



Generación de Fotones en Cavidades Superconductoras Dobles: Implementación en Circuitos Cuánticos

Jean Paul Louys Sanso

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Diciembre de 2023

TEMA: Generación de Fotones en Cavidades Superconductoras Dobles: Implementación en Circuitos Cuánticos

ALUMNO: Jean Paul Louys Sanso

L.U. N°: 509/20

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, FCEN, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Fernando Lombardo

CODIRECTORA: Dra. Paula Villar

COLABORADOR: Lic. Nicolás del Grosso

FECHA DE INICIO: Marzo de 2023

FECHA DE FINALIZACIÓN: Diciembre de 2023

FECHA DE EXAMEN: 18 de diciembre de 2023

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesora de Tesis de Licenciatura

Jurado

Dedicado a mi papá, mi mamá y mi hermana, quienes siempre me acompañaron.

Índice general

1. Introducción	1
2. Campo escalar en una cavidad doble	3
2.1. Densidad Lagrangiana y ecuaciones de Euler-Lagrange	3
2.2. Cavidad estática	4
2.3. Cavidad dinámica	7
2.4. Cavidad estática, región <i>out</i>	9
3. Espectro de la cavidad doble	11
3.1. Soluciones a la ecuación trascendente real	11
3.2. Localización de las autofunciones de la cavidad estática	18
3.3. Soluciones a la ecuación trascendente compleja	22
4. Multiple Scale Analysis	25
4.1. Solución general	25
4.2. Resonancia paramétrica	29
4.3. Suma de frecuencias	31
4.3.1. Variando todos los parámetros a excepción de χ	32
4.3.2. Variando únicamente χ	33
4.4. Resta de frecuencias	34
4.4.1. Variando todos los parámetros a excepción de χ	35
5. Generación de fotones: simulaciones numéricas	37
5.1. Métodos numéricos	37
5.2. Resonancia paramétrica	41
5.3. Suma de frecuencias	49
5.4. Resta de frecuencias	49
5.5. Detuning	52
5.6. Amplitud de las perturbaciones	55
6. Simulaciones cuánticas en circuitos superconductores	57
7. Conclusiones	63

A. Base de soluciones ortonormales	67
A.1. Campo no nulo en la membrana	67
A.2. Campo nulo en la membrana	68
B. Derivadas de las autofrecuencias k_n	71
C. Propiedades de los coeficientes β_{nl}	73

Índice de figuras

2.1. Esquema de la cavidad doble estudiada, con cuatro parámetros tuneables: las longitudes de las cavidades, la susceptibilidad y la conductividad eléctrica de la membrana que las une.	3
3.1. Espectro de una configuración estándar de la cavidad unidimensional sin ninguna membrana. La ausencia de membrana dieléctrica equivale a imponer $\chi/L = 0$ y $vL = 0$. El parámetro ΔL pierde sentido físico y se obtiene un espectro equiespaciado.	12
3.2. Espectro de la cavidad unidimensional para una conductividad $v = 0$ y distintos valores de susceptibilidad χ ; en función de la asimetría de la cavidad $\Delta L/L$	13
3.3. Espectro de la cavidad unidimensional para una susceptibilidad $\chi = 0$ y distintos valores de conductividad v ; en función de la asimetría de la cavidad $\Delta L/L$	13
3.4. Cortes planos del espectro de la cavidad, fijando todos los parámetros de la misma a excepción de: la asimetría de la cavidad ΔL en (a), la susceptibilidad eléctrica χ de la membrana en (b), y la conductividad eléctrica v de la membrana en (c). En todos los casos se usó $L = 1$	15
3.5. Cortes planos del espectro de la cavidad, fijando todos los parámetros de la misma a excepción de: la asimetría de la cavidad ΔL en (a), la susceptibilidad eléctrica χ de la membrana en (b), y la conductividad eléctrica v de la membrana en (c). En todos los casos se usó $L = 1$. En rojo, el nivel de energía crítico obtenido a partir de la Ecuación (3.7).	16
3.6. Cortes planos del espectro de la cavidad, fijando todos los parámetros de la misma a excepción de: la susceptibilidad eléctrica χ de la membrana en (a), y la conductividad eléctrica v de la membrana en (b). En ambos casos se usó $L = 1$ y $\Delta L/L = 0.05$. En rojo, el nivel de energía k_0 que existe en el régimen de alta susceptibilidad, calculado a partir de la Ecuación (3.13). En verde, las soluciones asintóticas del límite $ k^2\chi - v \rightarrow \infty$	17
3.7. Autofunciones de una cavidad perfectamente simétrica ($\Delta L = 0$) con $L = 1$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$	18
3.8. Autofunciones de una cavidad levemente asimétrica ($\Delta L/L = 0.05$) con $L = 1$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$	19

3.9. Autofunciones de una cavidad levemente asimétrica ($\Delta L/L = 0.05$) con $L = 1$, $\chi/L = 5$, $vL = 0$ (régimen de alta susceptibilidad).	20
3.10. Autofunciones de una cavidad muy asimétrica ($\Delta L/L = 0.6$) con $L = 1$, $\chi/L = 5$, $vL = 0$ (régimen de alta susceptibilidad).	20
3.11. Grado de localización κ de las autofunciones en función del número de onda, para: (a) una cavidad levemente asimétrica ($\Delta L/L = 0.05$) y (b) una cavidad muy asimétrica ($\Delta L/L = 0.6$). En ambos casos, $L = 1$ y χ , v son parámetros libres.	21
3.12. Logaritmo del grado de localización κ en función del número de onda y la asimetría de la cavidad.	22
3.13. Búsqueda de las soluciones complejas de la ecuación trascendente dinámica. Cuantificamos la cercanía a dichas soluciones con la función $g = -\ln F $, y computamos los valores de g para distintas partes reales e imaginarias de las soluciones propuestas k . Como referencia, con cruces rojas indicamos las soluciones reales de la cavidad estática. Las regiones con un tono amarillo más intenso indican a dónde se corren dichas soluciones. Se consideró una cavidad con $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$, $\dot{\chi} = 0.5$	23
3.14. Cambios en las soluciones de la ecuación trascendente compleja al aumentar el valor de $\dot{\chi}$, para valores fijos de $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$. En función de $\dot{\chi}$, en (a) mostramos la parte imaginaria de las soluciones y en (b) el cambio porcentual en la parte real normalizado respecto a la solución con $\dot{\chi} = 0$	24
3.15. Cambios en las soluciones de la ecuación trascendente compleja al aumentar el valor de $\dot{\chi}$, para valores fijos de $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 1000$. En función de $\dot{\chi}$, en (a) mostramos la parte imaginaria de las soluciones y en (b) el cambio porcentual en la parte real normalizado respecto a la solución con $\dot{\chi} = 0$	24
5.1. Valores absolutos de las funciones definidas por las Ecuaciones (5.1) y (5.2), en función del número de onda. Con línea punteada en azul se marcan las raíces de dichas funciones, que son las soluciones de la Ecuación (2.18). Se graficó para $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$	38
5.2. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del <i>Multiple Scale Analysis</i> . Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro ΔL	42

5.3. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro ΔL 43

5.4. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*, relajando la selectividad de los acoplamientos según la Ecuación (5.25). Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro ΔL 44

5.5. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro L 45

5.6. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro ΔL ; y con la misma frecuencia, amplitud y en contrafase al parámetro L 45

5.7. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro ΔL ($\xi_{\Delta L} = 1$); y con la misma frecuencia al parámetro L , pero con $\xi_L \simeq -0.43856$ 46

5.8. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_0$ al parámetro v 47

- 5.9. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_0$ al parámetro L 48
- 5.10. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_0$ al parámetro χ 48
- 5.11. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = \omega_1 + \omega_3$ al parámetro ΔL 49
- 5.12. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω), para distintos acoplamientos en resta. En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = \omega_1 - \omega_0$ al parámetro ΔL 50
- 5.13. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω), para distintos acoplamientos en resta. En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Permitimos en las soluciones del MSA un pequeño *detuning* con un perfil uniforme como en la Ecuación (5.25). Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = \omega_3 - \omega_1$ al parámetro ΔL 51
- 5.14. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω), para un acoplamiento en resta. En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = \omega_1 - \omega_0$ al parámetro ΔL 51

5.15. Valores de expectación del operador número de fotones de frecuencia ω_3 en función del tiempo (adimensionalizado con Ω_0), en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3 + \Delta\Omega$ al parámetro ΔL . Las distintas curvas se corresponden con distintos valores de <i>detuning</i> $\Delta\Omega$, y las etiquetas están ordenadas de la misma manera en la que aparecen en los respectivos gráficos para facilitar su visualización. La Figura (b) muestra la misma información que la (a), pero con el eje vertical en escala logarítmica.	52
5.16. Curvas de la Figura 5.15a, normalizadas respecto al número de fotones esperado del MSA.	53
5.17. Valores de expectación del operador número de fotones de frecuencia ω_3 en función del <i>detuning</i> , en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3 + \Delta\Omega$ al parámetro ΔL . En (a) se muestra un perfil típico a tiempos cortos, y en (b) uno a tiempos largos. En línea continua verde, ajustes gaussianos de los datos simulados.	53
5.18. (a) anchos a mitad de altura y (b) centros, de las campanas gaussianas que resultan de ajustar los perfiles de <i>detuning</i> en función del tiempo. Se descartaron los primeros puntos temporales por ser muy ruidosos. En (a) se realizó un ajuste según la Ecuación (5.28).	54
5.19. Número de fotones (en colores) en función del tiempo (adimensionalizado con Ω_0) y el <i>detuning</i> , en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3 + \Delta\Omega$ al parámetro ΔL	55
5.20. Número de fotones producidos en la cavidad doble en función de la amplitud de las perturbaciones, a tiempos cortos en (a) y a tiempos largos en (b). En línea punteada, el resultado esperado según la Ecuación (5.30). Se perturbó con $\Omega_0 = 2\omega_3$ al parámetro ΔL en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$	56
5.21. Número de fotones en función de la fase acumulada $\Omega_0 t$ para distintas amplitudes de las perturbaciones. La cavidad es la misma que la de la Figura 5.20.	56
6.1. Esquema del circuito propuesto para realizar simulaciones cuánticas del Efecto Casimir Dinámico. En cada extremo, un dc-SQUID modula el largo efectivo de cada cavidad (línea de transmisión) a partir de los flujos magnéticos externos $\Phi_{1,2}$; el dc-SQUID central permite modular de manera efectiva la conductividad v de la membrana a partir del flujo magnético externo Φ_0 y la susceptibilidad χ de la membrana a partir de los capacitores variables \tilde{C} . c_w y l_w son las capacitancia e inductancia por unidad de longitud de las líneas de transmisión acopladas a los SQUIDS. Cada juntura de Josephson (dos por cada SQUID) tiene asociada una capacitancia equivalente $C_J^{0,1,2}$ y una energía de Josephson $E_J^{0,1,2}$	58

C.1. Coeficientes de acoplamiento $\beta_{nl}^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad perfectamente simétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$	77
C.2. Coeficientes de acoplamiento $\eta_m^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad perfectamente simétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$. Los coeficientes asociados a los parámetros χ y v son varios órdenes de magnitud más pequeños, y se muestran multiplicados por un factor de 100 y 5000, respectivamente.	77
C.3. Coeficientes de acoplamiento $\beta_{nl}^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad ligeramente asimétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$	78
C.4. Coeficientes de acoplamiento $\eta_m^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad ligeramente asimétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$. Los coeficientes asociados a los parámetros χ y v son varios órdenes de magnitud más pequeños, y se muestran multiplicados por un factor de 100 y 5000, respectivamente.	78
C.5. Coeficientes de acoplamiento $\beta_{nl}^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad fuertemente asimétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0.60$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$	79
C.6. Coeficientes de acoplamiento $\eta_m^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad fuertemente asimétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0.60$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$. Los coeficientes asociados a los parámetros χ y v son varios órdenes de magnitud más pequeños, y se muestran multiplicados por un factor de 1000 y 50000, respectivamente.	79

Resumen

En este trabajo estudiamos la generación de fotones por Efecto Casimir Dinámico en una cavidad doble unidimensional con paredes perfectamente conductoras y una membrana dieléctrica en su interior. Las longitudes de cada cavidad, la susceptibilidad eléctrica y la conductividad eléctrica de la membrana pueden controlarse. Estudiamos las condiciones de contorno y ecuaciones dinámicas de un campo escalar confinado en la cavidad. Analizamos la dependencia de las autofrecuencias de cada uno de los cuatro parámetros anteriores, y encontramos regiones donde domina la susceptibilidad, donde domina la conductividad, y donde hay una transición (y compiten). También, caracterizamos la localización de las autofunciones para configuraciones arbitrarias de la cavidad doble. Encontramos soluciones analíticas aproximadas para el número de fotones generado, restringiéndonos a perturbaciones senoidales de pequeña amplitud en cada parámetro y usando el método del *Multiple Scale Analysis*. Comparamos con simulaciones numéricas las aproximaciones analíticas en los casos donde se cumplen las condiciones de acoplamiento necesarias para que (analíticamente) podamos tener una solución no trivial. Verificamos que es posible modificar la tasa de generación exponencial, o la frecuencia de las oscilaciones del número de fotones, a partir de elegir las amplitudes y fases relativas de los parámetros perturbados. Caracterizamos los efectos del *detuning* y de la amplitud de las perturbaciones en un caso particular; encontrando que el número de fotones presenta un perfil gaussiano centrado en un *detuning* no nulo y que se angosta al avanzar en el tiempo, y que el número de fotones generados aumenta exponencialmente con la amplitud de las perturbaciones. Por último, proponemos un circuito cuántico que hace uso de tres SQUIDs y dos capacitores variables para controlar de manera efectiva los cuatro parámetros de la cavidad. Mostramos cómo estos elementos permitirían simular cuánticamente el Efecto Casimir Dinámico a partir de las equivalencias entre las ecuaciones dinámicas y las condiciones de contorno.

Agradecimientos

Quiero aprovechar este espacio para agradecer a Fer, quien me guió y ayudó desde el principio, y con quien intercambié y tuve una enorme cantidad de mails y conversaciones (no solamente de física). También a Nico y a Pau, siempre dispuestos a darme una mano y sugiriendo soluciones cuando tuve problemas. Fue un placer haber realizado esta tesis en el QUFIPHI con ellos, aprendí y me divertí muchísimo.

Quiero agradecer también a mi familia: a mis padres y a mi hermana. Desde chico, me apoyaron, acompañaron y motivaron en todos mis proyectos. Mis logros son, en gran parte, gracias a ellos.

A mis amigos y amigas, quienes me han llenado de risas y alegría.

INTRODUCCIÓN

El Efecto Casimir Dinámico fue inicialmente propuesto por Moore en 1970, quien consideró una cavidad unidimensional con espejos móviles [1]. Moore descubrió que el movimiento de los espejos podría producir excitaciones del campo electromagnético debido a la energía de punto cero del campo electromagnético. El nombre del efecto se debe a Casimir, quien predijo en 1948 la existencia de una fuerza atractiva entre dos placas paralelas descargadas y perfectamente conductoras en vacío [2]. Esta fuerza, conocida como fuerza de Casimir o Efecto Casimir Estático, se debe a las fluctuaciones cuánticas de vacío del campo electromagnético, al igual que el Efecto Casimir Dinámico. Las primeras demostraciones experimentales de la existencia de la fuerza de Casimir fueron realizadas recién en 1997 [3]. Otro efecto estrechamente vinculado a la fuerza de Casimir y causado por las fluctuaciones cuánticas de vacío es la fuerza de Casimir-Polder, predicha por Casimir y Polder en 1948 y medida en un laboratorio por primera vez en 1993 [4].

Ya en 1970, Moore notó que el número de fotones que podrían producirse por trayectorias no relativistas de las paredes conductoras era muy bajo [1]. Años más tarde se encontró que podía obtenerse una generación de fotones en forma exponencial en el tiempo, a partir de perturbar de manera oscilatoria las paredes de una cavidad tridimensional [5, 6, 7]. También se encontró que para observar el Efecto Casimir Dinámico bastaba tener un solo espejo móvil [8, 9]. La necesidad de mover espejos a velocidades relativistas (considerando los tamaños típicos de las cavidades) hace que este efecto haya esquivado la medición experimental al día de hoy.

Sin embargo, se han encontrado sistemas con condiciones de contorno dependientes del tiempo y análogas a las del Efecto Casimir Dinámico en las cavidades [10, 11]. En estos sistemas, el movimiento de las paredes es reemplazado por la variación de campos magnéticos que modifican las condiciones de contorno. Esto permitió, en 2011, la simulación del Efecto Casimir Dinámico en arquitecturas de circuitos cuánticos superconductores [12], a partir del uso de SQUIDS (*Superconducting QUantum Interference Devices*). Los SQUIDS aprovechan los resultados no lineales del efecto Josephson, que está presente en las junturas SIS (superconductor-aislante-superconductor) [13]. En 1973, Josephson recibió el Premio Nobel por la predicción de este efecto.

En este trabajo, consideramos un campo escalar en una cavidad doble unidimensional en vacío con una membrana dieléctrica en su interior (que acopla las cavidades). La razón por la cual incluimos dicha membrana es que permite obtener generación exponencial de fotones bajo ciertas restricciones. En dicha cavidad, consideramos que las longitudes de cada cavidad y la susceptibilidad eléctrica y la conductividad eléctrica de la membrana pueden variar en el tiempo. Consideramos configuraciones arbitrarias, en las que permiti-

mos variar en el tiempo cualquier subconjunto de parámetros. Permitir variar más de un parámetro a la vez puede aumentar la tasa de la generación exponencial de fotones. Pero también puede reducirla, dependiendo de las fases y amplitudes relativas de las perturbaciones de los distintos parámetros.

Este tipo de cavidades han sido estudiadas por Velasco [14], quien encontró que el Efecto Casimir Dinámico permitiría entrelazar las cavidades acopladas a partir de la generación de pares de fotones de distinta frecuencia. En otros trabajos se obtuvieron resultados similares [15, 16, 17, 18]. Este trabajo es una continuación del trabajo de Velasco en el que permitimos variar todos los parámetros del sistema y no solamente uno de ellos.

En el Capítulo 2 presentamos el problema, las ecuaciones dinámicas y las condiciones de contorno dependientes del tiempo. Además, cuantizamos el campo electromagnético y describimos cómo calcular el número de fotones producido por el Efecto Casimir Dinámico para variaciones arbitrarias de los cuatro parámetros del sistema.

En el Capítulo 3 analizamos en profundidad el espectro de frecuencias y las autofunciones de la cavidad doble. Esto es fundamental para entender cómo la variación de los parámetros cambia la estructura espacial de la cavidad, generando en el proceso fotones. Estudiamos además el grado de localización de las autofunciones en cada una de las cavidades.

En el Capítulo 4 implementamos el método del *Multiple Scale Analysis* con el fin de obtener expresiones analíticas aproximadas, restringiendo el movimiento de las paredes a oscilaciones armónicas. Describimos las condiciones externas necesarias para obtener soluciones no triviales.

En el Capítulo 5 desarrollamos los métodos numéricos utilizados, y obtenemos las soluciones numéricas del problema. Los resultados numéricos los comparamos con aquellos obtenidos a partir del *Multiple Scale Analysis*. Además, estudiamos el efecto del *detuning* en la frecuencia externa y de las amplitudes de las perturbaciones en una situación particular.

En el Capítulo 6 mostramos una configuración de un circuito cuántico superconductor que permitiría simular el Efecto Casimir Dinámico en la cavidad doble de nuestro trabajo.

Por último, en el Capítulo 7 presentamos las conclusiones del trabajo.

CAMPO ESCALAR EN UNA CAVIDAD DOBLE

En este Capítulo presentamos las ecuaciones que rigen la dinámica de una cavidad doble perturbada durante un tiempo finito. Discutimos las soluciones y condiciones de contorno para un campo escalar ϕ . Para estudiar la generación de fotones en la cavidad, dividimos la evolución del sistema en tres partes: una inicial, en la que la cavidad es estática; una dinámica, en la que se perturba al menos un parámetro de la cavidad durante un tiempo finito; y una final, cuando todos los parámetros de la cavidad vuelven a los valores iniciales (y por ende se vuelve al caso estático). A lo largo de todo este trabajo utilizaremos $\hbar = c = 1$.

2.1. Densidad Lagrangiana y ecuaciones de Euler-Lagrange

Consideremos un campo escalar ϕ confinado en una cavidad unidimensional doble como se muestra en la Figura 2.1. La cavidad consiste en dos espejos perfectamente conductores ubicados en $x = -L_1 < 0$ y $x = L_2 > 0$, y una membrana dieléctrica de espesor despreciable en $x = 0$. La membrana posee una susceptibilidad eléctrica χ y una conductividad eléctrica v . Los cuatro parámetros L_1 , L_2 , χ , v pueden variarse en el tiempo.

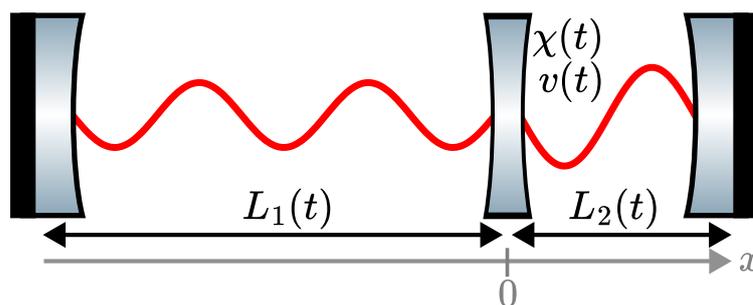


Figura 2.1. Esquema de la cavidad doble estudiada, con cuatro parámetros tuneables: las longitudes de las cavidades, la susceptibilidad y la conductividad eléctrica de la membrana que las une.

Podemos escribir la densidad Lagrangiana de la cavidad doble como [19]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\epsilon(x, t)(\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2 - V(x, t)\phi^2], \quad (2.1)$$

donde la permitividad eléctrica $\epsilon(x, t)$ y la conductividad eléctrica $V(x, t)$ de la cavidad

dependen de las propiedades de la membrana dieléctrica según

$$\epsilon(x, t) = 1 + \chi(t)\delta(x), \quad (2.2)$$

$$V(x, t) = v(t)\delta(x). \quad (2.3)$$

En las regiones $x \in [-L_1, 0)$ y $x \in (0, L_2]$, la densidad \mathcal{L} de la Ecuación (2.1) se reduce al lagrangiano de Klein-Gordon [20] dado que $\epsilon = 1$ y $V = 0$, para todo tiempo. Entonces el campo escalar satisface la ecuación de ondas:

$$\square\phi = 0, \quad (2.4)$$

e imponemos la existencia de la membrana como una condición de contorno sobre el campo ϕ . Las otras dos condiciones de contorno son impuestas por los espejos, asumidos perfectamente conductores:

$$\phi(t, x = -L_1) = 0, \quad (2.5)$$

$$\phi(t, x = L_2) = 0. \quad (2.6)$$

Además, el campo debe ser continuo en toda la cavidad y en particular en $x = 0$, por lo que:

$$\phi(t, x = 0^+) = \phi(t, x = 0^-). \quad (2.7)$$

A partir de la Ecuación (2.1) es posible obtener la ecuación de Euler-Lagrange para el campo ϕ :

$$0 = [1 + \chi(t)\delta(x)]\partial_t^2\phi(t, x) + \dot{\chi}(t)\delta(x)\partial_t\phi(t, x) - \partial_x^2\phi(t, x) + v(t)\delta(x)\phi(t, x). \quad (2.8)$$

A diferencia del campo ϕ , la derivada $\partial_x\phi$ presenta un salto en $x = 0$ debido a las propiedades de la membrana, lo que permite observar modos del campo como el de la Figura 2.1. El salto en la derivada de ϕ es la última condición de contorno del problema, y puede obtenerse integrando la Ecuación (2.8) en un entorno $(-d, d)$ alrededor de $x = 0$ y tomando el límite $d \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \partial_x\phi(t, 0^+) - \partial_x\phi(t, 0^-) &= \lim_{d \rightarrow 0} \int_{-d}^d \partial_x^2\phi \, dx \\ &= \dot{\chi}(t)\partial_t\phi(t, 0) + \chi(t)\partial_t^2\phi(t, 0) + v(t)\phi(t, 0). \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2. Cavidad estática

Si los espejos de la cavidad y los parámetros de la membrana se encuentran inicialmente ($t \leq 0$) en reposo, las soluciones a la Ecuación (2.4) sujetas a las condiciones de contorno

y de continuidad dadas por las Ecuaciones (2.5) a (2.7) son [21]:

$$u_n(t, x) = \frac{e^{-i\omega_n t}}{\sqrt{2\omega_n N_n}} \begin{cases} \sin(k_n(x + L_1)), & -L_1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{\sin(k_n L_1)}{\sin(k_n L_2)} \sin(k_n(x - L_2)), & 0 \leq x \leq L_2 \end{cases}, \quad (2.10)$$

donde k_n es el número de onda, ω_n es la frecuencia y N_n es una normalización asociada al modo u_n . Una discusión más extensa y completa sobre los modos de la cavidad puede encontrarse en el Apéndice A.

El conjunto de soluciones $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dado por la Ecuación (2.10) es una base ortonormal y completa ante el producto interno de Klein-Gordon [21]:

$$(f(t, x), g(t, x))_{KG} \equiv i \int_{-L_1}^{L_2} dx \left[\dot{f}(t, x)g^*(t, x) - f(t, x)\dot{g}^*(t, x) \right]. \quad (2.11)$$

Por otro lado, la parte espacial de los modos u_n ,

$$\Phi_n(x) \equiv \frac{1}{N_n} \begin{cases} \sin(k_n(x + L_1)), & -L_1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{\sin(k_n L_1)}{\sin(k_n L_2)} \sin(k_n(x - L_2)), & 0 \leq x \leq L_2 \end{cases}, \quad (2.12)$$

no forma un conjunto ortogonal ante el producto interno usual. Por ello, consideramos un producto interno alternativo:

$$(\Phi_n, \Phi_m) = \int_{-L_1}^{L_2} dx \Phi_n(x)\Phi_m(x) (1 + \delta(x)\chi), \quad (2.13)$$

ante el cual el conjunto $\{\Phi_n\}$ es ortonormal [19]. Puede verse además que las autofunciones forman una base completa de soluciones, lo que implica que:

$$f(t, x) = \sum_m [f_m u_m(t, x) + f_m^* u_m^*(t, x)], \quad (2.14)$$

donde

$$f_m = (f, u_m) \quad (2.15)$$

es el producto interno de Klein-Gordon definido en la Ecuación (2.11).

Resulta útil definir la longitud total L de la cavidad doble, y la asimetría entre cavidades ΔL :

$$L \equiv L_1 + L_2, \quad (2.16)$$

$$\Delta L \equiv L_1 - L_2. \quad (2.17)$$

Sustituyendo los modos de la Ecuación (2.10) en la Ecuación (2.9), obtenemos una ecuación trascendente que deben satisfacer los números de onda:

$$\frac{2 \sin(k_n L)}{k_n^2 \chi - v} k_n = \cos(k_n \Delta L) - \cos(k_n L), \quad (2.18)$$

donde hemos eliminado la dependencia de $\dot{\chi}$ en la Ecuación (2.9) puesto que en la cavidad estática $\dot{\chi} = 0$. La Ecuación (2.18) muestra que, como esperamos, las autofrecuencias de la cavidad no dependen del tiempo en el caso estático.

Como, a excepción de un punto (la membrana), la densidad Lagrangiana de la Ecuación (2.1) se simplifica a la de Klein-Gordon, y el conjunto de autofunciones $\{u_n\}$ es una base ortonormal y completa de soluciones a la ecuación de ondas (Ecuación (2.4)) sujeta a las condiciones de contorno de las Ecuaciones (2.5) a (2.9), podemos cuantizar el campo escalar ϕ . Los modos satisfacen una ecuación de un oscilador armónico y entonces podemos definir los operadores de creación (\hat{a}_n^\dagger) y destrucción (\hat{a}_n) de partículas de momento definido k_n en la cavidad doble. Esto nos permite escribir un desarrollo del campo:

$$\hat{\phi}(t, x) = \sum_n \hat{a}_n u_n(t, x) + \hat{a}_n^\dagger u_n^*(t, x), \quad (2.19)$$

donde reemplazamos ϕ por el operador $\hat{\phi}$. El momento canónicamente conjugado $\Pi = \partial_t \phi$ es también promovido a un operador $\hat{\Pi}$, y $\hat{\phi}$ y $\hat{\Pi}$ deben satisfacer las relaciones de conmutación canónicas a tiempos iguales:

$$\left[\hat{\phi}(t, x), \hat{\phi}(t, x') \right] = 0, \quad (2.20)$$

$$\left[\hat{\Pi}(t, x), \hat{\Pi}(t, x') \right] = 0, \quad (2.21)$$

$$\left[\hat{\phi}(t, x), \hat{\Pi}(t, x') \right] = i\delta(x - x'). \quad (2.22)$$

Para que se cumplan las relaciones de conmutación canónicas los operadores de creación y destrucción de partículas de momento definido deben satisfacer:

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m] = 0, \quad (2.23)$$

$$[\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_m^\dagger] = 0, \quad (2.24)$$

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = i\delta_{nm}. \quad (2.25)$$

Las relaciones de conmutación de los operadores de creación y destrucción permiten definir el estado fundamental del campo a partir de la acción de los operadores de destrucción:

$$\hat{a}_n |0\rangle = 0 \quad \forall n, \quad (2.26)$$

y a partir de este y la acción de los operadores de creación podemos construir el espacio de Fock de la cavidad doble estática:

$$|n_0 n_1 \dots\rangle \equiv \prod_m \frac{(\hat{a}_m^\dagger)^{n_m}}{\sqrt{n_m!}} |0\rangle. \quad (2.27)$$

El estado $|n_0 n_1 \dots\rangle$ definido en la Ecuación (2.27) corresponde a un estado con n_0 fotones de momento k_0 , n_1 de momento k_1 , y así sucesivamente.

2.3. Cavidad dinámica

Para poder observar generación de fotones por el efecto Casimir dinámico necesitamos variar al menos uno de los parámetros de la cavidad durante algún tiempo finito t_f . Para estudiar el problema dinámico de la cavidad doble vamos a considerar que inicialmente (a $t=0$) la cavidad se encuentra estática, y definimos los parámetros iniciales de la cavidad:

$$L_0 \equiv L(t = 0), \quad (2.28)$$

$$\Delta L_0 \equiv \Delta L(t = 0), \quad (2.29)$$

$$\chi_0 \equiv \chi(t = 0), \quad (2.30)$$

$$v_0 \equiv v(t = 0). \quad (2.31)$$

Respecto a la notación, en esta sección y en las siguientes omitiremos la dependencia temporal de cada parámetro de la cavidad y de las autofrecuencias, a menos que sea necesario remarcar esta dependencia. En ese sentido, es importante entender que cada vez que escribamos algún parámetro r en verdad no es una constante sino una función dependiente del tiempo $r(t)$ que controlamos directamente o está indirectamente determinado por el control de otros parámetros (este es el caso de la autofrecuencia instantánea de la cavidad, por ejemplo).

Además, luego de un tiempo t_f , devolvemos todos los parámetros tuneables de la cavidad a sus valores iniciales a $t = 0$. Las condiciones de contorno y continuidad de las Ecuaciones (2.5), (2.6), (2.7) y (2.9) se vuelven dependientes del tiempo a través de los parámetros.

De manera similar a la sección inicial, buscamos una base de soluciones a la ecuación de ondas. Dado que las condiciones de contorno dependen del tiempo, consideramos una base instantánea de soluciones:

$$\Phi_n(t, x) \equiv \frac{1}{N_n} \begin{cases} \sin(k_n(x + L_1)), & -L_1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{\sin(k_n L_1)}{\sin(k_n L_2)} \sin(k_n(x - L_2)), & 0 \leq x \leq L_2 \end{cases}. \quad (2.32)$$

Notemos que la definición de la Ecuación (2.32) es completamente análoga a la definición de la Ecuación (2.12), excepto que esconde una dependencia temporal en cada uno de sus parámetros N_n , k_n , L_1 , L_2 .

Ahora las autofunciones de la cavidad las podemos desarrollar en la base instantánea con un desarrollo de Fourier con coeficientes dependientes del tiempo [5][22]:

$$u_m(t, x) = \sum_n Q_n^{(m)}(t) \Phi_n(t, x). \quad (2.33)$$

La continuidad de u_m a $t = 0$ impone las condiciones iniciales para los coeficientes $Q_n^{(m)}$:

$$Q_n^{(m)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \delta_{nm}, \quad (2.34)$$

$$\dot{Q}_n^{(m)}(0) = -i\sqrt{\frac{\omega_m}{2}} \delta_{nm}. \quad (2.35)$$

Si reemplazamos las funciones de la base instantánea Φ_n en el salto de la derivada del campo escalar dado por la Ecuación (2.9) obtenemos una ecuación trascendente compleja para las autofrecuencias instantáneas de la cavidad:

$$\frac{2 \sin(k_n L)}{k_n^2 \chi + i k_n \dot{\chi} - v} k_n - \cos(k_n \Delta L) + \cos(k_n L) = 0. \quad (2.36)$$

La Ecuación (2.36) presenta dos diferencias importantes con respecto a la Ecuación (2.18): la dependencia temporal en cada parámetro y la aparición de la derivada de χ que vuelve inmediatamente complejas a las autofunciones instantáneas, dado que todos los parámetros de la cavidad (incluido $\dot{\chi}$) son reales. Debemos entender a la parte imaginaria de las autofrecuencias a través de la consecuencia que producen: la aparición de una exponencial real que produce decaimiento o crecimiento exponencial del modo asociado a la autofrecuencia. Las Ecuaciones (2.18) y (2.36) son fundamentales para entender la generación de fotones debido al efecto Casimir dinámico, y por ello dedicaremos el Capítulo 3 en su totalidad a sus soluciones.

Obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para los coeficientes $Q_n^{(m)}$ de la Ecuación (2.33) al introducir los modos u_m en la ecuación de ondas (2.4):

$$\ddot{Q}_l^{(m)} + k_l^2 Q_l^{(m)} = - \sum_n Q_n^{(m)} \lambda_{nl} + 2\dot{Q}_n^{(m)} \theta_{nl}, \quad (2.37)$$

donde los coeficientes θ_{nl} y λ_{nl} están definidos a partir del producto interno de la Ecuación (2.13) según:

$$\theta_{nl} \equiv (\partial_t \Phi_n, \Phi_l), \quad (2.38)$$

$$\lambda_{nl} \equiv (\partial_t^2 \Phi_n, \Phi_l). \quad (2.39)$$

A partir de ahora, identificaremos de manera genérica con la variable r a cualquiera de los cinco parámetros tuneables relevantes de la cavidad: L , ΔL , χ , v , $\dot{\chi}$.

