + \text{D.T.} + \mathcal{O}(\phi) \end{aligned} \quad (245)$$

y usando que  $\nabla_{\Sigma} g^{\delta\Omega} = 0$ , entonces se puede reescribir la ultima expresi3n como

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} e^{-2\phi} R_{\rho}^{\sigma\mu\nu} \delta R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = & -\sqrt{-g} e^{-2\phi} \nabla_{\mu} \nabla_{\lambda} \left( R^{\mu\nu\lambda\sigma} + R^{\mu\lambda\nu\sigma} + R^{\mu\sigma\lambda\nu} \right) \delta g_{\sigma\nu} \\ & + \text{D.T.} + \mathcal{O}(\phi) \\ = & 2\sqrt{-g} e^{-2\phi} \nabla_{\mu} \nabla_{\lambda} R^{\mu\nu\sigma\lambda} \delta g_{\sigma\nu} + \text{D.T.} + \mathcal{O}(\phi) , \end{aligned} \quad (246)$$

en donde en la ultima igualdad se ha utilizado la Identidad de Bianchi

$$R^{\mu[\nu\lambda\sigma]} = 0 . \quad (247)$$

Juntando todo, nos queda que

$$[\delta S_{MT}]_{\_ \mu\nu=\phi=0} = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} [\Delta\phi\delta\phi + \Delta b^{\mu\nu} \delta b_{\mu\nu} + \Delta g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}] , \quad (248)$$

en donde se ha definido

$$\Delta\phi = -2 \left( \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) = -2 \left[ R - \frac{a+b}{8} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \right]. \quad (249a)$$

$$\Delta b^{\mu\nu} = -\frac{3}{4}(a-b)\nabla_\rho \Omega^{\rho\mu\nu}. \quad (249b)$$

$$\Delta g^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left( \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) + \frac{a+b}{2} \nabla_\sigma \nabla_\lambda R^{\sigma\nu\mu\lambda} + \frac{a+b}{4} R^\mu{}_{\lambda\rho\beta} R^{\nu\lambda\rho\beta}. \quad (249c)$$

Las ecuaciones de movimiento, se obtienen pidiendo que  $\Delta\phi = \Delta b_{\mu\nu} = \Delta g_{\mu\nu} = 0$ ;

$$R - \frac{a+b}{8} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 0. \quad (250a)$$

$$-\frac{3}{4}(a-b)\nabla_\rho \Omega^{\rho\mu\nu} = 0. \quad (250b)$$

$$R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R - \frac{a+b}{2} \left[ \frac{1}{8}g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\alpha\beta\rho\sigma} - \nabla_\sigma \nabla_\lambda R^{\sigma\nu\mu\lambda} - \frac{1}{2}R^\mu{}_{\lambda\rho\beta} R^{\nu\lambda\rho\beta} \right] = 0. \quad (250c)$$

Sin pérdida de generalidad podemos pasar al caso general en el cual todos los términos anulados bajo la condición  $b_{\mu\nu} = \phi = 0$  son absorbidos en un objeto  $T_{\mu\nu}$ . Bajo estas consideraciones, la ecuación (250c) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} & R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R + \frac{a+b}{2} \left[ \nabla_\sigma \nabla_\lambda R^\sigma{}_{\nu\mu}{}^\lambda + \frac{1}{8}g_{\mu\nu} R_{\sigma\lambda\rho\beta} R^{\sigma\lambda\rho\beta} - \frac{1}{2}R_{\mu\lambda\rho\beta} R_{\nu}{}^{\lambda\rho\beta} \right] \\ &= G_{\mu\nu} + \frac{a+b}{2} \left[ \nabla_\sigma \nabla_\lambda R^\sigma{}_{\nu\mu}{}^\lambda + \frac{1}{8}g_{\mu\nu} R_{\sigma\lambda\rho\beta} R^{\sigma\lambda\rho\beta} - \frac{1}{2}R_{\mu\lambda\rho\beta} R_{\nu}{}^{\lambda\rho\beta} \right] \\ &= T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (251)$$

en donde  $G_{\mu\nu}$  corresponde al *Tensor de Einstein* y  $T_{\mu\nu}$  será interpretado como el tensor de energía-momento compuesto por campos  $b_{\mu\nu}$  y  $\phi$ . Por lo tanto vemos que la ecuación anterior corresponde a la Ecuación de Einstein con correcciones de orden  $\alpha'$ .

## References

- [1] G. Aldazabal, D. Marqués, and C. Núñez. Double field theory: a pedagogical review. *Classical and Quantum Gravity*, 30(16):163001, July 2013.
- [2] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, and Y. Lozano. An introduction to t-duality in string theory. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 41(13):120, Apr. 1995.

- [3] W. H. Baron, D. Marqués, and C. A. Nuñez.  $\beta$  symmetry of supergravity. *Phys. Rev. Lett.*, 130:061601, Feb 2023.
- [4] W. H. Baron, D. Marques, and C. A. Nunez. Exploring the  $\beta$  symmetry of supergravity, 2023.
- [5] E. A. Bergshoeff and M. de Roo. The Quartic Effective Action of the Heterotic String and Supersymmetry. *Nucl. Phys. B*, 328:439–468, 1989.
- [6] C. G. Callan, Jr., C. Lovelace, C. R. Nappi, and S. A. Yost. String Loop Corrections to beta Functions. *Nucl. Phys. B*, 288:525–550, 1987.
- [7] C. G. Callan, Jr., E. J. Martinec, M. J. Perry, and D. Friedan. Strings in Background Fields. *Nucl. Phys. B*, 262:593–609, 1985.
- [8] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten. Vacuum configurations for superstrings. *Nucl. Phys. B*, 258:46–74, 1985.
- [9] J. F. Donoghue. The effective field theory treatment of quantum gravity. In *AIP Conference Proceedings*. AIP, 2012.
- [10] J. F. Donoghue, M. M. Ivanov, and A. Shkerin. Epfl lectures on general relativity as a quantum field theory, 2017.
- [11] A. Giveon, M. Porrati, and E. Rabinovici. Target space duality in string theory. *Physics Reports*, 244(23):77202, Aug. 1994.
- [12] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten. *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. 7 1988.
- [13] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten. *SUPERSTRING THEORY. VOL. 2: LOOP AMPLITUDES, ANOMALIES AND PHENOMENOLOGY*. 7 1988.
- [14] T. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )*, 1921:966–972, 1921.
- [15] O. Klein. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). *Z. Phys.*, 37:895–906, 1926.

- [16] L. D. Landau and E. M. Lifschits. *The Classical Theory of Fields*, volume Volume 2 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [17] C. Lovelace. Strings in Curved Space. *Phys. Lett. B*, 135:75–77, 1984.
- [18] D. Marqués and C. A. Nuñez. T-duality and -corrections. *Journal of High Energy Physics*, 2015(10), Oct. 2015.
- [19] R. Metsaev and A. Tseytlin. Order (two-loop) equivalence of the string equations of motion and the -model weyl invariance conditions: Dependence on the dilaton and the antisymmetric tensor. *Nuclear Physics B*, 293:385–419, 1987.
- [20] J. Overduin and P. Wesson. Kaluza-klein gravity. *Physics Reports*, 283(56):303378, Apr. 1997.
- [21] J. Polchinski. *String theory. Vol. I: An introduction to the bosonic string*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 12 2007.
- [22] M. D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 3 2014.
- [23] P. K. Townsend. *Black holes*, 1997.
- [24] B. Zwiebach. *A first course in string theory*. 2004.

## References

---

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución No Comercial Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina Buenos Aires, 2024