Finalmente, resulta conveniente definir un nuevo conjunto de coeficientes:

$$\beta_{nl}^{(r)} \equiv (\partial_r \Phi_n, \Phi_l), \quad (2.40)$$

$$\alpha_{nl}^{(r)} \equiv (\partial_r^2 \Phi_n, \Phi_l), \quad (2.41)$$

y entonces podemos escribir:

$$\theta_{nl} = \sum_r \beta_{nl}^{(r)} \dot{r}, \quad (2.42)$$

$$\lambda_{nl} = \sum_r \ddot{r} \beta_{nl}^{(r)} + \dot{r}^2 \alpha_{nl}^{(r)}. \quad (2.43)$$

Los coeficientes β_{nl} son especialmente relevantes, como se verá en el Capítulo 4, y satisfacen las siguientes relaciones ante la permutación de los subíndices:

$$\beta_{nl}^{(r)} = \begin{cases} -\beta_{nl}^{(r)}, & r = L, \Delta L, v \\ -\beta_{nl}^{(r)} - \sigma_{nl}, & r = \chi, \end{cases}, \quad (2.44)$$

donde

$$\sigma_{nl} \equiv \Phi_n(0)\Phi_m(0). \quad (2.45)$$

En el Apéndice C demostramos las ecuaciones anteriores y escribimos las relaciones entre coeficientes asociados a distintos parámetros de la cavidad.

Es importante destacar que mientras los parámetros de la cavidad estén variando en el tiempo, no es posible definir un estado de vacío como sí se podía con la cavidad estática en la Ecuación (2.26). Tampoco estará bien definido el número de fotones de la cavidad, y es por ello que para estudiar el número de fotones generado por el efecto Casimir dinámico vamos a exigir que, luego de un tiempo t_f la cavidad vuelva a ser una cavidad estática.

2.4. Cavidad estática, región *out*

A tiempo $t = t_f$, la cavidad vuelve a tener los mismos parámetros que a tiempo $t = 0$, y la variación se detiene. Para distinguir las dos regiones temporales en las que la cavidad se encuentra estática, vamos a llamar *in* a la región $t \leq 0$ estudiada en la Sección 2.2 y región *out* a la región $t \geq t_f$.

Para la región *in* pudimos escribir en la Ecuación (2.19) un desarrollo del campo escalar en términos de operadores de creación y destrucción de partículas de momento definido:

$$\hat{\phi}(t, x) = \sum_n \hat{a}_n^{in} u_n(t, x) + \hat{a}_n^{\dagger in} u_n^*(t, x), \quad (2.46)$$

donde ahora hicimos explícita la región en la que están definidos los operadores de creación y destrucción.

Para la región *out* podemos expandir el campo de manera completamente análoga:

$$\hat{\phi}(t, x) = \sum_n \hat{a}_n^{out} v_n(t, x) + \hat{a}_n^{\dagger out} v_n^*(t, x), \quad (2.47)$$

donde las funciones v_n son los modos del campo de la región *out* dados en la Ecuación (2.12). Además, tal como se hizo en las Ecuaciones (2.26) y (2.27), es posible definir un estado de vacío para cada región ($|0\rangle_{in}$, $|0\rangle_{out}$) y construir el espacio de Fock de cada

región.

Dado que los operadores evolucionan entre la región *in* y la región *out*, para calcular el número total de partículas producidos por el efecto Casimir dinámico una vez detenida la variación de parámetros de la cavidad es necesario conocer cómo actúan los operadores *out* sobre los estados *in*. Como los operadores de creación y destrucción de la región *out* están relacionados con los de la región *in* a través de una transformación de Bogoliubov, podemos escribir [5][23]:

$$\hat{a}_n^{out} = \sum_m \left(\alpha_{nm} \hat{a}_m^{in} + \beta_{nm} \hat{a}_m^{\dagger in} \right). \quad (2.48)$$

Los coeficientes α_{mn} y β_{mn} de la Ecuación (2.48) pueden obtenerse a partir de considerar las dos expresiones equivalentes a $t \geq t_f$ para el campo en la región *out* dadas en las Ecuaciones (2.46) y (2.47), evolucionando temporalmente los modos iniciales y proyectándolos en los finales [14]. En la región $t \geq t_f$ sustituimos las funciones u_n de la Ecuación (2.46) por el desarrollo en la base instantánea de la Ecuación (2.33). La Ecuación (2.37) para los coeficientes $Q_n^{(m)}(t)$ se simplifica a $t \geq t_f$:

$$\ddot{Q}_n^{(m)} + k_n^2 Q_n^{(m)} = 0, \quad (2.49)$$

dado que los parámetros no varían en el tiempo. Entonces,

$$Q_n^{(m)}(t \geq t_f) = A_n^{(m)} e^{i\omega_n t} + B_n^{(m)} e^{-i\omega_n t}. \quad (2.50)$$

Finalmente, las constantes $A_n^{(m)}$ y $B_n^{(m)}$ se relacionan con los coeficientes de Bogoliubov a través de la frecuencia [14]:

$$\alpha_{nm} = \sqrt{2\omega_n} B_n^{(m)}, \quad (2.51)$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{2\omega_n} A_n^{(m)}. \quad (2.52)$$

Usando la Ecuación (2.48) es posible calcular los valores de expectación del operador número \hat{N}_n^{out} de partículas de momento definido k_n sobre un estado $|in\rangle$ genérico:

$$\langle N_n \rangle = \langle in | \hat{N}_n^{out} | in \rangle = \langle in | \hat{a}_n^{\dagger out} \hat{a}_n^{out} | in \rangle = 2\omega_n \sum_m \left(\left(1 + N_m^{(0)} \right) \left| A_n^{(m)} \right|^2 + N_m^{(0)} \left| B_n^{(m)} \right|^2 \right), \quad (2.53)$$

donde $N_m^{(0)}$ es el número de fotones de frecuencia ω_m en el estado inicial $|in\rangle$. La Ecuación (2.53) se simplifica cuando $|in\rangle = |0\rangle_{in}$:

$$\langle N_n \rangle = 2\omega_n \sum_m \left| A_n^{(m)} \right|^2. \quad (2.54)$$

ESPECTRO DE LA CAVIDAD DOBLE

Conocer el espectro de la cavidad doble es fundamental para estudiar la generación de fotones debido al Efecto Casimir Dinámico. En este capítulo, nos proponemos analizar el espectro de la cavidad estática (en las regiones *in* y *out*) en configuraciones arbitrarias. En particular, es relevante conocer si el espectro es equidistante, no equidistante o si exhibe regiones equidistantes y no equidistantes. Además, estudiamos la forma y localización de las autofunciones para cada autofrecuencia de la cavidad. Por último, en la Sección 3.3 se discuten las soluciones asociadas a una cavidad dinámica.

3.1. Soluciones a la ecuación trascendente real

Considerar solamente la cavidad doble estática impone una única restricción sobre sus parámetros: $\dot{\chi} = 0$. Esto no restringe de ninguna manera las configuraciones iniciales de la cavidad, ni limita nuestra capacidad de simular o predecir el Efecto Casimir Dinámico (véanse la Sección 3.3 y el Capítulo 5).

La Ecuación (2.18) puede reescribirse en función de cuatro combinaciones adimensionales de parámetros del problema. Si definimos:

$$a_1 \equiv kL, \quad (3.1)$$

$$a_2 \equiv \frac{\Delta L}{L}, \quad (3.2)$$

$$a_3 \equiv \frac{\chi}{L}, \quad (3.3)$$

$$a_4 \equiv vL, \quad (3.4)$$

entonces podemos reescribir la Ecuación (2.18) como:

$$\frac{2 \sin(a_1)}{a_1 a_3 - a_4/a_1} - \cos(a_1 a_2) + \cos(a_1) = 0. \quad (3.5)$$

Dado que nos interesa conocer todas las soluciones de $k(L, \Delta L, \chi, v)$, buscamos tener $a_1(a_2, a_3, a_4)$. Las soluciones de la Ecuación (3.5) son una superficie en cuatro dimensiones.

El enfoque que adoptamos para estudiar el espectro de la cavidad es tomar cortes planos de la superficie tetradimensional con valores fijos de a_i y a_j , y analizar $a_1(a_k)$, donde $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$ en algún orden y todos distintos. Este enfoque nos permite ver cómo se modifican las autofrecuencias de la cavidad al variar exactamente una combinación de sus parámetros. Cabe destacar que la solución se completa computando $k = a_1/L$.

La Figura 3.1 muestra el espectro del problema más tradicional, en ausencia de una membrana dieléctrica o con una membrana transparente. Al desaparecer la membrana, la distinción entre cada cavidad se vuelve irrelevante y el espectro resultante es uno perfectamente equiespaciado dado por las condiciones de contorno de Dirichlet en los espejos perfectamente conductores [7, 24]:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (3.6)$$

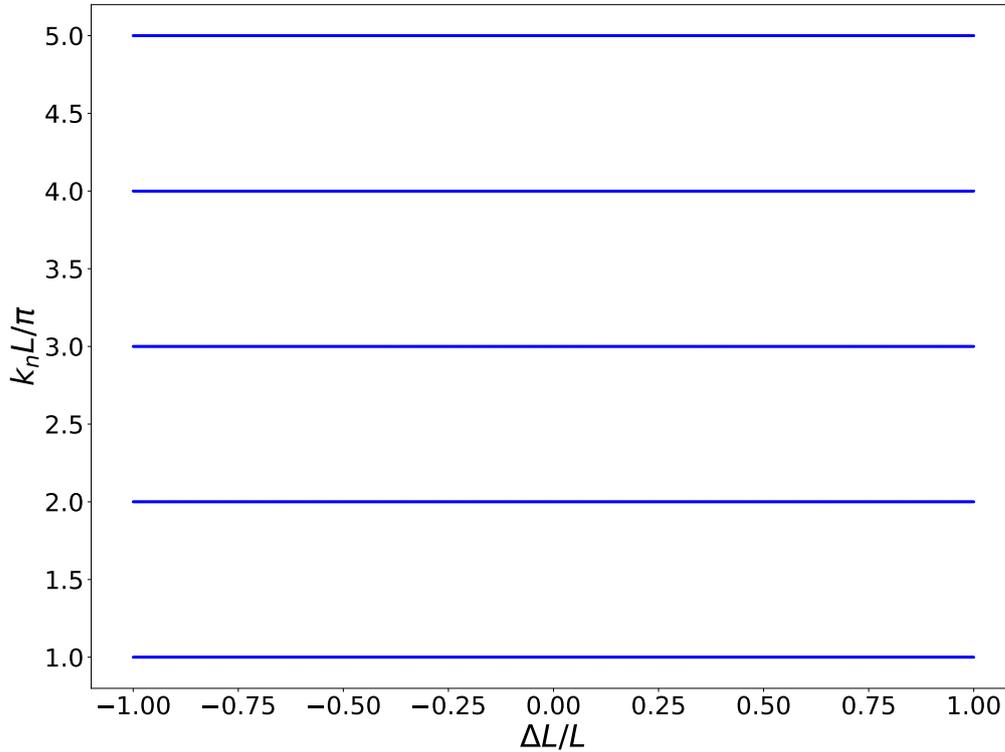


Figura 3.1. Espectro de una configuración estándar de la cavidad unidimensional sin ninguna membrana. La ausencia de membrana dieléctrica equivale a imponer $\chi/L = 0$ y $vL = 0$. El parámetro ΔL pierde sentido físico y se obtiene un espectro equiespaciado.

La aparición de la membrana (ya sea por el encendido de la susceptibilidad χ o de la conductividad v) rompe la simetría espacial en la cavidad y la degeneración (aunque no completamente) de los niveles de energía en función de ΔL . Las Figuras 3.2 y 3.3 muestran cómo se modifica el espectro equiespaciado de la Figura 3.1 para distintos valores de χ o de v , respectivamente. En cada caso, el parámetro que no se modifica se mantiene igual a cero.

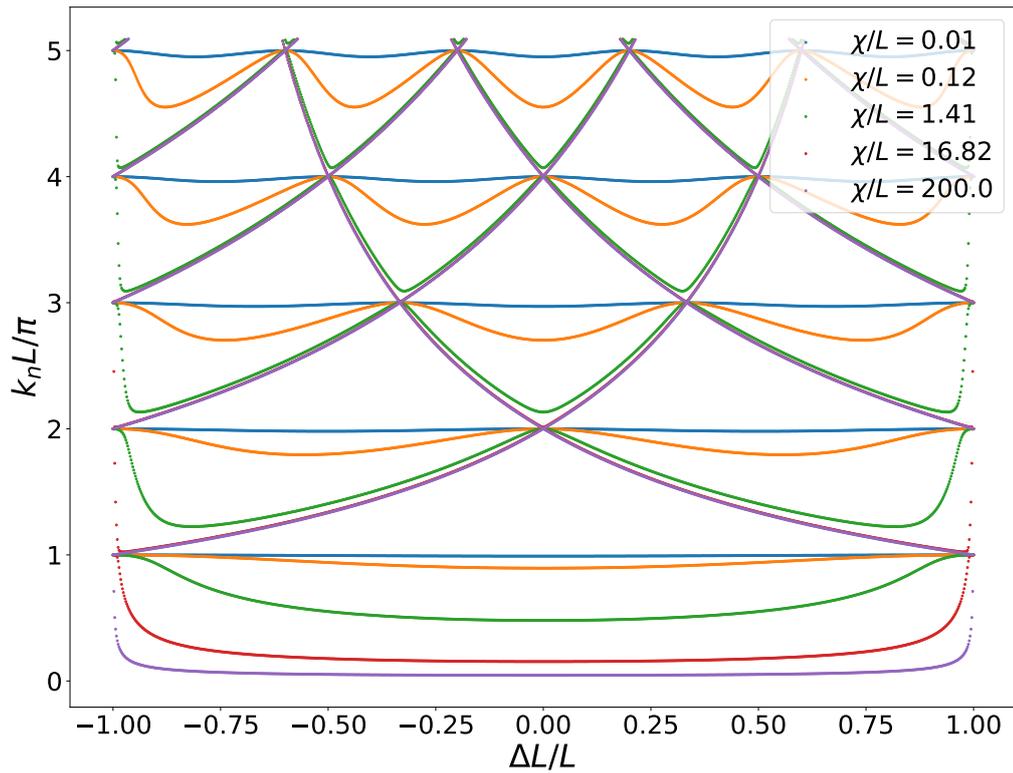


Figura 3.2. Espectro de la cavidad unidimensional para una conductividad $v = 0$ y distintos valores de susceptibilidad χ ; en función de la asimetría de la cavidad $\Delta L/L$.

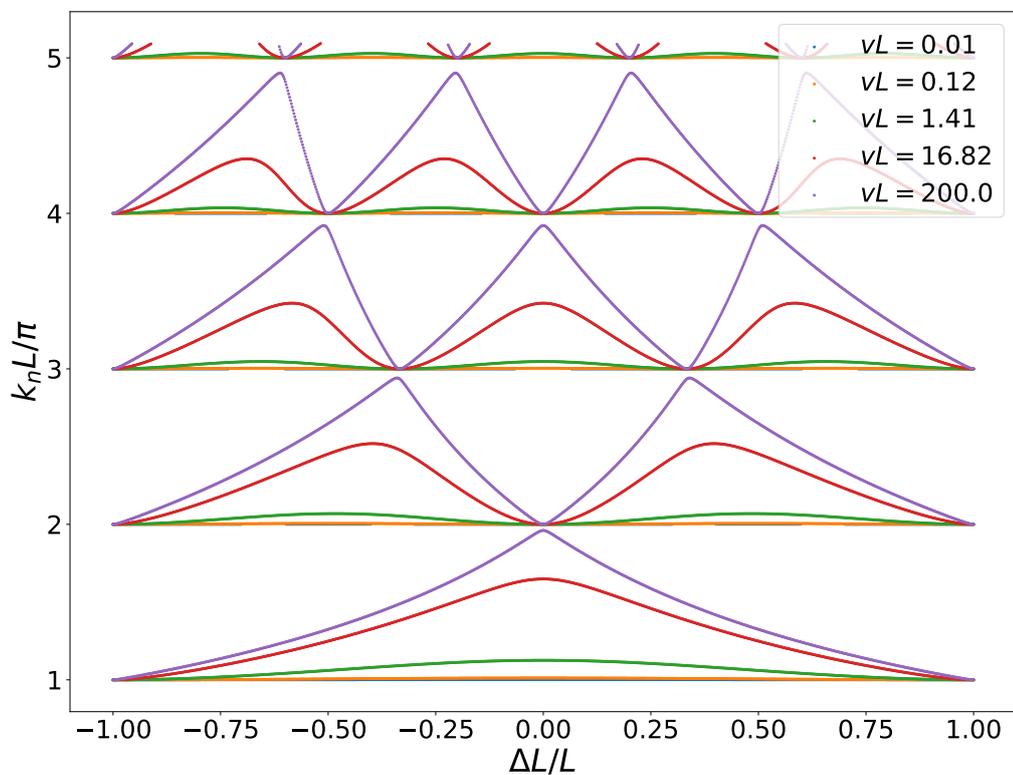


Figura 3.3. Espectro de la cavidad unidimensional para una susceptibilidad $\chi = 0$ y distintos valores de conductividad v ; en función de la asimetría de la cavidad $\Delta L/L$.

Tal como se espera, la aparición de la membrana dieléctrica modifica los niveles de energía de la cavidad. En la Figura 3.2 se puede notar que un aumento de la susceptibilidad implica una disminución de los niveles de energía de hasta π/L . Para valores suficientemente grandes de χ , existe un nivel de energía $k \sim 0$ permitido. Este nivel solamente desaparece cuando se toma el límite $\chi \rightarrow \infty$. Por otro lado, la Figura 3.3 muestra un fenómeno similar pero opuesto: los niveles de energía aumentan en hasta π/L al aumentar la conductividad, y la existencia de niveles de energía inferiores a π/L está prohibida. Un caso similar ha sido estudiado en [25].

Se puede ver que se obtienen los mismos resultados si se toman los límites $v \rightarrow \infty$ o $\chi \rightarrow \infty$, lo cual es consistente con que ambos límites imponen condiciones de contorno equivalentes a las de un tercer espejo perfectamente conductor en lugar de la membrana dieléctrica [21]. Sin embargo, debe notarse que el límite $\chi \rightarrow \infty$ se alcanzaría experimentalmente mucho antes que el límite $v \rightarrow \infty$. Esto último se puede observar en la similitud (diferencia) de las curvas verde, violeta y roja de la Figura 3.2 (Figura 3.3).

La Figura 3.4 muestra el espectro de una cavidad genérica levemente asimétrica y con una membrana con susceptibilidad y conductividad eléctrica no nulas. En la Figura 3.4a se observa un comportamiento mixto: para $k < 2\pi/L$ se ve similar a la Figura 3.3, mientras que para $k > 2\pi/L$ el espectro toma la misma forma que el de la Figura 3.2. Además, se observa un comportamiento distinto a los discutidos antes para $k \simeq 2\pi/L$. En conjunto, esto sugiere una competencia entre la susceptibilidad y la conductividad de la membrana dieléctrica de la cavidad. En las regiones de baja energía (en este caso, $k < 2\pi/L$) domina la conductividad mientras que a altas energías domina la susceptibilidad. Como se discutirá más adelante, es posible determinar con precisión a partir de qué nivel de energía (en este caso, $2\pi/L$) compiten ambas magnitudes y comienza a dominar la susceptibilidad eléctrica. Por último, se puede ver que las bandas de energía no se intersecan y siempre están separadas por un gap. Dicho gap se hace cada vez más chico al aumentar la energía.

Por otro lado, la Figura 3.4b muestra un desdoblamiento inmediato de los niveles de energía de la cavidad: donde antes (Figura 3.1) se observaba una única banda en los múltiplos pares de π/L ahora se observan dos bandas de energía, una por encima y una por debajo del nivel anterior. Al aumentar el valor de la susceptibilidad, algunas bandas sufren pequeños cambios en la energía, mientras que otras tienen una caída del orden de $2\pi/L$. Los cambios bruscos se dan en las energías para las cuales el valor de χ compite con el de v . Esto se evidencia aún más al observar que el modo de energía más bajo de la cavidad se aproxima a cero al aumentar la susceptibilidad: este modo solo está permitido en un régimen de alta susceptibilidad, como el de la Figura 3.2. También se puede ver que las bandas de energía están separadas por un gap y nunca se cruzan.

La Figura 3.4c muestra un comportamiento similar al de la Figura 3.4b, pero al revés. Inicialmente se ve el desdoblamiento de los niveles de energía debido a la existencia de una membrana no transparente, pero aparece a baja conductividad (y entonces, alta susceptibilidad) un modo más bajo de energía cercana a cero. Algunos modos tienen un salto del orden de $2\pi/L$, mientras que otros sufren pequeñas modificaciones. El modo de energía cercana a cero se prohíbe una vez que la conductividad es suficientemente alta. En

ninguno de los casos las bandas de energía se intersecan.

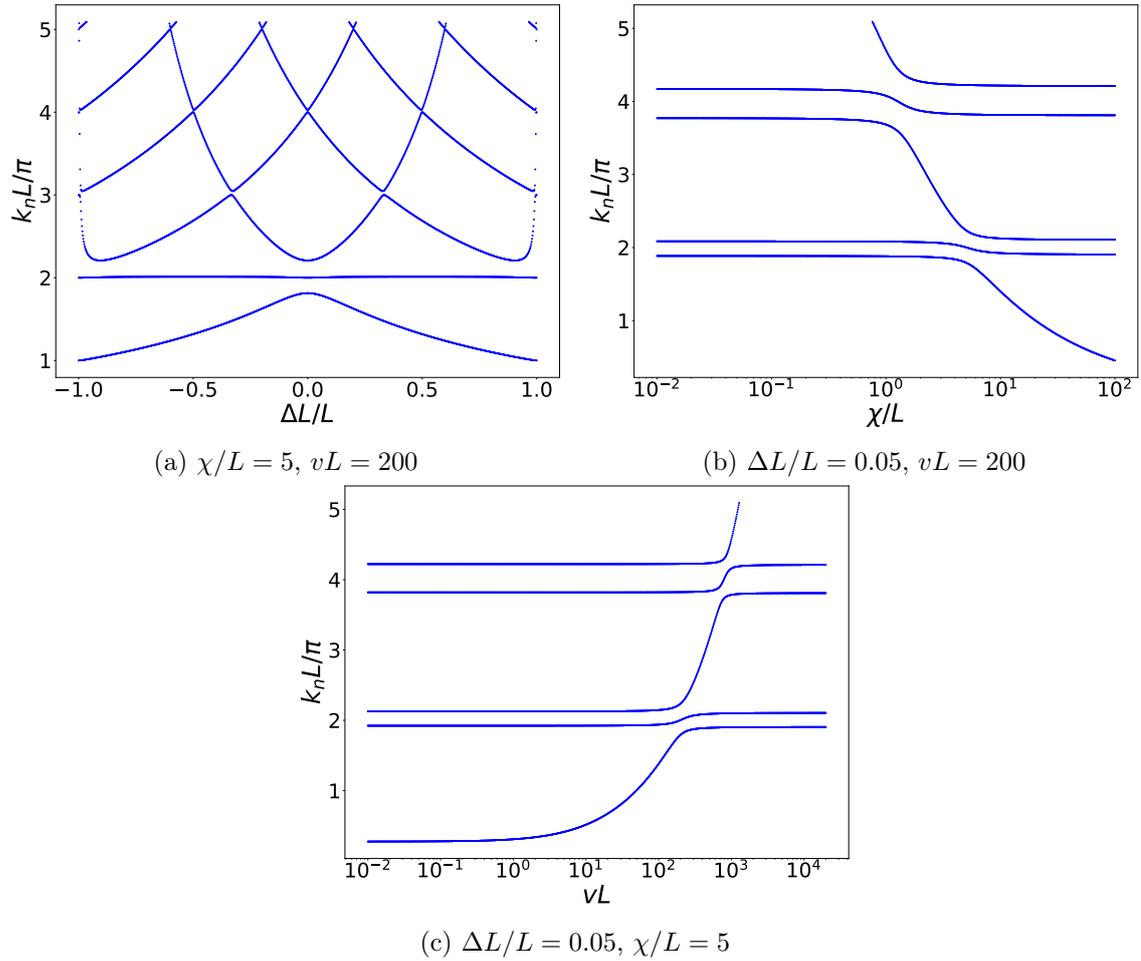


Figura 3.4. Cortes planos del espectro de la cavidad, fijando todos los parámetros de la misma a excepción de: la asimetría de la cavidad ΔL en (a), la susceptibilidad eléctrica χ de la membrana en (b), y la conductividad eléctrica v de la membrana en (c). En todos los casos se usó $L = 1$.

Como se observa en la Figura 3.4, existe un nivel de energía para la cual compiten la susceptibilidad y la conductividad eléctrica. A partir de ahora, llamaremos *momento crítico*, *frecuencia crítica*, o *energía crítica* a:

$$k_c \equiv \sqrt{\frac{v}{\chi}}, \quad (3.7)$$

que es tal que para $k = k_c$ el denominador $k^2\chi - v$ de la Ecuación (2.18) se vuelve nulo.

Si bien es cierto que $k = k_c$ no es, en general, una solución de la ecuación trascendente estática; en la Figura 3.5 se observa que permite identificar con claridad los dos regímenes relevantes (alta conductividad y alta susceptibilidad). Se incluyen más niveles de energía de forma tal de mostrar que la Ecuación (3.7) permite separar los comportamientos a niveles arbitrariamente altos o bajos de energía.

3.1. Soluciones a la ecuación trascendente real

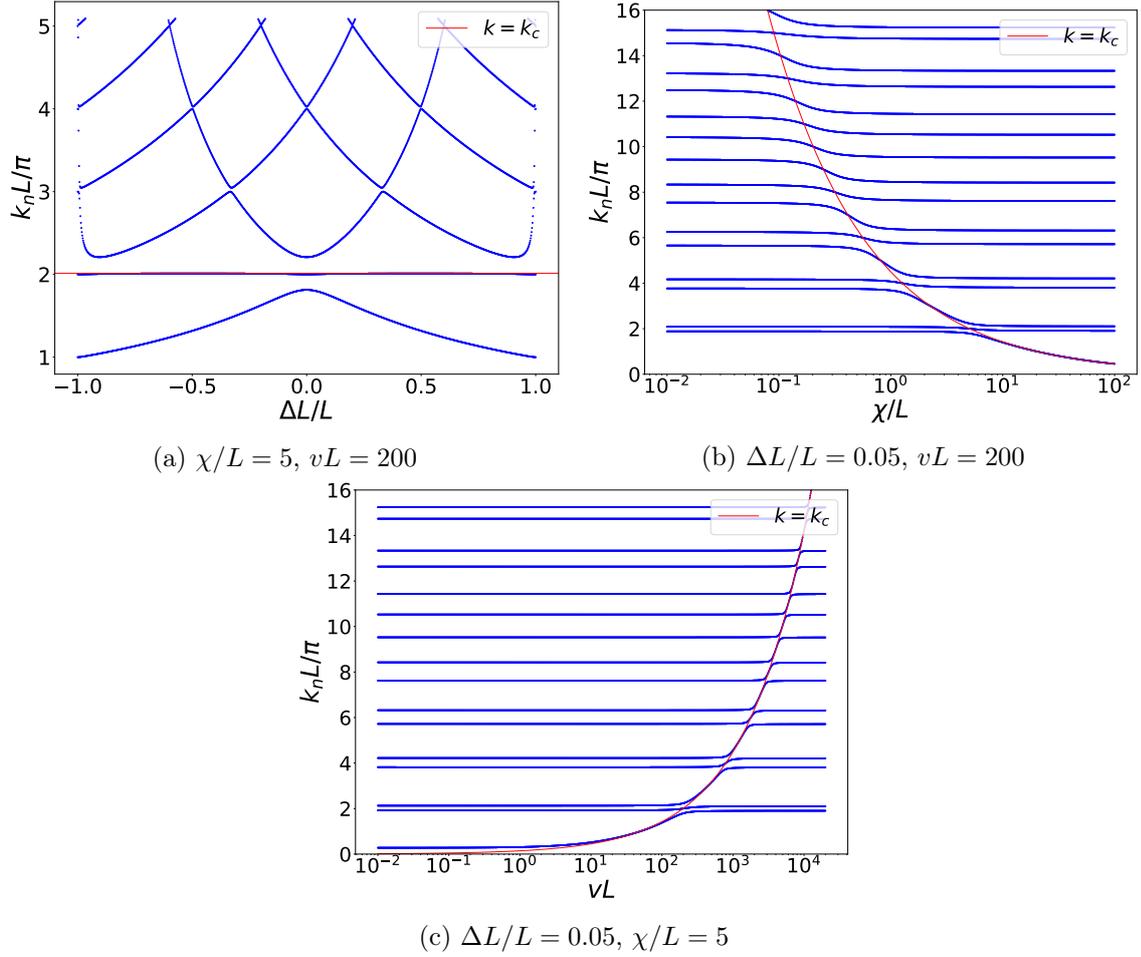


Figura 3.5. Cortes planos del espectro de la cavidad, fijando todos los parámetros de la misma a excepción de: la asimetría de la cavidad ΔL en (a), la susceptibilidad eléctrica χ de la membrana en (b), y la conductividad eléctrica v de la membrana en (c). En todos los casos se usó $L = 1$. En rojo, el nivel de energía crítico obtenido a partir de la Ecuación (3.7).

Es posible obtener soluciones analíticas aproximadas en los regímenes de muy alta susceptibilidad o muy alta conductividad. Decimos que k está en alguno de los dos regímenes si y solamente si se satisface que:

$$|k^2 \chi L - vL| \gg 1. \quad (3.8)$$

Si $kL \ll 1$, la condición de la Ecuación (3.8) permite simplificar la Ecuación (2.18) a:

$$\cos(k\Delta L) = \cos(kL), \quad (3.9)$$

cuyas soluciones son:

$$k_{n,\pm} = \frac{2n\pi}{L} \frac{1}{1 \mp |\Delta L/L|}, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.10)$$

La Ecuación (3.10) además de permitir calcular los resultados asintóticos de la Figura 3.5, muestra que sin asimetría en la cavidad no ocurre la ruptura de degeneración que causa la aparición de las dos bandas de energía mayor ($k_{n,+}$) y menor ($k_{n,-}$) comparando

con el caso sin membrana en la cavidad de la Ecuación (3.6).

Por último, en el régimen de alta susceptibilidad puede existir un modo de muy baja energía $k_0 L \ll 1$. Desarrollando la Ecuación (2.18) a cuarto orden en $k_0 L$, se obtiene:

$$2k_0^2 L - \frac{k_0^4 L^3}{3} = (k_0^2 \chi - v) \frac{k_0^2 (L^2 - \Delta L^2)}{2}, \quad (3.11)$$

$$k_0^2 [4L + v(L^2 - \Delta L^2)] = k_0^4 \left[\frac{2L^3}{3} + \chi(L^2 - \Delta L^2) \right], \quad (3.12)$$

de donde finalmente conseguimos:

$$k_0 = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{4 + vL \left(1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}\right)}{\frac{2}{3} + \frac{\chi}{L} \left(1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}\right)}}. \quad (3.13)$$

Si además se tiene simultáneamente que $\frac{\chi}{L} \left(1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}\right) \gg 1$ y $vL \left(1 - \frac{\Delta L^2}{L^2}\right) \gg 1$, entonces la Ecuación (3.13) se simplifica al valor de la energía crítica k_c de la Ecuación (3.7). Es por esta razón que la curva crítica aproxima a k_0 en la Figura 3.5b y en una porción de la Figura 3.5c (en otras regiones de la Figura 3.5c no se satisface $vL \gg 1$).

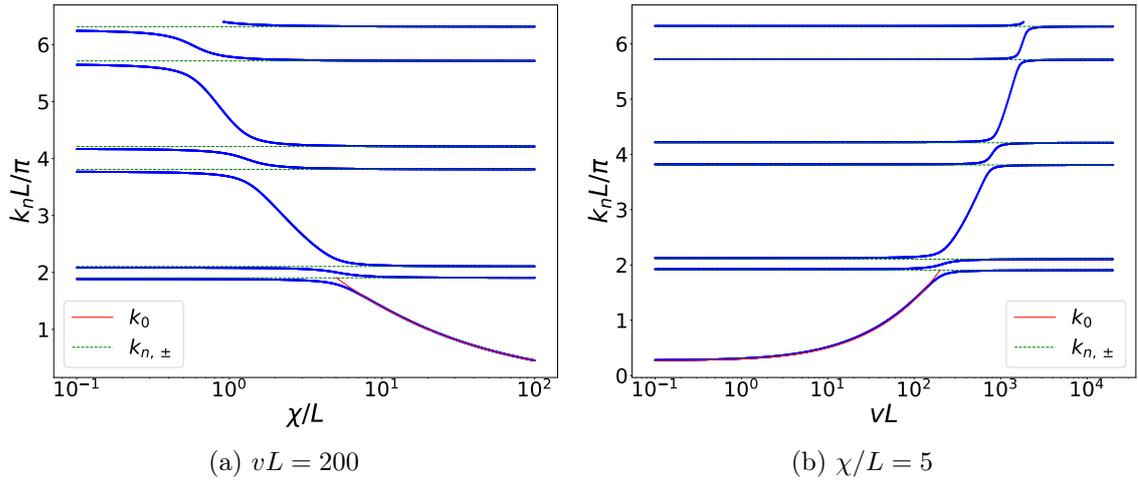


Figura 3.6. Cortes planos del espectro de la cavidad, fijando todos los parámetros de la misma a excepción de: la susceptibilidad eléctrica χ de la membrana en (a), y la conductividad eléctrica v de la membrana en (b). En ambos casos se usó $L = 1$ y $\Delta L/L = 0.05$. En rojo, el nivel de energía k_0 que existe en el régimen de alta susceptibilidad, calculado a partir de la Ecuación (3.13). En verde, las soluciones asintóticas del límite $|k^2 \chi - v| \rightarrow \infty$.

La Figura 3.6 muestra un excelente acuerdo entre las soluciones numéricas asintóticas de la Ecuación (2.18) y las soluciones del límite $|k^2 \chi - v| \rightarrow \infty$. Sin embargo, puede verse en la parte izquierda de la Figura 3.6a (baja susceptibilidad) que la solución numérica no se acerca lo suficiente a la esperada. Esto se debe a que la conductividad no es suficientemente alta como para tener $|k^2 \chi - v| \gg 1$. Por otro lado, en la Figura 3.6b la conductividad sí alcanza valores suficientemente altos a derecha mientras que la susceptibilidad domina en el extremo izquierdo. Es por ello que en la Figura 3.6b la solución analítica predice adecuadamente las soluciones asintóticas. Además, puede verse que la Ecuación (3.13) es

válida incluso más allá de $k_0 \ll 1$, y deja de valer cuando se sale del régimen de alta susceptibilidad y se prohíbe la existencia de modos con energía $k < \pi/L$.

3.2. Localización de las autofunciones de la cavidad estática

Como se discutirá en más detalle en el Capítulo 4, los fotones de la cavidad se generan de a pares. Conocer el espectro de la cavidad nos permite saber las frecuencias de los fotones que pueden generarse en la cavidad doble debido al Efecto Casimir Dinámico. Pero también es relevante entender con qué probabilidad se generan en cada cavidad los fotones de distintas frecuencias, y esa información puede obtenerse directamente de la forma de las autofunciones de la cavidad doble.

Es inmediato notar que en una cavidad doble perfectamente simétrica ($\Delta L = 0$) la simetría propia del problema impide la localización de los fotones, sin importar su frecuencia. En este caso todas las autofunciones estarán completamente deslocalizadas, y entonces los fotones se producirán con igual probabilidad en una u otra cavidad. En la Figura 3.7 mostramos que las autofunciones de la cavidad simétrica están completamente deslocalizadas. Podemos notar, sin embargo, que algunas autofunciones (en este caso, las de etiqueta par) presentan un cambio brusco en la posición de la membrana de su derivada espacial. Parece haber más curvas en la cavidad del lado derecho pero en verdad se están solapando las curvas celeste y magenta, amarilla y marrón en la cavidad izquierda.

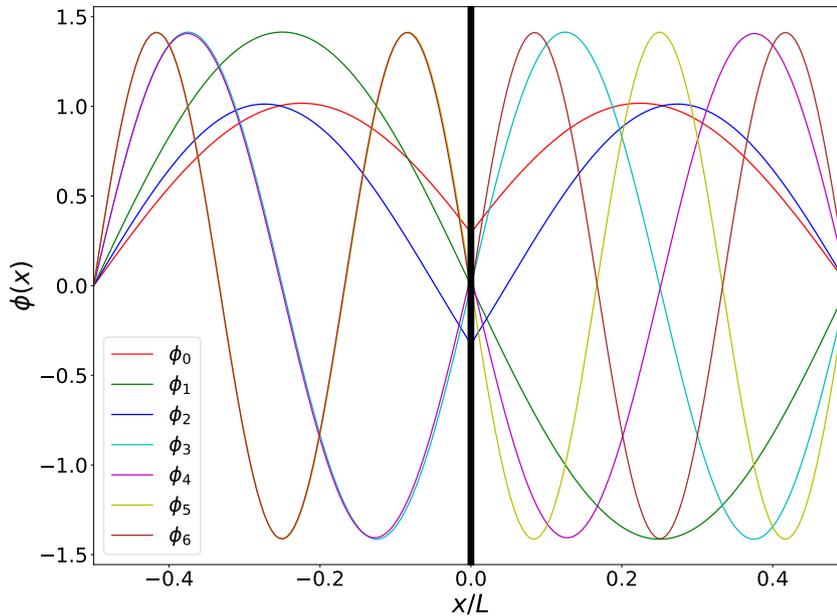


Figura 3.7. Autofunciones de una cavidad perfectamente simétrica ($\Delta L = 0$) con $L = 1$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$.

La Figura 3.8 muestra un comportamiento marcadamente distinto al que observábamos en la Figura 3.7. La mayoría de las autofunciones se empiezan a localizar a un lado o al otro de la membrana, por ejemplo: ϕ_3 , ϕ_5 están casi completamente localizadas en la cavidad izquierda, mientras que ϕ_4 , ϕ_6 están casi completamente localizadas en la

cavidad derecha. De las restantes, solamente ϕ_1 parece completamente deslocalizada. En la práctica, este modo se localiza (parcialmente) al variar alguno de los parámetros de la cavidad. Al aumentar la energía de los modos más allá de k_3 , notamos que todos los modos con etiqueta par se localizan en la cavidad derecha y que aquellos con etiqueta impar lo hacen en la cavidad izquierda.

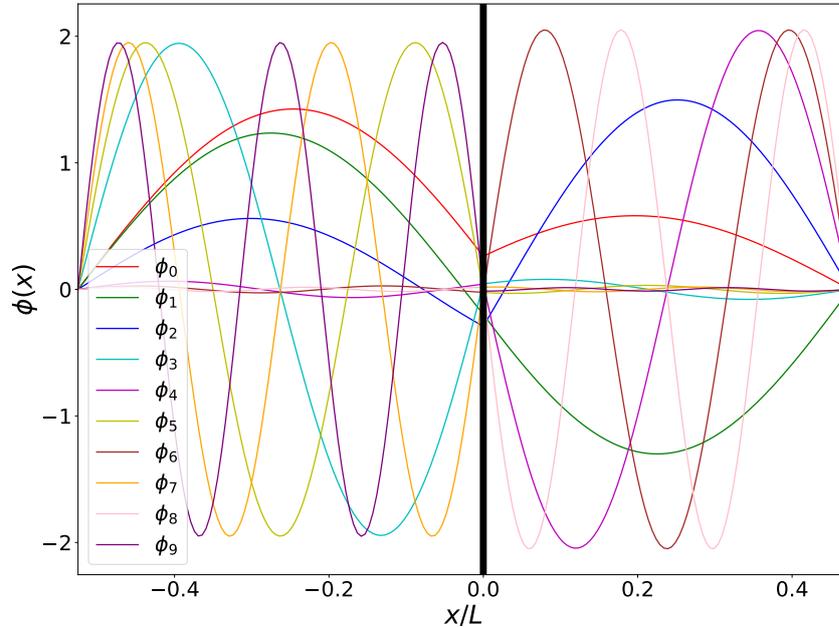


Figura 3.8. Autofunciones de una cavidad levemente asimétrica ($\Delta L/L = 0.05$) con $L = 1$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$.

Como ya se discutió en este Capítulo, el régimen de alta conductividad (en los niveles más bajos) prohíbe la existencia de modos con energía cercana a cero. La Figura 3.9 muestra las autofunciones cuando se está en el otro régimen, el de alta susceptibilidad. En particular, vemos que aparece un modo adicional de baja energía y completamente deslocalizado (y que nunca se localiza). Los demás modos se siguen localizando de manera similar: pares en una cavidad, impares en otra. Esta alternancia entre modos localizados según su etiqueta tiene que ver con que la diferencia de energía entre pares de modos consecutivos es mucho más pequeña que la de el modo siguiente (por ejemplo, $k_2 - k_1 \ll k_3 - k_2$). Esperamos que la localización según la etiqueta del modo deje de ser cierta para modos de energía suficientemente alta.

La Figura 3.10 muestra las autofunciones en una cavidad altamente asimétrica en un régimen de alta susceptibilidad. Notamos que (a energías bajas, menores a k_9) solamente algunas autofunciones no se localizan en la cavidad izquierda. Podemos esperar ver, sin embargo, modos localizados en la cavidad derecha a niveles de energía suficientemente altos. El modo de más baja energía sigue completamente deslocalizado.

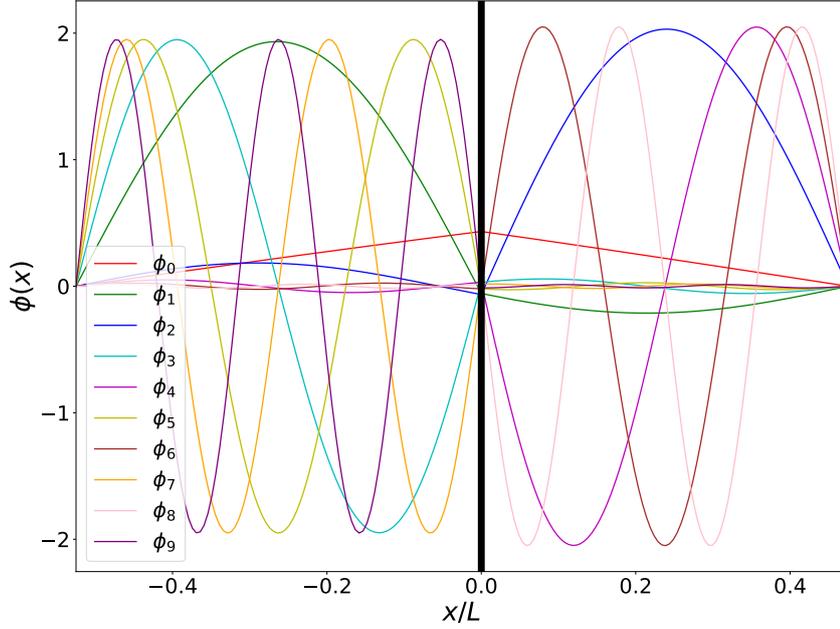


Figura 3.9. Autofunciones de una cavidad levemente asimétrica ($\Delta L/L = 0.05$) con $L = 1$, $\chi/L = 5$, $vL = 0$ (régimen de alta susceptibilidad).

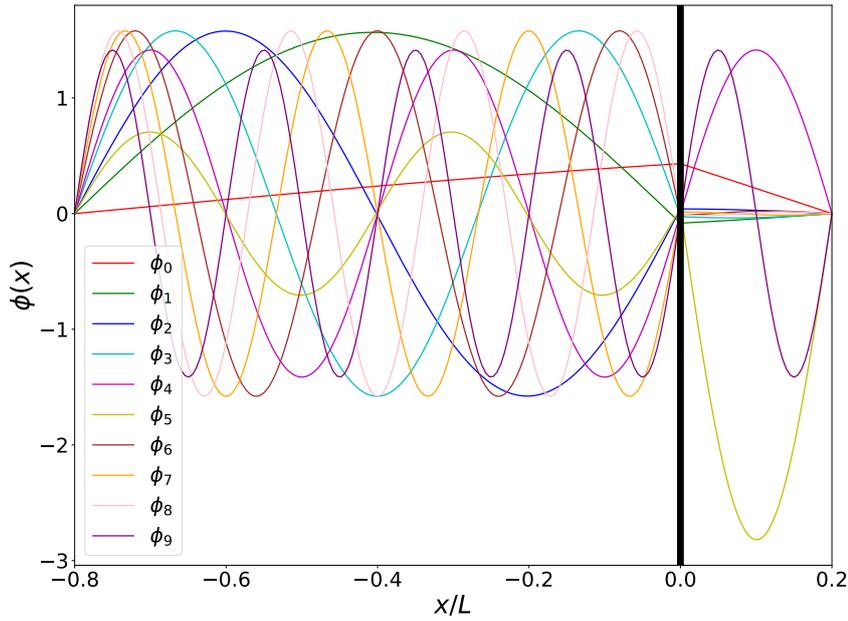


Figura 3.10. Autofunciones de una cavidad muy asimétrica ($\Delta L/L = 0.6$) con $L = 1$, $\chi/L = 5$, $vL = 0$ (régimen de alta susceptibilidad).

A partir de la expresión de las autofunciones espaciales de la Ecuación (2.12), podemos definir el grado de localización del n -ésimo modo κ_n a partir del factor constante que diferencia a la función partida:

$$\kappa_n \equiv \left| \frac{\sin(k_n L_1)}{\sin(k_n L_2)} \right|. \quad (3.14)$$

Si un modo se localiza en la cavidad izquierda se tendrá $\kappa_n \ll 1$, si se localiza en la cavidad derecha será $\kappa_n \gg 1$, y si está deslocalizado será $\kappa_n \simeq 1$.

El grado de localización κ_n puede extenderse fácilmente a una función $\kappa(k)$ en un dominio continuo (más allá del espectro discreto de la cavidad doble), para valores fijos de L_1 y L_2 (o, equivalentemente, L y ΔL). Graficar κ nos permite encontrar los parámetros restantes (χ, v) necesarios para tener modos localizados (o no). Además, permite ver cuán localizados pueden estar los modos.

La Figura 3.11 refleja lo que observamos en las Figuras 3.9 y 3.10. En la Figura 3.11a vemos que muy pequeños cambios en la energía producen cambios de hasta 5 órdenes de magnitud en κ , permitiendo localizar modos de índice consecutivo en cavidades distintas al existir además valores de $\kappa \ll 1$ y $\kappa \gg 1$. En la Figura 3.11b, en cambio, los cambios son de dos órdenes de magnitud y la localización en una de las cavidades (la más pequeña) es débil. En ambos casos, el modo de energía cercana a cero está deslocalizado en caso de existir; aunque no completamente en el caso muy asimétrico. El grado de localización de una cavidad perfectamente simétrica carece de interés alguno, ya que se tiene $\kappa = 1$ independientemente de la elección de los demás parámetros de la cavidad.

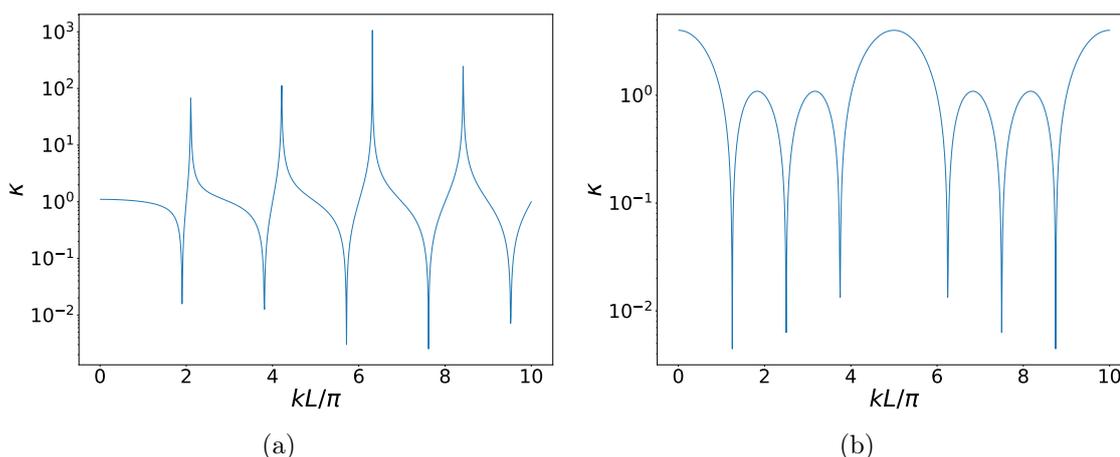


Figura 3.11. Grado de localización κ de las autofunciones en función del número de onda, para: (a) una cavidad levemente asimétrica ($\Delta L/L = 0.05$) y (b) una cavidad muy asimétrica ($\Delta L/L = 0.6$). En ambos casos, $L = 1$ y χ, v son parámetros libres.

La Figura 3.12 muestra el grado de localización para una cavidad arbitraria, en función de su asimetría $\Delta L/L$. Como es esperado, $\ln(\kappa)$ es antisimétrico ante el intercambio de cavidades: $\ln[\kappa(k, \Delta L)] = -\ln(\kappa(k, -\Delta L))$. Además, muestra que en general las autofunciones están deslocalizadas y solo se localizan algunos modos que están dentro de regiones estrechas en la Figura 3.12. Las curvas que describen estas regiones son $k_n = n\pi/L_1$ (violeta) y $k_n\pi/L_2$ (amarillo), que anulan el numerador o el denominador de κ . También se ve que para valores extremos de ΔL dejan de localizarse modos en una de las dos cavidades. En verdad, aumenta la energía mínima para observar localización en la otra cavidad. Por último notamos que, independientemente de la asimetría de la cavidad, los modos de energía $k < \pi/L$ no se localizan de manera significativa.

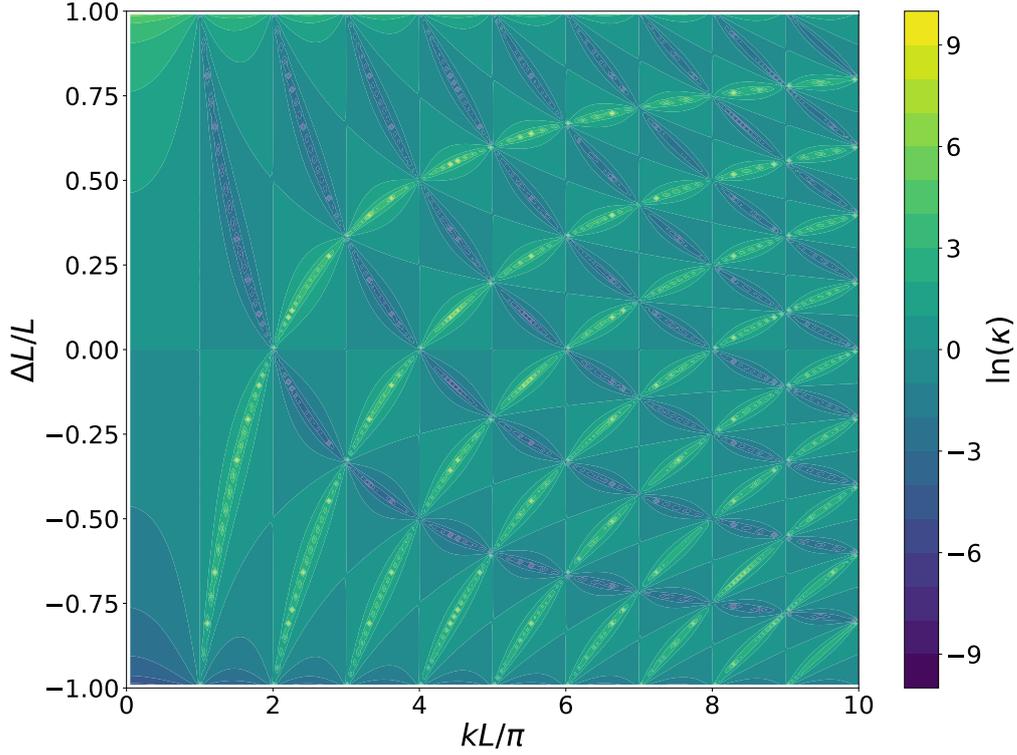


Figura 3.12. Logaritmo del grado de localización κ en función del número de onda y la asimetría de la cavidad.

3.3. Soluciones a la ecuación trascendente compleja

En el caso más general y mientras la cavidad sea dinámica (i.e. sus parámetros varíen en el tiempo), el espectro de la cavidad será el conjunto de soluciones de la Ecuación (2.36). En particular, estas soluciones pueden adquirir una componente imaginaria no nula si $\dot{\chi} \neq 0$.

Dado que a partir del Capítulo 4 en adelante nos interesarán solamente pequeñas perturbaciones de los parámetros, esperamos tener siempre $\dot{\chi} \sim \epsilon\Omega\chi$; donde $|\epsilon| \ll 1$, y Ω es una frecuencia de driving externo. Supongamos que $\dot{\chi} = 0.1\chi_0/L$, un valor mayor al que se podrá obtener en las perturbaciones de los capítulos próximos.

Definimos a partir de la Ecuación (2.36) la función F :

$$F(k) = 2 \sin(k_n L) k_n - [\cos(k_n \Delta L) + \cos(k_n L)] [k_n^2 \chi + i k_n \dot{\chi} - v], \quad (3.15)$$

tal que sus raíces permiten obtener el espectro completo de la cavidad.

F no solamente permite obtener las raíces, sino que nos permite cuantificar cuán cerca estamos de ellas. Dado que F puede tomar valores arbitrariamente grandes y nos interesan los valores cercanos a cero de F consideramos la función $g = -\ln|F|$, que satisface $g \rightarrow +\infty$ cuando $F \rightarrow 0$. La Figura 3.13 muestra cómo se corren las soluciones de la cavidad doble estática al tenerse $\dot{\chi} = 0.1\chi_0/L$. Vemos que las soluciones adquieren una pequeña ($\sim 0.5\%$) componente imaginaria, mientras que la parte real de las soluciones no se modifica de manera significativa. El corrimiento no es el mismo para todas las soluciones,

ni necesariamente en la misma dirección.

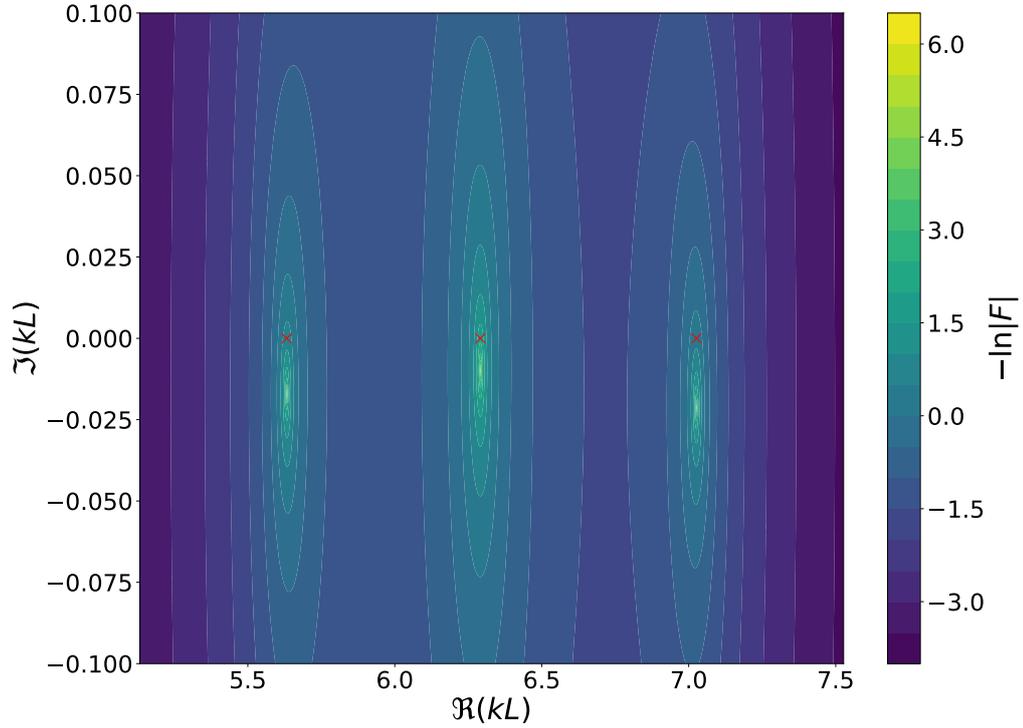


Figura 3.13. Búsqueda de las soluciones complejas de la ecuación trascendente dinámica. Cuantificamos la cercanía a dichas soluciones con la función $g = -\ln|F|$, y computamos los valores de g para distintas partes reales e imaginarias de las soluciones propuestas k . Como referencia, con cruces rojas indicamos las soluciones reales de la cavidad estática. Las regiones con un tono amarillo más intenso indican a dónde se corren dichas soluciones. Se consideró una cavidad con $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$, $\dot{\chi} = 0.5$.

La Figura 3.14 muestra de manera más directa el cambio en las soluciones. Como vemos en la Figura 3.14a, para los modos considerados la parte imaginaria cambia linealmente con $\dot{\chi}$. Además, como es esperable por el denominador de la Ecuación (2.36), el cambio es más significativo para $k \lesssim k_c \simeq 6.32/L$ (en azul, naranja y verde). Para los modos más altos, el cambio es completamente despreciable. Algo similar ocurre con el cambio en la parte real de las soluciones (Figura 3.14b): en todos los casos los cambios son despreciables ($< 0.05\%$), pero las soluciones cercanas a k_c presentan cambios más grandes. A diferencia de la parte imaginaria, la parte real cambia cuadráticamente con $\dot{\chi}$; y entonces podemos decir que en una expansión de k a primer orden en $\dot{\chi}$ la parte real de k no cambia. La Figura 3.15 muestra lo anterior para una configuración con $k_4 \simeq k_c \simeq 14.14/L$, y permite ver que los cambios no tienen que ver directamente con los niveles de energía sino con la cercanía al nivel de energía crítica k_c . Sin embargo, sí se sigue viendo que la corrección cae más rápido para niveles de energía más altos. Además, los modos con energía mayor a k_c (de k_4 en adelante) disminuyen su parte real mientras que los de energía menor a k_c la aumentan.

3.3. Soluciones a la ecuación trascendente compleja

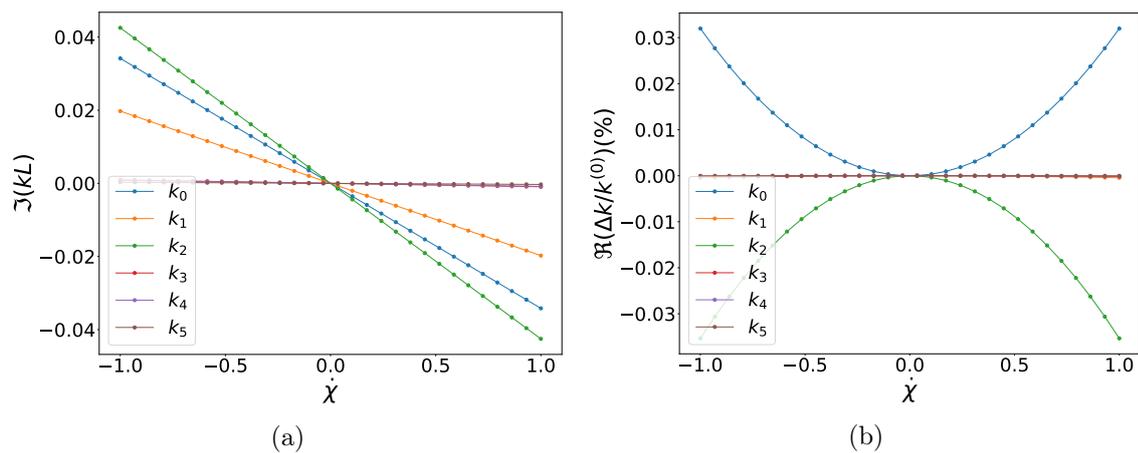


Figura 3.14. Cambios en las soluciones de la ecuación trascendente compleja al aumentar el valor de $\dot{\chi}$, para valores fijos de $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$. En función de $\dot{\chi}$, en (a) mostramos la parte imaginaria de las soluciones y en (b) el cambio porcentual en la parte real normalizado respecto a la solución con $\dot{\chi} = 0$.

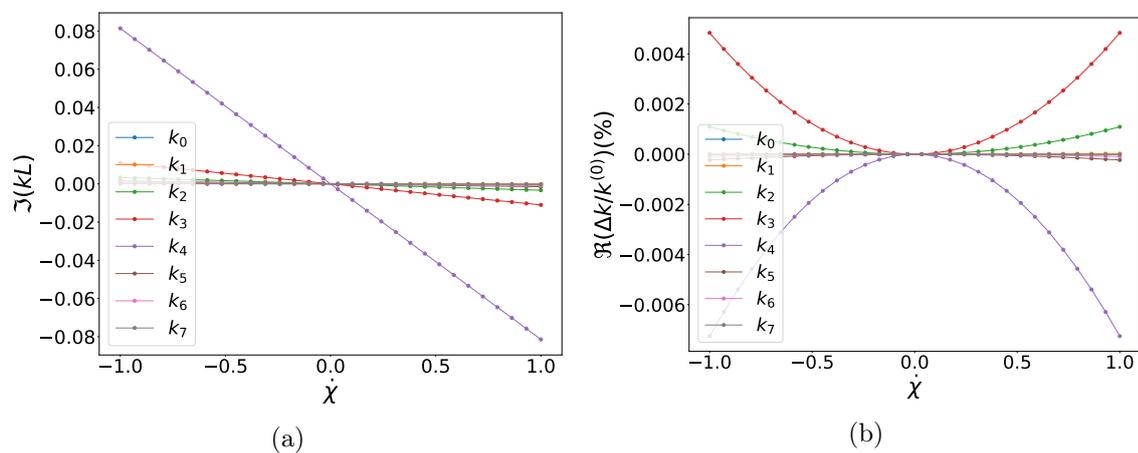


Figura 3.15. Cambios en las soluciones de la ecuación trascendente compleja al aumentar el valor de $\dot{\chi}$, para valores fijos de $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 1000$. En función de $\dot{\chi}$, en (a) mostramos la parte imaginaria de las soluciones y en (b) el cambio porcentual en la parte real normalizado respecto a la solución con $\dot{\chi} = 0$.

MULTIPLE SCALE ANALYSIS

La ecuación dinámica de los coeficientes $Q_n^{(m)}(t)$ de los modos del campo (Ecuación (2.37)) no admite solución analítica, y por lo tanto debe resolverse o bien numéricamente o bien debe realizarse alguna aproximación. En este Capítulo, se utilizará el Multiple Scale Analysis [14, 24, 26, 27, 28], que consiste en una definición de una segunda escala temporal y permite obtener resultados válidos a tiempos más largos que la solución perturbativa [29].

4.1. Solución general

Vamos a considerar, en el caso más general, pequeñas perturbaciones en todos los parámetros de la cavidad. Los parámetros pueden variarse con distinta frecuencia y fase relativa, pero las amplitudes de las perturbaciones de los parámetros deben ser o bien nulas o bien del mismo orden. Esta última condición es necesaria para poder trabajar con una única escala temporal adicional, como discutiremos más adelante. Podemos escribir los parámetros de la cavidad en función del tiempo como:

$$L(t) = L_0(1 + \epsilon \xi_L \sin(\Omega_L t)) , \quad (4.1)$$

$$\Delta L(t) = \Delta L_0(1 + \epsilon \xi_{\Delta L} \sin(\Omega_{\Delta L} t)), \quad (4.2)$$

$$\chi(t) = \chi_0(1 + \epsilon \xi_\chi \sin(\Omega_\chi t)), \quad (4.3)$$

$$v(t) = v_0(1 + \epsilon \xi_v \sin(\Omega_v t)), \quad (4.4)$$

donde Ω_r es la frecuencia de la perturbación del parámetro r , ϵ es pequeño ($|\epsilon| \ll 1$) y fija la amplitud general de las perturbaciones, y ξ_r es del orden de la unidad ($|\xi_r| \simeq 1$) o nulo y fija la fase relativa y pequeñas diferencias de amplitud de la perturbación del parámetro r . Para apagar una perturbación, basta pedir $\xi_r = 0$. El último parámetro relevante de la cavidad es:

$$\dot{\chi}(t) = \chi_0 \Omega_\chi \epsilon \xi_\chi \cos(\Omega_\chi t). \quad (4.5)$$

Respecto al tiempo en el que se detiene la variación de los parámetros, este deberá ser una cantidad entera de semiperíodos de cada perturbación. Es decir, t_f deberá satisfacer:

$$t_f = n \operatorname{mcm}_r \left\{ \frac{\pi}{\Omega_r} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Podemos notar que las derivadas de los parámetros son discontinuas en $t = 0$ y $t = t_f$ de la forma en la que los definimos en las Ecuaciones (4.1) a (4.5). Para satisfacer la

condición de continuidad, basta agregar funciones rápidamente decrecientes de la forma:

$$f_r(t) = -\epsilon r_0 \xi_r \Omega_r t e^{-\alpha t}, \quad (4.7)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y redefinir los parámetros:

$$\tilde{r}(t) = r(t) + f_r(t). \quad (4.8)$$

Dado que α puede ser arbitrariamente grande, esta modificación a los parámetros desaparece arbitrariamente rápido.

La solución del Multiple Scale Analysis será válida a tiempos t que satisfagan simultáneamente:

$$t\epsilon^2 \max_{r=L,\Delta L,\chi,v} \{\xi_r^2 \Omega_r\} \ll 1 \quad (4.9)$$

$$\alpha t \gg 1 \quad (4.10)$$

Definimos una segunda escala temporal más lenta $\tau \equiv \epsilon t$, y expandimos los coeficientes $Q_n^{(m)}$ a primer orden en ϵ , considerando t y τ de manera independiente [29]:

$$Q_n^{(m)}(t) = Q_n^{(m)(0)}(t, \tau) + \epsilon Q_n^{(m)(1)}(t, \tau) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.11)$$

A partir del desarrollo de la Ecuación (4.11) y la relación $\tau = \epsilon t$ podemos calcular las derivadas de los coeficientes:

$$\dot{Q}_n^{(m)} = \partial_t Q_n^{(m)(0)}(t, \tau) + \epsilon \left(\partial_\tau Q_n^{(m)(0)}(t, \tau) + \partial_t Q_n^{(m)(1)}(t, \tau) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.12)$$

$$\ddot{Q}_n^{(m)} = \partial_t^2 Q_n^{(m)(0)}(t, \tau) + \epsilon \left(2\partial_{t\tau}^2 Q_n^{(m)(0)}(t, \tau) + \partial_t^2 Q_n^{(m)(1)}(t, \tau) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.13)$$

También podemos escribir un desarrollo a primer orden en ϵ de $\omega_n^2(t)$:

$$\omega_n^2(t) = \omega_{n,0}^2 + \epsilon \omega_{n,1}^2(t), \quad (4.14)$$

donde $\omega_{n,0}$ es la autofrecuencia del n -ésimo modo de la cavidad estática, y $\omega_{n,1}^2(t)$ viene dado por un desarrollo de Taylor:

$$\begin{aligned} \epsilon \omega_{n,1}^2(t) &= \sum_{r=L,\Delta L,\chi,v,\dot{\chi}} (\partial_r \omega_n^2)|_0 \Delta r \\ \omega_{n,1}^2(t) &= 2\omega_{n,0} \left[\xi_\chi \chi_0 \Omega_\chi \cos(\Omega_\chi t) \eta_n^{(\dot{\chi})} + \sum_{r=L,\Delta L,\chi,v} \xi_r r_0 \sin(\Omega_r t) \eta_n^{(r)} \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde definimos

$$\eta_n^{(r)} \equiv \left. \frac{\partial \omega_n}{\partial r} \right|_{t=0}. \quad (4.16)$$

A orden cero en ϵ , la Ecuación (2.37) es la de un oscilador armónico:

$$\partial_t^2 Q_n^{(m)(0)}(t, \tau) + \omega_{n,0}^2 Q_n^{(m)(0)}(t, \tau) = 0, \quad (4.17)$$

de solución:

$$Q_n^{(m)(0)} = A_n^m(\tau)e^{i\omega_{n,0}t} + B_n^m(\tau)e^{-i\omega_{n,0}t}. \quad (4.18)$$

Por otro lado, a primer orden en ϵ , tenemos:

$$\epsilon \left(2\partial_{t\tau}^2 Q_l^{(m)(0)} + \partial_t^2 Q_l^{(m)(1)} + \omega_{l,0}^2 Q_l^{(m)(1)} \right) + \omega_{l,1}^2 Q_l^{(m)(0)} = - \sum_{n,r} Q_n^{(m)(0)} \dot{r} \beta_{nl}^{(r)} + 2\partial_t Q_n^{(m)(0)} \dot{r} \beta_{nl}^{(r)}, \quad (4.19)$$

donde el índice n suma sobre las autofrecuencias de la cavidad y r sobre los 4 parámetros de la cavidad ($L, \Delta L, \chi, v$) y la derivada de la susceptibilidad ($\dot{\chi}$). La Ecuación (4.19) es en verdad un conjunto de infinitas ecuaciones acopladas.

Para obtener las soluciones del Multiple Scale Analysis y evitar la existencia de términos seculares, pedimos igualar los términos que acompañan a las exponenciales complejas $\exp\{\pm i\omega_l\}$ en el lado izquierdo y el lado derecho de la Ecuación (4.19). Ignorando los coeficientes $Q_l^{(m)(1)}$ en la Ecuación (4.19), usando la Ecuación (4.15) y escribiendo explícitamente las derivadas de los parámetros:

$$\begin{aligned} -2\partial_{t\tau}^2 Q_l^{(m)(0)} = & \\ & 2\omega_l \left[\xi_\chi \chi_0 \Omega_\chi \cos(\Omega_\chi t) \eta_l^{(\dot{\chi})} + \sum_{r=L,\Delta L,\chi,v} \xi_r r_0 \sin(\Omega_r t) \eta_l^{(r)} \right] Q_l^{(m)(0)} + \\ & \sum_n -\chi_0 \xi_\chi \Omega_\chi^3 \beta_{nl}^{(\dot{\chi})} \cos(\Omega_\chi t) Q_n^{(m)(0)} - 2\chi_0 \xi_\chi \Omega_\chi^2 \beta_{nl}^{(\dot{\chi})} \sin(\Omega_\chi t) \partial_t Q_n^{(m)(0)} \\ & \sum_{n,r \neq \dot{\chi}} -r_0 \xi_r \Omega_r^2 \beta_{nl}^{(r)} \sin(\Omega_r t) Q_n^{(m)(0)} + 2r_0 \xi_r \Omega_r \beta_{nl}^{(r)} \cos(\Omega_r t) \partial_t Q_n^{(m)(0)}. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Las derivadas de los coeficientes $Q_n^{(m)(0)}$ se pueden calcular a partir de la Ecuación (4.18):

$$\begin{aligned} \partial_t Q_n^{(m)(0)} &= i\omega_n A_n^m(\tau)e^{i\omega_n t} - i\omega_n B_n^m(\tau)e^{-i\omega_n t} \\ -2\partial_{t\tau}^2 Q_l^{(m)(0)} &= -2i\omega_l \left(\frac{dA_l^m}{d\tau} e^{i\omega_l t} - \frac{dB_l^m}{d\tau} e^{-i\omega_l t} \right), \quad (4.21) \end{aligned}$$

y reemplazando las derivadas y la expresión de los coeficientes $Q_n^{(m)(0)}$ de la Ecuación (4.18) en la Ecuación (4.20) obtenemos un sistema de ecuaciones acopladas para los coeficientes $A_n^m(\tau), B_n^m(\tau)$:

$$\begin{aligned}
 & -2i\omega_l \frac{dA_l^m}{d\tau} = \\
 & + \omega_l \xi_\chi \chi_0 \Omega_\chi B_l^m \eta_l^{(\dot{\chi})} \delta(\Omega_\chi - 2\omega_l) - i\omega_l \sum_{r \neq \dot{\chi}} \xi_r r_0 B_l^m \eta_l^{(r)} \delta(\Omega_r - 2\omega_l) \\
 & - \sum_n \chi_0 \xi_\chi \Omega_\chi^3 \beta_{nl}^{(\dot{\chi})} \frac{1}{2} \{A_n^m [\delta(\Omega_\chi + \omega_n - \omega_l) + \delta(-\Omega_\chi + \omega_n - \omega_l)] + B_n^m \delta(\Omega_\chi - \omega_n - \omega_l)\} \\
 & - \sum_n 2\chi_0 \xi_\chi \Omega_\chi^2 \beta_{nl}^{(\dot{\chi})} \frac{i\omega_n}{2i} \{A_n^m [\delta(\Omega_\chi + \omega_n - \omega_l) - \delta(-\Omega_\chi + \omega_n - \omega_l)] - B_n^m \delta(\Omega_\chi - \omega_n - \omega_l)\} \\
 & - \sum_{n, r \neq \dot{\chi}} r_0 \xi_r \Omega_r^2 \beta_{nl}^{(r)} \frac{1}{2i} \{A_n^m [\delta(\Omega_r + \omega_n - \omega_l) - \delta(-\Omega_r + \omega_n - \omega_l)] + B_n^m \delta(\Omega_r - \omega_n - \omega_l)\} \\
 & + \sum_{n, r \neq \dot{\chi}} 2r_0 \xi_r \Omega_r \beta_{nl}^{(r)} \frac{i\omega_n}{2} \{A_n^m [\delta(\Omega_r + \omega_n - \omega_l) + \delta(-\Omega_r + \omega_n - \omega_l)] - B_n^m \delta(\Omega_r - \omega_n - \omega_l)\}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
 & 2i\omega_l \frac{dB_l^m}{d\tau} = \\
 & + \omega_l \xi_\chi \chi_0 \Omega_\chi A_l^m \eta_l^{(\dot{\chi})} \delta(\Omega_\chi - 2\omega_l) + i\omega_l \sum_{r \neq \dot{\chi}} \xi_r r_0 A_l^m \eta_l^{(r)} \delta(\Omega_r - 2\omega_l) \\
 & - \sum_n \chi_0 \xi_\chi \Omega_\chi^3 \beta_{nl}^{(\dot{\chi})} \frac{1}{2} \{A_n^m \delta(\Omega_\chi - \omega_n - \omega_l) + B_n^m [\delta(\Omega_\chi - \omega_n + \omega_l) + \delta(-\Omega_\chi - \omega_n + \omega_l)]\} \\
 & + \sum_n 2\chi_0 \xi_\chi \Omega_\chi^2 \beta_{nl}^{(\dot{\chi})} \frac{i\omega_n}{2i} \{A_n^m \delta(\Omega_\chi - \omega_n - \omega_l) + B_n^m [\delta(\Omega_\chi - \omega_n + \omega_l) - \delta(-\Omega_\chi - \omega_n + \omega_l)]\} \\
 & - \sum_{n, r \neq \dot{\chi}} r_0 \xi_r \Omega_r^2 \beta_{nl}^{(r)} \frac{1}{2i} \{-A_n^m \delta(\Omega_r - \omega_n - \omega_l) + B_n^m [\delta(\Omega_r - \omega_n + \omega_l) - \delta(-\Omega_r - \omega_n + \omega_l)]\} \\
 & + \sum_{n, r \neq \dot{\chi}} 2r_0 \xi_r \Omega_r \beta_{nl}^{(r)} \frac{i\omega_n}{2} \{A_n^m \delta(\Omega_\chi - \omega_n - \omega_l) - B_n^m [\delta(\Omega_r - \omega_n + \omega_l) + \delta(-\Omega_r - \omega_n + \omega_l)]\}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

En las expresiones anteriores, $\delta(x)$ es la delta de Kronecker.

Usando las condiciones iniciales de los coeficientes Q, \dot{Q} que imponen las Ecuaciones (2.34) y (2.35), y las relaciones que impone la transformación de Bogoliubov (Ecuaciones (2.51) y (2.52)) pueden obtenerse las condiciones iniciales para los coeficientes A y B [14]:

$$A_n^{(m)}(0) = 0 \tag{4.24}$$

$$B_n^{(m)}(0) = \frac{\delta_{mn}}{\sqrt{2\omega_n}} \tag{4.25}$$

Las Ecuaciones (4.22) y (4.23) parecen totalmente análogas pero no lo son debido a los términos que suman sobre $r = \dot{\chi}$. Sin embargo, tienen en común las mismas condiciones para obtener una solución no trivial.

Para obtener una solución no trivial, debe satisfacerse para al menos un parámetro r al menos una de cuatro condiciones que vinculan la frecuencia del driving externo Ω_r con

las autofrecuencias de la cavidad ω_l, ω_n :

$$\Omega = 2\omega_l, \quad (4.26)$$

$$\Omega = \omega_l + \omega_n, \quad (4.27)$$

$$\Omega = \omega_l - \omega_n, \quad (4.28)$$

$$\Omega = \omega_n - \omega_l. \quad (4.29)$$

La condición de la Ecuación (4.26) se denomina resonancia paramétrica. Las otras tres condiciones de las Ecuaciones (4.27) a (4.29) indican un acoplamiento entre distintos modos del campo y pueden resumirse en:

$$\Omega = |\omega_n \pm \omega_l|, \quad (4.30)$$

que para el signo $+$ y $n = l$ contiene la condición de resonancia paramétrica.

Como se muestra en el Apéndice C, los coeficientes diagonales $\beta_{nn}^{(r)}$ son nulos para todos los parámetros, salvo para $r = \chi$ y $r = \dot{\chi}$. Esto implica que las sumas en n para $r \neq \chi, \dot{\chi}$ son sumas en $n \neq l$. La susceptibilidad eléctrica χ introduce términos de autoacoplamiento adicionales, no esperados para una cavidad en la que la susceptibilidad eléctrica permanece constante.

En el apéndice C se muestran los coeficientes η y β en tres configuraciones distintas: una cavidad perfectamente simétrica, una cavidad ligeramente asimétrica ($\Delta L/L = 0.05$), y una cavidad fuertemente asimétrica ($\Delta L/L = 0.60$). Conocer dichos coeficientes nos permite predecir el comportamiento del sistema.

En el Capítulo 5 se estudiarán simulaciones numéricas para distintas configuraciones de la cavidad doble, y se compararán los resultados con los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis* dados por las Ecuaciones (4.22) y (4.23). Por otro lado, en las secciones siguientes se discutirán ejemplos paradigmáticos de cada tipo de acoplamiento en una cavidad con un espectro no equidistante.

4.2. Resonancia paramétrica

La condición de resonancia paramétrica es de especial interés debido a que en algunas situaciones permite obtener un alto número de fotones con un bajo número de períodos de las perturbaciones del sistema, y de manera exponencial en el tiempo [5, 7, 30].

Supongamos que tenemos una cavidad con un espectro no equidistante tal que existe ω_l que satisface $2\omega_l \neq \omega_m \pm \omega_n, \forall (n, m) \neq (l, l)$. Consideremos un driving externo sobre todos los parámetros de la cavidad a la misma frecuencia externa $\Omega = 2\omega_l$. Las amplitudes de las perturbaciones de cada parámetro no son necesariamente iguales, pero sí del mismo orden; y pueden además estar en fase o contrafase. Dado que $\beta_{nn}^{(r)} = 0$ para todos los parámetros a excepción de χ y $\dot{\chi}$ (Ecuación (C.15)), y usando las Ecuaciones (4.22), (4.23), (B.9) y

(C.9):

$$\frac{dA_l^m}{d\tau} = B_l^m \left\{ -\xi_\chi \chi_0 \eta_l^{(\chi)} + \frac{1}{2} \sum_{r \neq \dot{\chi}} \xi_r r_0 \eta_l^{(r)} \right\}, \quad (4.31)$$

$$\frac{dB_l^m}{d\tau} = A_l^m \left\{ +\xi_\chi \chi_0 \eta_l^{(\chi)} + \frac{1}{2} \sum_{r \neq \dot{\chi}} \xi_r r_0 \eta_l^{(r)} \right\}. \quad (4.32)$$

Volviendo a derivar la Ecuación (4.32) respecto a τ y usando la Ecuación (4.31) se obtiene:

$$\frac{d^2 B_l^m}{d\tau^2} = B_l^m \{ \Gamma^2 - \Lambda^2 \}, \quad (4.33)$$

$$\Gamma \equiv \frac{1}{2} \sum_{r \neq \dot{\chi}} \xi_r r_0 \eta_l^{(r)}, \quad (4.34)$$

$$\Lambda \equiv \xi_\chi \chi_0 \eta_l^{(\chi)}. \quad (4.35)$$

Conviene además definir $\gamma^2 \equiv |\Gamma^2 - \Lambda^2|$. Dado que Γ y Λ son estrictamente reales, pueden esperarse tres comportamientos distintos para los coeficientes A y B . Si $|\Gamma| > |\Lambda|$, se tendrán soluciones que son combinación lineal de exponenciales reales; el número de fotones de la cavidad crecerá exponencialmente y lo hará a una tasa proporcional a $\epsilon\gamma$. Considerando las condiciones iniciales de las Ecuaciones (4.24) y (4.25), la solución más general en este régimen está dada por:

$$A_l^{(m)}(\tau) = \frac{\delta_{lm}}{\sqrt{2\omega_l}} \frac{\gamma}{\Gamma + \Lambda} \sinh(\gamma\tau), \quad (4.36)$$

$$B_l^{(m)}(\tau) = \frac{\delta_{lm}}{\sqrt{2\omega_l}} \cosh(\gamma\tau), \quad (4.37)$$

y a partir de la Ecuación (2.53) puede obtenerse el valor de expectación del número de fotones en el modo resonante:

$$\langle N_l \rangle (t) = \frac{\Gamma - \Lambda}{\Gamma + \Lambda} \left(1 + N_l^{(0)} \right) \sinh^2(\epsilon\gamma t) + N_l^{(0)} \cosh^2(\epsilon\gamma t), \quad (4.38)$$

donde se ve que la tasa de producción de fotones es $2\epsilon\gamma$. El valor de expectación de los demás modos es el valor inicial del número de fotones.

Si en cambio $|\Lambda| > |\Gamma|$, entonces las soluciones serán exponenciales complejas y el número de fotones oscilará en el tiempo a una frecuencia proporcional a $\epsilon\gamma$:

$$A_l^{(m)}(\tau) = -\delta_{lm} \frac{1}{\sqrt{2\omega_l}} \frac{\gamma}{\Gamma + \Lambda} \sin(\gamma\tau), \quad (4.39)$$

$$B_l^{(m)}(\tau) = \frac{\delta_{lm}}{\sqrt{2\omega_l}} \cos(\gamma\tau). \quad (4.40)$$

Usando la Ecuación (2.53),

$$\langle N_l \rangle (t) = \frac{\Lambda - \Gamma}{\Gamma + \Lambda} \left(1 + N_l^{(0)} \right) \sin^2(\epsilon\gamma t) + N_l^{(0)} \cos^2(\epsilon\gamma t), \quad (4.41)$$

y entonces la frecuencia de las oscilaciones es $2\epsilon\gamma$. Estas oscilaciones son interesantes pues surgen incluso cuando la cavidad se encuentra originalmente preparada en un estado de vacío.

Por último, si $\gamma = 0$, hay dos posibilidades distintas. Si $\Gamma = \Lambda$, entonces la única solución es la trivial y los coeficientes permanecen constantes en el tiempo. Si $\Gamma = -\Lambda$, entonces:

$$A_l^{(m)}(\tau) = -\delta_{lm} \frac{2\Lambda}{\sqrt{2\omega_l}} \tau, \quad (4.42)$$

$$B_l^{(m)}(\tau) = \frac{\delta_{lm}}{\sqrt{2\omega_l}}, \quad (4.43)$$

y el número de fotones aumentará cuadráticamente en el tiempo:

$$\langle N_l \rangle(t) = 4 \left(1 + N_l^{(0)}\right) \Lambda^2 \epsilon^2 t^2 + N_l^{(0)}. \quad (4.44)$$

La información contenida en esta sección no solamente permite predecir el comportamiento del sistema en el caso de resonancia paramétrica, sino que permite entender cómo elegir las amplitudes y las fases de las perturbaciones para modificar las tasas o frecuencias a partir de las definiciones de Γ y Λ . Por ejemplo, si se deseara frustrar la generación (exponencial) de fotones al variar únicamente L y ΔL , debe conseguirse $\Gamma = 0$ dado que $\xi_x = 0$. Luego debe ser, sin pérdida de generalidad para $\xi_L = 1$:

$$\xi_{\Delta L} = -\frac{L_0}{\Delta L_0} \frac{\eta_l^{(L)}}{\eta_l^{(\Delta L)}}, \quad (4.45)$$

con la restricción adicional de que $|\xi_{\Delta L}|$ debe ser de orden de la unidad. Esto no necesariamente es cierto para cualquier combinación de parámetros de la cavidad ni para cualquier nivel de energía.

En el ejemplo anterior la igualdad es estricta y entonces es virtualmente imposible conseguir experimentalmente, o en una simulación, la frustración completa de la generación de fotones. Sin embargo, la igualdad se relaja si se permite variar la susceptibilidad eléctrica (y en consecuencia se tiene $\Lambda \neq 0$). De esta forma, pueden encontrarse combinaciones de parámetros que frustran la generación de fotones a partir de producir interferencia destructiva en la cavidad.

4.3. Suma de frecuencias

Ahora supondremos que existe un único par de frecuencias ω_n, ω_l que satisface $\Omega = \omega_n + \omega_l$, donde Ω es la frecuencia del driving externo de cada parámetro. Nuevamente estamos asumiendo una única frecuencia de driving externo, mismo orden en las amplitudes de las perturbaciones, un espectro no equidistante y un único acoplamiento.

Bajo este acoplamiento, las ecuaciones diferenciales para los coeficientes son:

$$\frac{dA_l^m}{d\tau} = \frac{\omega_n^2 - \omega_l^2}{4\omega_l} \left\{ -\chi_0 \xi_\chi \beta_{nl}^{(\chi)} \frac{\omega_l}{\omega_n} + \sum_{r \neq \chi, \dot{\chi}} r_0 \xi_r \beta_{nl}^{(r)} \right\} B_n^m, \quad (4.46)$$

$$\frac{dB_n^m}{d\tau} = \frac{\omega_n^2 - \omega_l^2}{4\omega_n} \left\{ \chi_0 \xi_\chi \beta_{nl}^{(\chi)} \left[2 \frac{\omega_l^2}{\omega_n^2} + \frac{\omega_l}{\omega_n} \right] + \sum_{r \neq \chi, \dot{\chi}} r_0 \xi_r \beta_{nl}^{(r)} \right\} A_l^m, \quad (4.47)$$

$$\frac{dA_n^m}{d\tau} = \frac{\omega_n^2 - \omega_l^2}{4\omega_n} \left\{ -\chi_0 \xi_\chi \beta_{nl}^{(\chi)} \frac{\omega_l}{\omega_n} + \sum_{r \neq \chi, \dot{\chi}} r_0 \xi_r \beta_{nl}^{(r)} \right\} B_l^m, \quad (4.48)$$

$$\frac{dB_l^m}{d\tau} = \frac{\omega_n^2 - \omega_l^2}{4\omega_l} \left\{ \chi_0 \xi_\chi \beta_{nl}^{(\chi)} \left[2 + \frac{\omega_l}{\omega_n} \right] + \sum_{r \neq \chi, \dot{\chi}} r_0 \xi_r \beta_{nl}^{(r)} \right\} A_n^m, \quad (4.49)$$

donde se ha usado la Ecuación (C.15) para intercambiar los subíndices en los coeficientes $\beta_{nl}^{(r)}$. Como se ve, son dos sistemas de ecuaciones acoplados: A_l^m se acopla con B_n^m y A_n^m con B_l^m . Dado que el problema es completamente simétrico respecto al intercambio $l \leftrightarrow n$, basta encontrar la solución a uno de los dos sistemas acoplados.

Derivando respecto a τ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B_n^m}{d\tau^2} = & B_n^m \frac{(\omega_n^2 - \omega_l^2)^2}{16\omega_n\omega_l} \left\{ \left[\sum_{r \neq \chi, \dot{\chi}} r_0 \xi_r \beta_{nl}^{(r)} \right]^2 - \chi_0^2 \xi_\chi^2 \beta_{nl}^{(\chi)2} \frac{\omega_l^2}{\omega_n^2} \left[1 + \frac{2\omega_l}{\omega_n} \right] \right. \\ & \left. + 2\chi_0 \xi_\chi \left[\sum_{r \neq \chi, \dot{\chi}} r_0 \xi_r \beta_{nl}^{(r)} \right] \beta_{nl}^{(\chi)} \frac{\omega_l^2}{\omega_n^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Notemos que en la Ecuación (4.50) el coeficiente que precede a las llaves es estrictamente positivo. Por otro lado, entre las llaves hay tres términos: uno que depende de todos los parámetros de la cavidad salvo χ y es estrictamente positivo, otro que depende únicamente de χ (y es estrictamente negativo) y un tercero que depende de todos. El último término no tiene signo definido y será la suma de los tres la que rija el comportamiento del sistema. En verdad, todos los términos dependen de todos los parámetros de la cavidad (hay una dependencia implícita en los coeficientes β), pero no de las amplitudes y fases de sus perturbaciones. Vamos a resolver analíticamente dos casos particulares: uno en el que variamos todos los parámetros salvo χ , y uno en el que variamos únicamente χ . El caso más general será una competencia entre estos dos casos particulares.

4.3.1. Variando todos los parámetros a excepción de χ

Definimos:

$$\gamma \equiv \frac{\omega_n^2 - \omega_l^2}{4\sqrt{\omega_n\omega_l}} \sum_{r \neq \chi, \dot{\chi}} r_0 \xi_r \beta_{nl}^{(r)}, \quad (4.51)$$

y entonces el sistema satisface:

$$\frac{dB_n^m}{d\tau} = \gamma \sqrt{\frac{\omega_l}{\omega_n}} A_l^m, \quad (4.52)$$

$$\frac{d^2 B_n^m}{d\tau^2} = \gamma^2 B_n^m. \quad (4.53)$$

Juntando estas ecuaciones con las condiciones iniciales se obtienen los coeficientes en función de τ :

$$A_l^{(m)}(\tau) = \frac{\delta_{nm}}{\sqrt{2\omega_l}} \sinh(\gamma\tau), \quad (4.54)$$

$$B_n^{(m)}(\tau) = \frac{\delta_{nm}}{\sqrt{2\omega_n}} \cosh(\gamma\tau). \quad (4.55)$$

Usando la Ecuación (2.53),

$$\langle N_l \rangle(t) = \left(1 + N_n^{(0)}\right) \sinh^2(\epsilon\gamma t) + N_l^{(0)} \cosh^2(\epsilon\gamma t), \quad (4.56)$$

$$\langle N_n \rangle(t) = \left(1 + N_l^{(0)}\right) \sinh^2(\epsilon\gamma t) + N_n^{(0)} \cosh^2(\epsilon\gamma t), \quad (4.57)$$

$$\langle N \rangle(t) = \left(2 + N^{(0)}\right) \sinh^2(\epsilon\gamma t) + N^{(0)} \cosh^2(\epsilon\gamma t). \quad (4.58)$$

Entonces se obtiene un número de fotones que aumenta exponencialmente en el tiempo a una tasa igual para ambos modos de $2\epsilon\gamma$, siempre que $\gamma \neq 0$. El caso $\gamma = 0$ no presenta generación de fotones de ningún tipo, y su única solución es la trivial. La tasa puede aumentarse/reducirse con una adecuada modificación de las amplitudes de los parámetros.

4.3.2. Variando únicamente χ

Definimos:

$$\tilde{\gamma} \equiv \frac{\omega_n^2 - \omega_l^2}{4\sqrt{\omega_n\omega_l}} \chi_0 \xi_\chi, \quad (4.59)$$

$$\gamma_{nl} \equiv \tilde{\gamma} \sqrt{\left[1 + \frac{2\omega_l}{\omega_n}\right]}, \quad (4.60)$$

que permite escribir:

$$\frac{d^2 B_n^m}{d\tau^2} = \gamma_{nl}^2 \beta_{nl}^{(x)} \beta_{ln}^{(x)} B_n^m, \quad (4.61)$$

$$\frac{dB_n^m}{d\tau} = -\gamma_{nl} \beta_{ln}^{(x)} \sqrt{2 + \frac{\omega_n}{\omega_l}} A_l^m. \quad (4.62)$$

En este caso, γ es real y estrictamente no nulo ($\gamma = 0$ implica que en verdad no estamos variando ningún parámetro de la cavidad). Como ya sabemos y de manera completamente análoga a casos anteriores, la dependencia temporal del número de fotones dependerá del signo de $\beta_{nl}^{(x)} \beta_{ln}^{(x)}$. Como sugiere la Ecuación (C.15), $\beta_{nl}^{(x)} \beta_{ln}^{(x)} < 0$.

Como $\beta_{nl}^{(x)} \beta_{ln}^{(x)} < 0$, entonces el número de fotones oscilará en el tiempo, nuevamente.

Definiendo:

$$\kappa_{nl} \equiv \gamma_{nl} \sqrt{-\beta_{nl}^{(x)} \beta_{ln}^{(x)}} = \gamma_{nl} \left| \beta_{nl}^{(x)} \right| \frac{\omega_l}{\omega_n}, \quad (4.63)$$

$$\theta_{nl} \equiv \sqrt{-\frac{\beta_{nl}^{(x)}}{\beta_{ln}^{(x)}}} \sqrt{1 + 2 \frac{\omega_l}{\omega_n} \frac{\omega_l}{\omega_n}} = \sqrt{1 + 2 \frac{\omega_l}{\omega_n}}, \quad (4.64)$$

podemos escribir las soluciones para los coeficientes:

$$A_l^{(m)}(\tau) = -\frac{\delta_{nm}}{\sqrt{2\omega_l}} \theta_{nl} \sin(\kappa_{nl}\tau) \quad (4.65)$$

$$B_n^{(m)}(\tau) = \frac{\delta_{nm}}{\sqrt{2\omega_n}} \cos(\kappa_{nl}\tau). \quad (4.66)$$

Entonces, el valor de expectación del operador número de cada modo es:

$$\langle N_l \rangle(t) = \left(1 + N_n^{(0)}\right) \theta_{nl}^2 \sin^2(\epsilon \kappa_{nl} t) + N_l^{(0)} \cos^2(\epsilon \kappa_{nl} t), \quad (4.67)$$

$$\langle N_n \rangle(t) = \left(1 + N_l^{(0)}\right) \theta_{ln}^2 \sin^2(\epsilon \kappa_{ln} t) + N_n^{(0)} \cos^2(\epsilon \kappa_{ln} t). \quad (4.68)$$

Esto muestra que habrá oscilaciones en el número de fotones de los modos acoplados incluso cuando la cavidad se prepara en un estado de vacío. Dado que $\kappa_{ln} \neq \kappa_{nl}$, se observarán oscilaciones armónicas y de distinta frecuencia (y amplitud) para cada modo si inicialmente no hay fotones en la cavidad. Pero si inicialmente hay fotones en la cavidad, entonces se producirán batidos en uno o ambos modos: en uno solo si inicialmente solo hay fotones de uno de los modos acoplados (en ese mismo modo se verán batidos), y en ambos si inicialmente hay fotones de las dos frecuencias acopladas.

4.4. Resta de frecuencias

Ahora supondremos que existe un único par de frecuencias ω_n, ω_l que satisface $\Omega = \omega_n - \omega_l$, donde Ω es la frecuencia del driving externo de cada parámetro. Nuevamente estamos asumiendo una única frecuencia de driving externo, mismo orden en las amplitudes de las perturbaciones, un espectro no equidistante y un único acoplamiento.

Bajo esta configuración, la Ecuación (4.23) se reduce a:

$$\frac{dB_l^m}{d\tau} = -\frac{\omega_n^2 - \omega_l^2}{4\sqrt{\omega_n\omega_l}} \left\{ \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_l}} \sum_{r \neq \chi, \dot{\chi}} r_0 \xi_r \beta_{nl}^{(r)} + \sqrt{\frac{\omega_l}{\omega_n}} \chi_0 \xi_\chi \beta_{nl}^{(\chi)} \right\} B_n^m \quad (4.69)$$

$$\frac{dB_n^m}{d\tau} = \frac{\omega_n^2 - \omega_l^2}{4\sqrt{\omega_n\omega_l}} \left\{ \sqrt{\frac{\omega_l}{\omega_n}} \sum_{r \neq \chi, \dot{\chi}} r_0 \xi_r \beta_{nl}^{(r)} - \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_l}} \chi_0 \xi_\chi \beta_{ln}^{(\chi)} \right\} B_l^m \quad (4.70)$$

Derivando de nuevo respecto a τ se obtiene:

$$\frac{d^2 B_{n,l}^m}{d\tau^2} = -\gamma^2 \{\Gamma + \Lambda\}^2 B_{n,l}^m, \quad (4.71)$$

donde se definieron las constantes reales

$$\gamma \equiv \frac{\omega_n^2 - \omega_l^2}{4\sqrt{\omega_n\omega_l}}, \quad (4.72)$$

$$\Gamma \equiv \sum_{r \neq \chi, \dot{\chi}} r_0 \xi_r \beta_{nl}^{(r)}, \quad (4.73)$$

$$\Lambda \equiv \chi_0 \xi_\chi \beta_{nl}^{(\chi)} \frac{\omega_l}{\omega_n}. \quad (4.74)$$

Se ve entonces que, al ser el signo del lado derecho de la Ecuación (4.71) siempre negativo, se obtendrán soluciones oscilatorias de igual frecuencia para ambos modos. Por otro lado, la Ecuación (4.22) y las condiciones iniciales de la Ecuación (4.24) imponen:

$$A_{n,l}^{(m)}(0) = 0, \quad \frac{dA_{n,l}^{(m)}}{d\tau}(0) = 0, \quad \frac{d^2 A_{n,l}^{(m)}}{d\tau^2} \propto A_{n,l}^{(m)}, \quad (4.75)$$

y entonces la única solución para los coeficientes $A_{n,l}^{(m)}$ es la trivial: $A_{n,l}^{(m)}(\tau) = 0$.

Consideremos un caso particular de este acoplamiento, cuando se perturba cualquier parámetro a excepción de χ .

4.4.1. Variando todos los parámetros a excepción de χ

El sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\frac{d^2 B_{n,l}^m}{d\tau^2} = -\gamma^2 \Gamma^2 B_{n,l}^m, \quad (4.76)$$

$$\frac{dB_n^m}{d\tau} = \gamma \Gamma \sqrt{\frac{\omega_l}{\omega_n}} B_l^m, \quad (4.77)$$

$$\frac{dB_l^m}{d\tau} = -\gamma \Gamma \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_l}} B_n^m, \quad (4.78)$$

y sus soluciones son entonces:

$$B_n^n(\tau) = \frac{\cos(\gamma \Gamma \tau)}{\sqrt{2\omega_n}}, \quad B_l^l(\tau) = \frac{\cos(\gamma \Gamma \tau)}{\sqrt{2\omega_l}}, \quad (4.79)$$

$$B_n^l(\tau) = \frac{\sin(\gamma \Gamma \tau)}{\sqrt{2\omega_n}}, \quad B_l^n(\tau) = \frac{\sin(-\gamma \Gamma \tau)}{\sqrt{2\omega_l}}. \quad (4.80)$$

Todos los demás coeficientes permanecen constantes e iguales a los valores iniciales que impone la Ecuación (4.25). El número de fotones en cada modo y el número de fotones total en la cavidad pueden calcularse a partir de la Ecuación (2.53):

$$\langle N_l \rangle(t) = N_n^{(0)} + \left(N_l^{(0)} - N_n^{(0)} \right) \cos^2(\epsilon \gamma \Gamma t), \quad (4.81)$$

$$\langle N_n \rangle(t) = N_n^{(0)} + \left(N_l^{(0)} - N_n^{(0)} \right) \sin^2(\epsilon \gamma \Gamma t), \quad (4.82)$$

$$\langle N \rangle(t) = N_l^{(0)} + N_n^{(0)}, \quad (4.83)$$

donde se ve claramente que el número total de fotones permanece constante (no hay generación de fotones), y que el número de fotones de cada modo oscila a la misma frecuencia

$2\epsilon\gamma\Gamma$.

GENERACIÓN DE FOTONES: SIMULACIONES NUMÉRICAS

La aproximación del *Multiple Scale Analysis* discutida en el Capítulo 4 es válida a tiempos suficientemente cortos [29]. Además dicha aproximación no permite, por ejemplo, ningún corrimiento respecto a las frecuencias de driving que satisfacen las condiciones de acoplamiento. Es por ello que es importante intentar resolver el problema de manera numérica, y en este Capítulo se estudian distintas configuraciones del problema. También se describen las ideas y métodos numéricos implementados para realizar las simulaciones.

5.1. Métodos numéricos

Lo primero que debe obtenerse de manera numérica es el conjunto de soluciones de la Ecuación (2.18), que es trascendente y por ende no tiene soluciones analíticas en el caso más general. Definimos las funciones:

$$F_1(k) = \frac{2k \sin(kL)}{k^2 \chi - v} - \cos(k\Delta L) + \cos(kL), \quad (5.1)$$

$$F_2(k) = 2 \sin(kL)k - [\cos(k\Delta L) + \cos(kL)] [k^2 \chi - v], \quad (5.2)$$

cuyas raíces son precisamente las soluciones de la Ecuación (2.18). Si bien una de las dos funciones F_1 o F_2 es suficiente para obtener todas las raíces de la ecuación trascendente, resulta conveniente trabajar con ambas. La razón se vuelve evidente cuando graficamos dichas funciones, como se muestra en la Figura 5.1: F_1 presenta una divergencia en $k = k_c$, pero tiene la ventaja de ser acotada; y F_2 no tiene ninguna divergencia, pero no está acotada ($F_2 \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$).

Encontrar las raíces de F_1 y F_2 puede hacerse de distintas formas, pero la mayoría de los métodos dependen fuertemente de una semilla inicial. Y dado que nos interesa tener el conjunto completo de soluciones en un intervalo acotado (por ejemplo, las primeras $N = 10$ soluciones), un método que dependa de la semilla inicial no es conveniente al menos en una primera etapa.

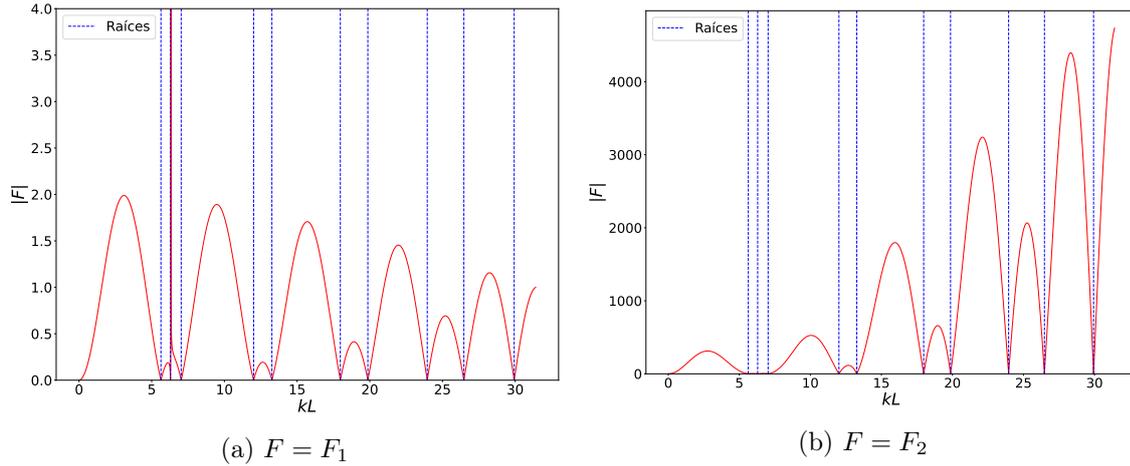


Figura 5.1. Valores absolutos de las funciones definidas por las Ecuaciones (5.1) y (5.2), en función del número de onda. Con línea punteada en azul se marcan las raíces de dichas funciones, que son las soluciones de la Ecuación (2.18). Se graficó para $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$.

Para evitar trabajar con semillas iniciales que no garantizan la convergencia a todas las raíces, decidimos inicialmente evaluar las funciones F_1^2 y F_2^2 en una grilla de puntos. Dado que a partir de $kL = 2\pi$ hay al menos una solución cada 2π , consideramos suficiente buscar raíces desde $kL = 0$ hasta $kL = 2\pi(N+2)$; donde N refiere a que estamos buscando las primeras N soluciones. Dado que al aumentar N aumenta la región de búsqueda de las raíces, es importante que el número de puntos de la grilla dependa también de N . Convenientemente podemos elegir $\tilde{N}_0 = N_0(N+2)$ puntos en la grilla, donde N_0 es algún valor arbitrario. El paso Δk_0 de la discretización en kL queda definido a partir de la elección de N_0 :

$$\Delta k_0 = \frac{2\pi(N+2)}{L\tilde{N}_0} = \frac{2\pi}{LN_0}, \quad (5.3)$$

donde se evidencia que la elección de \tilde{N}_0 permite tener una resolución independiente de N .

Una vez evaluados los cuadrados (o valores absolutos, es indistinto) de las funciones F_1 y F_2 , buscamos los extremos locales y verificamos que fueran mínimos comparando $F^2(k)$ contra alguna tolerancia arbitraria. Observando la Figura 5.1 vemos que una tolerancia puede ser útil para todas las soluciones de F_1 salvo para las que estén en un entorno de $k = k_c$ (F_1 está acotada), mientras que una única tolerancia no es buena para buscar raíces con F_2 : si el paso en la grilla permanece fijo y la función crece, eventualmente podemos estar saltando raíces. Lo más conveniente es utilizar siempre F_1 salvo en el entorno de $k = k_c$, donde es mejor usar F_2 .

Este proceso nos permite obtener un conjunto de soluciones $\{k_i^{(0)}\}_{0 \leq i < N}$ con precisión Δk_0 . Dado que nos interesan perturbaciones de baja amplitud en los parámetros de la cavidad, es posible que algunos modos tengan muy pequeñas correcciones en la energía. Y si bien podemos mejorar la precisión agrandando arbitrariamente N_0 , esta no es la mejor forma ya que requiere N_0 evaluaciones (solamente el cálculo de los valores de la grilla). Acá

es donde podrían utilizarse otros métodos para mejorar la precisión de la raíz k_i a partir de la semilla inicial $k_i^{(0)}$; por ejemplo, el de Newton-Raphson. Sin embargo, decidimos seguir iterando con el mismo método en cada raíz. De esta manera, definimos un intervalo de búsqueda para la i -ésima raíz: $[k_i^{(0)} - \Delta k_0, k_i^{(0)} + \Delta k_0]$. Así, todos los intervalos tienen la misma longitud $2\Delta k_0$. Fijando N_1 puntos en la nueva grilla, obtenemos una precisión de:

$$\Delta k_1 = \frac{2\Delta k_0}{LN_1} = \frac{2\pi}{L} \frac{1}{N_0 N_1}, \quad (5.4)$$

y en lugar de realizar $N_0 N_1$ operaciones, necesitamos $N_0 + NN_1$. Este proceso puede hacerse M veces hasta obtener la resolución deseada:

$$\Delta k_M = \frac{2\pi}{L} \frac{1}{\prod_{i=0}^M N_i}, \quad (5.5)$$

con una cantidad de operaciones de orden $\mathcal{O}(P)$, donde

$$P = N_0 + N \sum_{i=1}^M N_i. \quad (5.6)$$

Este proceso puede adaptarse para encontrar soluciones a la Ecuación (2.36), modificando F_1 y F_2 según:

$$F_1(k) = \frac{2k \sin(kL)}{k^2 \chi + ik\dot{\chi} - v} - \cos(k\Delta L) + \cos(kL), \quad (5.7)$$

$$F_2(k) = 2 \sin(kL)k - [\cos(k\Delta L) + \cos(kL)] [k^2 \chi + ik\dot{\chi} - v], \quad (5.8)$$

y buscando en una grilla bidimensional en lugar de una unidimensional. Para obtener mejores y más rápidos resultados conviene inicialmente buscar las soluciones reales de la Ecuación (2.18) en una grilla unidimensional, y luego buscar alrededor de cada una de estas soluciones la solución compleja de la Ecuación (2.36).

Lo siguiente, una vez calculadas las autofrecuencias de la cavidad, es construir las autofunciones. Para luego poder computar coeficientes que dependen de las derivadas de las autofunciones sin tener problemas de precisión (de un esquema de diferencias finitas), las armamos utilizando la librería *SymPy* de cálculo simbólico. La forma y normalización de las autofunciones se discuten en el Apéndice A.

El siguiente paso es discretizar el tiempo y escribir el sistema de ecuaciones diferenciales para los coeficientes $Q_l^{(m)}$ que define la Ecuación (2.37). Para discretizar el tiempo, es importante tener en cuenta que esperamos que $Q_l^{(m)}$ dependa lentamente del tiempo, a través de la escala temporal $\tau = \epsilon t$, y entonces debe haber como mínimo $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ puntos por cada instante de tiempo en el que se quiera obtener el valor de expectación del operador número. El sistema de ecuaciones diferenciales puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{Q}}^{(m)} = \mathbb{M}\mathbf{Q}^{(m)}, \quad (5.9)$$

donde $\mathbf{Q}^{(m)}$ contiene a los coeficientes y sus primeras derivadas y \mathbb{M} puede definirse por bloques:

$$\mathbf{Q}^{(m)} \equiv \begin{pmatrix} Q_1^{(m)} \\ \vdots \\ Q_N^{(m)} \\ \dot{Q}_1^{(m)} \\ \vdots \\ \dot{Q}_N^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Theta} \end{array} \right). \quad (5.10)$$

N es el modo donde se decide truncar al sistema de infinitas ecuaciones acopladas. Las matrices que están en los bloques inferiores de \mathbb{M} están asociadas a los coeficientes de acoplamiento definidos en las Ecuaciones (2.38) y (2.39):

$$\mathbf{\Lambda} = - \begin{pmatrix} \lambda_{11} + k_1^2 & \lambda_{21} & \lambda_{31} & \dots & \lambda_{N1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} + k_2^2 & \lambda_{32} & \dots & \lambda_{N2} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} + k_3^2 & \dots & \lambda_{N3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1N} & \lambda_{2N} & \lambda_{3N} & \dots & \lambda_{NN} + k_N^2 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{\Theta} = -2 \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} & \theta_{31} & \dots & \theta_{N1} \\ \theta_{12} & \theta_{22} & \theta_{32} & \dots & \theta_{N2} \\ \theta_{13} & \theta_{23} & \theta_{33} & \dots & \theta_{N3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{1N} & \theta_{2N} & \theta_{3N} & \dots & \theta_{NN} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Calcular estos coeficientes en cada instante de la simulación tiene un alto costo computacional, y entonces optamos por aproximarlos utilizando las Ecuaciones (2.42) y (2.43):

$$\theta_{nl} \simeq \sum_r \beta_{nl}^{(r)}(0) \dot{r}, \quad (5.13)$$

$$\lambda_{nl} \simeq \sum_r \ddot{r} \beta_{nl}^{(r)}(0) + \dot{r}^2 \alpha_{nl}^{(r)}(0), \quad (5.14)$$

donde la aproximación consiste en calcular los coeficientes α y β a tiempo 0 cuando la cavidad es estática. En cada coeficiente α , β se comete un error $\mathcal{O}(\epsilon)$ y en θ , λ un error $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Un mejor procedimiento sería calcular β a todo tiempo, y α solamente a tiempo 0, mejorando el error en los coeficientes θ , λ a $\mathcal{O}(\epsilon^3)$. En general, no se observaron diferencias significativas entre ambos procedimientos en los tiempos considerados para las simulaciones de este Capítulo.

Una vez escrito el sistema de ecuaciones para cada instante, integramos empleando un método de Runge-Kutta de orden 4:

$$\mathbf{Q}_{i+1}^{(m)} = \mathbf{Q}_i^{(m)} + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5.15)$$

$$t_{i+1} = t_i + h, \quad (5.16)$$

$$k_1 = \mathbb{M}(t_i) \mathbf{Q}_i^{(m)}, \quad (5.17)$$

$$k_2 = \mathbb{M}(t_i + h/2) (\mathbf{Q}_i^{(m)} + k_1/2), \quad (5.18)$$

$$k_3 = \mathbb{M}(t_i + h/2) (\mathbf{Q}_i^{(m)} + k_2/2), \quad (5.19)$$

$$k_4 = \mathbb{M}(t_i + h) (\mathbf{Q}_i^{(m)} + k_3), \quad (5.20)$$

donde $\mathbf{Q}_i^{(m)}$ denota el vector completo calculado en el paso i -ésimo, y t_i es el tiempo del i -ésimo paso.

Los coeficientes $\theta_{nl}(t)$ y $\lambda_{nl}(t)$ son periódicos con una frecuencia igual al mínimo común múltiplo de las frecuencias no nulas de las perturbaciones de los parámetros del sistema:

$$\Omega_{mcm} = \text{mcm} \{ \Omega_r \}. \quad (5.21)$$

La periodicidad de dichos coeficientes introduce una gran ventaja computacional, pues solamente es necesario calcularlos en un período del sistema.

Por otro lado, cada vez que los parámetros de la cavidad vuelvan a sus condiciones iniciales (una vez por cada período, cada $2\pi/\Omega_{mcm}$), extraemos la solución del sistema. A partir de la Ecuación (2.50), obtenemos los coeficientes A y B según:

$$A_n^{(m)} = \frac{1}{2} \left[Q_n^{(m)} + \frac{\dot{Q}_n^{(m)}}{i\omega_n} \right] e^{-i\omega_n t} \quad (5.22)$$

$$B_n^{(m)} = \frac{1}{2} \left[Q_n^{(m)} - \frac{\dot{Q}_n^{(m)}}{i\omega_n} \right] e^{+i\omega_n t}, \quad (5.23)$$

y a partir de dichos coeficientes calculamos el valor de expectación del operador número usando la Ecuación (2.53). Este método es similar a los utilizados en [26, 31, 32, 33].

En las siguientes Secciones presentamos simulaciones realizadas bajo distintas condiciones de acoplamiento, pero siempre en una región fuertemente no equidistante del espectro. Discutimos la forma en la que se da (o no) la generación de fotones, y comparamos los resultados con las soluciones esperadas de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Por último, estudiamos los efectos de un *detuning* respecto a la frecuencia de *driving* deseada, y de cambios en las amplitudes de las perturbaciones.

5.2. Resonancia paramétrica

Consideremos una condición de resonancia paramétrica en algún conjunto de parámetros de la cavidad doble. La Figura 5.2 muestra el resultado de una perturbación con $\Omega = 2\omega_3$ en el parámetro ΔL , para una cavidad con baja susceptibilidad y nula conductividad. Como podemos ver, la aproximación del *Multiple Scale Analysis* (MSA) es válida a

tiempos cortos ($\Omega t_f < 1000$) y predice satisfactoriamente el número y la forma en la que se generan los fotones del modo ω_3 . A tiempos largos ($\Omega t_f > 2000$), la aproximación del MSA sobreestima la tasa de generación de fotones en el modo ω_3 .

El MSA predice a tiempos cortos correctamente la generación de fotones en un único modo: el resonante (ω_3). En los otros modos se observa únicamente ruido, con $\langle N \rangle \lesssim 10^{-2}$. Este ruido no es relevante en absoluto y no indica una verdadera generación de fotones. A tiempos largos no solo no predice correctamente la tasa de generación de fotones del modo ω_3 , sino que se empiezan a excitar todos los demás modos de la cavidad (algunos antes que otros). Este resultado no puede ser predicho por el MSA, lo que nos muestra la importancia de encontrar una solución numérica al problema para mirar más allá de la validez del MSA. Debe notarse, sin embargo, que la cantidad de fotones en otros modos es por lo menos tres órdenes de magnitud menor que la del modo resonante.

En resonancia paramétrica, tanto la frecuencia del *driving* externo como el espectro de la cavidad son fundamentales. La frecuencia de *driving* $\Omega = 2\omega_3$ para la cavidad de la Figura 5.2 no fue elegida de manera azarosa, sino que era aquella que maximizaba la cantidad de fotones generados en una misma cantidad de períodos.

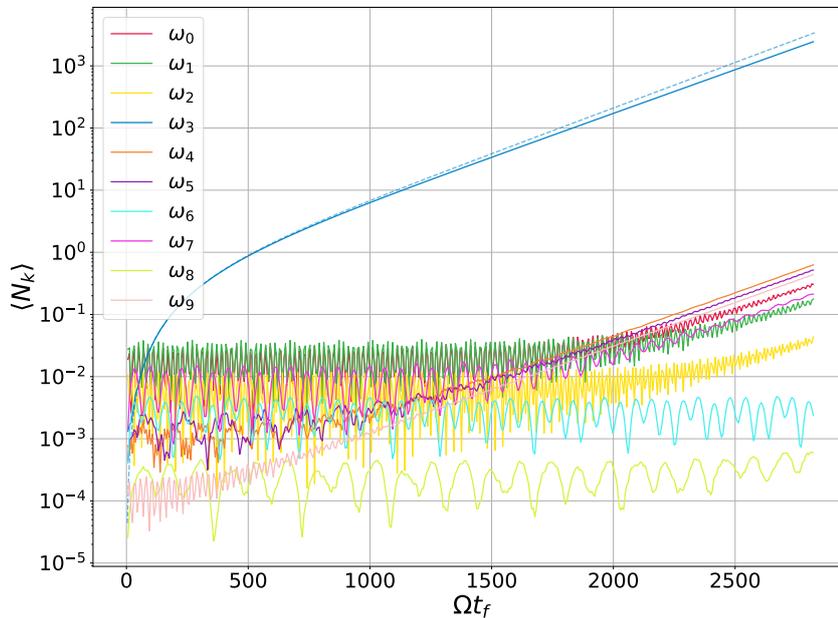


Figura 5.2. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro ΔL .

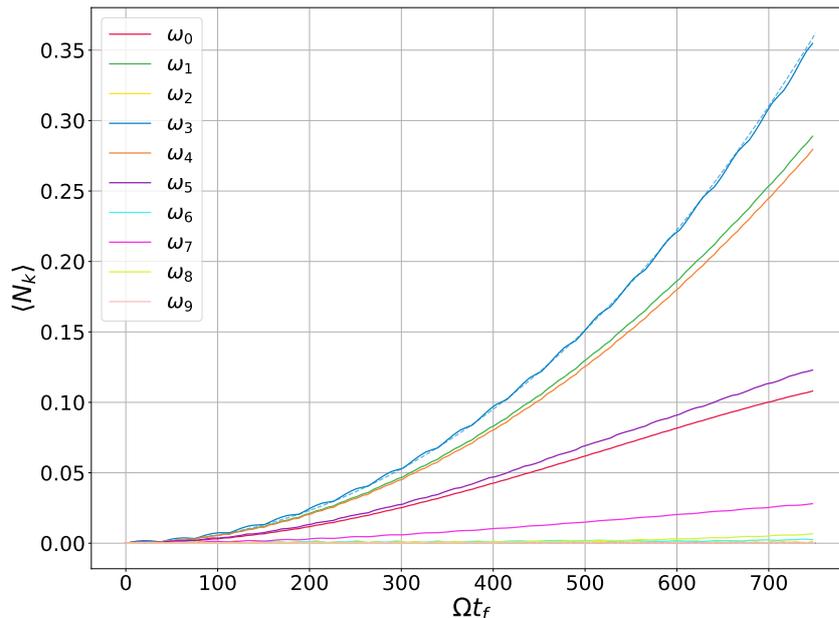


Figura 5.3. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro ΔL .

El espectro de la cavidad influye aún más en la generación de fotones por Efecto Casimir Dinámico: puede introducir acoplamientos adicionales inicialmente inesperados. Esto lo podemos ver claramente en la Figura 5.3, donde ahora tenemos una cavidad con una alta susceptibilidad y una conductividad no nula. Lo primero que vemos es una disminución significativa del valor de expectación del número de fotones en la cavidad en un mismo número de períodos de las perturbaciones, ni siquiera llega a 1. Pero además, vemos que se excitan rápidamente otros modos. La aproximación del MSA predice de manera correcta el valor de expectación para el modo resonante (incluso es válida más allá de lo esperado), pero no la excitación de otros modos. Sin embargo, la excitación de estos modos adicionales puede explicarse de manera muy simple teniendo en cuenta el acoplamiento por suma de frecuencias, y permitiendo un pequeño *detuning* respecto a la frecuencia de dichos acoplamientos. Para los parámetros de la cavidad elegidos, vale que:

$$\frac{\omega_1 + \omega_4}{2\omega_3} - 1 = 0.00088, \quad \frac{\omega_0 + \omega_5}{2\omega_3} - 1 = -0.0038, \quad (5.24)$$

por lo que podemos esperar que los modos ω_0 , ω_1 , ω_4 y ω_5 se exciten al excitar al modo ω_3 de manera resonante. Si en las Ecuaciones (4.22) y (4.23) relajamos las deltas de Kronecker introduciendo un perfil uniforme de ancho Δ :

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \Delta \\ 0, & |x| > \Delta \end{cases}, \quad (5.25)$$

entonces podemos ver que la aproximación del MSA permite predecir de manera aproximada los acoplamientos adicionales, como se muestra en la Figura 5.4. Sin embargo, a tiempos largos se sobreestima el número de fotones en estos modos.

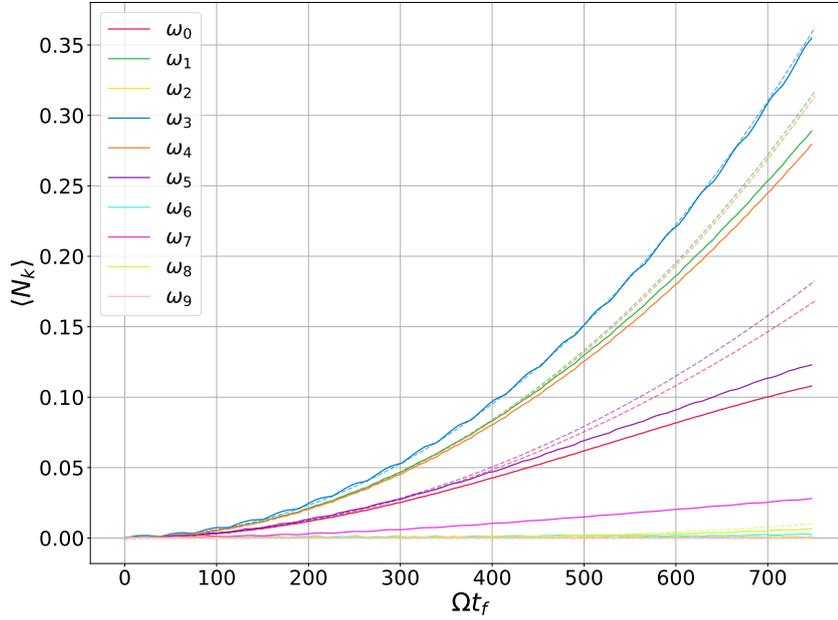


Figura 5.4. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*, relajando la selectividad de los acoplamientos según la Ecuación (5.25). Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro ΔL .

Al perturbar la longitud de la cavidad L , esperamos ver resultados similares a los que encontramos cuando perturbamos la asimetría ΔL de la cavidad. Efectivamente observamos un comportamiento similar, como muestra la Figura 5.5 (configuración idéntica a la de la Figura 5.2). La aproximación del MSA sigue siendo válida a tiempos cortos, mientras que a tiempos largos sobreestima la cantidad de fotones del modo resonante. Nuevamente observamos que se excitan todos los demás modos pero, a diferencia de la Figura 5.2, las excitaciones ocurren mucho antes (tardan aproximadamente la mitad de tiempo en comenzar a excitarse). La tasa es superior, lo que explica por qué se generan más fotones al perturbar L . A pesar de que $|\eta_3^{(L)}| \simeq |\eta_3^{(\Delta L)}|$, como se discutió en el Capítulo 4, los coeficientes η aparecen multiplicados por los parámetros iniciales de la cavidad. En este caso, L_0 es más de dos veces mayor que parámetro ΔL_0 .

Como discutimos en el Capítulo 4, es posible perturbar más de un parámetro del sistema para aumentar (o disminuir) la tasa de generación de fotones. Consideremos, por ejemplo, la cavidad de la Figura 5.2. Si perturbamos en contrafase y con igual frecuencia el parámetro L , entonces podemos conseguir una tasa más alta, como muestra la Figura 5.6.

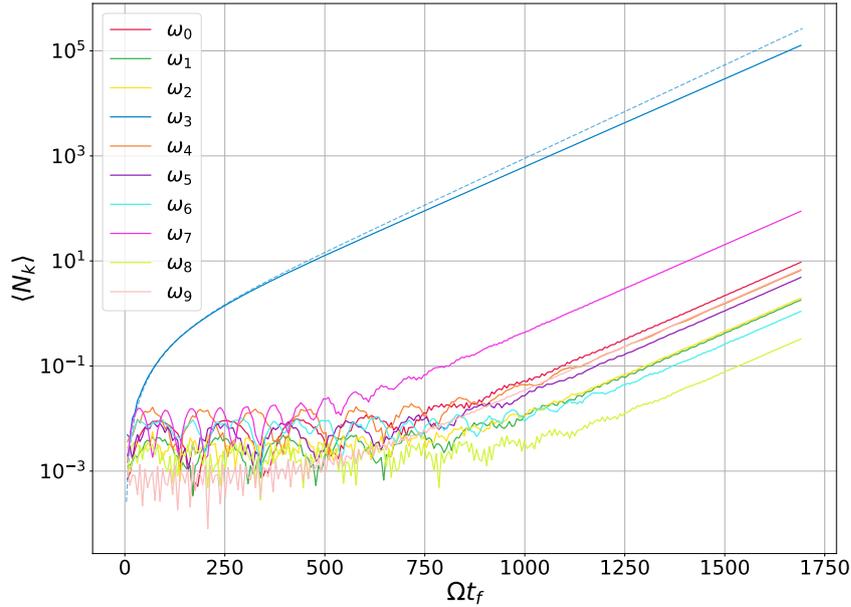


Figura 5.5. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro L .

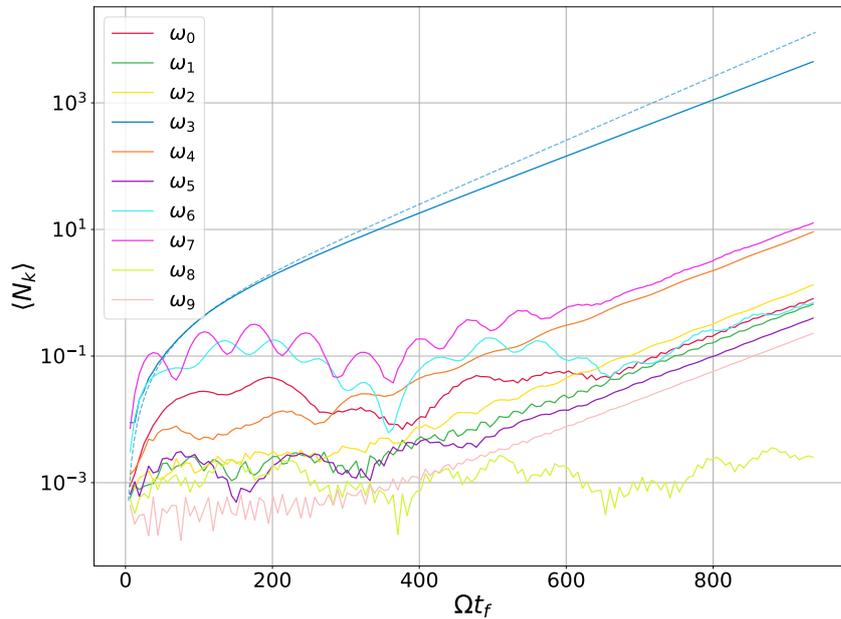


Figura 5.6. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro ΔL ; y con la misma frecuencia, amplitud y en contrafase al parámetro L .

Podemos ver que en la Figura 5.6 se alcanza un valor de expectación de 1000 para

el modo resonante en $\Omega t_f = 800$, más de tres veces más rápido que en la Figura 5.2. Además, se excitan antes los otros modos y las soluciones numéricas se alejan antes de aquellas del MSA para el modo resonante. Supongamos que la cavidad tiene un largo de $L = 20$ cm. Entonces las simulaciones numéricas indican que se generan 1000 fotones de $\omega_3 \simeq 11.76c/L \simeq 17.6$ GHz en $800/2\omega_3 \simeq 23$ ns.

La Figura 5.7 muestra que es posible también disminuir la tasa de producción de fotones, incluso al punto de eliminar la generación exponencial de fotones por completo. Lo que se observa son oscilaciones armónicas de muy baja amplitud y distinta frecuencia en todos los modos, y no sugiere una verdadera producción de fotones. Para obtener este resultado, elegimos:

$$\xi_L = -\xi_{\Delta L} \frac{\Delta L_0 \eta_3^{(\Delta L)}}{L_0 \eta_3^{(L)}} \simeq -0.43856, \quad (5.26)$$

para así minimizar o anular la tasa de producción de fotones.

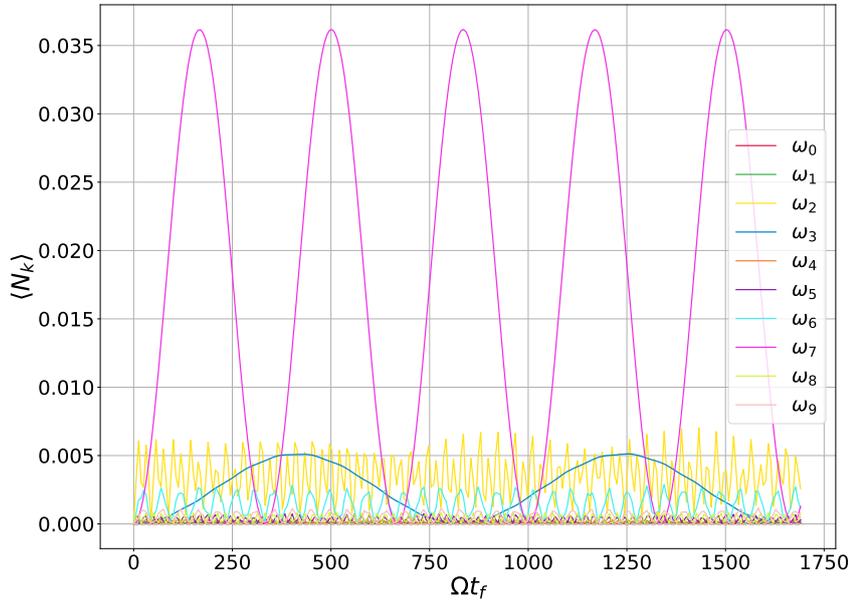


Figura 5.7. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3$ al parámetro ΔL ($\xi_{\Delta L} = 1$); y con la misma frecuencia al parámetro L , pero con $\xi_L \simeq -0.43856$.

Como se discutió con las Figuras C.2, C.4 y C.6, los coeficientes η asociados a $r = v$ son muy pequeños y por lo tanto no son, a priori, una buena elección para generar fotones en la cavidad. Sin embargo, podemos ver en la Figura 5.8 que la aproximación del MSA solo es válida (a tiempos cortos) para el modo resonante. Vemos que incluso a tiempos cortos, se genera una enorme cantidad de fotones de otros modos de más alta energía. Para otras frecuencias de *driving* externo (en resonancia paramétrica) no se observa este comportamiento: no se generan fotones de manera significativa.

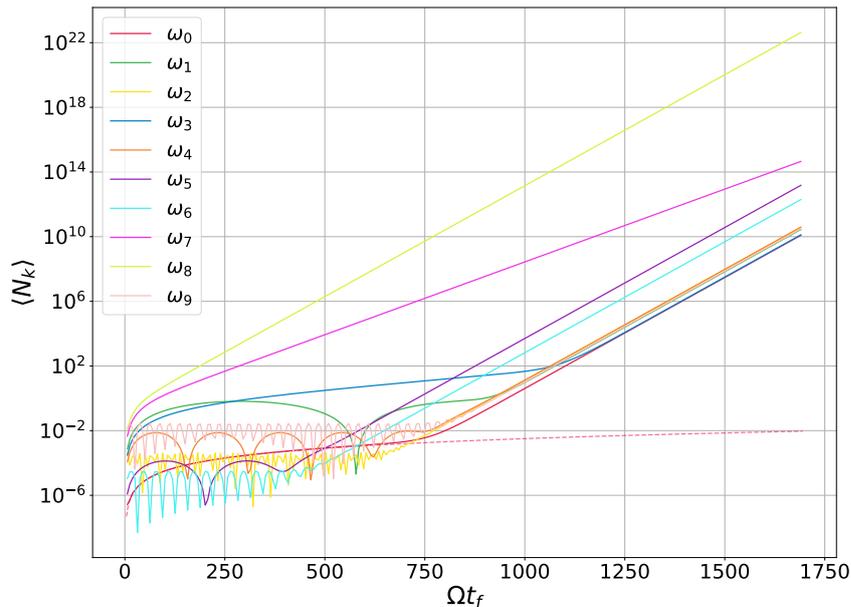


Figura 5.8. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_0$ al parámetro v .

La generación de fotones descontrolada observada en la Figura 5.8 no está asociada a la conductividad v , sino al modo de más baja energía ω_0 , que está presente en cavidades donde se satisface que $\omega_0 \chi^2 \gg v$. Perturbar el largo de la cavidad L con la misma frecuencia produce efectos descontrolados similares, con distinta tasa de producción de fotones. Además, es posible que la excitación de algunos modos ocurra antes (o después). A modo de ejemplo, en la Figura 5.9 se muestra lo que ocurre si en la misma configuración y con la misma frecuencia se perturba al parámetro L de la cavidad.

En el Capítulo 4 encontramos que no todos los parámetros, al ser perturbados de manera resonante, presentaban una generación exponencial de fotones. En particular, mostramos que el parámetro χ es el único que no lo hace. En la Figura 5.10 se ve que inicialmente la aproximación del MSA predice correctamente la cantidad y forma en la que se generan fotones, y las soluciones son válidas a tiempos largos. En este caso, en ningún momento vemos que se excitan otros modos. Debido a que los coeficientes asociados a las perturbaciones en χ son pequeños (respecto a los asociados a L y ΔL), cualquier otra perturbación en L o ΔL rompe las oscilaciones y produce fotones de manera exponencial (a menos que se tenga una condición como la de la Figura 5.7). Por esta misma razón es que la cantidad de fotones generados es típicamente más baja que la que puede obtenerse con otras perturbaciones.

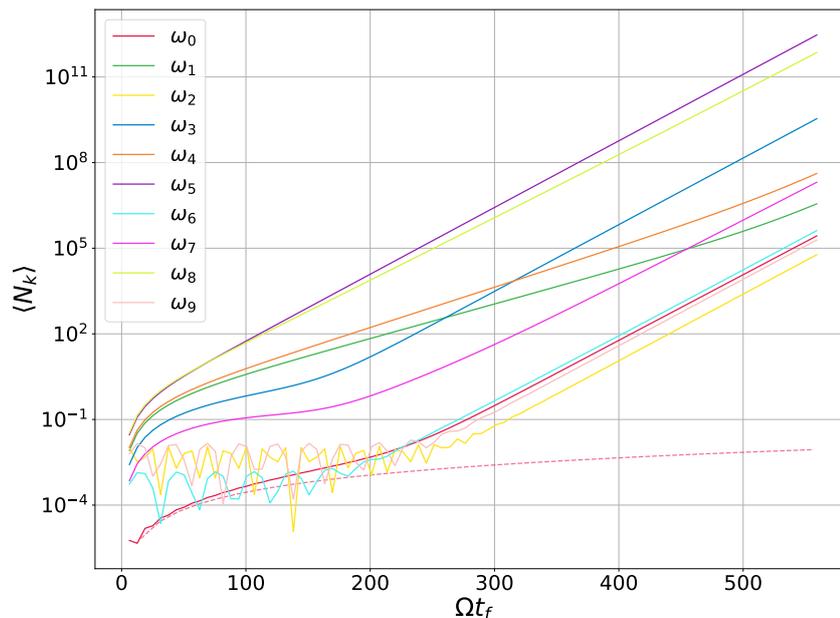


Figura 5.9. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_0$ al parámetro L .

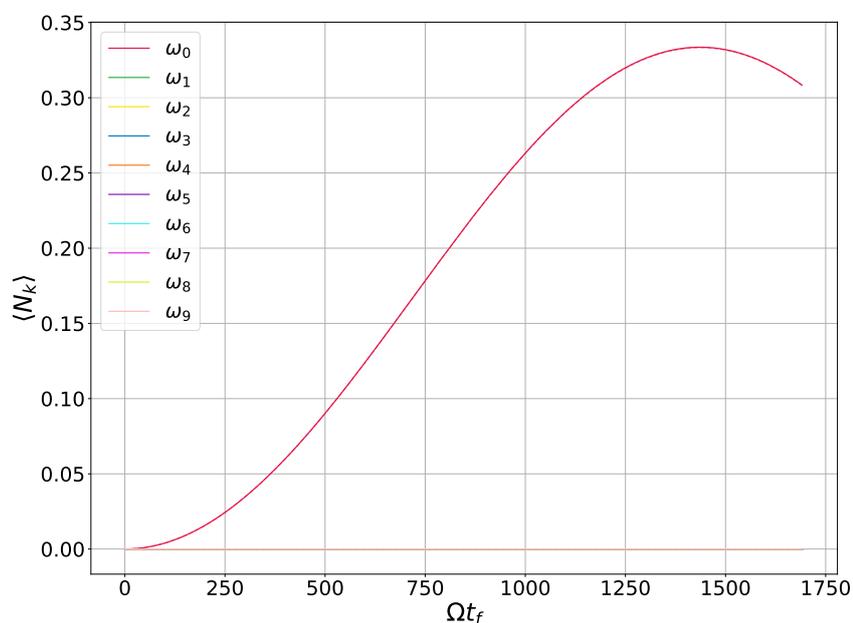


Figura 5.10. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_0$ al parámetro χ .

5.3. Suma de frecuencias

Otra forma de producir fotones de manera exponencial es a partir de acoplar dos modos con una suma de frecuencias. Este método, al generar simultáneamente fotones de distinta frecuencia, puede funcionar como una fuente de entrelazamiento [14].

Los acoplamientos fuera de la resonancia paramétrica no dependen más de los coeficientes η sino que dependen de los coeficientes β . Nuevamente, los parámetros que permiten una mayor tasa de producción de fotones son L y ΔL . Naturalmente, algunos acoplamientos serán más fuertes y será necesario elegir adecuadamente los modos a acoplar para maximizar las tasas de generación de fotones.

En la Figura 5.11, se acoplaron los modos ω_1 y ω_3 en una cavidad asimétrica. Como puede verse, la solución del MSA es válida a tiempos cortos, pero a tiempos largos ($\Omega t_f > 1000$) subestima las cantidades de fotones de los modos acoplados. El número de fotones generado es, sin embargo, muy bajo. En los demás modos observamos oscilaciones en las soluciones numéricas, a excepción del modo ω_8 (que igual mantiene $\langle N_8 \rangle < 0.1$).

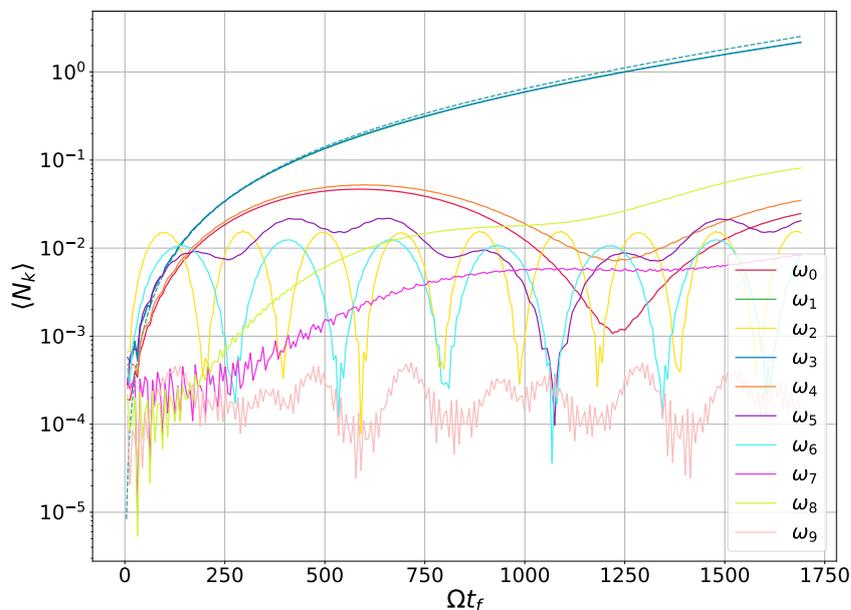


Figura 5.11. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω). En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = \omega_1 + \omega_3$ al parámetro ΔL .

5.4. Resta de frecuencias

La última condición de acoplamiento que permiten las soluciones del MSA es a través de una resta entre frecuencias de distintos modos. En este caso, no esperamos ver creación ni destrucción de fotones. En todos los casos, esperamos ver oscilaciones en el número de fotones de los modos acoplados: se crean en un modo a costas de destruirse en el otro.

Perturbar distintos parámetros o con distinta amplitud solamente cambia la frecuencia de las oscilaciones.

En la Figura 5.12 vemos el resultado de acoplar los modos ω_0 y ω_1 , introduciendo inicialmente en la cavidad 100 fotones de frecuencia ω_1 . Vemos que el MSA describe aproximadamente al sistema tanto a tiempos cortos como tiempos largos, pero no predice la aparición de fotones del modo ω_3 . Si bien el espectro es fuertemente no equiespaciado, algunas diferencias entre modos no consecutivos son similares. En este caso,

$$\frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_1 - \omega_0} - 1 = -0.034, \quad (5.27)$$

lo que explica por qué se puede estar acoplando el modo ω_3 . Además, vemos que la amplitud de las oscilaciones de N_3 se vuelve casi nula cuando no hay fotones de ω_1 y se maximiza en los picos de N_1 . Esto refuerza la idea de que se está acoplando el modo ω_3 al modo ω_1 .

Como mencionamos anteriormente, los resultados dependen fuertemente del espectro y la frecuencia elegida. Si en la misma configuración de la Figura 5.12 acoplamos el modo ω_3 con el modo ω_1 , vemos que se acoplan muchos otros modos (Figura 5.13). Esto es porque el sistema permite corrimientos respecto a las frecuencias de los acoplamientos, y podemos predecir de manera aproximada el comportamiento considerando un perfil uniforme de *detuning* en las soluciones del MSA como el de la Ecuación (5.25). Notamos que, sin embargo, no vale a tiempos largos ni predice de manera satisfactoria la cantidad de fotones en el modo ω_8 .

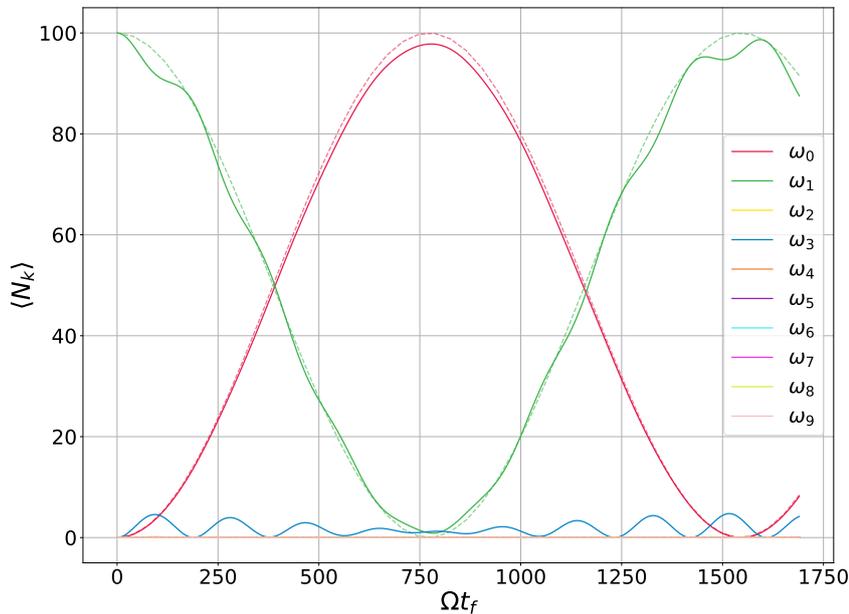


Figura 5.12. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω), para distintos acoplamientos en resta. En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = \omega_1 - \omega_0$ al parámetro ΔL .

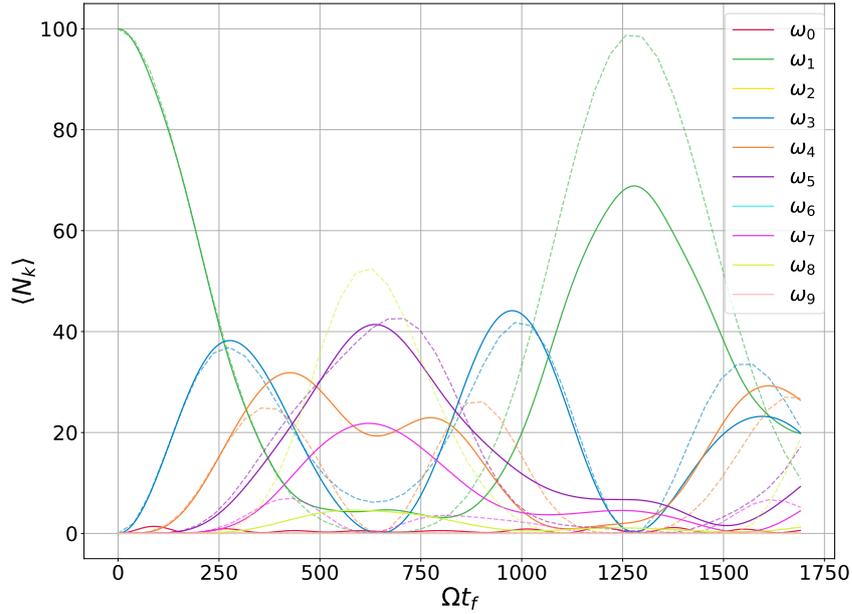


Figura 5.13. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω), para distintos acoplamientos en resta. En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Permitimos en las soluciones del MSA un pequeño *detuning* con un perfil uniforme como en la Ecuación (5.25). Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 5$, $v_0 L_0 = 200$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = \omega_3 - \omega_1$ al parámetro ΔL .

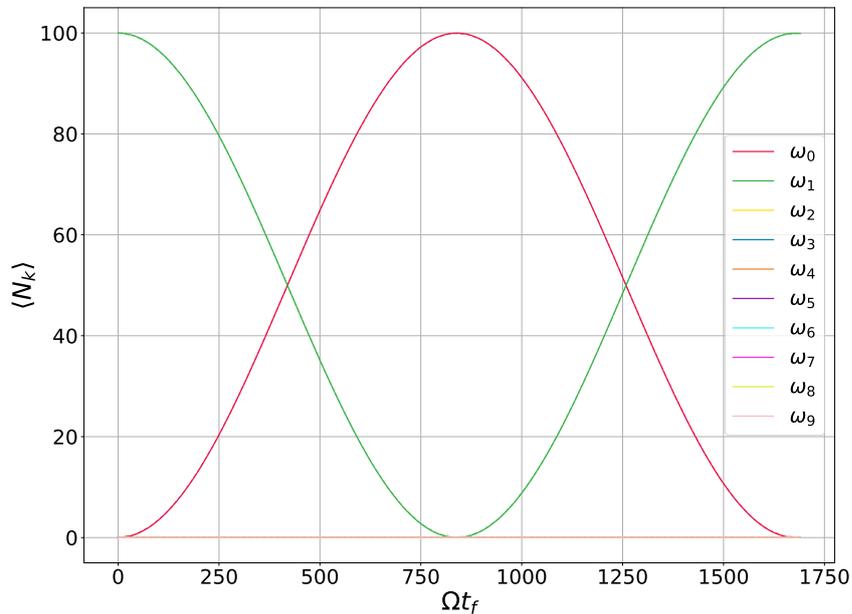


Figura 5.14. Valores de expectación de los operadores número de cada frecuencia en función del tiempo (adimensionalizado con Ω), para un acoplamiento en resta. En línea continua, resultados de una simulación numérica; en línea discontinua, los de la aproximación del *Multiple Scale Analysis*. Se consideraron únicamente los primeros $N = 10$ modos, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = \omega_1 - \omega_0$ al parámetro ΔL .

Pero siempre podemos encontrar configuraciones o frecuencias para las que las oscilaciones sean armónicas (no se acoplan otros modos), como se ve en la Figura 5.14. En este caso, el MSA predice perfectamente y a tiempos arbitrariamente largos el número de fotones de los dos modos acoplados (y de todos los demás).

5.5. Detuning

Si se deseara realizar experimentos para observar el Efecto Casimir Dinámico en una cavidad doble (o, como se discutirá en el Capítulo 6, una simulación cuántica del Efecto Casimir Dinámico en circuitos cuánticos) será importante conocer la sensibilidad del sistema a corrimientos en la frecuencia de *driving* externo. Estudiamos el efecto del *detuning* en el número de fotones producidos en resonancia paramétrica al perturbar ΔL con $\Omega = 2\omega_3 + \Delta\Omega$.

La Figura 5.15 muestra el número de fotones en función del tiempo para distintos valores de *detuning*, en la situación en la que se perturba ΔL en resonancia paramétrica. Podemos ver que algunos valores de *detuning* producen más fotones que si se tiene $\Omega = \Omega_0$, y que hay una asimetría que favorece la generación de fotones para $\Delta\Omega > 0$. Como es esperable, la Figura 5.15b muestra que para un *detuning* suficientemente alto, deja de observarse una producción exponencial de fotones. En este caso, ocurre para un *detuning* positivo del 0.6% o uno negativo del 0.3%.

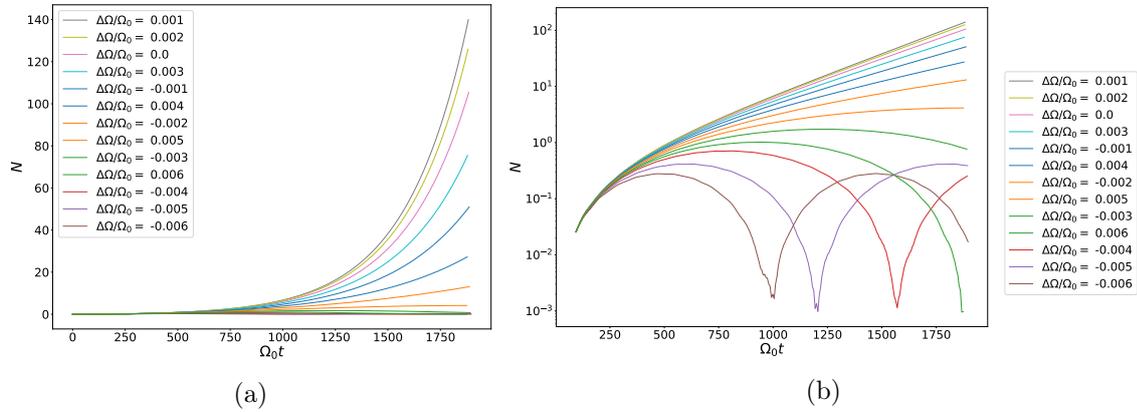


Figura 5.15. Valores de expectación del operador número de fotones de frecuencia ω_3 en función del tiempo (adimensionalizado con Ω_0), en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3 + \Delta\Omega$ al parámetro ΔL . Las distintas curvas se corresponden con distintos valores de *detuning* $\Delta\Omega$, y las etiquetas están ordenadas de la misma manera en la que aparecen en los respectivos gráficos para facilitar su visualización. La Figura (b) muestra la misma información que la (a), pero con el eje vertical en escala logarítmica.

Comparamos las curvas de la Figura 5.15a con las soluciones esperadas de la aproximación del MSA, normalizando el número de fotones respecto al observado en el MSA; las curvas normalizadas se muestran en la Figura 5.16. Vemos que la curva con *detuning* del 0.1% coincide casi perfectamente con la solución del MSA, incluso a tiempos largos. La curva con $\Delta\Omega = 0$ cae respecto a los valores esperados del MSA, como ya vimos en

secciones anteriores de este Capítulo.

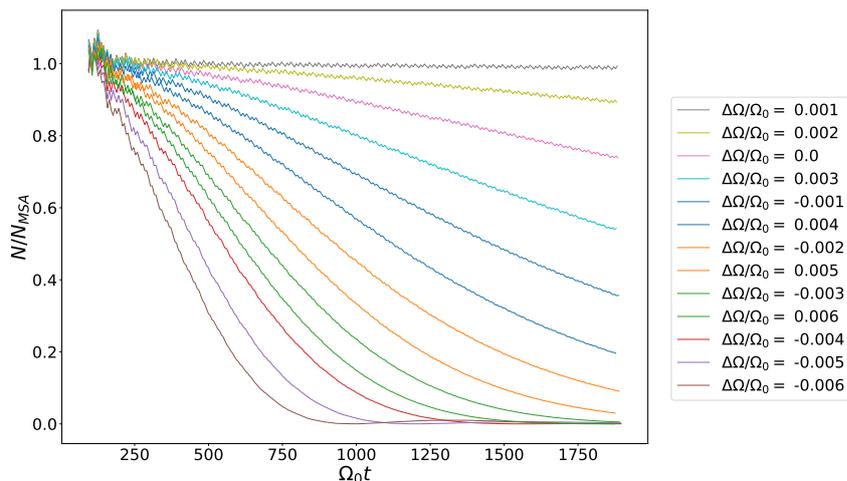


Figura 5.16. Curvas de la Figura 5.15a, normalizadas respecto al número de fotones esperado del MSA.

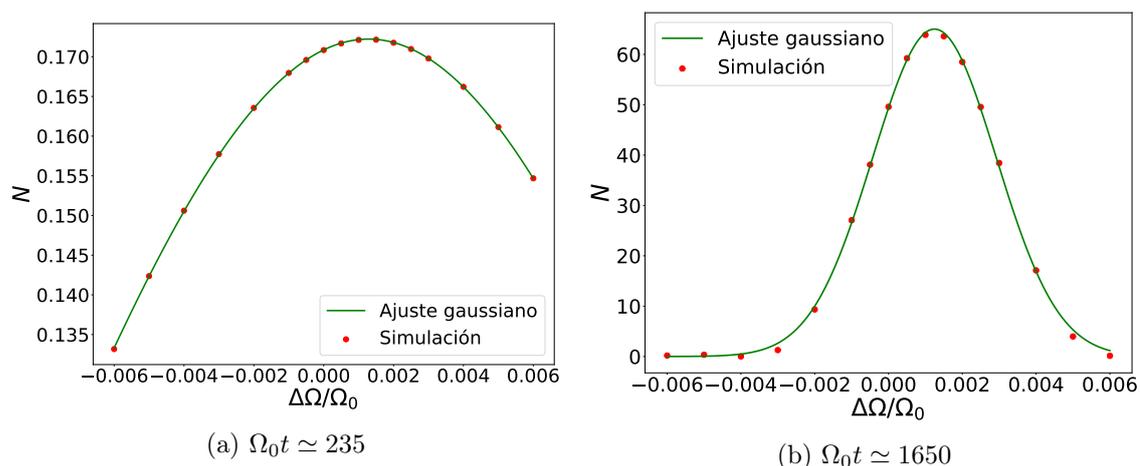


Figura 5.17. Valores de expectación del operador número de fotones de frecuencia ω_3 en función del *detuning*, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3 + \Delta\Omega$ al parámetro ΔL . En (a) se muestra un perfil típico a tiempos cortos, y en (b) uno a tiempos largos. En línea continua verde, ajustes gaussianos de los datos simulados.

En la Figura 5.16 vemos que algunas curvas se alejan más rápido de las soluciones del MSA que otras, y de manera no lineal. Si graficamos el número de fotones de cada modo en función de $\Delta\Omega/\Omega_0$ a tiempos cortos (5.17a) y tiempos largos (5.17b) podemos encontrar dos perfiles distintos. Ambos tienen un centro desplazado hacia valores positivos de $\Delta\Omega$, pero a tiempos cortos el ancho del perfil es significativamente mayor. Es posible ver que este ancho decrece con el tiempo.

A cada tiempo ajustamos los perfiles por curvas gaussianas para extraer los valores de ancho a mitad de altura (FWHM) γ y centro $\bar{\Omega}$ de la campana. Los resultados se muestran en las Figuras 5.18a y 5.18b, respectivamente. En la Figura 5.18a vemos cómo disminuye el ancho de las campanas con el tiempo. Esto es esperable teniendo en cuenta

la generación exponencial de fotones y que inicialmente la tasa dependía del *detuning*. Propusimos ajustar el ancho γ con una función decreciente de la forma:

$$\gamma(t) = \frac{A}{t - B} + \gamma_\infty, \quad (5.28)$$

y se obtuvo un ancho asintótico para este caso de $\gamma_\infty = 0.0015$.

Por otro lado, en la Figura 5.18b, podemos notar que $\bar{\Omega}$ se mantiene aproximadamente constante para todo tiempo, con fluctuaciones de más amplitud a tiempos cortos. Vemos que además se mantiene cerca de 0.001, como habíamos notado en la Figura 5.15

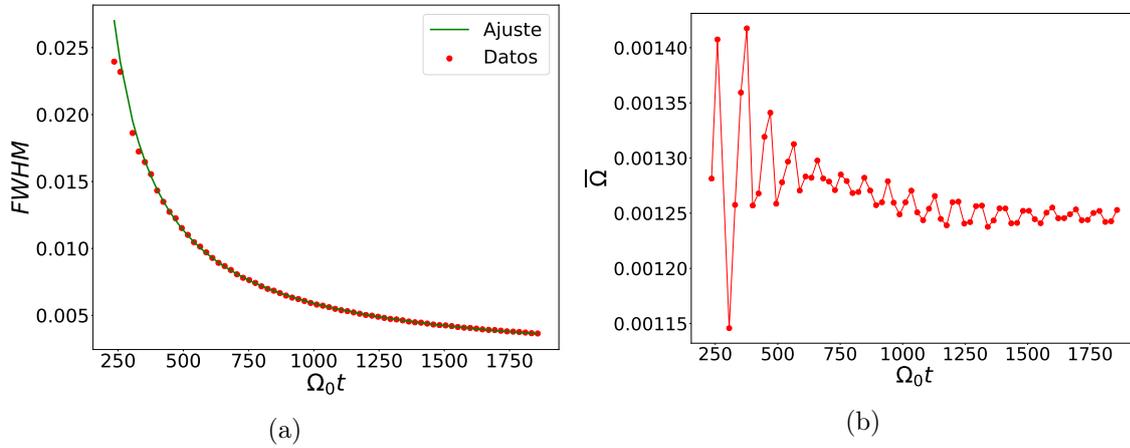


Figura 5.18. (a) anchos a mitad de altura y (b) centros, de las campanas gaussianas que resultan de ajustar los perfiles de *detuning* en función del tiempo. Se descartaron los primeros puntos temporales por ser muy ruidosos. En (a) se realizó un ajuste según la Ecuación (5.28).

La Figura 5.19 presenta otra forma de visualizar la información anterior. Vemos que a tiempos bajos el perfil es uniforme en la región de *detuning* graficada, lo que sugiere un ancho $\gamma > 0.01$. A medida que miramos a tiempos más largos, se define una región donde se observa mayor producción de fotones, y el contraste aumenta al aumentar el tiempo (se angosta la campana de *detuning*, como muestra la Figura 5.18a). La campana está, como discutimos en la Figura 5.18b, centrada en un *detuning* positivo cercano a $\Delta\Omega/\Omega_0 = 0.001$. Vemos además regiones oscuras para $\Delta\Omega/\Omega_0 \leq 0.003$: estas muestran que no hay una generación de fotones exponencial sino que las soluciones oscilan en el tiempo. Las porciones oscuras marcan el período de las oscilaciones: más corto para *detunings* más grandes.

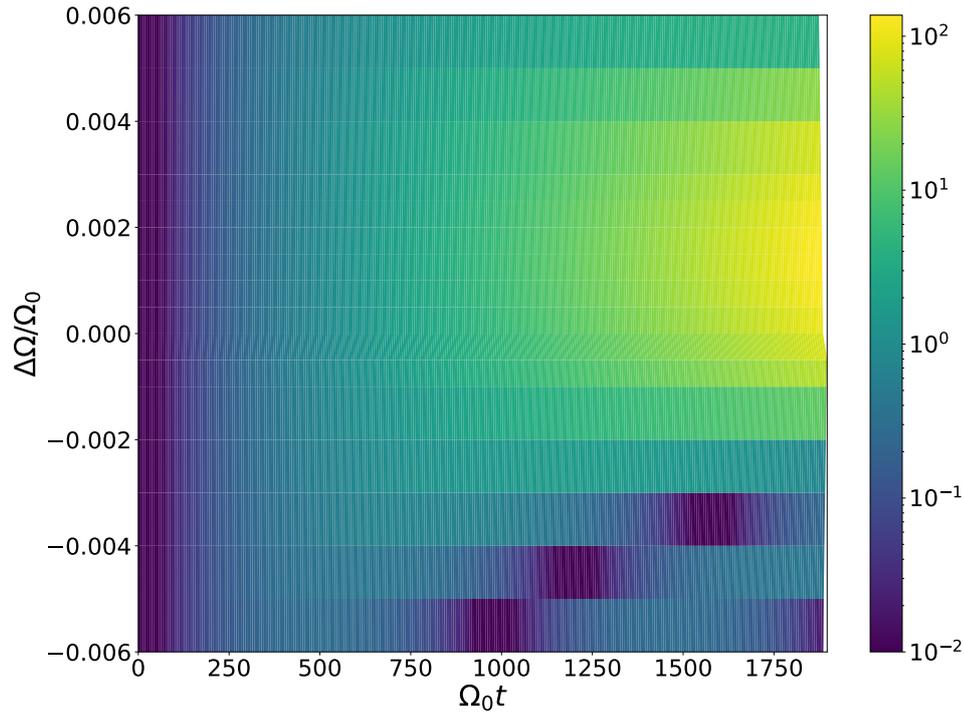


Figura 5.19. Número de fotones (en colores) en función del tiempo (adimensionalizado con Ω_0) y el *detuning*, en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$. Se perturbó con $\epsilon = 0.01$ y $\Omega = 2\omega_3 + \Delta\Omega$ al parámetro ΔL .

5.6. Amplitud de las perturbaciones

Experimentalmente no solamente es relevante conocer la sensibilidad del sistema ante corrimientos en las frecuencias de *driving* deseadas, sino también entender cómo influye en la generación de fotones por Efecto Casimir Dinámico la amplitud de las perturbaciones.

En resonancia paramétrica, se espera a partir de las soluciones del MSA una generación exponencial en la mayoría de situaciones (cuando no se perturba χ ni se vuelven nulas las tasas). Supongamos que inicialmente no hay fotones en la cavidad y se perturba al menos un parámetro con $\Omega = 2\omega_l$ (ninguno de ellos χ). A partir de la Ecuación 4.41, el número esperado de fotones será:

$$N_l(\epsilon, t) = \sinh^2(\epsilon\gamma t), \quad (5.29)$$

$$\gamma = \left| \frac{1}{2} \sum_{r \neq \dot{\chi}} \xi_r r_0 \eta_l^{(r)} \right|. \quad (5.30)$$

Esperamos ver entonces un crecimiento exponencial del número de fotones a tiempos fijos y variando ϵ (amplitud de las perturbaciones). Efectivamente observamos este comportamiento, como se muestra en la Figura 5.20. A tiempos cortos (para $\epsilon = 0.01$), la Ecuación (5.30) modela de manera adecuada el comportamiento para el rango de ϵ considerado, mientras que a tiempos largos la simulación numérica queda por debajo de lo esperado para los ϵ más grandes. Si dejamos pasar más tiempo, eventualmente ocurrirá lo

mismo con los valores más pequeños de ϵ .

En la Figura 5.21 vemos el número de fotones en función del tiempo para cada ϵ considerado. Vemos que las curvas tienen formas similares, y que al aumentar ϵ el número de fotones a tiempos iguales aumenta de manera exponencial. El quiebre de las curvas a tiempos cortos se debe a que para la simulación se discretizó el tiempo de manera lineal, pero resulta conveniente graficar en escala logarítmica.

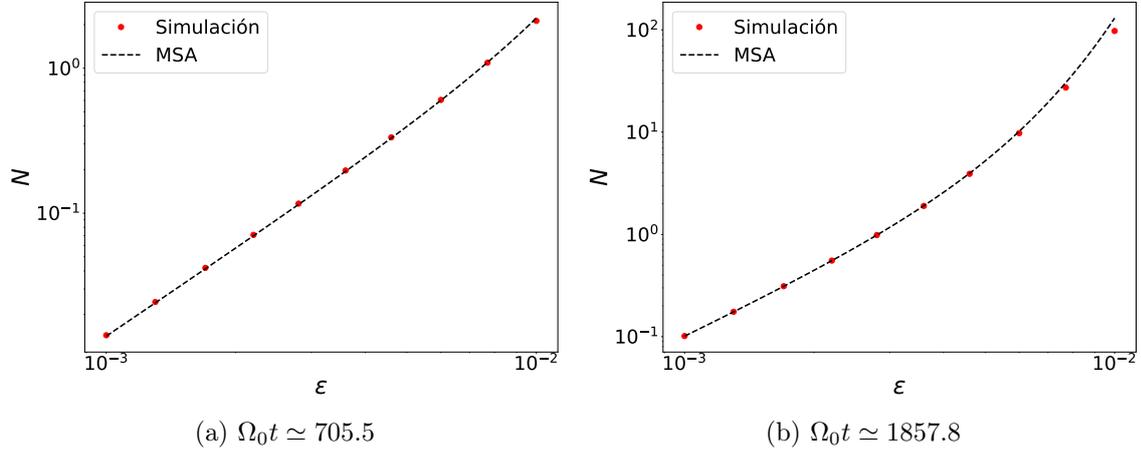


Figura 5.20. Número de fotones producidos en la cavidad doble en función de la amplitud de las perturbaciones, a tiempos cortos en (a) y a tiempos largos en (b). En línea punteada, el resultado esperado según la Ecuación (5.30). Se perturbó con $\Omega_0 = 2\omega_3$ al parámetro ΔL en una cavidad con $L_0 = 1$, $\Delta L_0/L_0 = 0.44$, $\chi_0/L_0 = 0.5$, $v_0 L_0 = 0$.

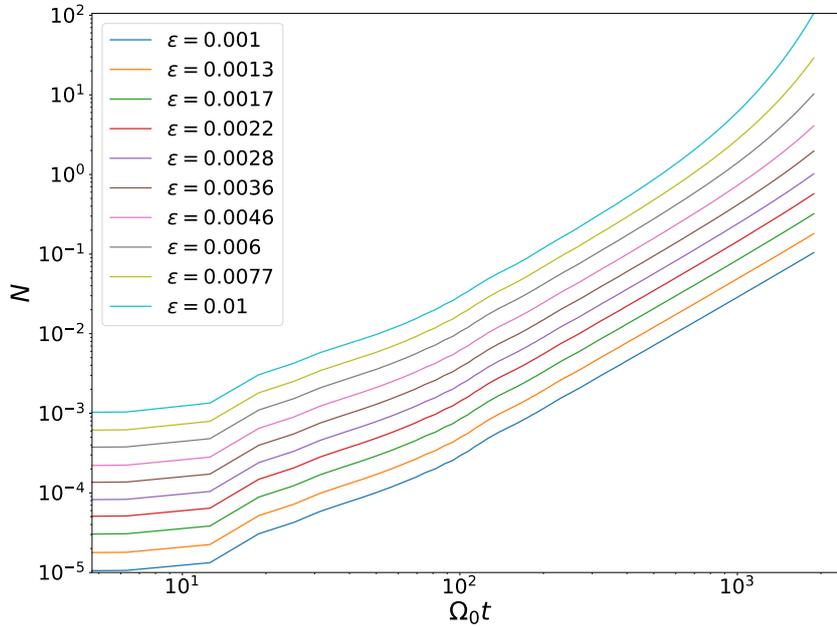


Figura 5.21. Número de fotones en función de la fase acumulada $\Omega_0 t$ para distintas amplitudes de las perturbaciones. La cavidad es la misma que la de la Figura 5.20.

SIMULACIONES CUÁNTICAS EN CIRCUITOS SUPERCONDUCTORES

Si experimentalmente quisiéramos generar fotones mediante el Efecto Casimir Dinámico en una cavidad doble como la que estudiamos, deberíamos tener osciladores mecánicos operando a frecuencias de GHz para perturbar L y ΔL . Considerando que una cavidad típica puede tener un tamaño de 1 cm, la amplitud de las perturbaciones es del orden del mm. Mantener un par de espejos paralelos bajo estas condiciones es actualmente irrealizable en un laboratorio [34]. Con el fin de obtener alguna medición experimental del Efecto Casimir Dinámico, se han explorado distintas propuestas como alternativa al experimento mecánico original discutido en [5, 35, 36, 37, 38]. Estas propuestas consisten en modular las condiciones de contorno con movimientos efectivos amplificando en forma paramétrica las fluctuaciones de vacío (Efecto Casimir Dinámico Paramétrico) [11, 12, 25, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45].

En los últimos años se han realizado, de manera exitosa, experimentos en otras arquitecturas: circuitos superconductores [12, 42]. Si bien no es lo mismo tener un circuito cuántico o una cavidad, es posible encontrar circuitos con condiciones de contorno y ecuaciones dinámicas completamente análogas a las de una cavidad [10, 11, 43]. Por esta razón, decimos que tales circuitos permiten realizar simulaciones cuánticas del Efecto Casimir Dinámico. En este Capítulo proponemos un posible circuito para simular las distintas situaciones discutidas en Capítulos anteriores.

Las cavidades son fácilmente reemplazables por guías de onda o líneas de transmisión, con la única diferencia de que la velocidad de propagación de las ondas será inferior a aquella en una cavidad en vacío. La dificultad reside en encontrar elementos que permitan imponer condiciones de contorno dependientes del tiempo. En este trabajo proponemos para este fin utilizar dc-SQUIDS (*Superconducting QUantum Interference Devices*), que permiten modular los parámetros del sistema a través de variar flujos magnéticos en ellos.

Una juntura de Josephson puede pensarse como equivalente a un componente no lineal con energía inductiva y una capacitancia fija C_J en paralelo. Un dc-SQUID consiste en dos junturas de Josephson, y por lo tanto tendrá una capacitancia equivalente igual al doble de la capacitancia de cada juntura (asumiendo que son idénticas). Resulta conveniente definir el flujo eléctrico:

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^t V(x, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (6.1)$$

donde V es el potencial eléctrico. La densidad Lagrangiana de un dc-SQUID puede escri-

birse como [46]:

$$\mathcal{L}_{dc-SQUID} = \frac{1}{2}(2C_J)(\partial_t\phi)^2 + E_J(\Phi) \cos\left(2\pi\frac{\phi}{\tilde{\Phi}_0}\right) + I\phi, \quad (6.2)$$

donde ϕ es la diferencia de flujo entre los extremos, Φ es el flujo magnético externo, e I es la corriente eléctrica que circula por el dc-SQUID; y $\tilde{\Phi}_0 = (2e)^{-1}$ es el cuanto de flujo. La energía E_J depende del flujo magnético externo según [46]:

$$E_J(\Phi) = 2I_C\frac{\tilde{\Phi}_0}{2\pi} \cos\left(\pi\frac{\Phi}{\tilde{\Phi}_0}\right) = E_J(0) \cos\left(\pi\frac{\Phi}{\tilde{\Phi}_0}\right), \quad (6.3)$$

donde I_C es la corriente crítica de la juntura.

Considerando $\pi\phi \ll \tilde{\Phi}_0$ y una corriente I despreciable, podemos reescribir la densidad Lagrangiana de la Ecuación (6.2) a menos de una constante expandiendo el coseno a orden cuadrático:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{dc-SQUID} = \frac{1}{2}(2C_J)(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}\frac{4\pi^2}{\tilde{\Phi}_0^2}E_J(0) \cos\left(\pi\frac{\Phi}{\tilde{\Phi}_0}\right)\phi^2, \quad (6.4)$$

donde podemos ver que la densidad Lagrangiana es cuadrática en ϕ y en $\partial_t\phi$. Comparando la densidad Lagrangiana de la Ecuación (6.4) con el de la Ecuación (2.1), vemos que la capacitancia es análoga a la permitividad eléctrica, mientras que la inductancia no lineal es análoga a la conductividad.

Para obtener un sistema equivalente al de la cavidad doble, proponemos el circuito que se muestra en la Figura 6.1. El mismo consiste en un dc-SQUID central (en $x = 0$) acoplado a dos líneas de transmisión que terminan en otro dc-SQUID. Sobre cada dc-SQUID se aplica un flujo magnético externo, y en paralelo al dc-SQUID central se agrega un capacitor variable. La función de los SQUIDS laterales es la de funcionar como un espejo efectivo de posición variable. La función del SQUID central es controlar la conductividad de la membrana análoga (a partir del flujo magnético) y la susceptibilidad (a partir de la capacitancia variable).

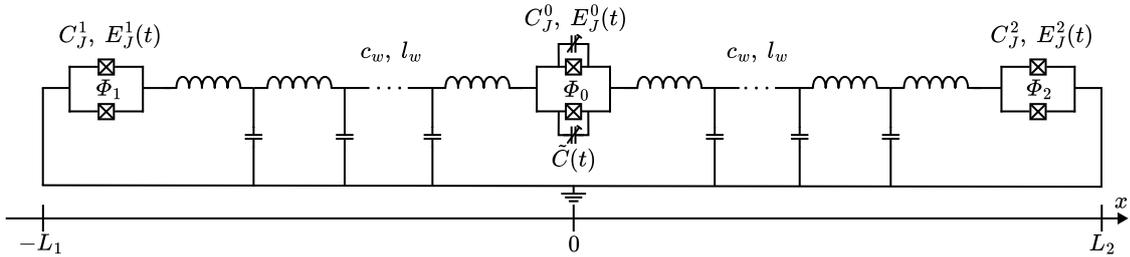


Figura 6.1. Esquema del circuito propuesto para realizar simulaciones cuánticas del Efecto Casimir Dinámico. En cada extremo, un dc-SQUID modula el largo efectivo de cada cavidad (línea de transmisión) a partir de los flujos magnéticos externos $\Phi_{1,2}$; el dc-SQUID central permite modular de manera efectiva la conductividad v de la membrana a partir del flujo magnético externo Φ_0 y la susceptibilidad χ de la membrana a partir de los capacitores variables \tilde{C} . c_w y l_w son las capacitancia e inductancia por unidad de longitud de las líneas de transmisión acopladas a los SQUIDS. Cada juntura de Josephson (dos por cada SQUID) tiene asociada una capacitancia equivalente $C_J^{0,1,2}$ y una energía de Josephson $E_J^{0,1,2}$.

La velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en las líneas de transmisión es:

$$v_w = \frac{1}{\sqrt{l_w c_w}}, \quad (6.5)$$

donde l_w y c_w son la inductancia y capacitancia de las líneas de transmisión por unidad de longitud. Elegimos estos parámetros idénticos para ambas líneas de transmisión. Además, son constantes: no dependen del tiempo ni la posición.

Las líneas de transmisión cumplen el rol de las cavidades, y entonces la densidad Lagrangiana de un sistema como el de la Figura 6.1 (en el continuo) es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[C(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{l_w} (\partial_x \phi)^2 \right] - \frac{E}{2\varphi_0} \phi^2, \quad (6.6)$$

donde

$$\varphi_0 = \frac{\tilde{\Phi}_0}{2\pi}, \quad (6.7)$$

$$C(t) = c_w + 2 \left(C_J^0 + \tilde{C}(t) \right) \delta(x) + 2C_J^1 \delta(x + L_1) + 2C_J^2 \delta(x - L_2), \quad (6.8)$$

$$E(t) = E_J^0 \cos\left(\frac{\Phi_0}{2\varphi_0}\right) \delta(x) + E_J^1 \cos\left(\frac{\Phi_1}{2\varphi_0}\right) \delta(x + L_1) + E_J^2 \cos\left(\frac{\Phi_2}{2\varphi_0}\right) \delta(x - L_2). \quad (6.9)$$

En las expresiones anteriores, $E_J^i = E_J^i(0)$. De ahora en más mantenemos esta notación simplificada, de manera que E_J^i es una constante al igual que C_J^i .

La ecuación de Euler-Lagrange para ϕ considerando la Ecuación (6.6) es:

$$C \partial_t^2 \phi + \dot{C} \partial_t \phi - \frac{1}{l_w} \partial_x^2 \phi + \frac{E}{\varphi_0} \phi = 0. \quad (6.10)$$

Si nos restringimos a las líneas de transmisión entonces $C = c_w$, $\dot{C} = 0$, $E = 0$ y la Ecuación (6.10) se simplifica a una ecuación de ondas que se propagan a $v_w < 1$:

$$\partial_t^2 \phi - v_w^2 \partial_x^2 \phi = 0, \quad (6.11)$$

que es como esperamos análoga a la Ecuación (2.4).

Por otro lado, si nos restringimos al SQUID central y elegimos $C_J^0 = 0$ por simplicidad (descartando los términos en $x = \mp L_{1,2}$), vemos que aparecen otros términos y la ecuación de Euler-Lagrange impone que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_w^2} \left(1 + \frac{2\tilde{C}(t)}{c_w} \delta(x) \right) \partial_t^2 \phi(t, x) + \frac{1}{v_w^2} \frac{2\dot{\tilde{C}}(t)}{c_w} \delta(x) \partial_t \phi(t, x) - \partial_x^2 \phi + \\ + \frac{1}{v_w^2} \frac{E_J^0}{c_w \varphi_0} \cos\left(\frac{\Phi_0}{2\varphi_0}\right) \delta(x) \phi(t, x) = 0, \end{aligned} \quad (6.12)$$

e integrando esta ecuación se obtiene la condición de contorno del salto discreto en la derivada espacial del campo ϕ . Vemos que esta expresión es completamente análoga a la de la Ecuación (2.8). Esto sugiere que en este problema la capacitancia total cumple el rol

de la permitividad eléctrica en la cavidad, la capacitancia variable el de la susceptibilidad eléctrica de la membrana y la energía inductiva el de la conductividad eléctrica de la membrana:

$$\chi(t) \longleftrightarrow \frac{1}{v_w^2} \frac{2\tilde{C}(t)}{c_w}, \quad (6.13)$$

$$v(t) \longleftrightarrow \frac{1}{v_w^2} \frac{E_J^0}{c_w \varphi_0} \cos\left(\frac{\Phi_0}{2\varphi_0}\right). \quad (6.14)$$

Las relaciones anteriores muestran que el dc-SQUID central presenta una manera efectiva de controlar los parámetros de la membrana dieléctrica de la cavidad doble.

Para los SQUIDS laterales ubicados en $x = \mp L_{1,2}$ y si además elegimos $E_J^1 = E_J^2 = E_J$ y $C_J^1 = C_J^2 = 0$, se satisface (integrando la Ecuación (6.6)) que:

$$\pm \partial_x \phi(t, \mp L_{1,2}) = \frac{1}{v_w^2} \partial_t^2 \phi(t, \mp L_{1,2}) + \frac{1}{v_w^2} \frac{E_J}{c_w \varphi_0} \cos\left(\frac{\Phi_{1,2}}{2\varphi_0}\right) \phi(t, \mp L_{1,2}). \quad (6.15)$$

Si suponemos además que $E_J \gg c_w \varphi_0$, podemos despreciar el primero de los términos y escribir:

$$\partial_x \phi(t, \mp L_{1,2}) \mp \delta d_{1,2} \phi(t, \mp L_{1,2}) = 0, \quad (6.16)$$

con

$$\delta d_{1,2} = \frac{1}{v_w^2} \frac{E_J}{c_w \varphi_0} \cos\left(\frac{\Phi_{1,2}}{2\varphi_0}\right). \quad (6.17)$$

La condición de contorno de la Ecuación (6.16) es equivalente a una condición de contorno de Dirichlet desplazada respecto a $\mp L_{1,2}$ en $\mp \delta d_{1,2}$ [14]:

$$\phi(t, \mp (L_{1,2} + \delta d_{1,2})) = 0, \quad (6.18)$$

por lo que los SQUIDS laterales permiten variar las longitudes efectivas de las cavidades. En este caso,

$$L_1(t) \longleftrightarrow L_1 + \frac{1}{v_w^2} \frac{E_J}{c_w \varphi_0} \cos\left(\frac{\Phi_1(t)}{2\varphi_0}\right), \quad (6.19)$$

$$L_2(t) \longleftrightarrow L_2 + \frac{1}{v_w^2} \frac{E_J}{c_w \varphi_0} \cos\left(\frac{\Phi_2(t)}{2\varphi_0}\right), \quad (6.20)$$

Si $\Phi_1(t) = \Phi_2(t) = \Phi(t)$ (flujos en fase), la asimetría de la cavidad permanece constante e igual al valor inicial $\Delta L = L_1 - L_2$, mientras que la longitud total de la cavidad puede controlarse:

$$L(t) = L_1 + L_2 + \frac{2}{v_w^2} \frac{E_J}{c_w \varphi_0} \cos\left(\frac{\Phi(t)}{2\varphi_0}\right). \quad (6.21)$$

Si en cambio $\Phi_1(t) = \Phi_2(t) + 2\pi\varphi_0 = \Phi(t)$ (flujos en contrafase), entonces la longitud total de la cavidad permanece constante e igual a $L_1 + L_2$, mientras que la asimetría de

la cavidad puede variarse según:

$$\Delta L(t) = L_1 - L_2 + \frac{2}{v_w^2} \frac{E_J}{c_w \varphi_0} \cos\left(\frac{\Phi(t)}{2\varphi_0}\right). \quad (6.22)$$

En configuraciones arbitrarias donde los flujos externos tengan distinta amplitud o fase, se producirá una combinación de los efectos anteriores y $L(t)$, $\Delta L(t)$ variarán en el tiempo (y podrán ser controladas de manera independiente).

Hemos mostrado cómo los tres flujos externos $\Phi_{0,1,2}$ inducidos en los dc-SQUIDS y las capacitancias variables \tilde{C} permiten controlar los cuatro parámetros de las cavidades dobles del Capítulo 2. Variar campos magnéticos (y por ende flujos magnéticos) puede realizarse a frecuencias más altas que aquellas de los osciladores mecánicos actuales, y la alta sensibilidad de los dc-SQUIDS a los flujos magnéticos permite controlar el sistema con campos magnéticos pequeños (cuan pequeños dependerá directamente del área del SQUID). Lo que propone un desafío más difícil es el control de las capacitancias variables para la variación efectiva de χ . Actualmente existen diversos métodos para variar capacitancias con control externo, como por ejemplo aquellos que permiten controlar sistemas microelectromecánicos (MEMS) [47]. Trabajos recientes [48, 49] proponen capacitancias variables discretas empleando circuitos cuánticos, aprovechando efectos topológicos de las junturas de Josephson. Esta última opción podría ser más adecuada para nuestro circuito, considerando que emplea capas de materiales superconductores y aislantes, al igual que las junturas de los SQUIDS.

CONCLUSIONES

En este trabajo estudiamos la generación de fotones por el Efecto Casimir Dinámico en una cavidad doble con una membrana dieléctrica en su interior y dos paredes perfectamente conductoras. Además, presentamos un circuito cuántico superconductor que permitiría realizar simulaciones cuánticas del Efecto Casimir Dinámico en un laboratorio. Consideramos cuatro parámetros para definir unívocamente a la cavidad doble: las longitudes de las cavidades acopladas por la membrana dieléctrica (L_1 , L_2), y la susceptibilidad (χ) y conductividad (v) eléctricas de la membrana.

Comenzamos cuantizando el campo escalar dentro de la cavidad y describiendo las ecuaciones dinámicas y las condiciones de contorno del problema. Para ello, dividimos al problema temporalmente en tres partes. Una primera región *in* estática antes de perturbar cualquier parámetro de la cavidad, seguida por una región dinámica en donde se perturbó algún subconjunto de parámetros del sistema durante un tiempo finito. Por último, una vez terminada la perturbación y devuelto el sistema a las condiciones iniciales, consideramos una región estática *out*. Encontramos el espectro de autofrecuencias en todos los casos, y una base de soluciones en las regiones estáticas. Describimos también el sistema lineal acoplado de ecuaciones diferenciales cuya solución permite calcular el valor de expectación del operador número en la región *out*, una vez finalizadas las perturbaciones al sistema.

Analizamos en profundidad y en diversas configuraciones generales el espectro de autofrecuencias de la cavidad doble. Consideramos por separado el caso de un espectro de autofrecuencias reales, que se obtiene siempre que no se perturbe la susceptibilidad eléctrica, del caso en el cual las autofrecuencias adquieren una parte imaginaria no nula. Consideramos el caso en el que el espectro es perfectamente equiespaciado (cuando la membrana es transparente, i.e. $\chi/L = 0$, $vL = 0$), y a partir de allí aumentamos χ o v para obtener espectros no equidistantes. Encontramos que aumentar χ permite la existencia de un modo no localizado y de frecuencia arbitrariamente baja, que está prohibido cuando χ es nulo o pequeño comparado con la conductividad v . Verificamos numérica- y analíticamente que los casos asintóticos $\chi \rightarrow \infty$ y $v \rightarrow \infty$ son equivalentes: el modo de frecuencia baja desaparece (la frecuencia se vuelve nula) y ambos resultados son idénticos a los que se obtendría si en lugar de una membrana dieléctrica se colocara un tercer espejo perfectamente conductor. Estudiamos el comportamiento de las bandas de energía en función de los cuatro parámetros del sistema, y encontramos que dichas bandas nunca se intersecan. Al aumentar v , los niveles de energía de la cavidad aumentaban, mientras que lo opuesto ocurría al aumentar χ . Observamos y hallamos una frecuencia crítica ω_c que no es una autofrecuencia, pero permite distinguir entre las regiones del espectro donde

domina χ y aquellas en las que domina v . En ω_c , las curvas de los niveles de energía en función de la asimetría de la cavidad $\Delta L = L_1 - L_2$ cambian de concavidad, mientras que al graficarlas en función de χ y v notamos saltos bruscos de hasta $-2\pi/L$ y $+2\pi/L$, respectivamente. Hallamos además una aproximación analítica para el modo de más baja energía, cuando la cavidad es dominada a bajas energías por la susceptibilidad eléctrica. Por último, consideramos el caso en el que el espectro se vuelve complejo y encontramos que las autofrecuencias adquieren una componente imaginaria lineal en $\dot{\chi}$ y que su componente real cambia cuadráticamente en $\dot{\chi}$, para perturbaciones de pequeña amplitud en χ .

Estudiamos las autofunciones de la cavidad doble en tres situaciones marcadamente distintas: una cavidad perfectamente simétrica ($\Delta L/L = 0$), una cavidad levemente asimétrica ($\Delta L/L = 0.05$) y una fuertemente asimétrica ($\Delta L/L = 0.6$). En la primera cavidad, como es esperable debido a la simetría del problema ($x \leftrightarrow -x$), las autofunciones estaban completamente deslocalizadas. Al romper esta simetría, a excepción de algunos modos, todos se localizaban a un lado u otro de la membrana. Al ser la asimetría baja en el segundo caso, la densidad de modos localizados en cada cavidad era igual, y los modos localizados se alternaban con pequeñas diferencias en la energía. En la cavidad muy asimétrica, la densidad de modos localizados era más alta en la cavidad más larga, debido a que localizar modos en una cavidad más pequeña requiere saltos de energía más grandes. Definimos y graficamos para toda configuración el grado de localización de las autofunciones, y encontramos las regiones que maximizan la localización.

Las soluciones del sistema lineal acoplado no admiten soluciones analíticas. Con el fin de obtener aproximaciones analíticas, definimos una segunda escala temporal más lenta y utilizamos el método del *Multiple Scale Analysis*. Restringimos para ello las posibles perturbaciones a los parámetros a funciones senoidales con amplitudes del mismo orden (relevante al variar más de un parámetro). El *Multiple Scale Analysis* presenta una ventaja sobre la solución perturbativa: es válida a tiempos más largos, que satisfacen $\epsilon^2 \Omega t \ll 1$; donde ϵ es el orden de las perturbaciones y Ω la frecuencia más alta de las perturbaciones. Bajo esta aproximación, solamente se obtienen soluciones no triviales en los casos donde alguna frecuencia externa satisface $\Omega = |\omega_i \pm \omega_j|$, donde $\omega_{i,j}$ son autofrecuencias no necesariamente distintas de la cavidad. Encontramos que, en resonancia paramétrica ($\Omega = 2\omega_i$), el número de fotones de frecuencia ω_i aumenta exponencialmente en el tiempo. Calculamos analíticamente las tasas de generación de fotones, y encontramos que las amplitudes y fases relativas de las perturbaciones de los parámetros permiten aumentar o reducir dicha tasa; e incluso en algunas condiciones permiten anularla, frustrando de manera efectiva la generación exponencial de número de fotones. En el caso particular en el que solamente se perturba χ , se producen oscilaciones en el número de fotones, incluso cuando la cavidad se encuentra inicialmente preparada en un estado de vacío. De manera similar, encontramos que al acoplar dos modos distintos en suma ($\Omega = \omega_i + \omega_j$) típicamente se obtiene generación exponencial del número de fotones en ambos modos y con una tasa idéntica. Sin embargo, al variar χ esperamos observar oscilaciones armónicas o batidos (dependiendo de la cantidad de fotones en la cavidad inicialmente). Por último, el

acoplamiento de modos mediante la resta de frecuencias ($\Omega = \omega_i - \omega_j$) no produce fotones en ninguna situación, y solamente si existe inicialmente una diferencia entre los fotones de cada modo se observan oscilaciones armónicas de igual frecuencia.

Para observar más allá de los tiempos de validez del *Multiple Scale Analysis* (MSA), implementamos métodos numéricos para resolver el sistema de ecuaciones acopladas. Comparamos los resultados de las simulaciones numéricas con aquellos esperados del MSA. A tiempos cortos y excitando una cavidad con un espectro no equidistante, observamos una generación exponencial con una tasa idéntica a la predicha por el MSA al perturbar ΔL , L y v . A tiempos largos, encontramos que el número de fotones en los modos resonantes o acoplados caía por debajo de lo esperado por el MSA. Además, se excitaban (no a tiempos iguales) todos los demás modos de la cavidad. Fue posible variar la tasa de generación de fotones perturbando más de un parámetro de la cavidad, logrando incluso frustrar la generación de fotones. Encontramos también que excitar al modo de más baja energía produce típicamente una generación descontrolada de fotones de cualquier frecuencia en la cavidad. Al variar χ en resonancia paramétrica observamos oscilaciones de igual amplitud y frecuencia a las esperadas por el MSA. Por último, al acoplar modos con diferencias de frecuencias, observamos las oscilaciones que predice el MSA, incluso a tiempos largos donde ya no es válida dicha aproximación. En algunos casos, notamos acoplamientos adicionales inesperados (al ser el espectro no equidistante) y pudimos obtener resultados aproximados con el MSA permitiendo algún *detuning* de las condiciones de acoplamiento. Estudiamos, a través de las simulaciones, el efecto del *detuning* en resonancia paramétrica al perturbar ΔL en una región no equidistante del espectro. El número de fotones en función del *detuning* puede describirse por una gaussiana cuyo ancho disminuye al avanzar en el tiempo, hasta alcanzar un valor asintótico; el pico de la gaussiana no está centrado en un *detuning* nulo sino que está corrido aproximadamente un 0.1% de la frecuencia de resonancia esperada (el centro se mantiene constante en el tiempo). Finalmente, estudiamos el número de fotones como función de la amplitud de las perturbaciones en la misma situación y hallamos un excelente acuerdo con lo predicho por el MSA: un cambio en la amplitud de las perturbaciones modifica exponencialmente el número de fotones generados. A tiempos largos, nuevamente encontramos que el MSA predice más fotones que los que se observan numéricamente.

Debido a que es inviable introducir en un experimento osciladores mecánicos como se requiere para una cavidad del orden de 1 cm de longitud, propusimos un circuito superconductor como una alternativa para poder simular cuánticamente en un laboratorio el Efecto Casimir Dinámico. Para poder variar los cuatro parámetros de la cavidad, consideramos dos líneas de transmisión con SQUIDS en sus extremos y acopladas entre sí por otro SQUID. Los SQUIDS laterales permiten variar de manera efectiva la longitud de las cavidades al obtenerse condiciones de contorno análogas. De igual forma, el SQUID central que acopla a las cavidades permite variar lo equivalente a la conductividad eléctrica de una membrana dieléctrica. Para variar χ , sugerimos incorporar dos capacitores variables en paralelo al SQUID central. La sensibilidad de los SQUIDS a los campos magnéticos permite sustituir movimientos mecánicos por cambios en flujos magnéticos.

BASE DE SOLUCIONES ORTONORMALES

Proponemos como solución espacial a la Ecuación (2.4) la función partida:

$$\Phi_n(t, x) = \begin{cases} A_n \sin(k_n(x + L_1)), & -L_1 \leq x \leq 0 \\ B_n \sin(k_n(x - L_2)), & 0 \leq x \leq L_2 \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

donde k_n es el número de onda correspondiente al modo espacial Φ_n , y A_n y B_n son constantes a determinar. Estos tres parámetros están unívocamente definidos por la continuidad del campo en la membrana (Ecuación (2.7)), la normalización ante el producto interno de la Ecuación (2.13), y el salto en la derivada del campo dado por la Ecuación (2.9). La dependencia temporal de las funciones Φ es a través de la dependencia temporal de los parámetros A , B , k , L_1 , L_2 , y el modo se completa con una exponencial compleja:

$$u_n(t, x) = \frac{e^{-i\omega_n t}}{\sqrt{2\omega_n}} \Phi_n(t, x). \quad (\text{A.2})$$

Sustituimos la solución definida en la Ecuación (A.2) en la Ecuación (2.9) (salto en la derivada), y utilizando que $\omega_n = k_n$ obtenemos:

$$\partial_x u_m(t, 0^+) - \partial_x(t, 0^-) = -\chi \omega_m^2 k_n u_m(t, 0) - i\dot{\chi} \omega_m u_m(t, 0) + v u_m(t, 0), \quad (\text{A.3})$$

$$[B_n \cos(k_n L_2) - A_n \cos(k_n L_1)] k_n = -\chi k_n^2 A_n \sin(k_n L_1) - i\dot{\chi} k_n A_n \sin(k_n L_1) + v A_n \sin(k_n L_1). \quad (\text{A.4})$$

A.1. Campo no nulo en la membrana

Si el campo en la membrana es no nulo, entonces:

$$\frac{B_n}{A_n} = -\frac{\sin(k_n L_1)}{\sin(k_n L_2)} \quad (\text{A.5})$$

está bien definido, y queda una ecuación trascendente para los k_n :

$$\left[-\frac{\sin(k_n L_1)}{\sin(k_n L_2)} \cos(k_n L_2) - \cos(k_n L_1) \right] k_n = -\chi k_n^2 \sin(k_n L_1) - i\dot{\chi} k_n \sin(k_n L_1) + v \sin(k_n L_1), \quad (\text{A.6})$$

que ya no depende de A_n , B_n . Dividiendo por $k_n \sin(k_n L_1) \neq 0$ la reescribimos como:

$$\cot(k_n L_2) + \cot(k_n L_1) = \chi k_n + i\dot{\chi} - \frac{v}{k_n} , \quad (\text{A.7})$$

y definiendo $L \equiv L_1 + L_2$, $\Delta L \equiv L_1 - L_2$:

$$\frac{2 \sin(k_n L)}{k_n^2 \chi + i k_n \dot{\chi} - v} k_n = \cos(k_n \Delta L) - \cos(k_n L) . \quad (\text{A.8})$$

Por otro lado, las soluciones quedan:

$$\Phi_n = \frac{1}{N_n} \begin{cases} \sin(k_n(x + L_1)), & -L_1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{\sin(k_n L_1)}{\sin(k_n L_2)} \sin(k_n(x - L_2)), & 0 \leq x \leq L_2 \end{cases} , \quad (\text{A.9})$$

donde definimos $N_n \equiv 1/A_n$. La normalización N_n puede calcularse a partir del producto interno definido en la Ecuación (2.13):

$$N_n^2 = \int_{-L_1}^0 dx \sin^2(k_n(x + L_1)) + \frac{\sin^2(k_n L_1)}{\sin^2(k_n L_2)} \int_0^{L_2} dx \sin^2(k_n(x - L_2)) + \chi \sin^2(k_n L_1) \quad (\text{A.10})$$

$$= \int_0^{L_1} du \sin^2(k_n u) + \frac{\sin^2(k_n L_1)}{\sin^2(k_n L_2)} \int_{-L_2}^0 du \sin^2(k_n u) + \chi \sin^2(k_n L_1) \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n u) \right) \Big|_0^{L_1} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2(k_n L_1)}{\sin^2(k_n L_2)} \left(u - \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n u) \right) \Big|_{-L_2}^0 + \chi \sin^2(k_n L_1) \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{1}{2} \left(L_1 - \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n L_1) \right) + \frac{1}{2} \frac{\sin^2(k_n L_1)}{\sin^2(k_n L_2)} \left(L_2 - \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n L_2) \right) + \chi \sin^2(k_n L_1) \quad (\text{A.13})$$

Debe notarse que el producto interno de la Ecuación (2.13) y, consecuentemente, la normalización que este define son válidos solamente para una cavidad donde $\dot{\chi} = 0$. Esto no rompe la validez de las aproximaciones analíticas discutidas en el Capítulo 4 ni de los métodos numéricos implementados y utilizados en el Capítulo 5, incluso en los casos donde $\dot{\chi} \neq 0$.

A.2. Campo nulo en la membrana

Si en cambio el campo se anula en la membrana, la Ecuación (A.4) se simplifica a:

$$B_n \cos(k_n L_2) - A_n \cos(k_n L_1) = 0 . \quad (\text{A.14})$$

Si el campo se anula porque $A_n = 0$, entonces la única solución no trivial implica $\sin(k_n L_2) = 0$ y entonces:

$$k_n = \frac{n\pi}{L_2}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ . \quad (\text{A.15})$$

Pero luego la Ecuación (A.14) implica que $B_n = 0$, y la solución es la trivial. El otro caso partiendo de $B_n = 0$ es completamente análogo.

Si en cambio el campo se anula porque:

$$\sin(k_n L_1) = \sin(k_n L_2) = 0 , \quad (\text{A.16})$$

entonces los números de onda satisfacen:

$$k_n = \frac{n_1\pi}{L_1} = \frac{n_2\pi}{L_2}; \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+ . \quad (\text{A.17})$$

La relación que impone la Ecuación (A.17) solo puede darse para frecuencias particulares y valores de L_1/L_2 racionales.

En este caso, $A_n = \pm B_n$. El signo no es arbitrario (el salto en la derivada tiene que ser nulo), sino que es el necesario para que la función sea suave. En verdad es:

$$B_n = A_n \frac{\cos(k_n L_1)}{\cos(k_n L_2)} = (-1)^{n_1+n_2} A_n , \quad (\text{A.18})$$

y las autofunciones quedan:

$$\Phi_n = \frac{1}{N_n} \begin{cases} \sin(k_n(x + L_1)), & -L_1 \leq x \leq 0 \\ (-1)^{n_1+n_2} \sin(k_n(x - L_2)), & 0 \leq x \leq L_2 \end{cases} . \quad (\text{A.19})$$

Puede verse que $n_1 + n_2 = k_n L / \pi$. En este caso, la normalización es simplemente:

$$N_n^2 = \frac{1}{2} \left(L_1 - \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n L_1) \right) + \frac{1}{2} \left(L_2 - \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n L_2) \right) + \chi \sin^2(k_n L_1) \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{1}{2} (L_1 + L_2) = \frac{L}{2} , \quad (\text{A.21})$$

que no depende de la frecuencia.

Es importante notar que las soluciones para los números de onda de este caso son soluciones de la Ecuación (A.8). Esto se ve fácil al notar que $k_m L = (n_1 + n_2)\pi$ y que $k_m \Delta L = (n_1 - n_2)\pi$. Luego:

$$\sin(k_m L) = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\cos(k_m \Delta L) = (-1)^{n_1 - n_2}, \quad (\text{A.23})$$

$$\cos(k_m L) = (-1)^{n_1 + n_2} , \quad (\text{A.24})$$

y entonces:

$$\cos(k_m \Delta L) - \cos(k_m L) = (-1)^{n_1 - n_2} - (-1)^{n_1 + n_2} = (-1)^{n_1 - n_2} (1 - (-1)^{2n_2}) = 0 . \quad (\text{A.25})$$

Más aún, la solución en la Ecuación (A.19) puede entenderse como un límite de la solución de la Ecuación (A.9), pero resulta útil su distinción para el posterior tratamiento numérico.

DERIVADAS DE LAS AUTOFRECUENCIAS k_n

Para computar los coeficientes de la Ecuación (2.37), necesitamos conocer las derivadas de las autofrecuencias respecto a cada uno de los parámetros de la cavidad que aparecen en la Ecuación (2.36). Podemos escribir la ecuación trascendente dinámica de la cavidad doble definiendo una nueva función, F :

$$F(k_n, L, \Delta L, \chi, v, \dot{\chi}) \equiv \frac{2 \sin(k_n L)}{k_n^2 \chi + i k_n \dot{\chi} - v} k_n - \cos(k_n \Delta L) + \cos(k_n L) = 0 . \quad (\text{B.1})$$

La definición de F como en la Ecuación (B.1) permite calcular las derivadas a partir del Teorema de la Función Implícita, pensando a cada parámetro como independiente de los demás. El Teorema de la Función Implícita nos dice que:

$$\frac{\partial k_n}{\partial r} = - \frac{\partial F}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial k_n} \right)^{-1} , \quad (\text{B.2})$$

donde r es cualquiera de los cinco parámetros de la cavidad $L, \Delta L, \chi, \dot{\chi}, v$. Entonces para tener las cinco derivadas de k_n respecto a cada parámetro r es necesario calcular las seis derivadas parciales de F . Estas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial k_n} &= \Delta L \sin(k_n \Delta L) - L \sin(k_n L) + \frac{2 \sin(k_n L) + 2L \cos(k_n L) k_n}{k_n^2 \chi + i k_n \dot{\chi} - v} \\ &\quad - \frac{2 \sin(k_n L) k_n}{(k_n^2 \chi + i k_n \dot{\chi} - v)^2} (2k_n \chi + i \dot{\chi}) , \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{2k_n^2 \cos(k_n L)}{k_n^2 \chi + i k_n \dot{\chi} - v} - k_n \sin(k_n L) , \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta L} = k_n \sin(k_n \Delta L) , \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = - \frac{2 \sin(k_n L) k_n^3}{(k_n^2 \chi + i k_n \dot{\chi} - v)^2} , \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{2 \sin(k_n L) k_n}{(k_n^2 \chi + i k_n \dot{\chi} - v)^2} , \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\chi}} = -i \frac{2 \sin(k_n L) k_n^2}{(k_n^2 \chi + i k_n \dot{\chi} - v)^2} . \quad (\text{B.8})$$

Teniendo las Ecuaciones (B.3) a (B.8) basta reemplazarlas en la Ecuación (B.2) para obtener las derivadas de las autofrecuencias.

En particular, es interesante la similitud en las expresiones de las Ecuaciones (B.6) a (B.8). La Ecuación (B.2) nos permite escribir:

$$\frac{(\partial_\chi k_n)}{(\partial_{\dot{\chi}} k_n)} = -i k_n , \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{(\partial_\chi k_n)}{(\partial_v k_n)} = -k_n^2 , \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{(\partial_{\dot{\chi}} k_n)}{(\partial_v k_n)} = -i k_n . \quad (\text{B.11})$$

PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES

β_{nl}

Consideremos la definición del parámetro $\beta_{nl}^{(r)}$ dado por la Ecuación (2.40). Supongamos que r es alguno de los parámetros $L, \Delta L, v$. Entonces usando la definición del producto interno de la Ecuación (2.13) podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 \beta_{nl}^{(r)} = (\partial_r \Phi_n, \Phi_l) &= \int_{-L_1}^{L_2} dx (\partial_r \Phi_n(x)) \Phi_l(x) (1 + \delta(x)\chi) \\
 &= \int_{-L_1}^{L_2} dx [\partial_r (\Phi_n(x)\Phi_l(x)) - \Phi_n(x)(\partial_r \Phi_l(x))] (1 + \delta(x)\chi) \\
 &= -\beta_{ln}^{(r)} + \int_{-L_1}^{L_2} dx \partial_r (\Phi_n(x)\Phi_l(x)) (1 + \delta(x)\chi) \\
 &= -\beta_{ln}^{(r)} + \int_{-L_1}^{L_2} dx \partial_r (\Phi_n(x)\Phi_l(x) (1 + \delta(x)\chi)) . \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

Para sacar la derivada fuera de la integral de la Ecuación (C.1) tenemos que usar la regla de Leibniz para derivar bajo el símbolo integral, que nos permite escribir:

$$\begin{aligned}
 \int_{-L_1}^{L_2} dx \partial_r (\Phi_n(x)\Phi_l(x) (1 + \delta(x)\chi)) &= \partial_r \int_{-L_1}^{L_2} dx \Phi_n(x)\Phi_l(x) (1 + \delta(x)\chi) \\
 &\quad - \Phi_n(-L_1)\Phi_l(-L_1) (1 + \delta(-L_1)\chi) \partial_r(-L_1) \\
 &\quad + \Phi_n(L_2)\Phi_l(L_2) (1 + \delta(L_2)\chi) \partial_r L_2 . \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

El primer renglón de la Ecuación (C.2) es $\partial_r (\Phi_n, \Phi_l) = 0$ por la ortonormalidad de las funciones Φ . Por otro lado, los otros dos renglones también se anulan debido a la condición de contorno en los espejos conductores de las Ecuaciones (2.5) y (2.6). Luego el lado derecho de la Ecuación (C.2) es cero y entonces la Ecuación (C.1) se simplifica a:

$$\beta_{nl}^{(r)} = -\beta_{ln}^{(r)} , \tag{C.3}$$

para $r = L, \Delta L, v$.

Para $r = \chi$ hacemos un procedimiento análogo, pero teniendo cuidado con el término

de la permitividad que está presente en la definición del producto interno:

$$\begin{aligned}
\beta_{nl}^{(\chi)} &= \int_{-L_1}^{L_2} dx (\partial_\chi \Phi_n(x)) \Phi_l(x) (1 + \delta(x)\chi) \\
&= \int_{-L_1}^{L_2} dx [\partial_\chi (\Phi_n(x) \Phi_l(x) (1 + \delta(x)\chi)) - \Phi_n(x) (\partial_\chi \Phi_l(x)) (1 + \delta(x)\chi) - \delta(x) \Phi_n(x) \Phi_l(x)] \\
&= \int_{-L_1}^{L_2} dx \partial_\chi [\Phi_n(x) \Phi_l(x) (1 + \delta(x)\chi)] - \beta_{ln}^{(\chi)} - \Phi_n(0) \Phi_l(0) \\
&= -\beta_{ln}^{(\chi)} - \Phi_n(0) \Phi_l(0) .
\end{aligned} \tag{C.4}$$

En la tercera línea usamos la regla de Leibniz para ver que la primera integral es cero, y la definición del producto interno. Definiendo

$$\sigma_{nl} \equiv \Phi_n(0) \Phi_l(0) \tag{C.5}$$

puede reescribirse el cambio ante permutación de índices para el coeficiente $\beta_{nl}^{(\chi)}$:

$$\beta_{nl}^{(\chi)} = -\beta_{ln}^{(\chi)} - \sigma_{nl} . \tag{C.6}$$

Notemos que σ_{nl} es simétrico ante permutación de índices y entonces satisface $\sigma_{nl} = \sigma_{ln}$.

La acción de la permutación de índices del último coeficiente, asociado a $\dot{\chi}$, la podemos calcular a partir de la razón entre derivadas de las autofrecuencias dada por la Ecuación (B.9). Como la única dependencia de $\dot{\chi}$ de las autofunciones es a través de las autofrecuencias y la normalización N , y usando la Ecuación (4.16):

$$\begin{aligned}
\beta_{nl}^{(\dot{\chi})} &= (\partial_{\dot{\chi}} \Phi_n, \Phi_l) \\
&= ((\partial_{\dot{\chi}} k_n) \partial_{k_n} \Phi_n - (\partial_{\dot{\chi}} N_n^2) \Phi_n / (2N_n^2), \Phi_l) \\
&= (\eta_n^{(\dot{\chi})} \partial_{k_n} \Phi_n + \nu_n \Phi_n, \Phi_l) \\
&= \eta_n^{(\dot{\chi})} (\partial_{k_n} \Phi_n, \Phi_l) + \nu_n (\Phi_n, \Phi_l) \\
&= \eta_n^{(\dot{\chi})} (\partial_{k_n} \Phi_n, \Phi_l) + \nu_n \delta_{nl} ,
\end{aligned} \tag{C.7}$$

donde se definió

$$\nu_n \equiv -\frac{\partial_{\dot{\chi}} N_n^2}{2N_n^2} . \tag{C.8}$$

De manera análoga a la Ecuación (C.7), podemos desarrollar los coeficientes $\beta_{nl}^{(v)}$ y $\beta_{nl}^{(\dot{\chi})}$ para obtener en el caso $n \neq l$:

$$\frac{\beta_{nl}^{(\chi)}}{\beta_{nl}^{(\dot{\chi})}} = -ik_n, \tag{C.9}$$

$$\frac{\beta_{nl}^{(\chi)}}{\beta_{nl}^{(v)}} = -k_n^2, \tag{C.10}$$

$$\frac{\beta_{nl}^{(\dot{\chi})}}{\beta_{nl}^{(v)}} = -ik_n, \tag{C.11}$$

donde usamos las Ecuaciones (B.10) y (B.11) para escribir las razones entre los coeficientes η .

Usando las Ecuaciones (C.3), (C.6) y (C.10) podemos encontrar una expresión analítica simple para $\beta_{nl}^{(v)}$:

$$\begin{aligned} -k_n^2 \beta_{nl}^{(v)} &= k_l^2 \beta_{ln}^{(v)} - \sigma_{nl}, \\ -k_n^2 \beta_{nl}^{(v)} &= -k_l^2 \beta_{nl}^{(v)} - \sigma_{nl}, \\ \beta_{nl}^{(v)} &= \frac{\sigma_{nl}}{k_n^2 - k_l^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

válida solamente para $n \neq l$.

Por otro lado, reemplazando la Ecuación (C.12) en la Ecuación (C.10) podemos escribir los términos no diagonales de β_{nl}^χ como:

$$\beta_{nl}^{(\chi)} = \frac{k_n^2 \sigma_{nl}}{k_l^2 - k_n^2}. \quad (\text{C.13})$$

De manera completamente análoga, usando la Ecuación (C.9) podemos escribir:

$$\beta_{nl}^{(\dot{\chi})} = \frac{ik_n \sigma_{nl}}{k_l^2 - k_n^2}. \quad (\text{C.14})$$

En conclusión, respecto al intercambio de subíndices en los coeficientes β_{nl} podemos escribir para $n \neq l$:

$$\beta_{nl}^{(r)} = \begin{cases} -\beta_{ln}^{(r)}, & r = L, \Delta L, v \\ -\beta_{ln}^{(r)} \frac{k_n^2}{k_l^2}, & r = \chi \\ -\beta_{ln}^{(r)} \frac{k_n}{k_l}, & r = \dot{\chi} \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Podemos estudiar por separado los términos diagonales $\beta_{nn}^{(r)}$. La Ecuación (C.15) anula los términos diagonales para $r = L, \Delta L, v$ al imponer $\beta_{nn}^{(r)} = -\beta_{nn}^{(r)}$. Por otro lado, la Ecuación (C.15) presenta una forma sencilla de calcular $\beta_{nn}^{(r)}$ para $r = \chi$:

$$\beta_{nn}^{(\chi)} = -\frac{\sigma_{nn}}{2} = -\frac{\Phi_n(0)^2}{2}. \quad (\text{C.16})$$

La existencia de coeficientes diagonales no nulos agrega un término de auto-acoplamiento adicional en resonancia paramétrica a las ecuaciones que resultan de la aproximación del Multiple Scale Analysis del Capítulo 4.

Resulta importante para predecir el comportamiento del sistema conocer los coeficientes η y β . Para ello, graficamos dichos coeficientes para tres configuraciones distintas: una cavidad perfectamente simétrica, una cavidad ligeramente asimétrica ($\Delta L/L = 0.05$), y una cavidad fuertemente asimétrica ($\Delta L/L = 0.60$).

Las Figuras C.1, C.3, y C.5 muestran que las perturbaciones con más impacto en el comportamiento del sistema son en L y ΔL . Las menos importantes, al menos para la configuración elegida, son en v . Como muestran las Figuras C.1 y C.3, los coeficientes $\beta_{nl}^{(r)}$ son mayores (en valor absoluto) para $r = \chi, v$ cuando la cavidad no es muy asimétrica.

Además, son mayores para los modos de energía más baja. En el caso de L y ΔL , los coeficientes $\beta_{nl}^{(r)}$ permanecen del mismo orden para todos los acoplamientos considerados.

Un comportamiento similar puede observarse en las Figuras C.2, C.4, y C.6: para $r = \chi, v$; $|\eta_n^{(r)}|$ tiende a disminuir al aumentar n . Además, como es esperable por la Ecuación (B.10), η_n^v es de signo opuesto a η_n^χ y cada vez más pequeño (decae como k_n^{-2}). Respecto a los coeficientes $\eta_n^{(L)}$, vemos que en cavidades simétricas o levemente asimétricas tiende a aumentar (en valor absoluto) al aumentar n . Es decir, los niveles de energía se modifican más con una perturbación en L mientras más altos sean. Además, siempre se obtiene $\eta_n^{(L)} < 0$. Esto no es particular de la configuración elegida, sino que vale para cualquier configuración arbitraria: aumentar L agranda la cavidad, bajando así los niveles de energía.

Los coeficientes $\eta_n^{(\Delta L)}$ tienen un comportamiento marcadamente distinto. Como muestra la Figura C.2, son todos nulos en una cavidad perfectamente simétrica. Perturbar ΔL en una cavidad simétrica es excitar un modo *shaker*, y que $\eta = 0$ nos indica, como se discutirá en la siguiente sección, que no pueden generarse fotones bajo la condición de resonancia paramétrica perturbando ΔL (solo si la cavidad es simétrica). En la Figura C.4 vemos que al perder la simetría de la cavidad, inmediatamente los coeficientes $\eta_n^{(\Delta L)}$ toman valores no nulos. Además, vemos que se intercalan valores negativos y positivos de $\eta_n^{(\Delta L)}$ (excluyendo $n = 0, 1$). Esto tiene que ver con la localización de las autofunciones a un lado u otro de la cavidad: al aumentar ligeramente ΔL (aumentar L_1 y reducir L_2), los modos localizados en L_1 disminuyen su energía ($\eta_n^{(\Delta L)} < 0$) y los localizados en L_2 la aumentan ($\eta_n^{(\Delta L)} > 0$). Los modos con $n = 0, 1$ no están localizados, como mostramos en la Figura 3.8. Por último, en la Figura C.6 ocurre algo similar, pero los signos de los coeficientes ya no están intercalados al no intercalarse la localización de las autofunciones en cavidades muy asimétricas como la de la Figura 3.10.

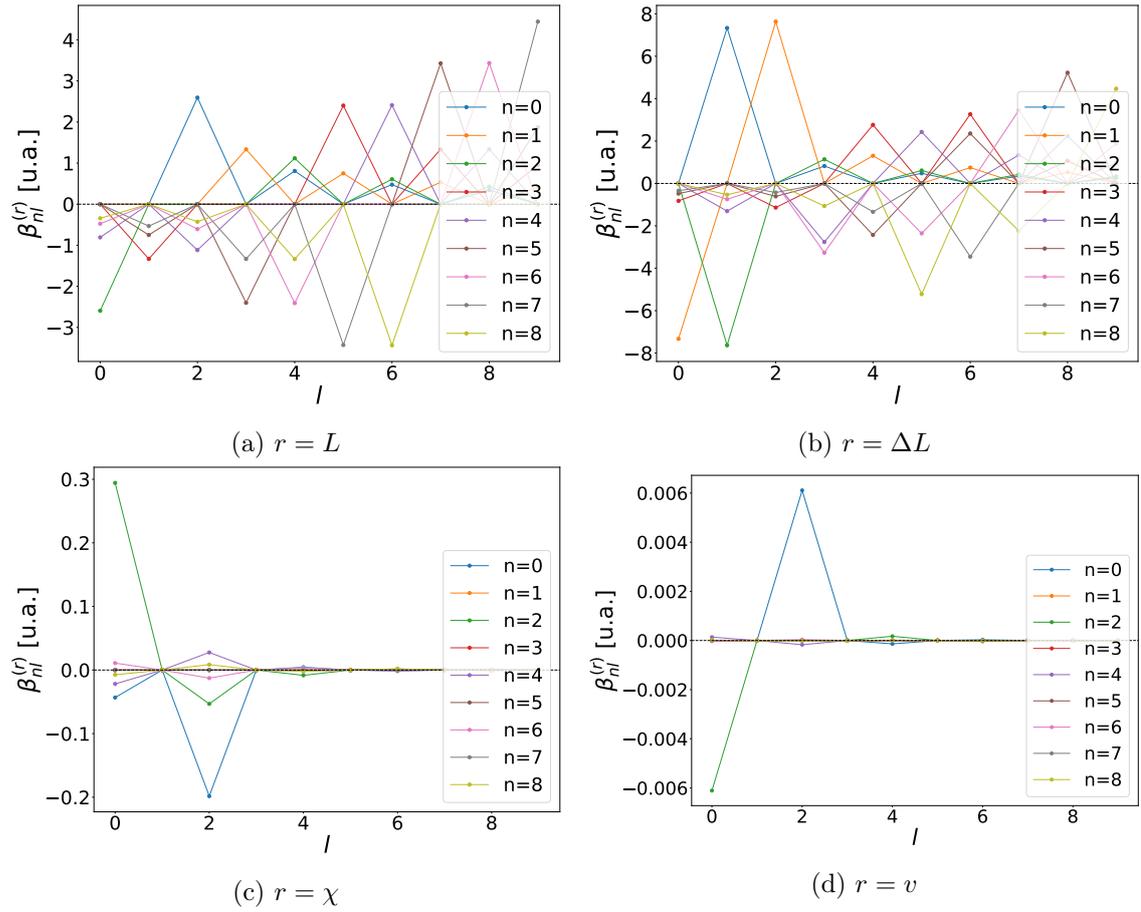


Figura C.1. Coeficientes de acoplamiento $\beta_{nl}^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad perfectamente simétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$.

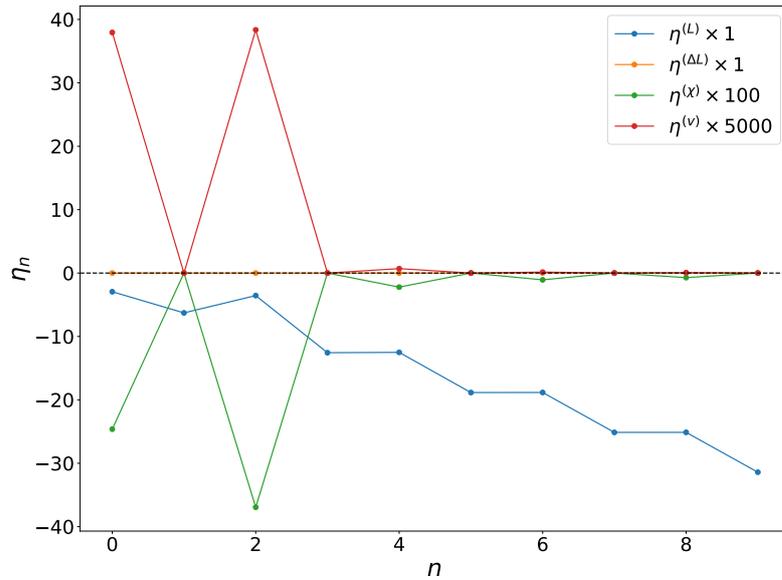


Figura C.2. Coeficientes de acoplamiento $\eta_n^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad perfectamente simétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$. Los coeficientes asociados a los parámetros χ y v son varios órdenes de magnitud más pequeños, y se muestran multiplicados por un factor de 100 y 5000, respectivamente.

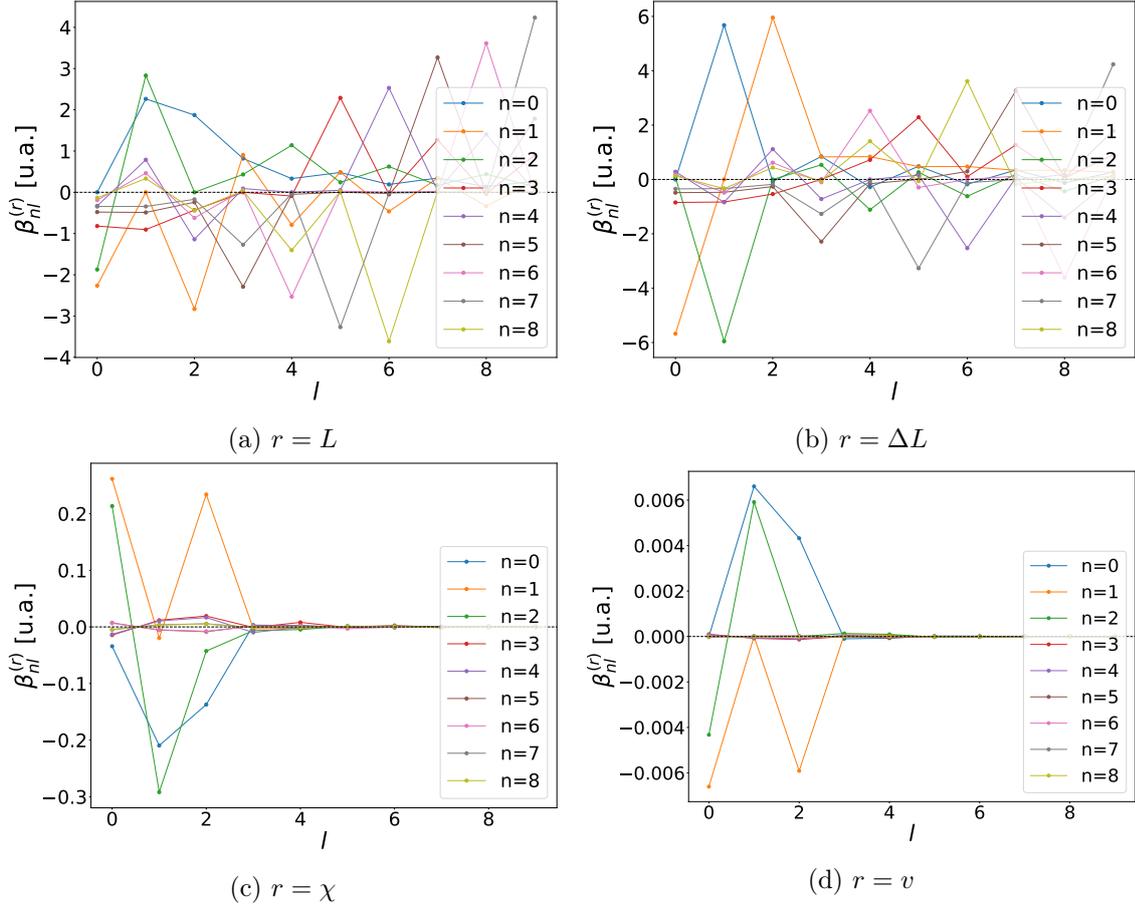


Figura C.3. Coeficientes de acoplamiento $\beta_{nl}^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad ligeramente asimétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$.

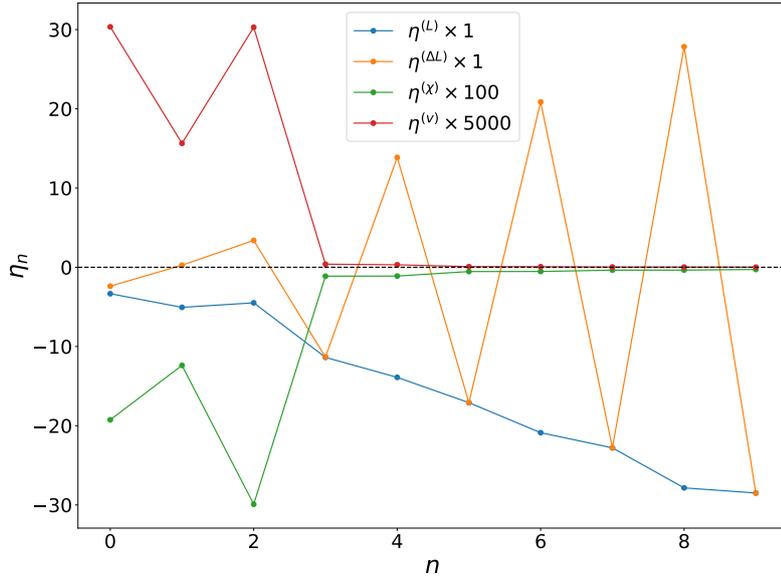


Figura C.4. Coeficientes de acoplamiento $\eta_n^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad ligeramente asimétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0.05$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$. Los coeficientes asociados a los parámetros χ y v son varios órdenes de magnitud más pequeños, y se muestran multiplicados por un factor de 100 y 5000, respectivamente.

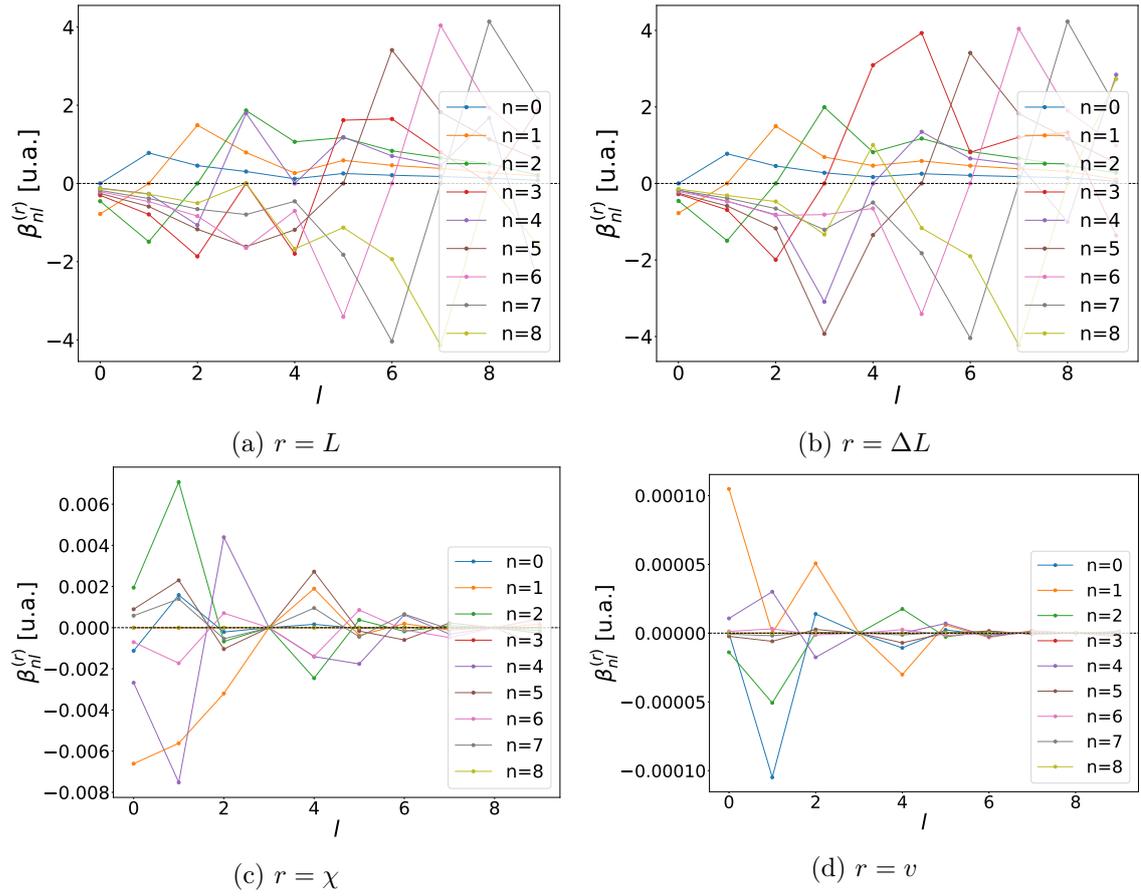


Figura C.5. Coeficientes de acoplamiento $\beta_{nl}^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad fuertemente asimétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0.60$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$.

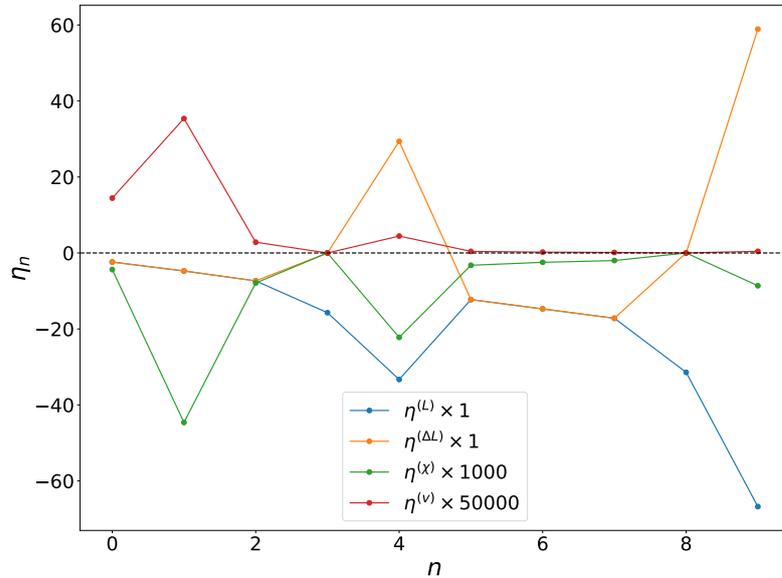


Figura C.6. Coeficientes de acoplamiento $\eta_n^{(r)}$ para los primeros 10 modos de una cavidad fuertemente asimétrica, con $L = 1$, $\Delta L/L = 0.60$, $\chi/L = 5$, $vL = 200$. Los coeficientes asociados a los parámetros χ y v son varios órdenes de magnitud más pequeños, y se muestran multiplicados por un factor de 1000 y 50000, respectivamente.

Referencias

- [1] Gerald T. Moore. Quantum Theory of the Electromagnetic Field in a Variable-Length One-Dimensional Cavity. Journal of Mathematical Physics, 11(9):2679–2691, 10 2003.
- [2] Hendrick BG Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. In Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., volume 51, page 793, 1948.
- [3] Steven K Lamoreaux. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μm range. Physical Review Letters, 78(1):5, 1997.
- [4] CI Sukenik, MG Boshier, Donghyun Cho, Vahid Sandoghdar, and EA Hinds. Measurement of the casimir-polder force. Physical review letters, 70(5):560, 1993.
- [5] V. V. Dodonov and A. B. Klimov. Generation and detection of photons in a cavity with a resonantly oscillating boundary. Phys. Rev. A, 53:2664–2682, Apr 1996.
- [6] Günter Plunien, Ralf Schützhold, and Gerhard Soff. Dynamical casimir effect at finite temperature. Physical review letters, 84(9):1882, 2000.
- [7] Martin Croce, Diego AR Dalvit, and Francisco D Mazzitelli. Resonant photon creation in a three-dimensional oscillating cavity. Physical Review A, 64(1):013808, 2001.
- [8] Bryce S DeWitt. Quantum field theory in curved spacetime. Physics Reports, 19(6):295–357, 1975.
- [9] Stephen A Fulling and Paul CW Davies. Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: conformal anomaly. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 348(1654):393–414, 1976.
- [10] J Robert Johansson, Göran Johansson, CM Wilson, and Franco Nori. Dynamical casimir effect in a superconducting coplanar waveguide. Physical review letters, 103(14):147003, 2009.
- [11] Waltraut Wustmann and Vitaly Shumeiko. Parametric resonance in tunable superconducting cavities. Physical Review B, 87(18):184501, 2013.
- [12] Christopher M Wilson, Göran Johansson, Arsalan Pourkabirian, Michael Simoen, J Robert Johansson, Tim Duty, Franco Nori, and Per Delsing. Observation of the dynamical casimir effect in a superconducting circuit. nature, 479(7373):376–379, 2011.

- [13] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. Physics Letters, 1(7):251–253, 1962.
- [14] Cruz I Velasco, Nicolás F Del Grosso, Fernando C Lombardo, Alejandro Soba, and Paula I Villar. Photon generation and entanglement in a double superconducting cavity. Physical Review A, 106(4):043701, 2022.
- [15] Stephen J Summers and Reinhard Werner. Maximal violation of bell’s inequalities is generic in quantum field theory. Communications in Mathematical Physics, 110:247–259, 1987.
- [16] Eric G Brown, Marco del Rey, Hans Westman, Juan León, and Andrzej Dragan. What does it mean for half of an empty cavity to be full? Physical Review D, 91(1):016005, 2015.
- [17] MA Andreatta and VV Dodonov. Dynamics of entanglement between field modes in a one-dimensional cavity with a vibrating boundary. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 7(3):S11, 2005.
- [18] Nicolás F. Del Grosso, Fernando C. Lombardo, and Paula I. Villar. Entanglement degradation of cavity modes due to the dynamical casimir effect. Phys. Rev. D, 102:125008, Dec 2020.
- [19] César D. Fosco, Fernando C. Lombardo, and Francisco D. Mazzitelli. Vacuum fluctuations and generalized boundary conditions. Phys. Rev. D, 87:105008, May 2013.
- [20] Michael E Peskin. An introduction to quantum field theory. CRC press, 2018.
- [21] N. Miladinovic, F. Hasan, N. Chisholm, I. E. Linnington, E. A. Hinds, and D. H. J. O’Dell. Adiabatic transfer of light in a double cavity and the optical landau-zener problem. Phys. Rev. A, 84:043822, Oct 2011.
- [22] CK Law. Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A hamiltonian formulation. Physical Review A, 51(3):2537, 1995.
- [23] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1982.
- [24] Martín Crocce, Diego AR Dalvit, and Francisco D Mazzitelli. Quantum electromagnetic field in a three-dimensional oscillating cavity. Physical Review A, 66(3):033811, 2002.
- [25] Martín Crocce, Diego AR Dalvit, Fernando C Lombardo, and Francisco D Mazzitelli. Model for resonant photon creation in a cavity with time-dependent conductivity. Physical Review A, 70(3):033811, 2004.
- [26] Fernando Cesar Lombardo, Francisco Diego Mazzitelli, Alejandro Soba, and Paula Ines Villar. Dynamical casimir effect in superconducting circuits: A numerical approach. Physical Review A, 93(3):032501, 2016.

- [27] MR Setare and HT Dinani. Particle creation in oscillating cavities with cubic and cylindrical geometry. Acta Physica Polonica B, 39(4), 2008.
- [28] Cem Yuce and Zalihe Ozcakmakli. The dynamical casimir effect for two oscillating mirrors in 3d. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41(26):265401, 2008.
- [29] Carl M Bender and Steven A Orszag. Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory, volume 1. Springer Science & Business Media, 1999.
- [30] Diego AR Dalvit and Francisco D Mazzitelli. Creation of photons in an oscillating cavity with two moving mirrors. Physical Review A, 59(4):3049, 1999.
- [31] Paula I Villar and Alejandro Soba. Adaptive numerical algorithms to simulate the dynamical casimir effect in a closed cavity with different boundary conditions. Physical Review E, 96(1):013307, 2017.
- [32] Fernando Cesar Lombardo, Francisco Diego Mazzitelli, Alejandro Soba, and Paula Ines Villar. Dynamical casimir effect in a double tunable superconducting circuit. Physical Review A, 98(2):022512, 2018.
- [33] Paula I Villar, Alejandro Soba, and Fernando C Lombardo. Numerical approach to simulating interference phenomena in a cavity with two oscillating mirrors. Physical Review A, 95(3):032115, 2017.
- [34] Nicolás F. Del Grosso, Fernando C. Lombardo, and Paula I. Villar. Photon generation via the dynamical casimir effect in an optomechanical cavity as a closed quantum system. Phys. Rev. A, 100:062516, Dec 2019.
- [35] Gernot Schaller, Ralf Schützhold, Günter Plunien, and Gerhard Soff. Dynamical casimir effect in a leaky cavity at finite temperature. Physical Review A, 66(2):023812, 2002.
- [36] Woo-Joong Kim, James Hayden Brownell, and Roberto Onofrio. Detectability of dissipative motion in quantum vacuum via superradiance. Physical review letters, 96(20):200402, 2006.
- [37] Astrid Lambrecht, Marc-Thierry Jaekel, and Serge Reynaud. Motion induced radiation from a vibrating cavity. Physical review letters, 77(4):615, 1996.
- [38] E Sassaroli, YN Srivastava, and A Widom. Photon production by the dynamical casimir effect. Physical Review A, 50(2):1027, 1994.
- [39] PD Nation, JR Johansson, MP Blencowe, and Franco Nori. Colloquium: Stimulating uncertainty: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits. Reviews of Modern Physics, 84(1):1, 2012.

- [40] Yurii E Lozovik, VG Tsvetus, and EA Vinogradov. Parametric excitation of vacuum by use of femtosecond laser pulses. Physica Scripta, 52(2):184, 1995.
- [41] Michael Uhlmann, Günter Plunien, Ralf Schützhold, and Gerhard Soff. Resonant cavity photon creation via the dynamical casimir effect. Physical review letters, 93(19):193601, 2004.
- [42] JR Johansson, Göran Johansson, CM Wilson, Per Delsing, and Franco Nori. Non-classical microwave radiation from the dynamical casimir effect. Physical Review A, 87(4):043804, 2013.
- [43] JR Johansson, Göran Johansson, CM Wilson, and Franco Nori. Dynamical casimir effect in superconducting microwave circuits. Physical Review A, 82(5):052509, 2010.
- [44] C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, C. Del Noce, G. Galeazzi, A. Lombardi, A. Palmieri, G. Ruoso, and D. Zanello. A novel experimental approach for the detection of the dynamical casimir effect. Europhysics Letters, 70(6):754, may 2005.
- [45] Eran Segev, Baleegh Abdo, Oleg Shtempluck, Eyal Buks, and Bernard Yurke. Prospects of employing superconducting stripline resonators for studying the dynamical casimir effect experimentally. Physics Letters A, 370(3):202–206, 2007.
- [46] Juan José García Ripoll. Quantum information and quantum optics with superconducting circuits. Quantum Information and Quantum Optics with Superconducting Circuits, 2022.
- [47] Chirag D. Patel and Gabriel M. Rebeiz. High- q 3 b/4 b rf mems digitally tunable capacitors for 0.8–3 ghz applications. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 22(8):394–396, 2012.
- [48] R.-P. Riwar. Discrete control of capacitance in quantum circuits. arxiv, Jun 2023.
- [49] R.-P. Riwar and D. P. DiVincenzo. Circuit quantization with time-dependent magnetic fields for realistic geometries. npj Quantum Information, 8, Mar 2022.



Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2023